HISTOIRE DES MATHEMATIQUES POUR NOS CLASSES

I.R.E.M. DE STRASBOURG
1991

ANTVERPIÆ, APVD IOANNEM ET IACOBVM MEVRSIOS. ANNO M.DC.XLVII.
Cum priuilegio Cæsareo et Regis Hispaniarum.

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES POUR NOS CLASSES

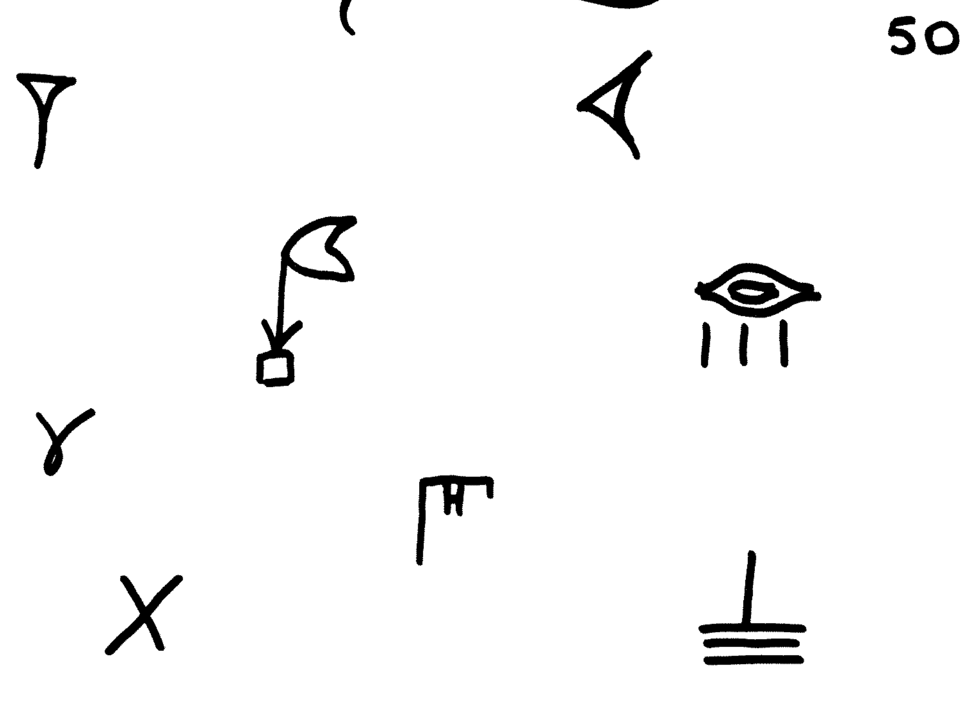
On trouvera dans cette brochure plusieurs articles concernant l'histoire des mathématiques et faits (à l'exception du dernier sur la quadrature de l'hyperbole) par des professeurs de lycée et collège. Ils ont été réalisés pour partie dans le cadre d'un stage PAF, pour partie par un groupe de Recherche-Formation de la MAFPEN, mais dans les deux cas sur le thème : l'histoire des mathématiques comme outil pédagogique. Ils peuvent donc intéresser les professeurs enseignant les mathématiques et qui voudraient illustrer leurs cours par quelques aspects historiques. Les articles regroupés ici concernent essentiellement des questions numériques, dont une part importante pour l'histoire des logarithmes. Mais l'on peut espérer que d'autres brochures de ce type vont suivre, sur d'autres thèmes dont certains sont déjà prêts (nombres négatifs - invention du calcul différentiel - probabilités).

Jean Pierre FRIEDELMEYER

SOMMAIRE

Evolution de la numération	S.HAEGEL
Le tunnel de SAMOS	M.& Mme CHANTRIAUX
Méthode de fausse position	M. WOLF
La méthode de double fausse position	SARROUY
L'invention des logarithmes par NEPER (traduction et commentaires à partir d'un texte anglais)	J.M. ULRICH
La quadrature de l'hyperbole et les logarithmes	K. VOLKERT

ÉVOLUTION DE LA NUMÉRATION



Suzanne HAEGEL
L.E.T.I. - Haguenau

Dès que l'homme eut conscience des nombres, il lui fallut inventer des symboles pour les exprimer.

Au début il utilisa une numération concrète : "des entailles sur un morceau de bois, des noeuds sur une corde etc..."

Puis naquirent, avec l'écriture et la nécessité d'écrire des nombres de plus en plus grands, différents systèmes de numération.

Nous allons parler, ici, de ces systèmes et de leur évolution qui ont permis, vers le Xe siècle, la naissance de notre système de numération de position.

Qu'est-ce que la numération de position ?

Prenons, par exemple le système romain qui n'est pas un système de position. Le symbole C signifie "cent" et ce quelle que soit la position qu'il occupe dans l'écriture des nombres ainsi dans

MC (1100) il est en dernière position

CLXX (170) il est au début.

On rétorquera, avec raison, qu'il peut signifier "moins cent" dans par exemple :

CM (900)

Cette notation est déjà une évolution par rapport à la première écriture de 900 (DCCCC) et c'est un premier pas vers une numération de position.

On voit très bien les inconvénients d'une telle notation :

- répétition fastidieuse d'un même symbole. (On a dû commettre de nombreuses erreurs de transcription).
- les opérations sont difficiles à faire (essayez donc de faire une addition !). Ce n'est pas sans raison que les calculateurs étaient considérés comme investis de pouvoirs surnaturels.

Dans la numération de position, un même symbole prend une valeur différente suivant la position qu'il occupe dans l'écriture des nombres.

Dans 208 le "2" signifie deux cents

Dans 21 il signifie vingt.

Quels étaient les systèmes utilisés ? Comment s'est faite l'évolution ? Comment faisait-on les opérations ?

Nous allons essayer de répondre à ces questions.

L'HISTOIRE DE LA NUMERATION

La numération babylonienne.

Les plus anciens documents ont été découverts à Uruk en Mésopotamie et datent de 3000 ans avant J.C. On peut les voir au Musée du Louvre.
"Pour pallier les difficultés soulevées par leurs civilisations orales et pour satisfaire les multiples besoins crées par leur intense activité économique les Sumériens et les Elamites avaient pris l'habitude d'enregistrer les résultats de leurs dénombrements sur les petites tablettes" (1)

On ne va pas s'appesantir sur l'évolution de ce système de numération. Nous ne parlerons que des chiffres cunéiformes.
Deux symboles étaient utilisés :

 : 1 et  : 10

Les nombres étaient écrits en base soixante, et en base dix dans chaque groupe d'unité, chacun des symboles étant répétés autant de fois que nécessaire.
Par exemple :

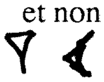
$$3824 = 1 \times 3600 + 3 \times 60 + 44$$
$$= 1 \times 60^2 + 3 \times 60 + 44$$

3824 s'écrivait :

$1 \times 60^2 + 3 \times 60 + 4 \times 10 + 4$

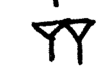
Avec ce principe

$600 = 10 \times 60$ s'écrit  et non  (qui se lit 1)

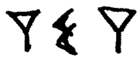
et $70 = 1 \times 60 + 10$ s'écrit 

Il y a risque de confusion.
De même :

$61 = 1 \times 60 + 1$ s'écrit 

alors que 2 s'écrit 

A l'époque de la conquête d'Alexandre le Grand on utilisait le symbole  pour remplacer les espaces.

61 s'écrivait alors 

La numérotation babylonienne fut donc un système positionnel. Le symbole indique 60 aussi bien que 1 dans l'écriture de 61.
Mais il n'utilise que deux symboles (il devrait en comporter 59, ou 60).

Avec ce système 59 s'écrit 

La numération égyptienne.

Les plus anciens spécimens connus concernant l'écriture égyptienne datent de 3000 avant J.C. Ces documents sont gravés sur des pierres, peints sur des vases ou des feuilles de papyrus.
Pour écrire les nombres entiers, ils utilisaient un symbole différent pour chacune des 7 premières puissance de dix :

1
10
100
1000

10 000
100 000
1000 000

Ainsi 3624 s'écrivait : 

Cette écriture utilise donc le principe de l'addition, les nombres étant écrits en base dix.
Ces nombres indiquaient par exemple la quantité de prisonniers ou le nombre des ennemis massacrés.
Ce système était fort simple mais il pouvait être source d'erreurs à cause de la répétition fastidieuse des signes. On imagine aisément le scribe oubliant de noter l'un des symboles ou, pourquoi pas, en écrire un de trop !

Les Egyptiens utilisaient aussi les fractions unitaires (le numérateur est égal à un), elles étaient notées de la manière suivante :

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{23}$

Les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ avaient des symboles spéciaux

1/2 2/3

Ce sont les seules fractions qu'ils utilisaient.

Par exemple la fraction 7/10 était décomposée en somme de fractions unitaires.

$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ s'écrivait 

La numération grecque

Les Athéniens utilisaient au 6e siècle avant J.C. le système suivant :
Ils disposaient des six symboles :

I	Γ	Δ	H	X	M
1	5	10	100	1000	10 000

ainsi 3704 s'écrivait :

XXX HHHHHHH I I I I
3 x 1000 + 7 x 100 + 4

en combinant les symboles Γ et H de la manière suivante 𐅅 qui représente 500, ils ont amélioré leur système en évitant la trop grande répétition des symboles.
3704 s'écrivait

XXX𐅅HHIIII

Mais peu à peu le système ionique qui utilisait les lettres de l'alphabet grec a remplacé le système attique.
A l'aide de leurs vingt sept lettres les grecs symbolysaient les neuf unités, les neuf dizaines et les neuf centaines. A l'aide d'apostrophes placées à gauche ou à droite de la lettre ils changeaient la valeur du symbole.

Ainsi 3 s'écrivait γ

3000 s'écrivait ͵γ

1/3 s'écrivait γ'

3793 s'écrivait donc :

͵γψϙγ

La numération chinoise

Il est très difficile de donner une date plausible aux documents chinois les plus anciens. Toujours est-il que les chinois ont utilisé deux systèmes de numération différents. Je ne parlerai, ici, que de celui utilisé par les mathématiciens et les calculateurs (en 220 avant J.C). Ils utilisaient les deux séries de neuf symboles suivants :

𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
1	2	3	4	5	6	7	8	9

et

𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Les nombres sont écrits en base dix. On commence à écrire le chiffre des unités tel qu'il est donné dans la première série puis le chiffre des dizaines est pris dans la deuxième série, le chiffre des centaines est pris dans première série etc...

Exemples

3 7 6 4 𝍫𝍦 𝍮𝍣

Ce système permet différencier 333 de 3033

3 3 3 3 0 3 3
𝍢𝍫𝍢 𝍫 𝍫𝍢

Pour différencier 333 et 30033 ils écrivaient le nombre dans un quadrillage.

𝍢			𝍫	𝍢

Ce système est donc bien un système positionnel :

𝍢 prend des valeurs différentes suivant sa position dans l'écriture du nombre.

L'HISTOIRE DES OPERATIONS

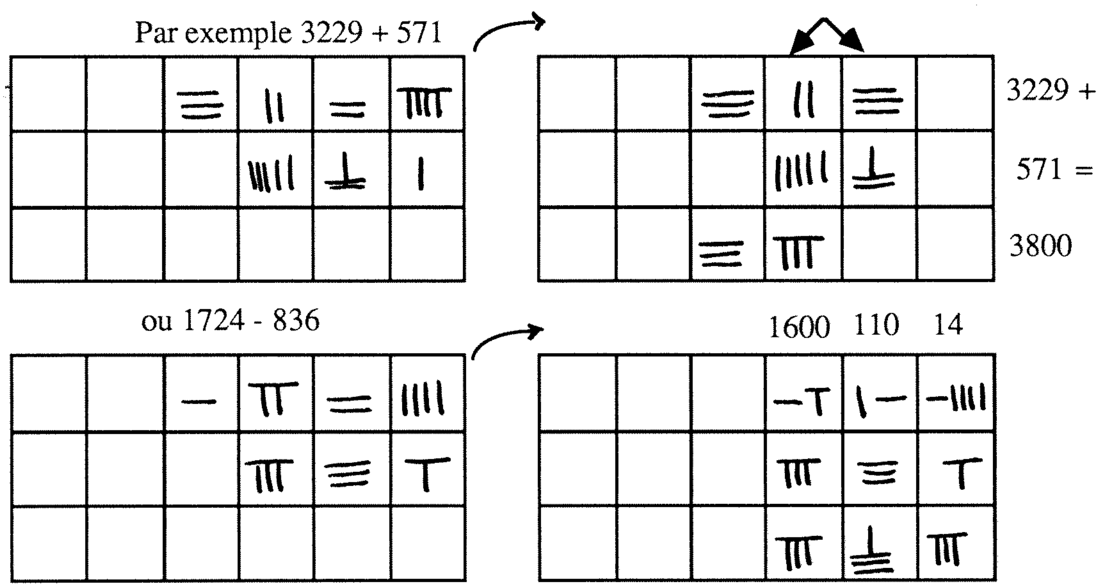
Après avoir vu différents systèmes de numération, on se demande "mais comment faisaient-ils les opérations ?"

Les babyloniens effectuaient leurs multiplications à l'aide de tables qui avaient sans doute été obtenues par duplications successives.

On sait que les égyptiens se servaient de tables pour décomposer les fractions en somme de fractions unitaires.

Les administrateurs chinois transportaient dans leur sac des barres numériques (en ivoire ou en bambou) et lorsqu'ils calculaient, un ensemble de barres était peint en rouge et l'autre en noir pour distinguer les nombres positifs des nombres négatifs.

Pour additionner deux nombres, on les disposait sur un échiquier.

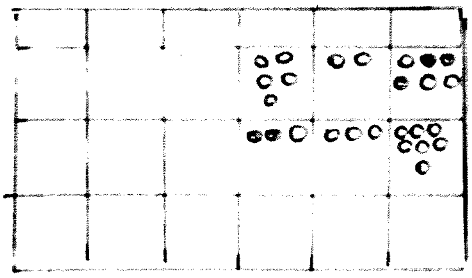


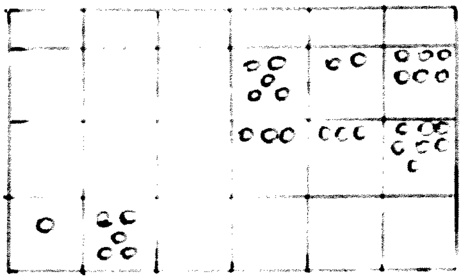
Les abaques grecs et romains

Utilisés sans doute depuis le 6e siècle avant J.C. c'était des tables ou des plaques sur lesquelles étaient dessinées des colonnes. Les abaques servaient à faire les opérations (voir planche), on plaçait les nombres sur l'abaque à l'aide de cailloux (calculus en latin) ou de jetons. On les a utilisés jusqu'à la fin du Moyen-Age en Europe.

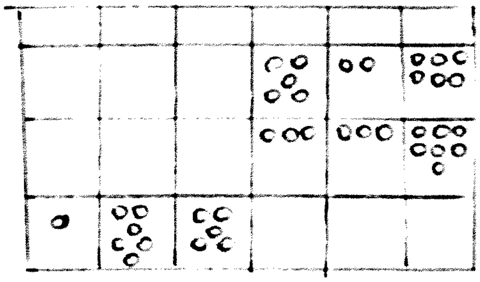
Gerbert (940-993) améliora leur utilisation en substituant les jetons d'une colonne par un seul qui portait le nombre correspondant aux jetons substitués.

DXXVI multiplié par CCCXXXVII

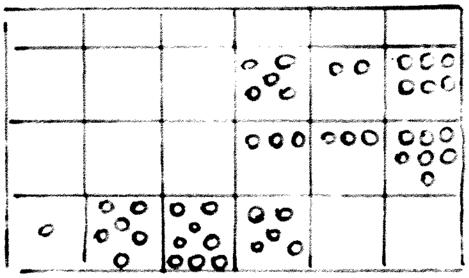




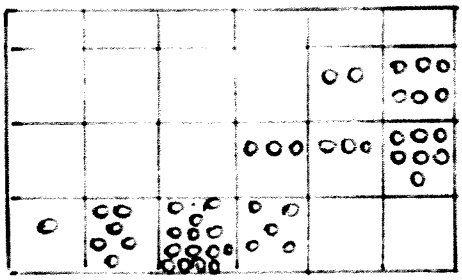
500 x 300 = 150 000



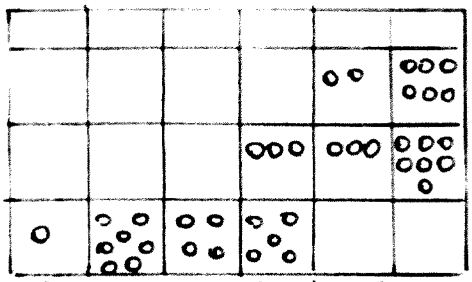
500 x 30 = 15 000



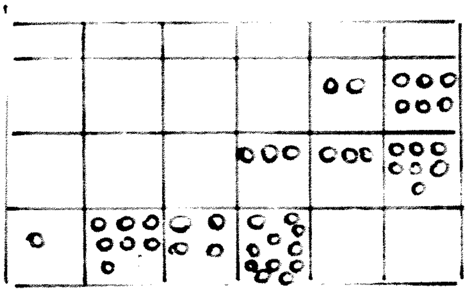
500 x 7 = 3500



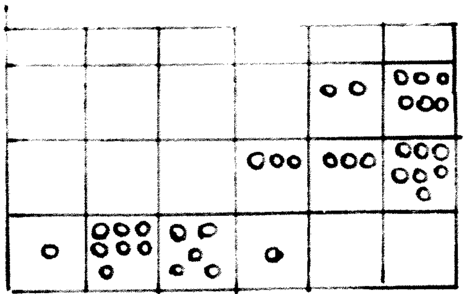
20 x 300 = 6000



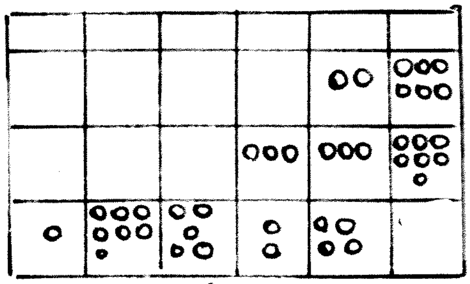
Réécriture de la ligne



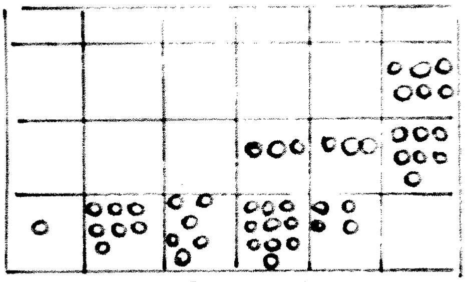
20 x 30 = 600



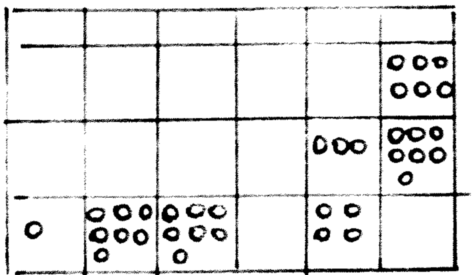
Réécriture de la ligne.



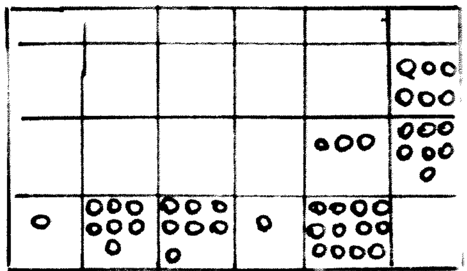
20 x 7 = 140



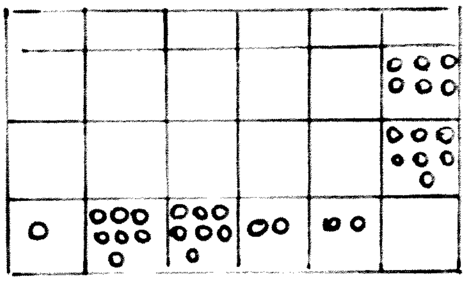
6 x 300 = 1800



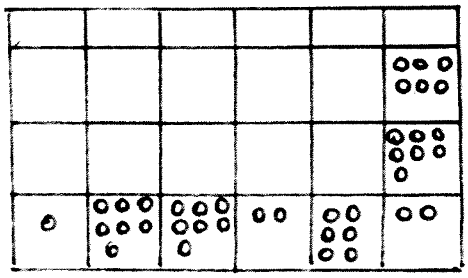
Réécriture de la ligne.



6 x 30 = 180



Réécriture de la ligne.



6 x 7 = 42

Résultat 526 x 337 = 177 262

On peut alors se demander pourquoi nous avons mis si longtemps avant d'écrire les nombres avec notre système actuel c'est-à-dire tel qu'il était écrit sur l'abaque.
Une des raisons est qu'il manquait un symbole pour traduire le fait qu'une colonne de l'abaque était vide, en effet, sans ce symbole 68 4 pourrait représenter 6 804 aussi bien que 68 004.

LE ZERO

Dans l'antiquité

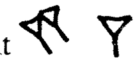
Nous avons vu (l'évolution de la numération) que les babyloniens avaient un symbole pour séparer les groupes.

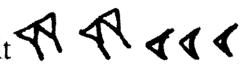
Ce symbole : "  " était aussi utilisé par les astronomes pour marquer l'absence des unités du 1er ordre.

Ainsi :

180 est noté  (3 x 60 + 0) sur une tablette conservée au British Museum.

Pour noter les fractions sexagésimales, ils utilisaient un symbole différent pour indiquer l'absence d'unité :

1/60 se notait  (0 unité + 1/60)

$30/60^2$ se notait  (0 unité + 0 x 1/60 + 30 x $1/60^2$)

Les incas qui utilisaient une numération de position un peu bizarre (histoire universelle des chiffres) utilisaient également un symbole pour traduire l'absence d'unités.

Au Moyen-Age

Ce sont les Hindous et les Arabes qui ont donné naissance à notre système de numération. Les Hindous utilisaient un système de position. Les nombres étaient écrits en base dix, ils utilisaient neuf symboles différents et ceci, sans doute, depuis le 5e siècle avant J.C.

Pour faire leurs opérations ils ont sans doute, au départ, utilisé des abaques mais ils n'avaient pas besoin de jetons, il leur suffisait d'écrire un de leur neuf symboles dans chaque colonne.

Il est donc très tôt paru indispensable d'inventer un symbole pour traduire le fait qu'une colonne était vide. Ce symbole inventé et l'abaque devenait inutile.

C'est sans doute vers le 7e siècle (ou avant) que ce symbole fut inventé. C'était soit un point, soit un cercle.

Les arabes qui ont traduit de nombreux textes hindous, grecs et latins ont très tôt (au Xe siècle) été séduits par le système de numération hindou et l'ont adopté.

Parallèlement les calculateurs chinois, sans doute sous l'influence des bouddhistes d'origine indienne, ont introduit l'usage du zéro dans leur numération ainsi 30033 (voir l'évolution de la numération) s'écrit à présent :

L'Europe continua à utiliser les chiffres romains. Gerbert qui avait étudié dans les écoles arabes d'Espagne introduisit les chiffres indo-arabes en les écrivant sur les jetons (voir histoire des opérations) servant aux calculs.

Le "Liber abbaci" de Fibonacci (1170-1250) parle des neuf symboles indo-arabes ainsi que du symbole zéro qu'il appelle zéphirum. (Les arabes l'appelaient SIFR, c'est-à-dire vide).

Le Liber abbaci était malheureusement d'un niveau trop élevé pour l'époque. De plus, au Moyen-Age, les méthodes de calcul indo-arabes ainsi que l'usage du zéro furent frappés d'interdit. L'énorme simplification des calculs conféra au zéro un pouvoir quasi magique. Le mot Zéphirum engloba les dix symboles que l'on appela "chiffres".

Pourtant le développement du commerce et du système bancaire nécessita une arithmétique simple. "La summa" de Pacioli (1494) reprend dans l'ensemble en le simplifiant le liber abbaci et le système indo-arabe est peu à peu adopté en Europe.

Mais zéro restait un symbole, il n'avait pas le statut de nombre. Les solutions "zéro" ou "négatives" des équations étaient rejetées.

C"est Alexandre de Villedieu (au 13e siècle) qui, le premier, traita zéro comme un nombre dans le poème "Carmen de algorismo". Ce poème traite des opérations élémentaires sur les entiers.

Chuquet au 15e siècle dit de "zéro" qu'il ne possède pas de valeur.

D'ailleurs, Plonion, en 1924 dans son livre "Arithmétique" destiné à l'école primaire, écrit : "Il y a neuf chiffres 1, 2, ..., 9 et un signe particulier : 0".

Dans le livre du maître de D. André cours moyen paru en 1895, on peut lire :

> "Que représente Zéro ?"
>
> "Rien. Il prend parfois le sens des mots : aucun, nul"
>
> "Comment se nomme zéro ?"
>
> "Chiffre non significatif"

Parallèlement dans l'enseignement supérieur zéro avait statut de nombre.(2)

BIBLIOGRAPHIE

(1) Georges IFRAH "Histoire universelle des chiffres".

(2) Fragments d'Histoire des Mathématiques (APMEP).

(3) Helmuth GERICKE "Geschichte des Zahlbegriffs.

(4) A. DAHAN-DALMEDICO Une histoire des mathématiques
J. PFEIFFER Routes et Dédales

(5) J.Paul COLETTE "Histoire des mathématiques"

LE TUNNEL DE SAMOS

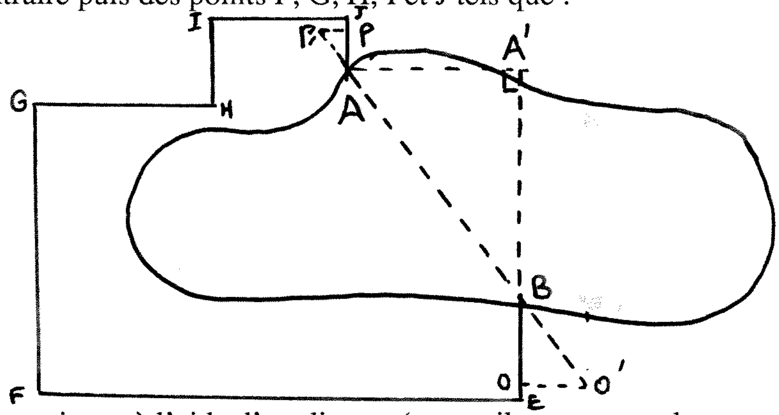
Vers 530 avant J.C. Eupalinos construisit un tunnel droit à travers le calcaire de la montagne Castro sur l'île de Samos, ce tunnel a 1 km de long, 7 pieds de hauteur et 7 pieds de large.

Sa particularité est d'avoir été commencé par les deux extrémités ; les ouvriers venant de deux directions, se rencontrèrent au milieu avec une erreur d'environ 30 pieds horizontalement et 10 pieds verticalement, ce qui est une réalisation magnifique. De plus son tracé est presque rectiligne alors qu'un aqueduc similaire réalisé près de Jérusalem vers l'an 700 était en zigzag et était deux fois plus long que la distance entre les extrémités.

Comment fit Eupalinos ?

La réponse se trouve dans "Le dioptra" de Héron d'Alexandre (60 avant J.C) Héron propose la méthode suivante :
Pour tracer une ligne droite à travers une montagne, les ouvertures A et B étant données, on place un point E arbitraire puis des points F, G, H, I et J tels que :

(BE) $\perp$ (EF)
(EF) $\perp$ (FG)
(FG) $\perp$ (GH)
(GH) $\perp$ (HI)
(HI) $\perp$ (IJ)
(IJ) $\perp$ (JA)



Ces points sont obtenus en visant, à l'aide d'un dioptre (appareil permettant de construire des perpendiculaires), à partir de E puis de F, G, H et I. Pour obtenir le point J, on déplace le dioptre sur la droite (IJ) jusqu'à ce que le point A soit vu sous un angle droit.
On peut appeler A' le pied de la perpendiculaire issue de A à la droite (EB).
On peut calculer AA' à partir de EF, GH et IJ.
De même BA' est calculé à partir de BE, FG, HI et JA.

Alors le rapport $\frac{BA'}{AA'}$ est connu. Héron lui donne la valeur 5

ACTIVITE POUR LES ELEVES

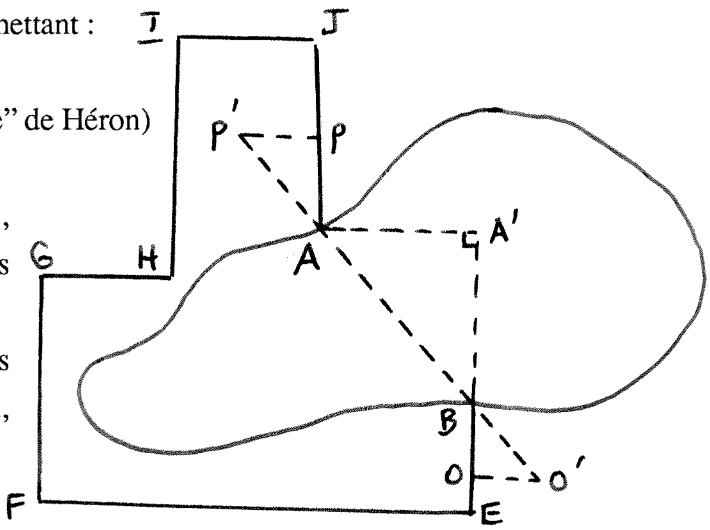
En 530 avant J.C., l'architecte Eupalinos est chargé de construire un tunnel sur l'île de Samos. Cet acqueduc devait passer sous la montagne de Castro, haute de 228 m et a été commencé par les deux extrémités. On peut reconstruire la méthode pour que les deux équipes se rejoignent et que le tunnel soit rectiligne, ce qui constitue une belle prouesse.

Eupalinos dispose d'instruments lui permettant :

— la mesure des distances

— la visée d'angles droits (le "dioptre" de Héron)

Les points de départ A et B étant fixés, on mesure les longueurs des segments [BE], [EP], [GH], [HI], [IJ] et [JH]. [BE] est choisi arbitrairement, les autres sont construits perpendiculairement, comme sur la figure.



1) Ces travaux étant terminés, on demande d'exprimer les distances AA' et BA' en fonction de BE, ET etc…

2) Que représente le rapport $\frac{AA'}{BA'}$?

3) On construit les triangles OBO', rectangle en O et APP', rectangle en P de façon que:

$$\frac{OO'}{OB} = \frac{AA'}{BA'} \text{ et } \frac{PP'}{AP'} = \frac{AA'}{AB'}$$

a) Déduire de la première relation que l'on a : OBO' = A'BA.
Comment sont les points O', B et A ?

b) Déduire de la seconde relation que PAP' = A'BA.
Démontrer que les points P' A et B sont alignés.

4) Déduire de ce qui précède que les droites (P'A) et (O'B) sont les directions dans lesquelles il faut creuser.

Ensuite, il construit les triangles rectangles BOO' et PAP' dont les côtés orthogonaux ont ce même rapport s.
Les hypoténuses de ces triangles donnent la direction dans laquelle on doit creuser.
Si le tunnel est creusé de cette façon, conclut Héron, les ouvriers doivent se rencontrer.

Il a aussi fallu qu'Eupalinos soit capable de déterminer des différences d'altitude.
Il est probable qu'il fit comme Héron en procédant de point en point avec des règles verticales et une mise horizontale. L'instrument de visée devrait être un dioptre ; un plan horizontal était obtenu grâce à des tubes emboîtés.

Bibliographie :

Van der Waedern B.L. Science Awakening (vol. I) Noordhoff, Leyden

Monsieur et Madame CHANTRIAUX
Collège Vogelsheim - Hardt Nord

METHODES DE FAUSSE POSITION

(Aperçu sur quelques exemples)

Marc WOLF

L.E.G.T. Koeberlé - Sélestat

PRINCIPE :

Trouvez la solution comme le hasard vous conduit,
Par bonheur à la vérité vous pouvez accéder,
D'abord procédez à la question,
Bien qu'aucune vérité n'y soit contenue.

Une telle fausseté est une si bonne base,
Que la vérité sera vite trouvée.

De beaucoup, enlevez beaucoup,
De trop peu, prenez aussi trop peu.
A l'excédent, joignez encore le trop peu,
Et à trop peu, ajoutez trop simplement.
En croix, multipliez les types contraires,
Pour que toute le vérité,
A partir de la fausseté, soit trouvée.

RECORDE : Le fondement de l'art (vers 1540)
(Mathématiques au fil des âges/Gauthier-Villars)

Simple : il suffisait d'y penser!

Dans le cas fort improbable où ces explications, aussi lumineuses que poétiques ne suffiraient pas, les exemples qui suivent pourraient apporter quelques précisions.

I LE PAPYRUS DE RHIND (Problème 24)
(Méthode de fausse position simple)

PROBLEME :

En ajoutant une quantité à son septième, on obtient 19.

RESOLUTION :

Prenons le nombre 7.
Ajoutons-lui son septième : on obtient 8
(au lieu de 19 souhaité).
Divisons 19 par 8.
Multiplions le résultat de cette division par 7 :
on obtient le nombre cherché.

FORMALISATION DU PROBLEME :

Il s'agit de résoudre : $x + \frac{1}{7}x = 19$

C'est un problème du type : $ax = b$

La méthode consiste à choisir une valeur $x' = 7$ (pour la facilité du calcul), puis à calculer $b' = ax' = 8$

Le rapport $\frac{b}{b'}$ sera égal à $\frac{ax}{ax'}$ donc à $\frac{x}{x'}$ c'est à dire $\frac{19}{8}$

Le produit de x' par 19/8 sera égal à x.

COMMENTAIRE :

La méthode de résolution fait appel à une suite d'opérations simples ne nécessitant aucun formalisme : le coéfficient "a" par exemple, est complètement occulté, il n'est pas nécessaire de le connaître.

PRECISIONS HISTORIQUES :

Le papyrus de Rhind date de 1700 ou 1550 avant J-C.
Les Egyptiens connaissaient les entiers naturels,
la fraction 2/3
et les quantièmes (fractions de numérateur 1).

Les multiplications et divisions ne se faisaient quasiment que par duplication (multiplication ou division par une puissance de 2).

A la lumière de ces précisions, on réalise que les calculs précédemment décrits nécessitent une surprenante gymnastique :

$x' = 7$
$x' \times 1/7 = 1$ $\quad\quad$ $7 + 1 = 8$

$19 = 16 + 2 + 1$ (décomposition en puissances de 2)
$\quad = 8 \times 2 + 8 \times 1/4 + 8 \times 1/8$
$19/8 = 2 + 1/4 + 1/8$

$7 = 4 + 2 + 1$
d'où : $(4 + 2 + 1)(2 + 1/4 + 1/8) = 16 + 1/2 + 1/8$.

II LA METHODE DE DOUBLE FAUSSE POSITION (Interprétation géométrique)

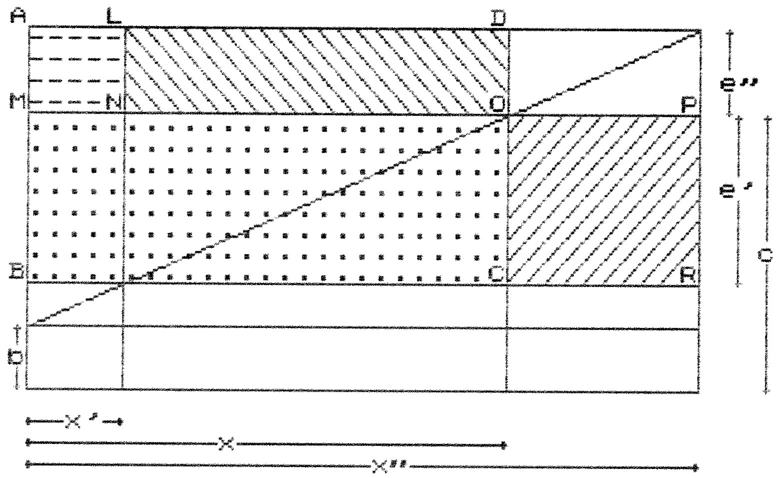
Comme nous le verrons dans l'exemple du paragraphe III, la méthode de fausse position simple précédemment décrite n'est pas toujours valable.

Lorsque le problème est du type : $ax + b = c$, avec $b > c$, il est impossible de réduire les termes constants car les nombres négatifs sont inconnus.

Cette lacune est très certainement une des raisons d'être de la méthode de double fausse position, qui trouve une justification géométrique dans le cas suivant :

Le problème est du type : $ax + b = c$

On choisit deux valeurs x' et x'' respectivement plus petite et plus grande que x pour commettre les erreurs respectives e' et e".



La proposition XLIII du livre premier des Eléments d'Euclide nous apprend que les rectangles (LNOD) et (OCRP) ont même aire.

Aire (MBRP) = $x''e'$
Aire (AMNL) = $x'e''$
Aire (ABCD) = $x(e' + e'')$
Aire (ABCD) = Aire (AMNL) + Aire (MBCO) + Aire (LNOD)
= Aire (AMNL) + Aire (MBCO) + Aire (OCRP)
= Aire (AMNL) + Aire (MBRP)

d'où : $$\boxed{x = \frac{x'e'' + x''e'}{e'' + e'}}$$

RESOLUTION :

	2050	.... 450	1600	
$x' =$	100		200	$= x''$
	48		98	
		$\boxed{36}$		
	22		47	
$c' =$	9		21 1/2	$= c''$
$e' =$	8	.... 12 1/2	20 1/2	$= e''$

La solution est donnée par la formule : $x = \dfrac{x'e'' - x''e'}{e'' - e'}$

On notera l'apparition de signes "-".

Ce changement de signe est justifié par le fait que dans cet exemple, les deux erreurs sont commises en "excédent", contrairement au cas précédent.

FORMALISATION DU PROBLEME :

Le problème est du type : $ax + b = c$

La méthode consiste à choisir deux valeurs x' et x'' : 100 et 200, puis à calculer respectivement c' et c'' : 9 et 21 1/2.
Les erreurs e' et e'' sont respectivement 8 et 20 1/2.

Nous avons : $ax + b = c$, $ax' + b = c'$ et $ax'' + b = c''$

$$\text{d'où : } a = \frac{c' - c}{x' - x} = \frac{c'' - c}{x'' - x} = \frac{e'' - e'}{x'' - x'} = \frac{e'}{x' - x} = \frac{e''}{x'' - x}$$

$$a = \frac{e''}{x'' - x} \qquad \text{d'où : } x'' - x = \frac{e''}{a} \qquad \text{et : } x = x'' - \frac{e''}{a}$$

$$x = x'' - \frac{e''}{\dfrac{e'' - e'}{x'' - x'}} = \frac{x''(e'' - e') - e''(x'' - x')}{e'' - e'}$$

$$\text{et } \boxed{x = \frac{x'e'' - x''e'}{e'' - e'}}$$

COMMENTAIRE :

Selon que les erreurs soient commises en excédent ou non, on s'"arrange" au niveau des signes "+" ou "-" pour éviter les nombres négatifs.

Si la méthode de fausse position simple ne permet pas de résoudre les problèmes du type : $ax + b = c$, par contre la méthode de double fausse position résoud aussi bien les problèmes du type : $ax + b = c$ que les problèmes du type : $ax = b$.

PRECISIONS HISTORIQUES :

La méthode de double fausse position est mentionnée dans les "*Neuf chapitres sur l'art du calcul*", ouvrage chinois du Ier siècle environ.

POUR S'EXERCER :

Comment partager 44 ducats entre trois personnes de telle sorte que :

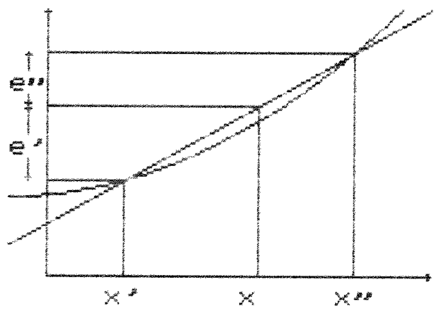
La deuxième ait le double de la première + 4
La troisième ait autant que les deux premières + 6 ?

Si la première en reçoit 8...
Si la première en reçoit 6...

EXTENSION :

La méthode de double fausse position permet également de calculer des valeurs approchées dans les problèmes de degré supérieur à 2.

La méthode revient alors à faire une interpolation linéaire conformément à la figure ci dessous :



ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE :

MATHEMATIQUES AU FIL DES AGES — *GAUTHIER-VILLARS*

LES GRANDES INVENTIONS DE L'HUMANITE — *BORDAS*

EQUATIONS DU PREMIER DEGRE. METHODE DE FAUSSE POSITION — *IREM TOULOUSE*

La méthode de double fausse position

à partir du point de vue de Moritz Cantor sur les travaux de Léonard de Pise,

commentaires et applications

SARROUY - Lycée Franco-Allemand - Fribourg

I . La méthode de double fausse position 2

II . Exemples d'application 7

Chargement d'une péniche 7

Calcul d'une moyenne 8

Tell mother's age 9

Détermination du barycentre de deux points 10

Dans la première partie, le texte de la colonne de gauche, est extrait du commentaire fait par Moritz Cantor ("Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" 1892 - 1908) du Liber Abaci de Léonard de Pise dit Fibonacci (vers 1180 - 1250) qui composa cet ouvrage vers 1202 alors qu'il revenait d'un voyage au Proche Orient, en Grèce et en Sicile. Le texte de la colonne de droite contient, lui, une adaptation de celui de Moritz Cantor ainsi que des commentaires et des compléments.

Der dreizehnte Abschnitt ist der Regel des doppelten falschen Ansatzes gewidmet, welche Leonardo, wie der Name *Regula elchatayn* verräth, von Arabern erlernt hat (...).
Ein Beispiel ist folgendes : 100 Rotuli kosten 13 libras zu 20 solidi zu 12 denarii, was kostet 1 Rotulus?
Eine erste Annahme setzt 3 solidi für den Rotulus, für 100 also 300 solidi = 15 librae oder 2 zu viel.

Eine zweite Annahme setzt 2 solidi für den Rotulus, für 100 also 200 solidi = 10 librae oder 3 zu wenig.

Die Fehler addirt, zeigen durch 2 + 3 = 5 eine Abnahme des Gesamtpreises um 5 librae, während der Preise eines Rotulus um 1 solidus = 12 denarii abnahm. Nun sollte aber der Gesamtpreis nur um 2 librae abnehmen, man muß also 12 mit 2 multipliciren und durch 5 dividiren, um $4\frac{4}{5}$ denarios zu erhalten, welche, von 3 solidis abgezogen, den richtigen Preis 2 solidi $7\frac{1}{5}$ denarii kennen lernen.

Le treizième paragraphe est consacré à la règle de la méthode de double fausse position que Fibonacci a apprise des Arabes comme le nom de *Regula elchatayn* l'indique.
En voici un exemple : 100 rotuli coûtent 13 livres à 20 sous la livre à 12 deniers le sou, combien coûte 1 rotulus?
On suppose en premier lieu qu'un rotulus coûte 3 sous.
Dans ce cas, on en aurait 100 pour 300 sous, soit 15 livres, ce qui représente 2 livres de trop.
Dans un second temps on suppose qu'un rotulus coûte 2 sous.
Les 100 rotulus reviennent à 200 sous, soit 15 livres c'est dire que cette fois, il en manque 3 .
Les deux erreurs ajoutées, 2 + 3 = 5, donnent une diminution du prix total de 5 livres tandis que le prix d'un rotulus a diminué de 1 sou, soit 12 deniers. Pour que le prix total ne diminue que de 2 livres, il faut multiplier 12 par 2 et diviser par 5, on obtient 4 deniers et $\frac{4}{5}$ qui, soustraits des 3 sous donnent le prix exact de 2 sous 7 deniers et $\frac{1}{5}$.

Le raisonnement serait plus facile à suivre s'il ne s'y mêlait pas une question d'unités qui ne nous est pas familière.
On pourrait dire que 100 rotuli coûtent 13 x 20 x 12 , soit 3 120 deniers, combien coûte 1 rotulus?
On suppose qu'un rotulus coûte 3 x 12, soit 36 deniers. Les 100 reviendraient alors à 3 600 deniers, donc à 480 deniers de trop.
Si on suppose qu'un rotulus coûte 2 x 12, soit 24 deniers, les 100 reviennent à 2 400 deniers, donc il en manque 720 .
La somme des résultats erronés est de 1 200, elle correspond à une diminution du prix d'un rotulus de 12 deniers.
Pour que le prix total ne diminue que de 480 deniers, il faut faire une règle de trois : multiplier 12 par 480 et diviser par 1 200 . On obtient les 4,8 deniers trouvés précédemment.

Leonardo erläutert die Rechnung an einem Diagramme :

Additum ex multiplicationibus
13

4		9
soldi		soldi
2		3
minus		plus
3		2

5
additum ex erroribus

(...) Liniengrössen (...) dienen zur Erläuterung des Verfahrens.

Sei ab die wahre Länge der unbekannten Zahl. Setzt man irgend ein ag statt ihrer, so kommt eine Zahl als Endergebniss, welche um ez kleiner ist als die, welche herauskommen soll.

Setzt man eine zweite angenommenene Zahl ad statt der Unbekannten, so erscheint wieder ein fehlerhaftes Ergebniss, welches um iz zu klein ist. Nun kennt man sowohl die Differenz gd der beiden Annahmen, als die ei der beiden Fehler und ist im Stande, den Ueberschuss db, um welchen die unbekannte Zahl die zweite Annahme ad übertrifft, aus der Proportion

$ei : iz = gb : db$ zu berechnen.
Hat man nämlich $\alpha x = b$ und $\alpha n_1 = b - e_1$, $\alpha n_2 = b - e_2$, so berechnet sich (...) $x = \dfrac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}$.

In der Figur entspricht $ag = n_1$, $ad = n_2$, $ez = e_1$, $iz = e_2$, $ci = e_1 - e_2$, $gd = n_1 - n_2$, $db = x - n_2$. Die obige Proportion geht

Correspondance entre les notations

Points :

a	A
g	G
d	D
b	B
e	E
i	I
z	Z

Hypothèses :

n_1	h_1
n_2	h_2

Résultats :

e_1	r_1
e_2	r_2

Fibonacci explique le calcul à l'aide du diagramme :

Somme des produits
13

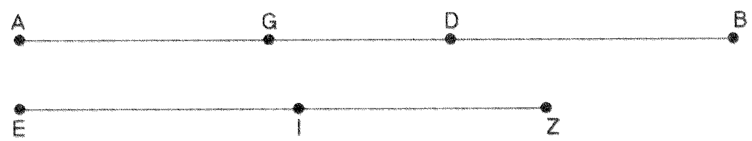
4		9
sous		sous
2		3
moins		plus
3		2

5
somme des erreurs

<u>Les deux hypothèses conduisent à des résultats inexacts par excès</u> :

Les longueurs des segments sont en rapport avec les grandeurs qui entrent en jeu.

Soit AB la valeur exacte cherchée. Prenons à sa place une valeur (connue) AG. Ceci conduit à une valeur du résultat final, mais cette dernière est trop petite. Il lui manque EZ pour être égale à ce qu'on devrait trouver.



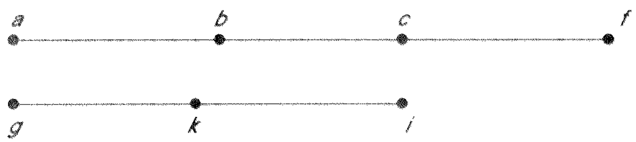
Si l'on remplace l'inconnue par AD, on obtient de nouveau un résultat inexact : il lui manque IZ.
On connaît maintenant non seulement la différence GD des deux hypothèses, mais aussi celle EI des deux résultats erronés et on est en mesure, à l'aide de l'égalité $\dfrac{EI}{IZ} = \dfrac{GD}{DB}$, de calculer DB, c'est-à-dire de calculer de combien l'inconnue dépasse la seconde hypothèse.
En effet si $\alpha x = b$ et $\alpha h_1 = b - r_1$, $\alpha h_2 = b - r_2$, alors $x = \dfrac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2}$.
Sur le schéma on a $AG = h_1$, $AD = h_2$, $EZ = r_1$, $IZ = r_2$, $CI = r_1 - r_2$, $GD = h_1 - h_2$, $DB = x - h_2$. L'égalité des rapports ci-

also über in $(e_1 - e_2) : e_1 = (n_2 - n_1) : (x - n_2)$, und daraus

$$x = n_2 + \frac{e_2(n_2 - n_1)}{e_1 - e_2} = \frac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2} .$$

Leonardo führt auch die in lezterer Gleichung sich darstellende Vorschrift ausdrücklich aus : man solle den ersten Fehler mit dem zweiten Ansatze, den zweiten Fehler mit dem ersten Ansatze multipliciren, lezteres Product vom ersteren abziehen und die Differenz durch die Differenz der Fehler dividieren.

Wieder an einer Figur wird der Fall des doppelten falschen Ansatzes erörtert, in welchem beide Annahmen zu gross gewählt wurden, mithin $\alpha n_1 = b + e_1$, $\alpha n_2 = b + e_2$ beide zu gross ausfielen.



Es sei (...) ab die richtige Länge der Unbekannten, af und ac die erste beziehungsweise zweite Annahme, denen gi und gk als erster und zweiter Fehler gegenübersteht, oder es sei $af = n_1$, $ac = n_2$,

Correspondance entre les notations

Hypothèses :	
n_1	h_1
n_2	h_2
Résultats :	
e_1	r_1
e_2	r_2
Points :	
a	A
b	B
c	C
f	F
g	G
k	K
i	I

dessus donne : $\frac{r_1 - r_2}{r_2} = \frac{h_2 - h_1}{x - h_2}$, d'où l'on tire

$$x = h_2 + \frac{r_2(h_2 - h_1)}{r_1 - r_2} = \frac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2} .$$

Fibonacci énonce la règle découlant de la dernière égalité : multiplier d'une part le premier résultat (inexact) par la deuxième hypothèse et d'autre part le second résultat par la première hypothèse, retrancher ce dernier produit du premier et diviser par la différence des résultats.

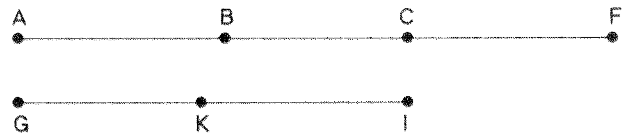
Justification :

De $\alpha h_1 = b - r_1$ et $\alpha h_2 = b - r_2$, on tire $r_1 = b - \alpha h_1$ et $r_2 = b - \alpha h_2$, puis

$$\frac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2} = \frac{(b - \alpha h_1) h_2 - (b - \alpha h_2) h_1}{b - \alpha h_1 - b + \alpha h_2} = \frac{b h_2 - b h_1}{\alpha h_2 - \alpha h_1} = \frac{b}{\alpha} = x .$$

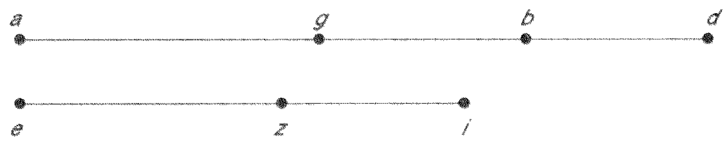
Les deux hypothèses conduisent à des résultats inexacts par défaut :

Ce cas est de nouveau traité à l'aide d'un schéma.
Ici $\alpha h_1 = b + r_1$, $\alpha h_2 = b + r_2$.



Soit AB la valeur exacte cherchée, respectivement AF et AC la première et la seconde hypothèse et GI et GK les résultats respectivement obtenus à partir de celles-ci, ou encore, soit $h_1 = AF$, $h_2 = AC$, $r_1 = GI$,

$gi = e_1$, $gk = e_2$, $ki = e_1 - e_2$, $cf = n_1 - n_2$, $bc = n_2 - x$. Dann soll die Proportion stattfinden $ik : kg = cf : cb$. Anders geschrieben heisst sie $(e_1 - e_2) : e_2 = (n_1 - n_2) : (n_2 - x)$ und aus ihr folgt $x = n_2 - \dfrac{e_2(n_1 - n_2)}{e_1 - e_2} = \dfrac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}$, welches wiederum vollständig richtig ist und durch die Vorschrift bestätigt wird, man solle von dem Producte des esrten Fehlers in dem zweiten Ansatz das Product des zweiten Fehlers in dem ersten Ansatz abziehen und die Differenz durch denUnterschied der Fehler theilen.



Endlich versinnlicht ein drittes Linienpaar den allein übrigen Fall, dass (...) eine Annahme ag zu gross war, und dass dem entsprechend zuerst ein Mangel ez, dann Ueberschuss zi auftrat. Hier ist die Proportion zu bilden $gd : bg = ci : ez$ oder in den anderen wiederholt von uns benutzen Buchstaben $(n_2 - n_1) : (x - n_1) = (e_1 + e_2) : e_1$, woraus die richtige Folgerung zu ziehen ist $x = n_1 + \dfrac{e_2(n_2 - n_1)}{e_1 + e_2}$
$$= \frac{e_1 n_2 + e_2 n_1}{e_1 + e_2}.$$

So hat Leonardo die Regel des doppelten falschen Ansatzes genau erörtert und sämmtliche Möglichkeiten derselben erschöpft. Darauf werden mannigfache Aufgaben behandelt, welche bereits im vorhergehenden Abschnitte zur Uebung der dortigen Regeln dienten; nächst diesen aber auch andere neue Aufgaben. Wir wollen nur des ersten Beispieles der letzteren Art gedenken.

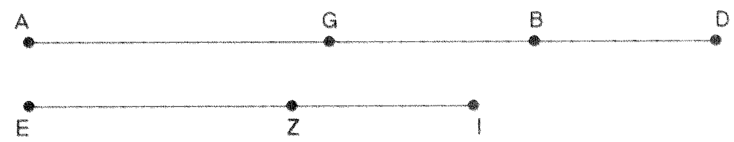
Correspondance entre les notations

Hypothèses :	
n_1	h_1
n_2	h_2
Résultats :	
e_1	r_1
e_2	r_2
Points :	
a	A
g	G
b	B
d	D
e	E
i	I
z	Z

$r_2 = GK$ et $KI = r_1 - r_2$, $CF = h_1 - h_2$, $BC = h_2 - x$. On doit avoir dans ce cas l'égalité $\dfrac{IK}{KG} = \dfrac{CF}{CB}$ en d'autres termes $\dfrac{r_1 - r_2}{r_2} = \dfrac{h_1 - h_2}{h_2 - x}$

dont on déduit $x = r_2 - \dfrac{r_2(h_1 - h_2)}{r_1 - r_2} = \dfrac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2}$ qui est de nouveau exact, d'où la règle : retrancher le produit du premier résultat par la deuxième hypothèse du produit du second résultat par la première hypothèse et diviser cette différence par celle des résultats.

<u>Les deux hypothèses conduisent à des résultats inexacts, l'un par défaut, l'autre par excès:</u>



L'hypothèse AG conduit en premier lieu à un résultat auquel il manque EZ tandis que partant de AD, on obtient un résultat excédent de ZI la valeur exacte AB. La proportion à utiliser ici est $\dfrac{GD}{BG} = \dfrac{EI}{EZ}$ ou avec les mêmes notations $\dfrac{h_2 - h_1}{x - h_1} = \dfrac{r_1 + r_2}{r_1}$, dont on déduit $x = h_1 + \dfrac{r_1(h_2 - h_1)}{r_1 + r_2}$
$$= \frac{r_1 h_2 + r_2 h_1}{r_1 + r_2}.$$

Fibonacci a ainsi discuté avec précision les règles de la méthode de double fausse position et traité de façon exhaustive tous les cas. Des problèmes variés qui servaient déjà dans le paragraphe mentionné ci-dessus à mettre en pratique les règles énoncées sont ensuite étudiés. Juste après cependant on en trouve de nouveaux. Nous n'en retiendrons que le premier exemple du dernier cas.

A und B bezeichnen uns, wie schon öfter, zwei Personen und zugleich deren Vermögen.

Man besitze darüber die beiden Angaben $A + \frac{1}{3} B = 14$, $B + \frac{1}{4} A = 17$.

Eine erste Annahme $A = n_1 = 4$ giebt $4 + \frac{1}{3} B = 14$, $B = 30$,

$B + \frac{1}{4} A = 30 + 1 = 31$, während 17 kommen sollten, das ist ein Ueberschuss $e_1 = 31 - 17 = 14$.

Die zweite Annahme $A = n_2 = 8$ giebt $8 + \frac{1}{3} B = 14$, $B = 18$,

$B + \frac{1}{4} A = 18 + 2 = 20$, während wieder 17 kommen sollten, das ist abermals ein Ueberschuss $e_2 = 20 - 17 = 3$.

Da Leonardo für den ersten Fall, welcher bei zweimaligen Ueberschuss hier zutritt, die Proportion $(e_1 - e_2) : e_2 = (n_2 - n_1) : (A - n_2)$ angegeben hat, so wäre es vollkommen genügend, wenn er nur die Zahlenwerthe einsetzend $(14 - 3) : 3 = (8 - 4) : (A - 8)$ oder $11 : 3 = 4 : (A - 8)$ hätte rechnen lassen. Aber es ist, als wenn er schon Ueberdruss empfunden hätte, seinen Lesern durch gewohnheitsmässige Uebung eines und desselben Verfahrens das Denken zu ersparen. Nach Angabe der beiden Fehler 14 und 3, welche die Annahme 4 und 8 zur Folge haben, fährt er nämlich das weitere Verfahren begründend, also fort: Für 4 Einheiten, welche wir dem Ersten A mehr geben (8 anstatt 4), näherte sich die zweite Zahl B um 11 der Wahrheit (3 anstatt 14), und es ist nur noch eine Annäherung an dieselbe um 3 erforderlich. Mithin ist 3 mal 4 getheilt durch 11 dem A noch beizufügen, das beträgt $1\frac{1}{11}$. Von $9\frac{1}{11}$ bis zu 14 sind es aber $4\frac{10}{11}$, und das ist ein Drittel des Vermögens des B, welches mithin $14\frac{8}{11}$ beträgt.

Correspondance entre les notations

Hypothèses :	
n_1	h_1
n_2	h_2
Résultats :	
e_1	r_1
e_2	r_2

Etude d'un exemple :

Désignons par A et B deux personnes ainsi que leurs fortunes respectives.

On suppose que l'on a $A + \frac{1}{3} B = 14$, $B + \frac{1}{4} A = 17$.

Une première hypothèse $A = h_1 = 4$ donne $4 + \frac{1}{3} B = 14$, $B = 30$,

$B + \frac{1}{4} A = 30 + 1 = 31$, alors qu'on devrait trouver 17, c'est donc un excès de $r_1 = 31 - 17 = 14$.

Une seconde hypothèse $A = h_2 = 8$ donne $8 + \frac{1}{3} B = 14$, $B = 18$,

$B + \frac{1}{4} A = 18 + 2 = 20$, au lieu des 17 escomptés, on a donc encore un excès $r_2 = 20 - 17 = 3$.

Fibonacci ayant donné l'égalité $\frac{r_1 - r_2}{r_2} = \frac{h_2 - h_1}{A - h_2}$ pour le premier cas, celui où comme ici, on se trouve en présence de deux hypothèses conduisant à des résultats faux par excès, il aurait été tout à fait suffisant de se contenter de substituer aux lettres les valeurs numériques: $\frac{14 - 3}{3} = \frac{8 - 4}{A - 8}$ ou $\frac{11}{3} = \frac{4}{A - 8}$. Mais il semble qu'il en ait assez d'épargner à ses lecteurs la peine de réfléchir en utilisant toujours la même méthode. Connaissant les deux résultats faux 14 et 3 déduits des hypothèses 4 et 8, il poursuit en établissant la règle suivante : pour 4 unités de trop pour la première valeur de A (8 au lieu de 4), B s'approche de 11 de la valeur exacte (3 au lieu de 14) et seule une augmentation de 3 est nécessaire.

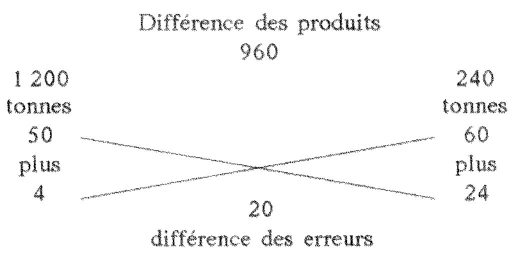
On doit donc encore ajouter à A 3 fois 4 divisé par 1 c'est-à-dire 1 et $\frac{1}{11}$. Mais de 9 et $\frac{1}{11}$ à 14 il y a 4 et $\frac{10}{11}$ et ceci représente le tiers de la fortune de B qui se monte donc à 14 et $\frac{8}{11}$.

Chargement d'une péniche (1)

"Une péniche contient 80 tonnes de blé dans sa cale de gauche et 54 tonnes dans sa cale de droite. Il reste 122 tonnes à charger.
Comment les répartir pour que les charges soient équilibrées?"

Supposons dans un premier temps que l'on mette 60 tonnes de blé dans la cale de gauche.
Elle en contiendrait alors 80 + 60 = 140 tonnes.
Les charges étant équilibrées, la cale de droite en contiendrait autant et comme elle en contenait déjà 54, elle aurait été chargée de 140 - 54 = 86 tonnes.
La charge qu'il aurait fallu mettre dans la péniche serait donc de 60 + 86 = 146 tonnes, soit 24 de trop.

Supposons maintenant que l'on mette 50 tonnes de blé dans la cale de gauche.
Elle en contiendrait 80 + 50 = 130 tonnes.
Les charges étant équilibrées, la cale de droite en contiendrait aussi 130 tonnes et comme elle en contenait déjà 54, elle aurait été chargée de 130 - 54 = 76 tonnes.
La charge qu'il aurait fallu mettre dans la péniche serait finalement de 50 + 76 = 126 tonnes, soit 4 de trop.



960 : 20 = 48 donne la réponse : on doit mettre 48 tonnes de blé dans la cale de gauche et 122 - 48 = 74 tonnes dans celle de droite.
Les charges sont alors de 80 + 48 = 128 tonnes dans la cale de gauche et de 54 + 74 = 128 tonnes dans celle de droite.

(1) L'énoncé de cet exercice est le numéro 73 page 82 de "Mathématiques 4 ème" par P. Terracher, G. Vinrich, R. Delord et B. Privat. Hachette 1988.

Soit x le nombre de tonnes de blé qu'on doit mettre dans la cale de gauche pour que les charges soient équilibrées.

$h_1 = 60$.

$r_1 = 24$.

$h_2 = 50$.

$r_2 = 4$.

On utilise la formule de la page 4 :

$$x = \frac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2} = \frac{24 \times 50 - 4 \times 60}{24 - 4} = \frac{960}{20} = 48.$$

Calcul d'une moyenne (2)

Une voiture parcourt 100 km à 120 $km.h^{-1}$ puis 100 km à 80 $km.h^{-1}$.
A quelle vitesse moyenne a-t-elle parcouru les 200 km?

N.B. Par commodité et sauf indication contraire, les durées seront exprimées en minutes.

Calcul du temps mis pour parcourir les cent premiers kilomètres :

Si la voiture avait mis 60 minutes, elle aurait parcouru 120 km, c'est 20 de plus qu'elle n'a fait.
Si par ailleurs elle avait mis 45 minutes, elle aurait parcouru 90 km, donc 10 de moins.

Somme des produits
1 500

1 200 minutes		240 minutes
60		45
plus		moins
20		10

30
somme des erreurs

Ainsi, la voiture a mis 50 minutes pour parcourir les 100 premiers kilomètres.

Soit t ce temps.

$h_1 = 60$ et $r_1 = 20$.
$h_2 = 45$ et $r_2 = 10$.

On utilise la seconde formule de la page 5 :

$$t = \frac{r_1 h_2 + r_2 h_1}{r_1 + r_2} = \frac{20 \times 45 + 10 \times 60}{20 + 10} = \frac{1\,500}{30} = 50.$$

Calcul du temps mis pour parcourir les cent kilomètres suivants :

Si la voiture avait mis 45 minutes, elle aurait parcouru 60 km, c'est 40 de moins qu'elle n'a fait.
Et si elle avait mis 60 minutes, elle aurait parcouru 80 km, soit 20 de moins.

Différence des produits
1 500

2 400 minutes		900 minutes
60		45
moins		moins
20		40

20
différence des erreurs

La voiture a donc mis 75 minutes pour parcourir les 100 kilomètres suivants.

Soit t' ce temps.

$h'_1 = 45$ et $r'_1 = 40$.
$h'_2 = 60$ et $r'_2 = 20$.

On utilise la première formule de la page 5 :

$$t' = \frac{r'_1 h'_2 - r'_2 h'_1}{r'_1 - r'_2} = \frac{40 \times 60 - 20 \times 45}{40 - 20} = \frac{1\,500}{20} = 75.$$

(2) L'idée de cet exercice et ses données numériques sont tirées de l'article "Plusieurs moyens de moyenner" paru dans le numéro 6 de la revue Tangente.

Calcul de la moyenne :

Si la moyenne avait été de 120 $km \cdot h^{-1}$, en 125 minutes soit 2 heures et 5 minutes, elle aurait fait 250 kilomètres. Elle n'en a fait que 200 , c'est donc 50 de trop.

Si la moyenne avait été de 108 $km \cdot h^{-1}$, en 125 minutes soit 2 heures et 5 minutes, elle aurait fait 225 kilomètres. Elle n'en a fait que 200 , c'est donc 25 de trop.

Différence des produits
2 400

3 000 minutes		5 400 minutes
120	╳	108
plus		plus
50		25

25
différence des erreurs

La moyenne cherchée est donc 2 400 divisé par 25 soit 96 $km \cdot h^{-1}$.

Tell mother's age. Problem by Sam Loyd (3)

" Quel est l'âge de maman?

Les problèmes d'âge sont souvent intéressants et fascinent toujours les jeunes qui ont quelque talent mathématique. Ils sont généralement très simples mais dans celui-ci les données sont si maigres et la question si inattendue que le problème est assez étonnant.

L'une des trois personnes représentées avait son anniversaire ce jour-là. La curiosité de Tommy en fut éveillée et il voulut savoir les âges de ses parents. Son père lui répondit :

"Voilà : nos trois âges additionnés donnent juste 70 ans. Je suis maintenant six fois plus vieux que toi et quand je ne serai plus que deux fois plus âgé que toi, nos trois âges feront un total double de ce qu'il est à présent. Peux-tu me dire quel est l'âge de maman?"

Tommy qui était fort en arithmétique résolut le problème rapidement, mais il faut dire qu'il connaissait son propre âge et aussi l'âge approximatif de ses parents. Nos chercheurs n'ont, eux, que les maigres données concernant les âges relatifs. Ils doivent cependant pouvoir répondre à la question "Quel est l'âge de maman?" "

Mise en équation :

Soit respectivement p , m , e et x les âges du père, de la mère, de l'enfant et le temps séparant les deux étapes.

Soit m cette moyenne.

$H_1 = 120$.
$R_1 = 50$.

$H_2 = 108$.
$R_2 = 25$.

On utilise la formule de la page 4 :

$$m = \frac{R_1 H_2 - R_2 H_1}{R_1 - R_2} = \frac{50 \times 108 - 25 \times 120}{50 - 25} = \frac{2\,400}{25} = 96 .$$

(3) Cet exercice est le numéro 79 page 81 du livre "Casse-tête mathématiques de Sam Loyd" par M. Gardner. Dunod

Le jour de l'anniversaire, on a : $m + p + e = 70$

$p = 6e$.

Plus tard, on aura : $(m + x) + (p + x) + (e + x) = 2 \times 70$

$p + x = 2(e + x)$.

On tire d'une part en retranchant la première ligne de la troisième : $3x = 70$ d'où $x = 280$ mois, et d'autre part en développant la quatrième ligne : $p = 2e + x$.
Ce sont ces deux égalités qui nous serviront à résoudre la question.

Supposons tout d'abord que l'enfant ait 6 ans (ou 72 mois). Le père serait âgé de $6 \times 72 = 432$ mois.
Le temps les séparant de la seconde date envisagée serait dans ce cas de $432 - 2 \times 72 = 288$ mois ou 8 de trop.

Si on suppose que l'enfant a 5 ans (ou 60 mois), le père a $6 \times 60 = 360$ mois.
Le temps x vaudrait ici $360 - 2 \times 60 = 240$ mois, c'est dire qu'il en manque 40.

Somme des produits
3 360

2 880 mois		480 mois
72 plus 8	╳	60 moins 40

48
somme des erreurs

L'enfant a donc $3\,360 : 48 = 70$ mois, soit encore 5 ans et 10 mois.

Le père a, lui, 6 fois cet âge, soit exactement 35 ans.
La somme des âges du père et de son fils est de 40 ans et 10 mois, d'où l'âge de la mère : 29 ans et 2 mois.

$h_1 = 72$.
$r_1 = 8$.

$h_2 = 60$.
$r_2 = 40$.

On utilise la deuxième formule de la page 5 :

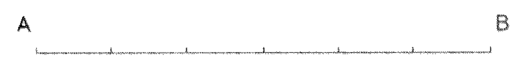
$$e = \frac{r_1 h_2 + r_2 h_1}{r_1 + r_2} = \frac{8 \times 60 + 40 \times 72}{40 + 8} = \frac{3\,360}{48} = 70 .$$

Détermination du barycentre de deux points :

A et B sont des points distincts. La question est ici de déterminer le barycentre G du système $\{(A, -3), (B, 8)\}$ sachant que AB mesure 6 centimètres.

On sait que G est aussi le barycentre du système $\left\{\left(A, -\frac{3}{5}\right), \left(B, \frac{8}{5}\right)\right\}$.

Supposons en premier lieu que G soit en A. G serait dans ce cas le barycentre de $\{(A, 1), (B, 0)\}$ et il manque-



On s'arrange ainsi pour que la somme des coefficients soit égale à 1.
$h_1 = \overline{AA} = 0$.

rait $\frac{8}{5}$ au coefficient de B.

Si G était en B, il serait le barycentre du système $\{(A, 0), (B, 1)\}$ et il manquerait $\frac{3}{5}$ au coefficient de B.

Différence des produits

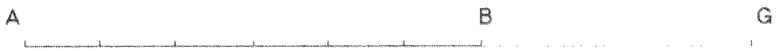
$\frac{8}{5}\overline{AB}$

0		$\frac{8}{5}\overline{AB}$
0 moins $\frac{8}{5}$		$\overline{AB}$ moins $\frac{3}{5}$

1

différence des erreurs

Le barycentre cherché est le point G tel que $\overline{AG} = \frac{8}{5}\overline{AB}$.



On vérifiera facilement qu'on peut tenir le même raisonnement quels que soient les coefficients.

$r_1 = \frac{8}{5}$.

$h_2 = \overline{AB} = 6$ et $r_2 = \frac{3}{5}$.

On utilise la première formule de la page 5 :

$$\overline{AG} = \frac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2} = \frac{\frac{8}{5} \times \overline{AB} - \frac{3}{5} \times 0}{\frac{8}{5} - \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{8}{5}\overline{AB} = \frac{8}{5} \times 6 = 9{,}6 \text{ cm}.$$

On trouvera ici successivement :

1° Une version anglaise du texte latin de NEPER photocopiée du livre de STRUIK :

2° Sa traduction (pages de gauche) en correspondance avec des commentaires (pages de droite)

NEPER

CONSTRUCTION OF THE WONDERFUL CANON OF LOGARITHMS

1. A logarithmic table [*tabula artificialis*] is a small table by the use of which we can obtain a knowledge of all geometrical dimensions ans motions in space, by a very easy calculation... It is picked out from numbers progressing in continuous proportion.

2. Of continuous progressions, an arithmetical is one which procceds by equal intervals ; a geometrical, one which advances by unequal and proportionally increasing or decreasing intervals...

3. In these progressions we require accuracy and ease in working. Accuracy is obtained by taking large numbers for a basis ; but large numbers are most easily made from small by adding cyphers (= zéros).

Thus instead of 1000000, which the less experienced make the greatest sine,[2] the more learned put 10000000, whereby the difference of all sines is better expressed. Wherefore also we use the same for radius and for the greatest of our geometrical proportionals.

4. In computing tables, these large numbers may again be made still larger by placing a period after the number and adding cyphers...

5. In numbers distinguished thus by a period in their midst, whatever is written after the period is a fraction [*quicquid post periodam notatur fractio*], the denominator of which is unity with as many cyphers after it as there are figures after the period.[3]

Thus 10000000.04 is the same as $10000000\frac{4}{100}$; also 25.803 is the same as $25\frac{803}{1000}$; also 9999998.0005021 is the same as $9999998\frac{5021}{10000000}$, and so of others.

6. When the tables are computed, the fractions following the period may then be rejected without any sensible error. For in our large numbers, an error which does not exceed unity is insensible and as if it were none...

Then follow in Arts. 7–15 some rules for accurate counting with large numbers.

---

16. Hence, if from the radius with seven cyphers added you subtract its 10000000th part, and from the number thence arising its 10000000th part, and so on, a hundred numbers may very easily be continued geometrically in the proportion subsisting between the radius and the sine less than it by unity, namely between 10000000 and 9999999; and this series of proportionals we name the First table.

[2] Sin 90° = 100.0000, hence the radius R of the circle is 10^6. The sine of an angle was always defined as half the chord belonging to the double angle, hence $\sin\alpha = CB = \frac{1}{2}\text{chord } 2\alpha = \frac{1}{2}CD$ [Fig. 4]. The numerical values of the sines therefore depended on the choice of R. Euler introduced dimensionless sines and tangents by consistently writing $R = 1$ (1748, see our extract of the *Introductio*, Selection V.15).

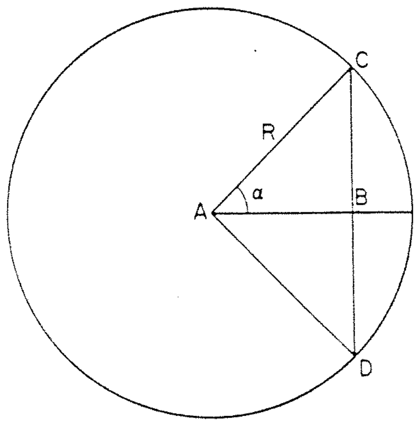


Fig. 4

[3] The clumsy notation for decimal fractions of Stevin is here replaced by the method of the decimal point. Napier's authority made this method generally accepted.

First table.
10000000.0000000
1.0000000
9999999.0000000
.9999999
9999998.0000001
.9999998
9999997.0000003
to be continued up to
9999900.0004950

Thus from radius, with seven cyphers added for greater accuracy, namely, 10000000.0000000, subtract 1.0000000 you get 9999999.0000000; from this subtract .9999999, you get 9999998.0000001; and proceed in this way. . . until you create a hundred proportionals, the last of which, if you have computed rightly, will be 9999900.0004950.

17. The Second table proceeds from radius with six cyphers added, through fifty other numbers decreasing proportionally in the proportion which is easiest, and as near as possible to that subsisting between the first and last numbers of the First table.

Second table.
10000000.000000
100.000000
9999900.000000
99.999000
9999800.001000
to be continued up to
9995001.222927

Thus the first and last numbers of the First table are 10000000.0000000 and 9999900.0004950, in which proportion it is difficult to form fifty proportional numbers. A near and at the same time an easy proposition is 100000 to 99999, which may be continued with sufficient exactness by adding six cyphers to radius and continually subtracting from each number its own 100000th part. . . and this table contains, besides radius which is the first, fifty other proportional numbers, the last of which, if you have not erred, you will find to be 9995001.222927.[4]

Article 18 has a Third table of 69 columns, from 10^{12} down by 2000th parts to 9900473.57808.

---

19. The first numbers of all the columns must proceed from radius with four cyphers added, in the proportion easiest and nearest to that subsisting between the first and the last numbers of the first column.

As the first and the last numbers of the first column are 10000000.0000 and 9900473.5780, the easiest proportion very near to this is 100 to 99. Accordingly sixty-eight numbers are to be continued from radius in the ratio of 100 to 99 by subtracting from each one of them its hundredth part.

20. In the same proportion a progression is to be made from the second number of the first column through the second numbers in all the columns, and from the third through the third, and from the fourth through the fourth, and from the others respectively through the others.

[4] This should be 9995001.224804.

Thus from any number in one column, by subtracting its hundredth part, the number of the same rank in the following column is made, and the numbers should be placed in order as follows.

Here follows a table of "Proportionals of the Third Table," with 69 columns, the last number in the sixty-ninth column being 4998609.4034, roughly half the original number 10000000.0000.

---

21. Thus, in the Third table, between radius and half radius, you have sixty-eight numbers interpolated, in the proportion of 100 to 99, and between each two of these you have twenty numbers interpolated in the proportion of 10000 to 9995; and again, in the Second table, between the first two of these namely between 10000000 and 9995000, you have fifty numbers interpolated in the proportion of 100000 to 99999; and finally, in the First table, between the latter, you have a hundred numbers interpolated in the proportion of radius or 10000000 to 9999999; and since the difference of these is never more than unity, there is no need to divide it more minutely by interpolating means, whence these three tables, after they have been completed, will suffice for computing a Logarithmic table.

Hitherto we have explained how we may most easily place in tables sines or natural numbers progressing in geometrical proportion.

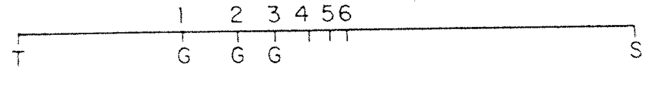
22. It remains, in the Third table at least, to place beside the sines or natural numbers decreasing geometrically their logarithms or artificial numbers increasing arithmetically.

Articles 23 and 24 represent arithmetic increase and geometric decrease by points on a line.

---

25. Whence a geometrically moving point approaching a fixed one has its velocities proportionate to its distances from the fixed one.

Thus referring to the preceding figure [Fig. 1], I say that when the geometrically moving point G is at T, its velocity is as the distance TS, and when

Fig. 1 

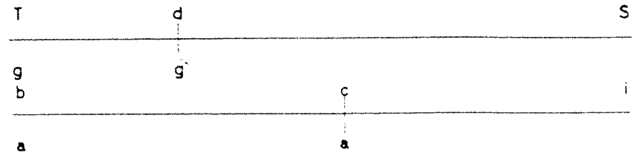
G is at 1 its velocity is as $1S$, and when at 2 its velocity is as $2S$, and so of the others. Hence, whatever be the proportion of the distances TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, etc., to each other, that of the velocities of G at the points T, 1, 2, 3, 4, etc., to one another, will be the same.

For we observe that a moving point is declared more or less swift, according as it is seen to be borne over a greater or less space in equal times. Hence the ratio of the spaces traversed is necessarily the same as that of the velocities. But the ratio of the spaces traversed in equal times, $T1$, 12, 23, 34, 45, etc., is that of the distances TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, etc. Hence it follows that the ratio to one another of the distances of G from S, namely TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, etc., is the same as that of the velocities of G at the points T, 1, 2, 3, 4, etc., respectively.

26. The logarithm of a given sine is that number which has increased arithmetically with the same velocity throughout as that with which radius began to decrease geometrically, and in the same time as radius has decreased to the given sine.

Let the line TS [Fig. 2] be the radius, and dS a given sine in the same line; let g move geometrically from T to d in certain determinate moments of time. Again, let bi be another line, infinite towards i, along which, from b, let a move arithmetically with the same velocity as g had at first when at T; and from the fixed point b in the direction of i let a advance in just the same moments of time up to the point c. The number measuring the line bc is called the logarithm of the given sine dS.[5]

Fig. 2



27. Whence nothing is the logarithm of radius [*Unde sinus totius nihil est pro artificiali*]. . .

28. Whence also it follows that the logarithm of any given sine is greater than the difference between radius and the given sine, and less than the difference between radius and the quantity which exceeds it in the ratio of radius to the given sine. And these differences are therefore called the limits of the logarithm.

Thus, the preceding figure being repeated [Fig. 3], and ST being produced beyond T to o, so that oS is to TS as TS to dS, I say that bc, the logarithm of the sine dS, is greater than Td and less than oT. For in the same time that g is borne from o to T, g is borne from T to d, because (by 24) oT is such a part of oS as Td is of TS, and in the same time (by the definition of a logarithm) is a borne from b to c; so that oT, Td, and bc are distances traversed in equal times. But since g when moving between T and o is swifter than at T, and

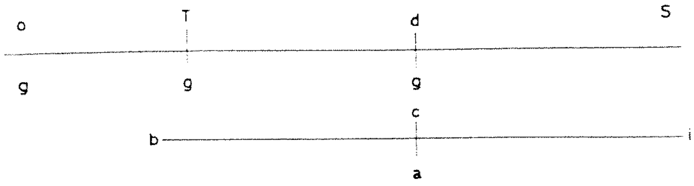
[5] In the language of the calculus: let $TS = a\ (= 10^7)$, $dS = y$; then the initial velocity $(t = c)$ at g is a (see Art. 25), hence the velocity of g at d is $(d/dt)(a - y) = -dy/dt = y$, hence $y = a e^{-t}$. When $bc = x$, then $x = at =$ Nap log y. Hence Nap log $y = a \ln a/y$, so that (by Art. 27) for $y = a$, Nap log $a = 0$, where $\ln = \log_e$, the natural logarithm. The familiar rules for logarithmic computation do not apply:

$$\text{Nap log } xy = a(\ln a - \ln x - \ln y).$$

We should not be confused by the terms "radius" and "sine"; what is meant is a line segment TS and a section $dS \leqq TS$. When $a = 1$ the Nap log and the ln differ only in sign; this may have caused the confusion in some textbooks, which insist on calling the natural logarithms Napierian or Neperian logarithms.

between T and d slower, but at T is equally swift with a (by 26); it follows that oT the distance traversed by g moving swiftly is greater, and Td the distance traversed by g moving slowly is less, than bc the distance traversed by the point a with its medium motion, in just the same moments of time; the latter is, consequently, a certain mean between the two former. Therefore oT is called the greater limit, and Td the less limit of the logarithm which bc represents.

Fig. 3



29. Therefore to find the limits of the logarithm of a given sine.

By the preceding it is proved that the given sine being subtracted from radius the less limit remains, and that radius being multiplied into the less limit and the product divided by the given sine, the greater limit is produced, as in the following example.

30. Whence the first proportional of the First table, which is 9999999, has its logarithm between the limits 1.0000001 and 1.0000000...

31. The limits themselves differing insensibly, they or anything between them may be taken as the true logarithm...

32. There being any number of sines decreasing from radius in geometrical proportion, of one of which the logarithm or its limits is given, to find those of the others.

This necessarily follows from the definitions of arithmetical increase, of geometrical decrease, and of a logarithm... So that, if the first logarithm corresponding to the first sine after radius be given, the second logarithm will be double of it, the third triple, and so of the others; until the logarithms of all the sines be known...

33. Hence the logarithms of all the proportional sines of the First table may be included between near limits, and consequently given with sufficient exactness...

34. The difference of the logarithms of radius and a given sine is the logarithm of the given sine itself...

35. The difference of the logarithms of two sines must be added to the logarithm of the greater that you may have the logarithm of the less, and subtracted from the logarithm of the less that you may have the logarithm of the greater...

36. The logarithms of similarly proportioned sines are equidifferent.

This necessarily follows from the definitions of a logarithm and of the two motions... Also there is the same ratio of equality between the differences of the respective limits of the logarithms, namely as the differences of the less among themselves, so also of the greater among themselves, of which logarithms the sines are similarly proportioned.

37. Of three sines continued in geometrical proportion, as the square of the mean equals the product of the extremes, so of their logarithms the double of

the mean equals the sum of the extremes. Whence any two of these logarithms being given, the third becomes known . . .

38. Of four geometrical proportionals, as the product of the means is equal to the product of the extremes; so of their logarithms, the sum of the means is equal to the sum of the extremes. Whence any three of these logarithms being given, the fourth becomes known . . . [6]

39. The difference of the logarithms of two sines lies between two limits; the greater limit being to the radius as the difference of the sines to the less sine, and the less limit being to radius as the difference of the sines to the greater sine . . . [7]

Articles 40–46 show how to find logarithms.

---

47. In the Third table, beside the natural numbers, are to be written their logarithms; so that the Third table, which after this we shall always call the Radical table, may be made complete and perfect . . .

The Radical Table

First Column			Second Column			69th Column	
Natural Numbers	Logarithms		Natural Numbers	Logarithms		Natural Numbers	Logarithms
10000000.0000	.0		9900000.0000	100503.3		5048858.8900	6834225.8
9995000.0000	5001.2		9895050.0000	105504.6	. . .	5046334.4605	6839227.1
9990002.50000	10002.5		9890102.4750	110505.8		5043011.2932	6844228.3
⋮	⋮		⋮	⋮	. . .	⋮	⋮
9900473.5700	100025.0		9801468.8423	200528.2		4998609.4034	6934250.8

48. The Radical table being now completed, we take the numbers for the logarithmic table from it alone.

For as the first two tables were of service in the formation of the third, so this third Radical table serves for the construction of the principal Logarithmic table, with great ease and no sensible error.

49. To find most easily the logarithms of sines greater than 9996700.

This is done simply by the subtraction of the given sine from radius. For (by 29) the logarithm of the sine 9996700 lies between the limits 3300 and 3301; and these limits, since they differ from each other by unity only, cannot

[6] The modern theorem for the logarithm of a product does not hold, since the logarithm of unity is not zero. Hence Arts. 37 and 38, to express special cases.

[7] This is proved by the principle of proportion and of Article 36. This rule is used first in Arts. 40 and 41 as an illustration to find the logarithm of 9999975.5 from that of the nearest sine in the First table, 9999975.0000300, noting that the limits of the logarithms of the latter number are 25.0000025 and 25.000000, that the difference of the logarithms of the two numbers by the rule just given is .4999712, and that the limits for the logarithm of 9999975.5 are therefore 24.5000313 and 24.5000288, whence Napier lists the logarithm as 24.5000300.

Articles 41 to 45 illustrate the fact that one may now calculate the logarithms of all the "proportionals" in the First, Second, and Third tables, as well as of the sines or natural numbers not proportionals in these tables but near or between them.

differ from their true logarithm by any sensible error, that is to say, by an error greater than unity. Whence 3300, the less limit, which we obtain simply by subtraction, may be taken for the true logarithm. The method is necessarily the same for all sines greater than this.

50. To find the logarithms of all sines embraced within the limits of the Radical table.

Multiply the difference of the given sine and table sine nearest it by radius. Divide the product by the easiest divisor, which may be either the given sine or the table sine nearest it, or a sine between both, however placed. By 39 there will be produced either the greater or less limit of the difference of the logarithms, or else something intermediate, no one of which will differ by a sensible error from the true difference of the logarithms on account of the nearness of the numbers in the table. Wherefore (by 35), add the result, whatever it may be, to the logarithm of the table sine, if the given sine be less than the table sine; if not, subtract the result from the logarithm of the table sine, and there will be produced the required logarithm of the given sine.

Two examples are given. In the first the given sine is 7489557, the table sine of which nearest to it is 7490786.6119. The computation gives 2890752 for the logarithm.

---

51. All sines in the proportion of two to one have 6931469.22 for the difference of their logarithms [because this number is the logarithm of sine 5000000].

52. All sines in the proportion of ten to one have 23025842.34 for the difference of their logarithms.

Article 53 contains a short table of given proportions of sines and corresponding differences of logarithms; Art. 54 deals with the logarithms of all sines outside the limits of the Radical table.

---

55. As half radius is to the sine of half a given arc, so is the sine of the complement of the half arc to the sine of the whole arc . . . [8]

56. Double the logarithm of an arc of 45 degrees is the logarithm of half radius . . .

[8] Only here does Napier begin to introduce angles into the construction of his tables. Napier proves Arts. 55–57 by geometric principles and the preceding theorems concerning logarithms. He then often speaks of the logarithms of the arcs, meaning logarithms of the corresponding sines.

57. The sum of the logarithms of half radius and any given arc is equal to the sum of the logarithms of half the arc and the complement of the half arc. Whence the logarithm of the half arc may be found if the logarithms of the other three be given . . .

Article 58 deals with the logarithms of all arcs not less than 45 degrees.

---

59. To form a logarithmic table.

Here follows a description of the construction of a table of 45 pages, each page devoted to one degree divided into minutes.

Napier's table is constructed in quite the same form as that used at present, except that the second (sixth) column gives sines for the number of degrees indicated at the top (bottom) and of minutes in the first (seventh) column, the third (fifth) column gives the corresponding logarithm, and the fourth column gives the *differentiae* between the logarithms in the third and fifth columns, these being therefore essentially logarithmic tangents or cotangents. A few entries follow.

0° min	sines	logarithm	+/− differentiae	logarithm	sines	
0	0	infinitum	infinitum	0	10000000	69
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439560	70439560	4	9999998	57

. . . .

30° min	sines	logarithm	+/− differentiae	logarithm	sines	
0	5000000	6931469	5493059	1483410	8660254	60
1	5002519	6926432	5486342	1440090	8658799	59
2	5005038	6921399	5479628	1441771	8657344	58

. . . .

44° min						
59	7069011	3468645	5818	3462827	7071068	1
60	7071068	3465735	0	3465735	7071068	0
						min 45°

Hence $\log \sin 3' = \log 8727 = 70439560$,

$$\log \sin 30°\ 1' = \log 5002519 = 6926432,$$

$$\log \sin 45° = \log 7071068 = 3465735; \text{ (half of } \log \sin 30°\text{, Art. 56)},$$

also $\log \sin 90° = \log 10000000 = 0$.

ULRICH Jean Marie
Collège Illirch I

TRADUCTION

1. Une table logarithmique (tabula artificialis) est une courte table dont l'utilisation permet, au moyen de calculs très simples, l'obtention de toutes dimensions géométriques et mouvements dans l'espace. Elle est extraite d'une suite de nombres progressant de façon continue.

2. Parmi les progressions continues
- une progression arithmétique augmente par intervalles égaux
- une progression géométrique varie par intervalles inégaux et, croissants ou décroissants proportionnellement.

3. De ces progressions nous requerrons exactitude et facilité d'utilisation. L'exactitude est obtenue en choisissant au départ de grands nombres ; or, de grands nombres s'obtiennent aisément en partant de petits nombres que l'on fait suivre de zéros.
Ainsi, plutôt que de choisir 1 000 000 pour plus grand sinus, à l'instar des moins expérimentés, les plus savants choisissent 10 000 000. C'est pourquoi, nous aussi, choisirons ce dernier comme rayon et pour plus grand nombre de notre suite géométrique.

4. Pour les calculs nécessaires à l'élaboration des tables, nous pourrons rendre ces "grands nombres" plus grands encore en plaçant à leur fin une "période" (notée par un point : **.**) et en ajoutant des zéros à la suite.

5. Pour les nombres qui se singularisent par une "période", tout ce qui figure après cette "période" est une fraction dont le dénominateur est l'unité suivie du même nombre de zéros qu'il y a de chiffres après la période.

Ainsi : 10 000 000.04 est $10\,000\,000\ \frac{4}{100}$

9.999 998.000 502 1 est $9999\,998\ \frac{5021}{10000\,000}$

etc…

6. Les calculs achevés, les fractions suivant la "période" pourront être négligées sans erreur significative. En effet, pour nos grands nombres, une erreur n'excédant pas l'unité est insensible et peut être considérée comme nulle.

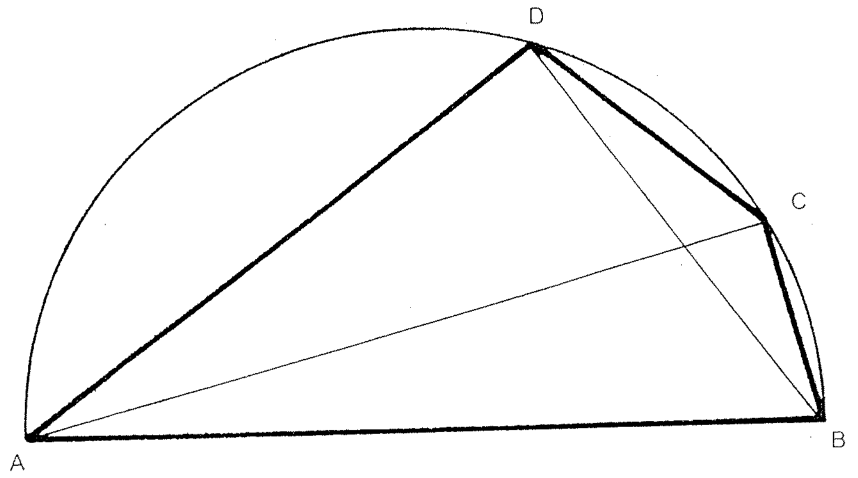
ULRICH Jean Marie
Collège Illkirch 1

Commentaires

1 . Le but de Neper était donc d'alléger la tâche, substantiellement alourdie par les contingences du calcul (trigonométrique) des astronomes et navigateurs.

De fait, il mettra en correspondance les nombres d'une table trigonométrique – sinus d'arcs mesurés de minute en minute – avec leur "logarithme".

Les tables trigonométriques sont elles-mêmes bien plus anciennes. Ptolémée, astronome et mathématicien grec du IIe siècle, en élaborait une pour des arcs mesurés de 1/2 degré en 1/2 degré dans l'Almageste [K].
Il se basait sur
1° une proposition "géométrique" qui contient nos actuelles formules d'addition :
Dans un quadrilatère inscrit dans un demi-cercle (cf. figure). Le produit des diagonales égale la somme des produits deux à deux des cordes opposées.



$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

2° La connaissance des cordes sous-tendues par les arcs de 120°, 90°, 72°, 60° et 36° (correspondants aux triangles équilatéral, carré, pentagone, hexagone et décagone régulier).
3° Une élégante méthode d'encadrement [K - vol. I, PP - 415 - 420].
Le sinus est une invention indienne ; Araybhata, repris par Varàhamihira puis par Brahmagupta [VIe et VIIe siècles] avec des bases (valeurs du rayon du cercle) différents, construisait une table de sinus en minutes d'arc. [Cf. E.U. Article INDE].

La règle d'addition des sinus est formulée ainsi dans le Siddhantasiromani de Bhàskara (XIIe siècle) :

Les sinus de deux arcs sont multipliés l'un par le cosinus de l'autre et chaque produit est divisé par le rayon ; la somme des quotients est le sinus de la somme des arcs, et leur différence est le sinus de leur différence.
Soit R. $\sin(\alpha + \varepsilon\beta) = R \sin \alpha \; R \cos \beta + \varepsilon R \sin \beta \; R \cos \alpha$
$\varepsilon = +1, -1$

Deux mathématiciens danois de la fin du VXIe siècle, Wittich et Clavius : de Astrolabio, suggéraient pour abréger les calculs, l'emploi des tables trigonométriques et de la formule d'addition

$$\sin A \cos B = 1/2 (\sin [A + B] + \sin [A - B]) ;$$

2. Les propriétés des suites géométriques : $a^{m+n} = a^m . a^n$ ($n \in \mathbb{N}$) étaient connues d'Archimède (Syracuse : - 287 ; - 212) qui les signale dans son "traité de l'Arénaire" [N]

Chuquet (Lyon ≈ 1500) écrit en son ouvrage : le Triparty en la science des nombre 1484 [N] "qui multiplie l'ung d'iceux par l'ung des autres ($a^m . a^n$), et qui déouste les deux ordres (m et n) esquels sont situés les deux nombres ml'tipliez, il trouve le lieu où doit estre le nombre venu de la multiplicacion"

Soit : en multipliant deux termes d'une suite géométrique ordonnée, le rang du produit est la somme des rangs des multiplicandes.

Stifel (1486-1567 : Nüremberg) dans son "Arithmetica integra" 1544, à titre d'exemple de l'utilité des nombres négatifs encore fort contesté, montrera que les propriétés des suites géométriques s'étendent à des rangs négatifs
(soit $a^{m+n} = a^m . a^n \quad n \in \mathbb{Z}$).

3. - 6. Calcul d'erreur et notation décimale ne sont pas encore en usage à l'époque de Néper ; le cercle trigonométrique ne sera introduit que par Euler au XVIIIe siècle.
Pour les besoins des calculs astronomiques, on utilisait des valeurs du sinus comportant 6 ou 7 chiffres significatifs et le rayon du cercle sur lequel on les définissait était donc choisi égal, suivant les cas, à 10^6 ou 10^7.

Les nombres figurant dans les tables de Néper sont donc à comprendre comme écrits à "virgule flottante" (tout comme dans nos tables actuelles), à 7 chiffres significatifs (pour les sinus d'arc ...). Pour revenir aux valeurs actuelles, ces nombres sont donc à diviser par 10^7.

La "période" qu'introduit Néper, ancêtre du point décimal anglo-saxon et de notre virgule, est à comprendre ici comme séparant les chiffres significatifs, qui seuls figureront dans la table logarithmique, d'une seconde partie qui ne sert qu'à une meilleure précision des calculs. Nos calculettes actuelles ne fonctionnent pas d'autre manière, affichant par exemple 8 chiffres et travaillant avec 11.

16. Donne la méthode de calcul d'une première suite géométrique de cent termes : premier terme à 7 chiffres significatifs à assimiler à 1, raison 0,9999999.
Soit le tableau $\{10^7(1 - 10^{-7})^n\}$ n = 0 jusqu'à 100 - Voir annexe première table -

17. Poursuit les calculs des termes de la progression en prenant toujours le même premier terme et s'arrangeant à choisir une raison, satisfaisante pour la simplicité des calculs et donnant un second terme aussi voisin que possible du dernier terme de la première table.

Soit la table $\{10^7(1 - 10^{-5})^n\}$ n = 0 jusqu'à 50 - Voir annexe seconde table -

18. Même principe qu'en 17. pour la construction d'une troisième suite de premier terme 1 - notation actuelle - et de raison telle, que le second terme corresponde le mieux possible au dernier terme de la seconde table.
Le vingtième terme est voisin de 0,99. (Table III première colonne)

Soit la table $\{10^7(1 - 10^{-2})^n\}$ n = 0 jusqu'à 20

19. Construction d'une table de 20 rangées, 69 colonnes - soit 1380 nombres - où l'on commence par placer

* dans la première colonne, les vingt termes successifs obtenus en **18.**

Une raison adaptée est : de 9 995 à 10 000 et le calcul de proche en proche se fait en retranchant à chaque étape la deux millième part du nombre obtenu.
Le dernier nombre obtenu est : 9 900 473.578 08.

19. Le premier nombre de chaque colonne s'obtient du rayon ajouté de quatre zéros et ces nombres forment une suite géométrique dont la raison doit être la plus simple et la plus proche de celle reliant le premier et le dernier nombre de la première colonne.

Le premier -resp. : le dernier- nombre de la première colonne étant 10 000 000 -resp. : 9 900 473.578 0- la raison la mieux adaptée est de 99 à 100. On déterminera alors soixante neuf nombres, à partir du rayon, en progression géométrique de raison 99 à 100 qui s'obtienne en retranchant à chaque étape la centième partie du nombre obtenu.

20. De la même manière, on constituera une suite géométrique de même raison à partir du second de la première colonne, et passant par les seconds nombres de chaque colonne et, de même pour la troisième rangée, la quatrième... jusqu'à la vingtième.

Le dernier nombre (vingtième rangée, soixante neuvième colonne) est 4 998 609.4034 soit, en gros, la moitié du rayon.

21. A présent :
— Dans la **TROISIEME TABLE** vous trouverez soixante neuf nombres interpolés, dans le rapport de 100 à 99 et entre deux de ceux-là, vous en trouvez vingt autres interpolés dans le rapport de 10 000 à 9 995.

— à nouveau, dans la **SECONDE TABLE**, entre les deux premiers de ces nombres (de la 3e table) ; savoir : entre 10 000 000 et 9 995 000, vous trouvez cinquante nombres interpolés dans le rapport de 10 000 0 à 99 999.

— et finalement, dans la **PREMIERE TABLE**, entre les deux premiers nombres de la précédente, vous avez cent nombres interpolés dans le rapport de
10 000 000 à 9 999 = 999. Et puisque la différence entre ceux-ci ne dépasse jamais l'unité, il est inutile de procéder à de nouvelles interpolations plus minutieuses. En effet, ces trois tables, après avoir été complétées, suffiront pour l'élaboration d'une table logarithmique.

7.- 15 Donne quelques règles de calcul adaptées aux grands nombres.

16. Ainsi, si du rayon ajouté de sept zéros vous retranchez la dix millionième partie, puis, du nombre ainsi obtenu, sa dix millionième partie et ainsi de suite, vous obtiendrez fort aisément une centaine de nombres en progression géométrique dont la raison est le rapport au rayon du sinus qui lui est inférieur d'une unité ; savoir 9 999 999 à 10 000 000 C'est cette suite de termes proportionnels que nous appelons

PREMIERE TABLE

En fait : du rayon, auquel vous aurez ajouté sept zéros pour plus de précision,
- soit 10 000 000.000 000 - retranchez 1.000 000 0 ;
vous obtenez 9 999 999.000 000 1. De ce nombre, retranchez 0.999 999 9 ; vous obtenez : 9 999 998.000 000 1.
Itérez le processus... jusqu'à l'obtention du centième terme qui sera, si les calculs sont justes : 9 999 900.000 495 0.

17. La seconde table s'obtient en partant du rayon ajouté de six zéros, et en calculant successivement cinquante autres termes décroissants en progression géométrique de raison la plus simple pour les calculs et, simultanément, la plus proche possible du rapport du dernier au premier nombre de la **PREMIERE TABLE**.
Comme les premiers - resp. : derniers - termes de la première table, sont 10 000 000 - resp. : 9 999 900.000 495 - leur rapport conduirait à des calculs difficiles.

Une raison proche et simultanément agréable est celle de 99.999 à 100 000. Les calculs pourront être réalisés avec suffisamment de précision en ajoutant six zéros au rayon et il suffira, à chaque étape, de retrancher du nombre obtenu sa cent millième partie... et cette table contient, outre le rayon, cinquante autres termes en progression géométrique dont le dernier, sauf erreur de calcul est : 9 995 001. 222 927.

18. La troisième table s'obtient en partant du rayon ajouté de cinq zéros et en calculant successivement vingt autres termes décroissants en progression géométrique de raison la plus simple possible pour les autres calculs et, simultanément, la plus proche possible du rapport du dernier au premier terme de la **SECONDE TABLE** qui sont

9995 001.222 927 et 10 000 000

22. Il reste, au moins dans la troisième table, à mettre en correspondance les sinus ou nombres naturels décroissants en progression géométrique, avec leurs logarithmes, ou nombres artificiels croissants en progression arithmétique.

23.- 24. *Neper y propose une représentation géométrique sur une droite de "croissance arithmétique" et "décroissance géométrique".*

25. Il s'en suit qu'un point se déplaçant géométriquement et s'approchant d'un point fixe a des vitesses proportionnelles aux distances qui le séparent du point fixe.

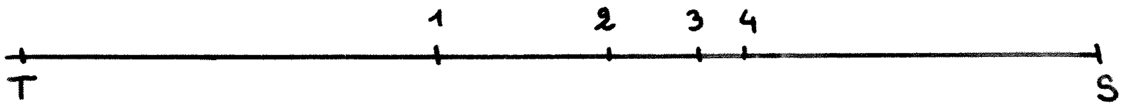


figure : raison 1/3

Ainsi, avec les notations de la figure ci-dessus

— le point part de T et se dirige vers S. Je dis que, lorsque le point se déplaçant "géométriquement" se trouve en T, sa vitesse est proportionnelle à la distance TS, lorsqu'il se trouve en 1, sa vitesse est proportionnelle à la distance 1S, en 2 proportionnelle à 2S et ainsi de suite. Il s'en suit que, quel que soit le coefficient de proportionnalité entre les distances successives aux points T, 1, 2, 3, 4... sera le même.

En effet, nous observons qu'un mobile est dit plus ou moins rapide suivant qu'on le voit traverser un espace plus ou moins grand pendant des intervalles de temps égaux. On en déduit que le rapport entre les espaces parcourus est nécessairement le même que celui des vitesses. Mais le rapport des espaces parcourus pendant des durées égales T1, 12, 23, 34, etc... est celui des distances TS, 1S, 2S, 3S, 4S, ... Par conséquent, le rapport entre les distances du point mobile à S -à savoir : TS, 1S, 2S, 3S, 4S, ... est le même que celui entre les vitesses du mobile en T, 1, 2, 3, 4... respectivement.

26. Le logarithme d'un sinus donné est le nombre qui a cru arithmétiquement à vitesse constante durant que le rayon décroissait géométriquement jusqu'à la valeur donnée du sinus.

*	dans la première rangée, les 69 termes successifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 0,99 ; raison fort proche du rapport du dernier au premier terme de la première colonne.

Soit le tableau $\{10^7(1 - \frac{1}{100})^i (1 - \frac{1}{2000})^j\}$ $0 \leq i \leq 20$ $0 \leq j \leq 68$

Annexe : Tableau III.

20. Pour compléter la table initiée en **19**, on achève le calcul des termes successifs d'une suite géométrique :

- de raison 0,9995 pour chaque colonne
- de raison 0,99 pour chaque rangée.

Cette façon de faire assure :

- la connaissance de 1380 termes successifs de la suite géométrique de 1er terme 1 et de raison 0,9995 à un degré d'exactitude remarquable.
- assure, non seulement des calculs relativement aisés - confiés à l'époque à des "instituteurs" - mais aussi leur vérification - jusqu'à un certain degré - puisque tout nombre de cette troisième table s'obtient par deux voies distinctes (suivre d'abord la ligne, puis la colonne ou vice versa).

21. Résume la situation.

22. Explique le travail qui reste à accomplir ; savoir : faire correspondre aux nombres de la table qui, comme on l'a vu, sont en progression géométrique de raison 0,9995, ceux d'une suite arithmétique adéquate.

23-24 Montrent comment on peut représenter des progressions arithmétiques ou géométriques à l'aide de points sur une ligne.

25. Néper nous donne à présent son interprétation cinématique d'une progression géométrique. Il n'est pas impossible qu'il en ait été inspiré par un problème du Moyen-Age, auquel [N] Chuquet, dont nous avons déjà parlé au-dessus, s'était intéressé, trouvant la solution alors en cours inadaptée mais avouant ne pas être en mesure, lui-même, d'y apporter une réponse satisfaisante.

Le problème du tonneau

Un tonneau se vide chaque jour du dixième de son contenu, quand sera-t-il à moitié vide ?

Le problème du tonneau

Un tonneau se vide chaque jour du dixième de son contenu, quand sera-t-il à moitié vide ?

La réponse des mathématiciens du Moyen-Age consistait à remarquer que :
- le 6ème jour le tonneau contenait encore $(0,9)^6$ de sa capacité soit : ≈ 53 %
- le 7ème jour le tonneau ne contenait plus que $(0,9)^7$ de sa capacité soit : ≈ 48 %

et concluaient par une règle de trois - très en vogue et remplacée il n'y a qu'une vingtaine d'années par la proportionnalité et l'interpolation linéaire - qui donne
$(53 - 50) / (53 - 48) \approx 0,6$
soit environ : 6 jours 14 heures 11 minutes ...
Chuquet estimait que ce dernier calcul n'est pas adéquat, l'écoulement (flux) au cours de la septième journée ne devant pas être supposé proportionnel à la durée - la vitesse n'étant pas uniforme. De fait *la vitesse d'écoulement devait être proportionnelle à la quantité restante.*
Solution exacte, en utilisant le calcul différentiel ?
De nos jours, le physicien remarquerait que, si Q désigne la quantité contenue dans le tonneau (exprimée en tonneaux) et t la durée (exprimée en jours) on a en première approximation :
• $\Delta Q : \Delta t = \alpha Q(t)$ *i.e. la vitesse d'écoulement est proportionnelle à la quantité contenue dans le tonneau à cette date avec les conditions initiales :*
$t = 0 \quad Q_{t=0} = 1 \quad \text{et} \quad Q_{t=0} - Q_{t=1} = 0,1 Q_{t=0}$

Notant α la constante de proportionnalité et passant à la limite sur (•) il obtiendrait :
$$\frac{dQ}{dt} = \alpha Q \quad \text{soit} \quad \frac{dQ}{Q} = \alpha dt$$

puis, intégrant et tenant compte des conditions initiales

$$\begin{cases} Q(t) = e^{\alpha t} \\ Q_{t=0} - Q_{t=1} = 0,1 Q_{t=0} \end{cases}$$
d'où
$$\begin{cases} Q(t) = e^{\alpha t} \\ Q(1) = e^{\alpha} = 0,9 = 0,9 Q_{t=0} \end{cases}$$

i.e. finalement

$$Q(t) = (0,9)^t$$
Le mathématicien, reprenant les mêmes notations et s'intéresssant d'abord au cas discret noterait que :

$$Q(0) = 1$$
$$Q(n+1) = 0,9 \cdot Q(n) \quad (n \text{ entier})$$

reconnaîtrait une suite géométrique et en déduirait que :

$$Q(n) = (0{,}9)^n \qquad (n \text{ entier})$$

Prolongeant par continuité à $\mathbb{R}$ cet homomorphisme de $(\mathbb{N}, +)$ dans $\mathbb{R}$,.) il obtiendrait, luis aussi :

$$Q(t) = (0{,}9)^t \quad (t \in \mathbb{R}+)$$

Il resterait alors à résoudre l'équation

$Q(t) = 1/2$ *i.e.* $(0{,}9)^t = 1/2$

qui donne $t = \dfrac{\ln 1/2}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}5788$ *... soit environ 6j 13h 53 min ...*

La progression géométrique décrite par Néper est, justement, à vitesse proportionnelle à la distance restant à parcourir (hauteur d'une jauge ?).

25. exprime alors simplement ce que les notations actuelles permettent d'écrire :

- "En effet, ... un mobile est dit ... temps égaux"

$$v = \Delta x / \Delta t$$

- "On en déduit... celui des vitesses"

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \text{ lorsque } \Delta t_1 = \Delta t_2$$

- "Mais le rapport ... est celui des distances..."

Il s'agit ici d'une propriété des suites géométriques.

Rappelons que la suite T, 1, 2, 3, 4... des points sur la droite représente une progression géométrique de raison, disons : $q < 1$

On a donc :

$T1 = 1 \quad 12 = q \quad 23 = q^2 \quad 34 = q^3 \ldots$

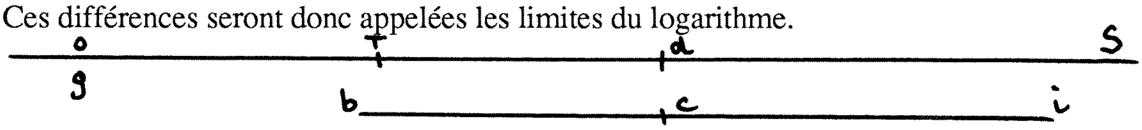
$$TS = \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

Soit TS le rayon et dS la valeur d'un sinus donné. g se déplace géométriquement de T à d en un certain temps.

Soit bl une autre droite, infinie à droite, et faisons se déplacer a, à partir de b, arithmétiquement et avec la vitesse de g lorsqu'il était en T ; et, du point fixé b dans la direction i, faisons se déplacer a durant la même durée de temps que g jusqu'au point c. Le nombre mesurant le segment bc est appelé le logarithme du sinus donné dS.

27. On en déduit que le logarithme du rayon est nul.
"Unde sinus totiuss nihil est por artificiali"

28. On en déduit également que le logarithme d'un sinus donné est supérieur à la différence entre le rayon et le sinus donné, et plus petit que la différence entre le rayon et la quantité qui lui est supérieure dans le rapport du rayon au sinus donné.
Ces différences seront donc appelées les limites du logarithme.



En effet, reprenant la figure précédente et reportant ST à gauche de sorte que oS est à TS comme TS à dS, je dis que bc, le logarithme du sinus dS est supérieur à Td et inférieur à To.. Cela résulte du fait que, pendant la même durée de temps où g parcourt oT, g parcourt T et puisque, d'après (24), oT est construit sur oS de façon que oT est à oS comme Td à TS et, par définition du logarithme, pendant cette même durée, a parcourt bc, ainsi oT, Td et bc sont des distances parcourues en même temps.

Mais puisque g, lorsqu'il parcourt oT est plus rapide qu'en T, et lorsqu'il parcourt Td moins rrapide qu'en T et que en T, il a la même vitesse que a (§ 26) ; il s'en suit que oT - la distance parcourue par g, lorsque son mouvement est rapide- est plus grand, et Td - distance parcourue par g alors que son mouvement est lent- plus petit que bc -distance parcourue par a à la vitesse moyenne- pendant exactement le même laps de temps ; la dernière est donc une certaine moyenne comprise entre les deux autres. Aussi oT sera-t-elle appelée limite supérieure et Td limite inférieure du logarithme représenté par bc.

29. Donc pour trouver les limites du logarithme d'un sinus donné.
Dans le paragraphe précédent, on a montré que :

— en retranchant le sinus du rayon il reste la limite inférieure
— en multipliant le rayon par la limite inférieure et en divisant le produit par le sinus donné, on obtient la limite supérieure.

$$\frac{T1}{12} = \frac{12}{23} = \frac{23}{34} = \dots = \frac{1}{q}$$

$$\frac{TS}{1S} = \frac{1/(1-q)}{[1/1-q] - 1} = \frac{1}{q} \qquad \frac{1S}{2S} = \frac{q/(1-q)}{[q/1-q] - q} = \frac{1}{q} \text{etc...}$$

de sorte que, comme le dit Néper :

$$\frac{T1}{12} = \frac{12}{23} = \dots \frac{TS}{1S} = \frac{1S}{2S} = \dots$$

• "Par conséquent, le rapport entre … est … vitesses …"

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} =_{(1)} \frac{T1}{12} =_{(2)} \frac{TS}{1S}$$

(1) - à lire sur la figure

(2) - d'après la remarque précédente.

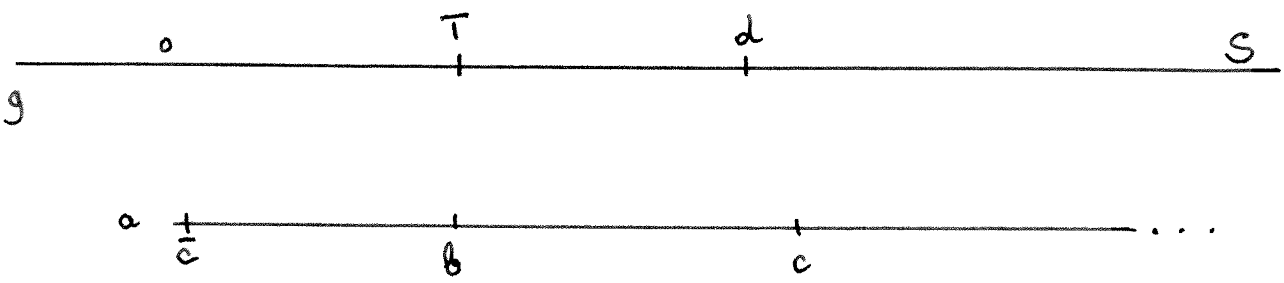
26. Définit le logarithme d'un nombre (sinus) donné de la suite géométrique comme le terme de même rang d'une suite arithmétique.

27. Immédiat : de la définition du **26**.
Donc, avec nos notations et en posant $\mathcal{L}(x)$ pour le logarithme ainsi défini de x: $\mathcal{L}(1) = 0$

28. Essentiel pour les calculs de la raison de la suite arithmétique du **26** et simultanément, comme on le verra, très profond.
Néper fournit un encadrement du logarithme - terme de la suite arithmétique - pour deux "sinus" - termes de la suites géométrique.
Son raisonnement est particulièrement clair :

• D'abord, avec nos modes de notation actuels, la phrase :

"On en déduit que, … sinus donné"
s'écrit : $1 - x < \mathcal{L}(x) < \frac{1}{x} - 1$ (les différences notant ici des distances, la seconde est bien sûr à prendre dans l'ordre inverse à celui indiqué par Néper).



Par définition de la progression de g sur (TS) on a :

$\frac{OS}{TS} = \frac{TS}{dS}$ *

Le mobile vient de o passe en T arrive en d sur (TS)

Le mobile vient de $\bar{c}$ passe en b arrive en c sur (bi)

La vitesse des mobiles g et a est la même lorsque g se trouve en T.

La vitesse du mobile g s'amortit.

bc = b$\bar{c}$ est le logarithme du "sinus" dS

On a :

dT < bc < OT

g est "plus rapide" sur [oT] et "plus lent" sur [Td] qu'en T, c'est-à-dire que a.

Or (**1**) dT = TS - dS "différence du rayon et du sinus donné" où TS est le "rayon" ou "sinus total"...

et :

(**2**) $OT = OS - TS = TS \cdot \frac{OS}{TS} - TS$

et, puisque $\frac{OS}{TS} = \frac{TS}{dS}$ d'après la relation (*) rappelée en début $OT = TS \cdot \frac{TS}{dS} - TS$

OT est "la différence du rayon et de la quantité qui l'excède dans le rapport ..."

Prolongeons un peu :

- on vient d'établir que : $1 - x < \mathcal{L}(x) < \frac{1 - x}{x}$

- posons $x = 1 - \varepsilon$ il vient : $\varepsilon < \mathcal{L}(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$

Choisissons alors deux nombres a et b, b < a et posons :

$\frac{b}{a} = x$; il vient : $\frac{1 - b/a}{b/a}$ soit $\frac{a - b}{a} < \mathcal{L}(b/a) < \frac{a - b}{b}$

30. Ainsi, le premier terme de la suite géométrique de la première table étant 9 999 999, son logarithme est compris entre les limites : 1.000 000 1 et 1.000 000 0

31. Les limites elles-mêmes ne différant qu'insensiblement, elles-mêmes ou n'importe quel nombre compris entre elles, pourra être choisi comme la "bonne" valeur du logarithme.

32. Etant donné un nombre quelconque de sinus décroissants en progression géométrique, le logarithme de l'un d'eux étant donné, comment trouver le logarithme de tous les autres.
Ceci se déduit immédiatement de la définition de "croissance arithmétique", "décroissance géométrique" et "d'un logarithme"....
Ainsi, si le premier logarithme correspondant au premier sinus suivant le rayon est connu, le second logarithme sera son double, le troisième son triple, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le logarithme de tous les sinus soit connu ...

33. A présent, les logarithmes de tous les sinus figurant dans la première table peuvent être encadrés entre deux limites voisines et, par conséquent, donnés avec suffisamment de précision.

34. La différence des logarithmes du rayon et d'un sinus donné est le logarithme du sinus donné lui-même ...

35. La différence des logarithmes de deux sinus donnés doit être ajoutée au logarithme du plus grand (sinus) pour obtenir le logarithme du plus petit (sinus) et retranchée au logarithme du plus petit pour obtenir celui du plus grand.

36. Les logarithmes de sinus qui se trouvent dans les mêmes proportions sont équidifférents.
Cela résulte immédiatement de la définition du logarithme et de celle des deux mouvements...
De la même manière, on a le même type d'égalité pour les différences entre les limites respectives -à savoir- : les différences des limites inférieures entre elles et de limites supérieures entre elles, limites encadrant les logarithmes des sinus se trouvent dans des proportions égales.

37. Soient trois sinus en progression géométrique de sorte que le carré du terme médian égale le produit des deux autres ; alors le double du logarithme du terme médian égal le

Tenant compte des propriétés du logarithme que Néper établit ultérieurement, on aura :

$$\frac{a - b}{a} < \mathcal{L}(b) - \mathcal{L}(a) < \frac{a - b}{b}$$

donc :

$$\mathcal{L}(b) - \mathcal{L}(a) \cong 1/2 \left\{ \frac{a - b}{a} + \frac{a - b}{b} \right\}$$

$$\mathcal{L}(b) \cong \mathcal{L}(a) + 1/2 \left\{ \frac{a - b}{a} + \frac{a - b}{b} \right\}$$

$\cong \mathcal{L}(a) + 1/2 \left\{ \frac{\Delta b}{b + db} + \frac{\Delta b}{b} \right\} \cong \mathcal{L}(a) + \frac{\Delta b}{b}$ où $\Delta b + b = a$, donc, comme nous l'écrivons aujourd'hui : $\mathcal{L}(b) - \mathcal{L}(b + \Delta b) = \frac{\Delta b}{b}$ soit $\Delta\mathcal{L}(b) = -\frac{\Delta b}{b}$.

Le logarithme défini par Néper n'est donc autre que l'opposé du logarithme népérien i.e. le logarithme de base 1/e.
Néper, évidemment, ne disposait pas du calcul infinitésimal qui ne sera introduit qu'un peu moins d'un siècle plus tard par Leibniz et Newton.

30-31. La raison de la suite arithmétique correspondant à la progression géométrique de la première table - raison : 0,9999999 - est le logarithme de 9999999.
D'après **28**. - résumé en **29**. - cette raison est comprise entre 1.0000001 et 1.0000000. (i.e. $\mathcal{L}(.9999999)$ compris entre 1.10^{-7} et $1.0000001 \,.\, 10^{-7}$) - Neper dit que, ces deux derniers nombres étant extrêmement voisins, on peut prendre n'importe quelle valeur entre les deux et choisit leur moyenne arithmétique 1.00000005.

32 - 33. Calculs des logarithmes des nombres de la première table en utilisant :

$\mathcal{L}(x^n) = n\mathcal{L}(x)$ ou, plus précisément - **33** - en encadrant par : n 1.0000001 < n .1.0000000

34. $\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(1) = \mathcal{L}(x)$

35. Si $a < b$ alors

$\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b) + |\mathcal{L}(a) - \mathcal{L}(b)|$

$\mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(a) - |\mathcal{L}(a) - \mathcal{L}(b)|$

i.e. "*$\mathcal{L}$ est une fonction décroissante*" somme des logarithmes des extrêmes. Ainsi, si deux d'entre eux sont connus, les troisième l'est...

38. Soient quatre termes en progression géométrique de sorte que le produit des deux termes du milieu égale le produit des deux extrêmes ; alors la somme des logarithmes des termes du milieu est égale à la somme de ceux des extrêmes. Ainsi, si trois d'entre eux sont connus, on peut calculer le quatrième.

39. La différence des logarithmes de deux sinus est compris entre deux limites ; la limite supérieure est au rayon comme la différence des sinus au sinus le plus petit et la limite inférieure est au rayon comme la différence des sinus au sinus le plus grand.

40. 46. *Neper traitte de quelques exemples de déterminations de logarithmes.*

47. On a, dans la troisième table, à faire correspondre aux nombres naturels leurs logarithmes ; de façon que a troisième table que nous nommerons désormais

TABLE RADICALE

soit complétée et parfaite...

1ère Colonne **2e Colonne** **69e Colonne**

Nombres Naturels	Logarithmes	Nombres naturels	Logarithmes	Nombres naturels	Logarithmes
10 000 000.0000	.0	9 900 000.0000	100 503.3...	5048 858.8900	6834 225.8
9.995 000.0000	5 001.2	9 895 050.0000	105 504.6...	5046 334.4605	6839 227.1
9 990 002.5000	10 002.5	9 890 102.4750	110 505.8...	5043 011.2932	6844 228.3
9 990 473.5700	100 025.0	9 801 468.8423	200 528.2...	4998 609.4034	6934 250.8

48. La table radicale étant à présent complétée, nous ne nous servirons que d'elle pour obtenir les nombres de notre table logarithmique.
En effet, de la même façon que les deux premières tables nous ont servi à construire la troisième, cette table radicale sert pour la construction de la table logarithmique principale, avec beaucoup de facilité et sans erreur sensible.

Néper ne saurait utiliser cette terminologie de fonction qui ne sera introduite que dans un siècle et demi.

36. Si $a/b = c/d$ alors $\mathcal{L}(a) - \mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(c) - \mathcal{L}(d)$

La plupart des propositions mathématiques sont écrites, à l'époque de Neper, en termes de proportions.

37. Si a,b,c sont en progression géométrique, alors $b^2 = ac$ et
$2\,\mathcal{L}(b)$ "= $\mathcal{L}(b^2)$" = $\mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(c)$

38. Si a,b,c,d sont en progression géométrique, alors :$ad = bc$ et
$\mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(d) = \mathcal{L}(b) + \mathcal{L}(c)$

39. Si $a > b$
$\frac{a - b}{a} < \mathcal{L}(b) - \mathcal{L}(a) < \frac{a - b}{b}$ (cf. : **28.**)

40 - 46. Pour obtenir les correspondances de la deuxième table :
Calculer : $\mathcal{L}(9\ 999900)$ par l'encadrement vu en **28** ; puis utiliser $\mathcal{L}(x^n) = n\mathcal{L}(x)$.
Pour obtenir les correspondances de la troisième table :
Calculer : $\mathcal{L}(9\ 995000)$ par **28** ; puis compléter ...

47. Montre comment, à côté des nombres naturels, on écrira leurs logarithmes.

48. Résumé.

49. Méthode déjà analysée, basée sur **28.**

50. Méthode permettant de calculer, à partir de la table radicale, les logarithmes des sinus figurant dans une table trigonométrique.

1. Interpoler la valeur du sinus entre deux valeurs de la table radicale.
2. Choisir parmi les deux la valeur la plus proche.
   Pour suivre les calculs, soit x la valeur du sinus, a et b deux valeurs successives qui l'encadrent dans la table radicale :
   $$a < x < b$$
3. Choisir comme diviseur le nombre compris entre x et a - resp. : b - , suivant que a - resp. b - est la valeur la plus proche (on choisira bien entendu une valeur dont le nombre de chiffres significatifs soit le plus petit possible - nombre à 3 ou 4 chiffres suivis de zéros rendant ainsi la division "à la main" aisée).

49. Pour obtenir le plus facilement les logarithmes de sinus supérieurs à 9 996 700.
Ceci se fait simplement en soustrayant le sinus donné du rayon compris entre les limites 3 300 et 3 301 et ces limites, puisqu'elles ne diffèrent que de l'unité, ne peuvent différer du logarithme correct de façon sensible c'est-à-dire d'une quantité supérieur à l'unité. On en déduit que 3 300, la borne inférieure que nous obtenons simplement par soustraction, peut être prise pour logarithme du sinus 9 996 700.
Le méthode est la même pour tous les sinus qui lui sont supérieurs.

50. Pour trouver le logarithme de tous les sinus contenus dans les limites de la table radicale.
Multipliez la différence du sinus donné et du sinus de la table le plus proche par le rayon. Divisez le produit par le diviseur le plus adéquat qui pourra être :
— soit le sinus donné
— soit le sinus de la table qui lui est le plus proche
— soit un sinus quelconque compris entre les deux précédents. D'après **(39)** on obtient ainsi soit la limite supérieure, soit la limite inférieure ou quelqu'autre valeur comprise entre les deux ; aucune de ces valeurs ne saurait différer sensiblement de la "vraie" différence des logarithmes, compte tenu de la "proximité" des nombres de la table.

A présent, **(35)** ajoutez le résultat, quel qu'il soit, au logarithme du sinus de la table si le sinus donné est inférieur à celui de la table, ou soustrayez le dans le cas où le sinus donné est supérieur au sinus de la table et vous aurez obtenu le logarithme recherché du sinus donné.

Néper donne deux exemples d'application.

51. Tous les sinus qui se trouvent dans un rapport de 2 à 1 admettent comme différence de leurs logarithmes 6 931 469.22 (puisque ce nombre est le logarithme du sinus : 5 000 000).

52. Tous les sinus qui sont dans un rapport de 10 contre 1 admettent comme différence de leurs logarithmes 23 025 842.34.

53. *Contient* une table de correspondances entre sinus se trouvant dans un rapport donné et la différence de leurs logarithmes.

54. *S'occupe* des logarithmes de tous les sinus se trouvant en dehors du cadre de la table radicale.

4. Former $\frac{x - a}{d}$ - resp. : $\frac{b - x}{d}$ - (d étant le diviseur)

On aura bien entendu :

$\frac{x - a}{x} < \frac{x - a}{d} < \frac{x - a}{a}$ - resp. : $\frac{b - x}{b} < \frac{b - x}{d} < \frac{b - x}{x}$ -

de sorte que, avec **39**, : $\frac{x - a}{x} < \mathcal{L}(a) - \mathcal{L}(x) < \frac{x - a}{a}$

$\frac{x - a}{d}$ est une "bonne" approximation de $\mathcal{L}(a) - \mathcal{L}(x)$.

- resp. : analogue en remplaçant a par x et x par b. -

* l'erreur sera inférieure à $\frac{b^2 - a^2}{ab} \sim \frac{2}{a}$.

51 - 54.

55. $\frac{1/2}{\sin a/2} = \frac{\cos a/2}{\sin a}$ on reconnaît notre formule de duplication.

56. $2\mathcal{L}(\sin 45°) = \mathcal{L}(1/2)$

57. $\mathcal{L}(1/2) + \mathcal{L}(\sin a) = \mathcal{L}(\sin a/2) + \mathcal{L}(\cos a/2)$

58 - 59.

<u>Remarque</u> :

La propriété fondamentale des logarithmes
$\mathcal{L}(ab) = \mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(b)$ $\mathcal{L}(a^n) = n\mathcal{L}(a)$ n'a pas échappé à Néper - cf. : **37** et **32**. de même que : $\mathcal{L}(a/b) = \mathcal{L}(a) - \mathcal{L}(b)$ - cf. : **36**.

Simplement, dans les mathématiques rhétoriques de l'époque, ces propositions - particulièrement simples à écrire avec nos notations algébriques - , sont énoncées en termes de proportions, équidifférence ...

Prolongements

Briggs - qui était en contact étroit avec Néper - construira la première table de logarithmes décimaux.

55. Le demi-rayon est au sinus de la moitié d'un arc donné comme le sinus du complémentaire du demi-arc au sinus de l'arc complet.

56. Le double du logarithme d'un arc de 45 degrés est la logarithme de la moitié du rayon.

57. La somme des logarithmes d'un demi-rayon et d'un arc donné est égale à la somme des logarithmes du demi-arc et du complémentaire du demi-arc. Ainsi le logarithme du demi-arc peut être calculé si l'on connaît les trois autres.

58. *S'occupe* des logarithmes des arcs supérieurs à 45 degrés.

59. *Comment* former la table logarithmique.

Sa démarche est originale et s'appuie sur les remarques suivantes :

1) Tout nombre naturel se décompose en produit de nombres premiers ; compte-tenu de la propriété fondamentale des logarithmes, il suffira de connaître les logarithmes de ces nombres premiers.

2) Les nombres premiers étant rares, la connaissance des logarithmes des 25 nombres premiers inférieurs à 100 suffira à élaborer un treillis assez dense que l'on pourra compléter par interpolation.

3) Lorsque α est petit, $\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \alpha/2$ de sorte que :
si $\log (1 + \alpha) = a$ alors $\log (1 + \alpha/2) \approx (1/2)a$.

4) Si p est un nombre premier, si A est une "bonne" valeur approchée de
$\log \sqrt[2^n]{p} = A$, alors $\log p = 2^n A$.

Briggs pose alors :
$\log 1 = 0$ $\log 10 = 1$
Par extraction des racines carrées successives de 10, il construit le tableau de correspondances :

Nombre A	Logarithme du nombre A
1	0
10	1
$\sqrt{10}$	0,5
$\sqrt[4]{10}$	0,25
•	•
•	•
•	•
$\sqrt[2^{54}]{10}$	$\frac{1}{2^{54}}$

Pour chaque premier p inférieur à 100, il procède alors à l'extraction de racines carrées successives jusqu'à l'obtention d'une valeur s'insérant entre les dernières lignes du tableau.
Une interpolation lui fournit alors :
$A = \log \sqrt[2^n]{p}$ et donc log p.

C'est G. de Saint Vincent XVIIe siècle (cité par N.) qui fera le lien avec l'hyperbole équilatère. (Voir K. Volkert)
Il remarque en effet, dans son ouvrage - 1647 - (cf. N)
"Si les abscisses d'une hyperbole équilatère croissent en progression géométrique, alors les aires des surfaces découpées par les ordonnées correspondantes croissent en progression arithmétique".

N. Mercator éditait le premier développement
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ (1668) [Logarithmotechnia]
Newton et Leibniz connaissaient et utilisaient :
$d \ln x = \frac{dx}{x}$ et $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ (1665)

Dans un manuscrit, proobablement rédigé en 1667 (cf. Newton Mathematical Papers vol. II p. 184-189 cité par [Edwards]) partant de l'hyperbole $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x + 1}$ $(x > -1)$ Newton calcule l'aire et (x + 1) située sous $\mathcal{H}$ et délimitée par l'intervalle [0 ; x]
- Resp. : l'opposé de cette aire lorsque $-1 < x < 0$ -
Une division suivant les puissances croissantes lui fournit :
$y = \frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \frac{x^2}{2}$
et une intégration terme à terme :
(NW) $\mathcal{A}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

Il ne parle pas de $\mathcal{A}(1+x)$ en tant que logarithme mais en reconnait les propriétés logarithmiques, mettant en relation les valeurs de l'aire $\mathcal{A}(1+x)$ la suite arithmétique - et les valeurs des abscisses (1+x) - la suite géométrique - (il est probable qu'il se soit inspiré ici de l'œuvre de Saint Vincent).

Il remarque en outre que :

$$\mathcal{A}[(1+x)(1+y)] = \mathcal{A}(1+x) + \mathcal{A}(1+y)$$
$$\mathcal{A}\left[\frac{1+x}{1+y}\right] = \mathcal{A}(1+x) - \mathcal{A}(1+y)$$

Se basant sur ces propriétés, il élabore une courte table de logarithmes d'entiers.
- Posant $x = \pm 0,1$; $\pm 0,2$ dans (NW) il calcule une valeur approchée de $\mathcal{A}(0,8)$, $\mathcal{A}(0,9)$, $\mathcal{A}(1,1)$, $\mathcal{A}(1,2)$ avec <u>57</u> !!! chiffres significatifs.

Il remarque alors que : $2 = \frac{1,2 \times 1,2}{0,8 \times 0,9}$! $\quad 3 = \frac{1,2 \times 2}{0,8}$!!

$5 = \frac{2 \times 2}{0,8}$; $10 = 2 \times 5$; $11 = 10 \times 1,1$....; $100 = 10 \times 10$ qui lui

permettent, compte tenu des propriétés caractéristiques, d'achever les calculs de :
$\mathcal{A}(2)$, $\mathcal{A}(3)$, $\mathcal{A}(5)$, $\mathcal{A}(10)$, $\mathcal{A}(11)$ et $\mathcal{A}(100)$.

- Posant x = ± 0,02 ; ± 0,001 dans (NW), il détermine $\mathcal{A}(0{,}98)$, $\mathcal{A}(0{,}999)$, $\mathcal{A}(1{,}02)$, $\mathcal{A}(1{,}001)$ qui lui permettent le calcul des "logarithmes" de 7, 13, 17 du fait que :

$$7 = \sqrt{\frac{100 \times 0{,}98}{2}}\ ! \qquad 18 = \sqrt{\frac{100 \times 1{,}001}{7 \times 11}}\ !! \qquad 7 = \sqrt{\frac{100 \times 1{,}02}{6}}\ !!!$$

Pour vérifier le bien fondé de ses calculs, Newton calcule $\mathcal{A}(0{,}9984)$ de deux manières différentes :

- d'abord, en remplaçant x par - 0,0016 dans (NW)
- ensuite, en remarquant que $0{,}9984 = \dfrac{2^8 \times 3 \times 13}{10^5}$!!!

et note (avec un plaisir évident) la concordance de ses résultats à plus de 50 décimales.

Une synthèse complète sera due à Euler (1750) qui en reconnaîtra :

- les propriétés d'homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \bullet)$ sur $(\mathbb{R}, +)$
- les propriétés différentielles et géométriques
- le lien avec les fonctions trigonométriques (prolongement au plan complexe) ...

PREMIERE TABLE

1	9999999	51	9999949.000129
2	9999998	52	9999948.000134
3	9999997	53	9999947.000139
4	9999996.000001	54	9999946.000144
5	9999995.000001	55	9999945.00015
6	9999994.000002	56	9999944.000155
7	9999993.000002	57	9999943.000161
8	9999992.000003	58	9999942.000167
9	9999991.000004	59	9999941.000172
10	9999990.000005	60	9999940.000178
11	9999989.000006	61	9999939.000184
12	9999988.000007	62	9999938.00019
13	9999987.000008	63	9999937.000197
14	9999986.000009	64	9999936.000203
15	9999985.000011	65	9999935.00021
16	9999984.000012	66	9999934.000216
17	9999983.000014	67	9999933.000223
18	9999982.000016	68	9999932.000229
19	9999981.000018	69	9999931.000236
20	9999980.000019	70	9999930.000243
21	9999979.000021	71	9999929.00025
22	9999978.000024	72	9999928.000257
23	9999977.000026	73	9999927.000264
24	9999976.000028	74	9999926.000272
25	9999975.000031	75	9999925.000279
26	9999974.000033	76	9999924.000287
27	9999973.000036	77	9999923.000294
28	9999972.000038	78	9999922.000302
29	9999971.000041	79	9999921.00031
30	9999970.000044	80	9999920.000318
31	9999969.000047	81	9999919.000326
32	9999968.00005	82	9999918.000334
33	9999967.000054	83	9999917.000342
34	9999966.000057	84	9999916.00035
35	9999965.00006	85	9999915.000359
36	9999964.000064	86	9999914.000367
37	9999963.000067	87	9999913.000376
38	9999962.000071	88	9999912.000385
39	9999961.000075	89	9999911.000394
40	9999960.000079	90	9999910.000403
41	9999959.000083	91	9999909.000412
42	9999958.000087	92	9999908.000421
43	9999957.000091	93	9999907.00043
44	9999956.000096	94	9999906.000439
45	9999955.0001	95	9999905.000449
46	9999954.000104	96	9999904.000458
47	9999953.000109	97	9999903.000468
48	9999952.000114	98	9999902.000478
49	9999951.000119	99	9999901.000487
50	9999950.000124	100	9999900.000497

SECONDE TABLE

1	9999900	26	9997400.324972
2	9999800.001	27	9997300.350969
3	9999700.003	28	9997200.377965
4	9999600.006	29	9997100.405962
5	9999500.01	30	9997000.434958
6	9999400.014999	31	9996900.464953
7	9999300.020999	32	9996800.495948
8	9999200.027999	33	9996700.527943
9	9999100.035999	34	9996600.560938
10	9999000.044998	35	9996500.594932
11	9998900.054998	36	9996400.629926
12	9998800.065997	37	9996300.66592
13	9998700.077996	38	9996200.702913
14	9998600.090995	39	9996100.740906
15	9998500.104995	40	9996000.779899
16	9998400.119993	41	9995900.819891
17	9998300.135992	42	9995800.860883
18	9998200.152991	43	9995700.902874
19	9998100.170989	44	9995600.945865
20	9998000.189987	45	9995500.989855
21	9997900.209985	46	9995401.034845
22	9997800.230983	47	9995301.080835
23	9997700.252981	48	9995201.127824
24	9997600.275978	49	9995101.175813
25	9997500.299976	50	9995001.224801

10000000,0000	9900000,0000	9801000,0000	9702990,0000	9605960,1000	9509900,4990	9414801,4940	9320653,4791	9227446,9443
9995000,0000	9895050,0000	9796099,5000	9698138,5050	9601157,1200	9505145,5488	9410094,0933	9315993,1523	9222833,2208
9990002,5000	9890102,4750	9791201,4503	9693289,4357	9596356,5414	9500392,9760	9405389,0462	9311335,1558	9218221,8042
9985007,4988	9885157,4238	9786305,8495	9688442,7910	9591558,3631	9495642,7795	9400686,3517	9306679,4882	9213612,6933
9980014,9950	9880214,8451	9781412,6966	9683598,5696	9586762,5839	9490894,9581	9395986,0085	9302026,1484	9209005,8869
9975024,9875	9875274,7376	9776521,9903	9678756,7703	9581969,2026	9486149,5106	9391288,0155	9297375,1354	9204401,3840
9970037,4750	9870337,1003	9771633,7293	9673917,3920	9577178,2180	9481406,4359	9386592,3715	9292726,4478	9199799,1833
9965052,4563	9865401,9317	9766747,9124	9669080,4333	9572389,6289	9476665,7326	9381899,0753	9288080,0846	9195199,2837
9960069,9300	9860469,2307	9761864,5384	9664245,8931	9567603,4341	9471927,3998	9377208,1258	9283436,0445	9190601,6841
9955089,8951	9855538,9961	9756983,6062	9659413,7701	9562819,6324	9467191,4361	9372519,5217	9278794,3265	9186006,3832
9950112,3501	9850611,2266	9752105,1144	9654584,0632	9558038,2226	9462457,8404	9367833,2620	9274154,9293	9181413,3800
9945137,2940	9845685,9210	9747229,0618	9649756,7712	9553259,2035	9457726,6114	9363149,3453	9269517,8519	9176822,6734
9940164,7253	9840763,0781	9742355,4473	9644931,8928	9548482,5739	9452997,7481	9358467,7707	9264883,0929	9172234,2620
9935194,6429	9835842,6965	9737484,2696	9640109,4269	9543708,3326	9448271,2493	9353788,5368	9260250,6514	9167648,1449
9930227,0456	9830924,7752	9732615,5274	9635289,3721	9538936,4784	9443547,1136	9349111,6425	9255620,5261	9163064,3208
9925261,9321	9826009,3128	9727749,2197	9630471,7275	9534167,0102	9438825,3401	9344437,0867	9250992,7158	9158482,7887
9920299,3011	9821096,3081	9722885,3450	9625656,4916	9529399,9267	9434105,9274	9339764,8681	9246367,2195	9153903,5473
9915339,1515	9816185,7600	9718023,9024	9620843,6633	9524635,2267	9429388,8744	9335094,9857	9241744,0358	9149326,5955
9910381,4819	9811277,6671	9713164,8904	9616033,2415	9519872,9091	9424674,1800	9330427,4382	9237123,1638	9144751,9322
9905426,2912	9806372,0283	9708308,3080	9611225,2249	9515112,9726	9419961,8429	9325762,2245	9232504,6022	9140179,5562
9900473,5780	9801468,8422	9703454,1538	9606419,6123	9510355,4162	9415251,8620	9321099,3434	9227888,3499	9135609,4664

9135172,4748	9043820,7501	8953382,5426	8863848,7172	8775210,2300	8687458,1277	8600583,5464	8514577,7109	8429431,9338
9130604,8886	9039298,8397	8948905,8513	8859416,7928	8770822,6249	8683114,3986	8596283,2546	8510320,4221	8425217,2179
9126039,5862	9034779,1903	8944431,3984	8854987,0844	8766437,2136	8678772,8414	8591985,1130	8506065,2619	8421004,6093
9121476,5664	9030261,8007	8939959,1827	8850559,5909	8762053,9950	8674433,4550	8587689,1205	8501812,2293	8416794,1070
9116915,8281	9025746,6698	8935489,2031	8846134,3111	8757672,9680	8670096,2383	8583395,2759	8497561,3231	8412585,7099
9112357,3702	9021233,7965	8931021,4585	8841711,2439	8753294,1315	8665761,1902	8579103,5783	8493312,5425	8408379,4171
9107801,1915	9016723,1796	8926555,9478	8837290,3883	8748917,4844	8661428,3096	8574814,0265	8489065,8862	8404175,2273
9103247,2909	9012214,8180	8922092,6698	8832871,7431	8744543,0257	8657097,5954	8570526,6195	8484821,3533	8399973,1397
9098695,6672	9007708,7106	8917631,6235	8828455,3072	8740170,7542	8652769,0466	8566241,3561	8480578,9426	8395773,1532
9094146,3194	9003204,8562	8913172,8076	8824041,0796	8735800,6688	8648442,6621	8561958,2355	8476338,6531	8391575,2666
9089599,2462	8998703,2538	8908716,2212	8819629,0590	8731432,7684	8644118,4408	8557677,2563	8472100,4838	8387379,4789
9085054,4466	8994203,9022	8904261,8631	8815219,2445	8727067,0521	8639796,3815	8553398,4177	8467864,4335	8383185,7892
9080511,9194	8989706,8002	8899809,7322	8810811,6349	8722703,5185	8635476,4833	8549121,7185	8463630,5013	8378994,1963
9075971,6634	8985211,9468	8895359,8273	8806406,2291	8718342,1668	8631158,7451	8544847,1577	8459398,6861	8374804,6992
9071433,6776	8980719,3408	8890912,1474	8802003,0259	8713982,9957	8626843,1657	8540574,7341	8455168,9867	8370617,2969
9066897,9608	8976228,9812	8886466,6913	8797602,0244	8709626,0042	8622529,7441	8536304,4467	8450941,4022	8366431,9882
9062364,5118	8971740,8667	8882023,4580	8793203,2234	8705271,1912	8618218,4793	8532036,2945	8446715,9315	8362248,7722
9057833,3295	8967254,9962	8877582,4463	8788806,6218	8700918,5556	8613909,3700	8527770,2763	8442492,5736	8358067,6478
9053304,4129	8962771,3687	8873143,6551	8784412,2185	8696568,0963	8609602,4154	8523506,3912	8438271,3273	8353888,6140
9048777,7607	8958289,9831	8868707,0832	8780020,0124	8692219,8123	8605297,6141	8519244,6380	8434052,1916	8349711,6697
9044253,3718	8953810,8381	8864272,7297	8775630,0024	8687873,7024	8600994,9653	8514985,0157	8429835,1655	8345536,8139

Troisième Table

8345137,6145	8261686,2384	8179069,3760	8097278,6822	8016305,8954	7936142,8364	7856781,4081	7778213,5940	7700431,4581
8340965,0457	8257555,3952	8174979,8413	8093230,0429	8012297,7424	7932174,7650	7852853,0174	7774324,4872	7696581,2423
8336794,5632	8253426,6175	8170892,3514	8089183,4279	8008291,5936	7928208,6776	7848926,5909	7770437,3250	7692732,9517
8332626,1659	8249299,9042	8166806,9052	8085138,8361	8004287,4478	7924244,5733	7845002,1276	7766552,1063	7688886,5852
8328459,8528	8245175,2543	8162723,5017	8081096,2667	8000285,3041	7920282,4510	7841079,6265	7762668,8302	7685042,1419
8324295,6229	8241052,6667	8158642,1400	8077055,7186	7996285,1614	7916322,3098	7837159,0867	7758787,4958	7681199,6209
8320133,4751	8236932,1403	8154562,8189	8073017,1907	7992287,0188	7912364,1486	7833240,5071	7754908,1021	7677359,0211
8315973,4083	8232813,6742	8150485,5375	8068980,6821	7988290,8753	7908407,9666	7829323,8869	7751030,6480	7673520,3415
8311815,4216	8228697,2674	8146410,2947	8064946,1918	7984296,7299	7904453,7626	7825409,2249	7747155,1327	7669683,5814
8307659,5139	8224582,9188	8142337,0896	8060913,7187	7980304,5815	7900501,5357	7821496,5203	7743281,5551	7665848,7396
8303505,6842	8220470,6273	8138265,9210	8056883,2618	7976314,4292	7896551,2849	7817585,7721	7739409,9144	7662015,8152
8299353,9313	8216360,3920	8134196,7881	8052854,8202	7972326,2720	7892603,0093	7813676,9792	7735540,2094	7658184,8073
8295204;2544	8212252,2118	8130129,6897	8048828,3928	7968340,1089	7888656,7078	7809770,1407	7731672,4393	7654355,7149
8291056,6522	8208146,0857	8126064,6248	8044803,9786	7964355,9388	7884712,3794	7805865,2556	7727806,6031	7650528,5370
8286911,1239	8204042,0127	8122001,5925	8040781,5766	7960373,7608	7880770,0232	7801962,3230	7723942,6998	7646703,2728
8282767,6683	8199939,9917	8117940,5917	8036761,1858	7956393,5740	7876829,6382	7798061,3418	7720080,7284	7642879,9211
8278626,2845	8195840,0217	8113881,6214	8032742,8052	7952415,3772	7872891,2234	7794162,3112	7716220,6881	7639058,4812
8274486,9714	8191742,1016	8109824,6806	8028726,4338	7948439,1695	7868954,7778	7790265,2300	7712362,5777	7635238,9519
8270349,7279	8187646,2306	8105769,7683	8024712,0706	7944464,9499	7865020,3004	7786370,0974	7708506,3964	7631421,3325
8266214,5530	8183552,4075	8101716,8834	8020699,7146	7940492,7174	7861087,7903	7782476,9123	7704652,1432	7627605,6218
8262081,4457	8179460,6313	8097666,0250	8016689,3647	7936522,4711	7857157,2464	7778585,6739	7700799,8172	7623791,8190

		30	31					
7623427,1435	7547192,8720	7471720,9433	7397003,7339	7323033,6965	7249803,3596	7177305,3260	7105532,2727	7034476,9500
7619615,4299	7543419,2756	7467985,0828	7393305,2320	7319372,1797	7246178,4579	7173716,6733	7101979,5066	7030959,7115
7615805,6222	7539647,5660	7464251,0903	7389608,5794	7315712,4936	7242555,3687	7170129,8150	7098428,5168	7027444,2317
7611997,7194	7535877,7422	7460518,9648	7385913,7751	7312054,6374	7238934,0910	7166544,7501	7094879,3026	7023930,5095
7608191,7205	7532109,8033	7456788,7053	7382220,8182	7308398,6100	7235314,6239	7162961,4777	7091331,8629	7020418,5443
7604387,6247	7528343,7484	7453060,3109	7378529,7078	7304744,4107	7231696,9666	7159379,9970	7087786,1970	7016908,3350
7600585,4308	7524579,5765	7449333,7808	7374840,4430	7301092,0385	7228081,1181	7155800,3070	7084242,3039	7013399,8809
7596785,1381	7520817,2867	7445609,1139	7371153,0227	7297441,4925	7224467,0776	7152222,4068	7080700,1827	7009893,1809
7592986,7456	7517056,8781	7441886,3093	7367467,4462	7293792,7718	7220854,8440	7148646,2956	7077159,8327	7006388,2343
7589190,2522	7513298,3497	7438165,3662	7363783,7125	7290145,8754	7217244,4166	7145071,9725	7073621,2527	7002885,0402
7585395,6571	7509541,7005	7434446,2835	7360101,8206	7286500,8024	7213635,7944	7141499,4365	7070084,4421	6999383,5977
7581602,9592	7505786,9296	7430729,0603	7356421,7697	7282857,5520	7210028,9765	7137928,6868	7066549,3999	6995883,9059
7577812,1577	7502034,0362	7427013,6958	7352743,5589	7279216,1233	7206423,9620	7134359,7224	7063016,1252	6992385,9639
7574023,2517	7498283,0192	7423300,1890	7349067,1871	7275576,5152	7202820,7501	7130792,5425	7059484,6171	6988889,7710
7570236,2400	7494533,8776	7419588,5389	7345392,6535	7271938,7269	7199219,3397	7127227,1463	7055954,8748	6985395,3261
7566451,1219	7490786,6107	7415878,7446	7341719,9572	7268302,7576	7195619,7300	7123663,5327	7052426,8974	6981902,6284
7562667,8964	7487041,2174	7412170,8052	7338049,0972	7264668,6062	7192021,9201	7120101,7009	7048900,6839	6978411,6771
7558886,5624	7483297,6968	7408464,7198	7334380,0726	7261036,2719	7188425,9092	7116541,6501	7045376,2336	6974922,4713
7555107,1191	7479556,0479	7404760,4875	7330712,8826	7257405,7538	7184831,6962	7112983,3793	7041853,5455	6971435,0100
7551329,5656	7475816,2699	7401058,1072	7327047,5261	7253777,0509	7181239,2804	7109426,8876	7038332,6187	6967949,2925
7547553,9008	7472078,3618	7397357,5782	7323384,0024	7250150,1624	7177648,6607	7105872,1741	7034813,4524	6964465,3179

6964132,1805	6894490,8587	6825545,9501	6757290,4906	6689717,5857	6622820,4098	6556592,2057	6491026,2837	6426116,0208
6960650,1144	6891043,6133	6822133,1771	6753911,8454	6686372,7269	6619508,9996	6553313,9096	6487780,7705	6422902,9628
6957169,7893	6887598,0915	6818722,1105	6750534,8894	6683029,5405	6616199,2451	6550037,2527	6484536,8802	6419691,5114
6953691,2045	6884154,2924	6815312,7495	6747159,6220	6679688,0258	6612891,1455	6546762,2341	6481294,6117	6416481,6656
6950214,3589	6880712,2153	6811905,0931	6743786,0422	6676348,1818	6609584,6999	6543488,8529	6478053,9644	6413273,4248
6946739,2517	6877271,8592	6808499,1406	6740414,1492	6673010,0077	6606279,9076	6540217,1085	6474814,9374	6410066,7881
6943265,8820	6873833,2232	6805094,8910	6737043,9421	6669673,5027	6602976,7676	6536947,0000	6471577,5300	6406861,7547
6939794,2491	6870396,3066	6801692,3435	6733675,4201	6666338,6659	6599675,2793	6533678,5265	6468341,7412	6403658,3238
6936324,3520	6866961,1085	6798291,4974	6730308,5824	6663005,4966	6596375,4416	6530411,6872	6465107,5703	6400456,4946
6932856,1898	6863527,6279	6794892,3516	6726943,4281	6659673,9938	6593077,2539	6527146,4814	6461875,0165	6397256,2664
6929389,7617	6860095,8641	6791494,9055	6723579,9564	6656344,1568	6589780,7153	6523882,9081	6458644,0790	6394057,6382
6925925,0668	6856665,8162	6788099,1580	6720218,1664	6653015,9848	6586485,8249	6520620,9667	6455414,7570	6390860,6094
6922462,1043	6853237,4833	6784705,1084	6716858,0573	6649689,4768	6583192,5820	6517360,6562	6452187,0496	6387665,1791
6919000,8732	6849810,8645	6781312,7559	6713499,6283	6646364,6320	6579900,9857	6514101,9758	6448960,9561	6384471,3465
6915541,3728	6846385,9591	6777922,0995	6710142,8785	6643041,4497	6576611,0352	6510844,9249	6445736,4756	6381279,1109
6912083,6021	6842962,7661	6774533,1384	6706787,8071	6639719,9290	6573322,7297	6507589,5024	6442513,6074	6378088,4713
6908627,5603	6839541,2847	6771145,8719	6703434,4132	6636400,0690	6570036,0683	6504335,7076	6439292,3506	6374899,4271
6905173,2465	6836121,5141	6767760,2989	6700082,6959	6633081,8690	6566751,0503	6501083,5398	6436072,7044	6371711,9773
6901720,6599	6832703,4533	6764376,4188	6696732,6546	6629765,3280	6563467,6748	6497832,9980	6432854,6680	6368526,1214
6898269,7996	6829287,1016	6760994,2306	6693384,2883	6626450,4454	6560185,9409	6494584,0815	6429638,2407	6365341,8583
6894820,6647	6825872,4580	6757613,7335	6690037,5961	6623137,2202	6556905,8480	6491336,7895	6426423,4216	6362159,1874

6361854,8606	6298236,3120	6235253,9489	6172901,4094	6111172,3953	6050060,6714	5989560,0647	5929664,4640	5870367,8194
6358673,9332	6295087,1939	6232136,3219	6169814,9587	6108116,8091	6047035,6410	5986565,2846	5926699,6318	5867432,6355
6355494,5962	6291939,6503	6229020,2538	6166730,0512	6105062,7507	6044012,1232	5983572,0020	5923736,2820	5864498,9191
6352316,8489	6288793,6805	6225905,7436	6163646,6862	6102010,2194	6040990,1172	5980580,2160	5920774,4138	5861566,6697
6349140,6905	6285649,2836	6222792,7908	6160564,8629	6098959,2142	6037969,6221	5977589,9259	5917814,0266	5858635,8864
6345966,1202	6282506,4590	6219681,3944	6157484,5804	6095909,7346	6034950,6373	5974601,1309	5914855,1196	5855706,5684
6342793,1371	6279365,2057	6216571,5537	6154405,8381	6092861,7798	6031933,1620	5971613,8303	5911897,6920	5852778,7151
6339621,7405	6276225,5231	6213463,2679	6151328,6352	6089815,3489	6028917,1954	5968628,0234	5908941,7432	5849852,3258
6336451,9297	6273087,4104	6210356,5363	6148252,9709	6086770,4412	6025902,7368	5965643,7094	5905987,2723	5846927,3996
6333283,7037	6269950,8667	6207251,3580	6145178,8444	6083727,0560	6022889,7854	5962660,8876	5903034,2787	5844003,9359
6330117,0619	6266815,8912	6204147,7323	6142106,2550	6080685,1925	6019878,3405	5959679,5571	5900082,7616	5841081,9339
6326952,0033	6263682,4833	6201045,6585	6139035,2019	6077644,8499	6016868,4014	5956699,7173	5897132,7202	5838161,3930
6323788,5273	6260550,6421	6197945,1356	6135965,6843	6074606,0274	6013859,9672	5953721,3675	5894184,1538	5835242,3123
6320626,6331	6257420,3667	6194846,1631	6132897,7014	6071568,7244	6010853,0372	5950744,5068	5891237,0617	5832324,6911
6317466,3197	6254291,6565	6191748,7400	6129831,2526	6068532,9401	6007847,6107	5947769,1345	5888291,4432	5829408,5288
6314307,5866	6251164,5107	6188652,8656	6126766,3370	6065498,6736	6004843,6869	5944795,2500	5885347,2975	5826493,8245
6311150,4328	6248038,9285	6185558,5392	6123702,9538	6062465,9243	6001841,2650	5941822,8524	5882404,6238	5823580,5776
6307994,8576	6244914,9090	6182465,7599	6120641,1023	6059434,6913	5998840,3444	5938851,9409	5879463,4215	5820668,7873
6304840,8601	6241792,4515	6179374,5270	6117580,7818	6056404,9739	5995840,9242	5935882,5150	5876523,6898	5817758,4529
6301688,4397	6238671,5553	6176284,8398	6114521,9914	6053376,7715	5992843,0037	5932914,5737	5873585,4280	5814849,5737
6298537,5955	6235552,2195	6173196,6973	6111464,7304	6050350,0831	5989846,5822	5929948,1164	5870648,6353	5811942,1489

5811664,1412	5753547,4998	5696012,0248	5639051,9045	5582661,3855	5526834,7716	5471566,4239	5416850,7597	5362682,2521
5808758,3091	5750670,7260	5693164,0198	5636232,3786	5579870,0548	5524071,3542	5468830,6407	5414142,3343	5360000,9109
5805853,9200	5747795,3907	5690317,4367	5633414,2624	5577080,1198	5521309,3186	5466096,2254	5411435,2631	5357320,9105
5802951,0030	5744921,4930	5687472,2780	5630597,5553	5574291,5797	5518548,6639	5463363,1773	5408729,5455	5354642,2500
5800049,5275	5742049,0322	5684628,5419	5627782,2565	5571504,4339	5515789,3896	5460631,4957	5406025,1807	5351964,9289
5797149,5027	5739178,0077	5681786,2276	5624968,3653	5568718,6817	5513031,4949	5457901,1799	5403322,1681	5349288,9464
5794250,9280	5736308,4187	5678945,3345	5622155,8812	5565934,3224	5510274,9791	5455172,2293	5400620,5070	5346614,3020
5791353,8025	5733440,2645	5676105,8618	5619344,8032	5563151,3552	5507519,8416	5452444,6432	5397920,1968	5343940,9948
5788458,1256	5730573,5444	5673267,8089	5616535,1308	5560369,7795	5504766,0817	5449718,4209	5395221,2367	5341269,0243
5785563,8965	5727708,2576	5670431,1750	5613726,8633	5557589,5946	5502013,6987	5446993,5617	5392523,6261	5338598,3898
5782671,1146	5724844,4035	5667595,9594	5610919,9998	5554810,7998	5499262,6918	5444270,0649	5389827,3643	5335929,0906
5779779,7790	5721981,9813	5664762,1614	5608114,5398	5552033,3944	5496513,0605	5441547,9299	5387132,4506	5333261,1261
5776889,8892	5719120,9903	5661929,7804	5605310,4826	5549257,3777	5493764,8040	5438827,1559	5384438,8844	5330594,4955
5774001,4442	5716261,4298	5659098,8155	5602507,8273	5546482,7490	5491017,9215	5436107,7423	5381746,6649	5327929,1983
5771114,4435	5713403,2990	5656269,2661	5599706,5734	5543709,5077	5488272,4126	5433389,6885	5379055,7916	5325265,2337
5768228,8863	5710546,5974	5653441,1314	5596906,7201	5540937,6529	5485528,2764	5430672,9936	5376366,2637	5322602,6010
5765344,7718	5707691,3241	5650614,4109	5594108,2668	5538167,1841	5482785,5122	5427957,6571	5373678,0805	5319941,2997
5762462,0994	5704837,4784	5647789,1037	5591311,2126	5535398,1005	5480044,1195	5425243,6783	5370991,2415	5317281,3291
5759580,8684	5701985,0597	5644965,2091	5588515,5570	5532630,4014	5477304,0974	5422531,0565	5368305,7459	5314622,6884
5756701,0779	5699134,0672	5642142,7265	5585721,2992	5529864,0862	5474565,4454	5419819,7909	5365621,5930	5311965,3771
5753822,7274	5696284,5001	5639321,6551	5582928,4386	5527099,1542	5471828,1627	5417109,8810	5362938,7822	5309309,3944

5309055,4296	5255964,8753	5203405,2265	5151371,1742	5099857,4625	5048858,8879
5306400,9018	5253336,8928	5200803,5239	5148795,4887	5097307,5338	5046334;4584
5303747,7014	5250710,2244	5198203,1221	5146221,0909	5094758,8800	5043811,2912
5301095,8275	5248084,8693	5195604,0206	5143647,9804	5092211,5006	5041289,3856
5298445,2796	5245460,8268	5193006,2186	5141076,1564	5089665,3948	5038768,7409
5295796,0570	5242838,0964	5190409,7154	5138505,6183	5087120,5621	5036249,3565
5293148,1590	5240216,6774	5187814,5106	5135936,3655	5084577,0018	5033731,2318
5290501,5849	5237596,5690	5185220,6033	5133368,3973	5082034,7133	5031214,3662
5287856,3341	5234977,7707	5182627,9930	5130801,7131	5079493,6960	5028698,7590
5285212,4059	5232360,2819	5180036,6790	5128236,3122	5076953,9491	5026184,4096
5282569,7997	5229744,1017	5177446,6607	5125672,1941	5074415,4721	5023671,3174
5279928,5148	5227129,2297	5174857,9374	5123109,3580	5071878,2644	5021159,4818
5277288,5506	5224515,6650	5172270,5084	5120547,8033	5069342,3253	5018648,9020
5274649,9063	5221903,4072	5169684,3731	5117987,5294	5066807,6541	5016139,5776
5272012,5813	5219292,4555	5167099,5310	5115428,5356	5064274,2503	5013631,5078
5269376,5750	5216682,8093	5164515,9812	5112870,8214	5061742,1132	5011124,6920
5266741,8867	5214074,4679	5161933,7232	5110314,3860	5059211,2421	5008619,1297
5264108,5158	5211467,4306	5159352,7563	5107759,2288	5056681,6365	5006114,8201
5261476,4615	5208861;6969	5156773,0800	5105205,3492	5054153,2957	5003611,7627
5258845,7233	5206257,2661	5154194,6934	5102652,7465	5051626,2190	5001109,9568
5256216,3005	5203654,1374	5151617,5961	5100101,4201	5049100,4059	4998609,4019

Table III

BIBLIOGRAPHIE

[E.U.]	Encyclopaedia Universalis
[C]	CANTOR (Moritz) Vorlesungen über Geschichte der Mathematik Tome II - réed. : TEUBNER 1965.
[N]	NAUX Charles - Histoire des Logarithmes Blanchard 1966.
[EDWARDS]	EDWARDS C.N. Jr- The Historical Development of the Calculus Springer 1957.
[STRUIK]	STRUIK D.J. - A source Book in mathematics 1200-1800 Princeton University - Press 1969

Klaus VOLKERT

LA QUADRATURE DE L'HYPERBOLE ET LES LOGARITHMES

Introduction

Dans le texte suivant je vais exposer la méthode de Grégoire de Saint Vincent pour effectuer la quadrature de l'hyperbole. Dans la première partie on trouve les idées de Grégoire formulées dans un langage moderne. Je n'ai pas donné de citations, parce que le livre de Grégoire est très rare (il existe un exemplaire à Strasbourg) et difficile à comprendre (le livre est écrit en latin et sans usage du symbolisme moderne). J'ai donné quelques indications historiques. Pour le contexte historique on peut consulter des livres sur l'histoire de l'analyse (par exemple EDWARDS 1982, VOLKERT 1988, ou PEIFFER-DAHAN DALMEDICO 1986). J'espère que la méthode de Grégoire est praticable à l'école ayant l'avantage d'être plus intuitive et plus convaincante que les méthodes en usage aujourd'hui. Dans la deuxième partie de mon texte je vais démontrer les propriétés les plus importantes de la fonction logarithme en essayant d'être aussi intuitif que possible.

I. PARTIE

1 . En principe, il y a deux possibilités pour l'introduction de la fonction logarithme : on peut commencer par la fonction exponentielle et définir la fonction logarithme comme la fonction inverse de la fonction exponentielle. Je ne parlerai pas ici de cette possibilité.

On peut commencer aussi par la fonction logarithme et définir la fonction exponentielle comme fonction inverse de la fonction logarithme. La fonction logarithme elle-même est obtenue par une intégration : elle est la fonction primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ (géométriquement parlant c'est l'hyperbole). C'est une idée qui est bien située historiquement :

"Le principe fondamental est le suivant : la source adéquate de l'introduction des fonctions nouvelles est la quadrature des courbes connues. Cette manière convient d'une part, comme j'ai démontré, aux faits historiques, d'autre part aux procédés dans les mathématiques supérieures".

KLEIN, 1924, 168

Je vais citer un livre d'école allemand (classe 12 ≅ classe terminale) pour faire voir la réalité scolaire de cette possibilité (WÖRLE/KRATZ/KEIL, 1981 ; 265-269). On définit la fonction $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ et on observe les propriétés suivantes :

1) $L(x)$ est l'aire sous l'hyperbole entre les bornes 1 et x par conséquent on a $L(1) = 0$

2) $L'(x) = \frac{1}{x}$ (Conséquence directe de la définition et du théorème fondamental de l'analyse).

3) $L'(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$

C'est-à-dire que les fonctions $L(ax)$ et $L(x)$ ont la même fonction dérivée. D'où s'ensuit qu'il existe une constante C avec $L(ax) + C = L(x)$ (c'est une conséquence du théorème des accroissements finis). Pour $x = 1$ on a : $L(a) + C = L(1) = 0$

$$C = -L(a)$$

c'est-à-dire $L(ax)-L(a) = L(x)$

Pour x = b on obtient l'équation caractéristique :

$$\boxed{L(ab) = L(a) + L(b)}$$

4) On a $L(a^n) = L(a. \ldots .a) = L(a) + \ldots + L(a) = n . L(a)$, d'où s'ensuit
$q . L(a^{p/q}) = L(a^{p/q \cdot q}) = L(a^p) = pL(a)$
ou $L(a^{p/q}) = \frac{p}{q} L(a)$.

Il faut postuler la dernière égalité pour tout $r \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{L(x^r) = r . L(x)}$$

3) et 4) sont les propriétés caractéristiques de la fonction logarithme (je vais les discuter dans la deuxième partie de mon texte). Le miracle est parfait : un jeu avec des symboles mène à un résultat étonnant. Les élèves ne sont pas convaincus par cette démonstration : parce qu'elle ne donne aucune idée intuitive.

2. Je veux esquisser maintenant une alternative. L'idée derrière cette alternative est simple : à un certain moment dans l'histoire des mathématiques, quelqu'un a trouvé le fait que les aires sous l'hyperbole sont données par des logarithmes dans leur définition originelle, celle de Neper, qui a longtemps été la seule utilisée.

Par exemple voici la définition donnée par d'Alembert dans l'Encyclopédie.

"Logarithme : nombre d'une progression arithmétique, lequel répond à un autre nombre dans une progression géométrique.

Pour faire comprendre la nature des logarithmes, d'une manière bien claire et bien distincte, prenons les deux espèces de progression qui ont donné naissance à ces nombres ; savoir, la progression géométrique, et la progression arithmétique ; supposons donc que les termes de l'une soient directement posés sous les termes de l'autre ; comme on le voit dans l'exemple suivant :

1	*2*	*4*	*8*	*16*	*32*	*64*	*128*
0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*

en ce cas, les nombres de la progression inférieure qui est arithmétique sont ce que l'on *appelle les logarithmes des termes de la progression géométrique qui est au-dessus, c'est-à-dire que 0 est le logarithme de 1, 1 est le logarithme de 2, 2 est le logarithme de 4, et ainsi de suite. Ces logarithmes ont été inventés pour rendre le calcul expéditif, comme on le verra plus bas"*

Comment est-on passé de cette idée des logarithmes à celle donnée aujourd'hui sous forme de primitive de $\frac{1}{x}$? Il y a là une hypothèse sousjacente, à savoir : La situation de ce mathématicien est comparable à la situation où se trouvent nos élèves aujourd'hui. La manière dans laquelle on a attaqué (et résolu) un problème dans l'histoire est souvent la manière la plus intuitive et la plus concrète.

Ce passage a été réalisé par un mathématicien appelé Grégoire de Saint Vincent (ou Gregorius a San Vincento), un jésuite belge qui a vécu de 1584 jusqu'à 1667. (Pour la vie de Grégoire on peut consulter : Dictionary of Scientific Biography, volume XII ; 74-76 par J.E. HOFMANN ou BOSMANS, 1911/13. Pour la bibliographie des écrits sur Grégoire il faut comparer VAN LOOY, 1980).

Grégoire est presque oublié aujourd'hui, mais il était un savant bien connu à son époque. Il a écrit un très grand livre : *l'Opus Geometricum* (paru à Anvers en 1647, mais écrit dans les années 20). Ce livre, qui est composé de 1250 pages contient une méthode d'exhaustion nouvelle et beaucoup de résultats intéressants sur les coniques.(Pour l'Opus Geometricum on peut consulter KÄSTNER, 1796-1800 (Bd-II), BOPP, 1907 et HOFMANN, 1941).

La nouvelle méthode était appliquée par Grégoire à des problèmes sur les aires des coniques (on y trouve un livre sur le cercle(Liv III), sur la parabole (IV), sur l'Ellipse (V) et sur l'hyperbole (VI).)

Elle est oubliée maintenant (je suppose qu'il n'y a plus personne aujourd'hui qui connaît le contenu de l'Opus. C'est un vrai devoir pour un historien des maths.[1]

Mais le livre de Grégoire contient aussi un livre dix : *"De ipsa circuli quadratura"*. Dans ce livre, on trouve une quadrature (fausse bien entendu) du cercle seulement à l'aide de la règle et du compas. Cette présentation grégorienne était fortement critiquée (par exemple par Huygens qui a écrit un livre fameux - son chef d'œuvre en maths - sur la quadrature des coniques, par Fermat, Descartes et d'autres). Il y avait aussi une critique de Mersenne

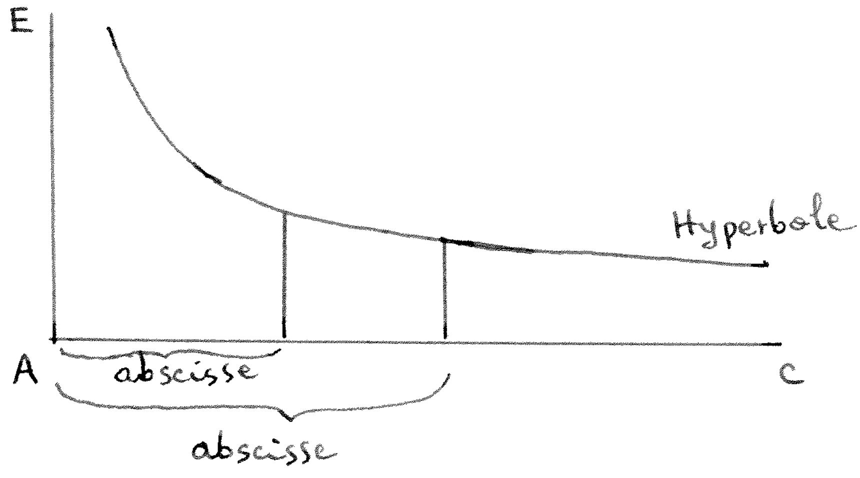
[1] *En passant je veux remarquer que Leibniz a étudié les idées de Grégoire. Elles étaient une des sources de son calcul infinitésimal.*

dans ses "Réflexions physico-mathématiques" (tome III, 1647). Là Mersenne proposera imprudemment l'idée suivante : pour résoudre la quadrature du cercle il suffit d'achever la construction suivante :

"Connaissant trois grandeurs quelconques, rationnelles ou irrationnelles et le logarithme de deux d'entre elles, en déduire le logarithme de la troisième".

Ce problème, qui n'est pas du tout équivalent à la quadrature du cercle (construction à la règle et au compas), étaient résolu deux ans après par un ami de Grégoire : Alfons Antoine de Sarasa (1618-1667) dans son *"Solutio. problematis a R.P. Marino Mersenno Minimo Propositi"* (paru à Anvers en 1649.)[1] On n'est pas sûr du rôle de Grégoire à propos de cet ouvrage : Sarasa était un prêtre bien connu (jésuite comme Grégoire et Cavalieri), mais un mathématicien médiocre. On ne peut pas exclure la possibilité que Grégoire lui-même était l'auteur de la réponse à Mersenne. Dans l'ouvrage de Sarasa on trouve une formulation qui constate explicitement un lien entre les aires sous l'hyperbole et les logarithmes. Bien entendu, ce lien se trouve aussi dans l'Opus, mais il n'est pas explicité ; Grégoire ne parle jamais des logarithmes !.

3. Maintenant je veux esquisser la quadrature de l'hyperbole chez Grégoire. L'hyperbole était définie chez les anciens (par exemple chez Appolonius) comme une conique, c'est-à-dire comme intersection d'un plan et d'un cône (double). C'était une définition géométrique et synthétique qui n'était pas du tout commode pour des calculs (souvenez vous de la quadrature de la parabole par Archimède !). Il est très intéressant que Grégoire use d'une sorte de coordonnées (dans les années vingts - "La Géométrie" de Descartes est parue en 1637) : étant donné une hyperbole (équilatère), il considère ses asymptotes. Les abscisses (vient de "*abscindere*" qui signifie "*couper*") sont les morceaux d'une de ces asymptotes, qui sont limitées par des parallèles à l'autre asymptote



[1](*Pour la personne de Sarasa, on peut consulter la Biographie nationale Belge (article par Bosmans), son ouvrage est décrit dans Kästner, 1796-1800 (Bd.3)).*

C'est un système de coordonnées canonique qui dépend de la courbe. Maintenant Grégoire peut caractériser l'hyperbole par une propriété analytique :

Pour tous les points sur l'hyperbole le produit de l'abscisse et de l'ordonnée (il parle de la parallèle) est constant (par exemple égal à 1).

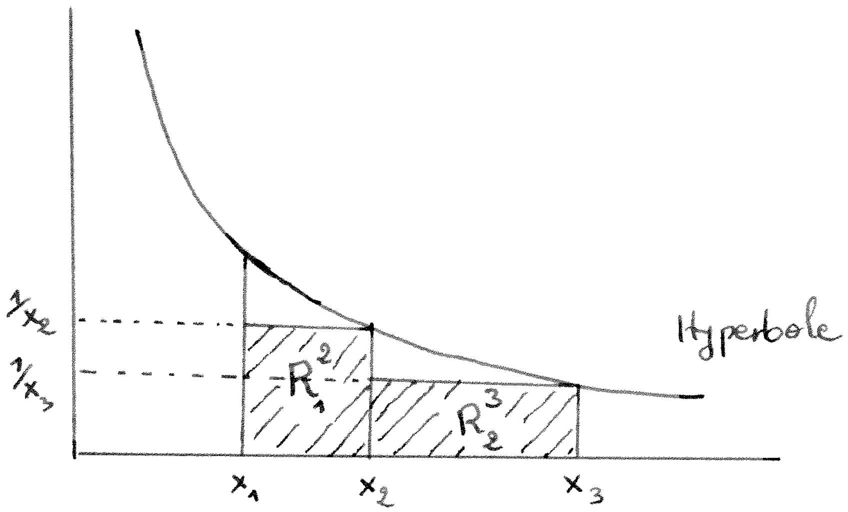
L'inverse est vrai aussi :

Si deux points sont tels que le produit des abscisses et des ordonnées donne toujours le même nombre, ces deux point se trouvent sur une hyperbole.:
(Grégoire parle des rectangles qui sont formés par les abscisses et les ordonnées).

Intuitivement parlant, Grégoire a trouvé la propriété suivante : si on augmente l'abscisse d'un point sur l'hyperbole, on diminue son ordonnée dans la même mesure ! Dans notre langage moderne, Grégoire a découvert la caractérisation de l'hyperbole h(x) par une équation fonctionnelle. Pour tous les x et y, on a

$$\boxed{xh(x) = y\,h(y)\ (= 1)}$$

Une conséquence immédiate de cette idée est la proposition suivante : Soient x_1, $x_2$et x_3 trois abscisses et R_1^2 R_2^3 les rectangles qui sont formés par les ordonnées et les abscisses des points sur l'hyperbole correspondants à ces abscisses.



On a $R_1^2 = (x_2 - x_1) \cdot \frac{1}{x_2} = 1 - \frac{x_1}{x_2}$ $\qquad R_2^3 = (x_3 - x_2) \cdot \frac{1}{x_3} = 1 - \frac{x_2}{x_3}$

Les aires des rectangles R_1^2 et R_2^3 sont égales, si et seulement si les fractions $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{x_2}{x_3}$ sont égales, c'est-à-dire si et seulement si les trois abscisses x_1, x_2 et x_3 forment une progression géométrique.

4. Maintenant nous avons trouvé la clé pour la quadrature de l'hyperbole. C'est l'exhaustion par des suites géométriques. Considérons les rectangles curvilignes

$$A_{x_1}^{x_2} \text{ et } A_{x_2}^{x_3}$$

limités par des abscisses x_1 et x_2 ou x_1 et x_3, leurs ordonnées et la courbe. Un coup d'œil nous mène à la conjecture suivante. On a

$$A_{x_1}^{x_2} = A_{x_2}^{x_3}$$

si et seulement si x_1, x_2 et x_3 sont en progression géométrique.

Cette hypothèse est le contenu des propositions 109 et 130 du dixième livre de l'*Opus Geometricum*. Ici nous nous occupons seulement de l'énoncé. "*Quand les abscisses croissent en progression géométrique, les aires croissent en progression arithmétique*" (Prop. 109)

Démonstration :

Il suffit de considérer deux aires. Le reste se fait par induction. Soient x_1, x_2 et x_3 trois abscisses en progression géométrique, et soient

$$A_{x_1}^{x_2} \text{ et } A_{x_2}^{x_3}$$

les rectangles curvilignes. Nous avons vu plus haut, qu'on a dans cette situation l'égalité $R_1^2 = R_2^2$. Entre x_1 et x_2 nous intercalons la moyenne géométrique $\sqrt{x_1 x_2}$, entre x_2 et x_3 nous intercalerons la moyenne géométrique $\sqrt{x_2 x_3}$. Les quatre rectangles qu'on obtient ainsi sont tous égaux. Maintenant on peut itérer ce processus. Nous construisons ainsi une exhaustion des deux aires cherchées par des rectangles aux contenus égaux. Par conséquent les aires cherchées sont égales.

D'où s'ensuit que l'aire $A_{x_1}^{x_3}$ est égale à $2\ A_{x_1}^{x_2}$ C.Q.F.D.

Commentaires :

1° On peut généraliser ce théorème facilement de la manière suivante :
Si on a $\frac{x1}{x2} = \left(\frac{x2}{x3}\right)^K$, on a aussi :

$$A_{x_1}^{x_2} = k\,.A_{x_2}^{x_3}$$

2° D'un point de vue moderne, il faut mentionner qu'on suppose dans la démonstration donnée en haut l'existence des limites. Mais le reste de l'argument donné en haut est très simple ; parce qu'on a deux suites qui sont identiques aussi (une suite convergente ne peut avoir qu'une seule limite).

5. Mais quelque chose qui transforme des suites géométriques dans des suites arithmétiques, est (du point de vue des anciens) un logarithme. Sarasa dit : (dans la proposition 10) : *"Donc ces aires peuvent servir de logarithme"*. Pour comprendre mieux cet argument, il faut se rappeler la définition des logarithmes usitée par les anciens et donnée au début.
L'idée de définir les logarithmes comme des exposants ne se trouve pas avant Euler. C'était lui qui l'a donné dans le paragraphe 102 de son célèbre - *Introductio in analysin infinitorum* - (1748).

D'un point de vue moderne il paraît souhaitable de caractériser les logarithmes par l'équation fonctionnelle

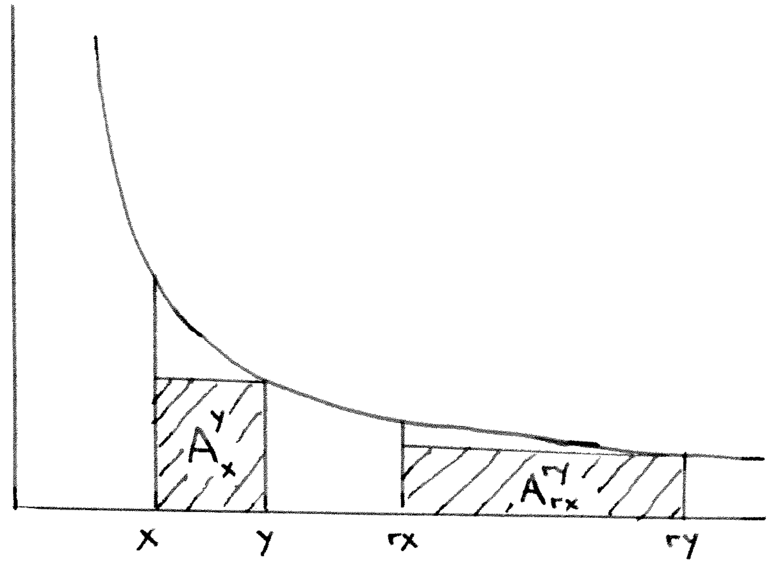
$$\boxed{L(xy) = L(x) + L(y)}$$

(pour le développement des équations fonctionnelles comparez DHOMBRES, 1986). On ne trouve pas de telles considérations ni chez Grégoire ni chez Sarasa (la présentation de cette histoire qu'on trouve chez EDWARDS, 1982 ; 154-158 et chez VOLKERT, 1988 ; 78-81 est une reconstitution moderne). La raison en est simplement qu'on ne s'intéressait pas à cette équation à l'époque de Grégoire. Mais on peut déduire facilement l'équation désirée à l'aide des outils grégoriens.

6. Il faut établir d'abord un lemme.

Lemme : Soient x,y deux abscisses et x un nombre réel plus grand que ou égal à 1. Alors on a :

$$A_{rx}^{ry} = A_x^y$$



Démonstration :

Nous commençons l'exhaustion de l'aire A_x^y par le rectangle indiqué au-dessus.Son aire est $(y - x)\frac{1}{y} = 1 - \frac{x}{y}$. L'exhaustion de $A_{rx}^{ry} = A_x^y$ est commencée par le rectangle indiqué avec l'aire$(ry - rx)\frac{1}{ry} = 1 - \frac{x}{y}$.

Les aires des deux rectangles sont égales. Maintenant on insère les moyennes géométriques entre x et y et entre rx et ry. Ainsi nous trouvons quatre rectangles égaux. Et ainsi de suite.

7. Maintenant nous pouvons démontrer l'équation caractéristique de la fonction logarithmique. Soit L(x) la fonction A_1^x (c'est-à-dire l'aire sous l'hyperbole entre 1 et x. Nous calculons L(xy) :

$L(xy) \overset{(1)}{=} A_1^{xy} \overset{(2)}{=} A_1^x + A_1^{xy} \overset{(3)}{=} A_1^x + A_1^y \overset{(1)}{=} L(x) + L(y)$((1) par définition, (2) additivité des aires, (3) par notre lemme).

Indiquons en passant que Jean Dhombres a donné une autre manière d'arriver à l'équation caractéristique (DHOMBRES, 1986, 144/145), qui est plus élégante, mais aussi moins intuitive.
Soient donnés x et y. On a

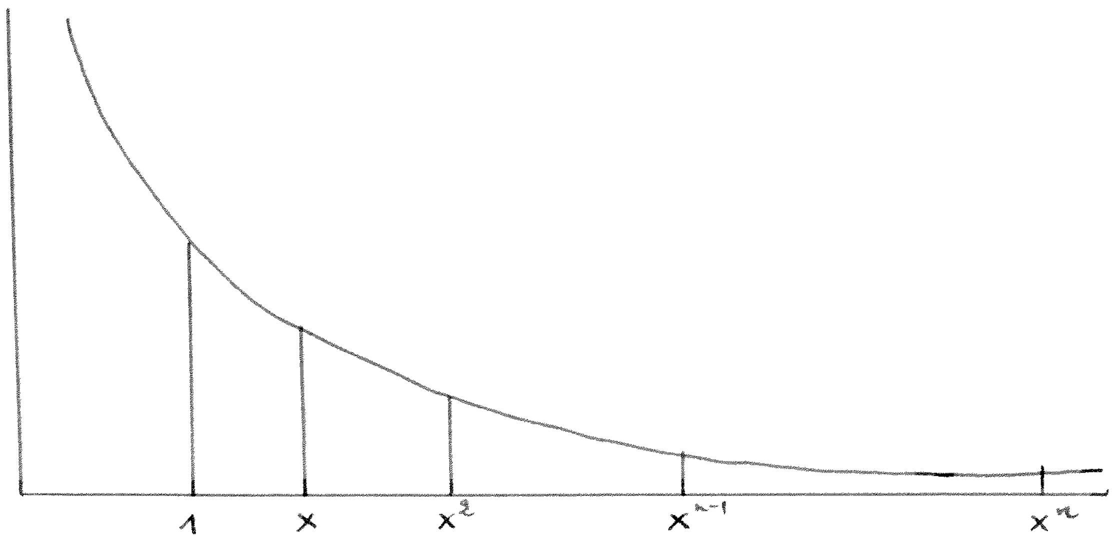
$$A_x^{\sqrt{xy}} = A_{\sqrt{xy}}^{y} \quad \text{ou} \quad A_1^{\sqrt{xy}} - A_1^x = A_1^y - A_1^{\sqrt{xy}} \quad \text{d'ou s'ensuit} \quad A_1^{\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}\left(A_1^y + A_1^x\right)$$

En particulier, on obtient pour x = 1, y = x l'égalité

$$\boxed{A_1^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} A_1^x}$$

(x) étant un nombre réel quelconque plus grand que ou égal à 1).
Il suit que $A_1^x + A_1^y = 2\, A_1^{\sqrt{xy}} = A_1^{xy}$ C.Q.F.D.

8. Une conséquence immédiate de l'équation caractéristique est la formule
$L(x^n) = n \,.\, L(x) \quad (n \in \mathbb{Z})$
Si on veut, on peut démontrer cette équation aussi d'une manière plus géométrique. Comparez la figure suivante :



On a

$$\begin{aligned} L(x^n) &\overset{(1)}{=} A_1^{x^n} \overset{(2)}{=} A_1^x + A_x^{x^2} + \ldots + A_{x^{n-1}}^{x^n} \\ &\overset{(3)}{=} A_1^x + A_1^x + \ldots + A_1^x = n \,.\, A_1^x \overset{(4)}{=} n \,.\, L(x) \end{aligned}$$

((1) par définition, (2) additivité des aires, (3) par le lemme) C Q.F.D.

Les suites géométriques sont vraiment un outil universel dans le cas de l'hyperbole !
La généralisation au cas des exposants négatifs n'est pas difficile ; il suffit d'adapter toutes les considérations données à l'intervalle]0,1].

On peut généraliser cette formule au cas des exposants rationnels : soient p et q des nombres entiers. Alors on a:

$$L\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} L(x)$$

Démonstration :

$$q \,.\, L\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = L\left(x^{q.\frac{p}{q}}\right) = L\left(x^{p}\right) = p \,.\, L(x) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Maintenant il faut postuler la validité de la formule en haut pour tous les exposants réels.

9. Nous avons vu que la fonction $L(x) = A_1^x$ est caractéristique des propriétés suivantes :
$L(xy) = L(x) + L(y)$
$L(x^{\pi}) = \pi\, L(x)$
Une telle fonction est appelée une fonction logarithme. Si les élèves connaissent les logarithmes comme opération inverse de l'exponentiation, on peut démontrer que la nouvelle fonction logarithme L(x) est en effet une fonction logarithme dans le vieux sens de ce mot (voir n° 2). Dans la deuxième partie de cet exposé je veux étudier quelques propriétés de la fonction L(x).

II PARTIE

10. On peut déduire immédiatement de la définition de la fonction L :
L(1) = 0, L(x) > 0 si x > 1 et L est une fonction strictement monotone croissante.

11. On a $L(\frac{x}{y}) = L(x) - L(y)$.
C'est un corollaire de l'équation L(xy) = L(x) + L(y) :

$$L(x) = A_1^x = A_1^{x \cdot \frac{x}{y}} = A_1^y + A_1^{\frac{x}{y}} = L(y) + L\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

12. L'équivalence des nouveaux logarithmes et des vieux logarithmes est démontrée de la manière suivante :
Supposition : Soient x et β deux nombres réels et positifs. Alors il existe un nombre réel α avec : $x = \beta^{\alpha}$
Le nombre α est appelé "logarithme de x dans la base β " et noté $\log_{\beta}x$. On a l'équation suivante : $x = \beta^{\log_{\beta}x}$

Nous appliquons la fonction L à cette équation :
$L(x) ,= L(\beta^{\log_{\beta}x}) = (\log_{\beta}x) \cdot L(\beta)$
c'est-à-dire que la nouvelle fonction à gauche et la vieille fonction $\log_{\beta}x$ ne se distinguent que par la valeur constante $L(\beta)$. Il semble très naturel de chercher un nombre β_0 tel qu'on a l'équation simple $L(x) = \log_{\beta_0}x$.

C'est le cas si et seulement si $L(\beta_0) = 1$. On sait qu'un tel nombre β_0 existe, parce que la fonction L prend la valeur 1 (L est continue - nous allons démontrer ça tout de suite ; L croissante strictement monotone et L n'est pas bornée supérieurement). Nous allons calculer le nombre β_0 dans le numéro **15**.

13. La fonction L est différentiable et on a $L'(x) = \frac{1}{x}$. C'est une conséquence immédiate du théorème fondamental de l'analyse, mais on peut démontrer cette proposition aussi d'une manière plus directe).
On a :

$$\lim_{k\to0}\frac{L(x+k)-L(x)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}L\left(1+\frac{k}{x}\right)$$

$$=(1)\lim_{k\to0}\left(\frac{x}{k}L\left(1+\frac{k}{x}\right)\right)$$

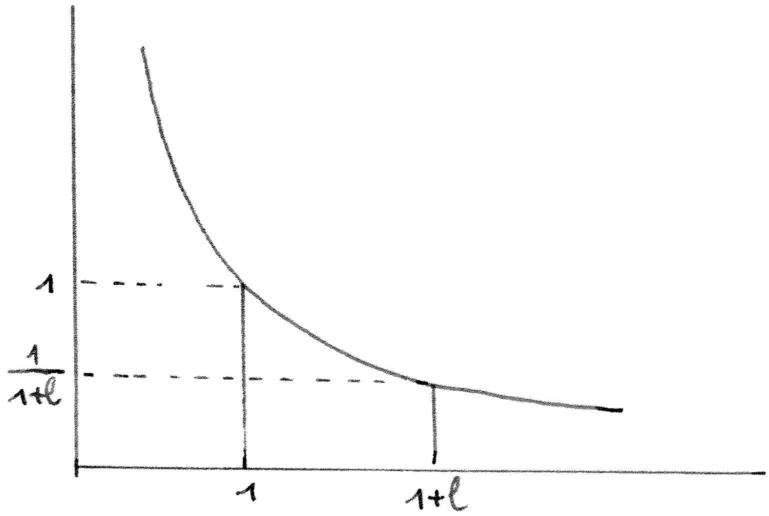
$$\overset{*}{=}\left(\frac{1}{x}\right)\lim_{\ell\to0}\left(\frac{1}{\ell}L(1+\ell)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x}\right)\lim_{\ell\to0}\frac{L(1+\ell)-L(1)}{\ell}$$

* On a posé $\ell=\frac{k}{x}$

On constate : L est différentiable en x si et seulement si L est différentiable en 1.

Pour démontrer la différentiabilité de la fonction L pour x = 1 nous usons de la figure suivante :



D'où s'ensuit :

$$\ell.\frac{1}{1+\ell}\le A_1^{1+\ell}\le\ell\ \text{ ou }\ \frac{1}{1+\ell}\le\frac{L(1+\ell)-L(1)}{\ell}\le1$$

Pour $\ell\to0$ on obtient :

$$\lim_{\ell\to0}\frac{1}{1+\ell}\le\lim_{1\to0}\frac{L(1+\ell)-L(1)}{\ell}\le1$$

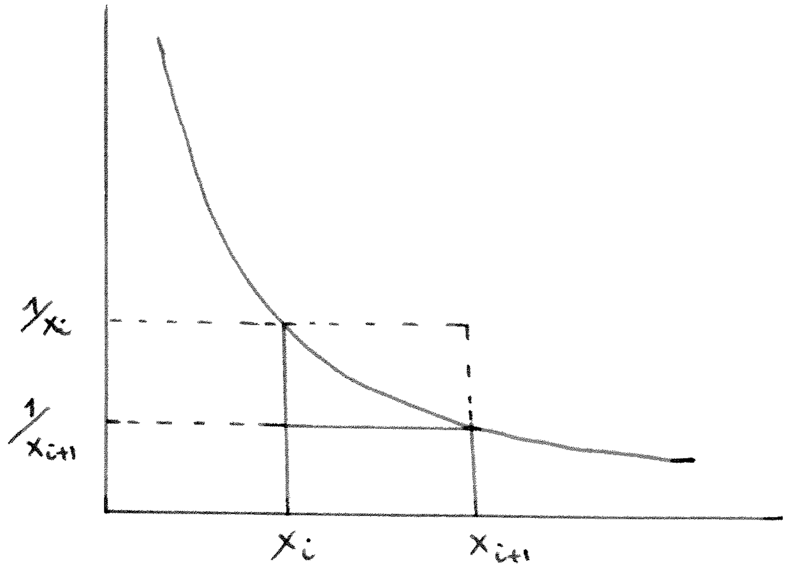
ou

$$1=\lim_{\ell\to0}\frac{L(1+\ell)-L(1)}{\ell}=L'(1)$$

(Il existe ici une petite difficulté, parce que nous n'avons usé que des valeurs plus grandes ou égales à 1 pour les variables x, y etc... C'est-à-dire que nous avons démontré seulement la différentiabilité à la droite en 1. Mais il est assez simple de compléter notre argument.)

Résultat : on a $\quad L'(x) = \dfrac{1}{x}$

14. Nous voulons déduire maintenant une formule pour le calcul des valeurs de la fonction L. Nous partons de la généralisation suivante de la figure plus haut :



On a :

$$\frac{1}{x_{i+1}}\left(x_{i+1} - x_i\right) \leq A_{x_i}^{x_{i+1}} \leq \frac{1}{x_i}\left(x_{i+1} - x_i\right)$$

ou

$$1 - \frac{x_i}{x_{i+1}} \leq A_{x_i}^{x_{i+1}} \leq \frac{x_{i+1}}{x_i} - 1$$

Soit x le point dont la valeur est à calculer. Nous usons d'une suite géométrique pour subdiviser l'intervalle $[1,x]$: $x_i = \sqrt[n]{x^i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Les x_i forment une suite géométrique parce qu'on a :

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \qquad (i = 1, \ldots, n - 1)$$

D'autre part on obtient de la définition de la fonction L :

$$A_{x_i}^{x_{i+1}} = L(x_i) \leq \frac{x_{1+1}}{x_i} - 1$$

Nous obtenons ainsi un système d'inégalités :

$$1 - \frac{x_i}{x_{i+1}} \leq L(x_{i+1}) - L(x_i) \leq \frac{x_{i+1}}{x_i} - 1$$

ou

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq L(x_{i+1}) - L(x_i) \leq \sqrt[n]{x} - 1 \qquad (i = 1, \ldots, n - 1)$$

La somme de toutes ces inégalités est :

$$n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) \leq L(x) - L(1) \leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

Maintenant il faut vérifier trois choses :

- $n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)$ croissante strictement monotone en n ;
- $n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ décroissante strictement monotone en n et
- leur différence est une suite qui tend vers zéro.

Ce sont des conséquences du fait que

$$\lim_{n \to 0} \sqrt[n]{x} = 1$$

Remarque pratique :

On choisit pour n une puissance de 2, parce qu'on peut ainsi utiliser la touche "√" sur la calculatrice de poche. Si on prend $n = 2^{10}$ et si x est un nombre de l'intervalle [1,10], on obtient les valeurs de L(x) avec une erreur plus petite que 0,0052.

15. Pour terminer nous voulons déterminer la valeur de β_0. Nous partons de l'équation :

$$H'(x) = \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \frac{x}{k} L\left(1 + \frac{k}{x}\right)$$

Pour $k \to 0$ nous choisissons la suite $\frac{x}{n}$ (avec x constant), qui tend vers zéro si n tend vers l'infini. On obtient ainsi :

$$\frac{1}{x} = L'(x) = \frac{1}{x} \lim_{n \to \infty} L\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

D'où s'ensuit

$$\lim_{n \to \infty} L\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = 1$$

Parce que la fonction L est continue et strictement monotone (et a fortiori injective), on a aussi

$$L\left(\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) = 1$$

c'est-à-dire que la valeur cherchée β_0 est la limite

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Nous avons trouvé que β_0 est le fameux nombre d'Euler, qui est symbolisé par e

BIBLIOGRAPHIE

BOPP. K — Die Kegelschnitte des G. a Sancto Vincentio in vergleichender Bearbeitung. Dans "Abhandlungen der Geschichte der Mathematischen Wissenschaften". 20(2), (1907), 88-314

BOSMAN. H — Sur la vie de G. de Saint Vincent. Dans : Biographie nationale belge 21, (1911-1913) ; 141- 171

DHOMBRES. J — Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept.de fonction. (Archiv for History of Exact Science). Vol. 36 Année 1986.

EDWARDS. C.H. — The Historical Development of the Calculus. (New York - Berlin Heidelberg).1982

HOFMANN. J.E. — Das Opus Geometrium des G. a Santo Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz. Dans : "Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften." Mathematisch - naturwissenschaftliche Klasse 13. 1941.

HUYGENS. C.H.R. — Examen de la Cyclométrie du très savant Grégoire de Saint Vincent. S.J. Dans Oeuvres complètes. Tome 11 (La Haye, 1908) ; 314-337.

HUYGENS. C.H.R. — Théorème sur la quadrature de l'hyperbole, de l'ellipse et cercle,déduite de la position donnée au centre de gravité des segments. Dans Oeuvres complètes. Tome 11 (La Haye, 1908) ; 282-313.

KASTNER. A.G. — 1796-1800. Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis auf Ende des 18.Jahrhunderts Göttingen) 4 Bde - Reprint Hildesheim, 1970.

PEIFFER. J./DAHAN-DALMEDICO. 1986. Une histoire des Mathématiques (Paris).

VAN LOOY, HERMAN Chronologie et analyse des manuscrits mathématiques de Grégoire de Saint Vincent (1584-1667). Dans : Archivum Historicum Societatis Jesu 49, (1980) ; 279-303.

VOLKERT. K. 1988. Geschichte der Analysis (Mannheim/Wien/Zürich)

WÖRLE. K/KRATZ/KEIL K.A. 1981. Infinitesimalrechnung (München)

Titre : **Histoire des mathématiques pour nos classes**

Sommaire :

Evolution de la numération	S.HAEGEL
Le tunnel de SAMOS	M.& Mme CHANTRIAUX
Méthode de fausse position	M. WOLF
La méthode de double fausse position	SARROUY
L'invention des logarithmes par NEPER (traduction et commentaires à partir d'un texte anglais)	J.M. ULRICH
La quadrature de l'hyperbole et les logarithmes	K. VOLKERT

Résumé :

On trouvera dans cette brochure plusieurs articles concernant l'histoire des mathématiques et faits (à l'exception du dernier sur la quadrature de l'hyperbole) par des professeurs de lycée et collège. Ils ont été réalisés pour partie dans le cadre d'un stage PAF, pour partie par un groupe de Recherche-Formation de la MAFPEN, mais dans les deux cas sur le thème : l'histoire des mathématiques comme outil pédagogique. Ils peuvent donc intéresser les professeurs enseignant les mathématiques et qui voudraient illustrer leurs cours par quelques aspects historiques. Les articles regroupés ici concernent essentiellement des questions numériques, dont une part importante pour l'histoire des logarithmes.

Editeur :

I.R.E.M. de Strasbourg (Brochure S 140)