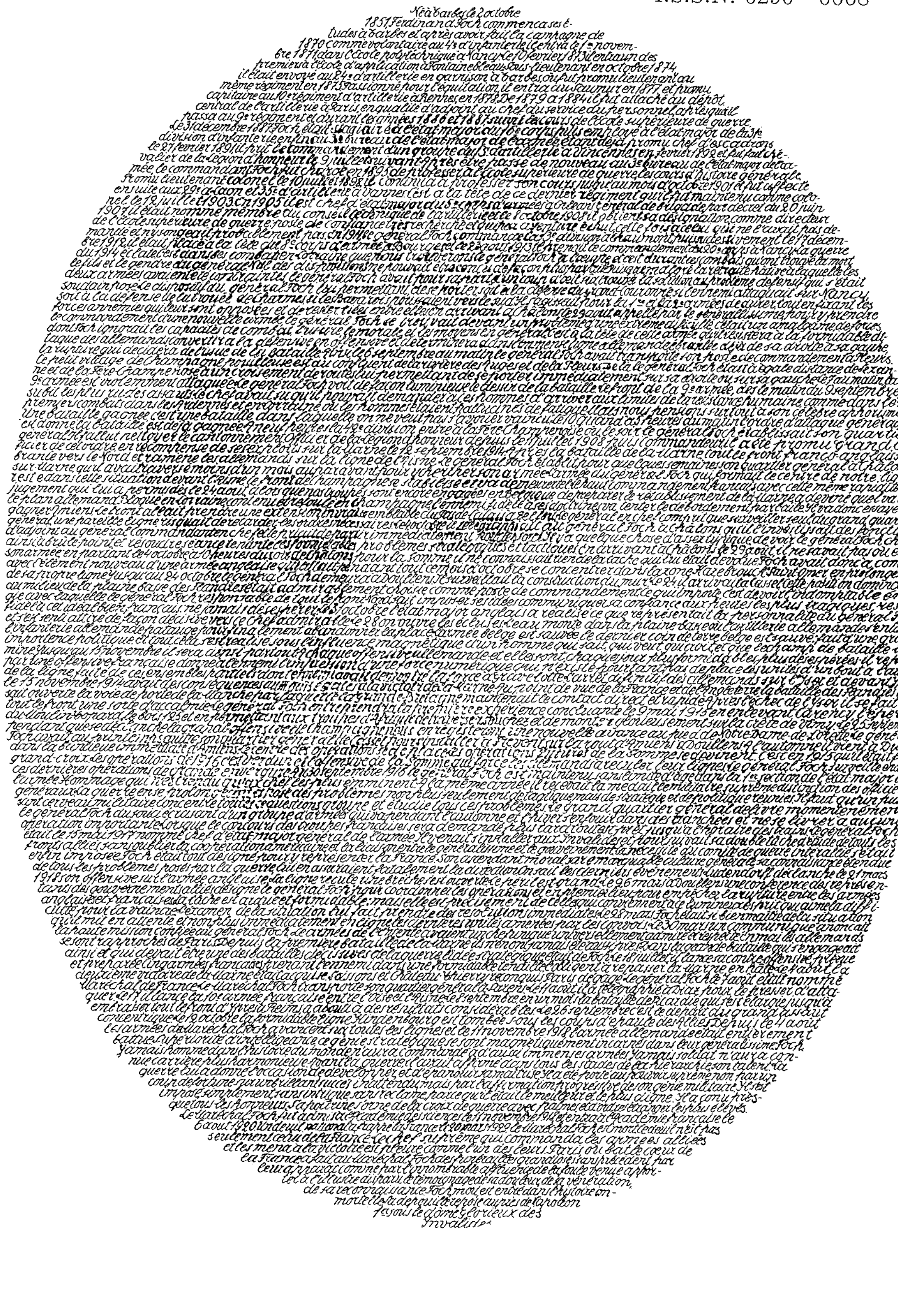
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

n° 64 – SEPTEMBRE 1991

I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE : Portrait du Maréchal FOCH

Portrait du Maréchal FOCH par Georges TCHERUKINE (1930). Le texte retrace les principaux épisodes de la carrière du chef militaire.

La vogue des portraits exécutés en écriture est vieille de plusieurs siècles. L'avènement des ordinateurs a renouvelé cette technique. Mais si le traitement des gris par superposition de différents caractères est beaucoup plus facile on y perd la double lecture, portrait et biographie, pour ne conserver que le portrait.

SÉLECTION ET ÉGALITÉ DES CHANCES

Le concours général est-il démocratique? Question de peu d'importance car s'il reste une institution prestigieuse au sein de notre enseignement, ce n'est quand même qu'une institution marginale : il a concerné un peu plus de 10 000 candidats pour une population de première et terminale d'environ un million d'élèves.

C'est pourtant souvent l'observation des marges qui renseigne le mieux sur le fonctionnement d'un système éducatif. Que le concours général soit sélectif, nul n'en disconvient et comme c'est une sélection positive nul ne s'en plaint. Mais qui sélectionne-t-on, et que sélectionne-t-on ? A voir les noms : Sanaa Bennani en arabe, Julia Stewart en anglais, Ilka Lohmaier en Allemand, Léna Sentchenkova en russe, Miriam Thomas Medeiros en portugais, Francesca Dellacasa en italien, Carmen Venegas Grau en espagnol. A voir les lieux : Rabat, Montréal, Munich, Meudon (!), Lisbonne, St Germain (Lycée International), Valence (Espagne) . . . on est tout étonné de ne pas trouver comme prix de mathématiques un certain Bourbaki du lycée d'Orsay!

Finalement, sous couvert d'égalité des chances, on ne fait que sélectionner une culture. Le rôle de la famille apparaît comme primordial, le lycée ne permettant que de valoriser cette culture familiale. En est-il différemment dans l'enseignement quotidien? J'en doute comme je doute que les réformes en cours permettent d'améliorer, vers plus d'égalité, le système actuel. Diminuer les heures d'enseignement, c'est favoriser ceux et celles qui trouveront dans le cadre de leur famille les "*répétiteurs*" dont l'Education Nationale aura fait l'économie.

J. LEFORT.

SOMMAIRE

N° 64 – SEPTEMBRE 1991

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 25.– F

RACINE CUBIQUE

Extrait du "Memento LAROUSSE", 1933

Définition. Rappelons que le *cube* d'un nombre est la troisième puissance de ce nombre, c'est-à-dire le produit de trois facteurs égaux à ce nombre.
La troisième puissance d'un nombre s'indique par l'exposant 3.
Ainsi $5^3 = 125$; $1,5^3 = 3,375$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$.
Comment se compose le cube d'un nombre ?
Le cube d'un nombre composé de dizaines et d'unités renferme quatre parties.
Soit le cube de 62 ou $62 \times 62 \times 62 = 238328$.

1ère partie.—	Cube des dizaines	$60 \times 60 \times 60$	=	216000
2ème partie.—	Le triple produit du carré des dizaines par les unités	$60 \times 60 \times 2 \times 3$	=	21600
3ème partie.—	Le triple produit des dizaines par le carré des unités	$60 \times 2 \times 2 \times 3$	=	720
4ème partie.—	Le cube des unités	$2 \times 2 \times 2$	=	8
				238328

Extraction de la racine cubique

Définition. On appelle racine cubique d'un nombre le nombre qui, élevé au cube, reproduit le nombre proposé.
Racines cubiques

des 10 1ères N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
leurs cubes	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

En consultant ce tableau on voit : *1° que les racines cubiques des nombres inférieurs à 1000 n'ont qu'un seul chiffre ; 2° que ces racines cubiques s'obtiennent par la connaissance des cubes des neuf premiers nombres.*
Ainsi, 540 étant compris entre les cubes 512 et 729, dont la racine est 8 et 9, la racine cubique de 540 sera 8, à une unité près.

Racine cubique des nombres entiers

Soit à extraire la racine cubique de 238.328.
Explication. Le nombre 238.328 a deux tranches de trois chiffres; il y aura donc deux chiffres à la racine, car *il y a autant de chiffres à la racine qu'il y a, dans le nombre, de tranches de trois chiffres*; la dernière à gauche pouvant n'être que d'un ou deux chiffres.

Ces deux chiffres de la racine seront des dizaines et des unités.
Or, le cube des dizaines de la racine ne peut se trouver que dans les 1000 du nombre. Le plus grand cube contenu dans 238 est 216, dont la racine des 6.
J'écris 6 dans l'angle supérieur, à droite.
Puis je retranche de 238 le cube de 6, qui est 216. J'obtiens 22 pour reste.
A côté du reste 22, j'abaisse la seconde tranche ; ce qui me donne le nombre 22.328.
Le nombre 22.328 étant ainsi formé, contient : 1° *le triple produit du carré des dizaines de la racine par les unités* ; 2° *le triple produit des dizaines par le carré des unités* ; 3° *le cube des unités.*
Je forme le triple produit du carré de la racine $(6 \times 6 \times 3) = 108$, que j'écris à la place qu'occuperait un quotient.

```
238.3 28 | 6.2                62
216      |----                62
-------- | 108             ------
 22 3 28 |                   124
238 3 28                     372
238 3 28                   ------
--------                    3844
       0                      62
                           ------
                            7688
                           23064
                           ------
                          238328
```

Mais le produit de 108 centaines par les unités de la racine ne peut se trouver que dans les centaines de 22328, puisque 223 contient 2 fois le nombre 108. J'en conclus que **2** est le chiffre des unités de la racine.
Je vérifie en élevant au cube le nombre formé par les deux chiffres trouvés à la racine. Si je puis retrancher ce cube du nombre proposé (238328), c'est que 2 est bien le chiffre des unités de la racine.
En effet : $62 \times 62 \times 62 = 238328$.
Donc :

$$\sqrt[3]{238328} = 62.$$

Pour les nombres ayant plus de deux tranches, on opère sur les deux premières tranches à gauche, comme pour les tranches de deux chiffres. Les deux premiers chiffres de la racine ayant été obtenus, on abaisse la troisième tranche à côté de la différence entre le cube de la racine trouvée et le nombre formé par les deux premières tranches ; puis on opère comme s'il s'agissait d'un nombre de deux tranches, et ainsi de suite jusqu'à *extinction des tranches.*

Règle générale. Pour extraire, à moins d'une unité près, la racine cubique d'un nombre entier supérieur à 1000, on partage ce nombre, de droite à gauche, en tranches de trois chiffres. La dernière tranche peut n'en contenir qu'un ou deux. C'est le nombre des tranches qui indique le nombre des chiffres de la racine.
Le premier chiffre de la racine cherchée est la racine de la première tranche à gauche. On fait le cube du premier chiffre et on soustrait ce cube de la première tranche. Cela étant fait, à la droite du reste on abaisse la tranche suivante et l'on divise les centaines du résultat par le triple carré du premier chiffre de la racine.
Le quotient est le second chiffre de la racine. Il se pourrait que ce chiffre fût trop fort.

Pour vérifier ce chiffre de la racine, on fait le cube de la racine déjà trouvée, et l'on cherche si ce cube peut se retrancher de la partie déjà employée du nombre. Si la soustraction est impossible, on diminue ce second chiffre d'une ou deux unités, jusqu'à ce qu'elle devienne possible.
Tous les autres chiffres de la racine cubique s'obtiennent et se vérifient absolument de même.

Remarque. Le *maximum* du reste d'une extraction de racine cubique est le *triple* CARRÉ de la racine, plus le triple de cette racine.

Racines cubiques des nombres décimaux

Pour qu'un nombre décimal soit un cube parfait, il faut :
1° Qu'il ait un nombre de chiffres décimaux multiples de 3;
2° *Si l'on néglige la virgule*, qu'il soit un cube parfait.

Règle. Pour extraire la racine cubique d'un nombre décimal, il faut (si le nombre des chiffres décimaux n'est pas un multiple de 3) écrire un ou deux zéros à sa droite; cela fait, prendre la racine comme s'il s'agissait d'un nombre entier. Enfin, séparer au résultat *le tiers* du nombre de chiffres décimaux qu'il y avait dans le nombre préparé.
Ex. : Soit à extraire la racine cubique de 0,25 à un centième près.
Les tranches se comptent à partir de la virgule.
Comme nous voulons avoir deux chiffres décimaux à la racine, il nous faudra extraire la racine cubique de 250000, sauf à séparer deux chiffres à la droite de la racine.

2500 00	0,62	62
2160.00	108	62
34		124
		372
		3844
250000		62
		7688
150047		23064
		238328

Le plus grand cube contenu dans 250 est 216, dont 6 est la racine. La racine cubique de 0,25 est, par conséquent, 0,6.
Pour avoir la racine cherchée à un centième près, j'ajoute une tranche (3 zéros) et j'opère sur 250000. Seulement au résultat (62) je sépare le tiers du nombre des chiffres que j'avais dans le nombre proposé (ce nombre est 250000) et je trouve 0,62.
Donc

$$\sqrt[3]{0,25} = \mathbf{0,62} \text{ à un centième près.}$$

Racine cubique d'une fraction ordinaire

Règle. Pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faut extraire séparément la racine du numérateur et la racine du dénominateur.

En effet, pour élever une fraction au cube, il faut élever au cube chacun de ses termes; la racine cubique d'une fraction s'obtiendra donc en extrayant la racine cubique de chacun des termes de la fraction.
Dans l'extraction de la racine cubique d'une fraction, il peut se présenter trois cas :

Premier cas. *Les deux termes de la fraction sont des cubes parfaits.*

On prendra alors la racine cubique de chacun d'eux.
Ex. :

$$\sqrt[3]{\frac{125}{216}} = \frac{5}{6} \; ; \; \sqrt[3]{\frac{64}{729}} = \frac{4}{9}.$$

Deuxième cas. *Le dénominateur est un cube parfait.*
On extrait la racine cubique du numérateur à moins d'une unité de 0,1 ou de 0,01; puis on extrait la racine cubique du dénominateur.
Ex. : Soit à extraire la racine cubique de la fraction $\frac{121}{512}$.
Le dénominateur seul est un cube parfait dont la racine est 8.
Je n'ai donc à extraire que la racine cubique de 121, à moins d'une unité ou de 0,1 ou de 0,01 près.
Or

$$\sqrt[3]{121} = 4,9 \text{ à un dixième près.}$$

Donc

$$\sqrt[3]{\frac{121}{512}} = \frac{49}{80} \text{ à } \frac{1}{80} \text{ près.}$$

Troisième cas. *Aucun des termes de la fraction n'est un cube parfait.*
On rend alors le dénominateur cube parfait en multipliant les deux termes par le carré du dénominateur et on se trouve ramené au cas précédent.
Ex. : Soit à extraire la racine cubique de $\frac{5}{6}$.
1° Je rends le dénominateur cube parfait en multipliant les deux termes de la fraction par 36, carré de 6. Et j'ai :

$$\frac{5 \times 36}{6 \times 36} = \frac{180}{216}.$$

Or **216** est un cube parfait dont la racine est 6.
Je n'ai donc plus qu'à chercher la racine de 180 et je trouve **5,6** à 0,1 près.
Donc

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \frac{56}{60} \text{ à } \frac{1}{60} \text{ près.}$$

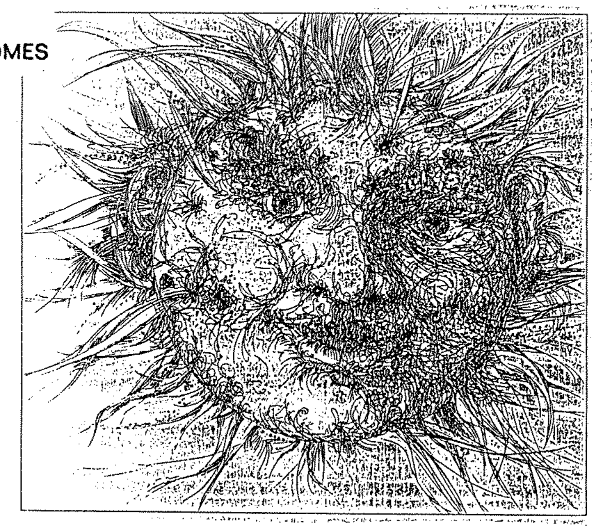
Problème. Un cube de cuivre pèse 20 kilogrammes. Quelle est la longueur de l'arête de ce cube?
SOLUTION. La densité du cuivre est de 8,85.
Le volume de ce cube, en dcm^3, sera $\frac{20}{8,85} = 2$ dcm.259 cmc., ou 0^{me},002 259.
Le volume d'un cube étant égal au cube de la longueur de son arête, cette arête sera égale à $\sqrt[3]{0,002259}$.

Or

$$\sqrt[3]{0,002259} = 0m.131.$$

Longueur de l'arête, 0 m. 131.

COMITÉ DE LIAISON ENSEIGNANTS ASTRONOMES



Le CLEA, **Comité de liaison Enseignants et Astronomes**, est une association déclarée (loi de 1901), fondée en 1977. Elle réunit des enseignants et des astronomes professionnels qui veulent promouvoir l'enseignement de l'astronomie à tous les niveaux de l'enseignement public et dans les organismes de culture populaire.

Le CLEA organise des stages nationaux (universités d'été) et régionaux dans le cadre des MAFPEN. Ces stages sont ouverts aux enseignants de l'école primaire, du collège et du lycée. On s'efforce d'y conjuguer information théorique, travaux pratiques et recherche didactique. Le CLEA favorise les échanges directs entre enseignants et astronomes hors de toute contrainte hiérarchique.

Le CLEA, qui attache une importante primordiale à l'information et à la formation, prolonge l'action de ces stages en publiant **"LES CAHIERS CLAIRAUT"**. Chaque numéro de cette revue trimestrielle réunit des études documentaires, des comptes rendus d'expériences pédagogiques, des mises au point de matériels didactiques, des notes sur les livres récents.

Le CLEA possède bien d'autres publications qui sont destinées ou bien à la formation des maîtres en astronomie, ou bien à aider les maîtres dans leur enseignement : comptes rendus des universités d'été, numéros hors-série des "*Cahiers Clairaut*", recueils de fiches, transparents animés pour rétroprojecteur, diapositives, ...

Abonnement aux "Cahiers Clairaut"

Un an (4 numéros) : 90 F.
Cotisation CLEA : 25 F.
Abonnement + Cotisation : 110 F

On peut s'abonner pour deux ans (tarif double). Rédigez votre chèque à l'ordre du CLEA et envoyez-le avec votre adresse à :

Gilbert WALUSINSKI
26, Bérangère
92210 SAINT-CLOUD

CLEA - Laboratoire d'Astronomie - bâtiment 470 - Université de Paris-Sud - 91405 ORSAY CEDEX

CERCLES OU ELLIPSES?

RÉFLEXIONS SUR LA TRAJECTOIRE DES PLANÈTES

Jean-Michel ROLANDO

Avertissement

Ce texte a été rédigé en vue d'une diffusion auprès d'instituteurs dont la plupart ne sont pas familiarisés ni avec l'astronomie ni avec la géométrie des ellipses. Les lecteurs spécialistes voudront bien, de ce fait, excuser certaines précisions qu'ils pourraient juger inutiles, mais qui ne leur sont nullement destinées.

INTRODUCTION

Parmi les phénomènes astronomiques les mieux connus du public fréquentant les Écoles Normales, tant en formation initiale qu'en formation continue, figure en bonne position le fait que les planètes se déplacent autour du Soleil sur des **trajectoires elliptiques**. Je me propose pourtant de montrer qu'il s'agit là d'une **connaissance livresque** susceptible de conduire à **d'énormes confusions** si, comme c'est souvent le cas, elle est mal assimilée. Je pense nettement préférable de considérer ces trajectoires comme **circulaires**, tant à l'école élémentaire qu'au collège. Les raisons de ce parti pris seront développées en envisageant tout d'abord l'aspect historique qui nous montrera comment on est passé du modèle de COPERNIC (trajectoires circulaires) au modèle de KEPLER (trajectoires elliptiques). Nous verrons dans un second paragraphe que les ellipses en question sont très proches de cercles. Nous discuterons ensuite (troisième paragraphe) du point de vue pédagogique et nous montrerons que la pratique d'une démarche scientifique ne permet pas d'accéder au modèle de KEPLER avec de jeunes enfants. Nous terminerons en analysant rapidement deux confusions inquiétantes et malheureusement fréquentes.

1.– DU MODÈLE DE COPERNIC À CELUI DE KEPLER

On connait depuis l'antiquité les mouvements apparents de Mars, Jupiter et Saturne. Ces planètes se déplacent sur le ciel étoilé en décrivant une boucle (fig. 1). Cette particularité vaut d'ailleurs leur nom aux planètes (étymologiquement : astres promeneurs). L'explication de cette boucle constitue le point faible de tous les modèles antérieurs à celui de COPERNIC, y compris celui de PTOLÉMÉE qui fit pourtant autorité pendant quinze siècles. En 1543 paraît l'ouvrage de Nicolas COPERNIC (1473-1543) intitulé "*De Revolutionibus Orbium Coelestium*" (*) qui

---

Avec l'aimable autorisation des "*Cahiers Clairaut*", n° 50 (1990)

(*) On peut trouver la traduction française d'un résumé de cette œuvre : "*Le petit commentaire*" (commentariolus, paru en 1512) dans : HOLBEIN, les ambassadeurs – Anatomie d'un chef d'œuvre, par Jean-Louis FERRIER chez Denoël-Gonthier.

propose une vision héliocentrique de l'Univers :
— le Soleil en occupe le centre, les étoiles la périphérie;
— les planètes effectuent une révolution autour du Soleil en parcourant des orbites circulaires.

Figure 1

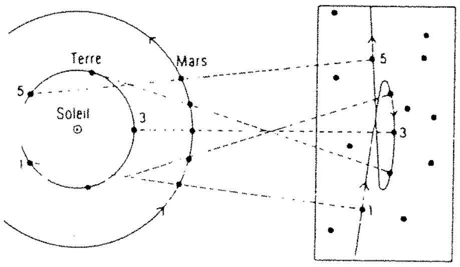


Figure 2

Le système de COPERNIC connaît un accueil peu chaleureux dans les milieux ecclésiastiques bien qu'il donne une interprétation simple et élégante à la boucle des planètes (fig. 2). Mais simplicité et élégance ne sont pas des valeurs de l'époque. La longévité d'une théorie telle que celle de PTOLÉMÉE est au contraire considérée comme la meilleure référence qui soit.

Condamnées par l'église catholique jusqu'en 1835, les œuvres de COPERNIC retiennent toutefois l'attention de Johannes KEPLER (1571–1630) et de Galileo GALILÉE (1564–1642) qui correspondent fréquemment pour échanger leurs idées sur celles-ci. Alors que GALILÉE enseigne le modèle de COPERNIC à l'Université de Padoue, KEPLER entreprend de le confronter aux très précises observations de Tycho BRAHÉ (1546–1601). Il peut alors constater des divergences d'environ 8 minutes d'angle. Il convient de noter ici qu'avec les moyens de l'époque (lunettes et télescopes n'existent pas), obtenir une précision de cet ordre est une véritable prouesse. Mais KEPLER a une telle confiance dans les qualités de Tycho BRAHÉ qu'il refuse de croire en des erreurs de mesure et cherche comment modifier le modèle de COPERNIC pour le rendre conforme aux observations. Après de nombreux mois de tentatives infructueuses, il a finalement l'idée d'affecter aux planètes des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers (voir le paragraphe suivant pour la définition d'une ellipse et celle de ses foyers).

Plusieurs enseignements essentiels doivent être tirés de ce rapide tour d'horizon historique :

1.– Le remplacement d'un modèle par un autre n'est jamais un acte gratuit mais répond à une nécessité. Le système de COPERNIC a été remplacé par celui de KEPLER parce qu'il ne donnait pas entière satisfaction face aux données de l'observation.

2.– Le passage du modèle de PTOLÉMÉE à celui de COPERNIC marque une **rupture** caractérisée par un changement radical de l'hypothèse de base : le géocentrisme cède la place à l'héliocentrisme. Au contraire, le passage au modèle de KEPLER ne constitue en fin de compte qu'une amélioration se situant dans la **continuité** de l'hypothèse de base : on reste dans une description héliocentrique.

3.– Le modèle de KEPLER est-il la "*Vérité*"? On l'a cru un temps, d'autant que NEWTON en a donné quelques années plus tard, une remarquable justification théorique. On sait maintenant qu'il n'en est rien. On a pu en effet observer que la trajectoire de Mercure présente une particularité inexplicable par la théorie de NEWTON. (Pour plus de détails, on peut se reporter à l'appendice I bien que cela ne soit pas indispensable pour la compréhension de la suite.)

4.– Cela nous amène à poser le problème de l'existence d'une vérité dans le domaine des sciences. L'Histoire ne cesse de nous montrer que ce qui est considéré comme "*vrai*" à une époque, ne l'est souvent plus à une autre. La science actuelle procède différemment. Elle ne se préoccupe plus de chercher une hypothétique vérité, mais élabore des **modèles** dont elle sait qu'ils ne sont que des approximations d'une réalité inaccessible. Ces modèles sont satisfaisants à l'intérieur d'un champ expérimental parfaitement connu, et ne le sont plus dès qu'on en sort. Ainsi il n'est pas pertinent de se demander si une théorie est "*vraie*" ou "*fausse*". Il convient plutôt de savoir si elle constitue une "*bonne*" ou une "*mauvaise*" approximation. Cela dépend bien sûr du domaine expérimental à l'intérieur duquel on se situe. Le modèle de COPERNIC est satisfaisant pour expliquer l'alternance des jours et des nuits, pour rendre compte des saisons et pour interpréter qualitativement la "*boucle*" des planètes. Il est insuffisant pour en rendre compte quantitativement. Le modèle de KEPLER est satisfaisant pour cette description quantitative, mais insuffisant pour expliquer la particularité du mouvement de Mercure.

Pour résumer :
1. La science élabore des **modèles** dont elle ne se préoccupe pas de savoir s'ils sont "*vrais*" mais s'ils sont **satisfaisants à l'intérieur d'un champ expérimental donné**.
2. Les modèles n'ont pas une durée de vie infinie. Ils se complètent et s'enrichissent progressivement (**phase de continuité**) ou se détruisent pour être remplacés par d'autres édifiés sur des fondements différents (**phase de rupture**).

2.– DES ELLIPSES ... QUI SONT PRESQUE DES CERCLES

La figure 3 représente une ellipse. Les points F et F' sont appelés les foyers. Prenons un point M n'importe où sur l'ellipse, mesurons les distances FM et MF' puis calculons la somme $FM + MF'$. Le résultat sera identique quelle que soit la position du point M sur l'ellipse.

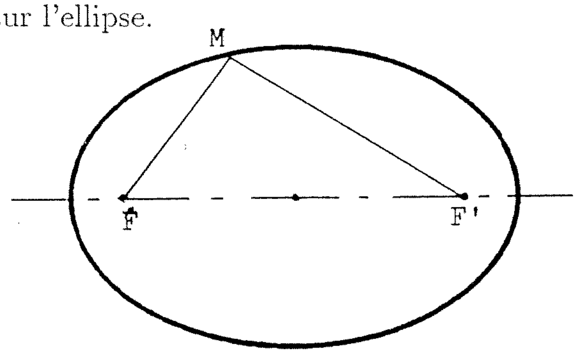
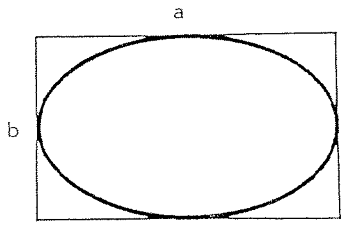
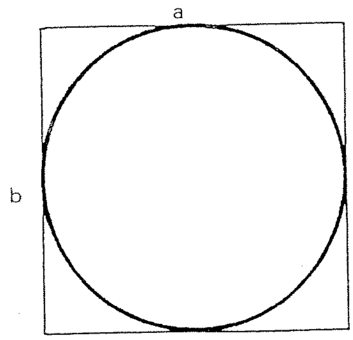


Figure 3

Les ellipses sont, en quelque sorte, des "*cercles aplatis*". Pour avoir une idée de cet "*aplatissement*", nous pouvons évaluer le rapport du petit axe de l'ellipse sur son grand axe (fig. 4).



b = petit axe
a = grand axe
ellipse : $b/a < 1$



cercle : $b = a$ et $b/a = 1$

Figure 4

Plus l'ellipse est "*aplatie*", plus ce rapport est petit. Pour un cercle, il est égal à 1.

Les trajectoires des planètes sont maintenant fort bien connues des astronomes. Le tableau présenté ci-après indique, pour les neuf planètes du sytème solaire ainsi que pour la Lune, la valeur au 1/10000 près du rapport b/a défini précédemment.

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter
b/a	0,9785	1,0000	0,9998	0,9957	0,9988

Planète	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton	Lune
b/a	0,9984	0,9989	1,0000	0,9682	0,9985

Il apparaît immédiatement que toutes ces trajectoires sont presque circulaires. L'orbite de Pluton, la plus "*aplatie*", est représentée à l'échelle sur la figure 6. On peut effectivement constater que ce n'est pas un cercle, mais reconnaissons que la différence est tout juste perceptible sans mesure. Par contre, on voit parfaitement que le Soleil ne se trouve pas au centre de symétrie de l'ellipse, mais à l'un de ses foyers, ainsi que l'a établi Kepler.

La figure 5 représente, toujours à l'échelle, l'orbite de la Terre et la position du Soleil. Un examen attentif, double décimètre à la main, nous montre qu'il n'est pas possible de différencier cette orbite d'un cercle. A cette échelle, l'épaisseur du trait rend imperceptible cet écart. On peut, par contre, constater que le Soleil n'occupe pas rigoureusement le centre du cercle.

Pour résumer :
1. Les orbites planétaires sont certes des ellipses, mais leur "*aplatissement*" est tellement faible qu'il n'est perceptible, lors d'une reproduction à l'échelle, que pour quelques unes d'entre elles (Mercure et Pluton).
2. "L'aplatissement" de l'orbite terrestre n'est donc pas perceptible, mais la position très légèrement excentrée du Soleil est accessible à un examen **attentif.**

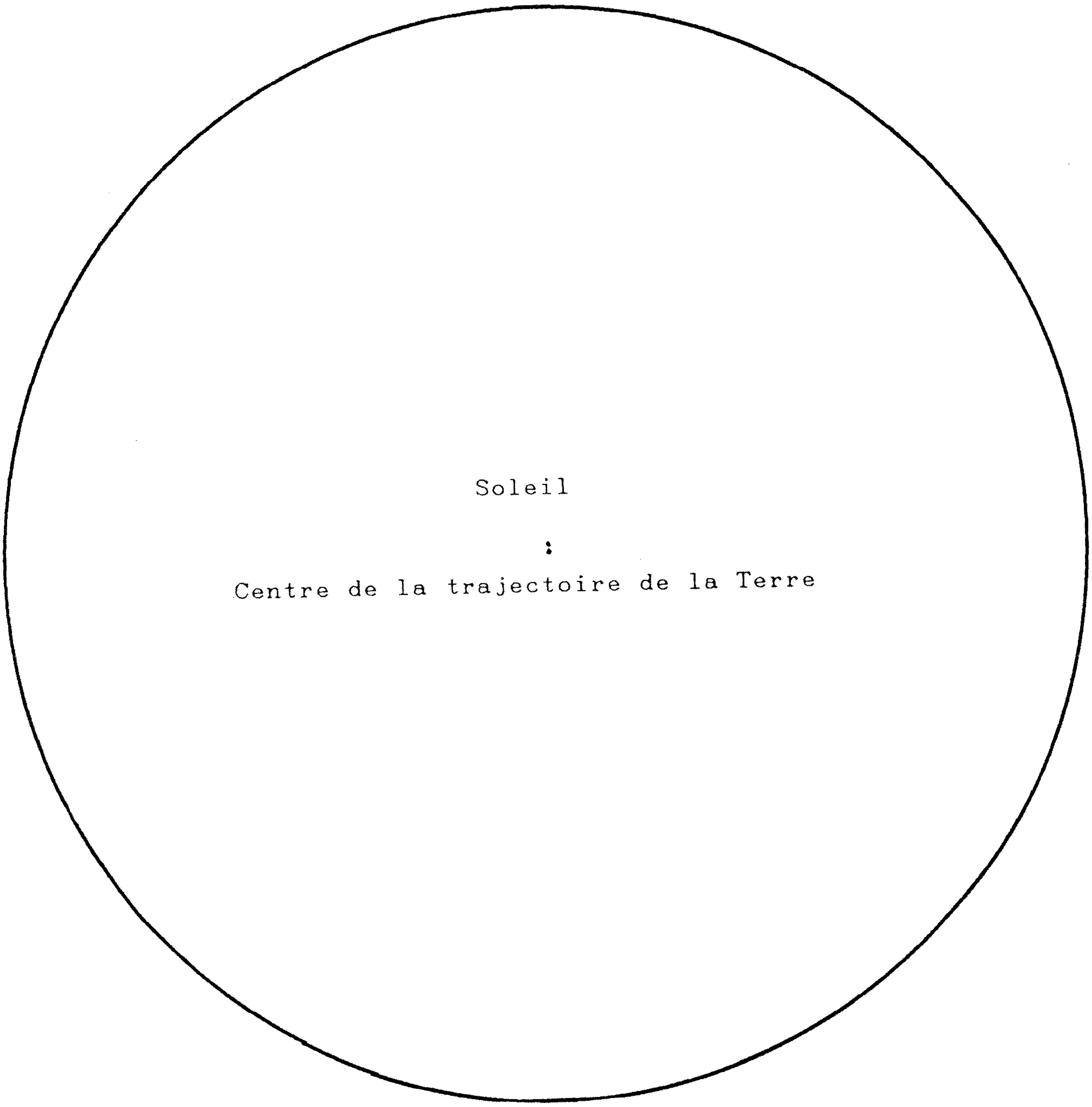


Figure 5 : Trajectoire de la planète Terre

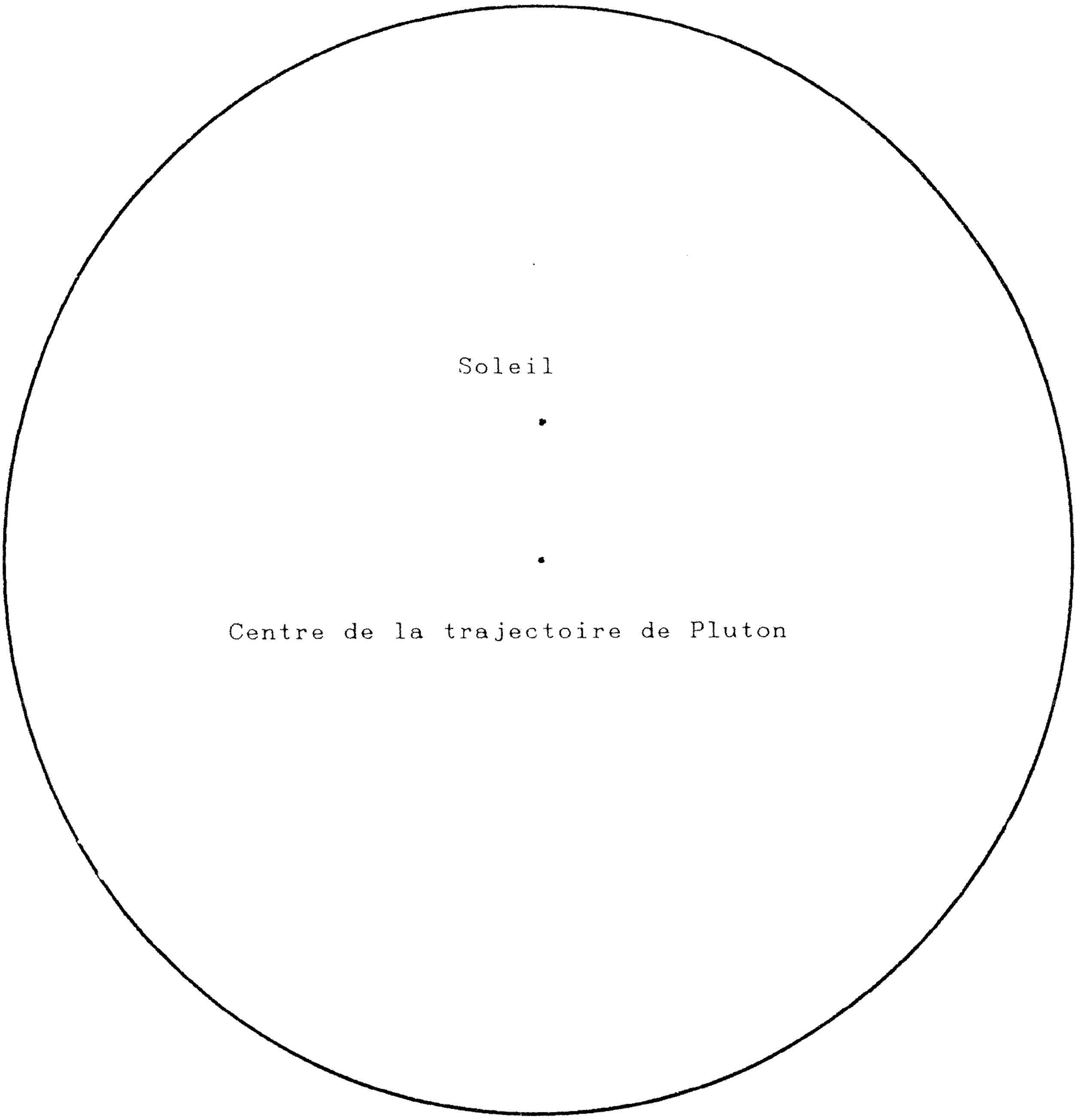


Figure 6 : Trajectoire de la planète Pluton

3.– QUELS MODÈLES? ...POUR QUELS ÉLÈVES?

Faire accéder les élèves de tous âges à une meilleure compréhension du monde en leur faisant pratiquer une **démarche scientifique**, est une idée fort généreuse, largement affirmée par les Instructions Officielles successives, tant dans le Primaire que dans le Secondaire, mais dont la mise en œuvre s'avère parfois délicate. Dans le domaine de l'astronomie, il semble que toute démarche scientifique procède :
— d'une étude précise de quelques phénomènes visant à en avoir une vision objective (observation, description, schémas, ...);
— de la recherche, **dans un second temps** seulement, de l'explication **la plus satisfaisante**.

Il faut entendre que l'explication retenue doit être conforme aux phénomènes observés et, de plus, **la plus simple possible**. Il convient toutefois de rester dans un modèle héliocentrique, pour rester en cohérence avec la rupture épistémologique historique marquant l'abandon du géocentrisme.

Ainsi l'alternance des jours et des nuits s'explique par la rotation de la Terre sur elle-même autour d'un axe qui, à ce stade, **n'a nullement besoin d'être incliné** (fig. 7).

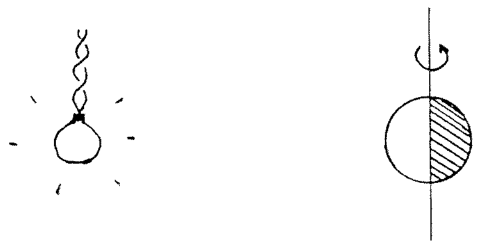


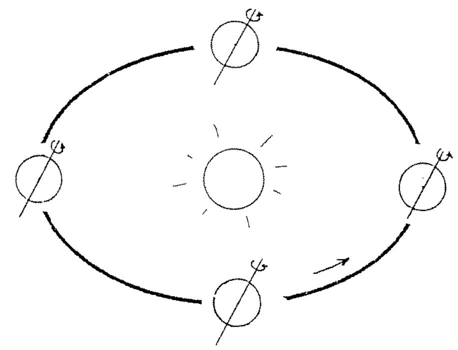
Figure 7

Figure 8

L'inégalité entre la durée des jours et celle des nuits nécessite d'incliner l'axe de rotation, mais **nullement d'envisager la révolution de la Terre autour du Soleil** (fig. 8). Ouvrons une petite parenthèse pour signaler que l'usage prématuré du globe terrestre risque de présenter cette inclinaison comme un a priori, un **dogme**, alors qu'elle n'est qu'une **nécessité** visant à donner l'explication la plus simple à un phénomène donné.

La variation de la durée des jours au fil des saisons s'explique par la révolution de la Terre autour du Soleil sur une trajectoire qu'il suffit de considérer comme circulaire. Cela nécessite en outre de maintenir constante la direction de l'axe de rotation (fig. 9).

Figure 9



Dans le cadre d'une démarche scientifique (ce point est fondamental), nous n'avons pas d'argument pour montrer à de jeunes élèves (école, collège) les limites du modèle auquel nous venons de parvenir et qui n'est guère différent de celui de COPERNIC. Nous devons en outre reconnaître qu'il présente toutes les qualités d'un "*bon*" modèle : il donne une interprétation simple et satisfaisante aux phénomènes rappelés plus haut. Expliquer aux élèves qu'en "*réalité*" les trajectoires sont elliptiques relève du pur dogmatisme, voire du "*mensonge*" dans la mesure où il laisse croire en une sacro-sainte vérité qui n'existe pas.

Les insuffisances du modèle de COPERNIC seraient probablement accessibles à des élèves du lycée (bien qu'actuellement l'Astronomie soit un domaine rarement abordé). Mais il faudrait étudier préalablement avec eux le mouvement apparent de Mars et expliquer comment les observations de Tycho BRAHÉ ont amené KEPLER à modifier ce modèle. Il conviendrait aussi de montrer avec un soin tout particulier que cette modification est infime et, comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe précédent, que les ellipses représentant la trajectoire des différentes planètes sont presque des cercles.

En résumé :
1. Les phénomènes accessibles à des enfants de l'école ou du collège ne peuvent conduire qu'au modèle de COPERNIC.
2. Le passage au modèle de KEPLER nécessite de montrer l'insuffisance de celui de COPERNIC. Les phénomènes que cela amène à envisager requièrent une maturité les réservant aux élèves du lycée.

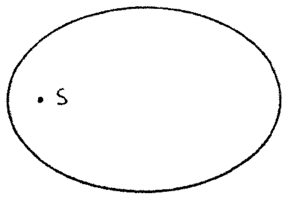
4.– LES DANGERS D'UNE CONNAISSANCE MAL ASSIMILEE

Ainsi que nous l'avons précisé en introduction, les instituteurs (qu'ils soient titulaires ou en formation initiale) "*savent*" que la trajectoire des planètes est elliptique. Un questionnement plus précis montre toutefois que cette connaissance est mal assimilée. Deux représentations aux conséquences étonnantes sont fréquemment rencontrées :

1. Soleil au centre d'une ellipse très excentrée
Il s'agit très probablement d'une mauvaise interprétation du schéma classique de la figure 9 que l'on trouve par ailleurs sur la plupart des manuels. Il y a confusion entre la trajectoire effective de la Terre, présentée à juste titre comme circulaire, et son apparence en projection : n'oublions pas qu'un cercle vu en perspective se présente sous la forme d'une ellipse ...

2. Soleil au foyer d'une ellipse très excentrée (fig. 10)

Figure 10



Selon ces deux représentations, l'existence des saisons est directement liée à la distance Terre-Soleil, plus grande en hiver qu'en été. Les conséquences sont étonnantes :
— dans le premier cas, il y aurait deux hivers et deux étés par an!
— dans la logique du second cas, les saisons ne seraient pas inversées dans l'hémisphère Sud.

Les personnes concernées reconnaissent aisément ces incohérences dès qu'on les incite à envisager les conséquences de leur représentation. Il est toutefois inquiétant de se dire que de telles idées ont peut-être été enseignées à de jeunes enfants.

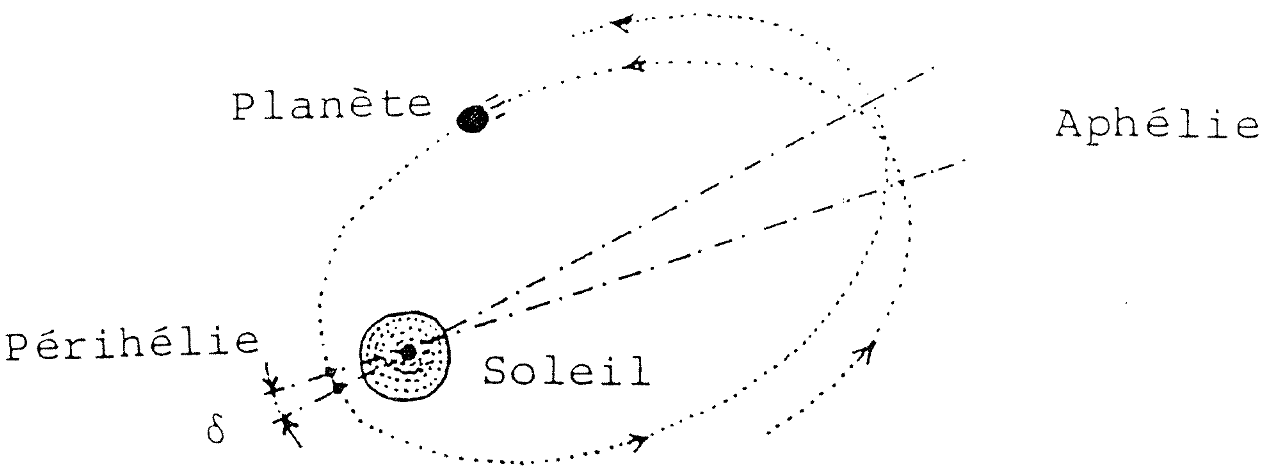
CONCLUSION

Loin de jeter la pierre aux instituteurs dont les aptitudes intellectuelles et l'ouverture d'esprit ne sont nullement en cause (le recrutement se fait actuellement à BAC + 2 et de nombreux élèves-maîtres possèdent davantage), il convient de s'interroger sur l'efficacité de l'enseignement scientifique qui a laissé s'installer (et peut-être même induit) de telles confusions, et qui n'a pas donné, à certaines personnes au moins, l'esprit critique leur permettant de percevoir l'incohérence de leurs représentations.

Au delà du problème de la trajectoire des planètes, se pose celui de la pratique d'une démarche scientifique. Je voudrais faire référence ici à une conférence donnée voilà plus de 20 ans par Richard FEYMAN qui, rappelons-le, fut prix Nobel de Physique en 1965. Au cours de celle-ci, il invite les enseignants scientifiques réunis autour de lui, à bannir de leurs propos des expressions telles que "**la science nous apprend que** ..." et de les remplacer par "**telle expérience nous apprend que** ...". Les élèves de tous niveaux sont en droit de **connaître le plus précisément possible les conditions de l'expérience qui a été réalisée**, afin d'apprécier eux-mêmes si la conclusion qui a été tirée est raisonnable ou non. Exercer le sens critique des élèves, lycéens et étudiants est la meilleure garantie pour qu'une génération donnée ne transmette ses erreurs à la génération suivante.

APPENDICE : L'avance du périhélie de Mercure

Selon le modèle de KEPLER, chaque planète décrit une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers. Le périhélie est le point de la trajectoire le plus proche du Soleil, l'aphélie est le point le plus éloigné. On a pu observer que l'ellipse représentant la trajectoire de Mercure tournait autour du Soleil d'un mouvement très lent : environ 40 secondes d'angle par siècle. Dans leur langage, les astronomes parlent de "*l'avance du périhélie de Mercure*". Le schéma ci-dessous donne une idée de la trajectoire résultante, étant entendu que la vitesse à laquelle le périhélie "*avance*" a été considérablement exagérée.



Ainsi que cela a été précisé, la théorie newtonienne ne permet pas d'expliquer ce phénomène (*). Il faut avoir recours à la théorie de la relativité générale pour en avoir une interprétation satisfaisante.

Références :

FEYMAN (R.).– Qu'est-ce que la science? in "*La nature des lois physiques*" (Le Seuil, collection Points Sciences 1980).

(*) NDLR : du moins pas totalement.

L'INÉGALITÉ D'ERDÖS-MORDELL

(Suite)

Patrick FUHR

4.— DEUXIÈME DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ (E.M.)

Cette démonstration s'appuyera sur une minoration des longueurs MA, MB et MC dont l'idée repose essentiellement sur des calculs d'aires : rappelons que l'aire d'un parallélogramme est égale au produit d'une quelconque de ses bases par la hauteur correspondante; il revient au même de dire que l'aire des parallélogrammes possède la propriété suivante :

"Si le segment $[CD]$ se déplace (de manière qu'on ait toujours : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) sur une droite d parallèle à (AB), l'aire du parallélogramme $ABCD$ reste constante."

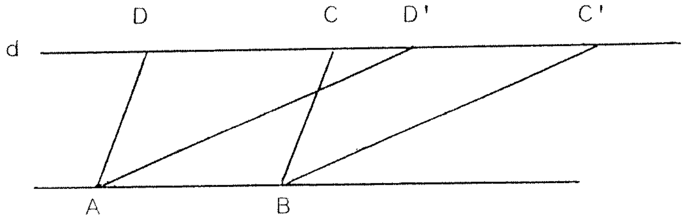


Figure 5

Aire $ABCD$ = Aire $ABC'D'$.

Ceci rappelé, commençons par préciser les notations que nous utiliserons, et qui apparaissent sur la figure 6 :

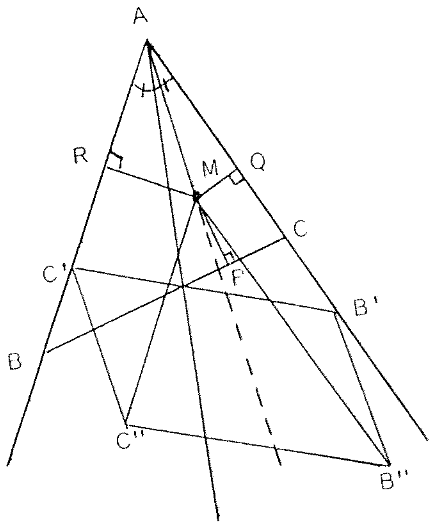


Figure 6

B' (resp. C') désigne le symétrique de B (resp. C) par rapport à la bissectrice intérieure de $\hat{A}$;

B'' et C'' sont définis par : $\overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{C'C''}$; et, comme d'habitude, on pose :

$$a = BC \ ; \ b = CA \ ; \ c = AB.$$

L'idée de base, très astucieuse, consiste à minorer la longueur MA par la hauteur du parallélogramme $B'C'C''B''$ correspondant au choix de $[B'C']$ pour base.

Question 18 :

a) Justifier cette minoration, et exprimer la hauteur en question en fonction de l'aire du parallélogramme $B'C'C''B''$ et de la longueur a.

b) Justifier que l'aire du parallélogramme $B'C'C''B''$ est la somme des aires des parallélogrammes $AB'B''M$ et $AC'C''M$.

c) En déduire que : $MA \geq |\frac{1}{a}|(bMR + cMQ)$.

Un raisonnement similaire prouverait, bien entendu, que :

$$MB \geq \frac{1}{b}(cMP + aMR) \text{ et } MC \geq \frac{1}{c}(aMQ + bMP).$$

Question 19 :

En se souvenant du § 2, prouver que :

$$MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR).$$

Il serait dommage de quitter cette démonstration sans y ajouter deux remarques :

D'une part, quelle a été, au juste, la contribution de la symétrie par rapport à la bissectrice intérieure de $\hat{A}$? Autrement dit, n'aurait-on pas pu obtenir le même résultat en faisant jouer, dans le raisonnement, aux points B et C eux-mêmes le rôle qu'y ont tenu les points B' et C' ?

Question 20 :

a) Comment aurait-il fallu redéfinir, en conséquence, les parallélogrammes considérés ?

b) Montrer qu'on serait alors parvenu à :

$$MA + MB + MC \geq a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})MP + b(\frac{1}{c} + \frac{1}{a})MQ + c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})MR.$$

c) Montrer, par un exemple bien choisi, qu'il n'y a aucune raison "générale" pour que les coefficients $a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}), \ldots,$ soient ≥ 2.

On voit donc qu'il aurait été beaucoup plus difficile de conclure sans l'intervention de cette symétrie.

D'autre part, l'idée d'introduire de tels parallélogrammes doit être rapprochée de la démonstration "*historique*", due à PAPPUS, du théorème de PYTHAGORE; les notations sont fixées par la figure 7.

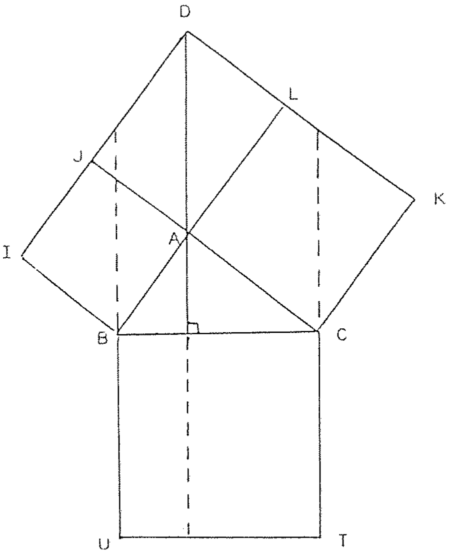


Figure 7

Question 21 :

a) Par une rotation convenable, prouver que :

$$AD = BC \text{ et } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}.$$

b) Examiner attentivement la figure pour comprendre pourquoi : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Pour terminer ce paragraphe, passons à l'étude des "*cas d'égalité*" et pour cela, observons que la démonstration précédente se résume en deux minorations :

$$MA+MB+MC \geq (\frac{b}{c}+\frac{c}{b})MP+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})MQ+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})MR \geq 2(MP+MQ+MR)\,;$$

d'autre part, comme dans le paragraphe 3, et pour les mêmes raisons, les sommets A, B, C du triangle seront écartés de la recherche des cas d'égalité (cf. question 11); par suite, deux au moins des trois longueurs MP, MQ, MR sont > 0.

Question 22 :

a) Que peut-on dire des inégalités ci-dessus, lorsque : $MA + MB + MC = 2(MP + MQ + MR)$ *?*

b) Démontrer que, si $(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})MP+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})MQ+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})MR = 2(MP+MQ+MR)$, *alors le triangle* ABC *est équilatéral.*

c) Expliquer pourquoi, s'agissant de la recherche des cas d'égalité, il suffit maintenant de comprendre à quelle condition : $MA = \frac{1}{a}(bMR + cMQ)$ *(par exemple).*

d) Reprendre le raisonnement qui avait conduit à : $MA \geq \frac{1}{a}(bMR + cMQ)$, *et prouver que l'égalité n'a lieu que lorsque* (AM) *est une hauteur du triangle* $AB'C'$.

Or, le triangle $AB'C'$ a la remarquable propriété suivante : "*Si* O *est le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC, (AO) *est la hauteur issue de* A *du triangle* $AB'C'$" (voir figure 8 page suivante).

Admettons un instant cette propriété, pour répondre à la question suivante :

Question 23 :

a) Prouver que si l'égalité : $MA + MB + MC = (\frac{b}{c} + \frac{c}{b})MP + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c})MQ + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})MR$ *a lieu, alors* M *est le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

b) En conclure que le cas où ABC *est un triangle équilatéral de centre* O *est bien le seul "cas d'égalité".*

Reste donc à prouver la propriété précédente; pour cela, soit A' le projeté orthogonal de A sur (BC), et A_1 le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

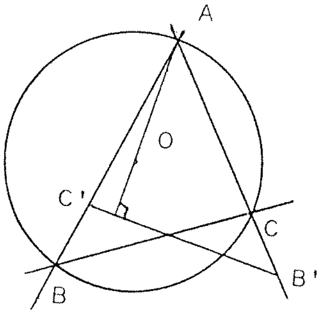


Figure 8

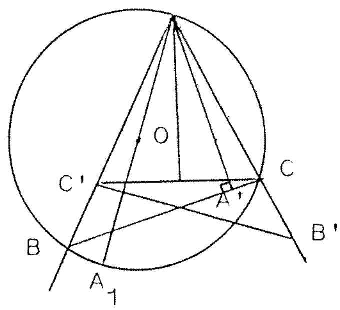


Figure 9

Question 24 :

a) Comparer, à "$k\pi$ près", les angles de vecteurs suivants : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}})$.

b) En déduire que la symétrie par rapport à la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ *échange les droites* (AA') *et* (AO), *et conclure.*

5.— TROISIÈME DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ (E.M.)

Les notations sont fixées par la figure 10 :

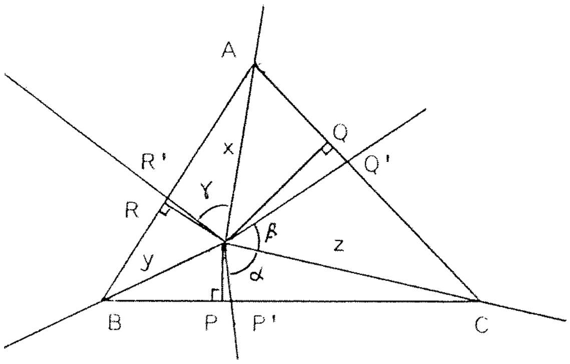


Figure 10

La bissectrice intérieure de $\widehat{BMC}$ (resp. $\widehat{CMA}, \widehat{AMB}$) recoupe (BC) (resp. $(CA), (AB)$) en P', Q', R' ; on pose :

$$\begin{aligned} MA = x \; ; \; MB &= y \; ; \; MC = z \\ MP = p \; ; \; MQ &= q \; ; \; MR = r \\ MP' = p' \; ; \; MQ' &= q' \; ; \; MR' = r' \end{aligned}$$

ainsi que

$$a = BC \; ; \; b = CA \; ; \; c = AB.$$

$\widehat{BMC} = 2\alpha$; $\widehat{CMA} = 2\beta$; $\widehat{AMB} = 2\gamma$, de sorte qu'il s'agit de prouver que : $x + y + z \geq 2(p + q + r)$.

Nous avions vu en effet au paragraphe 3 qu'on pouvait supposer M distinct des sommets A, B, C du triangle, ainsi les angles $\widehat{BMC}, \widehat{CMA}, \widehat{AMB}$ sont-ils bien définis.

Question 25 :

Montrer qu'il suffit de prouver que :

$$x + y + z \geq 2(p' + q' + r').$$

Pour cela, nous allons d'abord calculer les longueurs p', q', r' en fonction des quantités $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$; il s'agit en fait de répondre à la question un peu plus générale suivante :

Question 26 :

On donne un triangle ABC ; la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ recoupe (BC) en X : soit à calculer la longueur AX. Nous proposons trois méthodes :

a) (1ère méthode) : Commençons par rappeler que les bissectrices (intérieure et extérieure) de $\hat{A}$ sont les axes des symétries échangeant les droites (AB) et (AC) ; soit alors B' le symétrique de B par rapport à la bissectrice extérieure de $\hat{A}$: Justifier les égalités :

$$B'B = 2c \sin \frac{\widehat{BAB'}}{2} \; ; \; AX = B'B.\frac{CA}{CB'};$$

en conclure que : $AX = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2}$.

b) (2ème méthode) : Rappelons que l'aire S d'un triangle ABC peut être donnée par : $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$: quelle nouvelle expression de S cette formule donne-t-elle lorsqu'on divise le triangle ABC en les triangles ABX et AXC ? Retrouvez alors :

$$AX = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2}.$$

c) (3ème méthode) : Rappelons (*) que X est le barycentre de $(B,b),(C,c)$: comment s'exprime, par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AX}$? Calculer alors le carré scalaire $\overrightarrow{AX}^2$, et retrouver

$$AX = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\hat{A}}{2}.$$

d) (Un exemple d'application) : Y et Z désignant, de même, les pieds, sur (CA) et (AB) respectivement, des bissectrices intérieures de $\hat{B}$ et $\hat{C}$, prouver que :

$$a < b < c \Longrightarrow AX > BY > CZ.$$

Cette question résolue, revenons à la démonstration entamée de l'inégalité (E.M.); les résultats obtenus entrainent :

$$p' + q' + r' = 2\frac{yz}{y+z}\cos\alpha + 2\frac{zx}{z+x}\cos\beta + 2\frac{xy}{x+y}\cos\gamma.$$

Le paragraphe 2 va permettre une majoration de la somme $p' + q' + r'$.

Question 27 :

Démontrer que : $p' + q' + r' \leq \sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma$ (on n'oubliera pas de s'interroger sur le signe de $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$).

En déduire qu'il suffit désormais de prouver que : $2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma) \leq x + y + z$.

Pour cela, nous allons étudier le signe de la différence : $\mathcal{D} = x+y+z-2\sqrt{yz}\cos\alpha - 2\sqrt{zx}\cos\beta - 2\sqrt{xy}\cos\gamma$, en observant qu'elle est aussi de la forme :

$$\mathcal{D} = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ\cos\alpha - 2ZX\cos\beta - 2XY\cos\gamma;$$

(pour quel choix de X, Y, Z ?); cette dernière forme se prêtera bien à l'étude du signe de $\mathcal{D}$, par une méthode qui s'inspire de la mise sous forme canonique des trinômes du second degré.

Exposons cette méthode sur l'exemple suivant : soit à étudier le signe de l'expression

$E = X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX$; en écrivant :

$E = X^2 - X(Y+Z) + Y^2 + Z^2 - YZ,$

nous marquons que nous regardons E comme un "*trinôme du second degré en la variable X*", que nous allons mettre sous sa forme canonique, comme il est naturel pour en étudier le signe :

$$E = (X - \frac{Y+Z}{2})^2 - (\frac{Y+Z}{2})^2 + Y^2 + Z^2 - YZ,$$

(*) Voir une démonstration dans l'ouvrage de l'IREM de Strasbourg "*Les Maths en Pratique – Terminale CDE*", éd. Bordas, p. 126 : Ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

soit, tous calculs faits : $E = (X - \frac{Y+Z}{2})^2 + \frac{3}{4}(Y-Z)^2$, ce que le lecteur est invité à vérifier! On voit alors que l'expression E est toujours ≥ 0.

Au lecteur de faire de même, maintenant, avec l'expression $\mathcal{D}$.

Question 28 :

a) Que vaut la somme $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$ *? En déduire que :* $\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \sin\beta\sin\gamma$.

b) Présenter l'expression D, regardée comme un "trinôme du second degré en la variable X", d'abord sous forme réduite et ordonnée, puis sous forme canonique; en déduire que :

$$D = (X - Y\cos\gamma - Z\cos\beta)^2 + (Y\sin\gamma - Z\sin\beta)^2.$$

c) Quel est le signe de D ? En conclure que cette démonstration de l'inégalité (E.M.) est bien achevée.

Passons à présent à l'étude des cas d'égalité; pour cela, commençons par résumer les étapes de la démonstration précédente; il s'agit en fait de trois majorations successives :

$$\begin{aligned} 2(p+q+r) \leq 2(p'+q'+r') &\leq 2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma) \\ &\leq x+y+z. \end{aligned}$$

Question 29 :

Que peut-on dire de toutes ces inégalités "larges", s'il advient que : $2(p+q+r) = x+y+z$ *?*

Cherchons donc à quelle condition $p+q+r = p'+q'+r'$.

Question 30 :

a) *Que peut-on dire d'un triangle dont une bissectrice intérieure est aussi hauteur ?*

b) En déduire que, si $p+q+r = p'+q'+r'$, *M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (ce que nous supposerons désormais, de sorte que* $x = y = z$*).*

c) Prouver qu'alors on a aussi : $p'+q'+r' = 2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma)$. *(On relira la démonstration de l'inégalité :* $p'+q'+r' \leq 2\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma$.*)*

Reste donc à chercher quand : $2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\alpha) = x+y+z$, toujours en supposant que : $x = y = z$; pour cela, relire l'étape correspondante de la démonstration de l'inégalité, et voir que l'égalité se produit lorsque l'expression notée D est nulle.

Question 31 :

a) Démontrer que si $2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma) = x + y + z$, *alors* $\beta = \gamma$.

b) En déduire que si cette même égalité a lieu, le triangle ABC *est équilatéral.*

c) En conclure que le seul cas où $x + y + z = 2(p + q + r)$ *est celui où* ABC *est équilatéral de centre* M, *résultat qui achève ce paragraphe.*

6.— ÉTUDE PARTICULIÈRE DES TRIANGLES RECTANGES ISOCÈLES

Voici comment on peut reformuler l'inégalité (E.M.) : pour tout triangle ABC, soit m la valeur minimum du rapport $\frac{MA+MB+MC}{MP+MQ+MR}$, lorsque M parcourt l'intérieur du triangle : alors $m \geq 2$; pour un triangle équilatéral, $m = 2$, valeur atteinte au centre du triangle; pour d'autres types de triangles, il se peut très bien que : $m > 2$; nous nous proposons, dans ce paragraphe, de calculer m dans le cas particulier des triangles rectangles isocèles.

Dans ce qui suit, ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet A; on choisit, pour fixer les idées, la demi-diagonale $[BC]$ comme unité de distance; les points M dont il est question sont toujours intérieurs au triangle.

Question 32 :

Que sait-on des lignes de niveau de la fonction $M \to MP + MQ + MR$ *?*

Par suite, dans un premier temps, nous chercherons le minimum du rapport $\frac{MA+MB+MC}{MP+MQ+MR}$ lorsque M décrit un segment $[B'C']$ parallèle à $[BC]$, défini, disons, par $MP = x$;

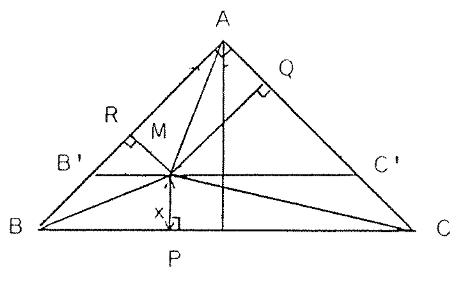


Figure 11

Il suffit donc en fait de chercher le minimum de la somme $MA + MB + MC$, lorsque M décrit $[B'C']$.

Question 33 :

a) Démontrer que cette somme est minimum lorsque M *est le milieu de* $(B'C')$ *(indication : considérer séparément* MA *et* $MB+MC$ *; pour cette dernière, penser aux symétriques de* B *et* C *par rapport à la droite* $(B'C')$*).*

b) Etablir que, si M *est le milieu du segment* $[B'C']$, $\frac{MA+MB+MC}{MP+MQ+MR} = \frac{1-x+2\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{2}(1-x)}$, *expression que nous noterons, dans la suite,* $f(x)$.

c) Entre quelles valeurs peut varier x ?

Tout revient donc, à présent, à chercher le minimum de la fonction

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{1 - x + 2\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{2}(1-x)} \end{aligned}$$

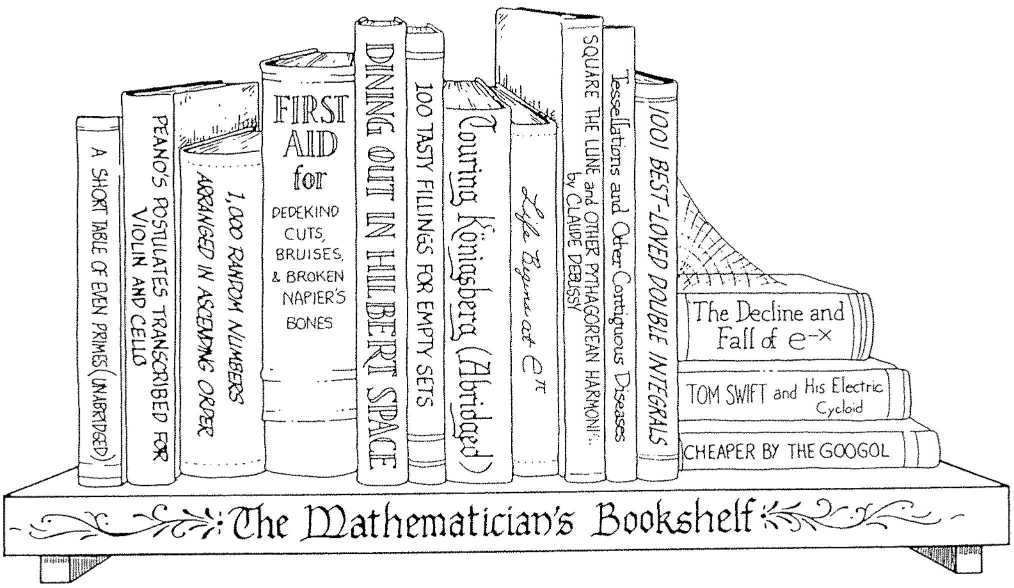
Question 34 :

a) Démontrer que, pour $x \in [0,1]$, le signe de $f'(x)$ est aussi celui de l'expression $g(x)$ définie par :

$$g(x) = 2(\sqrt{2} - 1) + 2x\sqrt{2} - \sqrt{1+x^2}.$$

b) Etudier le signe de $g(x)$, toujours pour $x \in [0,1]$. (Deux méthodes nous paraissent possibles : traiter "élémentairement" la condition $g(x) > 0$ comme une inéquation irrationnelle, ou bien étudier les variations de g sur $[0,1]$.)

c) En déduire le minimum cherché du rapport $\frac{MA+MB+MC}{MP+MQ+MR}$ (il sera rassurant, après tous ces calculs, de trouver une valeur légèrement supérieure à 2, ce qui est conforme à l'inégalité (E.M.)).



Extrait de "Mathematics and Humor"
Edité par le National Council of Teachers of Mathematics
U.S.A. (1978)

SEPTIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
17 – 23 août 1992

Le Septième Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME-7) aura lieu à l'Université Laval, dans la ville de Québec (Canada), du 17 au 23 août 1992. La deuxième annonce est maintenant disponible à l'adresse suivante :

Congrès ICME-7 Congress
Université Laval
Québec (QC) G1K 7P4

Télé.: (418) 656-7592
Fax: (418) 656-2000
Cour. élect.: ICME-7@VM1.ULAVAL.CA

Elle contient des informations générales sur ICME-7, entre autres sur l'inscription et l'hébergement, ainsi qu'un formulaire pour soumettre une communication brève.

Le Congrès ICME-7 permettra aux participants de s'informer des développements récents en éducation mathématique au plan international et de prendre connaissance d'innovations et de recherches récentes concernant l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux. La composante majeure du programme scientifique est un ensemble de 23 Groupes de travail favorisant chacun l'étude active d'un aspect particulier de l'éducation mathématique dans un contexte international d'actualité. Chaque Groupe de travail se réunira pendant quatre séances de 90 minutes.

Au programme figure également des conférences plénières, des exposés, des groupes thématiques, des groupes d'étude, des présentations nationales, des communications brèves sous forme d'affiches ou de bandes vidéo ou de logiciels, des projets, des ateliers, des films, de même que des expositions de livres, de logiciels et d'autres matériels didactiques. Au début du Congrès, une demi-journée sera spécialement consacrée à un Mini-congrès sur les calculatrices et les ordinateurs. De plus, un certain nombre d'événements socio-culturels sont prévus au programme.

Il est recommandé de s'inscrire tôt. Les personnes qui s'inscriront avant le 15 décembre 1991 bénéficieront d'une réduction substantielle. La date limite pour soumettre une proposition de communication brève est le 31 janvier 1992. Les demandes de réservation de chambre seront acceptées jusqu'au 1er juillet 1992; il est cependant conseillé de faire des réservations beaucoup plus tôt.

La troisième annonce sera disponible en avril 1992 et comprendra le programme détaillé du Congrès. Elle sera envoyée aux personnes dont les inscriptions auront été reçues avant le 15 juin 1992. Les participants s'inscrivant après cette date ne recevront le programme que sur les lieux du Congrès.

L'ENFANT ET LES SORTILÈGES (*)

D'un grand album, plié en forme de toit, sort un petit vieillard bossu, crochu, barbu, vêtu de chiffres, coiffé d'un π, ceinturé d'un mètre de couturière et armé d'une équerre. Il tient un livre de bois qui claque en mesure, et il marche à tout petits pas dansés, en récitant des bribes de problèmes.

LE PETIT VIEILLARD
Deux robinets coulent dans un réservoir!
Deux trains omnibusse
quittent une gare à vingt minutes d'intervalle
Valle, valle, valle!
Une paysanne, Zanne, zanne, zanne,
Porte tous ses œufs au marché!
Un marchand d'étoffe,
Toffe, toffe, toffe,
A vendu six mètres de drap!

Il aperçoit L'ENFANT et se dirige vers lui de la plus malveillante manière. Il danse autour de L'ENFANT en multipliant les passes maléfiques.

L'ENFANT
Mon Dieu! C'est l'Arithmétique!

LE PETIT VIEILLARD
Tique, tique, tique!

LES CHIFFRES
Tique, tique, tique!

LE PETIT VIEILLARD
Quatre et quat' dix-huit,
Onze et six vingt-cinq,
Quatre et quat' dix-huit,
Sept fois neuf trent'trois.

L'ENFANT
Sept fois neuf trent'trois?

LES CHIFFRES
Sept fois neuf trent'trois.

L'ENFANT
Quatre et quat'?

LE PETIT VIEILLARD
Dix-huit!

L'ENFANT
Onze et six?

LES CHIFFRES
Vingt-cinq!

L'ENFANT
Quatre et quat'?

LE PETIT VIEILLARD
Dix-huit!

L'ENFANT
Trois fois neuf quat' cent?

LE PETIT VIEILLARD
Il se balance pour prendre le mouvement de la ronde.
Millimètre,
Centimètre,
Décimètre,
Décamètre,
Hectomètre,
Kilomètre,
Myriamètre,
Faut t'y mettre,
Quelle fêtre!
Des millions,
Des billions,
Des trillions,
Et des frac-cillions!

LES CHIFFRES
Deux robinets coulent dans un réservoir!
Deux trains omnibusse quittent une gare
à vingt minutes d'intervalle.

LE PETIT VIEILLARD
Une paysanne, zanne, zanne, zanne,
Porte tous ses ...

LES CHIFFRES
Un marchand d'étoffe, toffe, toffe, toffe.
A vendu six ...

(*) Extrait de la fantaisie lyrique en deux parties – Poème de COLETTE – Musique de Maurice RAVEL – Production Opéra de Lyon.

LE PETIT VIEILLARD
Deux robinets coulent, coulent, coulent,
coulent dans un réservoir.

LES CHIFFRES
Une paysanne, zanne, zanne, zanne,
s'en va t'au marché.

LE PETIT VIEILLARD
Trois fois neuf?

LES CHIFFRES
Trent'trois.

LE PETIT VIEILLARD
Deux fois six?

LES CHIFFRES
Vingt-sept.

LE PETIT VIEILLARD
Quatre et quat'?

LES CHIFFRES
Quatre et quat'? Quatre et quat'? Quatre et quat'?

LE PETIT VIEILLARD
Trois fois neuf?

LES CHIFFRES
Trent'trois.

LE PETIT VIEILLARD
Deux fois six?

LES CHIFFRES
Vingt-sept.

LE PETIT VIEILLARD
Quatre et quat'?

LES CHIFFRES
Quatre et quat'? Quatre et quat'? Quatre et quat'?

LE PETIT VIEILLARD
Deux fois six trente et un!
Quatre et sept cinquant'neuf!
Deux fois six trente et un!
Quatre et sept cinquant'neuf!
Cinq fois cinq quarante'trois!
Sept et quat' cinquant'cinq!
Cinq fois cinq quarante'trois!
Sept et quat' cinquant'cinq!
Trent'trois!
Vingt-cinq!
Trent'sept!
Cinq et sept, cinq et sept, cinq et sept, cinq et sept.

L'ENFANT
Ah!

L'ENFANT tombe, étourdi, tout de son long.

LE PETIT VIEILLARD et les CHIFFRES s'éloignent.

LES CHIFFRES
Deux fois six trente et un.
Quatre et sept cinquant'neuf!
Deux fois six trente et un.
Quatre et sept cinquant'neuf!
Cinq fois cinq quarant'trois!
Sept et quat' cinquant'cinq!
Cinq fois cinq quarant'trois!
Sept et quat' cinquant'cinq!
Quatre et quat', quatre et quat',
quatre et quat', quatre et quat',
Quatre et quat', quatre et quat'
quatre et quat', quatre et qua ...!

LE PETIT VIEILLARD
Quatre et quat' dix-huit!

LES CHIFFRES
Onze et six vingt-cinq!
Trent'trois!

LE PETIT VIEILLARD
Z'huit!

L'ENFANT
Oh! ma tête! Oh! ma tête! ma tête!

LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Jean Lefort

6.— LES CALENDRIERS LUNI-SOLAIRES (suite)

4) Le calendrier juif

a. Aspects historiques

Le calendrier est très peu cité dans la Bible et il faut distinguer deux périodes, avant et après la captivité.

— Avant la captivité, on ne trouve que les noms suivants :

Abib	le 1er mois	(Exode 13.4)
Ziv	le 2ème mois	(I Roi 6.37)
Ethanim	le 7ème mois	(I Roi 8.2)
Bul	le 8ème mois	(I Roi 6.38)

Il apparaît que l'année comportait douze mois lunaires (d'après I. Roi 4.7), mais comme les fêtes étaient en relation étroite avec les travaux agricoles et les saisons, il est vraissemblable que déjà un 13 ème mois était ajouté tous les deux ou trois ans. Cependant la Bible ne mentionne pas cette coutume.

Lors du séjour en Egypte, les juifs utilisèrent des mois de 30 jours. On retrouve ces mois de 30 jours dans le récit du Déluge. Mais dès la période de l'exode ils revinrent aux mois lunaires.

— Après la captivité à Babylone, les juifs adoptèrent le calendrier babylonien, comme en témoigne la correspondance suivante :

	1	2	3	4	5	6
Mois chaldéen	nisannu	airu	sivanu	dû-zu	abu	ululu
Mois hébreux	nisan	iyar	sivan	tamouz	av	elul

	7	8	9	10	11	12
Mois chaldéen	tasritu	arah-samna	kislou	tebitu	sebatu	addaru
Mois hébreux	tishri	marchevan (heshvan)	kislev	tevet	sebat (shvat)	adar

Il s'agit ici de l'année religieuse, mais dès les temps les plus reculés les hébreux observèrent aussi une année civile basée sur les travaux agricoles dont le début était fixé soit au moment des labours soit aux alentours de l'équinoxe d'automne. Cela a été établi officiellement dès le retour d'exil bien que l'usage en ait été antérieur. On comprend dès lors que les juifs placent le 13 ème mois de l'année embolismique après Adar qu'il redouble en Ve-adar ou Adar le second. Cette place est logique dans le calendrier religieux, beaucoup moins dans le calendrier civil qui commence le 1er tisri.

b. Les divisions du temps et les fêtes

Avant d'aborder le calendrier juif proprement dit il nous faut avoir quelques notions sur la division du jour et sur les fêtes religieuses.

Théoriquement le jour commence quand le soleil se couche. Curieuse façon de faire puisqu'alors débute la nuit, mais c'est aussi la fin du jour précédent (cf. Genèse : "*Il y eut un soir, il y eut un matin et ce fut le premier jour*"). Mais souvent le soir est compté avec le jour précédent. Par exemple, le soir qui commence le 15 Nissan est appelé le 14 ème jour au soir (cf. Exode 12-18 et 2 Chroniques 35-1). Après l'Exil on divisa le jour (du lever au coucher du Soleil) en 12 heures qui sont donc inégales suivant les saisons. Lors de l'occupation romaine cet usage s'étendit aussi à la nuit. Actuellement le décompte des heures se fait à partir de 18 h de nos heures au méridien de Jérusalem (environ 35° Est de Greenwich). Le jour entier est divisé en 24 heures de chacune 1080 scrupules ou parties (abrégées en p.); par conséquent chaque scrupule vaut $3 + \frac{1}{3}$ secondes.

Quand les juifs ont fixé leur calendrier vers 350 de notre ère avec le patriarche Hillet II, ils ont adopté une valeur de la lunaison qui donne un nombre entier de scrupules soit :

$$29j\ 12h\ 793p = 29 + \frac{13753}{25920}j$$

ou encore

$$29,530\ 594\ 136\ldots jours$$

dont l'écart avec la valeur actuelle est de 6,136 10^{-6} jours soit à peu près 0,159 p (0,53 s).

Les jours sont groupés par 7 et le Shabbat est férié. Mais les grandes fêtes sont considérées comme des Shabbat et par conséquent également fériées. Pour éviter la présence de deux jours fériés consécutifs, le premier de l'an peut être décalé de 1 ou 2 jours, d'où toute la complexité du calendrier israélite. Nous verrons ultérieurement la règle exacte, mais disons ici, pour simplifier que le 1er Tisri ne peut être ni un vendredi, ni un dimanche, ni un mercredi et que si le premier de l'an devait commencer un de ces jours là de la semaine on prolonge l'année précédente d'un jour et on diminue d'autant l'année qui vient. Il y a finalement six types d'années :

$$\text{commune de 12 mois} \begin{cases} \text{abondante de 355 jours} \\ \text{régulière de 354 jours} \\ \text{défective de 353 jours} \end{cases}$$

$$\text{embolismique de 13 mois} \begin{cases} \text{abondante de 385 jours} \\ \text{régulière de 384 jours} \\ \text{défective de 383 jours.} \end{cases}$$

Les années embolismiques sont obtenues par l'adjonction d'un mois lunaire de 29 jours baptisé VEADAR ou ADAR BETH ou ADAR-le-SECOND. Mais dans les années communes ADAR en a 30. Comme de plus dans ces années de 13 mois les fêtes religieuses du mois d'Adar (Jeûne d'Esther (le 13), Pourim (le 14) et Shusham Pourim (le 15)) ont lieu au cours du deuxième Adar, tout se passe, contrairement aux dénominations, comme si on ajoutait un mois de 30 jours avant Adar.

Nous obtenons finalement la situation suivante :

	Années					
	Communes			Embolismiques		
	D	R	A	D	R	A
Tisri	30	30	30	30	30	30
Heshvan	29	29	30	29	29	30
Kisler	29	30	30	29	30	30
Teret	29	29	29	29	29	29
Shrat	30	30	30	30	30	30
Adar	29	29	29	30	30	30
Veadar	0	0	0	29	29	29
Missan	30	30	30	30	30	30
Iyar	29	29	29	29	29	29
Sivan	30	30	30	30	30	30
Tamouz	29	29	29	29	29	29
Av	30	30	30	30	30	30
Eloul	29	29	29	29	29	29
Total	353	354	355	383	384	385

c. Le calcul de l'année

L'année commune contient 12 lunaisons moyennes, sa longueur est donc :

$$\begin{aligned} 12 \times 29j\ 12h\ 793p &= 354j\ 8h\ 876p \\ &\simeq 354{,}367\ 129\ 629\ 629\ldots j \\ &= 354 + \frac{793}{2160} \text{ jours} \end{aligned}$$

L'année embolismique contient 13 lunaisons moyennes, sa longueur est donc :

$$\begin{aligned} 13 \times 29j\ 12h\ 793p &= 383j\ 21h\ 589p \\ &\simeq 383{,}897\ 723\ 768\ 432\ldots j. \\ &= 383 + \frac{23269}{25920} \text{ jours.} \end{aligned}$$

Un cycle de 19 ans (le cycle de Meton qui a été adopté par Hillel II) contient 12 années communes et 7 années embolismiques; sa durée vaut 235 lunaisons soit 6939 j 16 h 595 p = 6939 + $\frac{3575}{5184}$ jours, (environ 6939,689 621 913 580 j), ce qui fait qu'une année juive vaut en moyenne 365,246 822 205 977 907 j plus exactement $365+\frac{24311}{98496}$ jours. Elle est donc un peu plus longue que l'année grégorienne moyenne qui, rappelons-le, vaut 365,2425 j. L'écart atteint une journée en environ 230 ans.

Le premier problème qui se pose est de placer les années embolismiques dans le cycle de Meton. Les juifs l'ont résolu en les plaçant aux rangs 3, 6, 8, 11, 14, 17 et 19 du cycle. Cela correspond pratiquement à placer un troisième mois dès que l'année solaire a une avance de plus d'une lunaison sur l'année lunaire ainsi que le montre le tableau suivant. La seule exception concerne les années 8 et 9. Cependant comme le mois supplémentaire n'est pas placé en fin d'année mais au milieu, cela complique singulièrement le rythme. Peut-être d'ailleurs, ne faut-il pas chercher une explication après coup mais tenir compte du fait que le calendrier de Hillel (qui ne fut généralisé dans le monde juif que plusieurs siècles après sa mort) devait tenir compte d'une tradition préexistante.

Sur le tableau de la page suivante, les années marquées d'un • sont embolismiques. Les durées des années correspondent aux durées moyennes dans le cycle de Meton appliqué au calendrier juif.

Reste à déterminer si l'année est défective, régulière ou abondante. Pour cela nous allons utiliser la période julienne.

	année solaire	année lunaire	écart
01	365,247	354,367	+ 10,880
02	730,494	708,734	+21,760
03•	1095,741	1092,632	+3,109
04	1460,987	1446,999	+13,988
05	1826,234	1801,366	+24,868
06•	2191,481	2185,264	+6,217
07	2556,728	2539,631	+17,097
08•	2921,975	2923,529	-1,554
09	3287,221	3277,896	+9,325
10	3652,468	3632,263	+20,205
11•	4017,715	4016,161	+1,554
12	4382,962	4370,528	+12,434
13	4748,209	4724,895	+23,314
14•	5113,456	5108,793	+4,663
15	5478,702	5463,160	+15,542
16	5843,949	5817,527	+26,422
17•	6209,196	6201,425	+7,771
18	6574,443	6555,792	+18,651
19•	6939,690	6939,690	0

d. Formule des Moleds de SCHRAM

On appelle **MOLED** (c'est-à-dire "*naissance*" en hébreu, naissance de la lune, bien sûr) l'heure de la nouvelle lune moyenne la plus proche de l'équinoxe d'automne. Il s'agit evidemment de la lune fictive du calendrier qui a, comme nous l'avons vu, une période de 29 j 12 h 793 p. On fait précéder cette heure du nom du jour sous la forme d'un numéro en prenant 1 pour dimanche, 2 pour lundi etc... (le dimanche est bien le premier jour de la semaine pour les juifs).

Par définition le Moled de l'an 1 de l'ère juive dit "MOLED-TOHU de l'ère de la création du monde" est 2-5-204 (c'est-à-dire lundi à 5 h 204 p) au méridien de Jérusalem. En jour et heure de la période julienne cela donne 347 997 j 11 h 204 p = 347 997 + $\frac{1007}{2160}$, ou encore 347 997,466 203 703 703 JJ. Autrement dit le 1er jour de l'ère juive a débuté le dimanche 6 octobre -3760 un peu après 11 heures du matin en temps universel. Nous noterons M_A le moled de l'année A de l'ère juive exprimé en JJ.

Tout ceci ne nous rajeunit pas. Cette date est largement arbitraire puisqu'elle repose sur un calcul basé exclusivement sur les longévités supposées des descendants d'Adam et Eve telles que l'indique la Bible. C'est ce même calcul qui servit un temps à combattre les théories modernes de l'évolution de la Terre.

Pour le calcul pratique, il est plus agréable d'inventer une année 0 (qui est embolismique) dont le moled M_0 vaut M_1 moins la durée d'une année embolismique.

$$M_0 = 347\ 997 + \frac{1007}{2160} - \left(383 + \frac{23\ 269}{25\ 920}\right) = 347\ 613 + \frac{2947}{5184}.$$

Il est ainsi théoriquement facile de calculer le moled de n'importe quelle année en respectant le cycle de Meton et la répartition en son sein des années embolismiques.

Ainsi si

$$A = 19C(\text{nombre entier de cycles})$$
$$M_{19C} = 347\ 613 + \frac{2947}{5184} + 235C \times \left(29 + \frac{13753}{25920}\right)$$

puisqu'il y a 235 lunaisons dans un cycle soit :

$$\begin{aligned} M_{19C} &= 347\ 613 + \frac{2947}{5184} + C\left(6939 + \frac{3575}{5184}\right) \\ &= 347613 + \frac{2947}{5184} + 19C\left(365 + \frac{24311}{98496}\right) \end{aligned}$$

où l'on reconnaît dans le coefficient de 19C la durée d'une année moyenne.

Cette formule se généralise sans peine à une année quelconque : $A = 19c + a$.

$$M_A = 347\ 613 + \frac{2947}{5184} + A\left(365 + \frac{24311}{98496}\right) + x\left(29 + \frac{13753}{25920}\right)\frac{1}{19}$$

où x est un terme correctif entier en 19$^{\text{e}}$ de lunaison puisqu'une année commune contient 12 lunaisons soit $\frac{7}{19}$ de moins qu'une année moyenne et une année embolismique 13 lunaisons soit $\frac{12}{19}$ de plus. x est donc donné en fonction de a par le tableau suivant :

a	= **0**	1	2	**3**	4	5	**6**	7	**8**	9	10	**11**	12	13	**14**	15	16	**17**	18
x	= 0	12	5	-2	10	3	-4	8	1	13	6	-1	11	4	-3	9	2	-5	7
α =x+5	= 5	17	10	3	15	8	1	13	6	18	11	4	16	9	2	14	7	0	12

où x augmente de 12 si l'année écoulée est embolismique et diminue de 7 si elle est commune.

Pour se ramener à des entiers modulo 19 il est plus simple d'augmenter x de 5 unités (-5 est la plus faible valeur de x dans le tableau) et de remarquer qu'alors on passe d'un terme au suivant en ajoutant 12 modulo 19 (ce qui est normal puisque 12 et -7 sont égaux modulo 19). Par suite

$$\alpha = x + 5 = [12a + 5]_{19} = [12A + 5]_{19}.$$

On peut donc réécrire la formule

$$M_A = 347\ 605 + \frac{392\ 640}{492\ 480} + \left(365 + \frac{121\ 555}{492\ 480}\right)A + \left(1 + \frac{272\ 953}{492\ 480}\right)[12A + 5]_{19}$$

formule de Robert SCHRAM dit des moleds.

On remarque que M_A peut se décomposer en une partie entière T_A et une partie fractionnaire t_A.

e. Les 5 règles de Hillel

Règle I (règle YACH) : Si le moled tombe à 18 h, heure juive, ROSCH HASCHANA (le 1er Tisri ou jour de l'an juif) est le lendemain.

Or, 18 h, au méridien de Jérusalem c'est 12 h au méridien de Greenwich, c'est-à-dire 0 h en heure de la période julienne, donc Rosch Hachana (R.H.) est toujours le lendemain.

Règle II (règle ADOU) : Si le moled tombe un dimanche, mercredi ou vendredi, R.H. est le lendemain c'est-à-dire si $[T_A]_7 = 2$, 4 ou 6, alors le 1er Tisri est un jeudi, samedi ou lundi.

Règle III (règle YACH-ADOU) : Si le moled tombe après 18 h, heure juive les samedis, mardis ou Jeudis, R.H. est le surlendemain, c'est-à-dire si $[T_A]_7 = 1$, 3 ou 5, alors le 1er Tisri est un lundi, jeudi ou samedi.

Règle IV (règle GATRAD) : Si le moled d'une année commune tombe un mardi à 9 h 204 p ou après, R.H. est un jeudi.

En consultant le tableau de la page précédente il est facile de voir qu'une année commune est caractérisée par le fait que $\alpha = [12A + 5]_{19} \geq 7$.

Par ailleurs mardi à 9 h 204 p heure juive correspond à lundi à 15 h 204 p en heure de la période julienne et par conséquent si : $[T_A]_7 = 0$ et $\alpha \geq 7$ et $t_A \geq \frac{311\ 676}{492\ 480}$ (c'est-à-dire la fraction correspondant à 15 h 204 p) alors le 1er Tisri est un jeudi.

Règle V (règle BETOUTAKPAT) : Si le moled d'une année commune tombe un lundi à 15 h 589 p ou après, R.H. est un mardi.

En consultant le tableau de la page 34 on voit que les années communes suivant une année embolismique ont un indice $\alpha \geq 12$.

Par ailleurs lundi à 15 h 589 p heure juive correspond à dimanche à 21 h 589 en heure de la période julienne et par conséquent si : $[T_A]_7 = 6$ et $\alpha \geq 12$ et $t_A \geq \frac{442\ 111}{492\ 480}$ alors le 1er Tisri est un mardi.

f. Calcul de la durée d'une année

Pour calculer la durée d'une année A de l'ère juive on calcule le moled de cette année et celui de la suivante $A + 1$. On détermine le 1er Tisri de chaque année à l'aide des règles de Hillel et par soustraction on trouve la durée de l'année A.

Exemple :

$$\begin{aligned}
A &= 5752 \\
[A]_{19} &= 14 \text{ annee embolismique} \\
[12A+5]_{19} &= 2 \\
M_A &= 2\ 448\ 508 + \frac{308\ 826}{492\ 480} = T_A + t_A \\
[T_A]_7 &= 6
\end{aligned}$$

donc le 1er Tisri est un lundi (règle II) : c'est le lendemain correspondant au 2 448 509 jour de la période julienne.

$$\begin{aligned}
A &= 5753 \\
[A]_{19} &= 15 \text{ annee commune qui suit} \\
[12A+5]_{19} &= 14 \\
M_A &= 2448892 + \frac{258\ 457}{492\ 480} = T_A + t_A \\
[T_A]_7 &= 5
\end{aligned}$$

donc 1er Tisri est un samedi (règle III), c'est le surlendemain correspondant au 2 448 894 jour de la période julienne.

Maintenant 2 448 894 - 2 448 509 = 385. L'année 5752 de l'ère de la création du monde est donc une année embolismique abondante.

En résumé :

1°)	Si $[T_A]_7 = 1, 3$ ou 5	alors R.H. est à $T_A + 2$
2°)	Si $[T_A]_7 = 0$	
	Si $\alpha \geq 7$	alors R.H. est à $T_A + 3$
	Si $t_A \geq \frac{311\ 676}{492\ 480}$	
3°)	Si $[T_A]_7 = 6$	
	Si $\alpha \geq 12$	alors R.H. est à $T_A + 2$
	Si $t_A \geq \frac{442\ 111}{492\ 480}$	
4°)	Dans tous les autres cas	R.H. est à $T_A + 1$.

On calcule le nom du jour avec la règle suivante : $[T]_7 = 6$ pour dimanche, 0 pour lundi, 1 pour mardi, etc ...

— à suivre —

P.S. : Que le lecteur hébraisant veuille bien pardonner ma translitération; les documents que j'ai consultés pour rédiger cette partie donne des écritures très variables (par ex : Tisseri, Tisri, Tishri ...) pour bien des noms et je ne sais comment choisir.

Par ailleurs, je tiens beaucoup à remercier M. Robert DREYFUS de Boulogne, sans lequel je n'aurais pu venir à bout des difficultés du calendrier juif.

MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES (*)

I.P.R. & I.R.E.M. de Strasbourg

Pour la deuxième année consécutive, le concours vient de se dérouler en Alsace du Nord, en Haute Alsace et en Allemagne (dans le Palatinat), grâce à l'initiative et à la participation active de l'Inspection Pédagogique Régionale, au soutien du Rectorat de l'Académie de Strasbourg, de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), des entreprises de la région, des collectivités locales et des professeurs de mathématiques.

C'est ainsi que près de 8000 élèves ont participé à la compétition cette année, ou plus exactement 295 classes dont 67 ont été primées lors des deux distributions des prix qui ont eu lieu les 23 et 28 mai à Haguenau et Mulhouse. 17 classes ont obtenu un prix de participation par tirage au sort.

L'an prochain, le concours touchera le centre de l'Alsace (Colmar et Sélestat), des classes du Bade-Würtemberg et des classes suisses. Dans deux ans, enfin, il sera organisé à Strasbourg touchant ainsi l'Alsace dans son ensemble ainsi que les pays limitrophes : on pourra vraiment dire à ce moment-là que les frontières n'existeront plus, du moins pour les jeunes mathématiciens.

EXERCICE 1
15 POINTS

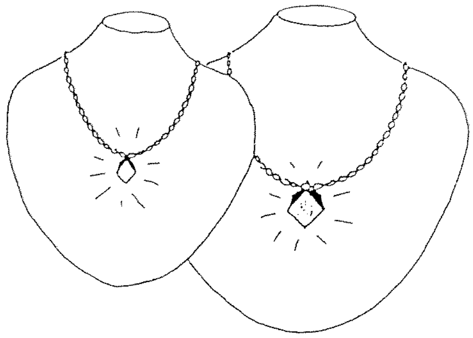
UN TRAVAIL D'ORFEVRE

Rédiger en allemand, espagnol ou anglais la solution de cet exercice.

Ein Juwelier fertigt zwei Anhänger aus vergoldetem Silber an. Dazu nimmt er zwei Würfel aus reinem Silber. Der eine wiegt 8 g, der andere 27 g. Er überzieht beide mit einem gleich feinen Goldblatt.
Um den kleineren Würfel zu vergolden, braucht er 52 mg Gold. Wieviel Gold braucht er, um den größeren mit einer ebenso feinen Goldschicht zu überziehen.
Begründe das Ergebnis ! (**)

Un joyero fabrica dos pequeñas joyas de plata sobredorada. Para ello, toma dos cubos llenos de plata, uno de 8 g, otro de 27 g. Los cubre con una fina película de oro de espesor constante.
Para enchapar el más pequeño, utiliza 52 mg de oro. Calcular cuánto oro le será necesario para poner un enchapado del mismo espesor sobre el más grande. Justificar.

A jeweller makes two vermeil pendants. To that effect, he takes two solid silver cubes, one weighing 8 g, the other 27 g.
He covers them with a thin layer of gold of even thickness.
To plate the smallest cube, he uses 52 mg gold. Calculate how much gold he will need to put a coat of the same thickness on the biggest cube. Justify your answer.

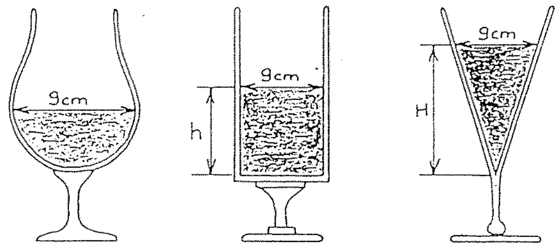


(*) Voir également *'L'Ouvert'* n°59 de juin 1990
(**) Dans la version allemande, le texte en allemand ici est évidemment remplacé par un texte en français.

EXERCICE 2
5 POINTS

UN VERRE ÇA VA... TROIS VERRES...

Les trois verres contiennent tous la même quantité de jus d'orange. La partie remplie du premier verre a la forme d'une demi-sphère. Le deuxième verre a la forme d'un cylindre de révolution et le troisième verre a la forme d'un cône de révolution. Dans chacun des trois verres le diamètre de la surface libre du liquide est 9 cm.
Calculer les hauteurs h et H atteintes par le liquide dans les verres n° 2 et 3.

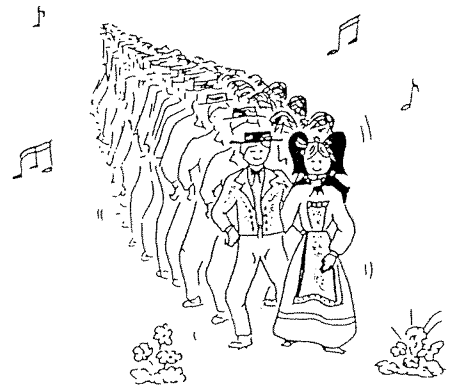


Verre n° 1 Verre n° 2 Verre n° 3

EXERCICE 3
5 POINTS

EXERCICE FOLKLORIQUE

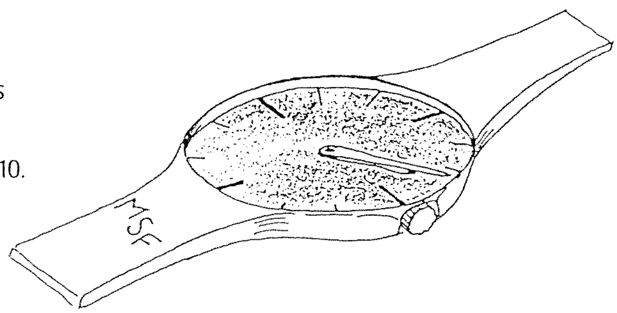
Au début d'un spectacle de danses folkloriques il y a trois fois plus de danseurs que de danseuses. Après le départ de 8 couples, il reste sur scène cinq fois plus de garçons que de filles.
Combien y avait-il de danseurs et de danseuses au début du spectacle ? On ne demande pas de justification.



EXERCICE 4
15 POINTS

MIDI A QUATORZE HEURES

Dans combien de positions différentes les aiguilles des heures et des minutes d'une montre se superposent-elles ?
La compétition "Mathématiques Sans Frontières" vient de commencer depuis environ 10 minutes. Il est à peu près 14 h 10.
"Tiens, les deux aiguilles de ma montre sont exactement superposées, comme à midi."
Quelle heure est-il, à la seconde près ? Expliquer le calcul.



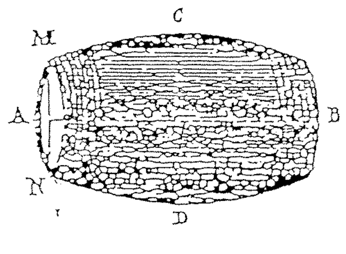
EXERCICE 5
5 POINTS

UNE VIEILLE RECETTE

Dans un manuel édité en 1865 on lit :

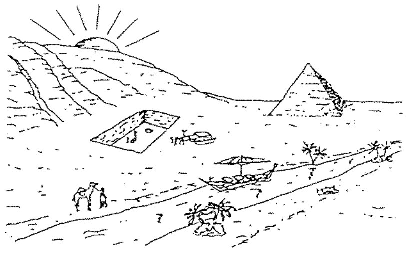
611. Problème. *Calculer la capacité d'un tonneau.*
On sait qu'un tonneau est une capacité formée par diverses planchettes de bois, appelées *douves*, dont les extrémités sont maintenues par des cercles de bois ou de fer et portent ce qu'on nomme les *deux fonds* du tonneau. Les douves sont plus ou moins renflées vers leur milieu ; ce renflement s'appelle le *bouge* du tonneau ; or, on nomme *diamètre du bouge* le plus grand diamètre CD, qui correspond, au milieu du tonneau, à une ouverture circulaire C, appelée la *bonde*, par laquelle le tonneau est rempli.
Cela posé, voici comment on calcule la capacité d'un tonneau : 1° *doublez le diamètre du bouge* CD, *et à ce double diamètre ajoutez le diamètre des fonds* MN ; 2° *divisez la somme obtenue par* 6 *et faites le carré du quotient ;* 3° *multipliez ce carré par le facteur* 3,1416 ; 4° *enfin, multipliez ce dernier produit par la longueur intérieure* AB *du tonneau.*

Appliquer la règle précédente pour un tonneau dont la longueur intérieure AB = 1,30 m, le diamètre du bouge CD = 0,93 m et le diamètre moyen des fonds MN = 0,78 m. Exprimer le résultat en mètres cubes.
En déduire la contenance du tonneau à 1 litre près.



EXERCICE 6
5 POINTS

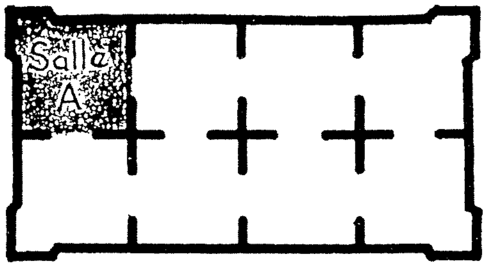
LE SECRET DE LA PYRAMIDE



La pyramide de Khéops a une base carrée de côté 227 m et une hauteur de 138 m. Les matériaux qui remplissent complètement la pyramide ont été extraits d'une fosse.
Cette fosse a la forme d'un parallélépipède rectangle dont la base a pour dimensions 250 m et 150 m.
Quelle est la profondeur de cette fosse ?

EXERCICE 7
5 POINTS

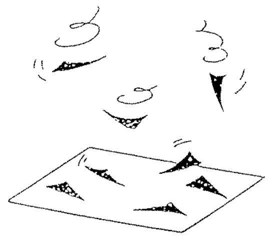
UNE VISITE ORGANISEE



Pour visiter un musée, un touriste part de la salle A et veut passer dans chacune des salles une seule fois.
Reproduire le plan ci-contre et colorier, sans justifier, toutes les salles où le touriste peut terminer sa visite.

EXERCICE 8
10 POINTS

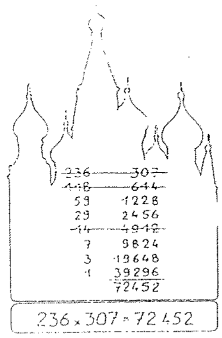
ACCOLER ET COLLER



Découper dans du papier 20 triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 6 cm.
On peut disposer ces triangles de telle manière qu'ils forment un carré. Quel est le côté de ce carré ? Justifier le calcul.
Faire le puzzle et coller le carré sur la feuille réponse.

EXERCICE 9
10 POINTS

MULTIPLICATION A LA RUSSE

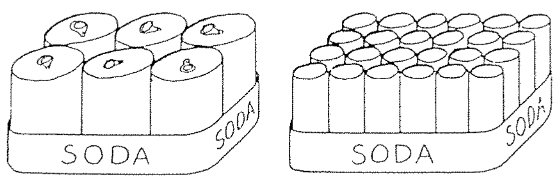


Il y a bien longtemps déjà, voici comment on calculait 236 x 307.
Disposer de la même manière la multiplication de 248 par 527.

EXERCICE 10
10 POINTS

AU CHOIX !

Dans un supermarché on a le choix entre deux présentations d'un même soda.
Il y a des cartons de 2 rangées de 3 boîtes cylindriques de 10 cm de diamètre, et des cartons de 4 rangées de 6 boîtes cylindriques de 5 cm de diamètre, de même hauteur que les premières.
Dans quel type de carton y a-t-il le plus de soda ? Justifier la réponse.

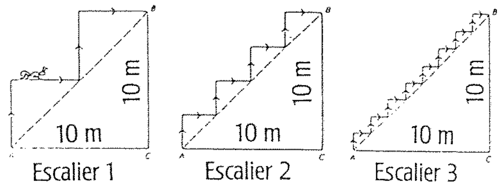


EXERCICE 11
5 POINTS

L'ARTISTE ET LA FOURMI

Un artiste a construit un monument composé de 10 escaliers. La conception de son œuvre est simple : pour passer d'un escalier à l'escalier suivant, il a remplacé chaque marche par deux marches de dimensions moitié comme le montrent les plans des trois premiers escaliers.

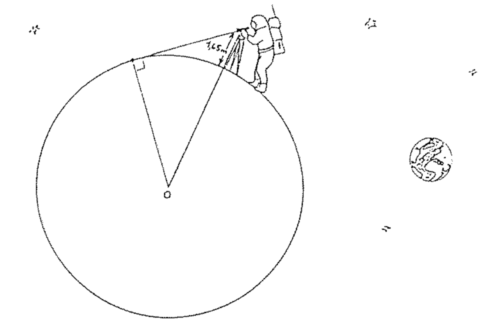
Une fourmi escalade le dixième escalier en suivant les flèches de A jusqu'à B. Quelle est la longueur du trajet parcouru ? Expliquer.



EXERCICE 12
5 POINTS

RAYON DE LUNE

Un astronaute en mission sur la Lune a posé son vaisseau spatial dans une grande plaine, la Mer de la Tranquillité. Debout sur le sol, il mesure à l'aide d'un rayon laser la distance qui le sépare de la pierre la plus lointaine qu'il puisse apercevoir à l'horizon. Il trouve 2395 mètres.
L'instrument est posé à 1,65 m du sol.
Calculer le rayon de la Lune à 1 km près.

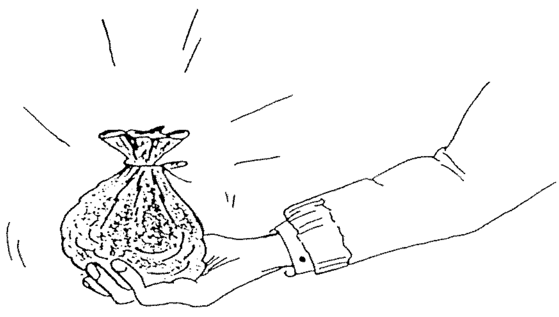


SPECIAL SECONDE

EXERCICE 13
5 POINTS

DEVINEZ C'EST GAGNE

Jean a 82 écus dans sa bourse. Il dit à son ami Paul :
"tu peux gagner tous les écus de ma bourse, pour cela il te faudra résoudre l'énigme suivante :
Je pense un nombre entier.
Si je te donnais 5 fois ce nombre d'écus, il m'en resterait au moins 15. Si par contre, j'ajoutais 4 fois ce nombre d'écus aux 82 que je possédais au départ, j'en aurais au moins 132.
Devine ce nombre entier et la bourse est à toi."
Paul a gagné. Expliquer son raisonnement.

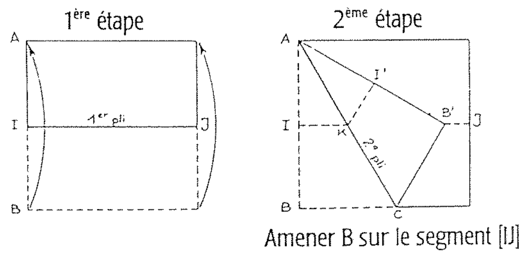


EXERCICE 14
10 POINTS

MISE EN PLI

Voici un programme de pliage en deux étapes.

En partant d'une feuille carrée, exécuter ce pliage puis coller le carré sur la feuille réponse.
Ce pliage fait apparaître plusieurs angles qui semblent avoir 60°.
Choisir l'un d'entre eux et démontrer qu'il a bien 60°.

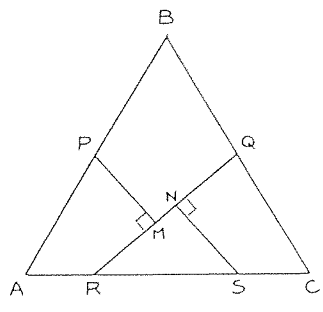


Amener B sur le segment [IJ]

EXERCICE 15
15 POINTS

VRAI FAUX CARRE

Construire un triangle équilatéral ABC de 16 cm de côté.
Marquer P et Q milieux de [AB] et de [BC].
Placer sur le segment [AC] les points R et S tels que
AR = SC = 4 cm.
Tracer le segment [RQ].
Construire M et N, projections orthogonales de P et S sur (RQ).
Tracer les segments [PM] et [SN].
Le triangle ABC est alors partagé en quatre parties.
Les découper, puis les assembler de façon à former un rectangle. Le coller sur la feuille réponse.
Est-ce un carré ? Pour le savoir, calculer les dimensions du rectangle en justifiant.



Pour ne pas faire injure au lecteur nous nous contentons de donner ci-après des commentaires de corrections.

Exercice 1 - Un travail d'orfèvre

Partie mathématique (sur 11 points)

Seconde	Troisième	
42 classes	61 classes	Pensent que l'aire est proportionnelle au volume
4 classes	2 classes	Trouvent la réponse exacte
sur 48	sur 65	

Rédaction en langue étrangère (sur 4 points)

Seconde	Troisième	
36 classes	49 classes	Rédigent en allemand
11 classes	16 classes	Rédigent en anglais
1 classe		Rédige en espagnol
sur 48	sur 65	

Dans l'ensemble, la rédaction en langue étrangère est assez satisfaisante. Elle a été notée indépendamment du contenu mathématique.

Exercice 2 - Un verre ça va... trois verres...

Les formules donnant les volumes sont en général bien pratiquées; quelques fautes d'homogénéité sont constatées (confusion entre aire d'une sphère et volume d'une boule, par exemple).
Il y a deux façons d'aborder le problème :
– de façon littérale : une "simplification par π" conduit alors au résultat exact,
– l'utilisation de calculatrices et de résultats approchés.
La première méthode, plus fréquemment rencontrée en seconde qu'en troisième a été privilégiée à la correction.

Exercice 3 - Exercice folklorique

91 % des classes de seconde et 90 % des classes de troisième donnent la réponse exacte.

Exercice 4 - Midi à quatorze heures

Cet exercice s'est révélé difficile et sélectif, autant pour les élèves de 3^e que pour les élèves de 2nde, au point que la classement pour cet exercice est très voisin du classement final.

Bilan :

65 % des classes ont obtenu entre 0 et 2 points
7 % des classes ont obtenu entre 4 et 7 points
28 % des classes ont obtenu entre 10 et 15 points

(8 classes seulement ont obtenu le maximum de 15 points).

Commentaires : Les candidats n'ont pas toujours fait le lien entre la première question : "dans combien de positions différentes les aiguilles des heures et des minutes d'une montre se superposent-elles?" et la suite de l'exercice.
La résolution s'est faite le plus fréquemment par approximations successives, en comparant les angles en degrés décrits par la petite aiguille (à partir de midi). En outre, il y a eu :
– une résolution d'équation avec pour inconnue le nombre de secondes écoulées après 14 h 10,
– une réponse par lecture graphique (angle de la petite puis de la grande aiguille $= f$ (temps),
– une réponse originale rédigée sous forme d'un dialogue plein d'humour.

Exercice 5 - Une vieille recette

Il s'agit d'un exercice classique du type : application numérique d'une formule. Pour cet exercice, il fallait lire correctement l'énoncé et ajouter au double diamètre du bouge "**le** diamètre des fonds" : un piège où 17 classes sont tombées en ajoutant **deux** fois le diamètre des fonds.

Bilan :

16 % des classes ont obtenu 0 ou 1 point
16 % des classes ont obtenu 2 ou 3 points
68 % des classes ont obtenu 4 ou 5 points

(53 % ont obtenu le maximum de 5 points).

Commentaires :
Parmi les erreurs les plus fréquentes, en dehors de celle qui a été citée plus haut : des erreurs de calcul, des résultats mal arrondis, des erreurs d'unités ou l'absence pure et simple d'unités.

Exercice 6 - Le secret de la pyramide

Exercice bien traité dans l'ensemble.
Les erreurs sont dues à une méconnaissance de la formule donnant le volume de la pyramide (malgré les dictionnaires). On trouve 1/2 Bh, 1/4 Bh ou Bh, ces dernières copies ne faisant pas la différence entre les formules des volumes de la pyramide parallélépipède rectangle.
Il y a aussi beaucoup d'hésitations sur la précision à donner au résultat et certaines fiches gardent tous les chiffres donnés par la calculatrice, ce qui donne la précision du micromètre!

Exercice 7 - Une visite organisée

Une "visite" qui s'est déroulée sans accrocs : deux classes seulement sur 113 ont oublié de colorier une salle. Par ailleurs, 9 classes ont fait 4 dessins au lieu d'un seul et ont fait figurer en plus le trajet qui mène à la salle où le touriste termine sa visite.

Exercice 8 - Accoler et coller

Exercice en général bien résolu avec plus ou moins de soin dans la réalisation du puzzle.
19 classes n'ont pas réalisé le puzzle.
6 classes affirment que la longueur du côté du carré est égale au double de l'hypoténuse sans justification.

Exercice 9 - Multiplication à la russe

Cette multiplication, quoique d'un autre temps, n'a pas dérouté les candidats : il est vrai que la vérification en était aisée.

2 %	des classes ont obtenu 0 point
11 %	des classes ont obtenu entre 3 et 7 points
87 %	des classes ont obtenu entre 9 et 10 points.

Commentaires :
Parmi les erreurs les plus fréquentes, on peut citer :
- des lignes qui manquent,
- des lignes barrées par erreur ou pas barrées du tout,
- des erreurs de calcul dans les colonnes,
- des dispositions différentes de celles qui étaient imposées.

Exercice 10 - Au choix

Beaucoup de classes ne voient pas que l'on peut établir l'égalité entre les volumes de soda dans les deux types de cartons sans calculer de valeurs approchées et les difficultés viennent de là.
Suivant le nombre de chiffres acceptés pour les calculs approchés, on déduit l'égalité ou l'inégalité des volumes.
Dans beaucoup de copies, à l'exercice 6 comme à l'exercice 10, le mot volume est remplacé par le mot aire, bien qu'un volume soit calculé.

Exercice 11 - L'artiste et la fourmi

La plupart des classes trouvent la réponse juste.
On rencontre trois types de raisonnements :
- la fourmi fait 10 m horizontalement et 10 m verticalement,
- à chaque escalier, le nombre de marches double mais leurs dimensions sont divisées par deux : leur longueur est donc constante,
- calcul du nombre de marches et de la dimension d'une marche du dixième escalier.

En général, lorsque les élèves perdent des points, c'est parce qu'ils :
- s'arrêtent au deuxième ou au troisième escalier,
- utilisent la troisième méthode et qu'ils donnent une valeur approchée pour la dimension d'une marche du dixième escalier,
- calculent la longueur totale des dix escaliers.

Exercice 12 - Rayon de lune

Le théorème de Pythagore est en général utilisé.
Quelques tentatives d'utilisation de la trigonométrie sont souvent la conséquence d'une mauvaise reconnaissance de forme.
La mise en équation est en général correcte, le calcul du double produit est parfois faux : $2(a+b)$ au lieu de $2ab$.
Les résultats donnés sont parfois trop précis (tous les chiffres affichés par la calculatrice).

Exercice 13 - Devinez c'est gagné

La seconde inéquation est plus souvent correcte que la première.
Le problème est en général bien posé. Il y a des erreurs dans la résolution du système : multiplication par un nombre négatif des deux nombres d'une inégalité sans changer son sens, addition d'inégalités membre à membre.

Exercice 14 - Mise en pli

C'est un pliage à la fois simple et riche d'enseignements.
Les candidats ont fait preuve d'ingéniosité mais ils n'ont réussi que moyennement car les démonstrations manquaient souvent de rigueur.

Bilan :

12 % des classes ont obtenu 0 ou 1 point
67 % des classes ont obtenu entre 3 et 6 points
21 % des classes ont obtenu entre 7 et 10 points

(1 seule classe a obtenu le maximum de 10 points.)

Commentaires :

Parmi les solutions exactes on peut citer :
– triangle équilatéral ABB' et bissectrice (AC),
– triangle équilatéral BKC et losange $BKB'C$,
– $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha\ldots$ (mais parfois on mesure les côtés, on calcule le cosinus, le sinus ou la tangente et on en déduit l'angle!).
D'autres solutions (fausses) sont de simples vérifications par pliage : un angle droit partagé en 3 angles de 30°...

Exercice 15 - Vrai faux carré

Cet exercice difficile est mal réussi. Aucune classe n'obtient le maximum des points.
31 classes sur 48 ne proposent que le puzzle, quelquefois accompagné de commentaires faux.
7 classes fournissent le puzzle et le calcul d'un des côtés du rectangle.
10 classes proposent en plus une méthode de calcul du deuxième côté, mais le résultat obtenu est toujours une valeur approchée, conduisant certains à affirmer que la figure est un carré.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 16

Enoncé

Les touches $+$, $\times$, $\cdot/\cdot$ de ma calculatrice sont hors d'usage. Comment effectuer les quatre opérations en utilisant seulement des constantes et les touches de soustraction $-$ et d'inversion $1/x$?

Solution (de Jean-Pierre MALBOS)

Etant donné que :

$$\frac{x^2}{2} = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)^{-1} + \frac{1}{2}$$

et

$$ab = \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} ab =& [(1-2-a-b)^{-1} - (1-a-b)^{-1}]^{-1} \\ & - [(a-1)^{-1} - (a-(1-2))^{-1}]^{-1} \\ & - [c-1)^{-1} - (b-(1-2))^{-1}]^{-1} \\ & - 0,5 \end{aligned}$$

ce qui correspond à 26 opérations (soustractions et inversions) pour la multiplication.

L'addition $a + b = a - (0 - b)$ et la division $a/b = a \times (1/b)$ ne présentent pas d'autres difficultés.

PROBLÈME 17

Enoncé (proposé par O. ADELMAN)

Trouver tous les couples (a, b) de réels strictement positifs tels que, en posant

$$A = \{[na], n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{[nb], n \in \mathbb{N}^*\}$$

on ait $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{N}^*$. $[x]$ est la partie entière de x.

Même question avec trois réels a, b, c tels que A, B et C forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

Indication

a et b sont des irrationnels tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

PROBLÈME 18

Enoncé (proposé par Ph. ARTZNER)

Aux instants 1, 3, 5, ..., 103, on retourne successivement les 52 cartes (26 noires et 26 rouges) d'un jeu préalablement battu. On a le droit de déclarer au plus une fois, à l'un des instants 0, 2, 4, ..., 102 : "*Je parie que la prochaine carte sera rouge*". On gagne si elle l'est effectivement, on perd sinon — ou si l'on n'a choisi aucun instant. Quelle stratégie maximise la probabilité de gain?

PROBLÈME 19

Enoncé

Soit C un ensemble convexe borné, fermé du plan. Peut-on construire un parallélogramme P inclus dans C tel que l'aire de P soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire de C?