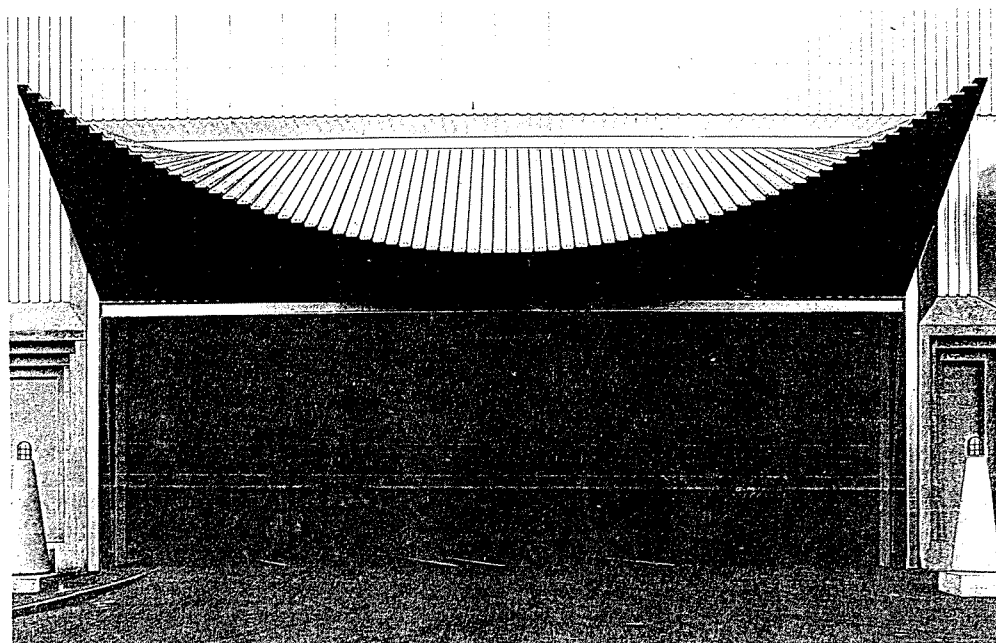
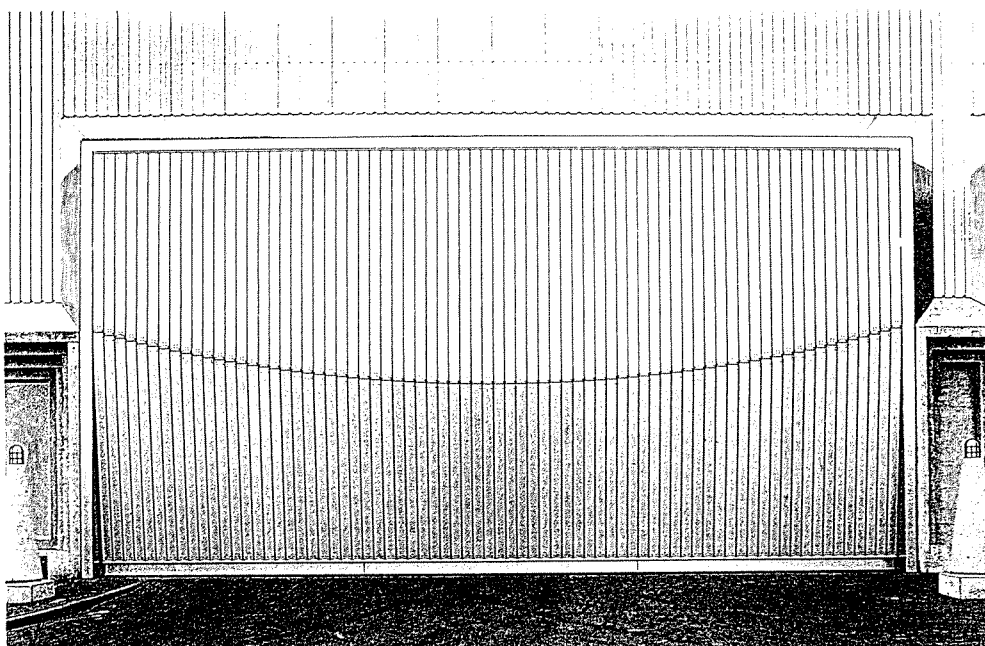


# L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG  
n° 65 – DÉCEMBRE 1991

I.S.S.N. 0290 - 0068



### NOTRE COUVERTURE : Une charnière courbe

L'usine de la firme Ernsting à Coesfeld a été conçue par les architectes S. CALATRAVA, B. REICHLIN et F. REINHART entre 1980 et 1986.

On peut voir sur la façade ouest trois immenses portails (de 13 mètres sur 5) munis de charnières courbes. 73 lamelles coulissant chacune sur ses voisines permettent cette prouesse technique. Les dessins de couverture montrent le portail en position fermée puis ouverte où il forme alors un auvent très particulier.

Le mathématicien y verra évidemment des conoïdes mais il peut aussi y voir un arc d'ellipse (en vue de profil), une surface de révolution (au cours du mouvement) et il pourra "s'amuser" à calculer l'équation paramétrique de la courbe gauche de la charnière en faisant des hypothèses raisonnables quant à la nature de l'arc de courbe correspondant à la position fermée (parabole, cercle ...). On remarquera que le point le plus haut de l'arc est alors situé symétriquement du point le plus bas par rapport à l'axe médian horizontal de la porte, ce qui optimise la hauteur d'ouverture de la porte.

## 80 % À QUEL PRIX ?

Le texte ci-après est extrait de la production d'un élève de seconde :

A: - On a l'impression qu'une apparitions rien de se produire au vue de l'enfant sur le lile.  
- L'enfant a été réveillé par une lumière qui l'enpaichais de dormir.  
Il s'est mis assis et là il voit sa mère qui le regarde par la fenêtre. Mais le garçon ne comprend pas, sa mère est mort, et pourtant elle est là. S'est un sing, long de sa mer rien lui redonne l'envie de vivre, et là, à ce moment où l'enfant se rend compte qu'il n'a une instant de bonheur, et qu'il comprend la venue de sa mer la lumière se fie éteindre au moment du bonheur.

Ce texte ne surprendra sans doute pas un enseignant de collège, mais quelle formation a reçu l'enseignant de lycée pour faire face à un tel élève? Car ici l'orthographe n'est que la manifestation la plus spectaculaire d'une situation assez désespérée. L'élève ne comprend tout simplement pas le discours des professeurs, leur langage n'est pas le sien. Perdu au milieu d'une classe de 36 ou 37, cet élève court droit à l'échec. Non seulement il aura perdu un an, mais on sait les difficultés qu'aura le conseil de classe à lui trouver une réorientation. Avoir envoyé ce garçon en seconde c'est littéralement l'avoir envoyé au "casse-pipe" avec une perspective quasi certaine de chômage faute d'une formation adaptée à ses possibilités. Il n'est malheureusement pas le seul même si, pour le moment, ils ne sont que peu dans son cas, représentant l'avant garde des nouveaux lycéens.

Le dessein du gouvernement d'admettre 75 ou 80 % d'une classe d'âge au lycée implique une restructuration complète du métier de professeur. Dans toute entreprise une telle restructuration entraîne des traumatismes certains pour de nombreux employés. Mais ici, ce qui est plus grave, le traumatisme rejallira sur les enseignés et ce d'autant plus violemment que la transition aura été plus rapide, la formation continue des maîtres moins assurée et la réforme des structures et des programmes moins achevée. Or force est de constater que, face à la montée du chômage, le gouvernement invite le Ministère de l'Education Nationale à une fuite en avant pour accueillir de plus en plus d'élèves en lycée et que cette poussée démographique est beaucoup plus forte que celle qui en son temps affecta les collèges. Quand on constate qu'on parle toujours de la rénovation des collèges, il est à craindre que l'on ne connaisse pas encore le prix à payer pour cette réforme structurelle du rôle des lycées : désintérêt croissant des lycéens pour leurs études ou explosion de colère face à des maîtres inadaptés à leur besoin? Augmentation de la crise de recrutement chez les professeurs ou saut qui peut vers le supérieur et la formation d'adultes?

J. LEFORT.

## SOMMAIRE

N° 65 – DÉCEMBRE 1991

◇ <i>Notre couverture : Une charnière courbe</i> .....	I
◇ <i>Editorial : 80 % à quel prix ?</i> .....	II
◇ <i>Je n'enseigne pas, je raconte</i> , par G. WALUSINSKI .....	1
◇ <i>Minimalisation d'aires de polygones</i> , par D. REISZ .....	6
◇ <i>Une bissectrice, une médiane et une hauteur concourantes</i> , par A. VIRICEL et J. KUNTZMAN .....	8
◇ <i>Pour une approche "fréquentielle" des probabilités</i> , par A. MÂA .....	11
◇ <i>Un retour aux origines du calculable</i> , par le Groupe Informatique de l'IREM de Rouen .....	18
◇ <i>La grande saga des calendriers</i> , par J. LEFORT .....	27
◇ <i>Mot et image : les mêmes lois statistiques</i> , par G. PÉROT .....	36
◇ <i>A vos stylos</i> , par 'L'Ouvert' .....	46

### L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT
- ◇ *Correspondance à adresser à* :  
Université Louis Pasteur  
Bibliothèque de l'I.R.E.M.  
10, rue du Général Zimmer  
67084 STRASBOURG CEDEX  
Tél. : 88-41-64-40
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*  
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace  
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace  
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.  
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent  
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro* : 25.- F

## JE N'ENSEIGNE PAS, JE RACONTE (Discours imaginaire)

Gilbert WALUSINSKI

Voici une nouvelle année scolaire qui s'ouvre pour nous, élèves et professeur. Avant d'entrer dans le vif de notre sujet, ce programme de mathématiques de Terminale du lycée, je me demande s'il ne serait pas opportun de nous poser des questions du genre "*pourquoi étudier les mathématiques ?*" – et certains d'entre vous se la sont sans doute déjà posée – quant à moi j'y ajoute souvent "*pourquoi les enseigner ?*". On peut aussi reprendre les mêmes questions en remplaçant le **pourquoi** par un **comment** ou un **pour quoi** en deux mots ou bien encore un **pour qui**. En mêlant à dessein les questions posées plus particulièrement aux élèves à celles qui concernent beaucoup plus le professeur; car élèves et maître nous sommes embarqués dans une même aventure où ce n'est pas le maître qui a le moins à apprendre.

Aventure, est-ce bien le mot qui convient alors que horaire, programme, calendrier et examen aux environs du solstice d'été, semblent nous indiquer une voie où tout est prévu, calculé, fixé? Je maintiens pourtant le mot et j'espère que la réalité ne me mentira pas au cours des mois à venir. Car cette voie toute tracée, c'est nous, élèves et professeur, qui la parcourons, doués, comme Monsieur Teste et comme tout un chacun "*de tout ce qu'il faut pour pâtir, jouir, comprendre et se tromper, mais ces dons inégaux*". Car cette voie toute tracée, fixée administrativement, nous voulons la vivre dans la réalité de nos désirs et de nos besoins.

C'est donc bien la moindre des choses que nous nous posions des questions sur les fins et les moyens. Sachant que nous ne débarquons pas sur une Terre vierge, il y a une société et sa culture (nous n'avons peut-être pas choisi d'y vivre mais effectivement nous y vivons), il y a les sciences et en particulier les mathématiques dont bien d'autres avant nous ont déjà exploré les éléments ...

### LA SOCIÉTÉ ET LES MATHÉMATIQUES

Je disais que cette société nous est donnée. Je prends ce mot comme on le prend dans tout problème dont l'énoncé précise les données. Peut-être voudrez-vous, plus tard, changer cette société et, de toute façon, l'histoire nous apprend qu'elle changera. Considérons seulement la société donnée d'aujourd'hui.

Elle vit par les hommes et les femmes qui y vivent, par leurs activités économiques et culturelles, leurs passions et leurs plaisirs. Les mathématiques y jouent un rôle plus important qu'il n'y paraît au premier regard. A voir la devanture des librairies ou les premières pages des journaux, on pourrait croire que c'est seulement par

l'arithmétique la plus élémentaire, le prix des choses, la date du journal. Dès qu'on regarde un peu plus loin ou plus profond, un vertige nous prend. Alors que si vous dites "culture", n'importe qui vous parlera beaux-arts, théâtre, littérature – ce qui est bel et bon – mais sûrement pas mathématiques ou physique ou sciences de la nature, notre société et notre culture en 1991 sont construites, organisées sur des bases scientifiques. Et pour une raison très simple énoncée vers 1630 par GALILÉE dans son livre "*Il Saggiatore*" : "*Le livre de la nature est ouvert devant nous, écrit dans la langue des mathématiques*". Toute notre société vit du développement scientifique et technique, développement qui se nourrit, matin et soir, de mathématiques. Même quand on se préoccupe – et il faut s'en préoccuper – de l'homme lui-même, de son comportement isolé ou en groupe, le passé des peuples, l'avenir des populations. A tous les niveaux de l'étude, de la réflexion ou de l'action, l'outil mathématique entre en jeu.

Sans parler, volontairement je passe vite, sur les applications techniques, sur l'organisation économique et sociale de nos cités ou de nos états qui tous réclament des citoyens ayant une formation scientifique à bonnes bases mathématiques. Si bien que j'entends tous les jours des responsables politiques ou économiques réclamer des mesures favorables à la formation de cadres, de techniciens et même parfois de chercheurs. Y font écho les pères de famille justement inquiets du sort de leurs enfants et qui souhaitent donc, qu'avant ou après un baccalauréat à bonne dose matheuse, leurs enfants trouveront une situation à la mesure de leurs ambitions.

Telle est l'image que je me fais de la société donnée dans laquelle nous vivons. Et les mathématiques qui nous sont données, elles aussi, dans quel état les trouvons-nous?

## LES MATHÉMATIQUES

De même qu'il y a la musique et les musiciens, il y a les mathématiques et les mathématiciens. En musique, il y a le patrimoine des œuvres avec des noms propres : MOZART, SATIE, GERSHWIN et parmi les musiciens, il y a les compositeurs, les exécutants et les amateurs. En mathématiques, il y a aussi un patrimoine, l'ensemble des connaissances mathématiques, toute une architecture avec des fondations (qu'il faut visiter de temps à autre), des ramifications, des floraisons ou des bourgeonnements qui annoncent de prometteurs prolongements. Mais ce n'est pas le palais vide et désert de la Belle au Bois Dormant, les voix de ceux qui construisirent le palais s'y font encore entendre. L'homme PYTHAGORE est mort depuis plus de deux mille ans, mais son théorème nous parle encore, de même que la musique de MOZART mort depuis deux cents ans.

Même sans entomologiste, il y aurait des insectes alors que sans mathématiciens, il n'y aurait pas de mathématiques. sans musicien pas de musique. Sans étudiant de mathématiques, le théorème de PYTHAGORE finirait par se faner et disparaître. PYTHAGORE mourrait alors pour la deuxième fois ... et définitivement.

Vous et moi, nous ne voulons pas que cela se produise. Nous ne serons peut-être jamais des mathématiciens inventeurs ou concepteurs, ouvrant un chapitre nouveau dans le livre perpétuellement inachevé des mathématiques. Pour le moment, notre ambition est moins grandiose mais peut-être au moins aussi utile pour la science et pour l'humanité : faire que le patrimoine mathématique de l'humanité ne dépérisse pas mais reste fringant et neuf comme un jeune adolescent qu'il est, plein de promesses.

Jetons un coup d'œil sur son histoire. Elle a moins de trois mille ans d'âge alors que l'humanité est sans doute trente fois plus vieille et notre Terre des centaines de millions de fois plus vieille. Une histoire relativement courte par conséquent mais combien merveilleuse ! Hier, EUCLIDE découvre que seuls cinq polyèdres peuvent être réguliers, que la suite des nombres premiers est illimitée. Oui, illimitée, on ne peut donc les dire tous mais on peut affirmer qu'après le plus grand que l'on connaisse, il y en a encore une infinité d'autres ...

Avant-hier, GALILÉE observe comment vole un papillon enfermé dans la cabine d'un navire que celui-ci navigue ou soit amarré au port, il découvre le principe de l'inertie. Il observe les oscillations des lustres dans la cathédrale de Pise, il imagine de faire rouler des billes sur un plan incliné, il invente la méthode expérimentale ... Encore un avant-hier pour vous qui fut presque un aujourd'hui pour moi, EINSTEIN comprend que ce phénomène de la gravitation universelle tel que l'a découvert NEWTON et qui reste mystérieux dans le cadre d'un espace euclidien et d'une action à distance, devient presque familier si l'espace est modelé par les masses qui y résident selon les formules établies un demi siècle plus tôt par RIEMANN.

Ce palais mathématique, oui, je le compare à un adolescent plein d'ardeur et de promesses. Il avance avec des forces neuves, conscient de l'énergie accumulée au fil des âges non par des fossiles mais par des ancêtres dont les œuvres ne peuvent mourir que si on les ignore. Aidons-le à tenir ses promesses.

### CONTRADICTIONS

Ce sera difficile, nous disent quelques rabat-joie, ce sera difficile parce que personne ne veut plus être professeur de mathématiques, on manque de chercheurs et quand on forme des ingénieurs pour la recherche, on les retrouve cinq ou dix ans plus tard, perdus dans des tâches administratives ou commerciales qui, paraît-il, leur rapportent beaucoup plus d'argent.

Le mot est dit, enseigner des mathématiques à des garçons et à des filles qui savent que PYTHAGORE rapporte moins d'argent que taper dans un ballon de foot, enseigner n'est donc pas une profession rentable. A l'envers du loto, c'est pénible et ça ne rapporte pas gros. Résultat : le mal nourrit le mal, les élèves se moquent des mathématiques parce qu'on n'a pas su les leur faire aimer et parce qu'ils ne les aiment pas, plus personne ne les enseignera. PYTHAGORE, mon vieux, tu vas mourrir pour de bon !

Je vois au moins deux raisons à cette situation actuelle désastreuse de l'enseignement des mathématiques et cela ne me console pas de savoir que ce mal n'est pas réservé à la France. La première raison est la prédominance du **discours utilitaire** qui envahit les médias, la seconde est le trop grand attachement de l'enseignement à fournir des **résultats évaluable**s ce qui entraîne un lamentable manquement à sa vocation culturelle. Je m'explique.

Le discours utilitaire, vous le connaissez forcément. Il est dans tous les journaux, sur tous les écrans de la télévision. Former les jeunes pour que notre pays gagne dans la compétition économique mondiale. Bien sûr, tout le monde est pour. Mais à quel prix? Pour gagner demain, faut-il négliger de penser à après-demain? Ou plutôt, celui qui aura réellement gagné demain, ne sera-ce pas celui qui aura aussi pensé à après-demain? Or, le profit dont le fameux consensus (cette personne respectable à visage de demeuré) fait un dieu, c'est l'immédiat; le profit, c'est la compétition organisée comme une religion qui méprise les traînants, les rêveurs ou simplement ceux qui refusent d'avancer sans comprendre. Le discours utilitaire méprise forcément la culture qui est réflexion paisible ou angoissée sur le passé, le présent et l'avenir. Le discours utilitaire, si on l'écoutait sans lui répliquer, tuerait la science.

L'enseignement à résultats évaluable est un peu la réplique à l'idéologie du profit à l'échelle de l'école. Il est à l'image de la poursuite effrénée du rentable. A quel prix? Au plus élevé, au plus désastreux, celui d'un enseignement souvent traumatisant pour les jeunes et presque toujours ennuyeux. Un enseignement ouvert, non sur le monde, mais sur la compétition. Un enseignement tellement sérieux et appliqué qu'il manque à sa plus haute nécessité, transmettre le goût de l'activité mathématique. Et si vous, élèves, n'aimez plus étudier ou "*faire des maths*", alors l'avenir est encore plus sombre, PYTHAGORE va vraiment mourrir.

## **NON, PYTHAGORE VIVRA**

Ensemble, nous pouvons le sauver de cette triste fin, celle de l'oubli.

Bien sûr, il faut garder les pieds sur Terre. Nous avons un programme à étudier, moi, j'ai un service d'enseignement à assurer. Vous avez même un examen à préparer. Tout cela nous impose un cadre et aussi beaucoup d'ornements à y faire entrer, des notions nouvelles et de beaux théorèmes qui permettront aux théories de briller de tous leurs effets.

Nous nous efforcerons de ne laisser aucune lacune dans tout ce que le programme nous propose. Je dois me rappeler que ces notions nouvelles pour vous ne le sont plus pour moi dans une certaine mesure; ma tâche de pédagogue consistera à vous présenter ces nouveautés comme si pour moi elles l'étaient encore. Je peux, à ce sujet, vous livrer un secret, il y a un moyen pour moi de rajeunir ainsi : rechercher pour vous, et peut-être avec vous, comment dans l'histoire des mathématiques ces idées nouvelles se sont introduites. D'autant que c'est dans leur fraîcheur, en boutons, que les fleurs et les idées nouvelles sont les plus belles. Il faudrait donc – hélas, je ne suis pas certain d'y réussir toujours – que notre classe soit baignée



## JE N'ENSEIGNE PAS, JE RACONTE

d'histoire. Bien sûr au sens des idées car il nous importe peu de savoir ce que PYTHAGORE mangeait à son breakfast ou même quels étaient les sentiments de d'ALEMBERT pour la belle Emilie du CHÂTELET.

Je garde aussi le souvenir de cet élève qui, chaque fois que la classe l'ennuyait, me demandait à propos de la théorie étudiée : "*Monsieur, à quoi ça sert ?*". Il mettait le doigt sur une faiblesse fréquente de mon enseignement. Entraîné par l'étude du sujet, je ne pense plus qu'aux mathématiques elles-mêmes. Tant il est vrai qu'on peut se passionner pour l'algèbre ou la géométrie en oubliant que c'est bientôt l'heure du déjeuner, qu'il y a des conflits entre Serbes et Croates et qu'on ne sait toujours pas comment STENDHAL aurait terminé Lucien LEUWEN. Vous avez, vous les élèves, beaucoup à faire pour que cette classe soit vraiment vivante, avance à son rythme qui soit le vôtre. Alors, avec votre aide, notre étude des mathématiques sera effectivement ouverte sur le monde.

Cela devrait aller de soi. Nous sommes des citoyennes et des citoyens libres et égaux en droits. Or, l'étude mathématique est une merveilleuse école morale; perpétuelle recherche du vrai, minutieuse reconnaissance des fautes possibles (faute reconnue, faute corrigée), recherche du dialogue avec nos semblables, vous et moi, pour avancer dans notre compréhension du sujet. Il y aura des difficultés, des obstacles, mais pas insurmontables puisque, à notre niveau, il s'agit d'initiations et comme le remarquait CLAIRAUT dans les premières pages de sa **Géométrie** : "*les premiers pas ne peuvent être hors de la portée des Commencants puisque, historiquement, ce sont des Commencants qui les ont faits les premiers*".

Alors – et mon trop long discours va trouver ici sa chute – notre classe aura atteint son but : vous aurez participé à son déroulement, à notre commune formation, pour vous, votre initiation, pour moi, mon perfectionnement nécessaire. Si, en fin d'année, vous avez pris goût à l'étude des mathématiques, ce sera une réussite. Si je vous ai donné l'impression, pas tellement d'avoir enseigné mais de vous avoir raconté de belles histoires, alors vous me trouverez comblé car je dois vous l'avouer pour finir, j'avais choisi pour modèle ce vieux MONTAIGNE qui disait avec son adorable sourire : "*Je n'enseigne pas, je raconte*".

## MINIMALISATION D'AIRES DE POLYGONES

Daniel REISZ

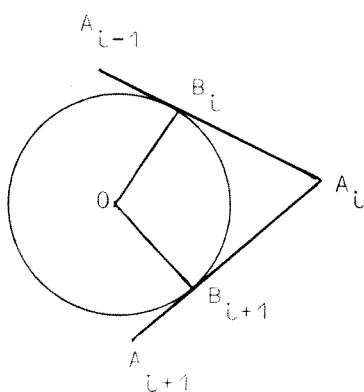
L'intéressant article d'Albert LENTZ ('L'Ouvert' n° 63) m'a amené à regarder quelques aspects du problème "opposé" : minimiser l'aire d'un polygone et plus particulièrement l'aire d'un polygone de  $n$  côtés circonscrit à un cercle de rayon 1. Intuitivement l'aire d'un tel polygone peut varier de l'infini à un minimum probablement atteint pour le polygone régulier. L'étude précise de ce problème est tout à fait accessible à un élève de lycée et la méthode utilisée ici propose une jolie application de la convexité d'une fonction.

Dans cette perspective, à partir de la convexité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$ , définie par exemple par

$$\forall x, y \in I \quad \frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

on fera établir l'inégalité de JENSEN : si  $f$  est convexe sur  $I$  et si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des éléments de  $I$  alors

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right).$$



Soit  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  un polygone circonscrit à  $(\Gamma)$  et qui touche  $(\Gamma)$  en  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

Si on pose

$$\widehat{B_i O B_{i+1}} = 2x_i$$

alors l'aire du quadrilatère  $OB_i A_i B_{i+1}$  est donnée par

$$A_i = tg x_i$$

avec  $\sum x_i = \pi$  et  $0 < x_i < \frac{\pi}{2}$ .

L'aire totale

$$A = \sum A_i = tg x_1 + tg x_2 + \dots + tg x_n$$

vérifie l'inégalité de JENSEN (la fonction  $tg$  est convexe sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ )

$$A \geq n tg \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) = n tg \frac{\pi}{n}$$

l'égalité étant atteinte dans le cas d'un polygone régulier.

On pourra faire remarquer, à propos des polygones réguliers, que l'intuition géométrique permet de conclure

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ntg \frac{\pi}{n} = \pi \text{ (aire du cercle inscrit)}$$

résultat qu'on peut retrouver plus "sérieusement" à partir de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{tg \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1.$$

### Un autre résultat

Si on appelle  $F_i$  l'aire du triangle curviligne  $B_i A_i B_{i+1}$  limité par les segments  $[A_1 B_i]$  et  $[A_i B_{i+1}]$  et par l'arc de cercle  $B_i B_{i+1}$  on a

$$F_i = tg x_i - x_i.$$

La fonction définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  par  $y = \frac{1}{tg x - x}$  étant convexe sur cet intervalle, l'inégalité de JENSEN permet d'écrire

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \dots + \frac{1}{F_n} \geq \frac{n}{tg(\frac{\pi}{n}) - \frac{\pi}{n}} = \frac{n^2}{tg(\frac{\pi}{n}) - \pi}.$$

Là encore l'égalité est atteinte pour les polygones réguliers.

## UNE BISSECTRICE, UNE MÉDIANE ET UNE HAUTEUR CONCOURANTES

André VIRICEL et Jean KUNTZMANN

*M. A. VIRICEL, s'adressant à M. Pierre DANIEL, à propos de l'article de ce dernier dans le n° 63, écrit :*

Mon cher collègue,

Votre étude de géométrie dans le n° 63 de '*L'Ouvert*' (juin 1991) m'a vivement intéressé. Je relève un premier point (le blâme ne s'adresse pas à vous) : l'exercice donné au départ (relevé dans un livre de 5<sup>e</sup>) me paraît amusant pour des gens déjà formés en géométrie mais à ne pas donner à des débutants, qui risquent d'en conclure on ne sait quoi.

Je vous informe – et mon idée n'est en rien de diminuer votre mérite – que ce problème a déjà été posé dans la revue '*Le Petit Archimède*' n° 90 de décembre 1982, par M. J. KUNTZMANN, éminent collègue de Grenoble, retraité depuis longtemps.

Les deux solutions fournies dans '*Le Petit Archimède*' et dans '*L'Ouvert*' sont d'ailleurs très différentes, et toutes deux simples et intéressantes.

Vous privilégiez comme côté fixe celui qui correspond à la médiane, alors que M. KUNTZMANN prend celui qui correspond à la hauteur.

(...)

*Nous joignons ci-après une copie de l'article cité paru dans le n° 90 du 'Petit Archimède' :*

### DES TRIANGLES NOUVEAUX

Dans tous les triangles, les hauteurs, les médianes et les bissectrices intérieures sont concourantes.

J. KUNTZMANN pose la question et la résout : "*Existe-t-il des triangles dans lesquels la hauteur  $AH$ , la médiane  $BM$  et la bissectrice  $CD$  concourent ?*".

Il s'agit :

- 1.- de construire de tels triangles,
- 2.- de les caractériser par une relation entre les côtés et les angles,
- 3.- de reconnaître dans un tel triangle les différents sommets.

**Solution**

$M$  étant le milieu de  $AC$ , les aires de  $MAB$ ,  $MCB$  d'une part,  $MAK$ ,  $MCK$  d'autre part sont égales; donc les aires de  $ABK$  et  $CBK$  le sont aussi.

$$AK \cdot BH = BC \cdot KH$$

$$\text{ou } \frac{KA}{KH} = \frac{BC}{BH}$$

Mais le théorème de la bissectrice donne :

$$\frac{KA}{KH} = \frac{CA}{CH} \text{ donc } \frac{BC}{BH} = \frac{CA}{CH}$$

$$CH = b \cos \hat{C}; BH = a - b \cos \hat{C}$$

$$a b \cos \hat{C} = b(a - b \cos \hat{C})$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a}{a + b}.$$

Il en résulte que l'intersection  $E$  de  $AC$  avec la perpendiculaire en  $B$  à  $BC$  est telle que  $CE = a + b$  donc que  $AE = a$ .

**Construction des triangles :** On se donne un triangle  $EBC$  rectangle en  $B$ , on porte  $EA = BC$  sur  $EC$ .  $ABC$  est le triangle cherché.

Identification des sommets : il s'agit de reconnaître les trois droites concourantes : la hauteur  $AH$ , la médiane  $BM$  et la bissectrice issue de  $C$ .

$$\text{Si } a < b \implies BH < HC \implies c < b$$

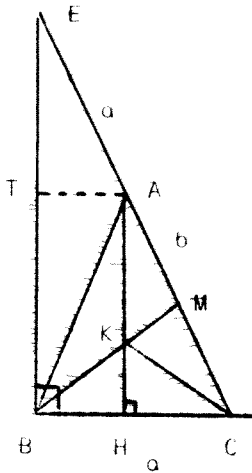
$$\implies ET < TB \implies a < c$$

donc :  $a < c < b$ .

Si  $a > b$ , toutes les inégalités sont inversées.

$$a > c > b$$

$$a \geq b \implies \hat{C} \geq 60^\circ.$$



Si on donne le côté  $BC$  fixe, quel est l'ensemble des points  $A$ ? Il s'obtient en menant  $BE \perp BC$  et en prenant  $A$  sur  $CE$  tel que  $EA = BC$ . La courbe obtenue que l'on peut tracer par points est appelée CONCHOÏDE de la droite  $BE$  pour le point  $C$  et la longueur  $BC$ .

**REMARQUE :** Si on porte sur  $CE$ ,  $EA = BC$ , mais de l'autre côté de la droite  $BE$  on obtient un triangle  $ABC$  dans lequel concourent la hauteur  $AH$ , la médiane  $BM$  et la bissectrice extérieure de l'angle  $\hat{C}$ .

'The American Mathematical Monthly' propose dans son numéro d'avril 91, sous la plume de John P. HOYT (Lancaster, PA), le problème suivant.

Démontrer (ou infirmer) qu'il y a une infinité de triplets naturels  $(a, b, c)$  sans facteur commun (plus grand que 1) tel que le triangle  $ABC$  de côtés  $a, b, c$  a la propriété suivante : la médiane issue de  $A$ , la bissectrice issue de  $B$  et la hauteur issue de  $C$  sont concourantes. Des exemples de tels triplets sont  $(12, 13, 15)$ ,  $(35, 277, 308)$  et  $(26598, 26447, 3193)$ .

#### A PROPOS DE L'ENQUÊTE

Une quarantaine de réponses nous sont parvenues dont les trois quarts émanent d'hommes. La répartition des niveaux d'enseignement traduit bien l'éventail du public visé : 25 % en collège, 40 % en lycée et 35 % en post-bac ou université. Ceci est assez logique puisque ne s'abonnent que les personnes qui trouvent un intérêt dans les articles qui paraissent.

'L'Ouvert' est un outil de travail puisque près de 90 % des lecteurs conservent les numéros pour pouvoir en effectuer une lecture tranquillement et se reporter à certaines articles en cas de besoin.

En ce qui concerne la nature des textes publiés, l'histoire des mathématiques est plebiscitée (90 %) ainsi que les informations sur les publications (qui ne sont sans doute pas assez développées dans la structure actuelle de 'L'Ouvert'). Par ailleurs, les articles précis sur un sujet limité sont largement préférés aux articles de synthèse (80 contre 55 %). La rubrique de problèmes est également fort appréciée (80 %). Par contre, la didactique marque un peu le pas, les lecteurs penchant plutôt pour des propositions d'activités (50 %).

Le point de vue suivant d'une lectrice (M. BENOIS) résume bien l'objectif de 'L'Ouvert' : (...) "*j'apprécie très souvent la lecture de 'L'Ouvert'. Je pense que les tendances des articles peuvent intéresser les professeurs de lycée, les professeurs de DEUG et les enseignants intéressés par les aspects moins scolaires des mathématiques. 'L'Ouvert' me semble avoir une politique dans ce domaine bien à lui et qu'on ne retrouve pas dans d'autres revues IREM. Les articles plus proches d'une pratique pédagogique ont un public beaucoup plus large mais il y a déjà de nombreuses publications dans ce domaine*" (...)

# POUR UNE APPROCHE "FRÉQUENTIELLE" DES PROBABILITÉS

Abderrazzak MAA

Une des nouveautés des programmes de mathématiques, qui rentreront en vigueur à l'année scolaire 1991-92, est l'introduction des probabilités à partir de la classe de première. L'objectif essentiel restant la description d'expériences aléatoires simples et le calcul des probabilités s'y rattachant. L'introduction de la notion de probabilités doit être purement "fréquentielle" c'est-à-dire, **appuyée par l'observation** des séries statistiques associées aux expériences aléatoires considérées, toutes formalisation ou justification théoriques étant hors programme.

Bien entendu, les élèves n'auront pas vu l'analyse combinatoire auparavant, ce qui a l'air de choquer beaucoup d'enseignants trop habitués à la fameuse définition :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

La question qui se pose, est la faisabilité dans les meilleures conditions d'une introduction "fréquentielle" de la notion de probabilités ainsi que le bien fondé de l'opinion selon laquelle une telle approche didactique centrerait l'effort sur le travail de l'élève.

Des groupes de réflexion à l'échelle académique se sont constitués pour mettre en place des formations pédagogiques sur ce thème. L'objectif de ce petit exposé est d'indiquer quelques exemples d'activités, testées en classe, et qui vont prospectivement dans le sens des nouveaux programmes, dont la grande originalité est de ne pas réduire l'étude des probabilités à celle de l'équiprobabilité. La liste des énoncés testés est donnée à la suite des indications pédagogiques (\*).

## DÉROULEMENT DE LA LEÇON

### I.— Exemple d'approche : Aiguille de BUFFON

On peut faire fabriquer les réseaux par les élèves et les impliquer eux-mêmes dans l'expérience au lieu de leur donner les résultats, dans ce cas il faudra remodeler la rédaction de l'exercice.

Deux finalités sont visées dans cet exemple :

- 1) la stabilité de la fréquence est la clé de la conjecture demandée;
- 2) dans le cas particulier  $a = 2l$ , on obtient  $p = \frac{1}{\pi}$  et  $q = 1 - p = \frac{\pi-1}{\pi}$ , occasion à ne pas rater pour faire la comparaison avec l'expérience qui consiste à lancer une pièce de monnaie ( $p = q = \frac{1}{2}$ ), en posant des questions sur les différents

---

(\*) N.D.L.R. : Voir en fin de l'article.

© L'OUVERT 65 (1991)

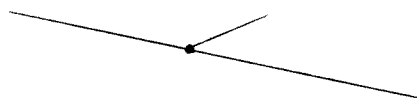
aspects recherchés dans chacune des expériences (l'endroit où la pièce tombe n'a pas d'intérêt alors que pour l'aiguille c'est tout à fait le contraire).

L'uniformité du codage 0,1 ou P,F donnera un excellent prétexte pour parler d'univers et d'éventualité élémentaire.

Mise en garde : l'aiguille peut rencontrer une droite du réseau de deux manières :



le point de rencontre n'est pas une des extrémités de l'aiguille



le point de rencontre est une extrémité de l'aiguille.

Dans ce dernier cas, les élèves peu familiarisés avec les opérations ensemblistes risquent de considérer l'intersection comme vide.

## II.— Langage des événements

L'exercice 2, proposé ici, est tiré d'un manuel scolaire (Dimathème, classe de terminale D). Il offre un exemple d'expériences aléatoires assez simples pour que les élèves s'engagent dans l'activité de recherche et fournit à l'enseignant la possibilité d'utiliser plusieurs types de représentations (arbres, tableaux à double entrée) pour la visualisation des notions traitées.

Il peut être à la fois le support de l'introduction du vocabulaire des événements et l'occasion d'utiliser des relations ensemblistes telles que

$$\text{card } A \cup B = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } A \cap B.$$

Deux remarques, néanmoins, me paraissent importantes :

- 1) d'entrée de jeu, la précision de la notion de risque, à savoir qu'un jeu est équitable lorsqu'on a autant de chances de gagner que de perdre ;
- 2) à propos du troisième jeu, souligner l'importance du **choix de l'univers** dans lequel on travaille, et par conséquent la nature de la probabilité considérée dans celui-ci.

On pourra à la fin de l'exercice faire une mise au point en généralisant les définitions vues sur des exemples, à un univers  $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ ; les  $a_i$   $1 \leq i \leq n$  étant les différents résultats d'une certaine expérience aléatoire.

On enchaînera ensuite avec l'exercice 3 qui est un cas particulier très facile de la "marche aléatoire" et qui réinsiste sur l'importance du choix de l'univers, redonne des exemples concrets de la notion d'événements impossibles et montre le rôle capital de l'emploi des représentations graphiques pour résoudre les problèmes (sans aucun recours à l'analyse combinatoire, bien sûr!).

Tel qu'il est posé, cet exercice est difficile d'accès. Certains élèves de Terminale à qui il a été proposé, ont répondu hâtivement que l'univers est blanc, noir. Aussi, il serait judicieux de le faire en deux temps.



**a. Partie expérimentale**

On invite chacun des élèves à réaliser l'expérience une dizaine de fois à l'aide de cinq morceaux de papier portant la mention "B" et cinq autres la mention "N"; ou encore à lancer une pièce de monnaie dix fois de suite et d'observer le nombre de changements de faces. Un intérêt immédiat de cette étape, est de faire découvrir aux élèves la forme des événements élémentaires et par suite celle des événements "gagner 1 F", "gagner 2 F", etc ...

Pour les événements "gagner 0 F" ou "gagner 10 F", logiquement impossibles, les élèves n'auront pas trop de mal à réaliser qu'ils n'ont aucune chance de se produire.

A la fin de l'expérience, une mise en commun conduira à totaliser les effectifs obtenus par chacun des élèves et à dresser un tableau globalisant les résultats (l'effectif total sera relativement raisonnable : 350 pour une classe de 35 élèves, par exemple!).

Voici un exemple de résultats obtenus avec un groupe de 15 élèves de seconde au mois de juin 1991 :

gain en F	effectifs	effectifs	fréquences observées	fréquences calculées
1	2	3		
2	0 (!)	5		
3	14	29		
4	18	47		
5	29	67		
6	22	38		
7	12	22		
8	2	7		
9	1	2		
Total	100	220		

Ce tableau suggère plus d'un commentaire. En effet, les élèves avaient décidé au départ de fixer le nombre d'expériences à 100, mais la non apparition de l'événement "gagner 2 F" les a surpris au point que le groupe s'est scindé en deux après une grande discussion :

- le premier sous groupe a opté pour la poursuite des expériences,
- le deuxième a préféré chercher une réponse "théorique".

La plupart des élèves de ce deuxième groupe a rejoint le premier après avoir trouvé les éventualités qui composent l'événement "gagner 2 F".

Finalement, l'ensemble du groupe (sauf deux élèves qui ont continué à chercher)

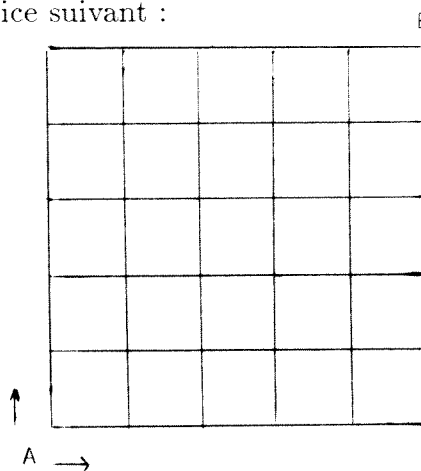
est allé jusqu'à 220 expériences. Le tableau obtenu est très parlant puisqu'il donne une idée assez intéressante sur l'importance de la taille de chacun des événements et surtout sur la "symétrie" de la distribution.

A noter que les deux élèves qui n'ont pas joué le jeu de la poursuite de l'expérimentation sont arrivés à des valeurs comme  $2^{10}$  ou  $10 \times 5^2$  (il y a exactement 252 possibilités!) sans pour autant pouvoir les justifier véritablement.

### b. Dénombrement des différentes possibilités

Dans cette partie, on pourra proposer aux élèves, sans donner a priori d'indication sur le lien avec la situation étudiée, l'exercice suivant :

Dénombrer tous les chemins allant de  $A$  à  $B$ , sachant qu'on ne peut se déplacer que de bas en haut et de gauche à droite.



Pour la résolution on se basera sur le principe de construction du triangle de PASCAL.

On pourra à la fin faire une petite synthèse en comparant les fréquences observées et les fréquences calculées.

### III.— Modèle mathématique

Le but de l'exercice 4 (inspiré du manuel de l'IREM de Strasbourg, classe de 5<sup>e</sup>(\*)) est de rappeler les principales propriétés des fréquences d'une série statistique.

Rien n'empêche de demander aux élèves de se partager le travail pour dépouiller la série statistique proposée. La deuxième partie de cet exercice introduit la probabilité d'un événement élémentaire comme étant la fréquence de réalisation de celui-ci.

L'exercice 5 reprend la stabilité de la fréquence de façon intuitive et conduit à une équiprobabilité.

Définition (conforme aux programmes) : la probabilité d'un événement  $A$  de l'univers  $E$ , est la somme des probabilités de ses événements élémentaires.

Après cette définition, on pourra traiter l'exercice 6 qui est une généralisation de l'exercice 2, tel qu'il est posé s'il s'agit d'une classe d'un bon niveau, sinon on se limitera à des cas particuliers comme  $n = 2$  (pièces de monnaies)  $n = 5$

(\*) Edition Hachette, collection Istra.

(roulette). C'est sans doute un très bon terrain d'investissement du vocabulaire et un champ de découverte des principales propriétés d'une probabilité. Comme dans la deuxième partie, une mise au point permettra de regrouper les différentes propriétés en considérant l'univers  $E$  vu précédemment.

### LISTE DES ÉNONCÉS PROPOSÉS

#### Exercice 1.- Aiguille de BUFFON (\*\*) (1777)

Sur un plan sont tracées des droites parallèles distantes de  $a$ . On jette au hasard sur ce plan une aiguille "mince" de longueur  $l$ , avec  $l < a$ . On répète cette expérience  $n$  fois et on s'intéresse au nombre de points de rencontre de l'aiguille et du réseau de droites parallèles.

Dans toute la suite, on prendra  $a = 6$  cm et  $l = 5$  cm.

1. Pour  $n = 118$ , voici les résultats obtenus (on code 1 si l'aiguille croise une droite, 0 si l'intersection est vide).

```

01011011010011010101100101110110100
11011101001100000100001001110010101
00110101101111111010110111101111001
1001000010001
    
```

Calculer la fréquence  $p$  des rencontres de l'aiguille avec l'une des droites. Calculer au dixième près, le rapport  $\frac{2l}{pa}$ .

2. Pour  $n = 2048$ , on a observé 1086 intersections non vides. Calculer au centième près, le rapport  $\frac{2l}{pa}$ .

3. Faire une conjecture, en supposant que l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois.

En déduire la fréquence moyenne du nombre de points de rencontre de l'aiguille et du réseau des droites parallèles en fonction de  $l$  et de  $a$ .

4. Cas particulier :  $a = 2l$ ; calculer  $p$  et  $1 - p$ .

**Exercice 2.** Accepteriez-vous de jouer avec quelqu'un qui vous proposerait l'un des jeux suivants?

**Premier jeu :** "Je parie 5 francs, qu'en lançant un dé bien équilibré, j'obtiens un résultat pair".

**Deuxième jeu :** "Je parie 5 francs qu'en lançant deux dés bien équilibrés, j'amèrerai au moins un six".

---

P.S. : Si vous êtes intéressé par une approche historique et si votre établissement dispose d'une salle audio-visuelle, vous pourrez vous procurer les cassettes "Chroniques du hasard I et II" au CNDP.

(\*\*) Georges Louis LECLERC, comte de BUFFON, naturaliste français, né à Montbard (1707-1788) auteur de "L'Histoire naturelle" (44 volumes). Dans le volume VII, BUFFON aborde assez curieusement de nombreux problèmes de calcul des probabilités dont celui de l'aiguille.

**Troisième jeu :** “Je parie 5 francs qu’en lançant deux dés bien équilibrés, la somme des numéros sortis sera au moins égale à 7”.

**Quatrième jeu :** “Je parie 5 francs qu’en lançant deux dés bien équilibrés, la différence entre les points marqués est 1 ou 2”.

**Exercice 3.** Une urne contient 10 boules : 5 blanches et 5 noires. Un joueur tire ces boules les unes après les autres, en notant leur couleur à chaque tirage, et ceci jusqu’au vidage complet de l’urne.

Le joueur gagne 1 franc à chaque tirage où il tire une boule de couleur différente de la boule précédemment tirée. Sinon, il ne gagne rien.

a) Donner quelques exemples d’événements élémentaires et préciser l’univers  $E$  (ensemble des résultats) de cette expérience aléatoire. Déterminer le cardinal de l’ensemble  $E$ .

b) A-t-on des “chances” de gagner 0 F? 1 F? 2 F? 9 F? 10 F?

**Exercice 4.** Le tableau ci-dessous donne le nombre d’apparition des chiffres 0, 1, 2... 9 pour les 500 premières décimales du nombre  $\pi$ .

*Première partie :*

a) Compléter ce tableau. Que peut-on dire des fréquences obtenues?

b) Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard un chiffre parmi les 500 premières décimales de  $\pi$ .

3,14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288
41971	69399	37510	58209	74944	59230	78164
06206	20879	86280	34825	34211	70679	82148
08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172
53594	08128	48111	74302	84102	70193	85211
05559	64462	29489	54930	38196	44288	10975
66593	34461	20475	64823	37837	83165	27120
19091	45648	56692	34603	48610	45432	66482
13393	60726	02491	41273	73358	70066	06315
58817	48815	30920	96252	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841
46951	94151	16094	33057	27036	57595	91953
09218	61173	81932	61179	31051	18548	07446
23799	62749	58735	18857	52724	89122	79381
83011	94512	98336	73362	44065	66430	86021
19501	60924	48077	22054	16285	53096	62027
55593	97986	95022	24749	96206	07496	03041

Chiffre	Nombre d'apparitions	Fréquences
0	45	$p_0 =$
1	59	$p_1 =$
2	53	$p_2 =$
3	50	$p_3 =$
4	54	$p_4 =$
5	50	$p_5 =$
6	48	$p_6 =$
7	36	$p_7 =$
8	53	$p_8 =$
9	52	$p_9 =$
Total		

*Deuxième partie :*

La probabilité de tirer le chiffre  $i$  ( $0 \leq i \leq 9$ ) étant la fréquence  $p_i$  d'apparition de celui-ci; calculer

a) la probabilité de tirer un chiffre inférieur ou égal à 1;

b) la probabilité de tirer un chiffre pair;

c) la probabilité de tirer un chiffre impair (de deux manières).

POUR UNE APPROCHE "FRÉQUENTIELLE" DES PROBABILITÉS

**Exercice 5**

Compléter le tableau ci-contre, correspondant au premier million de décimales de  $\pi$ , et répondre aux questions de l'exercice précédent.

Chiffre	Nombre d'apparitions	Fréquences
0	99959	$p_0 =$
1	99758	$p_1 =$
2	100026	$p_2 =$
3	100229	$p_3 =$
4	100230	$p_4 =$
5	100359	$p_5 =$
6	99548	$p_6 =$
7	99800	$p_7 =$
8	99985	$p_8 =$
9	100106	$p_9 =$
Total		

**Exercice 6 :** Une urne contient  $n$  boules identiques numérotées de 1 à  $n$ . On tire successivement, avec remise, deux boules de l'urne. On désigne par  $x$  le numéro marqué sur la première boule, par  $y$  le numéro marqué sur la deuxième boule. Calculer la probabilité des événements suivants :

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $x = 2$            | b) $y = 3$            |
| c) $x = 2$ et $y = 3$ | d) $x = 2$ ou $y = 3$ |
| e) $x < y$            | f) $x > y$            |
| g) $x \neq y$         | h) $x + y \leq n$     |

# UN RETOUR AUX ORIGINES DU CALCULABLE

## La thèse de CHURCH/POST

Alain CARDON, Christian CHARRAS, Daniel KROB

Groupe Informatique de l'IREM de Rouen

### 1.— Introduction

L'existence de l'Informatique nécessite a priori naturellement de se poser le problème de savoir ce qui est ou non manipulable automatiquement par une machine. C'est là tout le problème du calculable qui consiste à essayer de définir formellement le champ de compétence d'une machine abstraite qui modéliserait un ordinateur. Il est donc d'autant plus surprenant de savoir que cette problématique a émergé dès les années 30, bien avant l'existence des ordinateurs et que ce sont ces travaux qui permettront au contraire à la jeune science informatique de se développer sur des fondements théoriques solides.

De nombreux modèles de calculabilité ont été proposés au fil des ans. Les plus connus sont les suivants :

1) **La théorie des fonctions récursives** : il s'agit d'un formalisme développé par GÖDEL et HERBRAND vers 1934 (cf [1] p. 351) où la notion de calculabilité est modélisée par l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{N}^n$  dans  $\mathbb{N}^m$  que l'on peut construire à partir des fonctions primitives suivantes :

- la fonction zéro de  $\mathbb{N}^n$  dans  $\mathbb{N}$  qui à tout  $n$ -uplet d'entiers associe 0,
- la fonction successeur de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  qui à tout  $n \in \mathbb{N}$  associe  $n + 1$ ,
- les fonctions projections de  $\mathbb{N}^n$  dans  $\mathbb{N}$  qui à tout  $n$ -uplet d'entiers associe sa  $i$ -ième composante ( $i$  étant fixé dans  $[1, n]$ ),

et à l'aide des trois opérations suivantes :

- la *composition* : si  $f$  et  $g$  sont des fonctions récursives,  $f \circ g$  est aussi récursive quand elle est définie,
- la *récurrence* : si  $f$  et  $g$  sont des fonctions récursives, alors la fonction  $h$  définie par les relations  $h(x_1, \dots, x_n, y + 1) = g(x_1, \dots, x_n, y, h(x_1, \dots, x_n, y))$  et  $h(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$  est aussi récursive,
- la *minimisation* : si  $f$  est une fonction récursive, alors la fonction qui associe à tout  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$ , le plus petit  $y$  tel que  $f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ , s'il existe, est aussi récursive.

2) **Le lambda-calcul** : c'est une théorie dont les fondements ont été définis en 1933-1935 par CHURCH et KLEENE (cf [2,5]). L'intention de ses créateurs était l'étude des règles de définition liées à la notion de fonction. De façon plus précise.

une fonction est pensée ici comme un lien abstrait entre une fonction et une valeur, ce qui est fondamentalement différent de la vision classique d'une fonction comme un graphe. Dans le lambda-calcul, l'accent est aussi mis sur le caractère structurellement libre des objets manipulés qui sont à la fois fonctions et arguments (en particulier une fonction peut s'appliquer à elle-même).

Le lambda-calcul permet de modéliser une classe de fonctions où la composition est l'opération primitive. Pour cela, on se donne d'abord un alphabet de variables. On construit alors inductivement des termes - qui représentent les fonctions que l'on cherche à modéliser - à l'aide des règles suivantes :

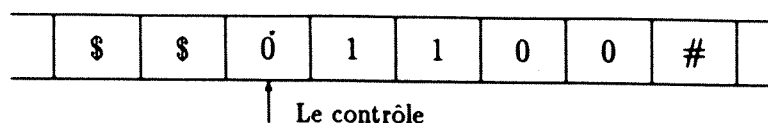
- Toute variable est un terme.
- Si  $M$  est un terme et si  $x$  est une variable,  $\lambda x.M$  est un terme.
- Si  $M, N$  sont des termes,  $M.N$  est un terme.

La notation  $\lambda x.M$  modélise le fait que  $M$  est une fonction de  $x$ . La sémantique de la dernière règle de construction ci-dessus est donnée par la règle de transformation de termes appelée  $\beta$ -réduction qui est définie par :

$$(\lambda x.M).N \longrightarrow M[x/N]$$

où  $M[x/N]$  désigne la substitution de  $N$  à la variable  $x$  dans  $M$ . Cette règle montre donc que le terme  $M.N$  modélise la composition des deux fonctions représentées par les termes  $M$  et  $N$ . On peut alors définir à l'aide du lambda-calcul une classe de fonctions sur les entiers dites  $\lambda$ -définissables. Il est à noter que CHURCH a prouvé que ces fonctions sont exactement les fonctions récursives au sens de GÖDEL-HERBRAND.

**3) Les machines de TURING :** il s'agit d'un modèle mécanique introduit par TURING en 1936 en [7]. Dans ce modèle, les calculs sont effectués par un programme qui interagit sur une bande doublement infinie. De façon plus précise, on dispose d'une bande séparée en cases dans lesquelles on peut placer ou non des symboles (en particulier, on peut coder ici tout entier par une succession de symboles du même type séparés par deux délimiteurs).



Une tête de lecture/écriture pointe sur l'une des cases de la bande et selon le contenu de ce qu'elle voit, modifie ou non la case qu'elle pointe ou se déplace d'une case vers la droite ou la gauche. Ce mécanisme est contrôlé par un programme qui a pour but de répéter de façon identique ce qu'on observe dans des situations identiques.

L'objectif de TURING était de modéliser de manière discrète tout procédé calculable, même s'il relève a priori du domaine du continu. Il est intéressant de noter que dans l'article originel de TURING (cf [7]), tout un paragraphe est consacré à une justification philosophico-mathématique du fait que tout procédé de calcul peut être effectué dans ce modèle : l'argumentation de TURING est basée sur le fait que

lorsqu'un individu effectue un calcul réel, on peut discrétiser à la fois l'espace dans lequel se fait ce calcul et le temps durant lequel se déroule ce calcul de manière à ce que le cerveau du "calculateur" passe de manière discrète d'un état à un autre.

**4) Les machines de POST** : c'est un modèle très proche de celui de TURING, qui a été introduit indépendamment de ce dernier par POST (cf [6]) dans l'article étudié en détails ci-après. Le lecteur pourra donc se référer au paragraphe 2.2 qui suit pour la description précise de ce type de machines.

C'est CHURCH le premier qui a prouvé l'équivalence (c'est-à-dire la même puissance d'expressibilité) entre le  $\lambda$ -calcul et la théorie des fonctions récursives (cf [1]). Ce résultat a motivé le problème fondamental de savoir si deux modèles quelconques de calculabilité sont équivalents ou non. C'est POST qui a émis en fait le premier, peu après la publication du résultat de CHURCH en 1936, la thèse philosophique (1) (connue maintenant sous le nom de thèse de CHURCH) affirmant que tous les modèles de calculabilité sont équivalents. De fait, cette thèse a toujours été vérifiée par la suite.

Il nous paraît aussi important de replacer rapidement ce problème du calculable dans son contexte historique de façon à pouvoir comprendre comment cette question a émergé. Pour cela, il faut remonter au début du siècle. En effet, Hilbert voulait à cette époque prouver la non-contradiction des Mathématiques par la méthode suivante :

1. Tout d'abord, réaliser un codage de tout énoncé mathématique sous une forme inambigüe et purement formelle.
2. Ensuite, construire un algorithme permettant de décider si un énoncé donné sous la forme obtenue par la première étape, est vrai ou faux.

La première partie du programme de HILBERT a été réalisée et a conduit au développement de la logique formelle. La seconde a échoué en raison du théorème d'incomplétude de GÖDEL qui prouve qu'il existe toujours des propositions indécidables dans tout système formel contenant au moins l'arithmétique. L'échec du programme de HILBERT a conduit tout naturellement à essayer de définir un domaine plus restreint où des mécanismes de décision pouvaient être fabriqués : c'est ainsi qu'est apparu le domaine du calculable dont l'étude est à la base de la science informatique (2).

## 2.— Emil L. POST : Processus combinatoires finis - Un premier modèle

### 2.1. Présentation

L'article d'Emil POST que nous allons maintenant présenter plus en détails, est paru sous le titre "Finite combinatory Processes - Formulation 1" dans le *Journal of Symbolic Logic* en Septembre 1936. Il nous a paru intéressant d'en proposer une

---

(1) L'adjectif "philosophique" est là pour bien indiquer que cette thèse n'est pas une affirmation à caractère scientifique - puisqu'elle n'est pas vérifiable par essence - mais un parti-pris idéologique.  
 (2) Il est intéressant de noter que l'on peut construire explicitement des fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  non calculables. Le lecteur pourra se référer à [4] où est présentée une fonction (la fonction de Rado) qui croît plus vite que toute fonction calculable.



traduction commentée car il s'agit d'un texte qui joue en quelque sorte un rôle pivot dans l'histoire du calculable et donc des fondements théoriques de l'informatique.

L'un des intérêts de cet article est qu'il est un des premiers à présenter un modèle "mécaniste" de calculabilité. En effet, le texte de POST est consacré à la description de ce que nous appelons maintenant la *machine de POST*. Il est à noter que le formalisme des machines de TURING (cf [7]) est apparu la même année que celui des machines de POST, mais de façon tout à fait indépendante. Bien que le modèle de TURING ait désormais supplanté celui de POST, ce dernier garde cependant tout son intérêt épistémologique car il dénote une rupture historique fondamentale avec les précédents modèles de calculabilité qui étaient tous de nature fonctionnelle ou logique.

Le second intérêt majeur de cet article est qu'il énonce, vraisemblablement pour la première fois, la thèse philosophique, appelée désormais *thèse de CHURCH*, qui affirme l'équivalence entre tous les modèles possibles de calculable. En fait, la plupart des auteurs contemporains citent l'article [1] de CHURCH comme référence originelle pour cette thèse bien qu'il ne contienne nulle part cette affirmation de nature plus philosophique (ou idéologique) que mathématique. Dans [1], CHURCH se contente en effet de montrer l'équivalence de deux modèles de calculabilité (le lambda calcul qu'il vient de créer et la théorie des fonctions récursives au sens de GÖDEL-HERBRAND). Tout au contraire, POST termine son article [6] en affirmant de manière très forte que, dès qu'un nouveau modèle de calculabilité sera développé, il faudra montrer son équivalence avec un modèle déjà existant. De plus, POST parle bien d'un tel phénomène comme d'une *loi naturelle*. Il nous semble donc incontestable que la thèse de CHURCH doive en fait être attribuée à POST.

Terminons cette courte présentation en signalant que nous avons choisi dans la traduction qui suit, d'utiliser une numérotation classique pour toutes les notes que nous apportons au texte et d'utiliser un des symboles \*, †, ‡ ou § pour les notes originelles de POST ou de son éditeur.

## 2.2. Traduction et commentaires

\* (3)

\* Le modèle (4) que nous présentons ici devrait avoir une grande importance pour le développement de la logique symbolique. Il s'inscrit dans le prolongement du théorème d'incomplétude de GÖDEL et des résultats de CHURCH sur les problèmes

---

\* Le lecteur pourra comparer cet article avec celui de A.M. TURING "Sur les nombres calculables" (3) qui devrait paraître sous peu dans les *Compte-Rendus de la Société Mathématique de Londres*. Notre article cependant, bien que publié ultérieurement, a été écrit de manière totalement indépendante de celui de TURING. *Note de l'Editeur*.

---

(3) Il s'agit de l'article de TURING dans lequel ce dernier introduisait les "machines de TURING".  
 (4) Nous avons choisi de traduire systématiquement par "modèle" le terme anglais "formulation" utilisé par POST, — faisant en cela une relecture a posteriori de cet article : en effet, la "machine de POST" que celui-ci présente ici n'est désormais pour nous qu'un modèle de calculabilité parmi d'autres.

indécidables (5) (6).

Nous considèrerons qu'un *problème global* (7) consiste en une classe de *problèmes particuliers* (8). Une solution du problème global devra fournir une réponse à chaque problème particulier.

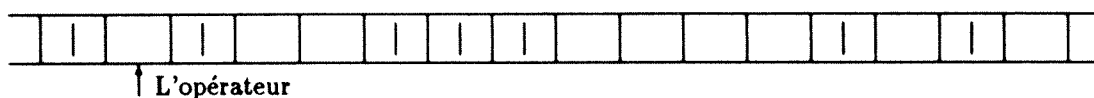
Pour préciser la notion de solution dans notre modèle, nous introduirons deux concepts : celui d'un *espace symbolique* (9) dans lequel le travail conduisant du problème à sa réponse est réalisé (†) et celui d'un *ensemble* inaltérable d'*instructions* qui à la fois contrôle les opérations dans l'espace symbolique et détermine l'ordre dans lequel les instructions doivent être appliquées.

Dans ce modèle, l'espace symbolique est en une suite doublement infinie d'espaces ou de boîtes, i.e. est en bijection ordonnée avec la suite des entiers  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ . L'opérateur (10) (c'est-à-dire celui qui est chargé de résoudre le problème) doit nécessairement se déplacer et travailler dans cet espace symbolique et n'est capable que de se trouver dans une et une seule boîte à la fois et de la manipuler. À part la présence de l'opérateur, une boîte est réputée n'avoir que deux positions possibles : à savoir être vide (ou non marquée) ou bien avoir une marque unique, par exemple un trait vertical (11).

On distingue une boîte que l'on appelle le point de départ. Nous supposerons désormais de plus qu'un problème particulier est donné sous une forme symbolique

† Il y a à la fois un espace et un temps symboliques.

- (5) Nous avons choisi de traduire l'expression anglaise "absolutely unsolvable", mot à mot "complètement non résoluble", par le terme plus moderne "indécidable".
- (6) POST fait ici référence dans son article : 1) à l'article fondamental de GÖDEL de 1931 [3] dans lequel le théorème d'incomplétude a été énoncé; 2) à l'article de CHURCH [1].
- (7) POST emploie le terme "general problem", c'est-à-dire "problème général", que nous avons choisi de rendre systématiquement ici par "problème global".
- (8) Dans ce paragraphe, POST introduit le concept de "problème" qu'il "définit" plutôt vaguement. À la lumière du développement de l'informatique, nous pouvons risquer quelques hypothèses : par "problème global", POST entend vraisemblablement une question d'ordre général susceptible d'être résolu par un traitement informatique, comme par exemple "calculer le carré d'un nombre entier" ou bien "trier un jeu de données". Dans ces deux exemples, le problème consiste en la liste des cas particuliers correspondants. Ainsi, les deux exemples précédents reviennent respectivement à considérer la liste des problèmes particuliers : ("calculer le carré de  $n$ ") $_{n \in \mathbb{N}}$  et ("trier la liste  $L$ ") $_{L \in \text{Listes}}$ . Pour être plus précis, des problèmes particuliers seront donc ici "calculer le carré de 7" ou "trier la liste (1 9 9 0)".
- (9) Nous avons choisi de traduire le terme "symbol space" par "espace symbolique" plutôt que par "espace des symboles".
- (10) Nous traduisons ici par "opérateur" le terme anglais "worker", c'est-à-dire "travailleur".
- (11) On peut donc visualiser la machine de POST dont l'auteur est en train de préciser le fonctionnement comme une bande doublement infinie de la forme suivante :



Cette bande est l'espace symbolique dans lequel un programme (i.e. l'ensemble d'instructions) pilote la tête de lecture (i.e. l'opérateur) pour effectuer un certain nombre d'opérations.

par un certain nombre de boîtes marquées d'un trait. De même, la réponse sera donnée de manière symbolique à l'aide d'une configuration similaire de boîtes marquées. Pour être précis, la réponse est la configuration des boîtes marquées qui restent dans l'espace symbolique à la fin du processus de résolution (12).

L'opérateur est supposé capable de réaliser les opérations primitives suivantes \*:

- (a) Marquer la boîte (supposée vide) dans laquelle il se trouve
- (b) Effacer la marque de la boîte (supposée marquée) dans laquelle il se trouve
- (c) Se déplacer vers la boîte à sa droite
- (d) Se déplacer vers la boîte à sa gauche
- (e) Déterminer si la boîte où il se trouve, est ou non marquée

L'ensemble des instructions qui - cela doit être remarqué - est le même pour tous les problèmes particuliers et est donc adapté au problème général, doit être de la forme suivante. Il doit commencer par l'instruction :

*Partir au point de départ et suivre l'instruction 1.*

Puis il consiste en un ensemble fini d'instructions numérotées  $1, 2, 3, \dots, n$ . La  $i$ -ième instruction doit être de l'un des types suivants :

- (A) Effectuer l'opération  $O_i$  [ $O_i = (a), (b), (c)$  ou  $(d)$ ] et passer à l'instruction  $j$
- (B) Effectuer l'opération  $(e)$  et suivant la réponse, passer à l'instruction  $j'_i$  ou  $j''_i$
- (C) Arrêter.

Il suffit clairement qu'une et une seule instruction soit du type (C). On remarquera aussi que l'état de l'espace symbolique n'affecte directement le processus qu'à travers les instructions de type (B) (13).

Un ensemble d'instructions sera dit *applicable* à un problème global donné si, dans son application à chaque cas particulier de ce problème, il ne permet jamais l'exécution d'une opération (a) (resp. (b)) quand la boîte où se trouve l'opérateur, est marquée (resp. non marquée) †. Un ensemble d'instructions applicable à un problème global induit un processus déterministe quand il est appliqué à chaque cas particulier de ce problème. Ce processus se terminera quand et seulement quand il rencontrera l'instruction de type (C). On dira alors que l'ensemble d'instructions détermine un *1-processus fini* associé au problème global s'il est applicable au problème et *si le processus qu'il détermine se termine pour chaque problème*

---

\* Et, bien sûr, de respecter les instructions décrites ci-dessous.

† Bien que notre définition d'un ensemble d'instructions aurait pu être aisément formulée de façon à ce que l'applicabilité soit automatiquement assurée, il ne vaut mieux pas procéder ainsi pour de multiples raisons.

---

(12) L'auteur propose donc ici un codage (binaire) des données.

(13) On remarquera que les instructions (A) sont des instructions de branchement inconditionnel et que les instructions (B) sont des instructions de test. Autrement dit, le "langage" séquentiel que donne POST contient un "Goto" et un "If Then Else", ce qui est assez puissant pour décrire l'ensemble des fonctions calculables.

*particulier* (14). On dira qu'un 1-processus fini associé à un problème global est une *1-solution* du problème si la réponse qu'il apporte à chaque problème particulier est toujours correcte (15).

Nous ne nous intéresserons pas ici à la façon dont la configuration des boîtes marquées correspondant à un problème particulier ou à sa réponse, symbolise la sémantique du problème (16) et de sa solution. En fait, nous supposons ici que le problème particulier est donné sous forme symbolique grâce à un mécanisme extérieur et qu'il en est de même pour la réception de la réponse. On peut plus précisément dire que le problème général consiste en une infinité au plus dénombrable de problèmes particuliers. Nous ne considérerons pas le cas fini. Imaginons donc une bijection établie entre la classe des entiers positifs et celle des problèmes particuliers. Nous pouvons représenter par exemple l'entier  $n$  en marquant les  $n$  premières boîtes à droite du point de départ (17). On dira que le problème général est *1-donné* si on peut obtenir un 1-processus fini qui énumère de manière bijective la classe des problèmes particuliers constituant le problème global, quand il est appliqué à la classe des entiers positifs symbolisée comme précédemment. De plus, il sera agréable de supposer que quand le problème global est 1-donné, chaque processus particulier replace l'opérateur au point de départ. Alors, si un problème global est 1-donné et 1-résolu, nous pouvons combiner, avec quelques modifications évidentes, les deux ensembles d'instructions pour obtenir un 1-processus fini qui donne la réponse à chaque problème particulier quand ce dernier est donné par un entier sous forme symbolique (18).

Avec quelques modifications, la formulation précédente est aussi applicable à la logique symbolique. Nous n'avons pas maintenant une classe de problèmes particuliers, mais un unique marquage initial fini de l'espace symbolique, représentant les axiomes de la logique considérée. D'un autre côté, il n'y aura plus d'instruction du type (C). En conséquence, si l'on suppose l'applicabilité réalisée, on obtiendra un processus déterministe *sans fin*. Nous supposerons aussi que dans l'exécution de ce processus, certains groupes de symboles seront reconnaissables - i.e. certaines suites finies de boîtes marquées et non marquées - et qu'ils ne seront pas modifiés

(14) Cette première définition est essentiellement de nature syntaxique : un programme est un 1-processus fini s'il vérifie à la fois la condition de cohérence qu'est l'applicabilité et une condition de terminaison.

(15) Cette deuxième définition est de nature sémantique. En effet, un 1-processus fini n'est qu'un programme correct qui s'arrête, mais qui peut faire n'importe quoi (comme répondre  $n^2$  alors que la fonction à calculer est  $n \rightarrow 2.n$  par exemple). Un 1-processus fini devient donc une 1-solution quand il résout bien le problème qu'on lui demande de résoudre.

(16) L'auteur a employé ici le terme "meaningful problem", mot à mot "problème significatif", que nous avons choisi de rendre par "sémantique du problème".

(17) On remarquera que POST élude ici le problème, toujours délicat, de la représentation de l'entier 0.

(18) Le processus que POST décrit, permet de ramener la notion de problème global à celle de fonction de  $\mathbb{N}$  dans l'espace des réponses. En effet, il nous dit simplement que si chaque problème particulier est codé par un entier, alors on peut combiner un programme qui associe à chaque entier le problème particulier qu'il code et le programme de résolution du problème particulier pour obtenir un programme résolvant bien le problème global mais qui part de  $\mathbb{N}$ .

par la suite du processus quand ils apparaîtront. . Ces groupes seront les énoncés dérivés de cette logique. Bien entendu, l'ensemble des instructions correspond aux règles de déduction de cette logique. On dira alors que cette logique est *1-engendrée* (19).

Un autre moyen, dans un esprit un peu plus éloigné de la logique formelle, consisterait à créer un 1-processus fini qui nous donnerait le  $n$ -ième théorème ou la  $n$ -ième assertion formelle de cette logique quand  $n$  est donné sous la même forme symbolique que précédemment.

Le concept de problème particulier que nous avons introduit, contient une difficulté qui doit être mentionnée. En effet, si un procédé extérieur donne le marquage fini initial de l'espace symbolique, il n'y a pas de moyen pour nous de déterminer quelle est par exemple la première ou la dernière boîte marquée. On évite complètement cette difficulté quand le problème général est 1-donné. On l'évite également dès que l'on s'est donné un 1-processus bien précis. En pratique, les problèmes particuliers significatifs seront symbolisés de telle manière que les bornes du marquage correspondant soient reconnaissables par des groupes caractéristiques de boîtes marquées et non marquées.

Le point fondamental de nos difficultés réside cependant dans notre hypothèse d'un espace symbolique infini. Dans notre modèle, les boîtes sont, au moins conceptuellement, des entités physiques comme par exemple des carrés contigus (20). Si on suppose donné un mécanisme extérieur, celui-ci ne peut pas plus nous fournir un nombre infini de ces boîtes, qu'il ne peut marquer une infinité de celles-ci. Mais si ce mécanisme traite le problème particulier dans une partie finie de l'espace symbolique, la difficulté disparaît. Bien entendu, cela demande une extension des opérations primitives pour autoriser une nécessaire expansion de l'espace symbolique quand le processus en a besoin. Une version complète de notre modèle comporterait aussi des instructions pour engendrer l'espace symbolique (§).

L'auteur espère que le modèle présenté ici s'avèrera être logiquement équivalent à la récursivité au sens de GÖDEL-CHURCH (§). Son objectif cependant n'est pas seulement de présenter un système ayant une certaine potentialité logique, mais d'être

---

‡ Le développement du modèle 1 est en fait plutôt simple pour le moment. Bien que ce ne soit pas dans l'esprit d'un tel modèle, sa forme définitive pourra peut-être perdre une partie de sa simplicité pour permettre une plus grande souplesse. On pourra par exemple marquer une boîte de plus d'une façon. Le développement le plus naturel conduira peut-être à autoriser un nombre fini - par exemple 2 - d'objets physiques pour servir de curseurs, que l'opérateur pourra identifier et déplacer de boîte en boîte.

(§) Cette relation pourrait peut-être être établie de façon plus claire en définissant une notion de 1-fonction et en montrant alors qu'elle est équivalente à celle de fonction récursive (cf [1]). On pourrait définir une 1-fonction  $f(n)$  sur les entiers positifs de telle façon qu'on puisse construire un 1-processus qui pour tout entier  $n$  modélisant un problème donné, produit  $f(n)$  comme réponse;  $n$  et  $f(n)$  étant définis symboliquement comme nous l'avons déjà vu.

(19) POST décrit ici le mécanisme, maintenant classique, de dérivation des énoncés valides d'une théorie axiomatisable en logique du premier ordre.

(20) Il semblerait que le distinguo moderne entre modèle et réalité ne soit pas encore très clair dans la pensée de POST.

aussi un modèle qui soit satisfaisant pour l'esprit. Dans cette dernière direction, on peut chercher des modèles de plus en plus larges. *D'un autre côté, notre objectif sera alors de montrer que tous ces modèles sont logiquement équivalents à notre premier modèle*. (21). Nous offrons pour le moment cette conclusion comme une *hypothèse de travail*. Nous pensons en particulier que l'identification de CHURCH entre la calculabilité effective et la récursivité est un tel résultat \* (23). Outre cette hypothèse, et malgré son apparente contradiction avec tous les travaux mathématiques issus de la preuve de Cantor sur la non dénombrabilité du continu, la recherche se poursuit de façon indépendante sur les traces de GÖDEL et de CHURCH (24). Le succès du programme précédent changerait pour nous cette hypothèse, non pas tant en une définition ou un axiome qu'en une *loi naturelle*. Il semble à l'auteur que ce n'est que de cette façon que le théorème de Gödel sur l'incomplétude de certaines logiques symboliques et que les résultats de CHURCH sur l'indécidabilité (25) de certains problèmes pourront être transformés en conclusions concernant toutes les logiques symboliques et toutes les méthodes de résolution.

## Références

- [1] CHURCH A., *An unsolvable problem of elementary number theory*, American Journal of Mathematics, **58**, p. 345-363, 1936
- [2] CHURCH A., *Annals of Mathematics*, **34**, 1933
- [3] GÖDEL K., *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte Math. Phys., **38**, p. 173-198, 1931
- [4] HOPCROFT J., *Les machines de TURING*, Pour la Science, Juillet 1984
- [5] KLEENE S.C., *American Journal of Mathematics*, **57**, 1935
- [6] POST E., *Finite combinatory processes - Formulation I*, Journal of Symbolic Logic, **1**, 3, p. 103-105, 1936
- [7] TURING A., *On computable numbers. with an application to the entscheidungsproblem*, Proc. of the London Math. Soc., Ser. 2, **42**, p. 230-265, 1936

---

\* Cf CHURCH [1]. En fait le travail déjà effectué par CHURCH et d'autres porte cette identification considérablement au delà de l'étape d'une hypothèse de travail. Mais, masquer cette identification derrière une définition, cache le fait qu'une découverte fondamentale dans les limitations du pouvoir mathématisant de l'Homo Sapiens a été faite et nous fait oublier qu'il faut continuellement la vérifier.

---

(21) Nous avons mis en italique cette phrase car voilà affirmée pour la première fois de manière tout à fait claire la "thèse de CHURCH".

(23) POST fait référence au travail de CHURCH (cf ([1])) qui a montré l'équivalence entre calculabilité au sens du lambda-calcul et au sens de GÖDEL-HERBRAND.

(24) La contradiction dont parle POST pourrait être liée au fait que les fonctions calculables ne peuvent essentiellement manipuler que des structures discrètes et dénombrables et donc ne peuvent pas vraiment agir sur les nombres réels par exemple.

(25) Nous avons choisi de traduire le terme "recursive unsolvability", c'est-à-dire "non résolubilité récursive", qu'utilise POST, par le terme plus moderne "indécidabilité".

## LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Jean LEFORT

### 6.— LES CALENDRIERS LUNI-SOLAIRES (suite)

#### 5) La date de Pâques

Nous avons vu que notre calendrier civil, le calendrier grégorien, est un calendrier solaire, mais que sa constitution a conservé de nombreuses traces d'un calendrier lunaire. Pour les églises chrétiennes cela est pire puisqu'une partie des fêtes religieuses dépendent de la date de Pâques qui est réglée par l'évolution de la Lune. Historiquement encore une fois – on ne bouscule pas aussi facilement des traditions – cela s'explique très bien : les jeunes églises chrétiennes ont choisi de fixer l'anniversaire de la mort et de la résurrection du CHRIST en liaison avec la Pâque juive (Pessah) puisqu'aussi bien au début les chrétiens n'étaient qu'une secte juive parmi d'autres et que le martyr du CHRIST eu lieu à ce moment. Or Pessah se célèbre le 15 Nissan, c'est-à-dire exactement 163 jours avant le 1er Tisri (ou Rosch Haschana) de l'année suivante.

Rappelons qu'au début de notre ère, ni le calendrier juif, ni le calendrier ecclésiastique chrétien n'étaient fixés. Par suite chaque pays, voire chaque communauté avait sa règle en liaison avec le calendrier civil local (romain, grec ...). C'est au concile de Nicée en 325 que fut adoptée la règle très générale : **“Pâques est le dimanche qui suit le quatorzième jour de la lune qui atteint cet âge au 21 mars ou immédiatement après”**.

Ceux de mes lecteurs qui ne se sont pas perdus dans les méandres du calendrier juif doivent comprendre le naturel (si l'on peut dire!) d'une telle règle. Les mois juifs suivant assez fidèlement la lune, le 14 Nissan au soir (début de la célébration de la Pâque) la lune a bien 14 jours. Comme le mois de Nissan commençait alors ou plus tôt vers le 8 mars, le choix du 21 mars, outre sa fonction symbolique liée à l'équinoxe de printemps, est une valeur qui n'est pas trop mauvaise.

Mais il a bien fallu établir la date de Pâques longtemps à l'avance et pour cela mettre en place une lune moyenne fictive, baptisée lune du comput. C'est encore, paraît-il, à Denys-le-Petit que l'on doit ce calcul. Il le fit évidemment pour le calendrier julien qu'il fixait par la même occasion. Quand quelques siècles plus tard on s'aperçut que le ciel ne respectait pas les décisions terrestres, ce fut la consternation parmi les représentants de DIEU sur la terre. Si le patron ne donne pas raison à la maîtrise contre les employés, c'est la révolution! Comme le patron émarge plutôt aux abonnés absents, il fut assez facile à l'Eglise de maintenir son pouvoir sur le bas-clergé et les laïcs grâce à une réforme compliquée. CLAVIUS lui-

même qui fut, comme nous l'avons vu, l'auteur de la réforme grégorienne – le Pape se contentant d'apposer sa griffe au bas des documents – CLAVIUS, reconnaît en toutes lettres que l'on aurait pu en profiter pour rendre fixe ou presque (choisir le premier dimanche d'Avril, par exemple) la date de Pâques.

De Pessah à la date de Pâques dans le calendrier grégorien, les calculs sont devenus de plus en plus compliqués comme nous allons le voir ci-après.

### a. Pessah ou la Pâque juive

Dans le calendrier juif, aucun problème : c'est le 15 Nissan. Si l'on veut connaître le jour de la semaine, il vaut mieux se reporter au R.H. de l'année suivante qui a lieu 163 jours plus tard, quantité indépendante de la nature de l'année. Comme 163 est congru à 2 modulo 7, Pessah de l'année  $A$  est donnée par une règle tout à fait analogue à celle donnée pour le calcul de R.H. de l'année  $A + 1$ . Si le 1<sup>er</sup> Tisri de l'an  $A + 1$  tombe le  $j^{\text{ième}}$  jour de la semaine, Pessah de l'an  $A$  tombe le  $[j - 2]_7^{\text{ième}}$  jour de la semaine.

Etant donné l'usage généralisé qui est fait du calendrier grégorien, il peut être intéressant de trouver la correspondance entre le calendrier juif et le calendrier civil en usage en Europe. Actuellement le 1<sup>er</sup> Tisri tombe en septembre ou en octobre, mais cela ne sera pas toujours le cas car la durée de l'année juive est en moyenne plus longue que la durée moyenne de l'année grégorienne; très exactement  $365 + \frac{24311}{98496} \simeq 365,246822$  contre  $365 + \frac{97}{400} \simeq 365,242500$ , ce qui correspond à peu près à 6,25 minutes d'écart, écart qui va s'accumulant année après année pour donner un jour en un peu plus de 231 ans.

Construisons une formule qui donne la date du 1<sup>er</sup> Tisri d'une année  $A$  juive en jour de septembre de l'année  $B$  grégorienne (ce qui veut dire que si l'on trouve que c'est le 43 septembre, cela veut dire le  $43 - 30 = 13$  octobre). Comme il y a un écart constant de 163 jours entre Pessah de l'année  $A - 1$  et R.H. de l'année  $A$ , de même qu'il y a un écart constant de 184 jours entre le 1<sup>er</sup> septembre et le 1<sup>er</sup> mars de l'année  $B$ , la même formule, à l'adjonction près de 21 (c'est-à-dire  $184 - 163$ ) donnera la date du 15 Nissan de l'année  $A - 1$  juive en jours de mars de l'année  $B$  grégorienne.

Pour cela reprenons la formule des Moleds et tenons compte du fait que le début de l'ère juive a commencé le dimanche 6 octobre -3760 un peu après 11 heures du matin. Par conséquent  $B$  est très voisin de  $A - 3761$  (n'oublions pas qu'il n'y a pas d'année zéro dans le calendrier grégorien).

$$M_A = T + t = 347605 + \frac{392640}{492480} + (365 + \frac{121555}{492480})A + (1 + \frac{272953}{492480})[12A + 5]_{19}.$$

D'où en utilisant  $B = A - 3761$

$$M_B = T + t = 347605 + \frac{392640}{492480} + (365 + \frac{121555}{492480})(B + 3761) + (\frac{1 + 272953}{492480})[12B + 12]$$



soit

$$M_B = 1721299 + \frac{47075}{492480} + (365 + \frac{121555}{492480})B + (1 + \frac{272953}{492480})[12B + 12]_{19}.$$

Or le 31 Août (c'est-à-dire le 0 septembre) de l'année grégorienne  $B$  est donnée par la formule adaptée de  $(4 - 3 - d)$  (pour tenir compte du fait qu'il faut travailler avec le méridien de Jérusalem) :

$$G_B = [365, 25B] + 306 + 1720997 - [\frac{B}{100}] + [\frac{B}{400}].$$

On calcule alors la différence  $M_B - G_B$  en fonction de  $B$  pour avoir la date de R.H. en jour de septembre

$$\begin{aligned} M_B - G_B = & -4 + \frac{47075}{492480} - \frac{1565}{492480}B + [\frac{B}{100}] - [\frac{B}{400}] + \frac{1}{4}[B]_4 \\ & + (1 + \frac{272953}{492480})[12B + 12]_{19}. \end{aligned}$$

Mais cette formule ne tient pas compte des règles de Hillel concernant le report de R.H. Nous avons vu qu'il est en général de 1 jour (règle ADOU). Mais il peut aller jusqu'à 3 jours. Du point de vue du calcul il est plus facile d'appliquer les règles de Hillel en regardant la partie fractionnaire de  $M_B - G_B$  qui n'est autre que  $t_A$  ainsi que  $[12B + 12]_{19}$  qui n'est autre que  $\alpha$  et en cherchant le jour (ici  $[T_A]_7$ ) à partir du calendrier grégorien.

C'est une formule analogue que GAUSS avait donnée aussi bien pour le calendrier julien que pour le calendrier grégorien.

Voici un exemple de calcul pour l'année 1984.  $M_B - G_B = 24 + \frac{490504}{492480}$  avec  $\alpha = [12B + 12]_{19} = 13$ . Or, le 24 septembre 1984 est un lundi donc le 1er Tisri est le jeudi 27 (règle GATRAD) et par suite Pessah est le mardi 17 avril 1984.

### b. Pâques dans le calendrier julien

C'est le *comput julien* qui fixe la date de Pâques. Comme ce comput a été adopté très tôt dans la vie de l'église, le jour bissextile  $y$  est encore fixé, comme sous les romains, au 24 février. C'est pourquoi dans le tableau ci-après appelé "*calendrier lunaire perpétuel julien*" et qui donne les dates du commencement de chaque mois lunaire pour les différentes années du cycle de Méton, on trouve en février deux dates, dont une entre parenthèse ne concerne que les années bissextiles, et cela n'a lieu que si la nouvelle lune tombe au delà du 24 février.

CALENDRIER LUNAIRE PERPÉTUEL JULIEN

NOMBRE d'or	JANVIER	FÉVRIER	MARS	AVRIL	MAI	JUIN	JUILLET	AOÛT	SEPTEMBRE	OCTOBRE	NOVEMBRE	DÉCEMBRE
1	23	21	23	21	21	19	19	17	16	15	14	13
2	12	10	12	10	10	8	8	6	5	4	3	2
3	1, 31		1, 31	29	29	27	27	25	24	23	22	21
4	20	18	20	18	17	16	16	14	13	12	11	10
5	9	7	9	7	7	5	5	3	2	2, 31	30	29
6	28	26 (27)	28	26	26	24	24	22	21	20	19	18
7	17	15	17	15	15	13	13	11	10	9	8	7
8	6	4	6	5	4	3	2	1, 30	29	28	27	26
9	25	23	25	23	23	21	21	19	18	17	16	15
10	14	12	14	12	12	10	10	8	7	6	5	4
11	3	2	3	2	1, 31	29	29	27	26	25	24	23
12	22	20	22	20	20	18	18	16	15	14	13	12
13	11	9	11	9	9	7	7	5	4	3	2	1, 31
14	30	28 (29)	30	28	28	26	26	24	23	22	21	20
15	19	17	19	17	17	15	15	13	12	11	10	9
16	8	6	8	6	6	4	4	2	1	1, 30	29	28
17	27	25 (26)	27	25	25	23	23	21	20	19	18	17
18	16	14	16	14	14	12	12	10	9	8	7	6
19	5	3	5	4	3	2	1, 30	28	27	26	25	24

On a ainsi réparti 235 lunaisons en alternant sensiblement les lunaisons de 30 et 29 jours (en fait il y a 115 lunaisons de 29 jours et 120 de 30 jours si on ne tient pas compte du jour bissextile (\*). Cela veut dire que les lunaisons du comput ont en moyenne 29,530851 jours soit légèrement plus que la lunaison vraie. L'écart est de 1 h 29 min sur un cycle de 19 années et il va s'accumulant au cours du temps.

Intéressons nous au 14<sup>ème</sup> jour de la lune qui se situe juste après le 21 mars. Selon le nombre d'or de l'année (c'est-à-dire son rang dans le cycle de Méton) nous obtenons les dates suivantes :

nombre d'or	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Mars ou <b>Avril</b>	5	25	13	2	22	10	30	18	7
en jour de Mars	36	25	44	33	22	41	30	49	38

nombre d'or	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Mars ou <b>Avril</b>	27	15	4	24	12	1	21	9	29	17
en jour de Mars	27	46	35	24	43	32	21	40	29	48

(\*) La présence des années bissextiles fait apparaître des lunaisons de 31 jours ou une succession de 4 lunaisons de 30 jours. Des considérations sans rapport avec le mouvement de la lune, telle que : "les lunes qui finissent en janvier ont 30 jours par convention", ont imposé la répartition des mois lunaires.

## LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Il n'est pas très difficile de voir que le 14<sup>e</sup> jour de la lune est donné en jour de mars par  $[19N + 26]_{30} + 21$  où  $N$  est le nombre d'or qui par convention vaut, en fonction de l'année julienne  $A$  :  $[A]_{19} + 1$ .

Il nous faut maintenant trouver le dimanche qui suit. La formule rencontrée en (4, 2, c), adaptée au 21 mars julien nous permet de connaître le nom de ce jours – sous forme d'un entier modulo 7 – et en ajoutant l'écart au 21 mars soit  $[19N + 26]_{30}$ , de connaître le nom du 14<sup>e</sup> jour de la lune de l'équinoxe de printemps. Le complément à 6 de cette dernière valeur nous indique le nombre de jour à ajouter pour avoir un dimanche, sauf quand on obtient 0 auquel cas il faut prendre 7 (car il s'agit du dimanche qui **suit**). Pour simplifier les calculs il vaut mieux alors faire les calculs pour le 22 mars, d'où l'algorithme :

$$\begin{aligned}
 N &= 1 + [A]_{19} && \text{nombre d'or} \\
 L &= [19N + 26]_{30} && \text{écart entre le 14<sup>e</sup> jour de la lune et le 21 mars} \\
 l &= [L]_7 \\
 j &= [[365, 25A]]_7 && \text{nom du jour du 22 mars} \\
 p &= [j + l]_7 && \text{nom du 15<sup>e</sup> jour de la lune} \\
 P &= 22 + L + 6 - p \\
 & \quad 28 + L - p && \text{date de Pâques en jour de mars.}
 \end{aligned}$$

Par exemple en 1990 on trouve successivement  $N = 15, L = 11, l = 4, j = 2, p = 6, P = 33$  soit Pâques le 2 avril julien.

Il est possible de simplifier cet algorithme, en remplaçant  $N$  par  $n = N - 1$  et en prenant  $l = L = [19n + 15]_{30}$ .

Il est clair que les dates de Pâques reviennent selon un cycle de  $19 \times 28 = 532$  ans car  $L$  ne prend que 19 valeurs distinctes et non 30. Au cours d'un tel cycle Pascal la répartition des différentes dates est donnée par le tableau ci-après :

dates	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	6	7
occurrences	4	8	8	12	16	16	20	16	16	20	16	16	20	16	20	20	16

dates	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
occurrences	20	16	16	20	16	16	20	16	20	16	16	20	16	12	12	8	8	4

Pour obtenir ce tableau il y a deux façons : soit calculer les dates de Pâques de 532 années consécutives, soit réfléchir à la façon dont elles sont obtenues : la date du 22 mars exige que le 22 mars soit un dimanche et que le 14<sup>e</sup> jour de la lune tombe le 21 mars, c'est une combinaison unique; la date du 23 mars exige que le 23 mars soit un dimanche et que le 14<sup>e</sup> jour de la lune tombe le 21 ou le 22 mars,

c'est une combinaison double; la date du 24 mars exige que le 24 mars soit un dimanche et que le 14<sup>e</sup> jour de la lune tombe le 21, 22 ou 23 mars, mais le tableau de la page (30) montre que le 23 mars ne peut pas être obtenu, il y a donc encore une combinaison double. . . En étudiant les possibilités de pleine lune julienne dans les sept jours précédant une date donnée on obtient le nombre de combinaisons donnant cette date pour Pâques. Pour avoir le nombre d'occurrences il suffit de rapporter le total à 532.

**c. Où l'on recommence pour faciliter la suite**

Nous allons maintenant donner une autre façon d'aborder le calcul de la date de Pâques dans le calendrier julien de façon que le parallèle avec le calcul dans le calendrier grégorien soit plus facile à établir.

Nous appellerons EPACTE l'âge de la lune au 1<sup>er</sup> janvier diminuée d'une unité. Ce terme d'épacte est abusif dans le calendrier julien car il y a normalement un autre sens – âge de la lune au 22 mars – mais un sens qui est tombé en désuétude. Dans le calendrier julien l'épacte est bien sûr l'âge de la lune au 31 décembre, seulement ce ne sera plus le cas dans le calendrier grégorien, c'est pourquoi nous donnons cette définition un peu alambiquée. Le tableau de la page 30 nous permet de calculer l'épacte en fonction du nombre d'or.

nombre d'or	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
épacte	8	19	0	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26
pleine lune Pascale en jour de mars	36	25	44	33	22	41	30	49	38	27	46	35	24	43	32	21	40	29	48

On remarque que l'épacte  $\epsilon$  est donné par  $[11N + 27]_{30}$  et que la pleine lune pascale s'obtient par  $44 - \epsilon$  en jour de mars si  $\epsilon < 24$  sinon c'est  $44 - (\epsilon - 30)$ .

Définissons la **lettre dominicale**  $L$  de la façon suivante. Attribuons à chaque jours de l'année successivement les 7 premières lettres de l'alphabet  $A, B, C, D, E, F, G$  puis à nouveau  $A, B, C, \dots$ . La lettre dominicale sera la lettre attribuée au dimanche. Aucune difficulté pour une année ordinaire. Pour les années bissextiles souvenons-nous que le calendrier ecclésiastique considère que le 24 février est redoublé en le 25 qui reçoit alors la même lettre que le 24. La lettre dominicale  $L$  n'est alors pas la même pour la période du 1<sup>er</sup> janvier au 24 février et pour celle du 25 février au 31 décembre. Comme Pâques se situe toujours dans cette deuxième période nous considérerons uniquement la deuxième lettre dominicale lors des années bissextiles. Pour faciliter le calcul nous remplacerons  $L$  par  $\lambda$  qui n'est autre que le rang de  $L$  dans l'alphabet.

On remarque que la valeur numérique  $\lambda$  de la lettre dominicale est donnée en

fonction de l'année  $A$  par

$$\begin{aligned} \lambda &= \left[ 2 - A - \left[ \frac{A}{4} \right] \right]_7 + 1 \\ &= 7 - \left[ A + \left[ \frac{A}{4} \right] - 2 \right]_r \end{aligned}$$

puisque, par exemple, le 1<sup>er</sup> janvier 1991 julien est un mardi,  $\lambda$  vaudra 6 et que  $\lambda$  diminue d'une unité chaque année et de deux les années bissextiles.

Tous les ingrédients sont maintenant réunis pour déterminer la date de Pâques. Le  $\lambda$  janvier est un dimanche, il en est de même de  $\lambda + 4$  mars (même en année bissextile puisque nous prenons la 2<sup>e</sup> lettre dominicale). Il en est donc de même du  $\lambda + 46$  mars. Posons  $\epsilon' = \epsilon$  si  $\epsilon < 24$  et  $\epsilon' = \epsilon - 30$  si  $\epsilon \geq 24$ . On a :

$$\lambda + 45 = 45 - \epsilon' + \epsilon' + \lambda + 1$$

or  $46 - \epsilon'$  est le lendemain de la pleine lune pascale. Le premier dimanche suivant aura lieu à  $[\epsilon' + \lambda + 1]_7$ . D'où la formule :

$$P = 45 - \epsilon' + [\epsilon' + \lambda + 1]_7$$

en jour de mars.

#### d. Pâques dans le calendrier grégorien

Les auteurs de la réforme grégorienne ont été amenés à considérer que l'épacte pouvait prendre 30 valeurs distinctes (et non pas 19 comme dans le calendrier julien). L'épacte n'est alors plus lié au nombre d'or. Cependant pour éviter des changements d'habitudes, l'erreur du cycle de Méton est corrigé de façon discontinue lors des années séculaires.

La suite des "épactes" juliennes se poursuit donc de la façon suivante, par ajout de 11 modulo 30 :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 8 & 19 & 0 & 11 & 22 & 3 & 14 & 25 & 6 & 17 & 28 & 9 & 20 & 1 & 12 & 23 & 4 & 15 & 26 \\ & 7 & 18 & 29 & 10 & 21 & 2 & 13 & 24 & 5 & 16 & 27 & \dots & & & & & & & \end{array}$$

et un cycle de 19 valeurs consécutives (par exemple 26, 7, 18, ... 3,14) reste en vigueur aussi longtemps qu'un saut d'épacte n'est pas nécessaire.

Un calendrier lunaire perpétuel grégorien fut mis en place en 1582. Pour assurer de la meilleure façon la distribution des mois de 29 et 30 jours on créa deux épactes 25 qu'on distingue en les écrivant différemment : 25 et **25**, cette deuxième étant employée à la place de la première chaque fois que le nombre d'or est strictement supérieur à 11. La répartition exacte des lunaisons dans l'année étant sans importance pour la fixation des dates de Pâques qui nous intéressent seules ici, on trouvera seulement la correspondance entre l'épacte et la pleine lune pascale dans le tableau ci-après.

épacte	8	19	0	11	22	3	14	25	<b>25</b>	6	17	28	9	20	1
pleine lune en jour de mars	36	25	44	33	22	41	30	49	<b>48</b>	38	27	46	35	24	43

épacte	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27
pleine lune en jour de mars	32	21	40	29	48	37	26	45	34	23	42	31	<b>49</b>	39	28	47

On retrouve le lien du calendrier julien entre l'épacte  $\epsilon$  et la pleine lune pascale qui vaut  $44 - \epsilon$  en jour de mars; si  $\epsilon < 24$  et  $44 - (\epsilon - 30)$  si  $\epsilon \geq 24$  avec cependant deux exceptions (cerclées dans le tableau ci-dessus) : si  $\epsilon = 24$ , il faut faire comme si elle valait 25 et si  $\epsilon = \mathbf{25}$  il faut faire comme si elle valait 26.

Il nous faut maintenant expliquer comment est calculé l'épacte en fonction de l'année grégorienne. Après avoir réajusté la lune du comput avec la lune vraie en 1582 il fut décidé que

- 1) A chaque année séculaire non bissextile, on retranche un jour à l'épacte : c'est la **métemptose**.
- 2) Tous les 300 ans, quand on arrive à une année séculaire, on ajoute un jour à l'épacte : c'est la **proemptose**.
- 3) Pour plus d'exactitude (\*) quand on a fait 7 fois de suite cette addition, la suivante ne se fait que 400 ans après et on recommence selon un cycle de 25 siècles pendant lequel on répartit 8 adjonctions.

Finalement à une constante près la métemptose vaut  $c - [\frac{c}{4}]$  où  $c$  est le nombre de centaines de l'année et la proemptose vaut  $[\frac{8c+13}{25}]$ . A cause du choix de l'origine l'épacte vaut en fonction du nombre d'or  $N$

$$\epsilon = [11N - 3 - c + [\frac{c}{4}] + [\frac{8c + 13}{25}]]_{30}$$

ou bien fonction de l'année  $A = 100c + u$

$$\epsilon = [11[A]_{19} + 8 - c + [\frac{c}{4}] + [\frac{8c + 13}{25}]]_{30}$$

Le calcul de la date de Pâques se fait alors au moyen de la même formule que celle donnée dans le calendrier julien à l'alinéa c). Il faut toutefois tenir compte, dans le calcul de la lettre dominicale, des années séculaires non bissextiles. Cela se traduit par :

$$\begin{aligned} \lambda &= [2c - [\frac{c}{4}] - u - [\frac{u}{4}]]_7 + 1 \\ &= 7 - [A + [\frac{A}{4}] + [\frac{A}{400}] - [\frac{A}{100}] + 6]_7. \end{aligned}$$

Nous avons alors tous les renseignements pour calculer la date de Pâques. Il est toutefois possible d'obtenir cette date par une succession de divisions euclidiennes à partir de l'année  $A$ . C'est à J. MEUS que l'on doit cet algorithme :

(\*) Ce qui est faux, mais étant donnée la date tardive d'application pour la 1<sup>er</sup> fois de cette 3<sup>e</sup> règle (4200) il n'y a pas lieu de s'en préoccuper.

LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

dividende	diviseur	quotient	reste	explications
A	19		n	cycle de Méton
A	100	c	u	
c	4	s	t	siècle bissextile
c+8	25	p		proemptose
c-p+1	3	q		métemptose
19n+c-s-q+15	30		e	épacte
u	4	b	d	année bissextile
32+2t+2b-e-d	7		l	lettre dominicale
n+11e+22l	451	h		
e+l-7h+114	31	m	j	31 jours en mars

Alors,

si  $m = 3$ , Pâques est le  $j + 1$  mars et  
 si  $m = 4$ , Pâques est le  $j + 1$  avril.

Pour terminer, quelques mots sur la fréquence des différentes dates. Dans le calendrier grégorien, la date de Pâques suit un cycle, mais un cycle de ... 57000 siècles soit 5,7 millions d'années!! Quels sacrés optimistes que les réformateurs de 1582 car sur une telle période les durées des années ou des lunaisons sont très variables (\*). Sur un tel cycle les fréquences de chaque date sont les mêmes, sauf pour les dates extrêmes selon ce que donne un raisonnement analogue à celui effectué pour le calendrier julien : 1 possibilité pour le 22 mars, 2 pour le 23 mars, 3 pour le 24 mars ... 7 pour le 28 mars et les suivantes puis on redescend un par un pour aboutir à 1 possibilité pour le 26 avril. Cependant si un calculateur programme sa machine avec l'algorithme précédent il trouvera des fréquences qui oscillent un peu de la même façon que dans le calendrier julien, ce qui est normal car l'écart des épactes juliennes et grégoriennes est constant sur de longues périodes.

---

(\*) La lune du comput est une lune fictive qui peut avoir plus d'un jour d'écart avec la lune réelle, ce qui peut entraîner un écart d'un mois sur la date de Pâques. Mais de plus la lunaison grégorienne a une valeur moyenne de 29,530592 jours légèrement supérieure à la valeur actuelle. Vu la variabilité des "constantes" astronomiques il est inutile de chercher à faire mieux.

## MOT ET IMAGE : LES MÊMES LOIS STATISTIQUES

Gilberte PÉROT

*Nous publions ici un article de Madame G. PÉROT qui, pendant de longues années, a été maître-assistant à l'Institut de Mathématiques de Strasbourg. Cet article a été publié en 1972 dans la revue 'Communication et Langage'. Il porte sur la loi de ZIPF, bien connue des linguistes, concernant les fréquences d'apparition des mots dans une langue naturelle. On sait que cette loi traduit en termes statistiques un phénomène d'économie du locuteur. Madame G. PÉROT, avec son intuition coutumière, avait pensé que cette loi ne s'appliquait pas seulement aux messages linguistiques, mais également aux messages iconiques (comportant des images); elle nous fait part, dans cet article, des résultats auxquels elle a abouti.*

*Pour une étude approfondie de la loi de ZIPF dans le cas classique on pourra consulter :*

*A. FUCHS : La théorie de l'information et la linguistique 'Gazette des Mathématiciens' (S.M.F.) n° 17 (juil. 1981).*

N'en déplaise aux iconoclastes (ils furent nombreux au cours des siècles, particulièrement chez les Hébreux, les Arabes, les Byzantins, les Protestants, les Bourbakistes), les images ont triomphé. Actuellement, le message iconique concurrence le message linguistique, et il a pour lui deux atouts. D'une part, il transmet plus rapidement l'information; pensons à un schéma de montage, à une formule développée, à un film présentant une opération chirurgicale ou comparant des espèces en botanique (le cinéma a suscité "un intérêt que cette science n'avait jamais réussi à éveiller auparavant"). D'autre part, la linéarité du langage, mise en évidence par SAUSSURE, s'adapte parfaitement aux "longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles", mais la souplesse du message iconique convient beaucoup mieux à la transcription des structures complexes. Elle permet d'arriver, plus économiquement, à l'intelligibilité des réseaux comportant circuits, embranchements, feed-back, circulation d'un flux dont il faut préciser la valeur en différents points : pensons à un organigramme, à un graphe, à un sociogramme. Verrons-nous bientôt le jour où le langage iconique deviendra aussi familier que la langue maternelle? Cette question relève de la science-fiction, mais, en tout cas, je signale un fait qui incite à la réflexion : les nouveaux programmes de mathématique, pour les classes de sixième, prescrivent l'utilisation des schémas sagittaux et cartésiens. L'intérêt est évident, si l'on songe à la mathématisation des situations effectives et à l'utilisation des ordinateurs. La cybernétique a mis l'accent sur des modes nouveaux d'intelligibilité. La faveur croissante des schémas nous invite à nous demander si l'ensemble des représentations graphiques et des images que nous échangeons usuellement à des fins sémantiques possède ou non des structures comparables à celles d'une langue. Connaît-il les mêmes agencements, suit-il les mêmes lois?



### La loi de ZIPF est valable pour les images

L'objet de cette étude est de poser le problème, de le circonscrire, et, dans les limites fixées, de présenter cinq corpus différents prouvant que les morphèmes (formes simples) vérifient, exactement comme le font les mots d'une langue naturelle, la loi de ZIPF-MANDELBROT.

Le flot des messages iconiques étant extrêmement riche et extrêmement hétérogène, il semble nécessaire de restreindre le sujet dès le départ. Le langage ordinaire sous-tend toujours l'information iconique, soit qu'il n'apparaisse qu'en filigrane, soit au contraire qu'il soit explicitement présent, et joue un rôle manifeste. Nous avons, dans ce dernier cas, des messages hybrides, où une partie de la transmission passe par le canal des images, l'autre par la parole ou l'écriture : film parlant ou sous-titré, télévision, histoires en images accompagnées de légendes (1). Nous excluons de notre étude ces "messages hybrides" ; si, par exemple, des inscriptions figurent dans un dessin, nous n'admettons ce dessin que dans la mesure où chiffres, lettres et mots n'ont d'autres fonctions que d'identifier des éléments de l'assemblage ou de préciser la valeur numérique d'une application, ou encore d'explicitier un codage. A plus forte raison les agencements de formes destinés à reconstituer des lettres, et un message à déchiffrer par la lecture, ne sont pas retenus : les films réalisés en composant des petits carrés par le truchement d'un ordinateur (Skopo) contiennent souvent des séquences de ce type.

### Champ et limite de cette étude

Le champ où s'inscrit notre étude est, en fait, très étroit. Pour les messages iconiques, aux impacts émotionnels importants et souvent imprévus, aux connotations multiples, l'écart entre signifiant et signifié est bien plus considérable qu'en linguistique. Comment se délivrer de l'ambiguïté fondamentale des significations, dans un domaine où les modèles mêmes de la perception restent à étudier (2)? L'idéal serait de pouvoir considérer le signifiant comme élément d'un ensemble  $E$ , le signifié comme élément d'un ensemble  $F$ , et la signification comme une relation fonctionnelle de  $E$  dans  $F$ , mais évidemment cela n'est jamais réalisé. Nous avons essayé de nous rapprocher de ce cas limite en nous plaçant aux confins mêmes des codages. C'est pourquoi nous nous sommes bornés à vingt formes très simples (précisées ultérieurement) ; c'est pourquoi aussi nos corpus sont les illustrations de livres techniques. Cela met très fortement l'accent sur le message sémantique, alors que nous savons bien que tout canal convoie simultanément information esthétique et information sémantique. Il suffit d'ailleurs de présenter plusieurs schémas logiquement équivalents pour qu'aussitôt s'impose la prédilection des sujets pour les figures régulières, ou présentant un axe de symétrie. Notre étude, volontairement placée dans le cadre le plus simple et le plus favorable, doit donc être complétée

(1) Cf. Enrico FULCHIGNONI : *La Civilisation de l'image* (Paris, N.R.F., 1967); Abraham MOLES : *Théorie de l'information et perception esthétique* (Paris, Flammarion, 1958); Abraham MOLES : *Sociodynamique de la culture* (Paris, Mouton, 1967).

(2) Cf. E. VURPILLOT : "Quelques théories et modèles de la perception", in '*Bulletin de Psychologie*' (15 avril 1967).

par un élargissement progressif du champ et des corpus. Nous sommes en train de dépouiller un corpus et songeons à des corpus de peinture abstraite (en particulier, œuvres de MALEVICH). Nous étudions aussi, en collaboration avec J.-Cl. SIDLER, les projections observées sur des figures comportant une structuration mathématique évidente. Dans une optique beaucoup plus large, si on veut mettre l'accent sur l'information esthétique, on peut consulter Hermann WEYL et Erwin PANOFKY (3).

Le concept d'image étant ambigu, nous précisons enfin que nous nous limitons à des figures pouvant être dessinées sur une feuille de papier. Les éléments de forme auraient donc dû être appelés graphèmes. Nous avons préféré "morphèmes", car les lettres de l'alphabet sont des graphèmes, et nous voulions les exclure (sous les restrictions indiquées précédemment). Les morphèmes nous sont apparus, puisqu'ils suivent la loi de ZIPF, analogues aux mots. Ils peuvent être obtenus par une suite de tracés de segments et d'arcs, ces arcs pouvant eux-mêmes être obtenus par raccordements d'arcs de cercle (théorie de cercle osculateur). Le coût du tracé d'un morphème correspond peut-être à la longueur d'un mot en linguistique, et demanderait à être étudié. Pour ces "mots" que sont les morphèmes, nous ne disposons pas de tables de fréquence, mais les cinq corpus étudiés ont donné pratiquement les mêmes morphèmes les plus usités. Nous avons complété, en utilisant d'autres sources, à 20 morphèmes, qui seront considérés comme mots du vocabulaire de base. Notre étude ne porte que sur ces vingt morphèmes, rangés ici par analogie de tracé, et non par ordre de fréquence :

---

point  
 segment  
 triangle, carré, rectangle, losange, parallélogramme, trapèze, hexagone, octogone, chevron  
 ligne brisée  
 angle  
 arc  
 arc comportant plusieurs boucles identiques (cf. solénoïde en physique)  
 flèche  
 cercle  
 ellipse  
 "patate" utile pour les diagrammes de VENN ou les "cercles" d'EULER)  
 "terminal", c'est-à-dire rectangle dont les petits côtés sont remplacés par des demi-cercles : on l'appelle "terminal" en informatique.

---

Les limites de cette étude étant ainsi précisées, nous allons, dans une deuxième partie, rappeler la loi de ZIPF-MANDELBROT, puis montrer qu'elle s'applique aux morphèmes des corpus que nous avons considérés.

"La langue est un système dont tous les éléments sont solidaires, et où la valeur de l'un est solidaire de la présence des autres." Cette phrase de de SAUSSURE est une phrase clé de la linguistique. Elle nous dit, par exemple, que le nombre

---

(3) Hermann WEYL : *Symétrie et mathématique moderne* (Paris, Flammarion, 1964); Erwin PANOFKY : *Essai d'icologie* (Paris, N.F.R., 1967).

$n$  d'apparitions du mots "the", dans un texte anglais, et le nombre  $N$  de mots du texte ne sont pas des quantités indépendantes. Si on utilise des textes longs, des livres, le rapport  $n/N$  est toujours 0,09 : c'est la fréquence du mot "the". De même, la fréquence du mot "of" est 0,05. On peut, plus généralement, calculer la fréquence d'un élément quelconque : ainsi, la fréquence de la lettre "E" est 0,17 en français, 0,10 en anglais.

### La loi de ZIPF

ZIPF détermina systématiquement la fréquence des mots en anglais, puisque ses dénombrements portent sur 8 727 mots différents. Ces mots peuvent donc être rangés par ordre de fréquence décroissante. Le mot qui a la plus grande fréquence, "the", a pour rang 1, puis vient "of", fréquence 0,05, rang 2, etc ... ; "quality", fréquence 0,00011 a pour rang 1000 ... Nous désignerons par  $f_r$  la fréquence du mot de rang  $r$ .

La loi de ZIPF, énoncée en 1946, précise que *le produit de la fréquence d'un mot par son rang est constant.*

$$f_r \times r = k.$$

Pour l'anglais, la constante  $k$  est voisine de 0,10.

1) Les axes étant  $x'ox$ ,  $y'oy$ , posons

$$x = r, \quad y = f_r, \quad xy = k.$$

Le graphe est une hyperbole équilatère.

2) Il est préférable d'utiliser du papier logarithmique pour que la représentation graphique donne une droite

$$\log x + \log y = \log k$$

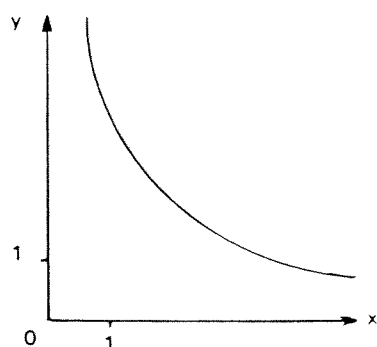
ou en posant  $X = \log x$ ,  $Y = \log y$ ,  $K = \log k$

$$X + Y = K.$$

Les points du graphe sont alignés sur une droite de pente -1 : pour vérifier la loi de ZIPF, il suffira de vérifier cet alignement : c'est ce que nous ferons ultérieurement pour les morphèmes (4).

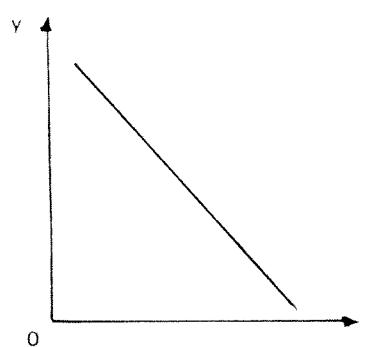
---

(4) Signalons l'apport de MANDELBROT. Comme toute loi empirique, la loi de ZIPF n'est qu'approximative : elle n'est bien vérifiée que par les mots de fréquence moyenne. Sur papier logarithmique, les points représentant ces mots sont alignés, mais les points représentant les premiers mots (plus grandes fréquences) et les derniers mots (plus petites fréquences) se répartissent respectivement sur 2 arcs de courbe. Pour rendre compte de ces faits, il faut remplacer, comme l'a indiqué MANDELBROT, la première expression donnée :  $f_r \times r = k$  par  $f_r(r + \beta)^\varphi = c$  qui exprime la loi de ZIPF-MANDELBROT :  $\varphi$ ,  $\beta$  et  $c$  sont des constantes positives et  $\varphi$  est supérieur à l'unité.



$$xy = C^{te}$$

*Courbe hyperbole équilatère*



$$X + Y = C^{te}$$

*La même courbe dans une représentation logarithmique (droite de pente -1)*

### Critères de choix des images

Passons maintenant de la linguistique au langage iconique. Voici les idées préconçues qui nous ont guidés. Dans certains domaines, les illustrations visent plus à être des compositions non figuratives que des copies fidèles de la réalité. Nous entendons par là que les images visent alors moins à reproduire les caractéristiques d'un objet qu'à mettre en relief l'agencement de divers éléments. Plus que les choses représentées importent les assemblages, c'est-à-dire finalement les structures. Parmi toutes les images, ce sont les plus intelligibles; il fallait donc commencer par elles l'étude du langage iconique, et pour cela choisir les corpus en conséquence : si l'on s'intéresse à l'information esthétique, s'en référer à la peinture abstraite (5), si on se limite à l'information sémantique, selon notre propos dans cet article, utiliser les illustrations de livres de mathématique, de physique ou d'informatique. Nous pensions que, dans ces derniers, les vingt morphèmes que nous avons précisés plus haut devaient être de beaucoup les plus fréquents. Ils s'imposaient par l'économie de tracé (segment, flèche, cercle, rectangle), par la facilité de raccordement (hexagone, terminal) et par la "raison de symétrie" (cercle, polygones réguliers).

D'autre part, le souci de lisibilité implique un codage : comment noter un rhéostat en physique, une sortie de résultats dans un organigramme? Les codes sont évidemment arbitraires. Mais, pratiquement, les questions d'économie jouent, l'environnement socioculturel est impliqué. L'utilisation des divers morphèmes, dans un code, se rode à l'usage et se rode pour arriver à une transmission plus efficace, de rendement meilleur. Ainsi, vraisemblablement, si des images sont utilisées à des fins sémantiques par de nombreux techniciens, l'ensemble doit se modifier, s'adapter progressivement pour devenir langue véhiculaire commune, pour devenir langage : il finit sans doute par refléter l'organisation linguistique. Nous devons donc, si cette opinion est correcte, vérifier que les morphèmes suivent la loi de ZIPF, et qu'ils la suivent mieux que les corpus tirés des mathématiques et de la physique que pour l'informatique, où le temps de rodage a été moindre. C'est bien ce qu'ont confirmé les résultats.

(5) Cf. le tableau "Huit rectangles rouges", de MALEVICH.

## MOT ET IMAGE : LES MÊMES LOIS STATISTIQUES

### Choix des images

Le premier corpus choisi est constitué par les illustrations de l'ouvrage :

1) GALION : "*Mathématiques, classes de 6<sup>e</sup>*" (O.C.D.L. Hatier, 1967).

Nous avons retenu ce livre parce qu'il concrétise l'effort d'un groupe très dynamique de professeurs lyonnais pour introduire la mathématique nouvelle au lycée : audacieux par son texte, il l'est aussi par une conception neuve de l'illustration et connaît un grand succès.

Le deuxième corpus a été choisi par analogie :

2) BRÉDIF : "*Mathématiques, classes de 6<sup>e</sup>*" (Hachette, 1969).

Les corpus tirés de la physique correspondent simplement à des ouvrages récents et se vendent bien. C'est le libraire qui nous les a conseillés. D'autres corpus auraient donc, sans doute, donné une vérification expérimentale aussi bonne.

3) GUILHIEN : "*Electronique, tome 1*" (P.U.F.)

(Tubes électroniques à vide amplificateurs).

4) KASSATINE et PÉRÉKALINE : "*Cours d'électrotechnique*" (M.I.R.).

Le dernier corpus est constitué par les illustrations d'un livre de **programmation** :

5) RALSTON et WILF : "*Méthodes mathématiques pour calculateurs*".

La vérification de la loi de ZIPF ayant été satisfaisante dans ces 5 corpus, les premiers essayés, nous n'avons pas fait d'autres tentatives, sauf celle notée ci-dessous.

6) Corpus constitué de 14 numéros de "*L'Usine nouvelle*".

### Résultats de l'étude

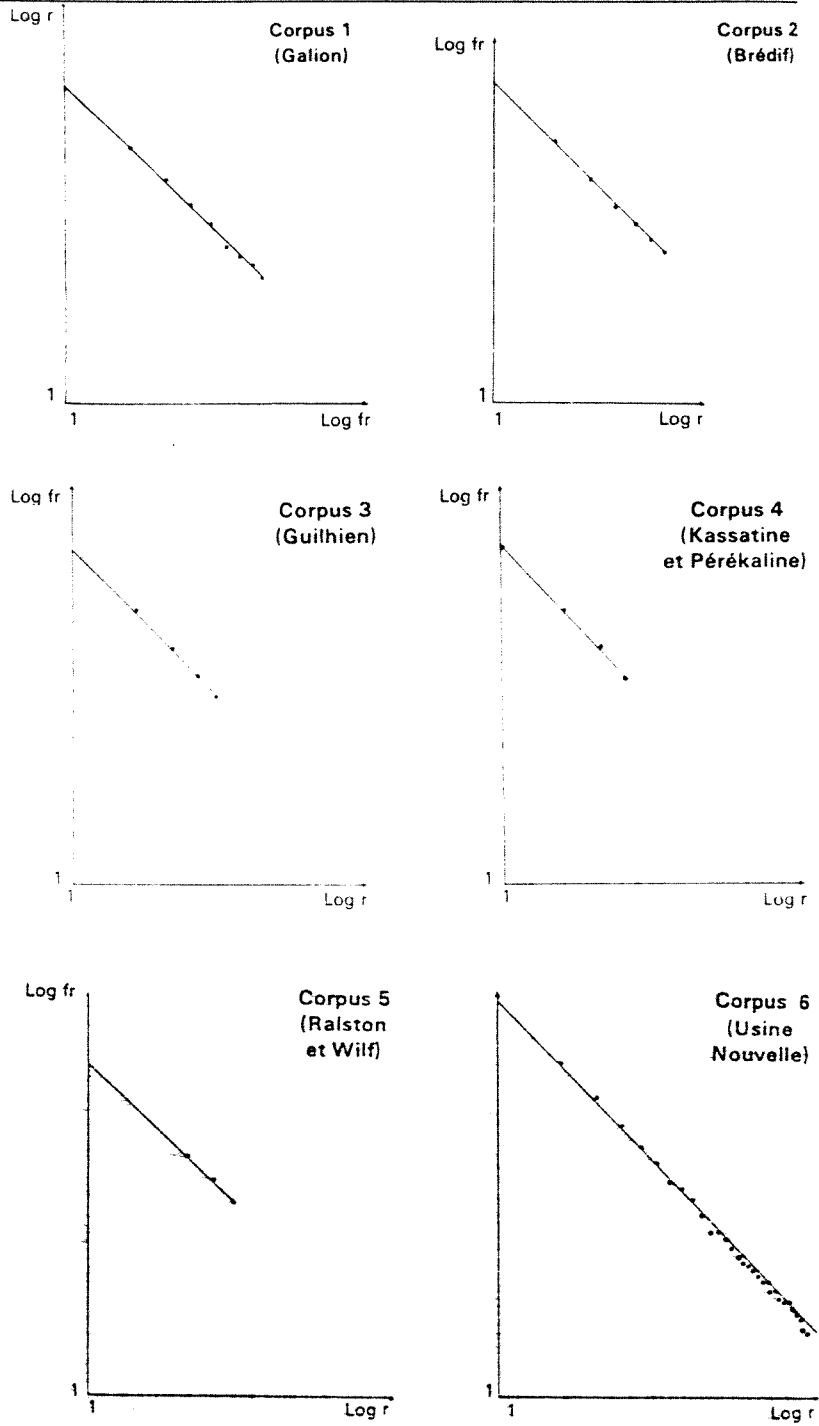
1. Galion : « Mathématiques 6 <sup>e</sup> » (O.C.D.L., Diffusion Hatier, Paris, 1968, 93 pages).				
Nombres de morphèmes : N = 3 700.				
Morphèmes les plus fréquents : 3 657.				
Autres morphèmes : 40.				
Morphèmes	Rang <i>r</i>	Nombre <i>n</i>	Fréquence <i>f<sub>r</sub></i>	Fréquence · rang <i>f<sub>r</sub> × r</i>
Cercles	1	1 245	0.33	0.33
Flèches	2	645	0.17	0.34
Rectangles	3	452	0.12	0.36
Lignes courbes	4	325	0.087	0.35
Segments	5	269	0.072	0.36
Angles	6	213	0.057	0.34
Triangles	7	189	0.051	0.35
Carrés	8	171	0.046	0.36
Symboles :				
Astérisques, etc.	9	148	0.040	0.35
Autres morphèmes	10	40		
<b>RÉSULTAT</b> : le produit $f_r \times r$ est constant, voisin de 0,35.				

<p><b>2. Brédif :</b> « Mathématiques, classe de 6<sup>e</sup> » (Hachette, juin 1969, 205 pages).            Nombre de morphemes N : 3 108.            Morphemes les plus fréquents : 2 908.            Autres morphèmes : 200.</p>				
Morphemes	Rang $r$	Nombre $n$	Fréquence $f_r$	Fréquence $\times$ rang $f_r \times r$
Ronds	1	1 084	0.34	0.34
Flèches	2	574	0.18	0.36
Segments	3	384	0.12	0.36
Patates	4	279	0.089	0.35
Rectangles	5	228	0.073	0.35
Triangles	6	193	0.062	0.36
Carres	7	166	0.053	0.37
Autres morphemes	8	200		
<i>RESULTAT : le produit <math>f_r \times r</math> est constant, voisin de 0.35.</i>				
<p><b>3. Guilhien :</b> « Électronique, tome 1 (tubes électroniques à vide amplificateurs) » (P.U.F., 510 pages).            Nombres de morphemes : N = 6 216.            Morphèmes les plus fréquents : 5 716.            Autres morphèmes : 500.</p>				
Morphemes	Rang $r$	Nombre $n$	Fréquence $f_r$	Fréquence $\times$ rang $f_r \times r$
Segments	1	2 249	0.36	0.36
Flèches	2	1 380	0.22	0.44
Lignes courbes	3	874	0.14	0.42
Rectangles	4	682	0.109	0.43
Rhéostats	5	532	0.085	0.42
Autres morphemes	6	500		
<i>RESULTAT : le produit <math>f_r \times r</math> est constant, voisin de 0.42.</i>				
<p><b>4. Kassatine et Péréaline :</b> « Cours d'électrotechnique » (Éditions M.I.R., Moscou, 679 pages).            Nombre de morphemes : N = 6 690.            Morphemes les plus fréquents : 6 238.            Autres morphemes : 452.</p>				
Morphemes	Rang $r$	Nombre $n$	Fréquence $f_r$	Fréquence $\times$ rang $f_r \times r$
Flèches	1	2 730	0.40	0.40
Ronds	2	1 390	0.207	0.41
Rectangles	3	892	0.133	0.40
Lignes courbes	4	685	0.102	0.41
Segments	5	541	0.081	0.40
Autres morphemes	6	452		
<i>RESULTAT : le produit <math>f_r \times r</math> est constant, voisin de 0.41.</i>				

MOT ET IMAGE : LES MÊMES LOIS STATISTIQUES

<p>5. Ralston et Wilf: « Méthodes mathématiques pour calculateurs arithmétiques » (1965. 477 pages).</p> <p>Nombre total de morphèmes : N = 3 370.  Morphèmes les plus fréquents : 2 970.  Autres morphèmes : 400.</p>				
Morphèmes	Rang <i>r</i>	Nombre <i>n</i>	Fréquence <i>f<sub>r</sub></i>	Fréquence x rang <i>f<sub>r</sub> x r</i>
Flèches	1	1 470	0.43	0.43
Rectangles	2	703	0.208	0.42
Segments	3	462	0.137	0.41
Ronds	4	335	0.099	0.40
Autres morphèmes	5	400		
<p>RÉSULTAT : le produit <math>f_r \times r</math> est constant, voisin de 0.42.</p>				
<p>6. Usine Nouvelle : 14 numéros.</p> <p>Nombre total de morphèmes : N = 3 200.  Morphèmes les plus fréquents : 3 146.  Autres morphèmes : 54.</p>				
Morphèmes	Rang <i>r</i>	Nombre <i>n</i>	Fréquence <i>f<sub>r</sub></i>	Fréquence x rang <i>f<sub>r</sub> x r</i>
Rectangles	1	800	0.25	0.25
Cercles	2	395	0.12	0.24
Flèches	3	270	0.084	0.25
Ellipses	4	198	0.061	0.24
Carrés	5	158	0.049	0.24
Roues dentées	6	134	0.041	0.25
Losanges	7	106	0.033	0.23
Terminal	8	101	0.031	0.25
Hexagones	9	90	0.028	0.25
Triangles	10	76	0.023	0.23
Chevrans	11	62	0.019	0.22
Polygones étoilés	12	62	0.019	0.23
Parallélogrammes	13	57	0.017	0.23
Trapèzes	14	52	0.016	0.22
Flammes	15	47	0.014	0.22
Ellipses « paraphes »	16	45	0.014	0.22
Sablonnés	17	43	0.013	0.22
Rectangles coins arrondis	18	41	0.012	0.23
Pentagones	19	38	0.011	0.22
Patates	20	36	0.011	0.22
Carrés sur pointe	21	36	0.011	0.23
Arcs « enroulés »	22	32	0.010	0.22
Demi-cercles	23	32	0.010	0.23
Porte-clefs	24	30	0.0093	0.22
Demi-terminal	25	28	0.0087	0.21
Accolades	26	28	0.0087	0.22
Gouttes et bulles	27	27	0.0084	0.22
Triangles incurvés	28	26	0.0081	0.22
Morphèmes	Rang <i>r</i>	Nombre <i>n</i>	Fréquence <i>f<sub>r</sub></i>	Fréquence x rang <i>f<sub>r</sub> x r</i>
Quadrilatères incurvés	29	25	0.0078	0.22
Ondes	30	24	0.0075	0.22
Arcs d'hyperbole	31	21	0.0065	0.20
Octogones	32	20	0.062	0.20
<p>AUTRES MORPHÈMES A SIGNALER  LIGNES DENTS DE SCIE ou bords analogues (18), polygones concaves (10),  polygones de 7 côtés (7), cœur (5), main (2), œil (3), écusson (9).  VALEUR DE LA CONSTANTE : 0.23</p>				

Courbes correspondantes





Pour chaque corpus, nous donnons d'abord le tableau de dépouillement, les morphèmes étant classés suivant l'ordre de fréquence décroissante, puis le graphe obtenu sur papier logarithmique. L'alignement des points représentatifs concrétise la loi de ZIPF. Il se réalise très bien pour les cinq premiers corpus, tandis que l'accord est moins bon pour le sixième, ce qui est naturel puisque le nombre total de morphèmes y est petit. C'est le seul cas qui nécessite une correction et l'application de la loi de ZIPF-MANDELBROT.

Nous pouvons donc conclure que, dans les corpus analysés, le langage iconique vérifie la loi de ZIPF, avec une précision meilleure qu'en linguistique, puisque, sur les "textes longs" il a été inutile de corriger en appliquant la loi de ZIPF-MANDELBROT (6).

La loi de ZIPF traduit d'ailleurs, comme on le démontre en théorie de l'information, une tendance des langages à se modifier dans le sens d'une transmission plus efficace; il est donc assez naturel de la retrouver dans des lexiques différents. Mais, si le produit de la fréquence par le rang est constant, pour les morphèmes comme pour les mots, il faut remarquer que la valeur de la constante n'est pas la même en iconologie et en linguistique : de l'ordre de 0,4 dans le 1<sup>er</sup> cas (nous avons trouvé 0,35; 0,35; 0,42; 0,41; 0,42; 0,23), de l'ordre de 0,1 dans le second cas; cela tient à la pauvreté du vocabulaire iconique considéré, par rapport à celui de la langue naturelle.

### Difficultés d'élargir le champ de l'analyse

D'autre part, la précision des résultats ne doit pas faire illusion : nous avons insisté sur le fait que nous nous limitons à un champ très étroit et particulièrement favorable. L'exploration d'un champ plus large est délicate. La délimitation d'un mot, en français, pose relativement peu de problèmes, sauf le cas de l'apostrophe, du trait d'union, des mots composés (7). Au contraire, la délimitation d'un morphème est très complexe : les morphèmes composés sont légion (par exemple : résistance fixe codée rectangle, résistance variable codée rectangle traversé d'une flèche), et certains morphèmes sont ambigus (par exemple : arc). D'autre part, la "dimension d'iconicité" est très variable (8). Les dessins s'échelonnent de la représentation la plus fidèle du réel à la représentation symbolique, du figuratif au non-figuratif. L'identification d'un morphème est donc peu nette, sauf dans le cas extrême où, la représentation étant symbolique, l'identification se fait par codage. Il semble intéressant de tenir compte des structures mathématiques sous-jacentes (ensembliste, topologique, linéaire, métrique) pour préciser la notion d'iconicité, étudier les fonctions des morphèmes et décrire ces assemblages.

---

(6) Voir note 7. Cf. Charles MULLER : *Initiation à la mathématique linguistique* (Larousse) où figure page 168 un tableau donnant le produit de la fréquence par le rang, que l'on peut utilement comparer aux tableaux que nous avons donnés pour nos corpus.

(7) Cf. l'ouvrage de Charles MULLER cité, pages 145 à 151.

(8) Cf. A MOLES : "Théorie informationnelle du schéma" in revue '*Schéma et schématisation*' (n° 1, 1968).

## A VOS STYLOS

### RETOUR SUR LE PROBLÈME 14

D. DUMONT qui avait proposé ce problème nous écrit de Madagascar où il est en poste : Je vois une solution partielle du problème que j'avais proposé, où il est question de l'identité

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \dots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{7x^7}{1-x^7} + \dots$$

Voici une autre preuve de cette identité, qui permet de compléter la solution en répondant au problème de trouver un équivalent de la somme  $S(x)$  quand  $x$  tend vers  $1^-$ , plus précisément je propose  $S(x) \sim \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{(1-x)^2}$ . On part de l'identité entre deux produits infinis :

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\dots}$$

qui s'obtient par simplification en ayant d'abord remplacé chaque facteur  $1+x^n$  du premier membre par  $\frac{1-x^{2n}}{1-x^n}$ . Si  $P(x)$  désigne ces deux produits infinis, on obtient l'identité cherchée en prenant les dérivées logarithmiques. On a :

$$S(x) = x(\log P(x))' = x \frac{P'(x)}{P(x)}$$

Mais par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} \log P(x) &= \sum_{n \geq 1} \log(1+x^n) = \sum_{n \geq 1} = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m+1} x^{mn}}{m} = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sum_{n \geq 1} x^{mn} \\ &= \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m(1-x^m)} = \frac{1}{1-x} \left[ x - \frac{x^2}{2(1+x)} + \frac{x^3}{3(1+x+x^2)} - \dots \right] \\ &\sim \frac{1}{1-x} \left[ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots \right] = \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

car on sait que  $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , d'où  $\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} - 2 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{(2m)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ .

Par suite,  $S(x) = x(\log P(x))' \sim \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{(1-x)^2}$ , en admettant que l'on puisse dériver les équivalents. Cette démonstration manque totalement de rigueur, mais, au risque

d'encourir des reproches de collègues sourcilleux, je pense que c'est le résultat qui compte et qu'il est exact.

En revanche, je ne sais toujours pas répondre à la question de donner des équivalents, pour  $x$  fixé et quand  $n$  tend vers l'infini, des restes  $R_n(x)$  de chaque série, je pense qu'il serait intéressant de comparer au moins expérimentalement les deux vitesses de convergence à l'aide d'un micro-ordinateur. Les lecteurs intéressés par ce problème, ou par une démonstration rigoureuse du résultat donné plus haut, gardent donc la possibilité de relancer le sujet.

D'autre part, M. KRIER, après une démonstration de l'égalité reposant sur le même argument que chez D. DUMONT, précise le comportement de la somme au voisinage de  $x = 1$ , en fournissant l'encadrement suivant, compatible avec la conjecture de D. DUMONT.

Soit  $u_n = \frac{(2n+1)x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}}$ . Nous pouvons encadrer  $u_n$  : en effet, en utilisant l'inégalité  $x^p + x^{2k-p} > 2x^k$ , on voit que

$$(2k+1)x^k < 1 + x + x^2 + \dots + x^{2k} < 2k+1$$

d'où

$$\frac{x^{2k+1}}{1-x} < u_k = \frac{(2k+1)x^{2k+1}}{(1+x+x^2+\dots+x^{2k})(1-x)} < \frac{x^{k+1}}{1-x}$$

et, par addition

$$\frac{x}{1-x} \frac{1-x^{(2n+2)}}{1-x^2} < \sum_{k=0}^n u_k < \frac{x}{1-x} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

puis

$$\frac{x}{1+x} \times \frac{1}{(1-x)^2} < \sum_{k=0}^{\infty} u_k < x \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Conclusion : la fonction  $(1-x)^2(\sum_{k=0}^{\infty} u_k)$  est encadrée par les fonctions  $\frac{x}{1+x}$  et  $x$ .

---

### PROBLÈME 17

**Énoncé** (proposé par O. ADELMAN)

Trouver tous les couples  $(a, b)$  de réels strictement positifs tels que, en posant

$$A = \{[na], n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{[nb], n \in \mathbb{N}^*\}$$

on ait  $A \cap B = \emptyset$  et  $A \cup B = \mathbb{N}^*$ .  $[x]$  est la partie entière de  $x$ .

Même question avec trois réels  $a, b, c$  tels que  $A, B$  et  $C$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

**Solutions**

Nous avons reçu trois solutions : deux de l'auteur, une de J. LEFORT et une solution partielle de P. FRIEDERICH. Etant donné la diversité des démonstrations utilisées il nous a semblé intéressant de les présenter toutes les trois.

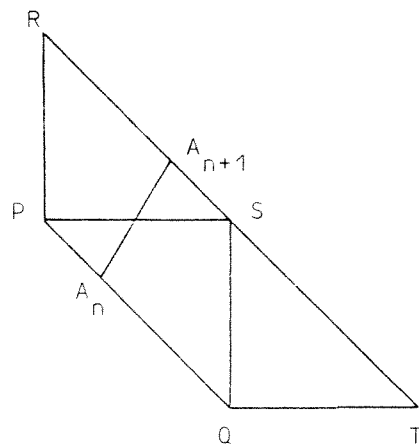
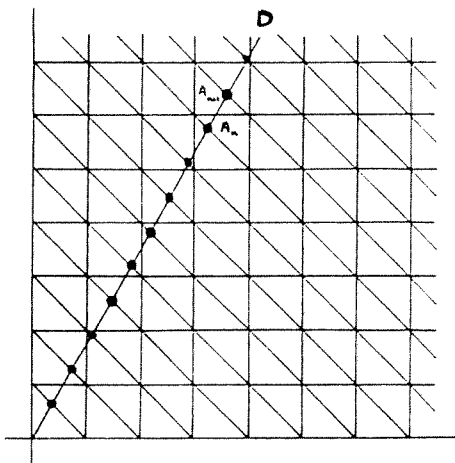
**Solution géométrique de M. ADELMANN**

Il est clair que  $a$  et  $b$  sont plus grands que 1. Posons  $\alpha = \frac{1}{a}$  et  $\beta = \frac{1}{b}$ , et appelons  $A_n$  le point du plan de coordonnées  $(n\alpha, n\beta)$ ; les points  $A_n$  sont alignés sur une droite  $D$ . Désignons par  $H$  (respectivement  $V$ ) l'ensemble des droites d'équation  $y = n$  (respectivement  $x = n$ ) où  $n$  décrit  $\mathbb{N}^*$ , et par  $E$  la réunion  $H \cup V$ .

Un entier  $n \geq 1$  est dans  $A$  si et seulement si  $n \leq pa < n + 1$  pour un  $p \geq 1$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha n \leq p < \alpha(n + 1)$ , ou encore si et seulement si l'intervalle  $[A_n, A_{n+1}[$  de  $D$  rencontre au moins une droite de  $V$ ; puisque  $\alpha < 1$  ceci équivaut à dire que  $[A_n, A_{n+1}[$  rencontre exactement une droite de  $V$ . De même,  $n$  est dans  $B$  si et seulement si  $[A_n, A_{n+1}[$  rencontre exactement une droite de  $H$ . En fin de compte,  $A$  et  $B$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$  si et seulement si chaque  $[A_n, A_{n+1}[$  rencontre exactement un élément de  $E$ .

Cela entraîne l'irrationalité de  $\frac{\alpha}{\beta}$  : sinon, la droite  $D$  passerait par une infinité de points entiers, et les  $[A_n, A_{n+1}[$  contenant ces points rencontreraient deux éléments de  $E$ .

Cela entraîne aussi  $\alpha + \beta = 1$  : pour  $n \geq 1$ ,  $[n\alpha] + [n\beta]$  est égal à la somme du nombre d'entiers majorés par l'abscisse de  $A_n$  et du nombre d'entiers majorés par l'ordonnée de  $A_n$ , donc au nombre total d'éléments de  $E$  rencontrant  $[A_1, A_n]$ , qui vaut  $n - 1$  (ou  $n$  si  $A_n$  est sur une droite de  $E$ ); divisant par  $n$  et faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient  $\alpha + \beta = 1$ .



Réciproquement, supposons  $\alpha + \beta = 1$  et  $\frac{\alpha}{\beta}$  irrationnel. Pour  $n \geq 1$ ,  $A_n$  est sur la droite  $x + y = n$  sans être un point entier; sur cette droite, il se trouve entre deux points entiers  $P$  et  $Q$ . Le point  $A_{n+1}$  est sur la droite suivante  $RST$ , entre  $R$  et  $T$ , sans être en  $S$ . Donc l'intervalle  $[A_n, A_{n+1}[$  rencontre un et un seul des segments  $PS$  et  $QS$ , c'est-à-dire une droite de  $E$  et une seule.

### Solution analytique de M. ADELMANN

Si  $a \leq 1$ ,  $A \supset \mathbb{N}^*$  et  $B = \emptyset$ ;  $a$  et  $b$  doivent donc être plus grands que 1. Posons  $\alpha = \frac{1}{a}$ ,  $\beta = \frac{1}{b}$ . Puisque  $n_1 \neq n_2 \implies [n_1 a] \neq [n_2 a]$ , le nombre d'éléments de  $A \cap \{1, \dots, k\}$  est le plus grand entier  $n$  tel que  $na < k + 1$ , c'est-à-dire tel que  $n < (k + 1)\alpha$ . En particulier, la "densité asymptotique" de  $A$  est

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |A \cap \{1, \dots, k\}| = \alpha,$$

et de même celle de  $B$  est  $\beta$ . Puisque  $A \cap B = \emptyset$ , celle de  $A \cup B$  est  $\alpha + \beta$ ; comme  $A \cup B = \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha + \beta = 1$ .

Il est aussi nécessaire que  $\alpha$  soit irrationnel; sinon, il s'écrirait  $\frac{p}{q}$ , et  $q$  serait à la fois dans  $A$  (car  $q = pa$ ) et dans  $B$  (car  $q = (q - p)b$ ).

Ces conditions sont suffisantes. Supposons en effet  $\alpha$  et  $\beta$  irrationnels et de somme 1.

Soit  $k \in A \cap B$ . Puisque  $k$  est dans  $A$ , il existe un entier  $m$  tel que  $k \leq ma < k + 1$ , donc

$$k\alpha \leq m < (k + 1)\alpha;$$

de même,  $k$  étant dans  $B$ , il existe  $n$  tel que

$$k\beta \leq n < (k + 1)\beta.$$

Par addition,  $k \leq m + n < k + 1$ , donc  $m + n = k$ . Les inégalités  $k\alpha \leq m$  et  $k\beta \leq n$ , dont la somme est une égalité, doivent aussi être des égalités, et l'hypothèse d'irrationnalité est contredite :  $A \cap B$  est donc vide.

Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ . Toujours grâce à l'irrationnalité, il existe  $p$  tel que  $\frac{p}{q+1} < \alpha < \frac{p+1}{q+1}$ , et on a donc aussi  $1 - \frac{p+1}{q+1} < \beta < 1 - \frac{p}{q+1}$ . Il en résulte que  $pa < q + 1 < (p + 1)a$  et  $(q - p)b < q + 1 < (q + 1 - p)b$ , d'où

$$|A \cap \{1, \dots, q\}| = p, \quad |B \cap \{1, \dots, q\}| = q - p.$$

Joint à  $A \cap B = \emptyset$ , ceci entraîne  $A \cup B \supset \{1, \dots, q\}$ , donc  $q \in A \cup B$ , et l'égalité  $A \cup B = \mathbb{N}^*$  est établie.

**Solution de J. LEFORT**

a) Supposons  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ,  $a$  et  $b$  irrationnels et soit  $p$  un naturel alors  $\frac{p}{a} + \frac{p}{b} = p$  d'où  $[\frac{p}{a}] + [\frac{p}{b}] = p - 1$  et de même  $[\frac{p+1}{a}] + [\frac{p+1}{b}] = p$ .  $a$  et  $b$  jouant le même rôle, on peut supposer que

$$[\frac{p}{a}] = [\frac{p+1}{a}] \quad \text{et} \quad [\frac{p}{b}] + 1 = [\frac{p+1}{b}].$$

• De la première égalité on tire

$$[\frac{p}{a}] < \frac{p}{a} < \frac{p+1}{a} < [\frac{p}{a}] + 1$$

les inégalités étant strictes à cause de l'irrationalité de  $a$ . La première inégalité conduit à  $[\frac{p}{a}]a < p$ ; la dernière inégalité à  $([\frac{p}{a}] + 1)a > p + 1$ . On en déduit

$$[\frac{p}{a}]a < p < p + 1 \leq ([\frac{p}{a}] + 1)a$$

ce qui prouve que  $p \notin A$ .

• De la deuxième égalité on tire

$$[\frac{p}{b}] + 1 < \frac{p+1}{b} < \frac{p+b}{b} < [\frac{p}{b}] + 2$$

par un raisonnement analogue au précédent. La première inégalité conduit à  $([\frac{p}{b}] + 1)b < p + 1$  et la dernière à  $p + b < ([\frac{p}{b}] + 1)b + b$  soit  $p < ([\frac{p}{b}] + 1)b$ . On en déduit que  $([\frac{p}{b}] + 1)b$  est encadré par  $p$  et  $p + 1$  ce qui prouve que  $p = [([\frac{p}{b}] + 1)b] \in B$ .

• Il n'y a que deux cas possibles pour tout naturel, il est soit dans  $A$ , soit dans  $B$ . Ces deux ensembles forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

b) La réciproque est la même que ci-dessus.

Cependant aucun des auteurs n'a répondu à la question supplémentaire : "Peut-on généraliser le problème au cas de trois réels  $a, b, c$  tels que  $A, B$  et  $C$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ ?"

---

PROBLÈME 18

**Énoncé (proposé par Ph. ARTZNER)**

Aux instants 1, 3, 5, ..., 103, on retourne successivement les 52 cartes (26 noires et 26 rouges) d'un jeu préalablement battu. On a le droit de déclarer au plus une fois, à l'un des instants 0, 2, 4, ..., 102 : "Je parie que la prochaine carte sera rouge". On gagne si elle l'est effectivement, on perd sinon — ou si l'on n'a choisi aucun instant. Quelle stratégie maximise la probabilité de gain?

**Indication**

La dernière carte du paquet a une chance sur deux d'être rouge.

---

PROBLÈME 19

**Énoncé**

Soit  $C$  un ensemble convexe borné, fermé du plan. Peut-on construire un parallélogramme  $P$  inclus dans  $C$  tel que l'aire de  $P$  soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire de  $C$ ?

---

PROBLÈME 20

**Énoncé**

Calculer

$$\sum_{n=0}^p (-1)^{p-n} \frac{n^p}{n!(p-n)!}$$

et en déduire  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$ .