

V

P. P.			Log. x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.	
90	100	110	1,00	0,0	41 393	41 484	41 575	41 666	41 758	41 850	41 942	42 034	42 126	42 219	92
1 9	10	11	01		42 311	42 404	42 497	42 591	42 684	42 778	42 872	42 966	43 060	43 155	94
2 18	20	22	02		43 249	43 344	43 439	43 535	43 630	43 726	43 822	43 918	44 014	44 111	96
3 27	30	33			44 058	44 155	44 252	44 349	44 446	44 543	44 640	44 738	44 835	44 932	98
4 36	40	45			45 030	45 128	45 226	45 324	45 422	45 520	45 618	45 716	45 814	45 912	100
5 45	50	55			46 003	46 102	46 201	46 300	46 399	46 498	46 597	46 696	46 795	46 894	102
6 54	60	66			47 076	47 176	47 275	47 375	47 474	47 574	47 673	47 772	47 872	47 971	104
7 63	70	77			48 049	48 149	48 249	48 348	48 448	48 547	48 646	48 745	48 844	48 943	106
8 72	80	88			49 022	49 122	49 222	49 321	49 420	49 519	49 618	49 717	49 816	49 915	108
9 81	90	99			50 000	50 100	50 200	50 300	50 400	50 500	50 600	50 700	50 800	50 900	110
1 12	13	14	1,10	0,0	51 497	51 609	51 721	51 833	51 946	52 059	52 172	52 285	52 399	52 513	114
2 24	26	28	11		52 627	52 741	52 855	52 970	53 085	53 200	53 316	53 431	53 547	53 663	117
3 36	39	42	12		53 780	53 896	54 013	54 130	54 247	54 365	54 483	54 601	54 719	54 837	119
4 48	52	56	13		54 956	55 075	55 194	55 314	55 434	55 554	55 674	55 794	55 915	56 036	121
5 60	65	70	14		56 157	56 278	56 400	56 522	56 644	56 766	56 889	57 012	57 135	57 259	123
6 72	78	84			57 382	57 506	57 630	57 755	57 879	58 004	58 129	58 255	58 380	58 506	126
7 84	91	98	1,15	0,0	58 632	58 759	58 886	59 012	59 140	59 267	59 395	59 523	59 651	59 779	129
8 96	104	112	16		59 908	60 037	60 166	60 296	60 426	60 556	60 686	60 816	60 947	61 078	132
9 108	117	126	17		61 210	61 341	61 473	61 605	61 738	61 870	62 003	62 136	62 270	62 404	133
			18		62 537	62 672	62 806	62 941	63 076	63 211	63 347	63 483	63 619	63 755	137
			19		63 892	64 029	64 166	64 304	64 441	64 579	64 718	64 856	64 995	65 134	140
1 15	16	17	1,20	0,0	65 274	65 413	65 553	65 694	65 834	65 975	66 116	66 257	66 399	66 541	142
2 30	32	34	21		66 683	66 826	66 968	67 111	67 255	67 398	67 542	67 686	67 831	67 976	145
3 45	48	51	22		68 121	68 266	68 412	68 557	68 704	68 850	68 997	69 144	69 291	69 439	148
4 60	64	68	23		69 587	69 735	69 883	70 032	70 181	70 331	70 480	70 630	70 780	70 931	151
5 75	80	85			71 082	71 233	71 384	71 536	71 688	71 840	71 993	72 146	72 299	72 453	153
6 90	96	102	1,25	0,0	72 606	72 761	72 915	73 070	73 225	73 380	73 536	73 692	73 848	74 004	157
7 105	112	119	26		74 161	74 318	74 476	74 633	74 791	74 950	75 108	75 267	75 427	75 586	160
8 120	128	136	27		75 746	75 906	76 067	76 228	76 389	76 550	76 712	76 874	77 037	77 199	163
9 135	144	153	28		77 362	77 526	77 689	77 853	78 017	78 182	78 347	78 512	78 678	78 844	166
			29		79 010	79 176	79 343	79 510	79 678	79 845	80 014	80 182	80 351	80 520	169
1 18	19	20	1,30	0,0	80 689	80 859	81 029	81 199	81 370	81 541	81 712	81 884	82 056	82 228	173
2 36	38	40	31		82 401	82 574	82 747	82 921	83 095	83 269	83 444	83 619	83 794	83 970	176
3 54	57	60	32		84 146	84 322	84 499	84 676	84 853	85 031	85 209	85 387	85 566	85 745	179
4 72	76	80	33		85 924	86 104	86 284	86 464	86 645	86 826	87 007	87 189	87 371	87 553	183
5 90	95	100			87 736	87 919	88 103	88 286	88 470	88 655	88 840	89 025	89 210	89 396	187
6 108	114	120	1,35	0,0	89 583	89 769	89 956	90 143	90 331	90 519	90 707	90 896	91 085	91 274	190
7 126	133	140	36		91 464	91 654	91 844	92 035	92 226	92 418	92 610	92 802	92 995	93 188	193
8 144	152	160	37		93 381	93 574	93 768	93 963	94 158	94 353	94 548	94 744	94 940	95 137	197
9 162	171	180	38		95 334	95 531	95 728	95 926	96 125	96 324	96 523	96 722	96 922	97 122	201
			39		97 323	97 524	97 725	97 927	98 129	98 331	98 534	98 737	98 941	99 145	204
1 21	22	23	1,40	0,0	99 349	99 554	99 759	99 964	*00 170	*00 376	*00 583	*00 790	*00 997	*01 205	208
2 42	44	46	41		01 413	01 621	01 830	02 039	02 249	02 459	02 669	02 880	03 091	03 302	212
3 63	66	69	42	0,1	03 514	03 726	03 939	04 152	04 366	04 579	04 794	05 008	05 223	05 438	216
4 84	88	92	43		05 654	05 870	06 087	06 304	06 521	06 739	06 957	07 175	07 394	07 614	219
5 105	110	115	44		07 833	08 053	08 274	08 495	08 716	08 938	09 160	09 382	09 605	09 828	224
6 126	132	138	1,45	0,1	10 052	10 276	10 500	10 725	10 950	11 176	11 402	11 629	11 855	12 083	227
7 147	154	161	46		12 310	12 538	12 767	12 996	13 225	13 455	13 685	13 915	14 146	14 378	231
8 168	176	184	47		14 609	14 842	15 074	15 307	15 540	15 774	16 008	16 243	16 478	16 714	235
9 189	198	207	48		16 949	17 186	17 422	17 660	17 897	18 135	18 373	18 612	18 851	19 091	240
			49		19 331	19 572	19 812	20 054	20 295	20 538	20 780	21 023	21 267	21 510	245
1 24	25	26	1,50	0,1	21 755	21 999	22 244	22 490	22 736	22 982	23 229	23 476	23 724	23 972	249
2 48	50	52	51		24 221	24 470	24 719	24 969	25 219	25 470	25 721	25 973	26 225	26 477	253
3 72	75	78	52		26 730	26 983	27 237	27 491	27 746	28 001	28 256	28 512	28 769	29 025	258
4 96	100	104	53		29 283	29 540	29 799	30 057	30 316	30 576	30 835	31 096	31 357	31 618	261
5 120	125	130	54		31 879	32 142	32 404	32 667	32 931	33 195	33 459	33 724	33 989	34 255	266
6 144	150	156	56	0,1	34 521	34 787	35 054	35 322	35 590	35 858	36 127	36 396	36 666	36 936	271
7 168	175	182	57		37 207	37 478	37 750	38 022	38 294	38 567	38 841	39 114	39 389	39 663	276
8 192	200	208	58		39 939	40 214	40 491	40 767	41 044	41 322	41 600	41 878	42 157	42 437	279
9 216	225	234	59		42 716	42 997	43 277	43 559	43 840	44 123	44 405	44 688	44 972	45 256	284
			1,55	0,1	46 003	46 286	46 569	46 852	47 135	47 418	47 701	47 984	48 267	48 550	289
1 27	28	29	56		48 835	49 118	49 401	49 684	49 967	50 250	50 533	50 816	51 099	51 382	294
2 54	56	58	57		51 210	51 493	51 776	52 059	52 342	52 625	52 908	53 191	53 474	53 757	299
3 81	84	87	58		53 683	53 966	54 249	54 532	54 815	55 098	55 381	55 664	55 947	56 230	304
4 108	112	116	59		56 157	56 440	56 723	57 006	57 289	57 572	57 855	58 138	58 421	58 704	309
5 135	140	145			58 632	58 915	59 198	59 481	59 764	60 047	60 330	60 613	60 896	61 179	314
6 162	168	174			61 210	61 493	61 776	62 059	62 342	62 625	62 908	63 191	63 474	63 757	319
7 189	196	203			63 780	64 063	64 346	64 629	64 912	65 195	65 478	65 761	66 044	66 327	324
8 216	224	232			66 356	66 639	66 922	67 205	67 488	67 771	68 054	68 337	68 620	68 903	329
9 243	252	261			68 981	69 264	69 547	69 830	70 113	70 396	70 679	70 962	71 245	71 528	334

NEWSPAPER

NOTRE COUVERTURE :  
TABLE D'ADDITION DE LOGARITHMES

Le développement depuis plus de 15 ans des calculatrices et des ordinateurs a rendu caduc l'usage des tables numériques. Pourtant ces tables avaient atteint un très haut degré de technicité pour épargner le maximum de calcul à leurs utilisateurs. On trouve ici un extrait d'une table d'addition de logarithmes : comment calculer  $\log(a + b)$  connaissant  $\log a$  et  $\log b$ ? En posant  $\log x = \log b - \log a$  (en supposant  $b < a$ ) alors  $\log(a + b) = \log a + \log(1 + x)$ . La table donne  $\log(1 + x)$  en fonction de  $\log x$ .

On remarquera la présence de "parties proportionnelles" (P.P.) permettant d'interpoler à vue et d'une colonne "différences" (Diff.) donnant la différence entre la première valeur tabulaire d'une ligne et la dernière de la ligne précédente.

Cette page est extraite des "Tables de logarithmes à six décimales et tables de navigation" de G. FRIOCOURT, 17<sup>e</sup> tirage (1925). Cet ouvrage, en usage à l'école navale et réglementaire (!) pour les examens, contient en outre une table des différences ( $\log(\frac{1}{1-x})$  en fonction de  $\log x$ ), des tables de mesures de distances et de hauteurs (pour la navigation en mer) ...etc ...en tout plus de 400 pages de chiffres.

## SOMMAIRE

N° 66 – 1992

◇ Notre couverture : <i>Table d'addition de logarithmes</i> .....	I
◇ <i>Editorial : Bravo l'A.P.M.E.P.</i> .....	1
◇ <i>Topologie des nœuds</i> , par V. TOURAEV .....	2
◇ <i>Plaidoyer pour une didactique expérimentale des mathématiques</i> , ◇ par G. GLAESER .....	7
◇ <i>Du différentiel aux équations linéaires</i> , par J.-F. BONNARD .....	14
◇ <i>La grande saga des calendriers</i> , par J. LEFORT .....	22
◇ <i>La division en base b</i> , par R. SEROUL .....	29
◇ <i>Maximalisations d'aires de polygones (suite)</i> , par A. LENTZ .....	37
◇ <i>A vos stylos</i> , par 'L'Ouvert' .....	40
◇	

### L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
- ◇ Université Louis Pasteur
- ◇ Bibliothèque de l'I.R.E.M.
- ◇ 10, rue du Général Zimmer
- ◇ 67084 STRASBOURG CEDEX
- ◇ Tél. : 88-41-64-40
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
- ◇ 50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
- ◇ 90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
- ◇ 120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
- ◇ Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
- ◇ Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro* : 25.- F

## BRAVO L'A.P.M.E.P.

On a trop tendance à oublier que '*L'Ouvert*' est aussi le porte parole de la régionale A.P.M.E.P. d'Alsace car de nombreux lecteurs ne sont pas membres de cette association! En tant qu'enseignants, ces lecteurs manquent quelque chose d'important!

L'A.P.M.E.P. (\*) c'est 7000 professeurs qu'un même intérêt pour les maths rassemble de la maternelle à l'université, même si, et c'est normal, les enseignants du secondaire y sont la majorité.

L'A.P.M.E.P. c'est un réseau associatif dans toutes les régions, c'est une multitude de bénévoles prêts à aider; l'A.P.M.E.P. ce sont des commissions de travail qui réfléchissent collectivement pour préciser la position de l'ensemble des professeurs de mathématiques sur telle réforme ou tel projet. MERCI L'A.P.M.E.P.!

L'A.P.M.E.P. ce sont des dizaines de brochures, outils indispensables pour la formation continue des enseignants. Connaissez-vous les brochures "MOTS"? Non! Mais alors quelle attitude adoptez-vous quand vous enseignez la " $\sqrt{\quad}$ "? Etes-vous bien sûr que vous dominez exactement toutes les notions que vous voulez transmettre à vos élèves? Connaissez-vous les brochures "EVAPM"? "EVAPM2" vient de sortir grâce à un groupe qui n'a pas dû prendre beaucoup de vacances : des milliers d'élèves testés pendant l'année scolaire 90-91 et une brochure qui est parue en décembre pour vous permettre de mieux cerner les connaissances de vos secondes. BRAVO L'A.P.M.E.P.!

L'A.P.M.E.P. c'est aussi l'occasion de se rencontrer, d'échanger, grâce au congrès annuel. Fin octobre, les 24-25-26, c'est Strasbourg qui accueillera les professeurs de mathématiques de la France entière et de l'Europe. Ce sera l'occasion de mettre un visage sur des noms connus, de rencontrer tel ou tel spécialiste, en histoire des maths, en didactique, en géométrie, ... de partager les expériences en informatique, en travail interdisciplinaire, en pédagogie, ... d'être enfin à l'écoute d'autrui et non plus celui qui possède seul le savoir dans la classe! Tout cela sera possible grâce à des conférences et à des ateliers. BRAVO la régionale A.P.M.E.P. d'Alsace!

Bravo! Alors continuez à encourager le travail de tous ces bénévoles en vous inscrivant à l'A.P.M.E.P. et en participant au congrès de Strasbourg.

J. LEFORT.

---

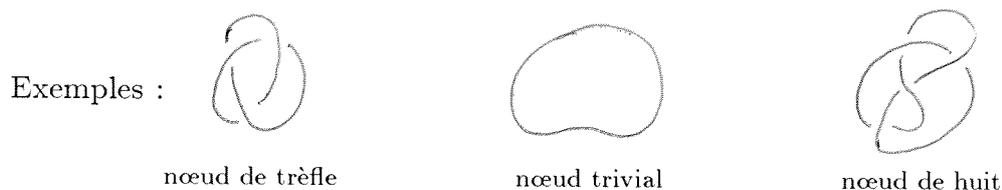
(\*) Vous trouverez un Bulletin d'adhésion à la page 48.

# TOPOLOGIE DES NŒUDS (\*)

Vladimir TOURAEV

## I.— INTRODUCTION

La notion de nœud apparaît à la fin du 19<sup>e</sup> siècle sous la forme de dessins.

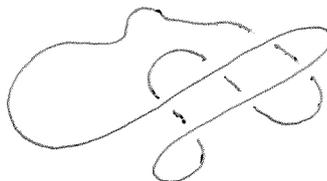


Du point de vue topologique, chaque nœud est un cercle dans  $\mathbb{R}^3$ . Deux ou plusieurs cercles disjoints constituent un entrelacs.



Définition : on appelle isotopie d'un nœud dans  $\mathbb{R}^3$  toute déformation du nœud, sans "intersection" supplémentaire; on dit qu'un nœud est un objet flexible, c'est-à-dire défini à une isotopie près.

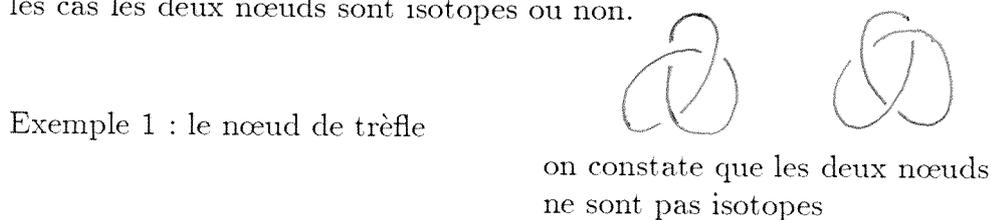
Exemple : autre représentation  
du nœud trivial :



## II.— ETUDE DESCRIPTIVE DES NŒUDS

### 1. Réflexion par rapport à un plan

L'image d'un nœud dans une réflexion par rapport à un plan est un nœud; selon les cas les deux nœuds sont isotopes ou non.



---

(\*) Conférence IREM de Strasbourg - Régionale APMEP d'Alsace prononcée le 18/12/91, d'après les notes de H. SILVESTRE.

## TOPOLOGIE DES NŒUDS

Exemple 2 : le nœud trivial, son image est un nœud isotope

Exemple 3 : le nœud de huit, son image est un nœud isotope

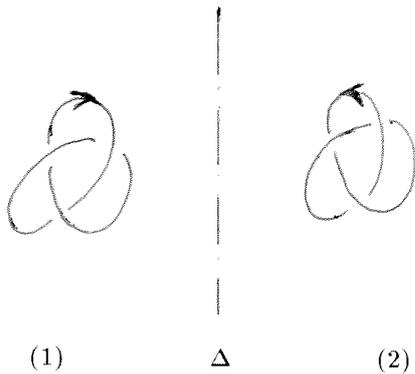


Suite d'isotopies d'un nœud de huit aboutissant à son image par une réflexion par rapport à un plan.

### 2. Orientation d'un nœud

Orienter un nœud c'est distinguer l'un des deux sens de parcours possibles sur le nœud. Pour un nœud donné, les deux orientations peuvent conduire à des nœuds isotopes ou non.

Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit conduisent par renversement de l'orientation à des nœuds isotopes. Pour obtenir des nœuds non isotopes il faut qu'ils aient au moins huit intersections apparentes.



(Rotation d'axe  $\Delta$ )

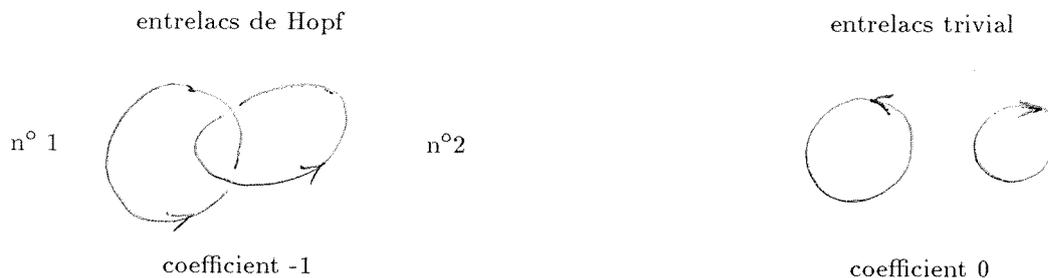
Dans la symétrie axiale d'axe  $\Delta$  le nœud de trèfle orienté n° 1 a pour transformé le nœud de trèfle orienté n° 2, visiblement isotope au n° 1 orienté en sens contraire.

### 3. Coefficient d'enlacement (ou coefficient de Gauss)

Pour un entrelacs dont les deux composantes sont ordonnées et orientées, on définit le coefficient de GAUSS à partir des points d'intersection apparents pour lesquels la composante n° 1 est au-dessus de la composante n° 2; il y a deux cas de figure (a) et (b), on leur fait correspondre respectivement les nombres +1 et -1. La somme de tous ces nombres ainsi obtenus est le coefficient d'enlacement.



Exemples :



#### 4. Propriétés du coefficient d'enlacement

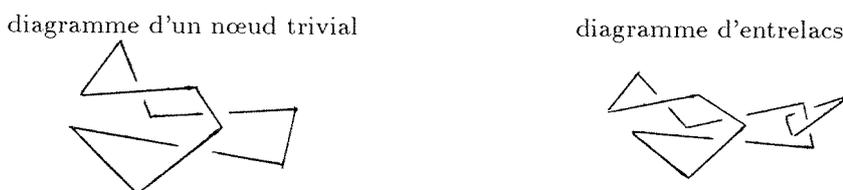
- a. le coefficient d'enlacement est invariant par isotopie.  
Conséquence : l'entrelacs de Hopf et l'entrelacs trivial ne sont pas isotopes.
- b. On note  $lk(L_1, L_2)$  le coefficient d'enlacement des deux composantes ordonnées et orientées  $L_1$  et  $L_2$ ; on a :

$$\begin{aligned}
 lk(L_1, -L_2) &= -lk(L_1, L_2) \\
 lk(-L_1, L_2) &= -lk(L_1, L_2) \\
 lk(L_2, L_1) &= lk(L_1, L_2)
 \end{aligned}$$

[ $L_2$  et  $-L_2$  désignent la composante n° 2 orientée avec les deux orientations possibles.]

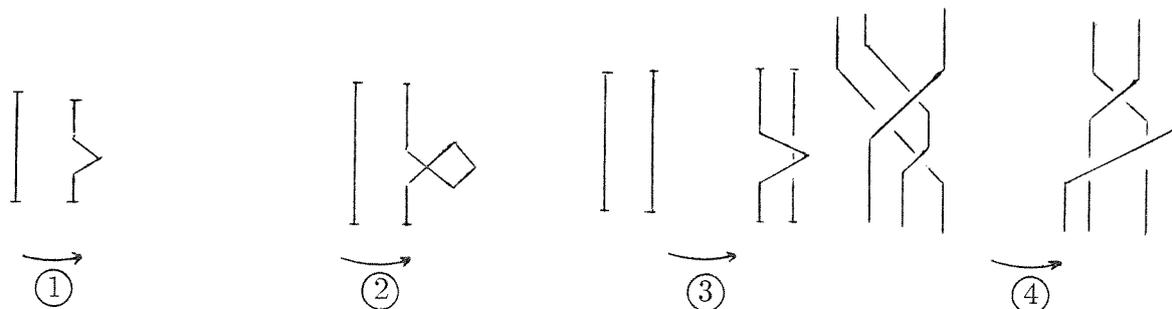
### III.— DIAGRAMMES

**1. Définition :** pour étudier la théorie des nœuds on les identifie à leurs diagrammes; il s'agit d'une représentation **plane** formée d'intervalles consécutifs formant une ligne brisée fermée, chaque point d'intersection apparent correspondant à une cassure de l'un des intervalles (l'intervalle est coupé en deux quand il passe en dessous).



#### 2. Retour sur l'isotopie et les entrelacs

On considère les quatre transformations de base décrites par leurs diagrammes :



Par définition deux diagrammes sont isotopes si on peut passer de l'un à l'autre à l'aide d'une suite (finie) de ces transformations ou de leurs inverses.

Un entrelacs est un diagramme considéré à une isotope près. Il est facile de vérifier que le coefficient de Gauss est un invariant dans les transformations 3 et 4, par suite c'est un invariant par isotopie.

**IV.— POLYNÔME BRACKET ET POLYNÔME DE JONES**

**1. Polynôme bracket**

**a. Définition :** à chaque diagramme  $\mathcal{D}$  on associe un polynôme à coefficients entiers, aux indéterminées  $A, A^{-1}$ ; on l'appelle le polynôme bracket de  $\mathcal{D}$  et on le note  $\langle \mathcal{D} \rangle$ .

Par exemple :  $\langle \mathcal{D} \rangle = A^{-5} + A^{-3} - 2 + A^{10}$ .

**b. Calcul :** pour déterminer  $\langle \mathcal{D} \rangle$  on utilise les trois propriétés

- $P_1$  :  $\langle O \rangle = 1$ ;
- $P_2$  :  $\langle \mathcal{D} \perp O \rangle = \langle \mathcal{D} \rangle \times (-A^2 - A^{-2})$ ;  
[ $\mathcal{D} \perp O$  désigne le diagramme  $\mathcal{D}$  auquel on a ajouté un cercle]
- $P_3$  :  $\langle \text{diagramme} \rangle = A \langle \text{diagramme} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagramme} \rangle$   
[autrement dit on "rectifie" les points d'intersection apparents par et par ].

**c. Exemple :** calcul du polynôme bracket d'un entrelacs de Hopf

$\alpha$



rectification de  $\alpha$  par  et par 

d'après  $P_3$  :  $\langle \text{diagramme} \rangle = A \langle \text{diagramme} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagramme} \rangle$  (1)

rectification de  $\beta$  par  et par 

rectification de  $\gamma$  par  et par 

L'égalité (1) devient alors successivement

$$\begin{aligned} \langle \text{diagramme} \rangle &= A(A \langle \text{diagramme} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagramme} \rangle) + A^{-1}(A \langle \text{diagramme} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagramme} \rangle) \\ \langle \text{diagramme} \rangle &= A^2(-A^2 - A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2}(A^{-2} - A^2); \text{ finalement} \\ \langle \text{diagramme} \rangle &= -A^4 - A^{-4} \end{aligned}$$

**d. Propriétés du polynôme bracket :** Pour tout diagramme, le bracket existe et il est unique. Le polynôme bracket est invariant pour les transformations 1, 3, 4 (cf. III e.)

## 2. Polynôme de Jones

**a. Définition :** Le polynôme de Jones est défini pour les entrelacs orientés. En chaque point d'intersection apparent on observe la composante du dessus, il y a deux cas de figure (a) et (b). On leur fait correspondre respectivement les nombres +1 et -1. La somme de tous ces nombres ainsi obtenus en tous les points d'intersection apparents est noté  $w(\mathcal{D})$ .



Le polynôme de Jones est par définition :

$$(-A^3)^{-w(\mathcal{D})} \times \langle \mathcal{D} \rangle .$$

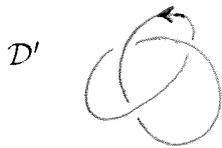
**b. Exemples :** Pour le nœud de trèfle  $\mathcal{D}$  on a:



$$w(\mathcal{D}) = 3$$

$$\langle \mathcal{D} \rangle = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$$

polynôme de Jones :  $A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$ .



L'image de  $\mathcal{D}$  dans une réflexion par rapport à un plan est  $\mathcal{D}'$ ; on a :

$$w(\mathcal{D}') = 3$$

$$\langle \mathcal{D}' \rangle = -A^{-5} - A^3 + A^7$$

polynôme de Jones =  $A^4 + A^{12} - A^{16}$ .

Remarque : pour le nœud trivial le polynôme de Jones est égal à 1.

**c. Propriétés :** Le polynôme de Jones est invariant par les transformations 1, 2, 3, 4, (cf. III 2). Il constitue un moyen simple de distinguer les nœuds ou de reconnaître leur trivialité.

# PLAIDOYER POUR UNE DIDACTIQUE EXPÉRIMENTALE DES MATHÉMATIQUES

Georges GLAESER

Nous publions ici le texte d'une conférence prononcée par G. GLAESER en 1990 à l'université du 3<sup>e</sup> âge de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.

---

C'est en 1971 que je me suis lancé dans l'aventure que je vais relater. Pour différentes raisons, j'ai été conduit à accepter le poste de directeur de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Je n'ai accepté ce poste qu'à la condition qu'il s'agisse réellement de **Recherches** sur l'enseignement des mathématiques car depuis très longtemps j'avais un certain nombre de doutes sur la justesse des idées que des journalistes et d'autres personnes encore moins compétentes proféraient sur la façon d'enseigner les mathématiques. Comment se forme et se construit chez l'enfant ou chez l'adulte la compréhension des mathématiques? Voilà l'énigme qui m'a toujours intrigué au cours de ma vie et que je voulais aborder autrement que par du bavardage et des opinions toutes faites. En matière de sciences, **j'ai horreur des opinions**. Que des gens disent : "*Je crois que...*" et cela ne m'intéresse plus; par contre, s'ils ont des raisons de penser ainsi ou des preuves ou des arguments à avancer, alors je suis prêt à écouter. Quand Madame Rika ZARAÏ nous dit qu'elle a une opinion sur la manière de traiter le sida, je m'en fiche!

Ce n'est pas par hasard que je cite cet exemple, parce que je veux, pour introduire mon sujet, faire un rapide parallèle entre la médecine et la didactique, entre la santé et l'enseignement.

Il y a 200 ans, la médecine n'était qu'un énorme corpus de "connaissances" écrit en latin, bien sûr, et les personnes qui réfléchissaient réellement sur les différentes questions se rendaient compte qu'il y avait des choses justes et des choses fausses. Mais on n'avait pas les moyens de faire vraiment le tri. Cet état de fait a duré jusqu'à la **Révolution Pastorienne**. Alors seulement on a commencé à savoir avec des preuves expérimentales qu'elles étaient les causes de certaines maladies; on a découvert les microbes, ... Tout cela a donné un coup de fouet au progrès médical. Et si nous sommes loin aujourd'hui d'avoir résolu tous les problèmes médicaux, il faut reconnaître que la Révolution Pastorienne a accompli un bond considérable.

Depuis très longtemps, des gens étudient et enseignent les mathématiques. Il est certain que quand un professeur intervient auprès d'un élève, c'est toujours pour l'aider à comprendre; mais parfois il commet **des maladresses qui empêchent l'élève de comprendre**. Cela est malheureusement fréquent (de même qu'il est fréquent qu'en médecine il y ait des médicaments *contre-indiqués*). Mais il arrive encore plus souvent que lorsque le professeur explique, l'élève *croit comprendre*

alors qu'il ne comprend pas réellement. Les connaissances se perdent dans un brouillard et le bilan final s'avère globalement négatif.

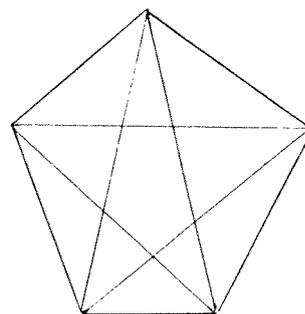
Nous en étions là en 1971. Malgré les travaux de l'école de Genève, nous en avons assez des opinions de personnes souvent incompetentes (ou compétentes dans d'autres secteurs que l'enseignement des mathématiques ou que les mathématiques elles-mêmes). Nous avons alors entrepris un travail de pionniers. Nous avons cherché à poser des questions intéressantes et à y répondre non par des opinions, mais par des preuves capables de trancher les débats.

Nous avons été les premiers surpris des résultats obtenus. Il y a d'abord les questions de **difficulté** et de **facilité** : il y a des points enseignés qu'élèves et professeurs estiment faciles. Sur d'autres points, ils disent : "C'est difficile", mais personne ne sait pourquoi.

On peut demander à des instituteurs qui enseignent depuis de nombreuses années une certaine question à des élèves de même âge, dans les mêmes conditions, si telle notion passe bien ou non. Mais même dans ce cas, le résultat n'est pas fiable. Il est donc nécessaire de s'interroger sur ce qu'est et ce qui fait la difficulté ou la facilité d'une question et comment on peut être sûr du résultat obtenu.

La deuxième question porte sur le "**je sais faire**". Vous interrogez un élève qui vous annonce : "*Ça y est, je sais le faire*". On pourrait croire que sur la question, son apprentissage est terminé. A-t-il raison ou non? A ce sujet je vais vous donner un exemple d'une expérience faite à l'I.R.E.M. auprès d'un groupe de parents d'élèves qui a suivi pendant une année, un cours hebdomadaire sur les *mathématiques dites modernes*. Ces parents se sont plaints de ce que leurs enfants ne savaient plus calculer alors qu'*eux avaient appris et savaient!* À l'I.R.E.M. nous avons donc organisé une petite séance où nous avons donné vingt minutes pour compter un nombre d'objets inférieur à cent. Il s'agissait de compter le nombre de triangles de la figure ci-dessous. Sur la quarantaine de parents présents, personne n'a trouvé et les résultats étaient très dispersés.

Dénombrer des objets n'est pas toujours facile! Il ne faut pas compter deux fois le même et il ne faut pas en oublier. Sur cet exemple un mathématicien "voit" que le résultat est un nombre divisible par 5. Or, de nombreuses réponses ne satisfaisaient pas à ce critère!



Très souvent, quand on demande à un professeur si les élèves *savent* telle notion, la réponse est du type : "*Oui, je le leur ai appris*". Mais comment savoir si un apprentissage est achevé, si un acquis est stable, c'est-à-dire si dix ans après il en restera quelque chose? On sait bien que sur la masse des connaissances que tout un chacun a appris, certaines notions sont entrées par une oreille et sorties par l'autre.

## PLAIDOYER POUR UNE DIDACTIQUE EXPÉRIMENTALE DES MATHÉMATIQUES

Proposez à un enseignant de soumettre tel exercice à ses élèves et demandez lui d'estimer, *a priori*, la durée de la résolution chez ces élèves. En dehors des problèmes que les enseignants ont déjà donné, ils ne sauront pas répondre ou répondront au hasard. Tout simplement parce que l'endroit où se trouve **la difficulté n'est pas le même pour l'élève et pour le professeur.**

Ce que plusieurs années de recherches nous ont appris, c'est que **les apprentissages sont extrêmement longs** (en tout d'ailleurs et pas seulement en mathématiques). Un apprentissage dure en général vingt ans. On passe un bac sur une question, avec une excellente note, sans avoir compris le fond de la question. Tout le monde n'a que des connaissances partielles plus ou moins approfondies. Je me suis livré personnellement à une introspection pour me rendre compte que j'avais commencé à comprendre la notion de racine carrée vers sept ans en lisant Jules VERNE et que je n'avais pas tout à fait fini de la maîtriser vers trente-cinq ans. Il est vrai qu'il y a beaucoup de choses que j'ai apprises en les enseignant, ce qui est le cas général.

Il y a un autre phénomène que nous avons découvert et qui est contraire à toutes les intuitions : c'est le phénomène de **l'incubation**. Par exemple, à la fin de l'école primaire on apprend à faire des multiplications. On en fait encore des révisions en 6<sup>e</sup>. Puis en 5<sup>e</sup>, en 4<sup>e</sup>, en 3<sup>e</sup> on ne fait plus d'apprentissage systématique de la multiplication; les élèves en font au hasard de leurs besoins en mathématiques ou ailleurs. Or, on a remarqué que, si sur un test en 6<sup>e</sup> la réussite à la multiplication est ridiculement faible, sur ce même test en 3<sup>e</sup> la réussite est pratiquement totale! Cette expérience met en évidence le rôle du temps nécessaire à la digestion des notions enseignées.

Je voudrais maintenant vous présenter quelques aspects du genre de recherches que nous effectuons à l'I.R.E.M.. Bien que nos travaux aient concernés et concernent l'enseignement des mathématiques du primaire au supérieur, pour me faire bien comprendre de l'assistance d'aujourd'hui, je vais parler d'un ensemble de travaux de recherches qui portent sur un sujet que l'on enseigne au tout début de l'école élémentaire et qui semble ridiculement facile à un adulte éduqué. Il s'agit de ce qu'on appelle les *problèmes additifs*. Un problème additif est bâti sur le modèle suivant : il y a deux données (des entiers de un ou deux chiffres) et la solution s'obtient soit en les additionnant, soit en les soustrayant. Par exemple : "J'avais tant de billes, j'en gagne tant, combien en ai-je?...". On pourrait croire que ce genre de problème est de résolution immédiate. Eh bien, l'analyse qui en a été faite initialement par une équipe de chercheurs parisiens sous la direction de G. VERGNAUD et qui a été reprise par bien d'autres équipes, a apporté des résultats tout à fait inattendus et on est loin d'avoir résolu toutes les difficultés afférentes à ce type de problème.

Voici quelques uns des exercices proposés :

**1.— Isabelle** a des billes dans sa main gauche et dans sa main droite.  
En tout, elle a 13 billes dans ses mains.  
Dans sa main gauche, elle a 2 billes.  
Combien de billes a-t-elle dans sa main droite?

**2.— Denis** joue une partie de billes.  
Avant la partie il avait 5 billes.  
Durant la partie il perd 2 billes.  
Combien de billes a-t-il après la partie?

**3.— Dominique** joue une partie de billes.  
Après la partie il a 14 billes.  
Durant la partie il a gagné 3 billes.  
Combien de billes avait-il avant la partie?

**4.— Florence** a des billes dans sa main gauche et dans sa main droite.  
Dans sa main gauche, elle a 1 bille.  
En tout, elle a 3 billes dans ses mains.  
Combien de billes a-t-elle dans sa main droite?

**5.— Serge** joue une partie de billes.  
Durant la partie il perd 11 billes.  
Avant la partie il avait 13 billes.  
Combien de billes a-t-il après la partie?

**6.— Bruno** joue deux parties de billes.  
Il joue une première partie puis une deuxième.  
A la deuxième partie, il perd 7 billes.  
Après ces deux parties, il a gagné en tout 3 billes.  
— Que s'est-il passé à la première partie?

**7.— Christophe** joue une partie de billes.  
Au cours de la partie il gagne 12 billes.  
Après la partie il a 15 billes.  
— Combien avait-il de billes au début de la partie?

Ce dernier exercice est considéré comme difficile, mais le plus difficile qui n'est pas résolu par des élèves de troisième, est le n° 6. A titre d'anecdote, au cours d'un repas auquel assistaient des collègues agrégés d'allemand, on m'a demandé la nature de mes travaux; je les ai expliqués en donnant cet exercice qu'ils n'ont pas su résoudre, mais c'était à la fin d'un repas bien arrosé!

Ces problèmes ont pourtant l'air d'être tous bâtis sur le même modèle. Je vais donc maintenant tâcher d'expliquer ce qui rend leur difficulté très variable.

Les différents nombres qui interviennent correspondent soit à des états ( $E$ ), soit à des transformations ( $T$ ). Il y a des problèmes du type  $E_i.T.E_f$ , un *état initial* suivi d'une *transformation* ("il gagne ou il perd") suivi d'un état final. Les questions du premier type qui demandent  $E_f$  connaissant  $E_i$  et  $T$  sont les plus faciles et sont résolues dès 7 ans. Les difficultés augmentent si on donne  $E_f$  et  $T$  et qu'on demande  $E_i$ . (Au bout d'un ou deux ans, on n'observe plus de différences de difficultés.)

## PLAIDOYER POUR UNE DIDACTIQUE EXPÉRIMENTALE DES MATHÉMATIQUES

Il y a maintenant des problèmes du type  $.E.E.E.$ . Par exemple : “*Dans mes deux mains j’ai dix billes, j’en ai trois dans la main droite, combien en ai-je dans la main gauche?*”. Enfin, il y a des problèmes du type  $.T.T.T.$ , par exemple : “*J’ai des billes, à la première partie j’en ai gagné 5, à la deuxième partie j’en ai perdu 3, combien en ai-je gagné en tout?*” Ce dernier problème est très difficile et arrête les enfants car ils disent : “*Je ne peux pas faire, je ne sais pas combien il y en avait au début (!)*”. Les enfants ont beaucoup de mal à imaginer la situation car ce ne sont pas des billes qu’ils ajoutent ou retranchent mais des transformations (des gains ou des pertes) de billes.

On pourrait d’ailleurs compliquer à loisir ce type de problème en inventant quelque chose du genre  $.T.T(T).T$ , où  $T(T)$  est une transformation de transformation, du style : “*À la deuxième partie, il a gagné 3 billes de plus qu’à la première . . .*” Ces problèmes très concrets sont cependant d’un niveau d’abstraction que seuls quelques rares élèves peuvent atteindre en collège. On comprend alors la nécessité d’être bien au fait de ce type de résultats pour pouvoir proposer des exercices gradués aux élèves.

Je voudrais maintenant vous présenter l’une des premières thèses qui fit date car ses conclusions infirmaient radicalement les opinions courantes. Elle fut soutenue par Jean-Paul FISCHER en 1979. Dans sa thèse, il s’adresse à des enfants qui entrent en CE 1 et qui n’ont jamais étudié la soustraction en classe. Il fabrique pour eux trois types de problèmes; dans deux des cas il s’agit du type  $E_i.T.E_f$  et il faut trouver soit  $E_f$  (le problème est alors noté  $E.T.E_f$ ), soit  $E_i$  (et on le note  $E.T.E_i$ ); dans le troisième cas il s’agit du type  $E.E.E.$

Pour la passation de ces tests, il y avait 128 élèves qu’on a interrogés individuellement en deux séances et auxquels on lisait l’énoncé aussi souvent que nécessaire. L’élève disposait de matériel, billes, cartons . . . pour répondre. L’expérimentateur prenait d’autres précautions pour que chacun des élèves soit dans les mêmes conditions de passation et le plus à l’aise possible . . . 18 problèmes ont été posés à chacun en croisant selon les groupes l’ordre des problèmes. Cela a nécessité deux après-midi en début d’année.

Une partie des résultats est présentée sur le tableau page 12. Une case noire représente une réussite à l’exercice. Chaque ligne représente un élève et les élèves ont été classés d’après le nombre total de réussites. La réponse juste est toujours la différence des deux nombres indiqués au haut du tableau et on remarque que chaque exercice apparaît toujours sous deux formes suivant l’ordre dans lequel sont introduites les données.

Dans la partie inférieure du tableau, une cinquantaine d’élèves qui n’ont obtenu aucune réussite. Dans la partie supérieure, une structure triangulaire met en évidence la difficulté croissante des exercices de type  $E.T.E_f$ ,  $E.E.E.$ ,  $E.T.E_i$ , et à l’intérieur de chacun de ces types, l’augmentation des difficultés avec la taille des nombres qui interviennent.

Bien sûr, il peut y avoir des réussites *usurpées* (l'élève répond juste par hasard), mais cela n'enlève rien à l'existence d'une hiérarchie très nette : tout élève qui réussit un exercice où on recherche l'état initial, réussit au moins un exercice de chacun des deux autres types, et tout élève qui réussit un exercice où il n'y a pas de transformation réussit un exercice où l'on recherche l'état final.

**L'expérience n'est cependant pas finie.** Six mois après, *les élèves ont étudié en classe la soustraction* et c'est pourquoi FISCHER reprend la même expérience (des problèmes analogues et certains identiques). On constate alors un progrès général; certains élèves font des sans-fautes et l'on peut observer que l'acquisition de la résolution se fait dans l'ordre  $E.T.E_f \rightarrow E.E.E \rightarrow E.T.E$ .

Ce fut la première expérience où des esprits critiques parmi les plus sceptiques a priori reconnurent que FISCHER avait administré **une preuve**. C'était aussi la première fois où l'on faisait une expérience **diachronique** : la hiérarchie mise en évidence est non seulement une **hiérarchie de difficultés** mais aussi une **hiérarchie temporelle**, qui marque l'ordre où s'obtient le progrès.

A partir de cette expérience on a pu annoncer aux instituteurs qu'ils pourraient évaluer leurs élèves sur des bases très précises. Certes c'est un point très particulier, mais néanmoins important car reposant enfin sur une véritable **démonstration pédagogique**.

Depuis, bien d'autres travaux ont été menés à différents niveaux, *sur la proportionnalité* au collège par exemple, et on s'est rendu compte de l'extrême richesse des difficultés. Il y a des problèmes qui ne semblent différer que par un infime détail et pour lesquels on observe de très grandes différences de performance.

La place intermédiaire des exercices  $EEE$  est tout à fait imprévue. La plupart des instituteurs interrogés a priori sur le pronostic de l'expérience se sont trompés là dessus.

En conclusion, j'observe avec tristesse les réformes de l'enseignement qui se succèdent, en aboutissant régulièrement à des échecs.

Tel fut aussi le sort de la santé publique, lorsque

*“la médecine consistait à introduire des drogues qu'on connaissait mal,  
dans des corps qu'on connaissait plus mal encore”*

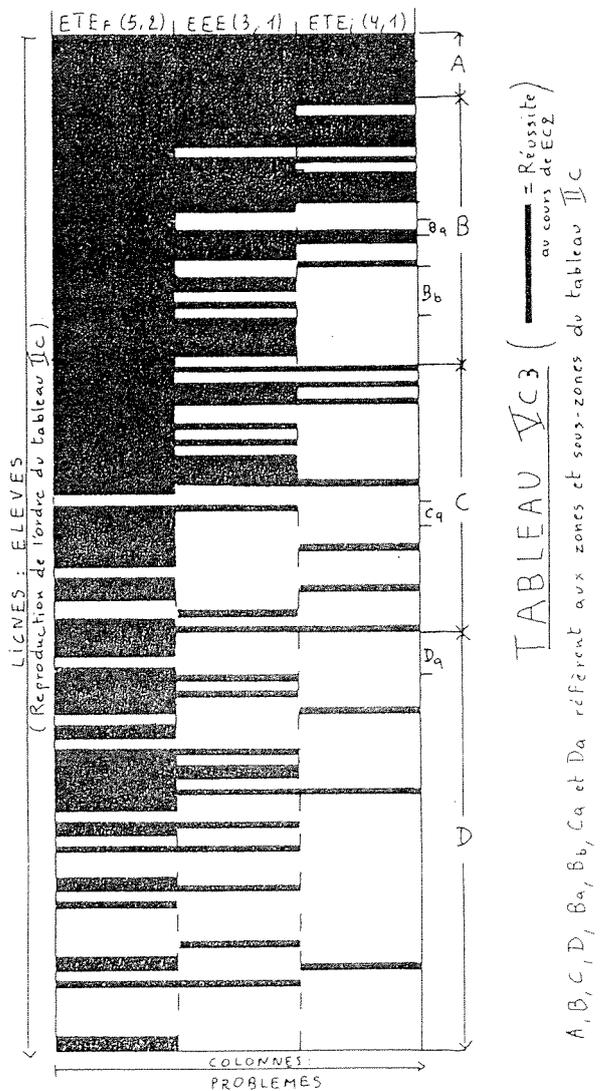
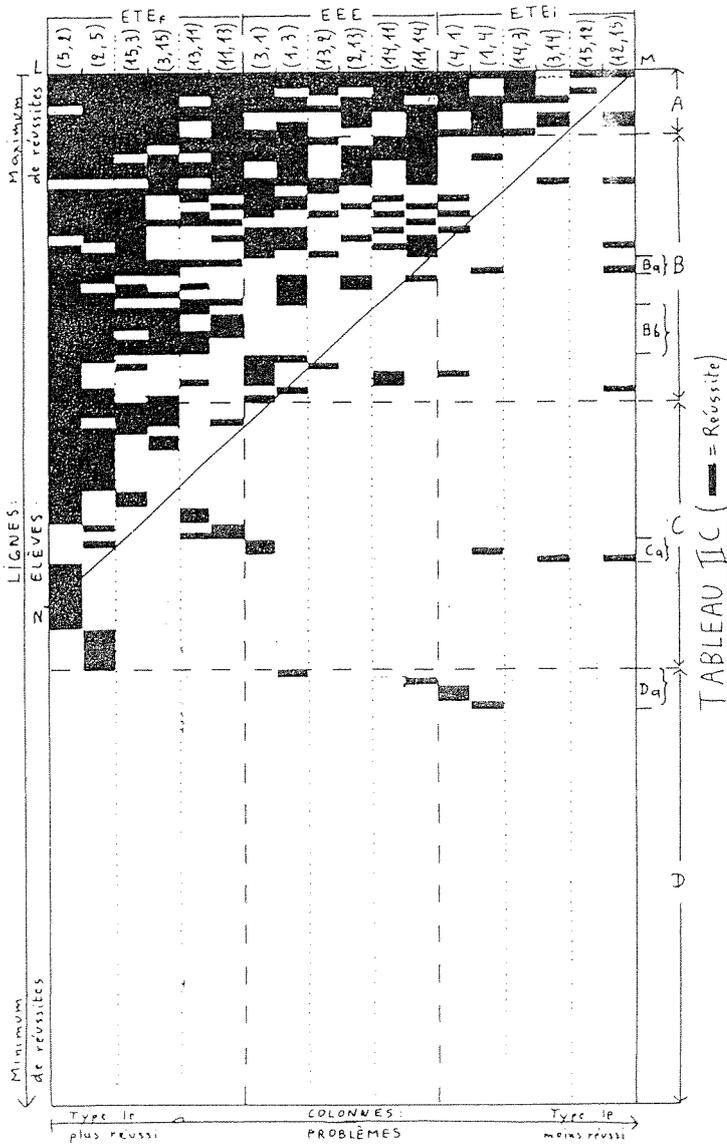
(comme l'écrivait plaisamment VOLTAIRE).

Le progrès pédagogique ne peut résulter que de **l'élimination des opinions gratuites**, réfutées par des expériences conformes aux exigences pastoriennes, et de la découverte des **phénomènes qui accompagnent la compréhension** de ce que l'on veut enseigner.

PLAIDOYER POUR UNE DIDACTIQUE EXPÉRIMENTALE DES MATHÉMATIQUES

En septembre avant  
tout enseignement  
de la soustraction

Six mois après



Les élèves correspondent aux lignes. Ils sont classés par ordre de réussite décroissante. Près de la moitié de l'effectif n'a répondu correctement à aucune question.

En tête, les élèves A, qui ont obtenu des succès aux trois types d'items. Puis les élèves B qui échouent aux questions  $ETE_i$ .

Les élèves C enregistrent quelques rares réussites, aux  $ETE_f$ .

Les élèves sont classés ici selon l'ordre du tableau précédent. Tous les élèves A et quelques autres, réalisent des "sans fautes".

Ce n'est le cas d'aucun élève D.

L'effectif de ceux qui sont en échec complet est passé de 40 % à 20 %.

Le progrès s'effectue dans l'ordre

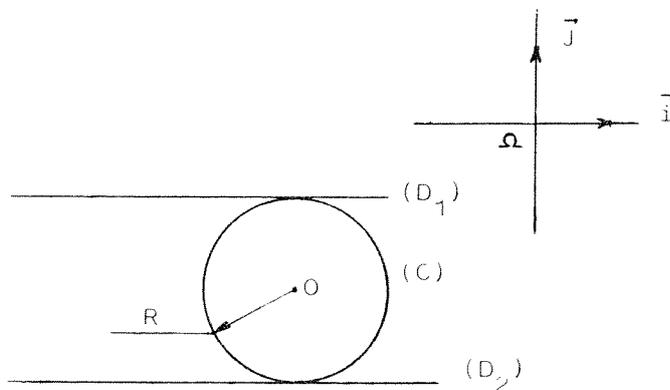
$$ETE_f \rightarrow EEE \rightarrow ETE_i.$$

# DU DIFFÉRENTIEL AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Jean-François BONNARD

## 1.— ADDITIONNEUSE DIFFÉRENTIELLE À CRÉMAILLÈRE ET ENGRENAGE

### 1) Aspect mathématico-mécanique



Soit un cercle  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  tangent à deux droites parallèles  $(D_1)$  et  $(D_2)$  astreintes à conserver une direction fixe, celle du vecteur unitaire  $\vec{i}$ . Les droites et le cercle roulent sans glisser les uns sur les autres.

Dans un repère lié à  $O$ , toute rotation de  $(C)$  d'un angle  $\varphi$  entraîne une translation de  $-R\varphi \vec{i}$  pour  $(D_1)$  et de  $+R\varphi \vec{i}$  pour  $(D_2)$ .

Si au contraire on lie le repère à  $(D_2)$ , une rotation de  $(C)$  d'un angle  $\varphi$  entraîne une translation de  $O$  de  $-R\varphi \vec{i}$  et une de  $(D_1)$  de  $-2R\varphi \vec{i}$ . Une autre façon de le voir est de dire que dans un tel repère une translation de  $O$  de  $l \vec{i}$  entraîne une translation de  $(D_1)$  de  $2l \vec{i}$  (en même temps qu'une rotation de  $(C)$  de  $\left(\frac{-l}{R}\right)$ ).

Considérons maintenant un repère fixe  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ . Si  $(D_2)$  ne bouge pas une translation de  $s_1 \vec{i}$  de  $(D_1)$  entraîne une translation de  $\frac{s_1}{2} \vec{i}$  de  $O$ , puis dans cet état une translation de  $s_2 \vec{i}$  de  $(D_2)$ ,  $(D_1)$  restant fixe, entraîne une translation de  $\frac{s_2}{2} \vec{i}$  de  $O$ . Finalement  $O$  se déplace de  $\frac{s_1+s_2}{2} \vec{i}$  quand  $(D_1)$  et  $(D_2)$  se déplacent respectivement de  $s_1$  et  $s_2$ .

**Remarque :** Les angles dont il est question sont des angles de la mécanique et non des angles de vecteurs définis à  $2\pi$  près.

2) Application à un mécanisme additionneur

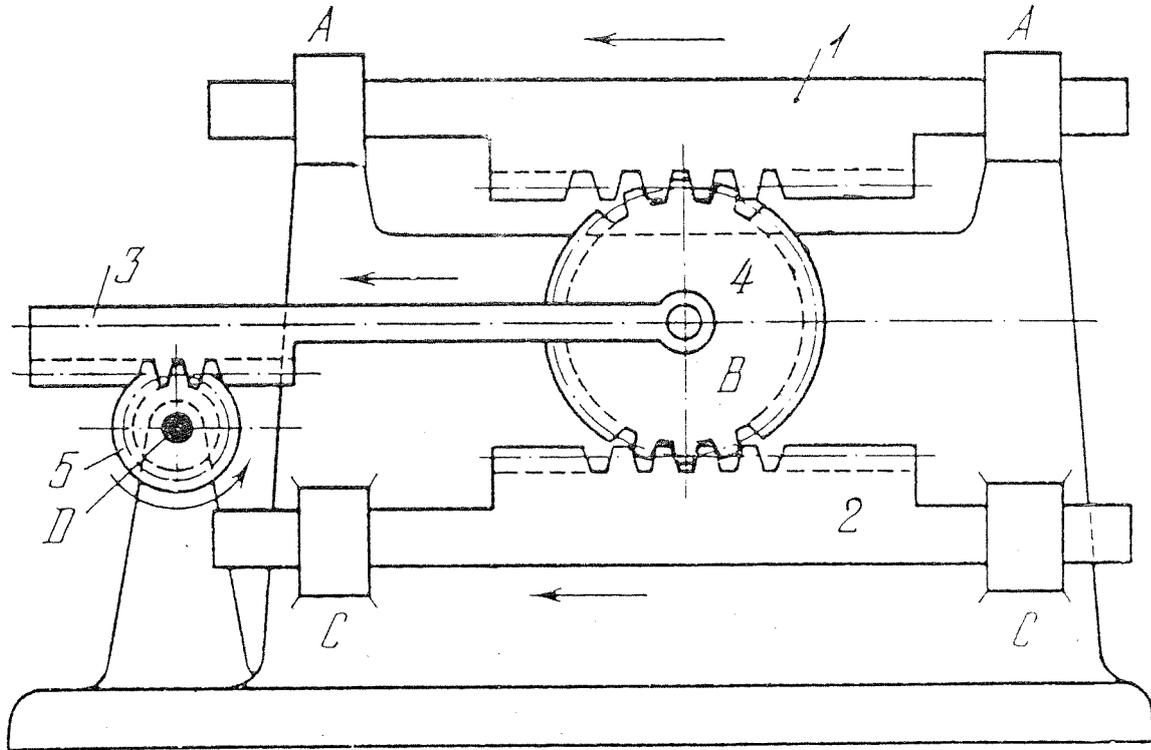


Figure 1 :  
Mécanisme différentiel à crémaillère  
et engrenage pour sommation  
de deux nombres

La crémaillère 1, animée d'un mouvement de translation dans un guidage fixe  $A - A$ , engrène avec la roue dentée 4 qui, à son tour, engrène avec la crémaillère 2 animée d'un mouvement de translation dans un guidage fixe  $C$ . La crémaillère 3 engrène avec la roue dentée 5 tournant autour d'un axe fixe  $D$  et constitue un couple de rotation  $B$  avec la roue 4. Le premier nombre à additionner est proportionnel au déplacement linéaire  $s_1$  de la crémaillère 1. Le deuxième nombre à additionner est proportionnel au déplacement linéaire  $s_2$  de la crémaillère 2. Le déplacement linéaire  $s_3$  de la crémaillère 3 est proportionnel à la demi-somme des nombres à additionner  $s_1$  et  $s_2$  introduits à l'aide des crémaillères 1 et 2, c'est-à-dire :

$$s_3 = \frac{s_1 + s_2}{2}.$$

Le mécanisme donne la somme des nombres à additionner, en enregistrant l'angle  $\varphi_5$  de rotation de la roue 5 égal à

$$\varphi_5 = \frac{s_3}{R} = \frac{1}{2R}(s_1 + s_2),$$

où  $R$  est le rayon du cercle primitif de la roue 5.

### 3) Généralisation pour la somme de 3 nombres

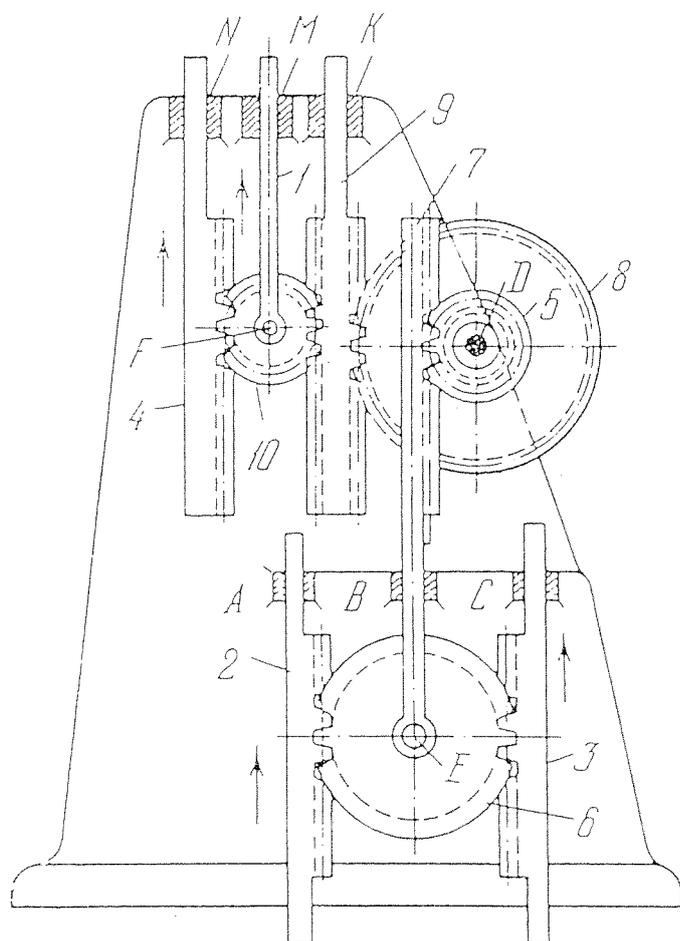


Figure 2 :  
Mécanisme différentiel à engrenage  
et crémaillère pour sommation  
de trois nombres

La crémaillère 2, animée d'un mouvement de translation dans un guidage fixe A, engrène avec la roue dentée 6 qui vient en prise avec la crémaillère 3 se déplaçant d'un mouvement de translation dans un guidage fixe C. La crémaillère 7 engrène avec la roue 5 tournant autour d'un axe fixe D et constitue un couple de rotation E avec la roue 6. La roue dentée 8, solidaire de la roue 5 (\*), vient en prise avec la crémaillère à double face 9 animée d'un mouvement de translation dans un guidage fixe K. La crémaillère 9 engrène avec la roue 10 qui engrène, à son tour, avec la crémaillère 4 animée d'un mouvement dans un guidage fixe N. La roue 10 constitue un couple de rotation F avec l'élément 1 animé d'un mouvement de translation dans un guidage fixe M.

Le premier nombre à additionner est proportionnel au déplacement linéaire  $s_2$  de la crémaillère 2. Le deuxième nombre à additionner est proportionnel au déplacement linéaire  $s_3$  de la crémaillère 3. Le troisième nombre à additionner est proportionnel au déplacement linéaire  $s_4$  de la crémaillère 4. Le déplacement linéaire  $s_1$  de la crémaillère 1 est proportionnel à la demi-somme des nombres à additionner  $s_2$ ,  $s_3$  et  $s_4$  introduits à l'aide des crémaillères 2, 3 et 4, c'est-à-dire

$$s_7 = \frac{s_2 + s_3}{2} ; s_9 = 2 s_7 ; s_1 = \frac{s_9 + s_4}{2} ; s_1 = \frac{s_2 + s_3 + s_4}{2}.$$

(\*) Les nombres de dents  $z_5$  et  $z_8$  des roues 5 et 8 sont liés par le rapport  $z_8 = 2z_5$ . La somme des nombres à additionner figurera sur une échelle spéciale (non représentée sur la figure) qui enregistre le déplacement de l'élément 1.

2.— LE DIFFÉRENTIEL SPHÉRIQUE

1) Principe

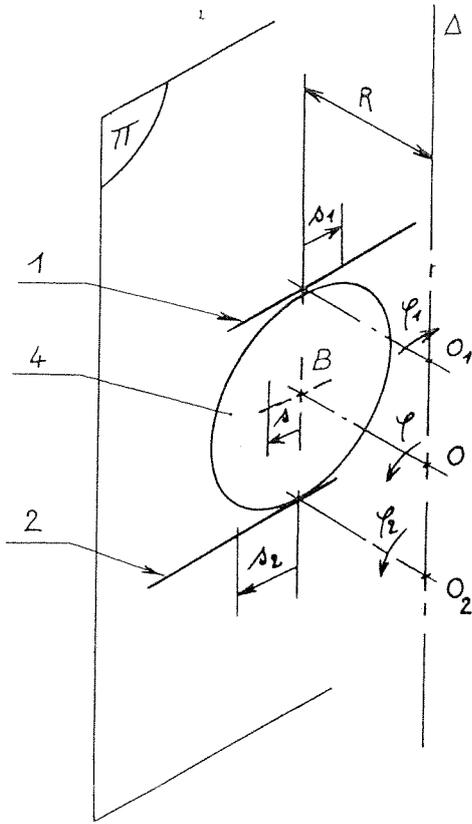


Figure 3

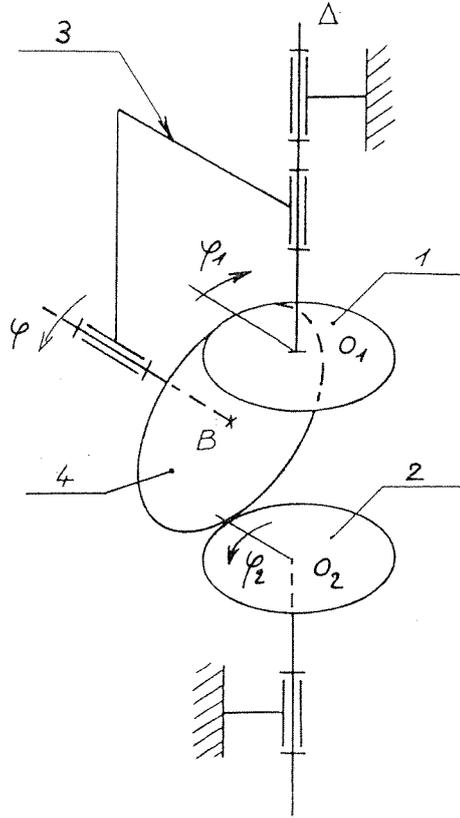


Figure 4

Sur les figures ci-dessus, à tout déplacement rectiligne  $s_1, s, s_2$  on peut faire correspondre une rotation proportionnelle, respectivement  $\varphi_1, \varphi, \varphi_2$  autour d'un axe ( $\Delta$ ) situé à la distance  $R$  du plan ( $\pi$ ).

$$s_1 = R \varphi_1 ; s = R \varphi ; s_2 = R \varphi_2.$$

Les roues 1 et 2 d'axe de rotation  $\Delta$  roulent sans glisser sur le planétaire 4. L'axe  $OB$  de ce planétaire tourne de l'angle  $\varphi$  autour de  $\Delta$ . La pièce 3, appelée porte satellite tourne également de l'angle  $\varphi$  autour de  $\Delta$  par rapport au bâti. (Remarque : 4 reste libre en rotation autour de son axe par rapport à 3.) Voir figure 4.

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2} \implies \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

2) Représentation schématique

La figure 5 représente schématiquement l'architecture d'un différentiel d'automobile. L'axe ( $\Delta$ ) autour duquel tournent les solides 1, 2, 3 est horizontal. Il comporte

2 satellites (repère 4) ce qui ne change rien au principe cinématique mais permet d'équilibrer les efforts.

$N_i$  désignant le taux de rotation du solide  $i$  autour de  $(\Delta)$  par rapport au bâti (non représenté),

$$N_1 + N_2 = 2 N_3.$$

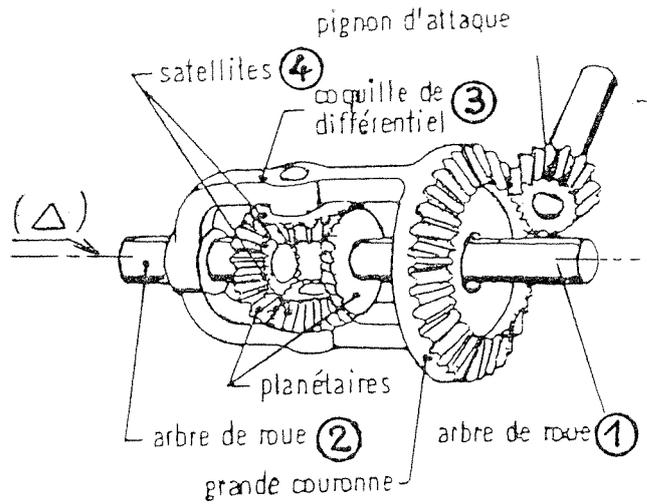


Figure 5  
Différentiel

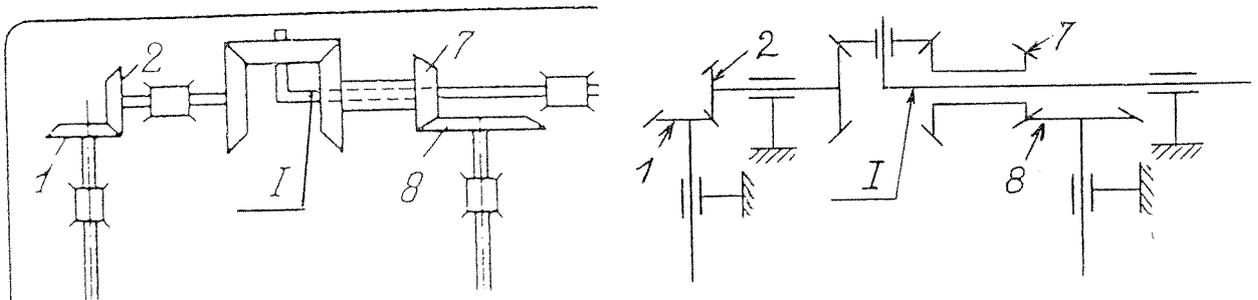


Figure 6

Figure 7

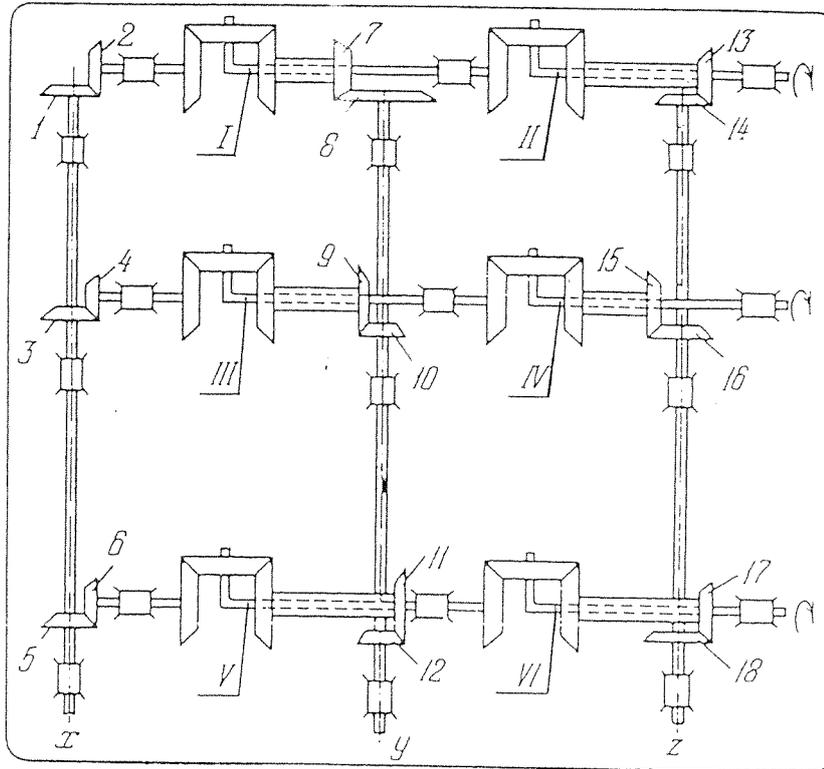


Figure 8

Mécanisme denté destiné à résoudre  
un système  
d'équations algébriques linéaires

### 3.— MÉCANISME DENTÉ POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

#### 1) Explication de la figure 8 :

Le système comporte six différentiels sphériques. Par rapport à ce qui précède, la "coquille de différentiel" ou porte satellites (notée I pour l'arbre supérieur) au lieu d'envelopper les arbres des planétaires, passe à l'intérieur de l'un d'entre eux.

La comparaison du schéma original partiel en vue extérieure (fig. 6) avec le schéma cinématique en coupe (fig. 7) précise les possibilités de rotation des différents solides.

#### 2) Fonctionnement

##### a) Principe :

Étant donnée une position de repos quelconque du mécanisme :

Si les arbres d'entrée horizontaux II, IV et VI tournent respectivement des quantités  $\frac{c_1}{4}$ ,  $\frac{c_2}{4}$ ,  $\frac{c_3}{4}$ , alors les arbres verticaux tournent respectivement des quantités  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

**b) Vérification :**

- Notations et relations de base :

Notons  $\varphi_i$  la rotation angulaire de l'arbre  $i$ . Les rapports de réduction  $i_{7,8} - i_{9,10} - i_{11,12}$  sont, par construction, respectivement égaux à  $a_1, a_2, a_3$ ; on a donc les relations :

$$\frac{\varphi_7}{\varphi_8} = a_1 ; \frac{\varphi_9}{\varphi_{10}} = a_2 ; \frac{\varphi_{11}}{\varphi_{12}} = a_3 \quad (1).$$

De même, les rapports de réduction  $i_{13,14} - i_{15,16} - i_{17,18}$  sont choisis respectivement égaux à  $0,5b_1 ; 0,5b_2 ; 0,5b_3$ . (Le signe des rapports dépend de la position des deux engrenages.)

D'où les relations :

$$\frac{\varphi_{13}}{\varphi_{14}} = 0,5b_1 ; \frac{\varphi_{15}}{\varphi_{16}} = 0,5b_2 ; \frac{\varphi_{17}}{\varphi_{18}} = 0,5b_3 \quad (2)$$

Par ailleurs pour chaque différentiel on a une relation du type (cf. fig. 7)

$$\varphi_2 + \varphi_7 = 2\varphi_I.$$

- Synthèse :

Pour l'arbre horizontal supérieur, de gauche à droite, on déduit des relations précédentes :

$$(3) \quad \varphi_2 + \varphi_7 = 2\varphi_I \text{ et } \varphi_I + \varphi_{13} = 2\varphi_{II} = 2\left(\frac{c_1}{4}\right)$$

d'où

$$\varphi_2 + \varphi_7 = 2\left(\frac{c_1}{2} - \varphi_{13}\right)$$

avec :

$$(1) \quad \varphi_7 = a_1\varphi_8$$

soit

$$\varphi_2 + a_1\varphi_8 + 2\varphi_{13} = c_1$$

avec

$$(2) \quad \varphi_{13} = \left(\frac{b_1}{2}\right)\varphi_{14}.$$

D'où finalement

$$\varphi_2 + a_1\varphi_8 + b_1\varphi_{14} = c_1$$

un raisonnement analogue conduit à :

$$\begin{aligned} \varphi_4 + a_2\varphi_{10} + b_2\varphi_{16} &= c_2 \\ \varphi_6 + a_3\varphi_{12} + b_3\varphi_{18} &= c_3. \end{aligned}$$

## DU DIFFÉRENTIEL AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comme d'autre part les rapports de réduction  $i_{1,2}$ ,  $i_{3,4}$  et  $i_{5,6}$  valent 1 et que les engrenages 1, 3, 5 sont solidaires de l'axe  $x$ , les engrenages 8, 10, 12 de l'axe  $y$  et 14, 16, 18 de l'axe  $z$ , les trois équations précédentes s'écrivent aussi :

$$x + a_1y + b_1z = c_1$$

$$x + a_2y + b_2z = c_2$$

$$x + a_3y + b_3z = c_3.$$

### Références :

Figures 1 - 2 - 8 :

Les mécanismes de la technique moderne, Tome 3, par I. ARTOBOLVSKI aux éditions de Moscou (MIR).

Figure 5 :

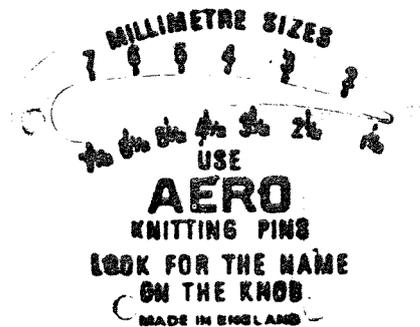
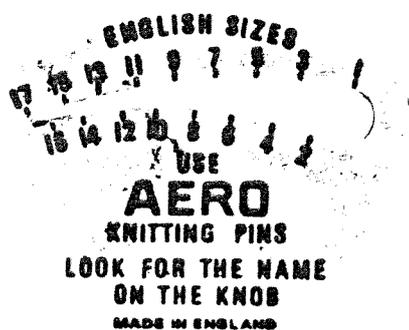
Dictionnaire encyclopédique LAROUSSE.

### GAGNEZ UN ABONNEMENT GRATUIT POUR UN TIERS

Les mesures anglo-saxonnes réservent bien des surprises. Il est assez naturel de mesurer la grosseur des aiguilles à tricoter par leur diamètre en millimètres. On pourrait penser que les anglais utiliseraient des huitièmes de pouce, à la rigueur; mais non!

L'appareil ci-dessous permet la conversion des mesures millimétriques en mesures anglaises et vice-versa, en introduisant et en coinçant l'aiguille dans la fente oblongue. Chaque type de mesure est donné sur l'une des deux faces de l'instrument.

Trouvez une formule mathématique simple permettant de passer d'une des mesures à l'autre.



# LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Jean LEFORT

## 7.— UN SYSTÈME ORIGINAL : LES CALENDRIERS MAYAS

### 1) Généralités

Il est bien naturel que le Soleil ou la Lune, voire les deux à la fois règlent le temps. Ce sont les deux astres les plus voyants et leur divinisation dans toutes les civilisations en faisait facilement des gardiens de l'ordre du monde, souvent mari et femme. Bâtir un calendrier sur leur cycle somme toute assez régulier, était et est dans l'ordre des choses. Mais on sait que d'autres astres ont été divinisés. Nous avons vu le rôle de l'étoile SIRIUS dans le calendrier vague égyptien. Nous croyons que tous les lecteurs ont des notions suffisantes du panthéon gréco-romain pour savoir que toutes les planètes visibles à l'œil nu ont reçu chacune les attributs d'un dieu ou d'une déesse. Le mouvement presque erratique des planètes dans le ciel ne pouvait que leur concéder des qualités surnaturelles; planète vient du grec *πλανητες* qui signifie "errant". Dans une civilisation reposant largement sur une économie agricole et vivant sous un ciel clair, on pourrait imaginer que n'importe quelle planète puisse être à la base d'un cycle du calendrier. Seul le cas de Vénus, chez les mayas et les aztèques, s'est vu confier un tel rôle parallèlement à une année scolaire de 365 jours et une "année religieuse" de 260 jours.

La civilisation maya s'épanouit entre le 4<sup>e</sup> et le 10<sup>e</sup> siècle puis déclina jusqu'à l'arrivée des espagnols, tandis que la civilisation aztèque ne commence vraiment qu'au 13<sup>e</sup> siècle. Il est donc fort probable qu'il y a eu emprunt des aztèques aux mayas, d'autant plus que lors du déclin de la civilisation maya, la période dite mexicaine des 11<sup>e</sup> et 12<sup>e</sup> siècles se caractérise par une forte interpénétration avec les cultures toltèques et aztèques. Nous nous contenterons d'étudier ci-après les calendriers mayas. Rappelons que ceux-ci utilisaient une numération de base vingt avec un zéro. La numération est presque de position et c'est pourquoi nous écrivons les nombres sous la forme 11.5.2 pour signifier  $11 \times 20^2 + 5 \times 20 + 2 = 4502$  chaque fois que nous aurons à donner un exemple concret tiré de l'archéologie maya.

### 2) Le calendrier religieux

Il est basé sur deux cycles, l'un de 13 l'autre de 20 jours, ce qui donne à ce calendrier une durée de 260 jours pour "l'année religieuse". Le cycle de 20 jours est matérialisé par les 20 noms de jours suivants qui sont des noms du panthéon maya au symbolisme très complexe :

## LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

1 IMIX	6 CIMI	11 CHUEN	16 CIB
2 IK	7 MANIK	12 EB	17 CABAN
3 AKBAL	8 LAMAT	13 BEN	18 EZNAB
4 KAN	9 MULUC	14 IX	19 CAUAC
5 CHICCHAN	10 OC	15 MEN	20 AHAU

Le cycle de 13 est matérialisé par les nombres de 1 à 13, 13 étant un nombre sacré car dans la mythologie maya il y a 13 cieux.

Si  $X$  est un des 20 noms et  $\alpha$  un élément du cycle de 13, toute date de l'année religieuse s'écrit  $\alpha X$ . On note  $x$  le numéro associé à  $X$  tel qu'il ressort du tableau ci-dessus (1). Augmenter la date d'un jour revient à augmenter  $\alpha$ , le coefficient, et  $x$  le numéro de jour, d'une unité, modulo 13 et 20 respectivement.



13 CHUEN



4 IMIX

Exemples de dates  
dans le calendrier religieux

Dans le fond, le cycle de 20 jours fonctionne un peu comme notre cycle des 7 jours de la semaine, le coefficient correspondant au quantième du mois; la grande régularité du calendrier religieux maya permettant d'éviter de préciser le nom du mois; c'est comme si il n'y avait qu'un vendredi 13 par an, toujours à la même place!

### 3) Le calendrier vague :

Il est basé sur 18 "mois" de 20 jours, le tout complété par 5 jours, ce qui donne un total de 365 jours. Les jours de chaque mois sont numérotés de 0 à 19 (et de 0 à 4 pour les 5 jours complémentaires). Les mois se succèdent dans l'ordre suivant (on donne entre parenthèses la date du premier jour du mois dans notre calendrier, pour une année ordinaire, au moment de la conquête espagnole) :

1 POP (16.7)	8 MOL (3.12)	15 MUAN (22.4)
2 UO (5.8)	9 CHEN (23.12)	16 PAX (12.5)
3 ZIP (25.8)	10 YAX (12.1)	17 KAYAB (1.6)
4 ZOTZ (14.9)	11 ZAC (1.2)	18 CUMHU (21.6)
5 TZEC (4.10)	12 CEH (21.2)	
6 XUL (24.10)	13 MAC (13.3)	19 UAYEB (11.7)
7 YAXKIN (13.11)	14 KANKIN (2.4)	

Chaque mois avait une signification très précise, les 5 jours d'UAYEB étant des jours "fantômes" maléfiques. Sans entrer dans la symbolique et la mythologie

---

(1) Alors que l'année religieuse commence le 1 IMIX, les noms des jours étaient associés aux nombres de 1 à 13 en partant de CABAN et en allant jusqu'à MULUC.

mayas, pas toujours entièrement élucidée, remarquons que l'on n'a jamais trouvé de représentation d'UAYEB car ces jours de malheur ne devaient pas être nommés.

Une date dans le calendrier vague s'écrit  $\beta Y$  où  $\beta$  est un entier de 0 à 19 (de 0 à 4 si  $Y$  est UAYEB) et  $Y$  le nom d'un "mois". On note  $y$  le numéro associé à  $Y$  (comme dans le tableau ci-dessus). Le principe est donc analogue à celui de notre calendrier, où l'on écrit "25 janvier" ( $\beta Y$ ) ou bien 25.01 ( $\beta y$ ).

#### 4) Le cycle calendaire

Les mayas eurent l'idée de réunir l'année religieuse et l'année vague. Une date quelconque s'écrivant alors  $\alpha X \beta Y$  ( $\alpha$  est le coefficient,  $X$  le jour,  $\beta$  le quantième et  $Y$  le mois). Le plus petit commun multiple de 260 et 365 étant  $18980 = \frac{260 \times 365}{5}$ , on obtient ainsi un cycle calendaire de 52 années vagues ou de 73 années religieuses.



Exemple de date  
dans le cycle calendaire

Il est clair que parmi toutes les combinaisons  $\alpha X \beta Y$  seule le cinquième d'entre-elles sont possibles. L'ensemble de ces combinaisons possibles est déterminé par la donnée d'une seule, l'origine du cycle calendaire, par exemple. Pour vérifier que deux dates  $\alpha X \beta Y$  et  $\alpha' X' \beta' Y'$  sont compatibles, il suffit de vérifier que :

$$x' - x = \beta' - \beta \text{ modulo } 5.$$

En effet,  $x$  et  $\beta$  prennent tous les deux vingt valeurs différentes en augmentant d'une unité chaque jour. Les différences  $x' - x$  et  $\beta' - \beta$  sont identiques modulo 20 (donc modulo 5) tant qu'on ne franchit pas les 5 jours néfastes d'UAYEB. Mais ces 5 jours ne modifient pas la congruence modulo 5.

De façon très symbolique, en raison des significations divines attribuées aux quatre mots qui composent cette date, le jour 4 AHAU 8 CUMHU (2) a été retenue comme origine des temps et donc d'un cycle calendaire. Il est alors intéressant de calculer les dates du calendrier religieux qui correspondent au premier jour de chaque année vague du cycle calendaire. Comme il faut ajouter 17 jours à 8 CUMHU pour obtenir 0 POP (12 jours à CUMHU et les 5 jours d'UAYEB), on obtient en représentation numérique :  $([8+17]_{13}, [20+17]_{20}) = (8, 17)$ , c'est-à-dire 8 CABAN 0 POP. Si maintenant nous ajoutons 365 jours pour trouver l'année suivante, comme  $[365]_{13} = 1$  et  $[365]_{20} = 5$ , il suffit d'ajouter 1 au coefficient et 5

---

(2) Dans la mythologie maya, les nombres sont divinisés. Nous avons vu que AHAU est associé à 4 et il représente le soleil. CUMHU est associé au maïs, or, le maïs est représenté par le dieu "8". N'est-ce pas là un choix hautement symbolique sur les sources de la vie?

LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

au jour pour obtenir la succession des “porteurs d’année” :

8 CABAN	0 POP
9 IK	0 POP
10 MANIK	0 POP
11 EB	0 POP
12 CABAN	0 POP
13 IK	0 POP...

En partant de CABAN et en comptant les jours de 5 en 5 on n’obtient que ceux indiqués, à savoir CABAN, IK, MANIK, EB. Ces 4 jours sont d’ailleurs ceux associés au premier jour de chaque mois, mais bien sûr avec des coefficients  $\alpha$  différents.

**5) L’ère maya**

Le cycle calendaire joue un rôle analogue à celui de nos siècles. Encore faut-il choisir une origine des cycles calendaires. Comme tous les peuples, les mayas choisirent une origine très lointaine dans le passé, environ 3100 ans avant notre ère.

Depuis cette origine très reculée, les mayas comptent non pas les années mais les jours regroupés en “année de compte” de 360 jours. N’oublions pas, pour comprendre ce fait, que les 5 jours d’UAYEB ne doivent pas être nommés, mais que cela ne les empêche pas d’exister. Au demeurant ceci ne doit pas tellement nous choquer puisque chez nous, les financiers utilisent une année réglementaire de 12 mois de 30 jours. Une date dans l’ère maya sera donc écrite, par exemple :

$$8.14.3.1.12 \quad 1 \text{ EB } 0 \text{ YAXKIN} \quad (3)$$

qui est lue : 8 baktuns, 14 katuns, 3 tuns, 1 uinal, 12 kins.

N’oublions pas qu’il s’agit d’une numération en base 20; le nombre des “années de compte” est donné par les trois chiffres : 8.14.3. soit  $8 \times 20^2 + 14 \times 20 + 3 = 3483$ , auquel il faut ajouter 1.12 c’est-à-dire un “mois” et 12 jours, ce qui conduit à un total de  $3483 \times 360 + 1 \times 20 + 12 = 1\,253\,912$  jours. On peut vérifier que ce décompte est compatible avec une origine située lors d’un 4 AHAU 8 CUMHU pour aboutir à 1 EB 0 YAXKIN :

$$\begin{aligned} 1\,253\,912 &= 66 \times 18980 + 1232 \\ &= 66 \text{ cycles calendaires et } 1232 \text{ jours} \\ 1\,232 &= 3 \times 365 + 137 \\ &= 3 \text{ années vagues et } 137 \text{ jours.} \end{aligned}$$

Par ailleurs 4 AHAU 8 CUMHU et 1 EB 0 YAXKIN s’écrivent numériquement 4;20;8;18 et 1;12;0;7. Nous pouvons négliger les cycles calendaires qui ne modifient

---

(3) Cette date a été choisie comme exemple car c’est la plus ancienne date attestée dans la civilisation maya.

pas la date; ajouter 3 années vagues revient à augmenter le coefficient de 3 et le jour de  $3 \times 5$  (modulo 13 et 20 respectivement) d'où :

$$4;20;8;18 + 3 \text{ années vagues} = 7;15;8;18.$$

Pour ajouter les 137 derniers jours, remarquons qu'il manque 12 jours pour atteindre UAYEB et 5 jours supplémentaires pour atteindre le début de l'année vague (0 POP) soit au total 17 jours; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} 7;15;8;18 + 137 \text{ jours} &= 7;15;8;18 + 17 \text{ jours} + 120 \text{ jours} \\ &= [24]_{13}; [32]_{20}; 0; 1 + 120 \text{ jours} \\ &= 11; 12; 0; 1 + 120 \text{ jours} \\ &= [131]_{13}; [132]_{20}; [120]_{20}; [1 + 120/20] \\ &= 1; 12; 0; 7. \end{aligned}$$

Il est regrettable pour l'archéologie que les mayas n'aient pas gardé cette façon de compter mais l'aient progressivement abrégée, d'abord en supprimant les "baktuns", l'unité la plus élevée, puis les "katuns", ce qui était la situation à l'arrivée des espagnols. Ne jetons pas la pierre à cette civilisation, nous écrivons bien 2-2-92 au lieu de 2 février 1992 ce qui est une abréviation qui correspond à la même démarche.

## 6) L'intervention de Vénus

La révolution synodique de Vénus, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que Vénus et la Terre se retrouvent dans la même position relative par rapport au Soleil est de 583,921 376 jours. Dans la pratique cette durée oscille entre 580 et 587 jours en raison de l'excentricité des orbites.

La valeur moyenne de 584 jours est une bonne approximation et les mayas ont dû être frappés par la coïncidence extraordinaire de ce nombre avec leur calendrier :

$$584 \times 65 = 37\,960 = 2 \text{ cycles calendaires}$$

c'est-à-dire que tous les deux cycles calendaires, non seulement Vénus reprend la même position dans le ciel mais encore le fait-elle à la même date.

Cause ou effet ? Il se trouve que la date 1 AHAU du calendrier religieux est associée au lever héliaque de Vénus, aussi les mayas voudront-ils prévoir le retour du lever héliaque de l'étoile du berger à cette même date. Ayant remarqué que la durée de 584 jours est un peu trop forte, ils aboutirent à une correction de 24 jours en 301 périodes de 584 jours, ce qui donne la valeur moyenne de 583,920 266 jours pour la révolution synodique de la planète. C'est une valeur excellente. Ces 24 jours sont répartis de la façon suivante :

$$\text{Comme } 61 \times 584 = 137 \times 260$$

$$\text{et } 57 \times 584 - 8 = 128 \times 260$$

les mayas vont ôter 4 jours quatre fois de suite toutes les 137 "années religieuses" puis ils ôteront 8 jours au bout de 128 "années religieuses". Il apparaît ainsi un nouveau cycle de 676 "années religieuses" soit de plus de 480 années vagues.

## LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Toute la civilisation maya reposait sur une conception cyclique du monde. Deux cycles calendaires c'est plus d'un siècle ce qui est déjà long pour une vie humaine. Or, les mayas utiliseront une période de 18 cycles calendaires soit 341 640 jours (près de mille ans). Ce nombre de jours est à la fois multiple de :

260	durée de "l'année religieuse"
365	durée de l'année vague
584	durée d'une révolution synodique de Vénus
360	durée de l'année de compte
780	durée de la révolution synodique de Mars
9	nombre des dieux de la nuit (4).

Comme toutes les civilisations, les mayas avaient voulu construire un calendrier aussi rigoureux que possible afin de défier le temps.

### 8.— CONCLUSION

Arrêtons-nous dans notre périple à travers les temps et les peuples. D'autres pourront compléter ce qui semble leur manquer, en particulier sur le calendrier chinois traditionnel (5). Mais si nous reprenons notre survol, nous voyons que chaque civilisation a voulu construire un calendrier qui défie le temps, d'une part en faisant souvent remonter son origine le plus loin possible dans le passé et un passé la plupart du temps mythique, d'autre part en assurant une concordance la plus exacte possible avec le mouvement des astres. La mise en évidence de cycles a influencé plus ou moins chaque culture. Souvent la complexité l'a emporté pour asseoir le pouvoir des dirigeants religieux ou civils (ce furent souvent les mêmes) sans que cette complexité apporte un réel bénéfice à l'échelle d'une vie humaine.

Les mesures astronomiques actuelles montrent bien l'inanité de la recherche d'une régularité ultime, les mouvements au sein du système solaire étant chaotiques à l'échelle du million d'années. Mais cela n'empêche pas l'homme de toujours essayer de prévoir son avenir et force est de constater que c'est par la volonté d'obtenir une mesure du temps de plus en plus rigoureuse que l'accumulation des observations au cours des millénaires a permis d'établir des valeurs très précises de diverses "constantes" astronomiques : année sidérale, année tropique, révolution synodique des planètes, saros, ... et c'est justement parce que ces divers calendriers ont été établis sur des millénaires que les observations ont pu servir d'une civilisation à l'autre concourant ainsi à l'évolution globale de la pensée humaine.

---

(4) Ce nombre de 341 640 jours correspond aussi à 11 569 lunaisons de 29,530 640 jours ce qui est une excellente approximation du retour des phases de la Lune.

(5) Le calendrier chinois traditionnel est un calendrier luni-solaire où l'on répartit 7 mois supplémentaires en 19 années qui ont 354, 355, 383 ou 384 jours. Les années et les jours sont regroupés en cycles de 60. Se superposant à ce rythme mensuel des sections de saisons, les TCHIE-TCHI (alternativement un TCHIE et un TCHI) correspondant à 24 points du soleil régulièrement réparti sur l'écliptique. Un mois peut comporter de 1 à 3 tchiéchi, un mois supplémentaire ne pouvant pas comporter de tchi.

Peut-être que demain, les hommes s'installant de façon plus ou moins temporaire sur d'autres planètes, une nouvelle manière de mesurer le temps deviendra nécessaire. N'ayons pas la prétention de croire que notre calendrier ou même notre civilisation immortels, mais sachons que nous avons notre place dans la construction de l'avenir de l'humanité.

## Bibliographie

- 1) Ephémérides de "L'ASTRONOMIE", par exemple l'année 1990, chez Masson  
*Des renseignements élémentaires sur la plupart des calendriers encore en vigueur.*
- 2) "Le calendrier", par P. COUDERC, collection "Que sais-je?", P.U.F., 1981.  
*Indispensable pour avoir le point de vue astronomique. Très complet sur les origines et l'évolution du calendrier grégorien.*
- 3) "Histoire comparée des numérations écrites", par G. GUITEL, Flammarion, 1975.  
*Très fouillé sur le calendrier maya.*
- 4) Annuaire du Bureau des longitudes, année 1965, chez Gauthier-Villars.  
*Beaucoup plus complet que (1); donne des éléments de calcul sur de nombreux phénomènes, en particulier sur la date de Pâques dans les calendriers julien et grégorien.*
- 5) Conférence de M. Robert DREYFUS à l'A.J.C.F. de Boulogne le 11/1/73, (non publiée).  
*Je n'aurais pas réussi à traiter le calendrier israélite sans son aide. Pour ceux qui lisent l'allemand, ce qui n'est pas mon cas, on peut consulter : "System der Chronologie" par BROCKMANN, Stuttgart 1883 ou bien "Geschichte und System des jüdischen Kalenderwesens" par LEWISOHN, 1856.*
- 6) GAUSS Werke : Tome VI  
*La référence pour les divers calculs des dates de Pâques, mais ses algorithmes ont été améliorés.*
- 7) "L'Ouvert" n° 29, 30 et 34 respectivement d'octobre 82, mars 83 et mars 84.  
*Pour des compléments sur la réforme grégorienne et sur le calendrier gaulois.*
- 8) Calculs astronomiques, par Jean MEEUS, 2e éd. Willmann-Bell, 1980.

---

### NOUVELLE BROCHURE APMEP :

### FRAGMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES III

### "Émergence du concept de groupe"

Comme l'indique le B.G.V. (Bulletin à Grande Vitesse de l'A.P.M.E.P.) n° 43 de février 1992 : "Le titre de cette brochure est "émergence du concept de groupe". Une faute d'orthographe s'est malheureusement glissée dans le titre écrit sur la couverture. Bien que nous soyons enseignants de mathématiques, nous n'ignorons pas l'orthographe. Nous vous prions de bien vouloir nous excuser pour "l'émergence" intempestive de fautes grossières!"

Cette brochure est en vente :

— sur place, à la bibliothèque de l'IREM au prix de 80 F ;

— par correspondance, à l'APMEP à Paris, au prix de 115 F (prix franco de port).

**En aucun cas elle ne sera envoyée si vous vous adressez à nous.**

Voir page 36 pour la page de couverture et le sommaire.

---

## LA DIVISION EN BASE $b$

Raymond SEROUL

Soit  $b > 1$  un entier quelconque. On sait que tout entier  $x > 0$  s'écrit de manière unique sous la forme :

$$(1) \quad x = x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \cdots + x_0$$

si l'on impose les conditions

$$(2) \quad 0 \leq x_i < b \quad \text{pour } i = 0, \dots, n \quad \text{et } x_n \neq 0.$$

Par la suite, nous noterons  $x = \overline{x_n x_{n-1} \cdots x_0}$  l'égalité (1).

Soient  $x = \overline{x_n x_{n-1} \cdots x_0}$  et  $y = \overline{y_p y_{p-1} \cdots y_0}$  deux entiers ( $x_n \neq 0$ ,  $y_p \neq 0$ ). On sait qu'il existe un unique couple  $(q, r)$  d'entiers qui satisfait

$$x = qy + r, \quad 0 \leq r < y.$$

Nous avons tous appris, dans notre première jeunesse, un algorithme qui détermine les chiffres de  $q$  et  $r$  à partir de ceux de  $x$  et  $y$ . Comparé aux algorithmes de l'addition, de la soustraction et de la multiplication, cet algorithme est complexe et nécessite une certaine dose d'expérimentation; d'où sa mauvaise réputation.

Quiconque a essayé de programmer l'algorithme de la division en base  $b$  a éprouvé de nouveau ces difficultés. Nous allons donc décrire en détail cet algorithme et le démontrer. En outre, nous verrons quels problèmes se posent lorsque l'on passe à la programmation.

### 1. La règle du jeu

Nous supposons que nous ne connaissons que les tables d'addition et de multiplication en base  $b$ . En clair, cela signifie que :

- nous savons effectuer des additions, des soustractions et des multiplications en base  $b$ ;
- par contre, nous ne savons pas effectuer de division. Au stade où nous en sommes, tout ce que nous nous savons faire, c'est effectuer la division d'un nombre ayant au plus deux chiffres par un nombre à un chiffre (en 'lisant à l'envers' la table de multiplication).

### 2. La division en base $b$

Commençons par nous rafraîchir la mémoire. Nous travaillons en base dix. Il s'agit de diviser  $x = 1\,562\,693$  par  $y = 237$ .

	$\xi$	$y$
$x \rightarrow$	1 5 6 2 6 9 3	2 3 7
$q_1 y \rightarrow$	1 4 2 2 . . .	6 5 9 3
$s_1 \rightarrow$	1 4 0 6 . .	↑ ↑ ↑ ↑
$q_2 y \rightarrow$	1 1 8 5 . .	$q_1 q_2 q_3 q_4$
$s_2 \rightarrow$	2 2 1 9 .	
$q_3 y \rightarrow$	2 1 3 3 .	
$s_3 \rightarrow$	8 6 3	
$q_4 y \rightarrow$	7 1 1	
$r_4 \rightarrow$	1 5 2	

*Division de  $x = 1562693$  par  $y = 237$ .*

- On recherche d'abord le plus petit entier  $\xi \geq y$  formé avec les premiers chiffres de  $x$ . On trouve  $\xi = 1562$ .
- On détermine la partie entière de  $\xi/y$  en posant la question : *en 1562, combien va-t-il de fois 237 ?* Comme nous ne connaissons que la table de multiplication, nous ne savons pas répondre à cette question. Nous supprimons alors deux chiffres à la fin des deux nombres et nous remplaçons la question précédente par la question : *en 15, combien va-t-il de fois 2 ?* La réponse  $q_1 = 7$  est trop forte puisque  $7 \times 237 = 1659 > 1562$ . On diminue donc  $q_1$  d'une unité; comme  $6 \times 237 \leq 1562$ , on sait que  $q_1 = 6$  est la partie entière désirée.
- On calcule  $r_1 = \xi - q_1 y = 140$ , puis on abaisse le chiffre suivant de  $x$ , ce qui donne  $s_1 = 1406$ .
- On détermine la partie entière de  $s_1/y$  par le même procédé : *dans 14, combien va-t-il de fois 2 ?* La réponse  $q_2 = 7$  est trop forte :  $7 \times 237 = 1659 > 1406$ . On diminue donc  $q_2$  d'une unité pour constater que ce n'est pas encore la bonne réponse :  $6 \times 237 = 1422 > 1406$ . Il faut donc recommencer pour obtenir la bonne partie entière :  $q_2 = 5$ .
- On calcule  $r_2 = s_1 - q_2 y = 221$ , puis on abaisse le chiffre suivant de  $x$  pour obtenir  $s_2 = 2219$ .
- On détermine la partie entière de  $2219/237$ . La question : *en 22, combien va-t-il de fois 2 ?* donne une réponse trop élevée pour un chiffre. On commence donc avec  $q_3 = 9$ , qui est d'ailleurs la bonne réponse.
- L'algorithme se poursuit :  $r_3 = s_2 - q_3 y = 86$  et  $s_3 = 863$ , puis  $q_4 = 3$ .
- La division s'achève avec  $r_4 = s_3 - q_4 y = 152$ .

### 3. Justification de l'algorithme

L'algorithme de la division euclidienne consiste donc à définir deux suites récurrentes  $r_1, \dots, r_{m+1}$  et  $s_1, \dots, s_m$  :

$$(3) \quad \begin{aligned} r_i &= s_{i-1} - q_i y, \\ s_i &= b r_i + x_{m-i}, \quad (s_0 = \xi), \end{aligned}$$

où  $\xi = \overline{x_n \dots x_m}$  est le plus petit entier  $\geq y$  formé avec les premiers chiffres de  $x$  et où  $q_i = [s_{i-1}/y]$ , le crochet désignant la partie entière.

LA DIVISION EN BASE  $b$

$$\begin{array}{l|l}
 x \rightarrow \overbrace{x_n \cdots x_m}^{s_0} x_{m-1} \cdots x_0 & y \\
 \left\{ \begin{array}{l} r_1 = s_0 - q_1 y \\ s_1 = br_1 + x_{m-1} \end{array} \right. & \overline{q_1 \cdots q_{m+1}} \\
 \left\{ \begin{array}{l} r_2 = s_1 - q_2 y \\ s_2 = br_2 + x_{m-2} \\ \dots \end{array} \right. & q_i = [s_{i-1}/y] \\
 \left\{ \begin{array}{l} r_m = s_{m-1} - q_m y \\ s_m = br_m + x_0 \end{array} \right. & \\
 r_{m+1} = s_m - q_{m+1} y &
 \end{array}$$

*Description de la division en base  $b$ .*

Théorème 1.— *L'algorithme de la division détermine correctement les chiffres du quotient.*

Quelle information pouvons-nous déduire de (3)? En multipliant par  $b^{m-i}$  l'égalité  $r_i = br_{i-1} + x_{m-i+1} - q_i y$  pour  $i = m, \dots, 0$ ,

$$\begin{array}{l|l}
 b^m & r_1 = \xi - q_1 y \\
 b^{m-1} & r_2 = br_1 + x_{m-1} - q_2 y \\
 \dots & \dots \\
 b & r_m = br_{m-1} + x_1 - q_m y \\
 1 & r_{m+1} = br_m + x_0 - q_{m+1} y
 \end{array}$$

et, en ajoutant membre à membre, on obtient

$$(4) \quad x = (q_1 b^m + q_2 b^{m-1} + \cdots + q_{m+1})y + r_{m+1}.$$

Si les  $q_i$  sont des chiffres (c'est-à-dire si  $0 \leq q_i < b$ ) et si  $0 \leq r_{m+1} < y$ , nous savons que l'écriture du quotient dans la base  $b$  est  $\overline{q_1 \cdots q_{m+1}}$ .

Commençons par prouver que l'on a

$$y \leq \xi < by.$$

Posons  $\zeta = \overline{x_n \cdots x_{m+1}}$ , de sorte que  $\xi = b\zeta + x_m$ . Vu la définition de  $\xi$ , nous avons  $\zeta < y$ , ce qui s'énonce encore  $\zeta \leq y - 1$ . Il en résulte que  $\xi \leq b(y - 1) + b - 1 \leq by - 1 < by$ .

La double inégalité  $y \leq \xi < by$  montre que  $q_1 = [\xi/y]$  est un chiffre différent de 0. Puisque  $\xi = q_1 y + r_1$ , nous voyons que  $0 \leq r_1 < y$ . De l'inégalité  $s_1 = br_1 + x_{m-1} \leq b(y - 1) + b - 1 = by - 1$ , on déduit aussitôt que  $q_2$  est un chiffre. Une récurrence facile permet de conclure.  $\square$

```

déterminer  $\xi = \overline{x_n \cdots x_m}$  ;
 $q_1 := \lfloor \xi / y \rfloor$  ;  $r_1 := \xi - q_1 y$  ;
for  $i := 1$  to  $m$  do begin
     $s_i := b r_i + x_{m-i}$  ;
     $q_{i+1} := \lfloor s_i / y \rfloor$  ;
     $r_{i+1} := s_i - q_{i+1} y$  ;
end ;
end ;
    
```

*Algorithme de la division (version idéale).*

#### 4. Estimation efficace des parties entières

Pour estimer la partie entière  $[u/v]$  (en  $u$ , combien va-t-il de fois  $v$  ?), nous n'avons droit qu'à la table de multiplication. C'est pour cette raison que nous remplaçons  $q = [u/v]$  par une estimation  $\bar{q}$  obtenue en changeant de question.

Décrivons de manière précise ce changement. Soient  $u$  et  $v$  deux entiers qui vérifient  $0 < v \leq u < bv$ , de sorte que  $q = [u/v]$  est un chiffre différent de zéro.

- Si  $u$  et  $v$  ont le même nombre de chiffres, soit  $\bar{u}$  le premier chiffre de  $u$ . Si  $u$  a un chiffre de plus que  $v$ , soit  $\bar{u}$  le nombre formé des deux premiers chiffres de  $u$ .
- Soit  $\bar{v}$  le premier chiffre de  $v$ .

Pour simplifier l'exposé, introduisons quelques notations :

$$u = \overline{u_{n+1}u_n \cdots u_0}, \quad v = \overline{v_n \cdots v_0}.$$

(Si  $u$  et  $v$  ont le même nombre de chiffres, on a  $u_{n+1} = 0$ .) Nous avons donc  $\bar{u} = \overline{u_{n+1}u_n}$  et  $\bar{v} = v_n$ . Posons encore  $B = b^n$  et

$$\bar{\bar{u}} = \overline{u_{n-1} \cdots u_0}, \quad \bar{\bar{v}} = \overline{v_{n-1} \cdots v_0},$$

de sorte que  $u = B\bar{u} + \bar{\bar{u}}$  et  $v = B\bar{v} + \bar{\bar{v}}$  avec  $\bar{\bar{u}} < B$  et  $\bar{\bar{v}} < B$ .

En ne disposant que de la table de multiplication, tout ce que nous pouvons faire c'est estimer  $q = [u/v]$  par le nombre

$$(5) \quad \bar{q} = \min \left\{ b - 1, \left\lfloor \frac{\bar{\bar{u}}}{\bar{\bar{v}}} \right\rfloor \right\}.$$

Plusieurs théorèmes vont préciser la validité de cette estimation.

**Théorème 2.** — *On a toujours  $q \leq \bar{q}$ .*

*Démonstration.* — Si  $\bar{q} = b - 1$ , c'est terminé. Supposons alors  $\bar{q} = \lfloor \bar{\bar{u}} / \bar{\bar{v}} \rfloor$ . Nous pouvons écrire

$$\frac{u}{v} = \frac{B\bar{u} + \bar{\bar{u}}}{B\bar{v} + \bar{\bar{v}}} \leq \frac{B\bar{u} + b - 1}{B\bar{v}}.$$

Vu la croissance de la fonction partie entière, la démonstration sera terminée si nous prouvons que la partie entière de  $(B\bar{u} + b - 1)/(B\bar{v})$  est  $\bar{q}$ . Pour cela, il suffit d'établir les inégalités

$$\bar{q} \leq \frac{B\bar{u} + b - 1}{B\bar{v}} < \bar{q} + 1.$$

L'inégalité de gauche est immédiate

$$\bar{q} \leq \frac{\bar{u}}{\bar{v}} = \frac{B\bar{u}}{B\bar{v}} < \frac{B\bar{u} + b - 1}{B\bar{v}}.$$

Pour prouver l'inégalité de droite, partons de  $[\bar{u}/\bar{v}] < \bar{q} + 1$ , ce qui s'écrit encore  $\bar{u} \leq (\bar{q} + 1)\bar{v} - 1$ . A partir de là, on a

$$\begin{aligned} B\bar{u} + b - 1 &\leq B((\bar{q} + 1)\bar{v} - 1) + b - 1 \\ &\leq B(\bar{q} + 1)\bar{v} - 1 < B(\bar{q} + 1)\bar{v} \end{aligned}$$

si  $b - B \leq 0$ , ce qui est vrai lorsque  $n \geq 1$ . Lorsque  $n = 0$ , on a  $u = \overline{u_1 u_0} = \bar{u}$ ,  $v = v_0 = \bar{v}$  et  $B = 1$ , ce qui entraîne

$$\bar{q} \leq \left[ \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \right] \leq \left[ \frac{\bar{u} + b - 1}{\bar{v}} \right]. \quad \square$$

Puisque nous savons que l'estimation  $\bar{q}$  donnée par la formule (5) est une majoration, nous pouvons reformuler de manière plus réaliste l'algorithme de la division : on démarre avec  $q := \bar{q}$ , puis on diminue  $q$  jusqu'à ce que l'on obtienne  $u - q \times v \geq 0$ . Nous trouvons ainsi l'algorithme que l'on apprend aux enfants.

```
déterminer  $\xi = \overline{x_n \cdots x_m}$  ;
 $s_0 := \xi$  ;
for  $i := 1$  to  $m$  do begin
     $q_i := \text{estimation}(s_{i-1}, y)$  ;
     $r_i := s_{i-1} - q_i y$  ;
    rectifier( $r_i, q_i$ )
     $s_i := b r_i + x_{m-i}$  ;
end ;
 $q_{m+1} := \text{estimation}(s_m, y)$  ;
 $r_{m+1} := s_m - q_{m+1} y$  ;
rectifier( $r_{m+1}, q_{m+1}$ )
```

*Algorithme de la division (version réaliste).*

Cet algorithme utilise la fonction estimation définie par la formule (5) et la procédure rectifier :

```

procedure rectifier(var  $r, q$ ) ;
begin
  while  $r < 0$  do begin
     $r := r + y$  ;  $q := q - 1$ 
  end
end ;

```

*La procédure rectifier.*

Cependant, ce nouvel algorithme est particulièrement inefficace car l'estimation  $\bar{q}$  de  $q$  est parfois catastrophique. Lorsque  $x = 99$  et  $y = 19$ , on a  $\bar{q} = 9$  et  $q = 5$ . Ce phénomène n'est pas particulier à la base dix.

En base  $b$ , si nous posons  $\beta = b - 1$ , l'exemple  $x = \overline{100} = b^2$  et  $y = \overline{1\beta} = 2b - 1$  montre que  $\bar{q} \simeq b$  alors que  $q \simeq \frac{1}{2}b$  si  $b$  est grand. Si nous travaillons avec une grande base  $b$ , il est donc possible que la boucle de la procédure rectifier soit sollicitée environ  $\frac{1}{2}b$  fois!

Ce sont les tentatives de programmation de la division qui font prendre conscience de ce problème. Tant que nous travaillons en base dix, nous utilisons simultanément l'estimation (5) et notre intuition, ce qui nous permet de trouver rapidement la bonne réponse. Par exemple, pour  $u = 1462$  et  $v = 237$ , nous avons  $q = 6$  et  $\bar{q} = 7$ . Cependant, nous *sentons* que  $q = 7$  est une réponse incorrecte. Aussi, nous essayons tout de suite  $\bar{q} = 6$ , sans passer par l'étape  $\bar{q} = 7$ .

Heureusement, il est possible de départager les bons cas des mauvais :

**Théorème 3.**— *Si le premier chiffre de  $v$  dépasse  $\frac{1}{2}b$ , alors  $\bar{q} - q \leq 2$ .*

*Démonstration.* — Nous allons démontrer la contraposée

$$\bar{q} - q \geq 3 \implies \bar{v} < \frac{1}{2}b.$$

Les inégalités  $v - B = B\bar{v} + \bar{v} - B$  et  $\bar{v} \leq B - 1$  montrent que

$$v - B < B\bar{v}.$$

Nous savons que  $v \geq B$ . Mais  $v = B$  implique  $\bar{q} = q$ . Par conséquent, nous avons  $v - B > 0$ .

La définition de  $\bar{q}$  montre que  $\bar{q} \leq \bar{u}/\bar{v} \leq (B\bar{u})/(B\bar{v}) < u/(v - B)$ . De manière analogue, nous avons  $u/v < q + 1$ . En combinant ces deux inégalités, nous obtenons :

$$3 \leq \bar{q} - q < \frac{u}{v - B} - \frac{u}{v} + 1$$

ce qui s'écrit encore

$$2 < \frac{u}{v} \frac{B}{v - B} \leq \frac{u}{v} \frac{B}{B\bar{v} - B} = \frac{u}{v} \frac{1}{\bar{v} - 1}.$$

Sachant que  $u < bv$ , nous obtenons enfin

$$2 < \frac{b}{\bar{v} - 1}$$

ce qui s'écrit encore  $\bar{v} \leq \frac{1}{2}(b - 1)$ .  $\square$

Que faire si le premier chiffre de  $v$  n'est pas assez grand? Une solution consiste à remplacer  $u$  et  $v$  par  $\delta u$  et  $\delta v$ , en espérant qu'un multiple convenable  $\delta v$  de  $v$  ait un premier chiffre assez grand. En procédant ainsi, on ne modifie pas le quotient. Seul le reste est multiplié par  $\delta$ .

**Théorème 4.**— Posons  $\delta = [b/(\bar{v} + 1)]$ . Alors  $\delta v$  a autant de chiffres que  $v$  et le premier chiffre de  $\delta v$  est plus grand que  $\frac{1}{2}b$ .

*Démonstration.* — Tout d'abord,  $\delta$  n'est jamais nul puisque  $\bar{v} < b$ . De la définition  $\delta \leq b/(\bar{v} + 1) < \delta + 1$  et de  $\bar{v} < B$ , on tire

$$\delta y = \delta(B\bar{v} + \bar{v}) < \frac{bB\bar{v}}{1 + \bar{v}} + \frac{bB}{1 + \bar{v}} = bB,$$

ce qui prouve que  $\delta y$  a autant de chiffres que  $v$ . Il en résulte que le premier chiffre  $c_1$  de  $\delta v$  est de la forme

$$c_1 = \delta\bar{v} + \text{retenue éventuelle provenant de } \delta\bar{v}.$$

Cela nous permet d'écrire

$$c_1 \geq \delta\bar{v} > \left(\frac{b}{\bar{v} + 1} - 1\right)\bar{v} = \frac{(b - \bar{v} - 1)\bar{v}}{\bar{v} + 1} \geq \frac{b - 2}{2}. \quad \square$$

### 5. Le bon algorithme

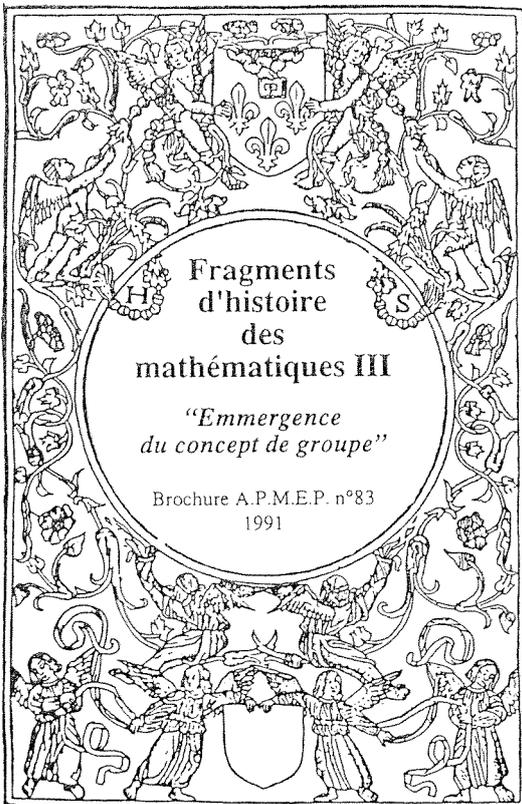
Si nous prenons la précaution de *préparer*  $x$  et  $y$  (ce qui signifie remplacer  $x$  et  $y$  par  $\delta x$  et  $\delta y$  de manière que le premier chiffre de  $\delta y$  soit plus grand que  $\frac{1}{2}b$ ), nous sommes sûrs que  $\bar{q} = q, q + 1$  ou  $q + 2$ . La boucle de la procédure rectifier sera traversée au plus deux fois.

```

 $\delta := 1 ;$ 
if  $2y_p < b$  then begin
  |  $\delta := b \text{ div } (1 + y_p) ;$ 
  |  $x := \delta x ; y := \delta y$ 
end ;
déterminer  $\xi = \overline{x_n \cdots x_m} ;$ 
 $s_0 := \xi ;$ 
for  $i := 1$  to  $m$  do begin
  |  $q_i := \text{estimation}(s_{i-1}, y) ;$ 
  |  $r_i := s_{i-1} - q_i y ;$ 
  | rectifier( $r_i, q_i$ )
  |  $s_i := br_i + x_{m-i} ;$ 
end ;
 $q_{m+1} := \text{estimation}(s_m, y) ;$ 
 $r_{m+1} := s_m - q_{m+1} y ;$ 
rectifier( $r_{m+1}, q_{m+1}$ ) ;
if  $\delta > 1$  then  $r_{m+1} := x - qy$ 

```

*Algorithme de la division (version définitive).*



Introduction : Maurice CARMAGNOLE  
 Avertissement  
 Résumé : article paru dans l'OUVERT (Sept 86)  
 Emergence du Concept de Groupe

LAGRANGE : Réflexions sur la résolution algébrique des équations (1770 - 1771)

VANDERMONDE : Mémoire sur la résolution des équations (1771)

RUFFINI : Première démonstration de l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation générale du 5<sup>me</sup> degré

CAUCHY : Mémoire sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir (1815)

ABEL : Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le 4<sup>me</sup> degré

GAUSS : Des équations qui déterminent les sections circulaires (1801)

ABEL : Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement (1829)

GALOIS : Le Premier Mémoire

Chronologie  
 Indications pour les exercices et réponses  
 Bibliographie  
 Autres ouvrages de références

## MAXIMALISATIONS D'AIRES DE POLYGONES

(suite)

Albert LENTZ

### Rappel :

Les polygones envisagés ont des côtés dont les longueurs sont fixées dans l'ordre. Nous nous posons la question suivante : les polygones étant "articulés", comment les déformer pour rendre leur aire maximale s'il y a lieu?

**Nous avons établi précédemment que** (voir 'L'Ouvert' n°63)

1. Un quadrilatère articulé a une aire maximale s'il est inscriptible.
2. Un polygone a donc une aire maximalisée si chaque quadrilatère qu'il définit, est inscriptible donc si le polygone est lui-même inscriptible.
3. S'il existe un polygone à  $n$  cotés, de longueurs respectives  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , alors il existe un polygone inscriptible dont les côtés ont même longueur respectivement.

**Nous nous sommes posé les questions :**

Pour un polygone donné, le procédé de maximalisation fait-il nécessairement **avoir pour limite** un polygone inscriptible? L'aire d'un polygone inscriptible (dont nous avons prouvé l'existence et l'unicité) est-elle le maximum absolu?

### L'AIRES DU POLYGONE INSCRIPTIBLE EST L'AIRES MAXIMALE

La difficulté vient du grand nombre de variables : les  $n$  angles du polygone, liés essentiellement par la relation de leur somme. Nous ramènerons les polygones quelconques à des polygones dont l'aire dépend d'un seul angle.

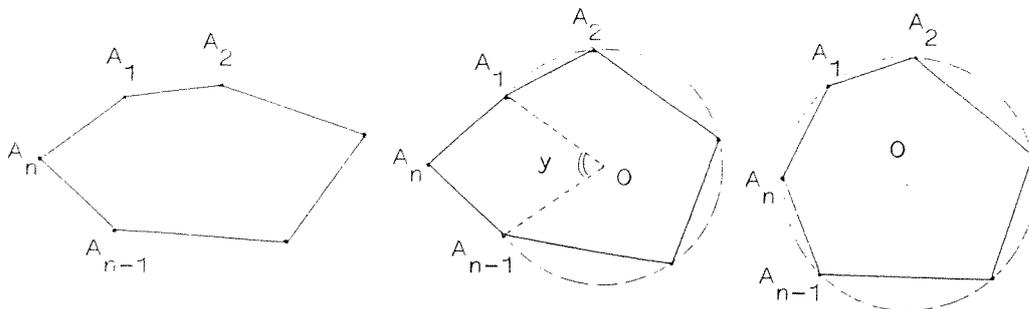
Procédons par récurrence :

1. Le quadrilatère d'aire maximale est le quadrilatère inscriptible.
2. Supposons que l'aire maximale du polygone articulé ayant  $n - 1$  côtés, de longueurs respectives  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  est atteinte s'il est inscriptible.

Démontrons qu'il en est de même pour le polygone articulé ayant  $n$  côtés de longueurs respectives  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Soit  $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$  ce polygone. Soit  $x$  la mesure de l'angle  $\widehat{A_1 A_n A_{n-1}}$ .

Le polygone  $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$  a des côtés de longueurs respectives  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$  et  $a(x)$ , où  $a(x)$  est la longueur de  $A_1 A_{n-1}$ . Il peut être rendu inscriptible par hypothèse. Son aire est alors fonction de  $x$  uniquement.



Soit  $P(x)$  le polygone  $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$  dans lequel le polygone  $A_1A_2 \dots A_{n-1}$  est rendu inscriptible.

Son aire  $S$  est donc une fonction de la seule variable  $x$ .  $S(x)$  représente donc l'aire maximale d'un polygone articulé  $A_1A_2 \dots A_n$  dans lequel on a fixé l'angle  $x$ .

L'aire  $S(x)$  est une fonction continue de  $x$  : en effet, si  $O$  est le centre du cercle circonscrit au polygone  $A_1A_2 \dots A_{n-1}$ , la mesure  $y$  de l'angle  $A_1OA_{n-1}$  est une fonction continue de  $x$  car on a :

$$A_1A_{n-1}^2 = A_1A_n^2 + A_{n-1}A_n^2 - 2 \times A_1A_n \times A_{n-1}A_n \cos x$$

et

$$A_1A_{n-1}^2 = A_1O^2 + A_{n-1}O^2 - 2 \times A_1O \times A_{n-1}O \cos y.$$

Mais  $x$  varie dans un intervalle **fermé**  $[x_1 ; x_2]$  inclus dans  $[0 ; \pi]$ . Donc  $S(x)$  a un maximum qui est atteint pour une valeur  $x_0$ .

Le polygone ainsi défini est-il inscriptible? Oui! Sinon le **quadrilatère**  $A_1A_2A_{n-1}A_n$  n'est pas inscriptible, donc il peut être déformé pour l'être. Mais alors  $x$  prend une autre valeur  $x'$ . Son aire prend une valeur supérieure à la précédente, et  $S(x') > S(x_0)$  ce qui est absurde.

Il est donc établi que l'aire du polygone inscriptible est l'aire maximale du polygone articulé.

## GÉNÉRALISATIONS : CONTOURS NON POLYGONAUX

### 1. Contour souple

Appelons ainsi une ligne fermée, sans recoupement, de **longueur fixée**, mais **déformable**.

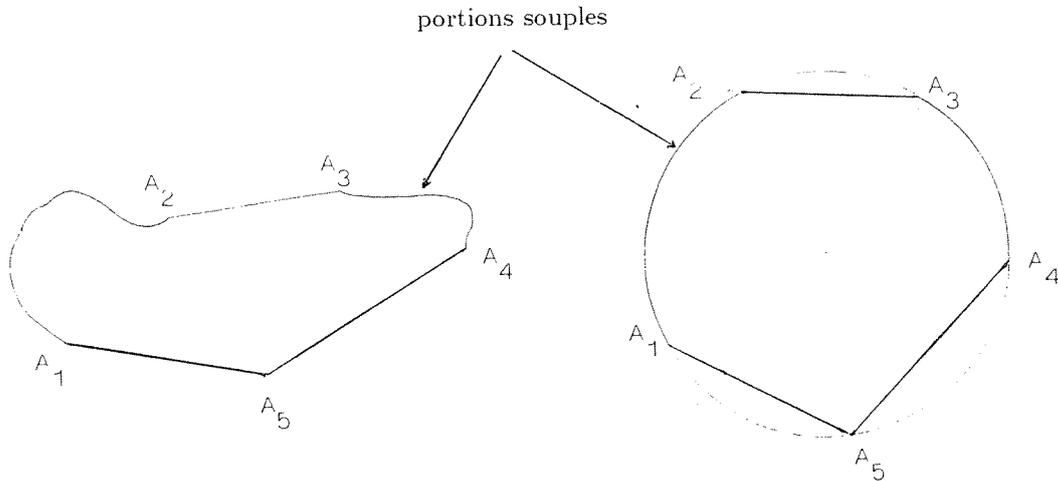
Quelle forme faut-il donner à la ligne pour qu'elle soit la frontière de la surface d'aire maximale?

Il suffit de considérer la ligne comme la limite d'une ligne polygonale de **même longueur**, à  $n$  côtés (égaux) où  $n$  tend vers l'infini.

La surface d'aire maximale est alors le cercle!

## 2. Contour mixte "polygonal-souple"

Appelons ainsi une ligne fermée, sans recoupement, de longueur fixée, composée de segments de droite et de portions souples. Le résultat s'impose :



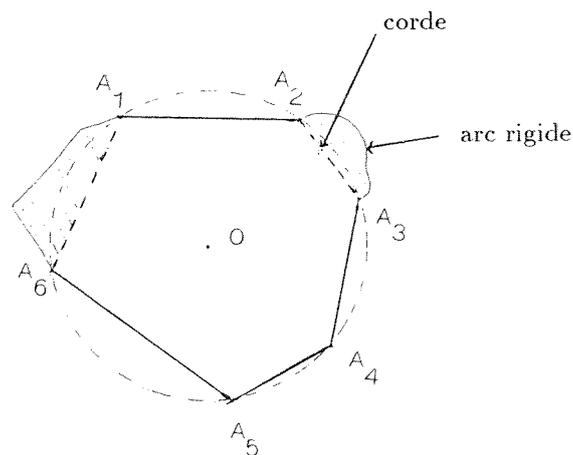
## 3. Contour articulé rigide non polygonal, etc

La généralisation complète pose des problèmes physiques de comportement aux "angles", à étudier cas par cas.

Appelons "côtés", toute partie rigide articulée et "corde", le segment joignant les extrémités d'un arc.

Si, par exemple, le polygone formé par les arcs ne recoupe pas les arcs, l'aire sera maximale si le polygone des arcs a une aire maximale. En effet chaque arc définit avec sa corde un domaine dont l'aire est constante.

Exemple :



## A VOS STYLOS

### RETOUR SUR LE PROBLÈME 14

Ce problème, qui avait été proposé par D. DUMONT fait décidément couler beaucoup d'encre. Il s'agissait de montrer l'égalité des séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{n x^n}{1+x^n}$  et  $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}}$ , ce qui a été résolu dans le numéro 62, mais surtout de comparer les vitesses de convergence de ces deux séries et de voir comment croît la somme  $S(x)$  quand  $x$  tend vers  $1^-$ .

Dans le numéro 63, M. KRIER démontrait la double inégalité

$$\frac{x}{(1+x)^2(1-x)} \leq S(x) \leq \frac{x}{(1+x)(1-x)}.$$

Dans le numéro 65, D. DUMONT, reprenant la même idée que M. KRIER, aboutissait, sans aucune rigueur, à  $S(x) \simeq \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{(1-x)^2}$  en  $1^-$ . Cependant, il s'interrogeait toujours sur la nature des restes  $R_n(x)$  de chaque série pour  $x$  fixé.

C'est un plaisir que d'avoir reçu pour le présent numéro de '*L'Ouvert*' cette démonstration de E. KERN qui achève presque la résolution de ce problème.

Soit  $0 \leq x < 1$ . Posons

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \dots = & g(x) &= \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \dots \\ f_n(x) &= \frac{x}{1+x} + \dots + \frac{nx^n}{1+x^n} & g_n(x) &= \frac{x}{1-x} + \dots + \frac{(2n-1)x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} \\ r_n(x) &= f(x) - f_n(x) & R_n(x) &= g(x) - g_n(x) \\ a(x) &= x + 2x^2 + \dots & b(x) &= x + 3x^3 + \dots \\ a_n(x) &= x + \dots + nx^n & b_n(x) &= x + \dots + (2n-1)x^{2n-1} \\ \alpha_n(x) &= a(x) - a_n(x) & \beta_n(x) &= b(x) - b_n(x). \end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{1+x^{n+1}} \alpha_n(x) \leq r_n(x) \leq \alpha_n(x)$$

donc

$$r_n(x) \sim \alpha_n(x) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Or  $a_n(x) = x(1 + 2x + \dots + nx^{n-1}) = x \times c'_n(x)$  avec  $c_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ , d'où

$$c'_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

et par suite

$$a_n(x) = \frac{x}{(1-x)^2} [1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}] \rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = a(x)$$

donc aussi

$$\alpha_n(x) = \frac{x}{(1-x)^2} [(n+1)x^n - nx^{n+1}] = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2} [(n+1) - nx]$$

et par suite

$$\boxed{r_n(x) \sim \alpha_n(x) \sim \frac{nx^{n+1}}{1-x}} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

On a aussi

$$\beta_n(x) \leq R_n(x) \leq \frac{1}{1-x^{2n+1}} \times \beta_n(x)$$

donc

$$R_n(x) \sim \beta_n(x) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Or

$$\begin{aligned} b_n(x) &= \frac{1}{2}(a_{2n}(x) - a_{2n}(-x)) \quad (\text{partie impaire de } a_{2n}(x)) \\ b(x) &= \frac{1}{2}(a(x) - a(-x)) \quad (\text{partie impaire de } a(x)) \end{aligned}$$

donc  $\beta_n(x) = \frac{1}{2}[\alpha_{2n}(x) - \alpha_{2n}(-x)] = \frac{x^{2n+1}}{(1-x^2)^2} [(2n+1) - (2n-1)x^2]$  et par suite :

$$\boxed{R_n(x) \sim \beta_n(x) \sim \frac{2nx^{2n+1}}{1-x^2}} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Supposons maintenant  $-1 < x \leq 0$ .

On a

$$\begin{aligned} f_{2n}(x) &= \left( \frac{x}{1+x} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \dots + \frac{(2n-1)x^{2n-1}}{1+x^{2n-1}} \right) + \left( \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^2} + \dots + \frac{2nx^{2n}}{1+x^2} \right) \\ &= -g_n(|x|) + 2f_n(x^2) \end{aligned}$$

donc  $r_{2n}(x) = -R_n(|x|) + 2r_n(x^2)$ . Or

$$\begin{aligned} R_n(|x|) &\sim -\frac{2n}{1-x^2} |x|^{2n+1} = \frac{2nx^{2n+1}}{1-x^2} \times 1 \\ 2r_n(x^2) &\sim \frac{2n x^{2n+2}}{1-x^2} = \frac{2n x^{2n+1}}{1-x^2} \times x \end{aligned}$$

et comme  $x+1 \neq 0$  on a aussi

$$r_{2n}(x) \sim \frac{2n x^{2n+1}}{1-x^2} (1+x) = \frac{2n x^{2n+1}}{1-x}.$$

A VOS STYLOS

Par ailleurs on a

$$r_{2n-1}(x) = \frac{2n x^{2n}}{1 + x^{2n}} + r_{2n}(x)$$

or

$$r_{2n}(x) \sim \frac{2n x^{2n+1}}{1 - x} = 2n x^{2n} \times \frac{x}{1 - x}$$

et

$$\frac{2n x^{2n}}{1 + x^{2n}} \sim 2n x^{2n} \times 1$$

et comme  $\frac{x}{1-x} + 1 \neq 0$  on a aussi

$$r_{2n-1}(x) \sim 2n x^{2n} \left(1 + \frac{x}{1-x}\right) = \frac{2n x^{2n}}{1-x} \sim \frac{(2n-1)x^{2n}}{1-x}.$$

En conclusion, si  $|x| < 1$  on a  $r_n(x) \sim \frac{nx^{n+1}}{1-x}$ .

Pour  $g(x)$  (si  $-1 < x \leq 0$ ) on peut écrire :

$$g(x) = -\frac{|x|}{1+|x|} - \frac{3|x|^3}{1+|x|^3} - \dots$$

$$g_n(x) = -\frac{|x|}{1+|x|} - \dots - \frac{(2n-1)|x|^{2n-1}}{1+|x|^{2n-1}}$$

et on peut alors écrire

$$-\beta_n(|x|) \leq R_n(x) \leq -\frac{1}{1+|x|^{2n+1}} \beta_n(|x|)$$

donc

$$R_n(x) \sim -\beta_n(|x|) \sim -\frac{2n|x|^{2n+1}}{1-x^2} = \frac{2n x^{2n+1}}{1-x^2}.$$

En conclusion, si  $|x| < 1$  on a  $R_n(x) \sim \frac{2n x^{2n+1}}{1-x^2}$ .

Pour terminer, quelques mots à propos de la conjecture de DUMONT :

Pour démontrer cette conjecture, il suffit de montrer que la fonction  $h(x) = (1-x)^2 \left[ \frac{f(x)}{x} \right]$  possède une limite quand  $x \rightarrow 1-0$  et cette limite est alors égale à  $\frac{\pi^2}{12}$  (règle de l'HOSPITAL).

Un tracé sur micro-ordinateur du graphe de cette fonction donne une fonction positive décroissante sur  $[0, 1[$  ce qui démontrerait la conjecture. Toutefois une

A VOS STYLOS

tentative de démonstration de la décroissance de  $h(x)$  risque de réserver quelques surprises.

Signalons enfin que, en utilisant  $f(x) = g(x)$ , on montre aisément que l'on a

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = f(x^2)$$

et on aurait donc

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} \times \frac{1}{(1-x)^2} \text{ quand } x \rightarrow 1-0$$

et

$$f(x) \sim -\frac{\pi^2}{24} \times \frac{1}{(1+x)^2} \text{ quand } x \rightarrow -1+0.$$

---

RETOUR SUR LE PROBLÈME 17

Nous avons posé la question de savoir si on pouvait trouver une partition de  $\mathbb{N}^*$  en trois parties  $A_1, A_2, A_3$  avec  $A_i \{[ka_i]/k \in \mathbb{N}^*\}$ . Nous avons reçu la réponse négative suivante de A. TROESCH :

**Solution (de M. TROESCH) :**

Il n'existe pas de partition  $(A, B, C)$  de  $\mathbb{N}^*$  telle que

$$A = \{[na]|n \in \mathbb{N}^*\}, B = \{[nb]|n \in \mathbb{N}^*\}, C = \{[nc]|n \in \mathbb{N}^*\}$$

où  $a, b, c$  sont des nombres réels strictement positifs.

On peut procéder comme dans la démonstration géométrique de M. ADELMANN pour les partitions en deux sous-ensembles :

a) En posant  $\alpha = \frac{1}{a}, \beta = \frac{1}{b}, \gamma = \frac{1}{c}$  et  $A_k = (k\alpha, k\beta, k\gamma)$  on montre ainsi que

$$k \in A \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } [A_k, A_{k+1}[ \text{ rencontre le plan } X = n$$

$$k \in B \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } [A_k, A_{k+1}[ \text{ rencontre le plan } Y = n$$

$$k \in C \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } [A_k, A_{k+1}[ \text{ rencontre le plan } Z = n.$$

Il en résulte encore que  $\alpha$  (resp.  $\beta$ , resp.  $\gamma$ ) est la densité asymptotique de  $A$  (resp.  $B$ , resp.  $C$ ) et par conséquent que  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  si  $(A, B, C)$  est une partition de  $\mathbb{N}^*$ . L'ensemble des  $(\alpha, \beta, \gamma)$  pour lesquels  $(A, B, C)$  est une partition est donc un sous-ensemble du triangle  $T_0$  :

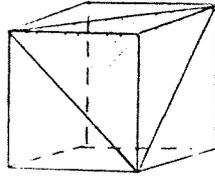
$$X + Y + Z = 1, X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0.$$

b) Considérons le cube fermé  $C_{m,n,p}$  de côté 1, dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées et dont le sommet le plus proche de l'origine est  $(m, n, p)$ . Le

A VOS STYLOS

plan  $X + Y + Z = m + n + p + 2$  coupe ce cube selon un triangle  $T_{m,n,p}$ . Si la droite  $t \mapsto (t\alpha, t\beta, t\gamma)$  rencontre ce triangle alors  $[A_1, A_{m+n+p+2}[$  coupe  $m$  plans  $X = i$ ,  $n$  plans  $Y = j$  et  $p$  plans  $Z = l$ ,  $i, j, l$  étant entiers. Il en résulte que le segment  $[A_1, A_{m+n+p+2}]$  est contenu dans une réunion de  $m + n + p + 1$  cubes  $C_{i,j,l}$ . Par conséquent il existe  $k \in \mathbb{N}^*$   $k \leq m + n + p + 2$  tel que  $A_k$  et  $A_{k+1}$  appartiennent à un même cube et par suite  $k$  n'appartient ni à  $A$ , ni à  $B$ , ni à  $C$ .

$$(m + 1, n, p + 1) \quad (m, n + 1, p + 1)$$



En ramenant par homothétie de centre  $O$  les triangles  $T_{m,n,p}$  dans le plan  $X + Y + Z = 0$  on constate que l'ensemble des  $(\alpha, \beta, \gamma)$  correspondant à une partition de  $\mathbb{N}^*$  est le complémentaire dans  $T_0$  de la réunion des ensembles  $F_k$  suivants :

$$F_k = \bigcup_{\substack{m \geq 0, n \geq 0, p \geq 0, \\ m+n+p+2=k}} T'_{m,n,p}$$

où  $T'_{m,n,p}$  est le triangle ayant pour sommets

$$\frac{1}{m+n+p+2} \binom{m+1}{n \quad p+1}, \frac{1}{m+n+p+2} \binom{m}{n+1 \quad p+1}, \frac{1}{m+n+p+2} \binom{m+1}{n+1 \quad p}$$

Pour terminer montrons que  $\bigcup_{i=2}^k F_i$  contient le triangle  $T''_k$  de sommets

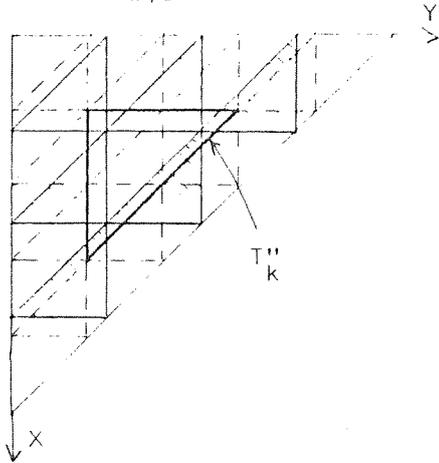
$$\frac{1}{k+1} \binom{1}{1 \quad k-1}, \frac{1}{k+1} \binom{1}{k-1 \quad 1}, \frac{1}{k+1} \binom{k-1}{1 \quad 1}.$$

(Ce triangle tend vers  $T_0$  lorsque  $k$  tend vers l'infini.) C'est vrai pour  $k = 2$  : dans ce cas le triangle se réduit au centre de gravité du triangle constituant  $F_2$ .

Supposons que c'est vrai pour  $k$  et montrons-le pour  $k + 1$ . D'après l'hypothèse de récurrence seuls les triangles de  $F_{k+1}$  ayant un sommet sur le bord de  $T_0$  seront utiles (triangles externes). Nous allons montrer que les triangles externes de  $F_k$  et  $F_{k+1}$  recouvrent  $T''_{k+1} - T''_k$ .

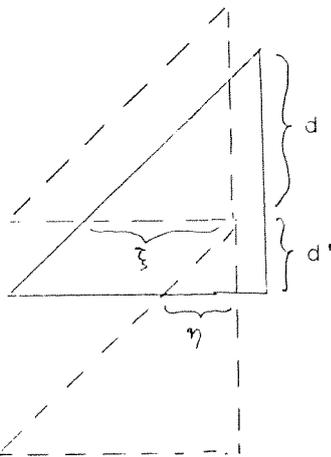
A VOS STYLOS

Considérons  $T_0, T''_{k+1}, T''_k, F_k$  et  $F_{k+1}$  en projection dans le plan  $Z = 0$  :



Hachures :  $F_k$  ( $k = 4$ )  
Tirets :  $F_{k+1}$

Les sommets de  $T''_{k+1}$  sont dans les triangles de  $F_{k+1}$  situés dans les coins. Pour les autres triangles, par exemple le long du bord  $Y = 0$  les positions relatives des triangles de  $T''_{k+1}$  et de  $T''_k$  sont les suivantes :



$$\text{avec } d \geq \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2}{k(k+1)}$$

$$\text{et } d' \geq \frac{1}{k(k+1)}.$$

$$\text{D'où } \eta = d' \geq \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$\text{et } \xi = d - \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

Le résultat en découle étant donné la symétrie du problème :

$$T''_{k+1} \subset \bigcup_{i=2}^{k+1} F_i.$$

Par conséquent  $\bigcup_{k=2}^{\infty} F_k$  contient tous les points intérieurs du triangle  $T_0$ . Cet ensemble contient aussi les points rationnels des côtés du triangle ce qui est cohérent avec le résultat concernant les partitions en deux sous-ensembles de  $\mathbb{N}^*$ .

PROBLÈME 18

Énoncé (proposé par Ph. ARTZNER)

Aux instants 1, 3, 5, ..., 103, on retourne successivement les 52 cartes (26 noires et 26 rouges) d'un jeu préalablement battu. On a le droit de déclarer au plus une fois, à l'un des instants 0, 2, 4, ..., 102 : "*Je parie que la prochaine carte sera rouge*". On gagne si elle l'est effectivement, on perd sinon — ou si l'on n'a choisi aucun instant. Quelle stratégie maximise la probabilité de gain ?

**Solution**

Nous avons reçu deux solutions, une de l'auteur et une de M. KRIER. Celle que nous présentons ici fait la synthèse des deux : elle emprunte à la première une idée permettant de supprimer tous les calculs et à la seconde un langage dans lequel la présentation est grandement facilitée.

Commençons par quelques définitions. Une **suite** sera un mot (éventuellement vide) formé à l'aide des deux lettres  $R$  et  $N$ , figurant chacune au plus 26 fois. Une suite est **complète** si elle a 52 lettres (26 lettres  $R$  et 26 lettres  $N$ ). Une **stratégie**  $S$  est un ensemble de suites tel que toute suite complète s'obtient en rajoutant des éléments à la fin d'une et une seule suite de  $S$ . Jouer la stratégie  $S$  consiste à laisser retourner les cartes jusqu'à ce que la suite des cartes apparues figure dans  $S$  et à annoncer alors "rouge". (Si cette suite est complète, on parie après avoir vu la dernière carte, c'est-à-dire que l'on ne parie pas du tout.)

Le résultat est le suivant : **toute stratégie formée de suites non complètes est optimale, et donne une probabilité de gain égale à un demi.** En effet, une telle stratégie  $S$  étant fixée, la probabilité de gain est  $\sum_{s \in S} p(s) g(s)$  où  $p(s)$  est la probabilité qu'a le tirage de débiter par  $s$  et  $g(s)$  la probabilité de gagner en annonçant "rouge" une fois la suite  $s$  apparue. Il serait facile d'explicitier  $p(s)$  et  $g(s)$  (par exemple  $g(s) = \frac{26-r(s)}{52-r(s)-n(s)}$ ), mais il est plus simple de remarquer que  $g(s)$  est aussi la probabilité, une fois la suite  $s$  apparue, que la **dernière** carte du paquet soit rouge. La somme  $\sum_{s \in S} p(s)g(s)$  s'interprète donc aussi comme la probabilité d'avoir une carte rouge en dernière position, et vaut  $1/2$ .

---

PROBLÈME 19

**Énoncé**

Soit  $C$  un ensemble convexe borné, fermé du plan. Peut-on construire un parallélogramme  $P$  inclus dans  $C$  tel que l'aire de  $P$  soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire de  $C$  ?

**Indication**

On peut toujours choisir le parallélogramme de façon que ses quatre sommets soient sur le bord de  $C$ .

---

PROBLÈME 20

**Énoncé**

Calculer

$$\sum_{n=0}^p (-1)^{p-n} \frac{n^p}{n!(p-n)!}$$

et en déduire  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$ .

A VOS STYLOS

PROBLÈME 21

Énoncé (proposé par D. DUMONT)

Soient  $2n$  écolières qui partent en promenade quotidienne en rang deux par deux et souhaitent changer de voisine chaque jour. Trouver un algorithme qui fasse en sorte qu'en  $2n - 1$  jours chacune ait eu pour voisine chacune des autres une fois et une seule. (Ce problème s'apparente au problème dit "des écolières de Kirkmann".)

Congrès "MATH.en.JEANS"

les 11, 12, 13, 14 avril 1992, au Palais de la Découverte

organisé par l'Association "MATH.en.JEANS"  
et le Palais de la Découverte

Méthode d'apprentissage, "MATH.en.JEANS" met en place un microcosme de recherche mathématique dans les établissements d'enseignement secondaire, en prenant en compte toutes les dimensions des métiers de la recherche.

- ⇒ les élèves participent, *sans sélection préalable* ;
- ⇒ ils *cherchent, découvrent, prouvent et démontrent, communiquent* ;
- ⇒ l'activité de recherche, favorisée par l'enseignant, est dirigée par un *mathématicien professionnel*.

Pour la 3<sup>me</sup> année d'existence de "MATH.en.JEANS", les lycéen(ne)s et collégien(ne)s, de France et de l'étranger, présenteront leur travail pendant quatre jours : expositions réalisées sur place, dans des stands (sur le modèle des exposciences), courtes "conférences", discussions avec des mathématiciens et le public.

*Samedi 11 avril* : une Conférence inaugurale présentera l'actualité mathématique de quatre thèmes géométriques ; le conférencier, M. Marcel Berger, Directeur de l'École des Hautes Études Scientifiques (IHES) est un brillant popularisateur des mathématiques.

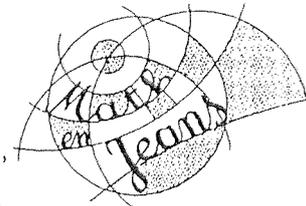
*Dimanche 12 avril* : afin de donner au public la possibilité de voir les élèves en situation de recherche, une simulation sera effectuée par une dizaine d'élèves ; un sujet de recherche leur sera proposé en début de journée, et un bilan sera tiré en fin de journée. Pendant la journée, le public pourra assister (*en direct-live*) au travail des élèves.

*Lundi 13 avril* : réservé aux congressistes (le lundi, le Palais est fermé au public).

*Mardi 14 avril* : les mathématiciens de "MATH.en.JEANS" se joindront aux élèves.

Sujets traités par les "équipes" de recherche :

Des animaux et des maths,  
Automates et langage,  
Brachistochrone,  
Cabri-Géomètre,  
Constructions mécaniques,  
Empilements de sphères,  
Espaces à plusieurs dimensions,  
Euler-Poincaré,  
Géométrie du pixel,  
Hydres,  
Infini,  
Maths et musique,  
Nombres p-adiques,  
Polyèdres,  
Rigidité structurelle,  
Sommes de carrés,  
Tablettes babyloniennes, etc.



Pour tout renseignement complémentaire sur le Congrès, pour vous y inscrire, contacter l'AMeJ :  
AMeJ / Lycée Racine / 20 rue du Rocher / 75008 Paris ou ☎ AMeJ : (1) 42 00 32 29

Partie à retourner à : APMER, 26 rue Duméril, 75013 PARIS, accompagnée de votre règlement.

NOM : .....  
 Adresse : .....  
 .....

**I-ADHESIONS-ABONNEMENT**

Code	Montant de l'adhésion et/ou de l'abonnement
	F (a)
	F (b)

Indiquez ci-contre, pour la formule que vous avez choisie, le CODE et le MONTANT

Supplément avion éventuel. →

**II-BON DE COMMANDE**  
**A-SERVEUR TELEMATIQUE**

En cas de réabonnement → mot de passe ..... →

BAL : ..... →

Nombre de tranches de 4 heures d'abonnement : ..... x 100 F

Total à régler pour le serveur :  F (c)

**III- Joindre à l'ordre de l'A.P.M.E.P. un chèque postal  , bancaire**

(a) + (b) + (c) + (d) =

La fiche d'inscription pour les journées A.P.M.E.P. d'octobre 92 à Strasbourg paraîtra dans le bulletin vert et dans 'L'Ouvert' du mois de Juin.

**DIVERSES FORMULES**

I. Tarifs préférentiels pour les membres adhérents ou associés à l'APMEP

<b>TARIF SPECIAL 1° ADHESION (+ABONNEMENT) 180 F</b>	Code A1
TARIFS 92 (membres adhérents et associés)	Adhésion + Abonnement
Adhérents sous les drapeaux-Etudiants non salariés	65F code A2
Instituteurs-Normaliens-Adhérents en disponibilité-Adhérents en retraite ou demi-retraite.	50F (C1) 220F(A3)
Autres membres	135F(C2) 305F(A4)

II. Tarifs spéciaux pour maîtres polyvalents (uniquement réservé aux enseignants).

Autres disciplines	Français (AFEF)	Biologie Géologie (APBG)	Physique (UDP) Collège (APISP)	Physique (UDP) service complet Collège
	310 F (F)	425F (S)	340 F (P)	500 F (U) 340 F (D)

Le bonnement AFEF dans l'abonnement jumelé APMEP/AFEF est de 1 an à compter de l'inscription. Pour l'abonnement APMEP/UDP à l'étranger, ajouter 75 F pour envoi par voie de surface (Avion, voir UDP).

**III. Abonnement aux publications (tarif général établissements)**

Abonnement au Bulletin APMEP 340 F Code B1  
 Abonnement au BGV (feuille d'actualité) 65 F Code B2  
 Abonnement Bulletin et BGV 425 F Code B3

La facture ne pourra être datée que de 1992.

**IV. Abonnement au serveur télématique sur le 36-14.**

4 heures d'abonnement 100 F

Expédition par avion : Le tableau donne le supplément à acquitter correspondant à la surtaxe aérienne concernant le pays où vous habitez.

Pays destinataires	Surtaxe annuelle
EUROPE (tous pays) + Algérie, Maroc, Tunisie .....	55
AFRIQUE : Bénin, Cameroun, Centrafrique, Congo, Côte d'Ivoire, Djibouti, Gabon, Guinée, Haute Volta, Mali, Mauritanie, Niger, Sénégal, Tchad, Togo, Egypte, Lybie.....	55
Comores, Madagascar, Autres pays.....	65
AMERIQUE (tous pays).....	110
ASIE : Arabie Saoudite, Iran, Irak, Israël, Jordanie, Liban, République Arabe Syrienne.....	65
Birmanie, Chine (république populaire), République de Corée, République démocratique de Corée, Hong Kong, Indonésie, Japon, Kampoutchéa démocratique, Laos, Machao, Malaisie, Mongolie, Philippines, Singapour, Taiwan (Formose), Timor Est, Thaïlande, Viêt Nam .....	145
Autres pays .....	110
OCEANIE (tous pays).....	145
Guadeloupe, Guyane Française, Martinique, Réunion, St Pierre et Miquelon .....	65
Mayotte, Nouvelle Calédonie, Polynésie Fr., Terres australes et antarctique Fr., Wallis .....	110