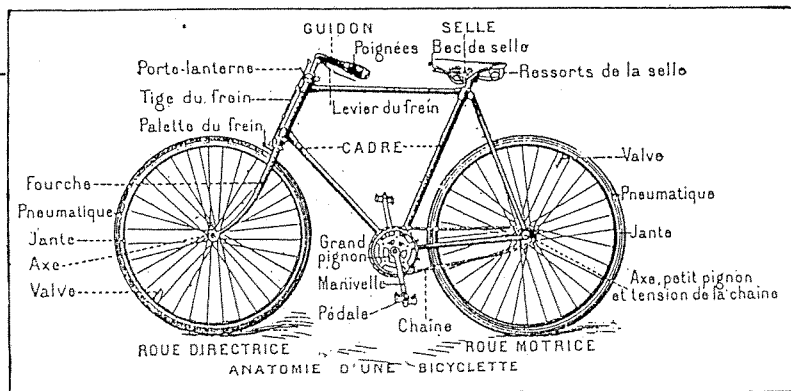
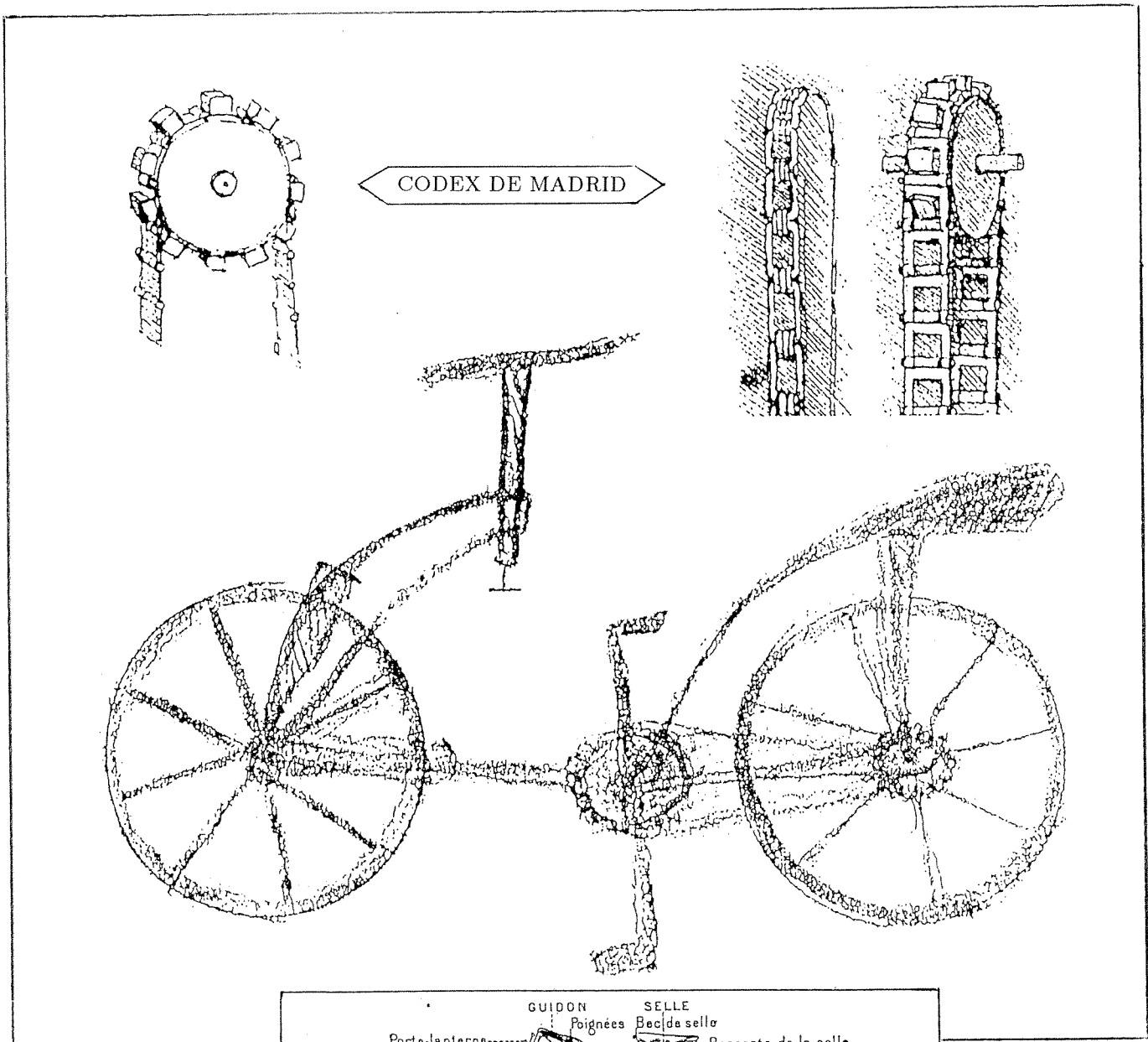
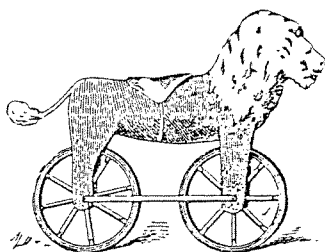


L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
 n° 67 - JUIN 1992 I.S.S.N. 0290 - 0068

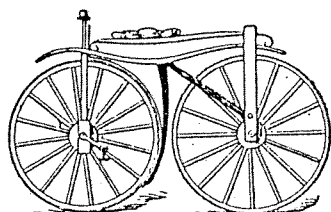




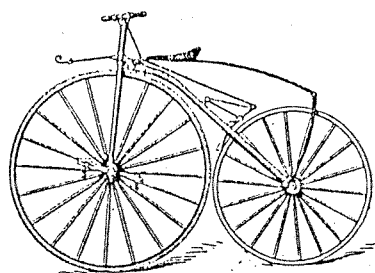
Célérier.



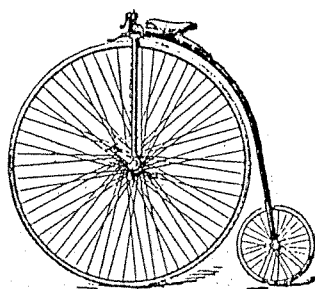
Draisienne.



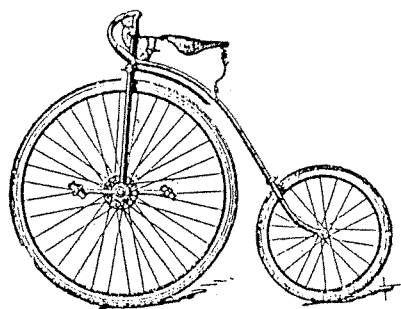
Premier bicycle Michaux (1842)



Bicycle Michaux de 1865

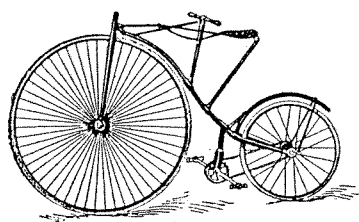


Grand bicycle dit «Araignée»

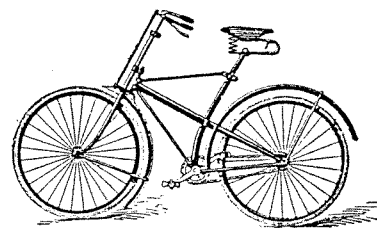


Bicycle multiplid

R. Tronca



La première bicyclette (1880)



Bicyclette à demi cadre

NOTRE COUVERTURE : LÉONARD DE VINCI A-T-IL INVENTÉ LA BICYCLETTE?

Le dessin de couverture représente d'une part la "bicyclette" du codex atlanticus (133 v) de la main d'un apprenti de L. de Vinci (au verso d'un dessin de fortifications qui, lui, est de Léonard), que l'on comparera avec un dessin d'encyclopédie de 1905, d'autre part la chaîne "Galle" du codex de Madrid (1/10) dessiné par l'auteur de la Joconde.

Pour bien comprendre le génie de Léonard de VINCI, il faut savoir que le "célérier" de Monsieur de SIVRAC date de 1790 (ce n'est qu'une planche solidaire de deux roues de brouettes et l'on avance en poussant les pieds), que la "draisienne" ou "vélocipède" du baron DRAIS VON SAUERBRONN date de 1818 (ce n'est qu'un célérier muni d'un guidon de direction sur la roue avant). C'est en 1842 que les frères MICHAUX montent des pédales directement sur la roue avant, (d'où le "grand bi" de 1865 pour augmenter le développement). Mais ce n'est qu'en 1878 qu'on adopte l'entraînement sur la roue arrière à l'aide d'une chaîne GALLE ou chaîne VAUCANSON "inventée" en 1819.

Bien qu'en bois, la bicyclette de Léonard de VINCI avait au moins 350 ans d'avance, puisque les conditions de travail dans les ateliers du 16^e siècle étaient telles qu'un apprenti ne faisait que recopier les travaux de son maître.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES POUR CETTE ÉPREUVE

C'est la phrase que des candidats aux ENSI ont pu lire sur certains de leurs sujets. Cela en étonna plus d'un, même si le bruit d'une interdiction courrait de prépa et prépa depuis quelques mois.

Quelle volte-face! Après avoir augmenté les droits d'inscription pour pouvoir distribuer à chaque candidat la calculatrice officielle du concours, une TI 30, on renonça à cette distribution, sans réduire les droits, bien évidemment!

Le problème de la présence ou non de calculatrice aux examens et concours restera insoluble tant qu'on ne cherchera pas à préciser ce qu'on veut évaluer dans les différentes épreuves, et cela ne concerne pas exclusivement les mathématiques. Quand un professeur prépare son cours, quand un ingénieur ou un technicien entreprend des calculs pour la réalisation d'un projet industriel, quand un linguiste effectue la traduction d'un ouvrage littéraire ou technique ... toutes ces personnes n'utilisent-elles pas des documents spécialisés, des tables, des logiciels, des dictionnaires ... afin que leur travail soit le plus rigoureux possible? Que demande-t-on d'autre aux élèves? En quoi la présence de documents (livres, cours, calculatrices ...) est-il un obstacle à l'évaluation des élèves lors d'un examen ou d'un concours? Rappelons qu'historiquement l'invention des logarithmes par NEPER, BRIGGS ou KEPLER a été accueillie avec soulagement par les scientifiques de l'époque, que c'est avec une machine à calculer de bureau que GIBBS a pu mettre en évidence le phénomène qui porte son nom (*), que le théorème des quatre couleurs a été démontré à l'aide de l'ordinateur ... Au nom de quelle scholastique rétrograde interdirions-nous aux élèves les moyens techniques actuels pour résoudre des problèmes?

De même qu'il existe des compétitions telles que le marathon, on peut concevoir des épreuves sans calculatrice, mais de grâce, que les sujets n'exigent pas une super-rapidité en calcul algébrique ou numérique! Et n'oublions pas de tester l'aptitude à utiliser ce que la technologie met à notre disposition.

J. LEFORT.

II

(*) Quand on remplace une fonction périodique par sa série de FOURIER partielle il y a en certains points des écarts qui peuvent être très importants.

SOMMAIRE

N° 67 – JUIN 1992

- ◇ *Notre couverture : Léonard de Vinci a-t-il inventé la bicyclette ?* I
- ◇ *Editorial : Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve* II
- ◇ *Recherche de méthodes de démonstration liées à la relation de Chasles,*
par le groupe I.A. de l'IREM de Strasbourg 1
- ◇ *Analyse des effets de la présence d'objets ferromagnétiques en imagerie*
par résonance magnétique nucléaire, par F. KRAEMER 8
- ◇ *De la toupie aux courbes algébriques, par M. AUDIN* 16
- ◇ *Nombre d'or ou la passion partagée, par D. ROTH* 26
- ◇ *Note sur l'avance du périhélie de Mercure, par J. DAUTREVAUX* 29
- ◇ *Le soleil se lève trois fois par jour, par J. LEFORT* 32
- ◇ *A vos stylos, par 'L'Ouvert'* 38

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace (franchise postale)
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent Comptable
de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro* : 25.- F

RECHERCHE DE MÉTHODES DE DÉMONSTRATION LIÉES À LA RELATION DE CHASLES

GROUPE INTELLIGENCE ARTIFICIELLE - IREM STRASBOURG

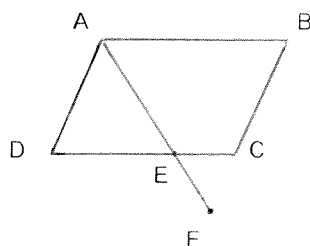
Marie-Agrès EGRET, Gérard KUNTZ, Gérard MÉTIVIER et Nicole VOGEL

INTRODUCTION

Dans le cadre d'une réflexion (1) que nous menons à l'IREM sur les démarches de démonstration en géométrie, nous tentons de mettre en évidence des plans de démonstration. Ceux-ci pourraient par la suite servir de modèles experts dans un "tuteur intelligent". Un logiciel capable de guider l'élève dans son apprentissage doit en effet s'adapter à la démarche de celui-ci et lui proposer une aide en cas éventuel d'échec.

Voici, par exemple, comment établir un plan de démonstration dans les exercices dont le but est de démontrer l'égalité ou la colinéarité de deux vecteurs.

Nous commencerons par exposer la méthode abstraite illustrée par l'exemple suivant :



Hypothèses : ABCD est un parallélogramme ;

$$\overrightarrow{CE} = 1/3\overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{AF} = 3/2\overrightarrow{AE}.$$

Conclusion (à démontrer) : B, C, F sont alignés.

Dans une deuxième partie, nous développerons deux autres exemples et nous proposerons au lecteur d'appliquer la méthode à une série d'exercices.

1.— EXPOSÉ DE LA MÉTHODE

Pour commencer, **on traduit l'énoncé** :

— *on traduit la conclusion* en une relation entre des vecteurs, si possible une égalité.

$$\text{Dans notre exemple : } \overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{BC}.$$

— *par contre, on ne traduit les hypothèses* qu'au fur et à mesure des besoins, car il y a en général trop de façons de les expliciter pour les écrire toutes au départ. Par exemple, il est difficile de savoir sous quelle forme on utilise la propriété "I est le milieu du segment [AB]".

(1) D. GUIN : Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie, in : "Annales de Didactique et de Sciences Cognitives", éd. IREM de Strasbourg, Vol. 2 (1991).

Puis, on recherche un plan de démonstration :

1. On essaie les deux tests suivants. Si l'un des deux réussit, la démonstration est terminée

Test 1 : les deux vecteurs sont sous la forme \vec{u} et $k\vec{u}$.

Remarques :

- cas particulier : les deux vecteurs sont égaux;
- le vecteur \vec{u} peut avoir une écriture plus complexe (par exemple, les deux vecteurs peuvent être $\vec{u} = 7\vec{AB} + 3\vec{AC}$ et $k\vec{u} = 14\vec{AB} + 6\vec{AC}$).

Test 2 : des propriétés géométriques élémentaires de la figure permettent de prouver que des représentants des deux vecteurs ont des supports parallèles.

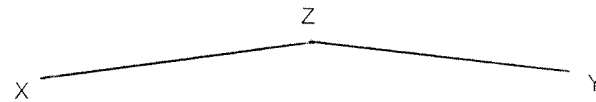
Dans l'exemple : aucun des deux tests ne réussit immédiatement.

2. En cas d'échec (hélas fréquent!) de ces tests :

2.1. On décompose l'un des vecteurs ou les deux à l'aide de la relation de Chasles

Pour décomposer un vecteur \vec{XY} , on essaie de reconnaître l'une des configurations suivantes à l'aide des propriétés de la figure :

Configuration 1 :

— Si on a la situation 

ET les vecteurs \vec{XZ} ou \vec{ZY} possèdent des propriétés (P) (qui se traduisent par des relations vectorielles) résultant des hypothèses ou des étapes précédentes.

— Alors on applique la relation de Chasles en introduisant le point Z dans \vec{XY} .

Configuration 2 :

— Si on a la situation



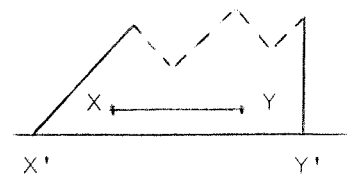
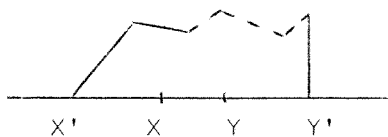
ET certains segments d'une ligne brisée d'origine X et d'extrémité Y possèdent des propriétés (P) découlant des hypothèses ou des étapes précédentes.

— Alors on applique la relation de Chasles en introduisant les sommets de la ligne brisée dans \vec{XY} .

Configuration 3 :

— Si \vec{XY} est colinéaire à un vecteur $\vec{X'Y'}$

ET $\vec{X'Y'}$ est dans l'une des configurations 1 ou 2 précédentes



— Alors on exprime \overrightarrow{XY} en fonction de $\overrightarrow{X'Y'}$ et on applique la relation de Chasles à $\overrightarrow{X'Y'}$.

Dans l'exemple : on décompose \overrightarrow{CF} : on reconnaît la configuration 1.

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF}.$$

2.2. On applique les propriétés (P) aux vecteurs apparus dans la décomposition du 2.1. C'est à ce stade que l'on traduit les hypothèses utiles en égalités vectorielles.

Dans l'exemple : on applique les propriétés (P) de \overrightarrow{CE} et \overrightarrow{EF} :

$$\overrightarrow{CF} = 1/3\overrightarrow{CD} + 1/2\overrightarrow{AE}.$$

2.3. On réduit le nombre de vecteurs présents après l'étape 2.2.

Pour cela, on essaie d'appliquer successivement les règles suivantes :

Règle 1 : S'il apparaît des sommes $k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$, on les remplace par $k\overrightarrow{AC}$, sauf si l'on vient de faire la décomposition inverse.

Règle 2 : On exprime tous les vecteurs dont la colinéarité est immédiate en fonction d'un seul.

Règle 3 : S'il reste plus de deux vecteurs après application des règles 1 et 2, on choisit deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} et on exprime tous les autres en fonction de ceux-là. Pour cela, on refait les étapes 2.1 et 2.2 avec une contrainte supplémentaire : il ne faut plus faire apparaître que les deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} . On réécrit ensuite les deux vecteurs à comparer en fonction de \vec{v} et \vec{w} .

Dans l'exemple : nous avons maintenant trois vecteurs \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{AE} . Les règles 1 et 2 ne s'appliquent pas.

Règle 3 : On retient \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{CD} . On exprime \overrightarrow{AE} à l'aide de ces deux vecteurs.

Retour à 2.1. : on décompose \overrightarrow{AE} : on reconnaît la configuration 1.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}.$$

Retour à 2.2. On applique les propriétés (P) de \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{DE} pour les exprimer en fonction de \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{CD}

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + 2/3\overrightarrow{CD}.$$

On réécrit \overrightarrow{CF} en fonction de \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{CD} .

$$\overrightarrow{CF} = 1/3\overrightarrow{CD} + 1/2(\overrightarrow{BC} + 2/3\overrightarrow{DC}) = 1/2\overrightarrow{BC}.$$

2.4. Quand il reste au plus deux vecteurs, on revient aux tests du paragraphe 1.

Dans l'exemple : le test 1 est réussi.

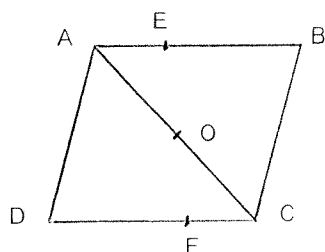
Commentaires

- *On peut bien sûr faire d'autres choix pour la traduction de la conclusion, ainsi que pour les deux vecteurs retenus au 2.3.*
- *Dans le 2.1., nous avons décomposé \overrightarrow{CF} et pas \overrightarrow{BC} . Nous n'avons pas trouvé de règle simple permettant de décider d'avance s'il faut décomposer un vecteur ou les deux. Cependant \overrightarrow{BC} apparaît comme vecteur privilégié de la figure.*

2.— AUTRES EXEMPLES

Voici quelques autres exercices classiques tirés de manuels de seconde. La méthode détaillée dans le paragraphe précédent constitue un bon guide pour aboutir à une solution dans un grand nombre de cas, même si elle n'est pas la plus élégante ni la plus rapide.

Exemple 1



Hypothèses : $ABCD$ est un parallélogramme,

$$\overrightarrow{AE} = 1/3\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{CF} = 1/3\overrightarrow{CD},$$

O est milieu de $[AC]$.

Conclusion : E, O, F sont alignés.

- On traduit la conclusion : $\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OF}$.
- Plan : pour faciliter la lecture, nous n'indiquons plus les étapes qui ne s'appliquent pas.

2.
2.1. Décomposition de \overrightarrow{OE} (configuration 1) :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$$

et de \overrightarrow{OF} (configuration 1) :

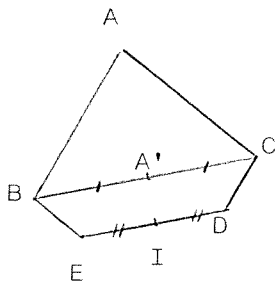
$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF}.$$

2.2. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + 1/3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + 1/3\overrightarrow{CD}$

2.3. Règle 2 : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CO} + 1/3\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + 1/3\overrightarrow{CD}$.

2.4. Le test 1 est réussi.

Exemple 2 :



Hypothèses : A' est milieu de $[BC]$

$$\overrightarrow{CD} = 1/3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BE} = 1/3\overrightarrow{AC}$$

I est milieu de $[ED]$.

Conclusion : A, A' et I sont alignés.

• On traduit la conclusion : $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AA'}$.

• Plan

2.

2.1. On décompose \overrightarrow{AI} (configuration 2) :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EI}$$

et $\overrightarrow{AA'}$ (configuration 1) :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}$$

2.2. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 1/3\overrightarrow{AC} + 1/2\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + 1/2\overrightarrow{BC}$.

2.3. **Règle 2 :** \overrightarrow{BC} semble colinéaire à \overrightarrow{ED} , mais il faudrait utiliser la règle 3 pour le prouver.

Règle 3 : retenons les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

Retour à 2.1. On décompose \overrightarrow{ED} (configuration 2).

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$$

et \overrightarrow{BC} (configuration 1) :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

Retour à 2.2. $\overrightarrow{ED} = -1/3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 1/3\overrightarrow{AB} = -2/3\overrightarrow{AB} + 2/3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Réécriture de \overrightarrow{AI} et $\overrightarrow{AA'}$.

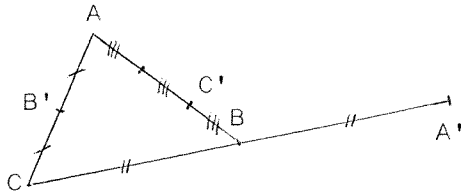
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 1/3\overrightarrow{AC} - 1/3\overrightarrow{AB} + 1/3\overrightarrow{AC} = 2/3\overrightarrow{AB} + 2/3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} - 1/2\overrightarrow{AB} + 1/2\overrightarrow{AC} = 1/2\overrightarrow{AB} + 1/2\overrightarrow{AC}$.

2.4. Le test 1 réussit.

La solution proposée ici est relativement longue, mais dans cet exercice, de caractère inhabituel, une recherche non guidée par une méthode est hasardeuse et en tous cas délicate.

Nous proposons au lecteur de tester la méthode avec les exercices suivants :

Exercice 1 :



Hypothèses :

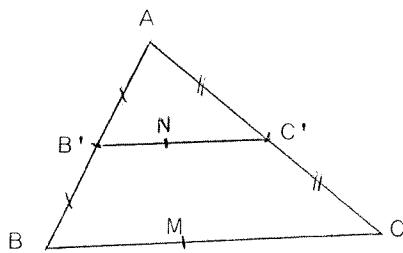
A' est le symétrique de C par rapport à B

B' est le milieu de $[AC]$

$$\overrightarrow{BC'} = 1/3 \overrightarrow{BA}$$

Conclusion : A', B', C' sont alignés.

Exercice 2 :



Hypothèses :

B' est le milieu de $[AB]$

C' est le milieu de $[AC]$

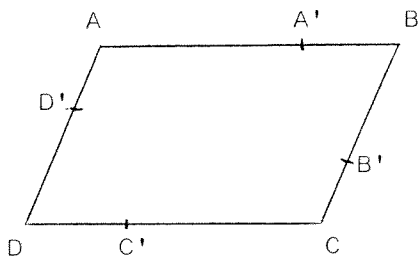
$$\overrightarrow{B'N} = 2/5 \overrightarrow{B'C'}$$

$$\overrightarrow{BM} = 2/5 \overrightarrow{BC}$$

Conclusion :

A, N, M sont alignés.

Exercice 3 :



Hypothèses :

$ABCD$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AD'} = k \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BA'} = k \overrightarrow{BA}$$

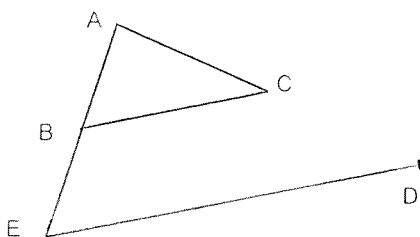
$$\overrightarrow{CB'} = k \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{DC'} = k \overrightarrow{DC}$$

Conclusion :

$A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Exercice 4 :



Hypothèses :

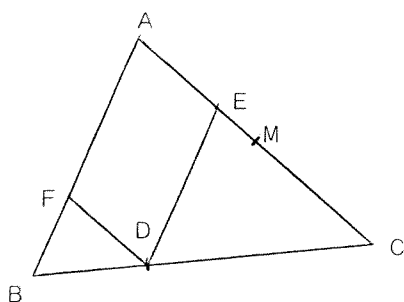
$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{ED} = 2 \overrightarrow{BC}$$

Conclusion :

C est le milieu de $[AD]$.

Exercice 5 :



Hypothèses :

$$\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

E est la projection de D sur (AC) parallèlement à (AB) .

F est la projection de D sur (AB) parallèlement à (AC) .

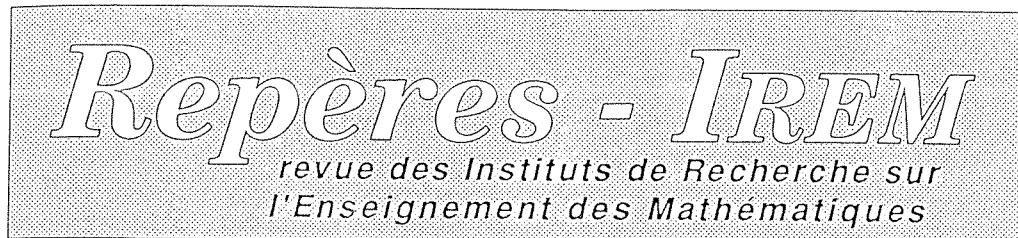
M est le milieu de $[AC]$.

Conclusion :

$$(FE) \parallel (BM)$$

CONCLUSION

Il ne s'agit pas d'enseigner la méthode exposée ici telle quelle : cependant, il peut être utile pour un enseignant de l'adapter pour aider l'élève à acquérir un savoir-faire dans ce domaine. On peut remarquer qu'il y a en général plusieurs choix de décomposition aboutissant à une solution plus ou moins rapide. Cette méthode n'est donc pas un algorithme mais un guide. Des démarches analogues ont été réalisées (*) et sont possibles dans un certain nombre de domaines mathématiques enseignés au lycée (comme, par exemple, la cocyclicité, le calcul intégral ...).



Vente au Numéro & Abonnements

Publiée par les Instituts universitaires de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques sous le patronage de l'ADIREM (Assemblée des Directeurs d'Irem), la revue « Repères - IREM » est un bulletin trimestriel s'adressant à tous les professeurs, et plus particulièrement aux enseignants des Collèges, des Lycées, des Lycées Professionnels, ou des Universités. Son but est de tenir chacun informé des questions actuelles, qu'elles aient trait aux grands débats du moment ou plus simplement aux applications concrètes, pour les classes, de la réflexion menée en commun entre praticiens et chercheurs. Elle est donc destinée à devenir un outil indispensable aussi bien aux professeurs de mathématiques qu'aux formateurs spécialisés ; ainsi qu'à tous ceux qui sont concernés par la pédagogie ou les Sciences de l'Éducation.

Elle se doit de figurer dans tout Centre de Documentation et d'Information ...

(*) A. ROBERT, J. ROGALSKI, R. SAMURCAY : Enseigner des méthodes, éd. IREM Paris-Sud.

ANALYSE DES EFFETS DE LA PRÉSENCE D'OBJETS FERROMAGNÉTIQUES EN IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE NUCLÉAIRE

Florence KRAEMER

Si nous publions ici un article de physique, ce n'est pas tant pour montrer les liens qui unissent cette discipline aux mathématiques qu'en raison de la personnalité de l'auteur. Florence KRAEMER est actuellement élève de T.C. au lycée Jean Monnet de Strasbourg. L'an passé, elle avait participé au club de mathématiques qui se réunissait à l'Université Louis Pasteur, et c'est à ce titre qu'elle a pu obtenir une subvention pour un stage d'un mois dans le laboratoire du Dr Denis LE BIHAN près de Washington ().*

PRÉSENTATION

Le but de ce projet est d'étudier deux des dangers des examens par Résonance Magnétique Nucléaire (RMN). Ces dangers, qui ne concernent que les patients porteurs d'implants ferromagnétiques, sont d'une part le déplacement des implants dans le corps des patients, particulièrement dangereux lorsque ces implants sont des clips posés sur une artère, d'autre part la déformation des images médicales de RMN. Ces distorsions peuvent en effet induire les médecins en erreur et leur faire poser des diagnostics erronés.

En conséquence le second objectif de cette étude, sujet du présent article, est d'analyser ces distorsions ou artefacts et d'essayer de les prédire au sein d'un modèle théorique. Une simulation informatique utilisant ce modèle théorique permet de tester sa validité par comparaison avec les images de RMN.

LES ARTEFACTS

a) Problème :

Selon la théorie de la RMN (cf. appendice), la présence d'un champ magnétique extrêmement homogène (environ 10^{-5} ppm sur un volume de 10 cm^3) est nécessaire à la réalisation d'une image. Un objet ferromagnétique placé dans le champ de l'aimant de RMN se magnétise et crée donc lui-même un champ magnétique parasite qui s'ajoute au champ principal.

L'interaction magnétique entre cet objet ferromagnétique et l'aimant de RMN a été simulé en utilisant un aimant en U et une barre magnétique. Les lignes de champ, visualisées par de la limaille de fer, ont été photographiées (fig. 1). Il apparaît qu'en présence d'un objet ferromagnétique, le champ au centre de l'aimant n'est plus très homogène.

(*) Diagnostic Radiology Department - National Institute of Health - BETHESDA MD 20892

ANALYSE DES EFFETS DE LA PRÉSENCE D'OBJETS FERROMAGNÉTIQUES

Comme on obtient une image de RMN en introduisant une variation contrôlée du champ magnétique dans l'espace, je formule l'hypothèse que la présence d'un objet ferromagnétique entraînera une variation incontrôlée du champ dans l'espace et créera ainsi des distorsions d'images par suite de mauvais calculs.

b) Procédure :

- 1) Les images sont générées grâce à un logiciel et un aimant supraconducteur de RMN de 1,5 Tesla.
- 2) L'objet étudié, baptisé fantôme, est constitué d'une bouteille cylindrique en plastique, de 6 cm de diamètre intérieur, remplie d'eau (fig. 2). Le fantôme est placé au centre de l'aimant (plus exactement, sa paroi est tangente à l'axe central de l'aimant).
- 3) On obtient une image du fantôme en coupe coronale (horizontale) de 10 mm d'épaisseur. Cette image est centrée avec soin par rapport au tunnel de l'aimant. Le gradient de lecture est placé le long de l'axe Z (cf. appendice), dans la direction opposée à celle du champ magnétique.
- 4) On répète les étapes 2 et 3 après avoir collé une aiguille de suture ferromagnétique sur le bord du fantôme. L'aiguille est ainsi exactement au centre de l'aimant.
- 5) On tire et on compare des photos de type "rayon X" de ces images.

c) Résultats :

Les images obtenues, avec puis sans l'aiguille, diffèrent sur les points suivants (fig. 3) :

- 1) L'image du fantôme est repoussée le long de l'axe Z (fig. 3b)
- 2) Les contours de l'objet sont modifiés : la section du fantôme n'est plus circulaire, mais plutôt "elliptique" du côté de l'aiguille ferromagnétique.
- 3) Le signal n'est plus homogène en présence de l'aiguille; il est plus lumineux en certains endroits, surtout du côté le plus proche de l'aiguille.

d) Interprétation :

L'hypothèse proposée est validée car la présence d'un objet ferromagnétique à proximité de l'objet étudié (le fantôme) entraîne de sévères distorsions de l'image. Non seulement les contours de l'objet sont modifiés, mais sur l'image, la position même de l'objet est modifiée, ainsi que l'intensité du signal lumineux.

Dans le but d'analyser et finalement de prévoir ces artefacts, j'étudie un cas simple (voir la procédure), où l'objet ferromagnétique est placé sur l'axe Z . Je limite les calculs, dans cette approche préliminaire, à la seule distorsion le long de l'axe Z .

- 1) Calcul du gradient de champ magnétique induit par un objet ferromagnétique :
* Le champ magnétique induit par l'objet ferromagnétique à une distance Z de l'objet, $B_z \text{ ind}$, vaut (voir réf. 1) :

$$B_z \text{ ind} = \mu_0 M / (2\pi Z^3)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et M le moment magnétique de l'objet.

* Ce champ additionnel entraîne un gradient induit de champ magnétique, $G_{z \text{ ind}}$ tel que :

$$G_{z \text{ ind}} = \frac{\delta B_z}{\delta z} = -3\mu_0 M / (2\pi Z^4).$$

* Le gradient résiduel, G_z , est la somme du gradient induit $G_{z \text{ ind}}$ et du gradient l_u , G_{l_u} , qu'utilise l'appareillage pour produire les images :

$$G_z = G_{z \text{ ind}} + G_{l_u}$$

donc, en Z , la fréquence de résonance $\nu(Z)$, (voir appendice), sera :

$$\nu(Z) = \nu_0 + \frac{\gamma}{2\pi} G_z \cdot Z$$

où ν_0 est la fréquence de résonance au centre de l'aimant et γ la constante gyromagnétique. L'équation précédente s'écrit alors :

$$\nu(Z) = \nu_0 + \frac{\gamma}{2\pi} (G_{z \text{ ind}} + G_{l_u}) \cdot Z$$

soit

$$\nu(Z) = \nu_0 + \frac{\gamma}{2\pi} (G_{l_u} - 3\mu_0 \frac{M}{2\pi Z^4}) \cdot Z.$$

2) Etude des effets sur l'image :

La valeur du gradient "connue" par l'ordinateur pour "calculer" l'image est G_{l_u} , qui est constant pour toute l'image. Donc, en présence du gradient inconnu $G_{z \text{ ind}}$, l'ordinateur donne une position erronée, Z' , telle que :

$$Z' = \frac{Z \cdot G_z}{G_{l_u}}$$

et donc :

$$Z' = Z - 3\mu_0 \frac{M}{2\pi Z^3 G_{l_u}}.$$

On trace la courbe représentative de la fonction F , telle que $Z' = F(Z)$ (fig. 4) en considérant que G_{l_u} est négatif dans l'expérience; on en déduit les conclusions suivantes :

* A l'emplacement de l'objet ferromagnétique, le gradient tend vers l'infini et aucune image ne peut apparaître, ce qui explique la présence d'un trou sur l'image visualisée.

* A une distance très grande de l'objet, le gradient tend vers G_{l_u} et la distorsion disparaît, l'image redevenant normale.

* Entre ces deux positions, la distorsion dépend de la distance entre le fantôme et l'objet selon une loi en $1/Z^3$. L'effet est plus important avec des objets ferromagnétiques ayant un grand moment magnétique M (objets fortement

ANALYSE DES EFFETS DE LA PRÉSENCE D'OBJETS FERROMAGNÉTIQUES

magnétiques ou grands objets). Cette distorsion fait apparaître les objets comme contractés.

Cette contraction expliquerait l'apparente augmentation de l'intensité du signal près de l'objet ferromagnétique, car davantage de protons seraient représentés au même endroit de l'image.

3) Simulation :

Dans le but de vérifier le modèle précédemment établi, j'ai conçu une simulation simple en BASIC sur IBM PC. Ce programme aide à visualiser la transformation des coordonnées de chaque point de l'objet étudié (ici un disque) en de nouvelles coordonnées (selon l'équation $Z' = F(Z)$ ci-dessus). Ce programme prend en compte la composante sur Z du champ magnétique induit par l'objet ferromagnétique mais ne tient pas compte des effets latéraux. Les résultats sont donnés sur la figure 5 : la corrélation avec les résultats expérimentaux est très bonne. Il m'est donc possible de prédire le déplacement apparent de l'objet étudié, la modification de ses contours et l'intensité du signal au voisinage de l'élément ferromagnétique. Cependant, certaines différences mettent en évidence l'imperfection du modèle théorique, lequel ne prend pas en compte les effets du moment magnétique sur les axes X et Y . Un modèle plus affiné serait nécessaire pour prédire les artefacts avec une meilleure précision.

Enfin, un traitement plus général du problème devrait inclure le cas où le gradient de lecture et le moment magnétique sont dans deux directions opposées. Il me paraît probable qu'on observerait une dilatation de l'image corrélativement avec une décroissance de l'intensité du signal lumineux. Ces expériences pourraient être facilement réalisées.

CONCLUSION

Les distorsions des images de RMN induites par la présence d'un objet ferromagnétique (déplacement et contraction apparente de l'image essentiellement dans les zones proches de l'objet ferromagnétique) peuvent donc être prédites, au moins dans un cas simple. Une analyse plus poussée devrait inclure les composantes latérales des moments magnétiques ainsi que différentes orientations du gradient de lecture utilisé pour composer les images de RMN. Je pense que les propriétés magnétiques d'un objet pourraient être testées et évaluées dans une manipulation inverse en étudiant le degré de distorsion des images de RMN produites en sa présence. Etant donnée la sensibilité du processus d'imagerie, cette méthode pourrait se montrer très utile pour étudier de nombreux matériaux.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le docteur Denis LE BIHAN, qui m'a offert un projet de recherche utile et intéressant et qui m'a expliqué avec beaucoup de patience tout le processus de l'imagerie par RMN.

Je voudrais également remercier les docteurs RAJAN, LEVY, PATT et SEGHAL ainsi que Robert WALSH pour tous les précieux conseils qu'ils m'ont donnés.

Je remercie aussi Mrs RICHARDSON et Mr SANE pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la version anglaise de cet article.

Pour terminer je remercie Mlle GREINER, mon professeur de physique de première, qui a su m'intéresser à cette discipline.

RÉFÉRENCES

- 1) BLEANEY (Bi.) - BLEANY (B.), Electricity and Magnetism, p. 163-192, Oxford Univ. Press, 1989.
- 2) LE BIHAN (D.), Imagerie par résonance magnétique nucléaire : bases physiques, Paris, Masson, 1984.
- 3) NEW PFJ, ROSEN (Br.), BRADY (Tj) et al, Potential hazards and artifacts of ferromagnetic and nonferromagnetic surgical and dental materials and devices in nuclear magnetic resonance imaging. Radiology 147 : 139-148, 1983.
- 4) SHELLOCK (FG) - CURTIS (JS), Radiology 180 : pp. 541-550, 1991.
- 5) WILLIAMS (KD) - DRAYER (BP), Magnets, metal and medical devices : The good, the bad and the ugly, BNI quaterly 5 : pp. 46-52, 1989.

APPENDICE : THÉORIE DE L'IMAGERIE PAR R.M.N.

Lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique, les nucléons ayant un moment magnétique intrinsèque résonnent à la fréquence :

$$\nu_0[(\gamma/(2\pi)) \times B_0] \quad (A1)$$

où γ est le rapport gyromagnétique (42,576 MHz/T pour la molécule d'hydrogène), et B_0 le champ magnétique.

Une séquence de RMN consiste à modifier la magnétisation des nucléons en envoyant un champ électromagnétique oscillant (des photons) dont la fréquence est celle de résonance des nucléons. Lors de la résonance, les nucléons ré-émettent des photons qui sont recueillis et analysés. Ce sont ces photons qui constituent le signal de RMN qui est utilisé pour produire les images médicales ou pour analyser les substances chimiques (voir réf. 2).

Pour construire l'image, il faut localiser la provenance des photons émanant de la matière examinée. Pour cela, on ajoute un champ magnétique au champ principal B_0 ce qui introduit un gradient dans les trois dimensions permettant la reproduction des trois dimensions de l'espace.

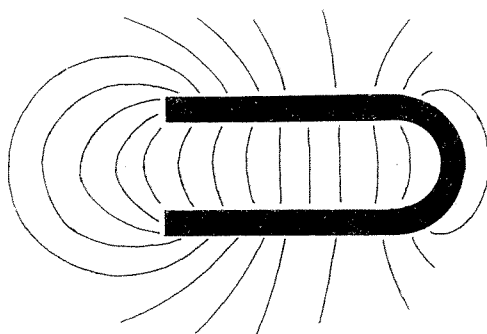
Considérons le gradient de lecture G_{lu} , utilisé le long d'une des dimensions, par exemple le long de l'axe Z . D'après l'équation (A1), la fréquence de résonance est donc :

$$\begin{aligned} \nu &= (\gamma/2\pi)[B_0 + G_{lu}.Z] \\ \nu &= \nu_0 + \frac{\gamma}{2\pi}.G_{lu}.Z. \end{aligned} \quad (A2)$$

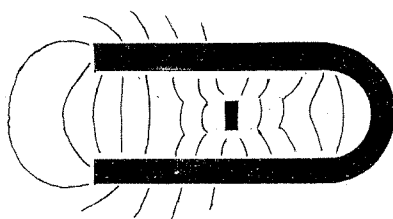
Une transformation mathématique (la transformation de FOURIER) programmée sur ordinateur permet d'identifier le signal provenant de la position Z à partir de sa fréquence de résonance (voir réf. 2).

ANALYSE DES EFFETS DE LA PRÉSENCE D'OBJETS FERROMAGNÉTIQUES

Figure 1

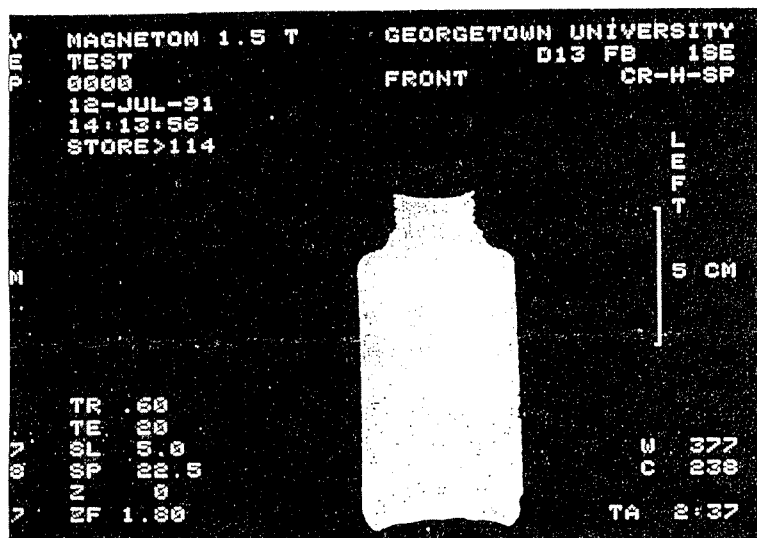


Champ magnétique engendré par un aimant en U.



Champ magnétique engendré par un aimant en U en présence d'une petite barre aimantée.

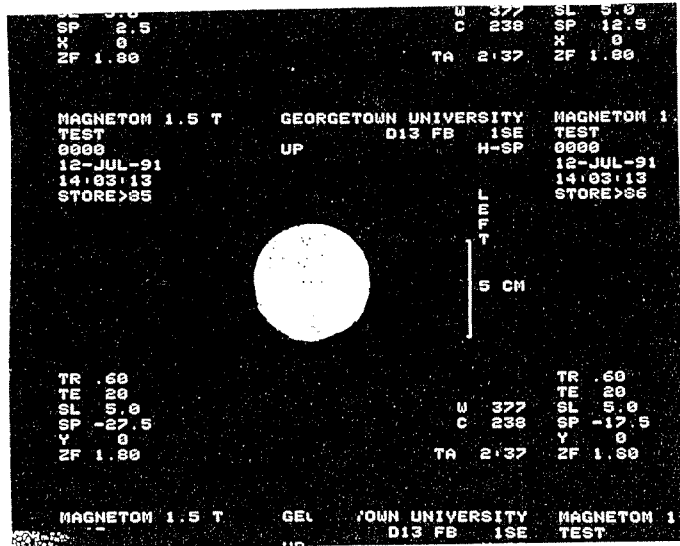
Figure 2



Coupe longitudinale du fantôme obtenue par RMN

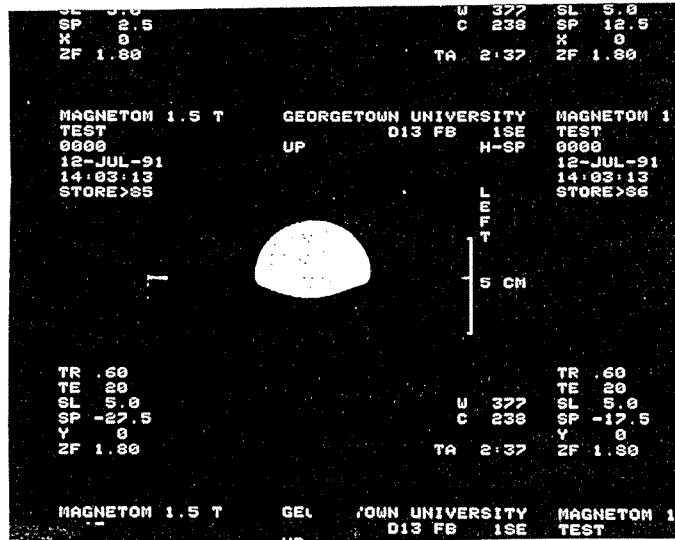
F. KRAEMER

Figure 3a



Coupe transversale du fantôme obtenue par RMN

Figure 3b

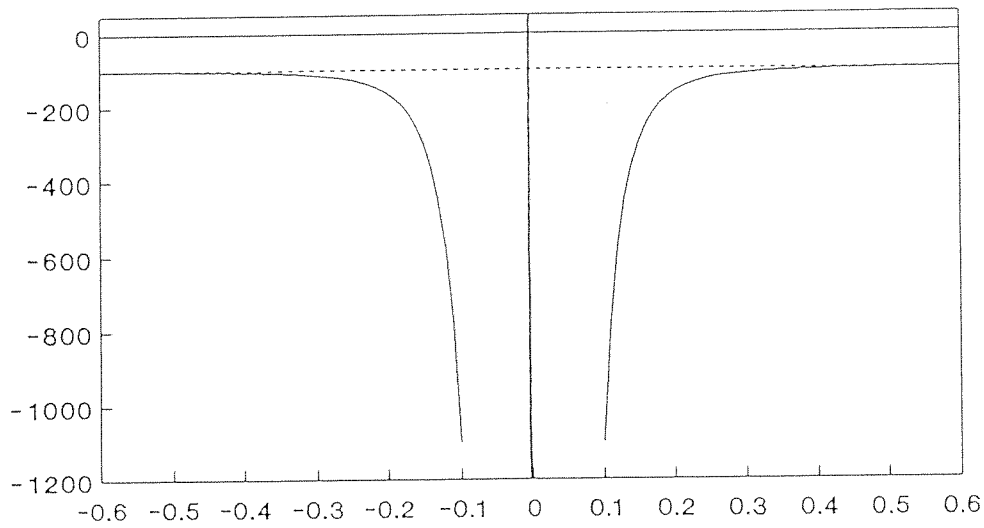


Coupe transversale du fantôme en présence de l'aiguille aimantée
obtenue par RMN

ANALYSE DES EFFETS DE LA PRÉSENCE D'OBJETS FERROMAGNÉTIQUES

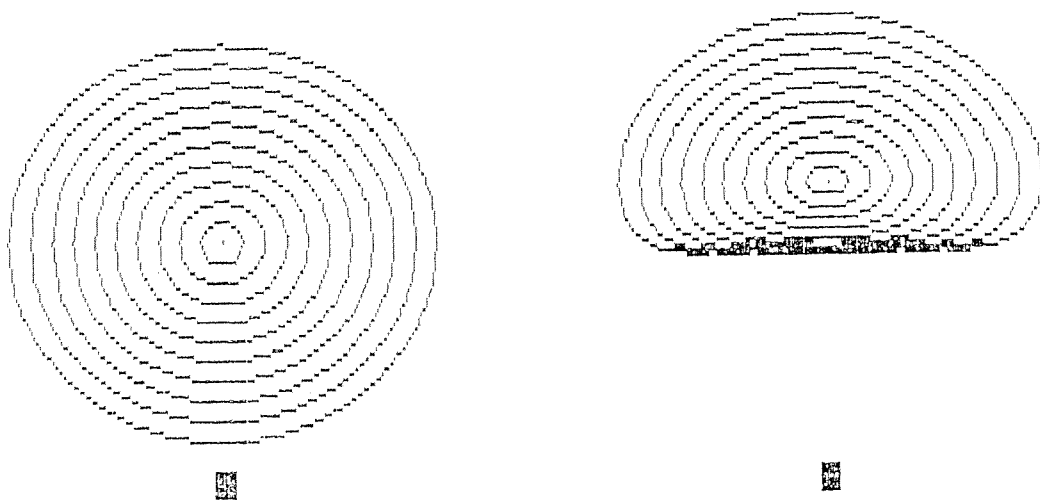
Figure 4

- . en abscisse : distance à l'objet
- . en ordonnée : gradient actuel (les unités sont arbitraires)
- . en pointillés : G_{lu} (asymptote)
- . en trait plein : $G_z ind.$



Courbe représentant le gradient réel G_z

Figure 5



Simulation

DE LA TOUPIE AUX COURBES ALGÈBRIQUES (*)

Michèle AUDIN

Bien souvent, les équations différentielles décrivant le mouvement d'un système matériel se résolvent à l'aide d'**intégrales abéliennes**; en gros, c'est dire qu'on arrive à quelque chose du genre $\dot{x}^2 = P(x)$ soit

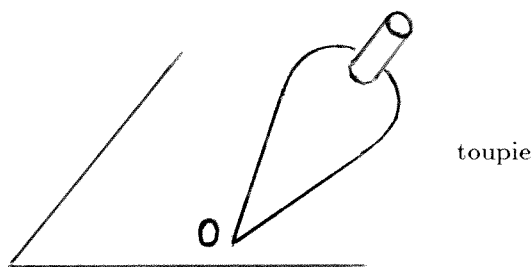
$$dt = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

où P est un polynôme : ainsi les solutions $x(t)$ s'obtiennent en inversant la fonction

$$t(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}.$$

Je vais expliquer ici **un** exemple de cette situation. Je donnerai ensuite une vision un peu générale et plus moderne de ce type d'exemples.

L'exemple que j'ai choisi est celui de la **toupie**, ou toupie symétrique, ou toupie **de Lagrange** : en effet l'étude en a été faite par ce dernier en 1788. Du point de vue mathématique, c'est un cas particulier de **solide mobile autour d'un point fixe** (le point fixe sera le point de contact entre l'axe de la toupie et le sol).



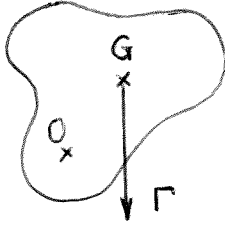
La question du solide mobile autour d'un point fixe a fait travailler les plus grands mathématiciens de la fin du XVIII^e siècle et du XIX^e siècle. L'Académie des Sciences avait même institué un prix (le prix Brodin) pour un mémoire sur ce sujet, ce qui a donné lieu au travail le plus célèbre, celui de S. KOWALEVSKI (1889).

C'est un fait général que les contributions décisives à ce type de questions ont été faites par les mathématiciens qui étaient le plus au fait de la théorie nouvelle

(*) Dans le cadre des conférences "Ouverture mathématique" organisées conjointement par l'I.R.E.M. de Strasbourg et la Régionale A.P.M.E.P. d'Alsace - Le 19 février 1992.

des fonctions de variable **complexe** (JACOBI, KOWALEVSKI, WEIERSTRASS ...) en particulier des intégrales abéliennes, etc ...

1. SOLIDE MOBILE AUTOUR D'UN POINT FIXE, LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

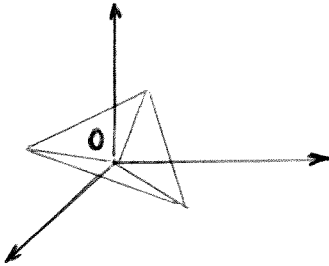


On considère un solide, de centre de gravité G , avec un point fixe O , mobile dans un champ de pesanteur constant.

Comme nous faisons des mathématiques, nous avons le choix des unités, la masse du solide sera donc 1 et l'intensité de la pesanteur aussi.

Nous pouvons aussi choisir un repère, **mobile avec le solide**, orthonormé. Le choix du point fixe O comme origine s'impose. C'est dans ce repère que j'écris les vecteurs L, Γ, Ω, M qui apparaissent maintenant :

- a) $L = \overrightarrow{OG}$ est un vecteur constant, caractéristique du solide.
- b) Γ n'est autre que le champ de gravitation, constant ... dans un repère fixe. Décrire ses variations en fonction du temps, c'est décrire (en partie) le mouvement du repère mobile — donc du solide.
- c) Ω est le vecteur de rotation instantanée. Arrêtons-nous un peu sur la définition de ce vecteur. Fixons un repère (fixe, justement). On a une isométrie R_t qui transforme le repère mobile en ce repère fixe.



Un point $q(t)$ dans le repère fixe, ou $Q(t)$ dans le repère mobile : $q(t) = R_t Q(t)$.

Q est constant : c'est bien dire qu'on a un solide — un corps **rigide** pour faire un anglicisme;

$$\text{et } Q = R^{-1}q : \dot{q} = (\dot{R}R^{-1})q.$$

Quant à $\dot{R}R^{-1} = \dot{R}^t R$, c'est un opérateur antisymétrique : R est une isométrie

$$\begin{aligned} R^t R &= \text{Id} \\ \dot{R}^t R + R^t \dot{R} &= 0 \\ \dot{R}^t R + {}^t(\dot{R} R) &= 0 ; \end{aligned}$$

dans \mathbb{R}^3 , un opérateur antisymétrique s'identifie à un vecteur

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

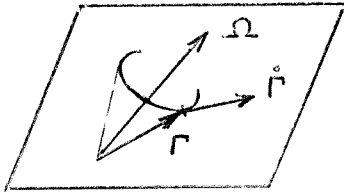
de façon que $A.q = v \wedge q$ (exercice).

On appelle ω le **vecteur de rotation instantanée**, le vecteur associé à $\dot{R}R^{-1}$, et Ω ce même vecteur exprimé dans le repère mobile.

A peu près par définition de Ω , dire que Γ est constant dans le repère fixe, c'est dire que

$$(1) \quad \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega :$$

$$\begin{aligned} 0 = \dot{\gamma} &= (R\Gamma)^\circ = \dot{R}\Gamma + R\dot{\Gamma} \text{ donc } \gamma \\ &= -{}^t R \dot{R} \Gamma = -{}^t R (\dot{R} R^{-1}) \gamma \\ &= -{}^t R (\omega \wedge \gamma) = -\Omega \wedge \Gamma = \Gamma \wedge \Omega. \end{aligned}$$



d) M est le moment cinétique,

$$m = q \wedge \dot{q} = q \wedge (\omega \wedge q)$$

ou

$$M = Q \wedge (\Omega \wedge Q).$$

Pour chaque point Q de la toupie, l'application linéaire $\Omega \mapsto Q \wedge (\Omega \wedge Q)$ est **symétrique** et de type positif :

$$\begin{aligned} [Q \wedge (X \wedge Q)].Y &= \det(Q, X \wedge Q, Y) \\ &= \det(Y, Q, X \wedge Q) \\ &= (Y \wedge Q).(X \wedge Q). \end{aligned}$$

En sommant sur tous les points Q , on obtient un opérateur symétrique défini positif noté J , ainsi $M = J\Omega$. Par construction même, J est constant et caractéristique du solide. J est la **matrice d'inertie** du solide, on peut supposer (et on supposera donc) qu'elle est **diagonale** dans le repère mobile orthonormé utilisé.

On applique maintenant le théorème des moments : $n = \dot{m} = (RM)^\circ$ est la somme des moments par rapport au point O des forces appliquées au solide.

$$n = RN = (RM)^\circ = \dot{R}M + R\dot{M} = R(\Omega \wedge M) + R\dot{M}$$

donc

$$\dot{M} = M \wedge \Omega + N.$$

Mais les forces d'appui, s'exerçant en O , ont un moment nul. Il ne reste que la gravitation, $N = \Gamma \wedge L$, d'où

$$(2) \quad \dot{M} = M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L.$$

Les équations (1) et (2)

$$(E - P) \quad \begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega \\ \dot{M} = M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L. \end{cases}$$

constituent les **équations d'Euler-Poisson**.

2. INTÉGRALES PREMIÈRES ET TOUPIE SYMÉTRIQUE

Il est extrêmement utile pratiquement – et en fait aussi théoriquement (1) — de connaître le plus possible de quantités qui restent conservées pendant le mouvement. En voilà quelques-unes :

a) l'énergie

L'énergie totale du solide est

$$H = \text{énergie cinétique} + \text{énergie potentielle} = \frac{1}{2}M.\Omega + \Gamma.L.$$

Bien entendu elle est conservée (exercice : $\frac{dH}{dt} = 0$ (Γ, M) vérifient (1) et (2). Indication : $M.\Omega = M.J^{-1}M$ est une forme quadratique en M).

b) **La loi des aires** : le moment de M par rapport à l'axe vertical (fixe) est constant. En d'autres termes $C = M.\Gamma$ est aussi une intégrale première (exercice : $\frac{dC}{dt} = 0$).

d) **Une intégrale triviale** : $\|\Gamma\|^2 = 1$ par définition.

En général, c'est tout. Il serait très intéressant de vous expliquer pourquoi, mais on aimerait bien avoir une intégrale première (quantité conservée) de plus. Dans certains cas, ça existe, et un de ces cas est celui qui nous intéresse ici.

Si la toupie est **symétrique**, le moment de M par rapport à l'axe L doit aussi être conservé.

d) **Le moment de Lagrange** $K = M.L$ est conservé. Là je fais le calcul :

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \dot{M}.L \quad (L \text{ est constant}) \\ &= (M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L).L \\ &= (M \wedge \Omega).L \\ &= \det(M, \Omega, L) \end{aligned}$$

(1) Même si ça n'apparaît pas trop, c'est, fondamentalement, le sujet de cet article.

Que signifie la symétrie de la toupie? Il y a un axe de symétrie de rotation, l'axe L . La matrice d'inertie est de la forme

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ \hline 0 & 0 & m \end{array} \right)$$

dans une base orthonormée dont le troisième vecteur est colinéaire à L ou égal à L , puisque, naturellement, l'unité de longueur est $\|L\|$. Comme $M = J\Omega$, c'est dire que $M - l\Omega$ est colinéaire à L . Alors M, Ω et L sont liés et $\dot{K} = 0$. Mon choix d'unités me permet de supposer aussi que $l = 1$.

3. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les quatre quantités exhibées sont conservées pendant le mouvement. **On fixe leurs valeurs**

$$\begin{cases} 1 = \|\Gamma\|^2 & H = \frac{1}{2}M.\Omega + \Gamma.L \\ C = M.\Gamma & K = M.L \end{cases}$$

Comme vous avez déjà joué avec une toupie, vous savez que le mouvement de l'axe de la toupie est intéressant. Je vais m'intéresser surtout à lui. Il s'agit de la position de l'axe L par rapport à la verticale, ou, en changeant de point de vue, de la verticale Γ par rapport à l'axe L (fixe dans le repère mobile).

Je vais écrire $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ et m'intéresser à $\gamma_3 = \Gamma.L$ et à l'équation différentielle

que cette quantité vérifie. Fixons les notations $M = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ et $\Omega = J^{-1}M =$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{m}w \end{pmatrix}.$$

J'utilise (1) :

$$(1) \quad \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega \Rightarrow \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 v - \gamma_2 u \text{ et } (3) \quad \dot{\gamma}_3^2 = \gamma_1^2 v^2 + \gamma_2^2 u^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 uv.$$

J'utilise $K = M.L = w$ et $c = M.\Gamma$

$$u\gamma_1 + v\gamma_2 + K\gamma_3 = C \Rightarrow u\gamma_1 + v\gamma_2 = C - K\gamma_3$$

j'élève au carré

$$2uv\gamma_1\gamma_2 = (C - K\gamma_3)^2 - u^2\gamma_1^2 - v^2\gamma_2^2$$

je reporte dans (3)

$$\dot{\gamma}_3^2 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(u^2 + v^2) - (C - K\gamma_3)^2$$

J'utilise $\|\Gamma\|^2 = 1$

$$(4) \quad \dot{\gamma}_3^2 = (1 - \gamma_3^2)(u^2 + v^2) - (C - K\gamma_3)^2.$$

DE LA TOUPIE AUX COURBES ALGÈBRIQUES

Je veux encore me débarasser des (u, v) qui traînent dans (4). Je n'ai pas encore utilisé H .

J'utilise $H = \frac{1}{2}M.\Omega + \Gamma.L$

$$H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \frac{1}{m}K^2) + \gamma_3$$

donc $u^2 + v^2$ s'exprime en fonction de γ_3 et des constantes de notre mouvement

$$u^2 + v^2 = 2H - \frac{1}{m}K^2 - 2\gamma_3$$

je reporte dans (4)

$$\dot{\gamma}_3^2 = (1 - \gamma_3^2)[2H - \frac{1}{m}K^2 - 2\gamma_3] - (C - K\gamma_3)^2$$

je pose $H' = 2H + (1 - \frac{1}{m})K^2$, alors finalement

$$(5) \quad \dot{\gamma}_3^2 = (1 - \gamma_3^2)(H' - K^2 - 2\gamma_3) - (C - K\gamma_3)^2.$$

Croyez-moi si vous voulez, sinon faites l'exercice, si vous savez résoudre (5), vous avez les solutions de tout le système d'Euler-Poisson assez facilement.

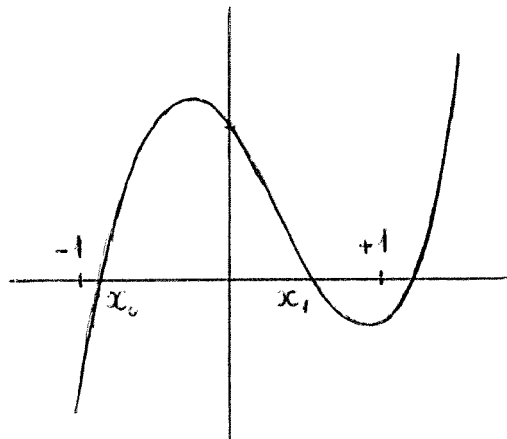
On va se concentrer sur (5); je change de notation pour l'inconnue (γ_3 devient x) et on a une équation

$$(6) \quad \dot{x}^2 = f(x)$$

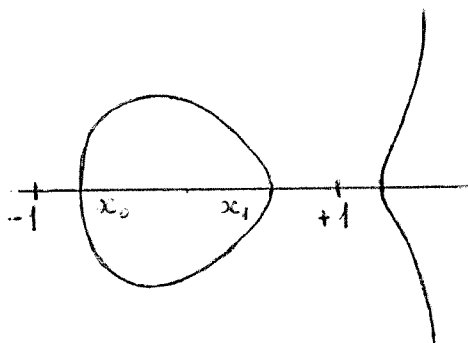
où $f(x) = (1 - x^2)(H' - K^2 - 2x) - (C - Kx)^2$ est un certain polynôme de degré 3.

Que savons-nous de ce polynôme? $f(+\infty) = +\infty$, $f(\pm 1) < 0$, et en plus $x = \gamma_3$ vérifie $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, en particulier $\dot{x}^2 = f(x)$ doit avoir des solutions avec $-1 \leq x \leq 1$: f **doit** prendre des valeurs positives quelque part dans cet intervalle.

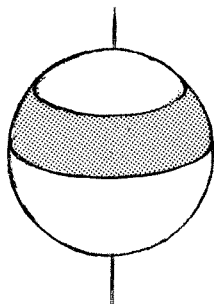
En résumé :



Maintenant l'équation (6) s'écrit $\frac{dx}{dt} = \sqrt{f(x)}$, où $dt = \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, donc $t = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ est une intégrale **elliptique** et $x(= \gamma_3)$, obtenue en inversant cette intégrale, s'exprime à l'aide de la fonction \wp de Weierstrass associée à la courbe \mathcal{E} d'équation $y^2 = f(x)$.

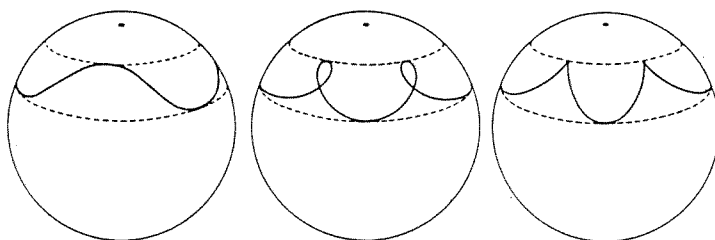


Voici \mathcal{E} , ou plutôt sa partie réelle. Elle a deux composantes, une seule va correspondre à des mouvement **réels** de la toupie.

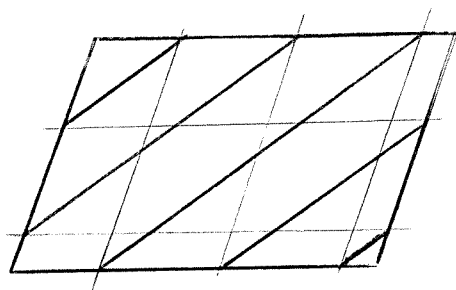


Bande $x_0 \leq \gamma_3 \leq x_1$ où est confiné le mouvement de l'axe.

En étudiant les solutions γ_1, γ_2 , on obtient les trois types de dessins qui figuraient sur la feuille d'annonce de la conférence.



Maintenant, si vous vous rappelez les cours d'analyse complexe que vous avez peut-être suivis, la courbe **complexe** \mathcal{E} peut se mettre sous la forme \mathbb{C}/Λ où Λ est un réseau $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{C}$, précisément celui avec lequel on définit la fonction \wp .



topologiquement, on a un tore T^2 .

En particulier, ça a un sens de parler de trajectoires linéaires : les images des droites.

Dire que les solutions s'expriment à l'aide de fonctions φ , c'est dire que, vues sur la courbe \mathcal{E} , elles sont **linéaires** en ce sens.

4. UN POINT DE VUE GÉNÉRAL : POURQUOI TANT D'INTÉGRALES PREMIÈRES? POURQUOI UNE COURBE?

Reprenons nos équations d'Euler-Poisson. Le produit vectoriel est vraiment trop typique de \mathbb{R}^3 . On remplace donc les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par des matrices antisymétriques

ques $\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ et le produit extérieur $u \wedge v$ devient $[A, B] = AB - BA$ (exercice).

J'écris

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} & = [\Gamma, \Omega] \\ \dot{M} & = [M, \Omega] + [\Gamma, L] \end{cases}$$

ça fait déjà plus chic.

Maintenant, j'aimerais avoir **une seule** équation. Je le fais brutalement

$$(7) \quad (\Gamma + \lambda M + \lambda^2)^{\cdot} = [\Gamma + \lambda M + \lambda^2 L, \Omega + \lambda L]$$

en introduisant une variable formelle λ .

Je dis que **dans le cas où la toupie est symétrique**, (7) est équivalent à $(E-P)$.

Le seul problème est le terme en λ^2 : comme L est constant, on a 0 à gauche, et à droite on a $[L, \Omega] + [M, L]$, soit encore $[M - \Omega, L]$ qui est nul **parce que** la toupie est symétrique.

En d'autres termes, notre système est mis sous "forme de Lax"

$$(L) \quad A(\lambda)^{\cdot} = [A(\lambda), B(\lambda)]$$

où A et B sont des polynômes (en λ) de matrices, dépendant du temps (N.B. : la matrice B est aussi une fonction de A , cette équation différentielle est bien **non-linéaire** en général).

Considérons maintenant le polynôme caractéristique

$$\det (A(\lambda) - \mu \text{Id}) = \sum_{i=0}^n a_{n-i}(\lambda) \mu^i$$

de la matrice $A(\lambda)$.

A priori, les $a_i(\lambda)$ sont des fonctions **du temps** t , comme A . Du fait de l'équation (L), il **n'en est rien** : $a_i(\lambda)$ est, au signe près, un polynôme symétrique élémentaire des valeurs propres de $A(\lambda)$: $a_i(\lambda) = \pm(\mu_1 \cdots \mu_i + \cdots)$. Montrer que tous les $a_i(\lambda)$ sont constants est équivalent à montrer que les $n_i(\lambda) = \Sigma \mu_j^i$ sont constants. Maintenant

$$n_i(\lambda) = \text{tr}[A(\lambda)^i]$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_i(\lambda) &= \frac{d}{dt} \text{tr} A(\lambda)^i \\ &= i \text{tr}[A(\lambda)^{i-1} \dot{A}(\lambda)] \quad (*) \\ &= i \text{tr}(A(\lambda)^{i-1} [A(\lambda), B(\lambda)]) \\ &= i \text{tr}[A(\lambda)^i, B(\lambda)] \\ &= 0 \text{ car c'est la trace d'un crochet.} \end{aligned}$$

...on a donc **plein** d'intégrales premières ...et aussi une courbe, d'équation $\det(A(\lambda) - \mu Id) = 0!$

Autrement dit, les calculs que nous avons faits dans le cas de la toupie symétrique ne sont qu'un cas particulier d'une théorie bien générale et bien belle.

Vérifions : si $A(\lambda) = \Gamma + \lambda M + \lambda^2 L$,

$$\det(A(\lambda) - \mu Id) = \mu(\mu^2 + \|\Gamma + \lambda M + \lambda^2 L\|^2)$$

dans cette écriture, $\Gamma + \lambda M + \lambda^2 L$ est redevenu un vecteur de \mathbb{R}^3 . $A(\lambda)$ est une matrice réelle antisymétrique, elle admet 0 comme valeur propre, les deux autres sont imaginaires conjuguées.

On oublie le facteur μ . Reste comme équation pour la courbe \mathcal{E}'

$$\begin{aligned} 0 &= \mu^2 + \|\Gamma + \lambda M + \lambda^2 L\|^2 \text{ on développe} \\ &= \mu^2 + 1 + 2(\Gamma.M)\lambda + (\|M\|^2 + 2\Gamma.L)\lambda^2 + 2(L.M)\lambda^3 + \lambda^4 \\ &= \mu^2 + 1 + 2c\lambda + H'\lambda^2 + 2K\lambda^3 + \lambda^4 \end{aligned}$$

On retrouve ainsi nos intégrales premières.

Maintenant, la courbe. Tout à l'heure, j'ai vu apparaître, bien naturellement la courbe \mathcal{E} d'équation $y^2 = f(x)$. La partie réelle de \mathcal{E} avait deux composantes dont on a discuté les relations avec les mouvements réels de la toupie.

Notre nouvelle courbe ...ne contient pas de point réel! Elle est pourtant bien intéressante. Je vous avais prévenus depuis le début de l'exposé : on n'arrive à rien dans cette théorie en restant complètement réel.

Notre courbe \mathcal{E}' est une respectable courbe **complexe**, elle mérite d'être appelée une courbe **réelle** (son équation est réelle) même si sa partie réelle est vide. Pour

(*) à cause des propriétés de la trace, tout se passe comme en commutatif grâce à (L).

DE LA TOUPIE AUX COURBES ALGÈBRIQUES

vous convaincre à la fois qu'on n'est pas en train de parler de l'ensemble vide, et à la fois qu'il y a un rapport entre ce dont je parle maintenant et les calculs que j'ai faits avant : à la courbe \mathcal{E}' — comme à toute courbe — on sait associer un tore Jac \mathcal{E}' ici un \mathbb{C}/Λ — sa jacobienne. Ce qui se passe ici.

- Jac $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ (c'est un isomorphisme réel).
- C'est sur le tore Jac \mathcal{E}' , avec sa structure affine, que je résous les équations. La boucle est bouclée.

En plus des systèmes mécaniques comme certaines toupies, cette méthode s'applique à beaucoup d'équations différentielles — celle donnant les géodésiques d'un ellipsoïde de \mathbb{R}^3 par exemple — et d'équations aux dérivées partielles, comme la célèbre Korteweg de Vries. Ça ne sert pas seulement à étudier l'équation différentielle, mais aussi, par un mouvement de balancier, les courbes et leurs jacobienes.

RÉFÉRENCES

ARNOLD V.I. *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, éd. Mir, 1974 (pour les parties 1, 2 et 3).

VERDIER J.L. *Séminaire Bourbaki*, 1980 (pour les parties 3 et 4).

BULLETIN INTER-IREM PREMIER CYCLE

DES CHIFFRES ET DES LETTRES AU COLLEGE

PRÉFACE : Jean-Claude DUPERRET5

PREMIÈRE PARTIE : DES CHIFFRES

◊ Présentation : R.Arnaud (Limoges)	9
◊ Ne privez pas vos élèves du plaisir de faire des statistiques : M.C.Combes (Montpellier) ...	11
◊ Représentation de donnée en 6 ^{ème} (lecture et conception) : M.H.Jabet (Limoges).....	25
◊ Représentations graphiques dans l'environnement des élèves : A.M.Monfront (Paris VII)	43
◊ La forêt limousine : M.C.Babel (Limoges)	56
◊ Recensement : R.Delord et F.Mira (Bordeaux)	61

◊ Représentations graphiques en statistiques : J.F.Pichard (Rouen).....	75
◊ Des impôts à l'ellipse : G.Pornin (Limoges)	103
◊ Médiane et moyenne en 3 ^{ème} pourquoi et comment ? : J.C.Duperret (Reims)	113
◊ Des caractéristiques de position aux caractéristiques de dispersion : D.Antoine et B.Chaput (Reims).....	127
◊ Bibliographie	139

DEUXIÈME PARTIE : DES LETTRES

◊ Algébrisation Fonctions : M.Mathiaud (Paris 7).....	143
◊ Calcul numérique et calcul algébrique au collège (quelles difficultés ?) : (Strasbourg)	147
◊ A propos des difficultés du calcul algébrique en 3 ^{ème} : (Impression ou réalité ?) : R.Buisson (Limoges)	179
◊ Etude des fonctions au collège : A.Boudot, M.Grégoire, M.Moreau (Dijon)	189
◊ Acquisition de la notion de fonction de la 6 ^{ème} à la 3 ^{ème} : A.Azam, G.Chabat, C.Fribourg, B.Petit (Rouen)	215
◊ Des activités faisant intervenir des fonctions : M.Mathiaud (Paris 7)	237
◊ En fin de 3 ^{ème} puis 2 à 3 mois plus tard : (Test élaborés par une équipe de l'IREM de Montpellier)	251

PRIX : sur place : 60 F,
par correspondance : 75 F.

NOMBRE D'OR OU LA PASSION PARTAGÉE ...

Didier ROTH

Tout a démarré à propos d'un exercice du livre IREM de 3^e sur la pyramide de Khéops. Le rapport entre la hauteur d'une face et la demi-base est voisin du nombre d'or. Ayant cet exercice à préparer, certains élèves se posent des questions (le nombre d'or n'avait pas encore été évoqué). Fort à propos, ils feuilletent leur livre et trouvent au moins sa valeur dans un autre exercice (chapitre "racines carrées"). Mais au moment de la correction, ils veulent en savoir plus et je décide de satisfaire en partie leur curiosité en improvisant une explication du type : longueur grand segment / longueur moyen segment = longueur moyen segment / longueur petit segment. Le principe expliqué, je leur demande de trouver l'équation correspondante (l'inconnue étant le rapport en question). La résolution étant bien sûr hors programme, les deux solutions sont fournies. Il est cependant du programme de *vérifier* que le nombre d'or est solution de l'équation (E) : $X^2 - X - 1 = 0$ (exercice style "brevet"). De même pour l'autre solution.

Et pour la fois d'après je leur recommande de faire des recherches complémentaires sur le nombre d'or et de prouver que "l'inverse de l'opposé du nombre d'or" est aussi solution de (E). Immédiatement l'expression "l'inverse de l'opposé" fait sourire ou même rire. Par boutade je leur propose, si elle ne leur convient pas, de la remplacer par "l'opposé de l'inverse"!! Suit un débat-mise au point rapide sur la question, fort utile d'ailleurs. Les collègues savent bien la confusion souvent faite entre inverse et opposé. La leçon suivante, surprise agréable : les recherches ont été nombreuses et plutôt complètes. Il est même question de l'*ancien* nombre d'or : celui des astronomes. Emerveillement également sur le fait que le nombre d'or, son carré et son inverse ont exactement les mêmes décimales! Au-delà de la visualisation "calculatrice" l'équation (E) permet de le prouver!

Cette fois piqué au vif par leur intérêt, je décide une fois rentré chez moi d'assouvir davantage encore leur appétit de science. Je me précipitai sur notre revue favorite et sur son index thématique récemment disponible : en un clin d'œil j'avais l'information souhaitée : le n° 43 me serait fort utile, le 42 également, le 22 pour des compléments sur FIBONACCI (1).

Avec un peu de réflexion et un zeste d'humour, voilà commis le problème ci-après! Et l'impatience de le soumettre à ceux qui en étaient finalement les "involontaires responsables" : en effet, je n'avais au départ aucune intention d'en arriver à cette extrémité!!

(1) Signalons aussi l'intéressant "Que sais-je?" n° 1530, de M. CLEYET-MICHAUD (éd. P.U.F.) et également l'ouvrage de C.-J. WILLARD "Le nombre d'or - Utilisation en mathématiques et dans les Beaux-Arts" (éd. Magnard).

C'est aujourd'hui chose faite : l'accueil semble favorable mais nous n'en sommes qu'au tout début! J'ajoute et c'est ce que je leur ai indiqué, que je n'ai pas d'idée arrêtée sur la façon d'appréhender ce problème. Conçu plutôt comme travail personnel, avec délai d'une quinzaine de jours, il n'est pas exclu que les parties les plus "difficiles" fassent l'objet d'une recherche collective durant une ou deux heures de cours. Il sera alors intéressant d'étudier les démarches suivies et leurs articulations avec les points au programme de 3^e. En tout cas on peut être certain que le temps consacré à résoudre un "vrai" problème ne peut qu'être "profitable" ... sans compter la part de *passion* heureusement encore non quantifiable, "gratuite" oserai-je dire?

UN VRAI MENU DE FÊTE!

Apéritif : Il paraît que : nombre d'or = $2 \times \cos 36^\circ$

1) Une **pseudo**-preuve consiste à vérifier que votre calculatrice indique le même résultat, pour les deux membres de l'égalité.

2) Pourquoi est-ce une **pseudo**-preuve?

3) La preuve est du niveau 1^{ère}. Il faudra donc un peu attendre! (Le moment venu passez me dire bonjour!!)

Le résultat sera donc **admis** pour la suite du problème.

4) Prouver que $\sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Premier plat :

1) On suppose que $ABCDE$ est un pentagone régulier, non étoilé, de centre O , inscrit dans un cercle de rayon 1 (par commodité).

Calculer et justifier la valeur des angles \widehat{AOB} et \widehat{ABC} . Les utiliser pour faire un dessin avec un rapporteur. (Pour le dessin prendre, par exemple, 8 cm pour le rayon OA .)

2) Calculer la longueur du côté du pentagone, en prenant $OA = 1$.

Deuxième plat :

1) suivre le programme de construction suivant :

a. Tracer un cercle de centre O et de rayon 1 (prendre à nouveau 8 cm, par exemple).

b. Dessiner un diamètre RS . Marquer I le milieu de OR .

c. Tracer un rayon OA perpendiculaire à OR .

d. Tracer le cercle de centre I et de rayon AI . Il coupe le segment OS en T .

e. La distance AT peut se reporter cinq fois sur le cercle de centre O à partir de A , pour construire B, C, D, E . Le dernier report semble aboutir à A . Le pentagone $ABCDE$ semble régulier!!

2) Le but de cette question est de prouver que la construction ci-dessus "marche". Pour cela, en utilisant habilement le théorème de PYTHAGORE dans des triangles

rectangles judicieusement choisis, calculer la longueur AT (et donc du côté AB).
Si tout va bien, on retrouve la valeur calculée dans la question 2) du premier plat.
Conclusion : ça marche!!!

3) Sur le même dessin, tracer le pentagone régulier étoilé (célèbre “pentacle”) $ACEBD$.

Prouver que le rapport AC/AB est égal au nombre d’or!!

AC = côté du pentagone régulier étoilé.

AB = côté du pentagone régulier non étoilé (on dit aussi “convexe”).

Dessert :

Rêver sur le dernier résultat (célébrité du nombre d’or, du pentacle, mystères, mathématiques, poésie ...).

Compléter par des recherches personnelles.

Digestif :

Un polygone à n côtés est dit régulier si ses n côtés ont la même longueur et si ses n angles ont même mesure. On supposera de plus qu’il est non étoilé (donc “convexe”).

1) Dis brièvement à quoi correspondent les cas $n = 3$ et $n = 4$.

2) Si $ABCDEFG...$ est un polygone à n côtés de centre O , donne une formule pour calculer l’angle “au centre” \widehat{AOB} et l’angle entre deux côtés consécutifs \widehat{ABC} . S’aider des cas connus ($n = 3, 4, 5, 6$).

BON APPÉTIT ... DE SCIENCE!

ÉVITE TOUT DE MÊME L’INDIGESTION : DÉGUSTE EN PLUSIEURS FOIS!

NOTE SUR L'AVANCE DU PÉRIHÉLIE DE MERCURE

Jacques DAUTREVAUX

Dans '*L'Ouvert*' n° 64 (Septembre 1991) une erreur hélas très commune s'est glissée à la fin de l'article de notre collègue J.-M. ROLANDO a propos précisément de ce phénomène.

S'agissant essentiellement d'une question de méthodologie scientifique en général, il convient d'exposer les choses avec quelques détails, ce que je ferai en m'efforçant de rester le plus simple possible. Le résultat à connaître étant que les 40" par siècle dont il est question ne sont pas une donnée physique en soi, mais seulement un résidu, un désaccord entre la théorie newtonnienne et l'observation.

Si une planète se trouvait seule à graviter autour du soleil, son mouvement serait décrit par les lois de KÉPLER, l'orbite étant une ellipse dont le soleil occupe l'un des foyers. La grandeur de cette ellipse dépend de deux paramètres, le demi-grand axe a et l'excentricité e , sa position dans l'espace par rapport à un référentiel constitué par le plan de l'écliptique muni d'une direction origine nécessite trois autres paramètres géométriques qui sont l'inclinaison (angle que fait le plan de l'orbite avec le plan de l'écliptique), la longitude du nœud ascendant (qui définit la direction de la droite d'intersection des deux plans, orientée convenablement) et la longitude du périhélie (qui fixe l'orientation, dans son plan, du grand axe de l'ellipse orienté du soleil vers le périhélie – sommet de l'ellipse le plus voisin). Enfin, pour décrire complètement le mouvement de la planète sur son orbite un sixième paramètre, d'origine cinématique, est nécessaire, par exemple la position du mobile à l'instant initial, mais ce paramètre nous concerne en réalité fort peu.

Malheureusement, la planète n'est pas seule, elle subit les attractions des huit autres planètes du système solaire (sans compter les astéroïdes et les comètes, mais leur masse totale est négligeable), et de ce fait le mouvement n'est pas képlérien; néanmoins, comme le soleil capitalise à lui seul les 99% de la masse du système solaire, il joue un rôle prépondérant dans les mouvements orbitaux et la Mécanique Céleste (LAPLACE, LAGRANGE, LE VERRIER et bien d'autres ...) nous enseigne alors que sur une petite période de temps le mouvement est pratiquement képlérien, mais sur une orbite dont les dimensions et la position dans l'espace varient lentement, ce qui se traduit par des petites et lentes variations des cinq paramètres géométriques définissant l'orbite képlérienne "instantanée". Heureusement pour la stabilité du système solaire, les petites variations (que les astronomes appellent des "perturbations") de ces paramètres prennent généralement la forme de petites oscillations autour d'une position moyenne (inégalités périodiques, dont la "période" est en fait la superposition de plusieurs périodes différentes), fixe pour les trois

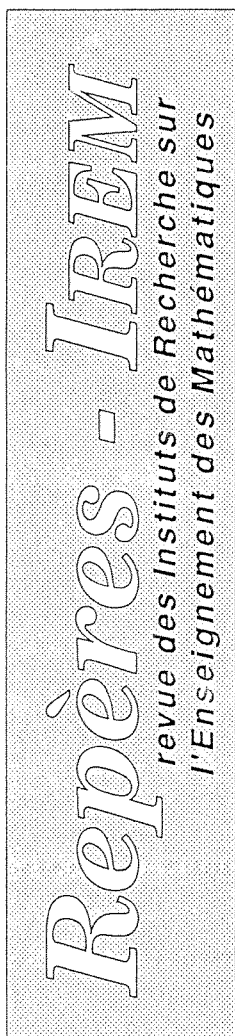
premiers paramètres mais qui pour les deux derniers (longitudes du nœud et du périhélie) dérivent lentement pour faire un tour complet du ciel en un temps respectable qui se compte en milliers d'années (inégalités séculaires), en général dans le sens direct, ce qui fait qu'on peut parler de l'avance du périhélie et de l'avance du nœud.

Les théories de la Mécanique Céleste montrent alors que, pour toutes les planètes, seule l'avance du périhélie a une valeur assez grande pour permettre de déceler un éventuel désaccord entre la théorie et l'observation. En effet, pour être significatif, il est nécessaire que ce désaccord dépasse notablement la somme des incertitudes provenant d'une part de la structure des calculs (qui sont toujours des calculs approchés) et d'autre part des incertitudes des mesures observationnelles qui se propagent à travers les calculs. C'est ainsi que les observations de la planète Mercure depuis le début du XIX^e siècle ont permis d'établir les caractéristiques orbitales avec les inégalités, parmi lesquelles une avance du périhélie de 570" par siècle environ (soit un tour complet en 45600 ans!); par ailleurs les mécaniciens célestes (LE VERRIER et NEWCOMB principalement) ont calculé les perturbations induites par l'attraction de Mercure par les autres planètes et la Lune, et c'est là qu'est apparu un résidu inexpliqué de 40" par siècle dans l'avance du périhélie de Mercure (les différents théoriciens ayant étudié le problème aboutissent tous à des valeurs comprises entre 38" et 41" par siècle, d'où la valeur admise actuellement de 40" sujette d'ailleurs aux incertitudes signalées plus haut), et ce résultat était, notons-le, déjà bien connu vers 1850 . . . Rappelons d'autre part qu'un phénomène du même ordre affectant le mouvement d'Uranus a conduit LE VERRIER à prédire en 1846 l'existence d'une nouvelle planète, Neptune (qui a été immédiatement trouvée à moins de 1° de la position prédite). C'est ainsi que LE VERRIER avait aussi essayé d'expliquer le résidu séculaire de 40" de Mercure par l'existence d'une planète inconnue ou d'un anneau de petites planètes circulant entre le Soleil et Mercure (pour qu'en dépit d'une faible masse cet objet puisse avoir une action aussi appréciable sur le mouvement de Mercure) mais le résultat de ses calculs a été que si un tel objet existait il aurait été visible à l'œil nu déjà dans l'Antiquité, et l'étude fouillée des clichés pris lors des éclipses de soleil n'a montré aucune trace d'un quelconque objet de nature analogue à celui que les calculs de LE VERRIER conjecturaient.

Il se trouve que l'application au cas de Mercure de la théorie de la Relativité dans le modèle d'espace-temps de SCHWARZSCHILD provoque une avance supplémentaire de périhélie d'environ 40" par siècle, expliquant exactement le résidu constaté, et ce sans modifier de façon sensible les mouvements newtonniens des autres planètes, plus éloignées du Soleil. De là à affirmer que là se trouve l'unique explication serait un peu osé car d'une part le modèle d'espace-temps de SCHWARZSCHILD est un modèle parmi d'autres possibles et d'autre part LE VERRIER connaissait à l'époque, outre le résidu séculaire de 40" sur le périhélie de Mercure, deux autres désaccords certains, de moindre importance certes (de l'ordre de 8 à 10" par siècle) portant sur le nœud de Vénus et le périhélie de Mars, auxquels la théorie

NOTE SUR L'AVANCE DU PÉRIHÉLIE DE MERCURE

développée (qui avait si bien réussi pour Mercure) ne remédiait pas au surplus, la progression de la précision des observations (liée en grande partie à leur analyse sur une plus longue période) a mis en évidence d'autres désaccords portant cette fois sur les mouvements de la Lune et de certaines comètes. Il reste néanmoins que la Relativité Générale reste la seule hypothèse crédible pour expliquer ces désaccords, mais le modèle géométrique exact reste à trouver : le petitesse de ses effets en Mécanique Céleste et le très petit nombre des vérifications possibles ne peuvent, au mieux, que lui apporter un préjugé favorable. On peut d'ailleurs remarquer qu'antérieurement à l'apparition de la Relativité avaient vu le jour des théories faisant appel à des forces correctrices à l'attraction newtonnienne (par exemple d'origine électrodynamique) qui pouvaient elles aussi expliquer (certes de manière peut-être un peu artificielle) le résidu séculaire de $40''$ du périhélie de Mercure. Tout n'est donc pas dit, mais en fait la véritable justification de la Relativité résiderait plutôt dans l'application de questions de physique nucléaire à des problèmes de cosmogonie ou d'astronomie d'objets lointains (galaxies lointaines, quasars, pulsars, trous noirs ... etc) pour lesquels l'observation montre un accord encourageant avec la théorie. Les applications à la Mécanique Céleste des théories de la Relativité apparaîtraient alors en quelque sorte comme "sous-produits" des études développées sur l'infiniment petit.



- prix du numéro : 70 F (+ frais d'expédition si envoi par avion)
- abonnements (quatre numéros par an)
 - Etablissements : 250 F — Particuliers : 200 F
- Envoi par avion (DOM - TOM ou Etranger)
 - Etablissements : 330 F — Particuliers : 280 F

✂.....

Bulletin d'abonnement à renvoyer à :
 TOPIQUES éditions, 24 rue du 26^e B.C.P., 54700 PONT-À-MOUSSON
 accompagné du règlement par chèque ou d'un bon de commande officiel.

Nom :

en capitales svp
 Adresse :

.....

Code postal et Ville :

Ci-joint la somme de :

Mode de règlement :

- Chèque bancaire Chèque postal
- Virement administratif sur facture

Numéro souhaité pour
 débiter l'abonnement :

(en cas d'impossibilité, l'abonnement
 débute au dernier numéro disponible)

LE SOLEIL SE LÈVE TROIS FOIS PAR JOUR

Jean LEFORT

Nous sommes tellement conditionnés par nos habitudes que nous avons du mal à imaginer un quelconque changement dans ce que nous considérons être des lois de la nature. Le Soleil se lève à l'est et se couche à l'ouest. Nous n'avons pas trop de mal à imaginer une planète où les choses se passeraient à l'envers, mais nous voyons mal pourquoi sur une planète le Soleil pourrait se lever à l'est et se coucher à l'est également! Pourtant, toute planète tourne d'un mouvement de rotation parfaitement uniforme sur elle-même autour d'un axe nord-sud; de même son mouvement de translation autour du Soleil est régi par les lois de KEPLER parfaitement régulières, quand nous ne tenons pas compte des perturbations engendrées par les autres corps célestes. Nous allons voir que la combinaison de ces deux mouvements peut conduire à des situations curieuses dont l'exemple le plus proche de nous est la planète Mercure.

Le texte qui suit n'a aucune prétention astronomique, c'est pourquoi les notations sont celles habituelles en mathématiques.

I.- RAPPEL DES LOIS DE KEPLER ET DE NEWTON

1) Historique

C'est KEPLER qui découvrit en 1609 que l'orbite de Mars était une ellipse. Cette découverte avait été rendue possible grâce aux excellentes observations que Tycho BRAHÉ lui avait léguées. En 1619, KEPLER complétait cette découverte par la 3^e loi.

Voici l'énoncé moderne des lois de KEPLER :

- 1) les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe un foyer;
- 2) le rayon vecteur balaye des aires proportionnelles au temps (loi des aires);
- 3) les carrés des temps de révolution sont proportionnelles aux cubes des grands axes.

C'est en 1687 que NEWTON proposa une loi plus générale dont il déduisit les lois de KEPLER. La loi de NEWTON s'énonce ainsi :

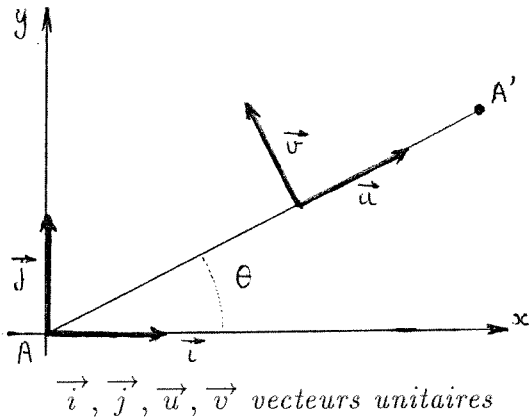
* Deux points matériels A et A' de masse m et m' situés à la distance r exercent l'un sur l'autre une force de gravitation, dirigée suivant AA' , directement proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance. Autrement dit, $F = -k \frac{mm'}{r^2}$.

2) La trajectoire

Montrons rapidement comment on peut retrouver les lois de KEPLER à partir de la loi de NEWTON. Nous supposons que $m \gg m'$ (ce qui est le cas si, comme nous en avons besoin, A est le Soleil et A' une planète). Alors on peut supposer que A est fixe (ou en mouvement rectiligne uniforme, ce qui revient au même pour le calcul) et on peut le prendre comme origine.

* Le mouvement est dans le plan (A, A'_0, \vec{V}_0) où A'_0 est la position initiale de A' et \vec{V}_0 la vitesse initiale de A' .

* Repérons A' dans ce plan par ses coordonnées polaires par rapport à A et à une direction fixée (\vec{Ax}) (figure ci-dessous).



Alors $\vec{AA'} = r \vec{u}$ et en dérivant deux fois par rapport au temps t , écrivons l'égalité entre $m' \vec{\Gamma}$ ($\vec{\Gamma}$ accélération de A') et $\vec{F} = -k \frac{mm'}{r^2} \vec{u}$:

$$m' \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u} + m' \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \vec{v} = -k \frac{mm'}{r^2} \vec{u}$$

ce qui conduit à

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{km}{r^2} \tag{2}$$

On reconnaît dans l'équation (1), après multiplication par r , $(r^2 \frac{d\theta}{dt})' = 0$ c'est-à-dire $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$ qui n'est autre que la constance de la vitesse aéroilaire $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$.

* Pour l'équation (2) éliminons t en utilisant l'équation (1). Il vient, tout calcul fait

$$\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2C^2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{C^2}{r} = -km.$$

En posant $\rho = \frac{1}{r}$ cette équation s'écrit

$$\frac{C^2 d^2 \rho}{d\theta^2} + C^2 \rho = km$$

LE SOLEIL SE LÈVE TROIS FOIS PAR JOUR

équation différentielle linéaire du 2^e ordre à coefficient constant. On trouve finalement :

$$r = \frac{1}{\frac{km}{C^2} + \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta}$$

où α et β sont des constantes d'intégration. Cela correspond bien à l'équation polaire d'une conique.

En choisissant pour direction origine la direction du périhélie (plus courte distance Mercure-Soleil), on peut écrire :

$$r = \frac{1}{\frac{km}{C^2} + \alpha \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où p est le paramètre et e l'excentricité. Si on note P la période de révolution, a et b le demi-grand axe et petit-axe respectivement, il vient

$$PC = 2\pi ab ; e = \frac{\alpha C^2}{km} ; p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{km}.$$

3) Le déplacement angulaire

On cherche à calculer θ en fonction du temps t . Pour cela on utilise la 2^e loi de KEPLER $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$ qui s'écrit, en revenant à θ :

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{C}{p^2} dt$$

équation à variables séparées. On intègre le premier membre en posant $\tau = \tan \frac{\theta}{2}$. Tout calcul fait, il vient :

$$\frac{C}{p^2} t = \frac{-e \sin \theta}{(1 - e^2)(1 + e \cos \theta)} + \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \arctan \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2}$$

en prenant $t = 0$ pour $\theta = 0$. Cette formule n'est valable que pour $\theta \in] - \pi, + \pi [$. On peut prolonger par continuité en $\pm \pi$ et on a alors une période complète, t augmentant de P quand θ augmente de 2π . Pour obtenir une fonction continue sur \mathbb{R} entier il faut changer la constante d'intégration quand on franchit un multiple impair de π . Par exemple, sur $] \pi, 3\pi [$ on doit prendre :

$$\frac{C}{p^2} (t - p) = \frac{-e \sin \theta}{(1 - e^2)(1 + e \cos \theta)} + \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \arctan \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2}.$$

II.- QUELQUES DONNÉES NUMÉRIQUES SUR MERCURE

Période de rotation	$T = 58,65 \text{ j}$	$= 0,16 \text{ année}$
Période de révolution	$P = 87,97 \text{ j}$	$= 0,24 \text{ année}$
(il y a exactement un rapport de 2 à 3 entre T et P)		
Demi-grand axe	$a = 57,9 \cdot 10^6 \text{ km}$	$= 0,387 \text{ UA}$
Demi-petit axe	$b = 56,7 \cdot 10^6 \text{ km}$	$= 0,379 \text{ UA}$
Demi distance focale	$c = 11,9 \cdot 10^6 \text{ km}$	$= 0,0796 \text{ UA}$
Excentricité	$e = 0,2056$	
Paramètre	$p = b^2/a$	$= 0,371 \text{ UA}$
Constante des aires	$C = 2,714 \cdot 10^9 \text{ km}^2/\text{s}$	$= 3,84 \text{ UA}^2/\text{an}$
Rayon moyen de Mercure	$R = 2439 \text{ km}$	

Rapport $\frac{\text{masse Soleil}}{\text{masse Mercure}} = 6\,023\,600$ (la masse du Soleil est d'environ $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$).
 Inclinaison de l'axe de Mercure sur le plan de l'orbite $= 0^\circ$.

III.- LE MOUVEMENT DU SOLEIL DANS LE CIEL DE MERCURE

Nous avons vu que l'axe de rotation de la planète Mercure est perpendiculaire au plan de son orbite. Pour un observateur sur Mercure, le Soleil se déplace donc dans un plan. Etant donnée la petitesse du rayon de la planète devant le demi-grand-axe de son orbite, nous supposons que cet observateur est placé au centre de Mercure la tête au nord, mais lié à elle, c'est-à-dire tournant sur lui-même.

Pour étudier le mouvement du Soleil dans le ciel de Mercure, utilisons une représentation complexe, en repérant le Soleil par son affixe Z . Le mouvement du Soleil pour l'observateur tel qu'il a été situé ci-dessus est décrit par le produit de $z = -r \cos \theta - ir \sin \theta$ (où r et θ ont le sens donné au §1 et correspondent au mouvement apparent de révolution) par $z' = \exp(-2\pi i \frac{t}{T})$ (où T est la période de rotation sidérale de Mercure et t le temps). Les signes "moins" tant dans z que dans z' proviennent du changement de point de vue puisqu'on prend un repère fixe par rapport à la surface de Mercure. L'écriture $Z = zz'$ revient à choisir l'origine $t = 0$ au moment où Mercure est au périhélie et un observateur qui à ce moment est face au Soleil. Finalement :

$$Z = \frac{-p \exp i[\theta(t) - \frac{2\pi t}{T}]}{1 + e \cos \theta}$$

1) L'argument de Z :

Notons Θ cet argument qui est le plus intéressant a priori :

$$\Theta(t) = -\frac{2\pi t}{T} + \theta(t) + \pi \quad \text{à } 2\pi \text{ près}$$

et étudions cette fonction.

- C'est une fonction périodique de période $2P = 3T$. En effet, $\frac{2\pi t}{T}$ modulo 2π a une période égale à T et $\theta(t)$ a une période égale à P . Etant donné le rapport rationnel qui lie T et P on obtient bien la valeur annoncée.

LE SOLEIL SE LÈVE TROIS FOIS PAR JOUR

Θ est une fonction impaire puisque $t(\theta)$ l'est donc aussi $\theta(t)$ et que $\pi = -\pi$ modulo 2π .

Finalement nous pouvons limiter notre étude à l'intervalle $[0, P]$.

- Calculons $\frac{d\Theta}{dt}$ en tenant compte de la loi des aires ($\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$); il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{2\pi}{T} + \frac{C}{p^2}(1 + e \cos \theta)^2 \\ &= \frac{e^2 C}{p^2} \left(\cos \theta + \frac{1}{e} - \frac{p}{e} \sqrt{\frac{2\pi}{TC}} \right) \left(\cos \theta + \frac{1}{e} + \frac{p}{e} \sqrt{\frac{2\pi}{TC}} \right) \end{aligned}$$

quantité qui ne peut s'annuler que si l'un des deux nombres $|\frac{1}{e} \pm \frac{p}{e} \sqrt{\frac{2\pi}{TC}}|$ est inférieur à 1 (*).

Seul le signe "moins" donne une telle valeur, alors $\frac{d\Theta}{dt}$ s'annule pour $\cos \theta_0 \simeq 0,9090$ soit $\theta_0 \simeq 24,634^\circ$ ce qui correspond à $t_0 \simeq 3,9136$ jours et aussi pour $\theta_1 = 335,366^\circ$ ou $t_1 = 84,0564$ jours.

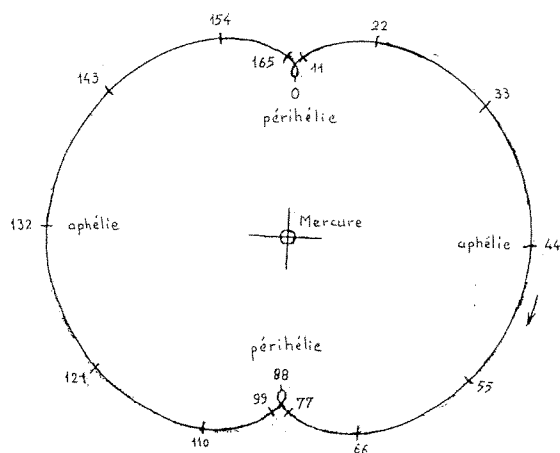
Ceci nous permet de dresser le tableau ci-après :

t	0	$t_0 \simeq 3,9 \text{ j}$	$\frac{P}{2} \simeq 44 \text{ j}$	$t_1 \simeq 84 \text{ j}$	$P \simeq 87,97$
θ	0	θ_0	π	θ_1	2π
$\cos \theta$	1	0,9090	-1	0,9090	1
Θ'		+	0	-	-
Θ	180°	$204,57^\circ$	90°	$-24,57^\circ$	0°

2) Le module de Z

C'est tout simplement $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$, il est assez facile de reporter point par point pour obtenir le graphique ci-dessous qui donne la trajectoire apparente du Soleil dans le ciel de Mercure. Au voisinage du périhélie, le Soleil décrit une boucle pendant environ 8 jours

(*) Cette valeur n'est inférieure à 1 que de peu. Si l'excentricité avait été inférieure à 0,186 le phénomène que nous décrivons ici n'aurait pas eu lieu.



Trajectoire apparente du Soleil pour un observateur à la surface de Mercure.

Nous pouvons résumer la situation en disant qu'au voisinage du périhélie la vitesse de translation de la planète Mercure sur son orbite est suffisamment forte pour que la vitesse angulaire apparente du Soleil surpasse la vitesse angulaire de rotation de la planète sur elle-même, entraînant ainsi un mouvement apparent rétrograde du Soleil dans le ciel de Mercure.

Pour certains points de Mercure, ceux qui sont au voisinage du méridien, pour lequel il est midi à l'aphélie, le Soleil se lève et se couche trois fois dans la "journée". Il se lève à l'est pour se recoucher à l'est et se relever une bonne fois à l'est, et un spectacle symétrique a lieu à l'ouest lors du coucher.

Toutes proportions gardées, c'est un phénomène un peu analogue qui explique le mouvement irrégulier des planètes dans le ciel. Même en supposant les orbites parfaitement circulaires et les mouvements uniformes, ce que supposait ARISTOTE dans son modèle, nous obtiendrions une trajectoire apparente guère différente de celle que nous observons. On comprend mieux alors les difficultés conceptuelles pour bâtir un bon modèle et le génie de KEPLER à ce sujet.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 19

Énoncé

Soit \mathcal{C} un ensemble convexe borné, fermé du plan. Peut-on construire un parallélogramme P inclus dans \mathcal{C} tel que l'aire de P soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire de \mathcal{C} ?

Solution

Nous avons reçu une solution de Pierre RENFER que nous donnons ci-après suivie des indications d'une variante par la rédaction. Par ailleurs Gustave CHOQUET nous propose la conjecture suivante : "Si \mathcal{C} admet un centre de symétrie alors la constante $\frac{1}{2}$ (aire de $P \geq \frac{1}{2}$ aire de \mathcal{C}) peut être remplacée par $2/\pi$ ". G. CHOQUET se pose également la question de la généralisation du problème 19 à un espace de dimension 3 ou plus.

Voici d'abord la solution de Pierre RENFER. Elle donne un résultat plus précis que l'énoncé proposé : **Étant donné \mathcal{C} et une direction de droite \mathcal{D} , il existe un parallélogramme P inscrit dans \mathcal{C} , ayant un côté de direction \mathcal{D} et d'aire au moins la moitié de celle de \mathcal{C} .**

Choisissons dans le plan une origine O et deux axes, Ox parallèle à \mathcal{D} et Oy perpendiculaire à \mathcal{D} . Nous allons, au moyen d'une première **symétrisation de Steiner**, transformer \mathcal{C} en un convexe \mathcal{C}' symétrique par rapport à l'axe Oy . Coupons pour cela \mathcal{C} par une droite variable δ parallèle à \mathcal{D} ; l'intersection $\mathcal{C} \cap \delta$, quand elle n'est pas vide, est un segment $[A, B]$, éventuellement réduit à un point. Faisons glisser $[A, B]$ le long de δ de façon à obtenir un segment $[A', B']$ de δ dont la médiatrice soit l'axe Oy ; \mathcal{C}' n'est autre que la réunion des segments $[A', B']$ ainsi obtenus; il est encore convexe car la fonction

$$\text{ordonnée de } \implies \text{longueur de } [A, B]$$

est concave sur son domaine de définition, comme somme de deux fonctions concaves. Une seconde symétrisation, faisant glisser sur elles-mêmes les sécantes à \mathcal{C}' perpendiculaires à \mathcal{D} pour amener leurs milieux sur Ox , transforme \mathcal{C}' en un convexe \mathcal{C}'' symétrique par rapport aux deux axes. Les trois convexes $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et \mathcal{C}'' ont même aire. A tout point situé sur la frontière de \mathcal{C}'' et dans le premier quadrant, on peut associer le rectangle R centré en O , parallèle aux axes, de sommet ce point et inscrit dans \mathcal{C}'' , puis le quadrilatère Q inscrit dans \mathcal{C} et dont les sommets deviennent ceux de R lorsque \mathcal{C} est transformé en \mathcal{C}'' . Par construction-même de \mathcal{C}'' , Q est un parallélogramme de même aire que P et ayant un côté de direction \mathcal{D} .

Nous sommes ainsi ramenés à montrer que **si \mathcal{C} est un compact convexe symétrique par rapport aux axes, on peut inscrire dans \mathcal{C} un rectangle parallèle aux axes contenant au moins la moitié de l'aire de \mathcal{C} .** Introduisons l'équation $y = f(x)$ du quart de la frontière de \mathcal{C} contenu dans le premier quadrant ; la fonction f , définie sur un compact $[0, a]$, est concave et décroissante. On sait qu'une fonction concave admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite et que le graphe de la fonction est en dessous des demi-tangentes à gauche et à droite.

Soit $S(x)$ l'aire du rectangle formé par les axes de coordonnées et leurs parallèles passant par M . La fonction S est dérivable à gauche et à droite.

$$S(x) = x f(x) ; S'_g(x) = x f'_g(x) + f(x) ; S'_d(x) = x f'_d(x) + f(x).$$

La fonction continue S atteint son maximum pour une valeur $x = \alpha$ entre 0 et a . Soit A le point de la frontière de \mathcal{C} de coordonnées α et $f(\alpha)$. Deux cas se présentent.

- Si $\alpha < a$, on doit avoir $S'_g(\alpha) \geq 0$ et $S'_d(\alpha) \leq 0$, d'où

$$f'_d(\alpha) \leq \frac{-f(\alpha)}{\alpha} \leq f'_g(\alpha).$$

Ainsi la droite passant par A et de coefficient $-f(\alpha)/\alpha$ est au-dessus de \mathcal{C} , l'aire de \mathcal{C} est donc majorée par 4 fois celle du triangle formé par cette droite et les deux axes, c'est-à-dire $4 \times 2\alpha f(\alpha)$ et c'est terminé.

- Si $\alpha = a$, on a seulement les inégalités correspondant à la dérivée à gauche, mais elles entraînent encore que \mathcal{C} est au-dessous de la droite et le résultat subsiste.

Voici une méthode plus simple et plus rapide, mais qui ne donne pas le résultat plus fort de RENFER.

On note Γ la frontière de \mathcal{C} . Soient ABC trois points de Γ et considérons le parallélogramme $ABCD$. Si D est extérieur à \mathcal{C} on se ramène au cas où D est intérieur selon le schéma de la figure 1. Si D est intérieur, on considère la translation de vecteur \overrightarrow{AD} qui transforme \mathcal{C} en \mathcal{C}' et Γ en Γ' . Γ' coupe Γ au voisinage de D en I' dont l'antécédent est I . Alors le parallélogramme $IBCI'$ a une aire supérieure à celle de $ABCD$ (fig. 2).

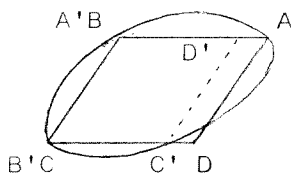


Figure 1

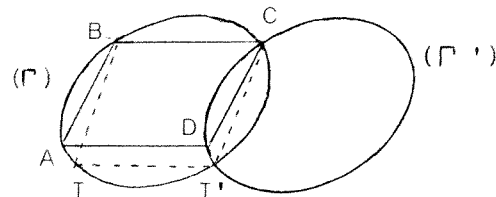


Figure 2

C étant un borné fermé, c'est un compact et l'ensemble des aires des parallélogrammes ayant leur 4 sommets sur Γ est majoré et la borne supérieure est atteinte par au moins un parallélogramme. Soit P l'un d'eux. Effectuons une transformation affine concernant les aires et transformant P en un carré Q . La convexité est conservée. La figure 3 montre que le coefficient $1/2$ ne peut pas être amélioré.

Figure 3

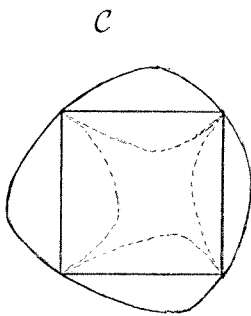
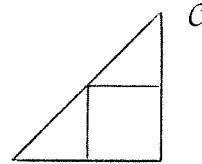


Figure 4

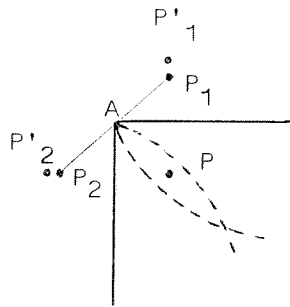


Figure 5a

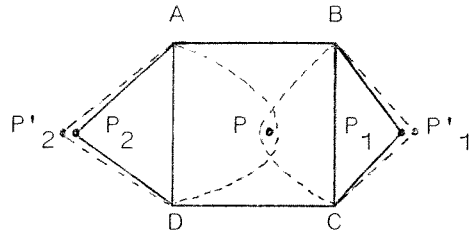


Figure 5b

Rabattons la partie extérieure à Q selon la figure 4. Cela revient à faire une symétrie orthogonale partielle par rapport à chacun des côtés de Q . Pour que l'inégalité entre les aires ait lieu il suffit de montrer que les morceaux rabattus ne se chevauchent pas. Deux cas pourraient se présenter donnés sur les figures 5a et 5b.

Sur la figure 5a, le point P apparaît sur deux rabats consécutifs correspondant aux points P_1 et P_2 et le segment $[P_1P_2]$ contient A . Mais il existerait des points voisins de P dont les symétriques P'_1 et P'_2 sont tels que $[P'_1P'_2]$ ne contient pas A ce qui voudrait dire que $[P'_1P'_2]$ sort de C qui ne serait pas convexe!

Sur la figure 5b, le point P apparaît sur deux rabats opposés correspondant aux points P_1 et P_2 . Mais alors il existerait deux points P'_1 et P'_2 dans C et plus éloigné de Q . Il est alors facile de vérifier que le polygone $ABP'_2CDP'_1$ contient un rectangle d'aire plus grande que celle de Q . Q ne correspondrait pas au maximum.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 20

Énoncé

Calculer

$$\sum_{n=0}^p (-1)^{p-n} \frac{n^p}{n!(p-n)!}$$

et en déduire $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$.

Indication

Interprétation combinatoire.

PROBLÈME 21

Énoncé (proposé par D. DUMONT)

Soient $2n$ écolières qui partent en promenade quotidienne en rang deux par deux et souhaitent changer de voisine chaque jour. Trouver un algorithme qui fasse en sorte qu'en $2n - 1$ jours chacune ait eu pour voisine chacune des autres une fois et une seule. (Ce problème s'apparente au problème dit "des écolières de Kirkmann".)

PROBLÈME 22

Énoncé

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable, telle que, pour tout x rationnel, la dérivée $n^{\text{ième}} f^{(n)}(x)$ soit un rationnel pour n pair et un irrationnel pour n impair?