



UNIVERSITE  
LOUIS PASTEUR  
STRASBOURG

I.R.E.M.  
7, rue René Descartes  
67084 STRASBOURG  
Tél. : 03 88-41-64-40  
Fax : 03 88-41-64-49  
E.mail : [bibirem@math.u-strasbg.fr](mailto:bibirem@math.u-strasbg.fr)  
<http://irem.u-strasbg.fr>

# DES ACTIVITÉS POUR UN ENSEIGNEMENT MODULAIRE EN CLASSE DE SECONDE

par un groupe de l'IREM de STRASBOURG

**I.R.E.M.**

10, rue du Général Zimmer  
67084 Strasbourg Cedex  
Tél. 88 41 63 07 Secrétariat  
88 41 64 40 Bibliothèque  
Telex : ULP 870 260 F  
Fax : 88 61 90 69

Janvier 1993  
(Réédition)

## INTRODUCTION

Suite à une demande de la Direction des Lycées et Collèges et de la Mission Académique à la Formation des Personnels, nous avons commencé à sélectionner des activités qui pourraient être utilisées par les enseignants dans le cadre des nouveaux modules de seconde.

N'ayant pas disposé de suffisamment de temps pour expérimenter, nous n'avons pas mis au point cette année d'activités systématiques prétendant fournir des méthodes pour comprendre ce qu'est une démonstration ou apprendre à lire un énoncé. Bien entendu ces capacités sont mises en jeu dès que l'on fait des mathématiques et tous les enseignants ont l'occasion d'en parler que ce soit dans le cadre du cours, des TP ou maintenant des modules.

Nous avons préféré profiter de l'espace de liberté que donne l'horaire des modules pour essayer de proposer des activités dont le but essentiel est de motiver les élèves, c'est-à-dire de leur montrer la richesse des mathématiques et leur utilité. Le côté expérimental de certaines de ces activités permet d'éveiller la curiosité aussi bien des élèves dits faibles en Mathématiques que des élèves plus à l'aise.

Nous proposons ainsi :

- quelques problèmes non artificiels de mathématisation (1 - 2 - 3 - 4) ;
- une suite d'exercices permettant de comprendre le fonctionnement et les limites d'une calculatrice ainsi que l'utilité des identités remarquables et des ordres de grandeur pour dominer cet instrument (5 - 6) ;
- une série d'exercices de géométrie plane pour lesquels plusieurs démonstrations différentes peuvent être proposées (7) ;
- deux activités liées à la géométrie dans l'espace, l'une pour manipuler des solides et l'autre pour montrer comment le raisonnement permet de compenser la difficulté de "voir" une figure dans l'espace à partir d'un dessin plan (8 - 9) ;
- deux activités montrant des situations où il faut faire un choix dans la modélisation mathématique (10 - 11) ;
- une introduction à une activité pluridisciplinaire (12).

Il pourra sembler que ces propositions ne sont pas très différentes de celles qu'on trouve dans un recueil de TP ( voir à ce propos le livre **Les Maths en pratique - seconde-** par l'IREM de Strasbourg chez Bordas). Mais nous avons cherché à mettre l'accent sur des activités plus ouvertes permettant aux élèves de se poser des questions plutôt que sur un accompagnement pas à pas.

*Les membres du groupe "modules" : Martine ALTSCHUH, Alain BONNET, Nicole BOPP, Michel BOURGUET, Michel BURET, Jean DREYER, Raymond DUVAL, Suzanne HAEGEL, Jean-Pierre RICHTON, Jean SAMSON.*

*Ce travail a été subventionné par la Direction des Lycées et Collèges, par la Mission Académique à la Formation des Personnels et par l'IREM.*

## SOMMAIRE

1. —	<i>Problème de bricoleur (hotte)</i>	5
2. —	<i>Le pont suspendu</i>	9
3. —	<i>Les freins du VTT</i>	15
4. —	<i>Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la terre</i>	23
5. —	<i>Plus fort que ma calculatrice...!</i>	31
6. —	<i>Erreur sur les écarts-types</i>	49
7. —	<i>Les polyèdres de Platon</i>	51
8. —	<i>Intersection de plans</i>	61
9. —	<i>Géométrie ( exercices à solutions multiples)</i>	69
10. —	<i>Le scrutin proportionnel</i>	79
11. —	<i>Le problème de la partie interrompue</i>	85
12. —	<i>Cartographie et Mathématiques</i>	95

# 1. Problème de bricoleur.

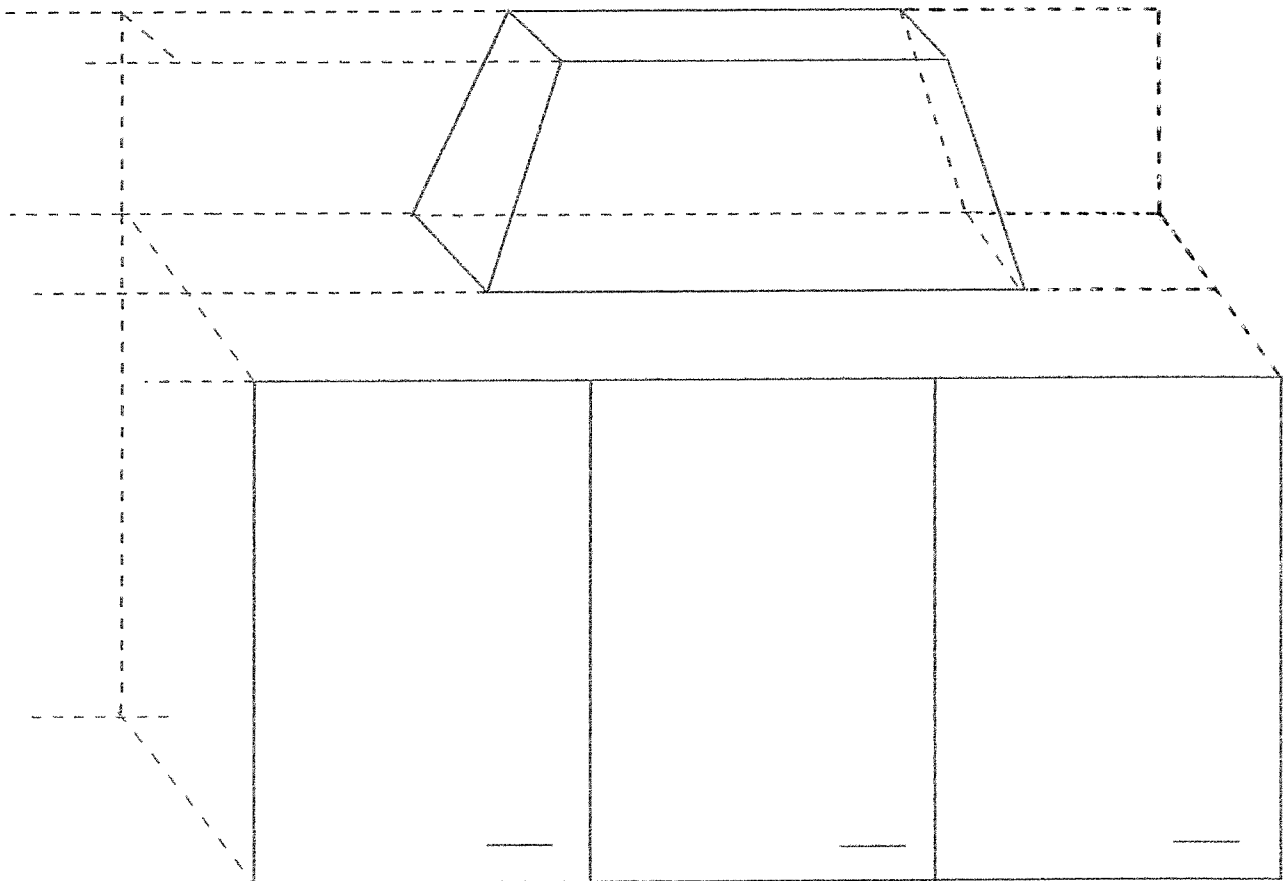
## Enoncé:

Un bricoleur veut réaliser une hotte pour dissimuler un tuyau entre le dessus du meuble de cuisine et le plafond. Cette hotte doit avoir la forme d'un **coin tronqué à bases rectangulaires** (voir explications ci-dessous) qui s'appuie sur le buffet, le mur et le plafond.

*Le coin fait partie de la famille des prismoïdes. Un prismoïde est un solide dont les bases sont deux polygones parallèles et dont les faces sont des triangles ou des trapèzes.*

*Le coin correspond à la situation particulière où la surface du sommet se réduit à une droite parallèle à la base.*

*Au lieu de coin tronqué on pourrait utiliser le terme de ponton.*



Afin de donner à l'ensemble une apparence agréable, notre bricoleur se fixe les dimensions de la base et l'angle que doit faire chacune des trois faces avec la verticale.

Le dessin du patron (ainsi que la réalisation de la maquette) ne pose aucun problème.

## Exemple d'utilisation.

On retrouve ce problème dans pas mal de situations concrètes:

pour les avaloirs de cheminées  
pour les capots de véhicules ou de mécanisme  
d'une manière générale dans la réalisation des moules pour lesquels il faut toujours prévoir une certaine pente pour effectuer le démoulage.

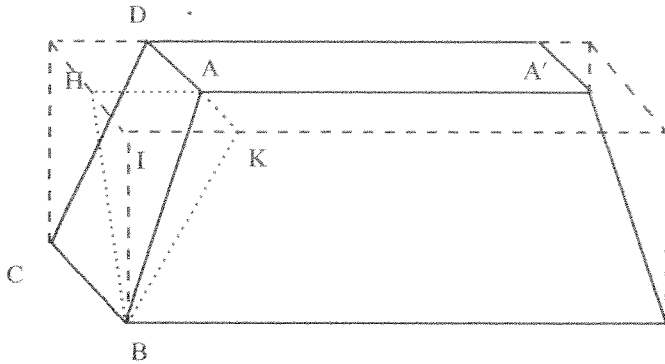
## Variantes possibles:

En métallerie on rencontre souvent ce type de problème mais les données ne sont pas les mêmes. En effet on connaît les sections inférieures et supérieures et la hauteur

*Problème original tiré d'une réalisation personnelle.  
On pourra consulter un manuel de technologie de métallerie*

## Description:

Pour traiter ce problème agréablement il suffit de construire le parallélépipède bâti sur la base du coin tronqué et de considérer la vue de dessus. Tout y est clair et les calculs se font simplement.



En tenant compte de l'angle de la face avant avec la verticale on a :

$$AK = 50 \tan(15^\circ)$$

$$AD = 25 - AK.$$

De même, en considérant l'angle entre de la face latérale avec verticale on a :

$$CD = 50/\cos(15^\circ)$$

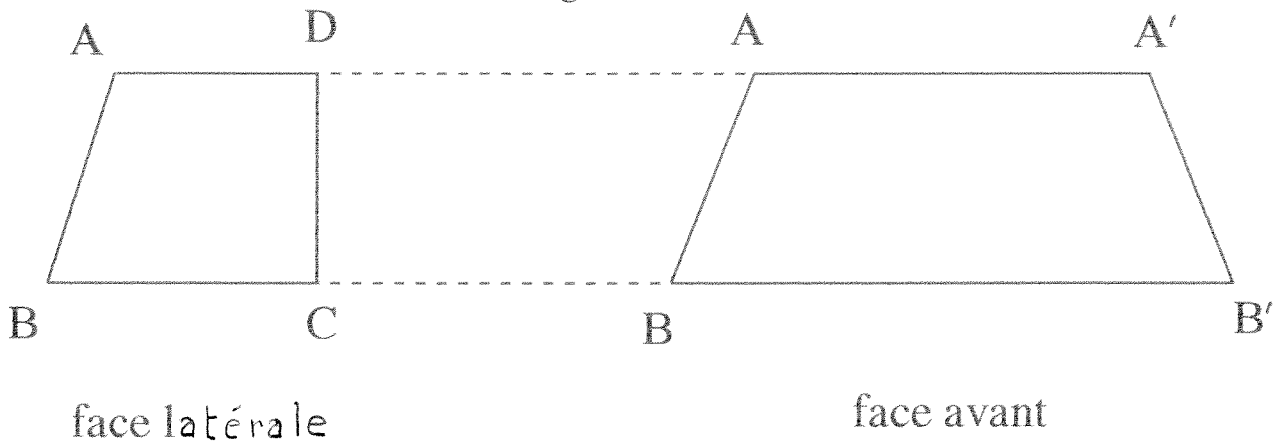
d'où le dessin de la face latérale: voir figure ci-dessous.

En vue de réaliser la face avant on détermine AA' :

$$AA' = 60 - 2AH.$$

BB' est connu ainsique la hauteur du trapèze ( CD dans la face latérale)

d'où le dessin de la face avant: voir figure ci-dessous



*L'angle que fait un plan avec la verticale peut être envisagé comme l'angle entre la ligne de plus grande pente du plan et une verticale. Cette notion nécessite peut-être la réalisation d'une maquette. A ce sujet on pourra dégager les idées de pente et de rampe d'une route et fixer des ordres de grandeur:*

*-la pente est le rapport entre la hauteur franchie et la distance parcourue horizontalement.*

*-la rampe est le rapport entre la hauteur franchie et la distance parcourue sur la pente.*

*Un cycliste peut grimper une pente à 10 %, c'est à dire une pente qui fait un angle de  $5^{\circ} 42'$  avec l'horizontale*

*Un cycliste peut grimper une rampe de 10 %, cela correspond à un angle de  $5^{\circ} 44'$*

*Les deux notions sont très voisines car le sinus et la tangente diffèrent peu pour les petits angles.*

*Pour un 4X4 une pente de 75 % correspond à un angle de  $36^{\circ} 52'$  alors qu'une rampe de 75 % donne un angle de  $48^{\circ} 33'$  avec l'horizontale. Attention en lisant les publicités !*

Il choisit:

longueur = 60 cm

profondeur = 25 cm

angle des faces avec la verticale =  $15^{\circ}$ .

1) Sachant que la hauteur entre le buffet et le plafond est de 50 cm on demande de réaliser le plan de découpe des trois faces de la hotte découpées séparément.

2) On peut également réaliser la hotte à l'aide d'une seule feuille de tôle pliée. On demande de dessiner à l'échelle 1/5 le patron de découpe de la tôle ainsi que les lignes de pliage. La tôle doit être découpée dans une bande, évaluer la largeur minimum de la bande pour pouvoir effectuer la découpe.

3) Réaliser une maquette à l'échelle 1/5.

## Objectifs:

Dans cet exercice il s'agit de résoudre un problème concret, facile à imaginer mais dont la réalisation impose l'usage des mathématiques.

C'est une construction de géométrie dans l'espace pour laquelle la figure joue un grand rôle.

Dans cette situation il n'est pas possible de tâtonner ou d'essayer de réaliser une maquette, il faut calculer. Cependant il faut être adroit dans les calculs car on n'a pas besoin de tout connaître pour effectuer la réalisation. Le choix des grandeurs nécessaires à la construction constitue un des intérêts du problème

## Liens avec le programme:

On traite un vrai problème de mathématisation qui fait appel à la notion de solides usuels, de plan, de conservation ou non de l'angle droit en projection. Pour les calculs, il y a tellement d'angles droits que l'usage de Pythagore et de la trigonométrie élémentaire suffisent.

## 2. PONT SUSPENDU

I) CONTENU: Cette étude a pour but de comprendre comment un pont suspendu est conçu.

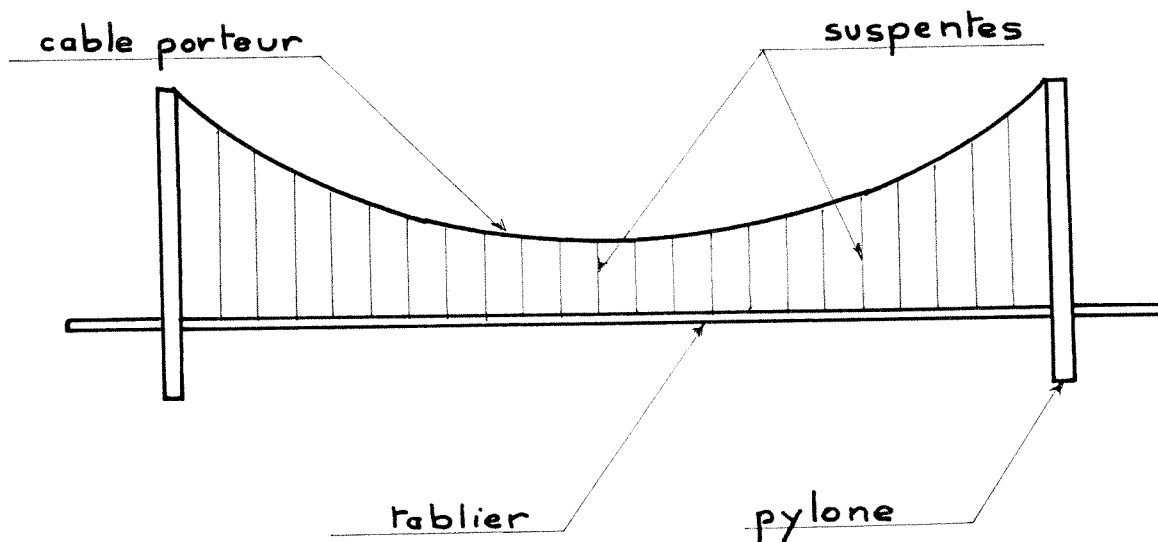
II) OBJECTIFS :- Mettre en pratique l'addition vectorielle.  
 - Constaté que la règle du parallélogramme ou la relation de Chasles est une règle naturelle.  
 - Déterminer l'équation d'une parabole définie par plusieurs points. ( Les calculs font intervenir une équation du type  $y = ax^2 + b$  )

III) MATERIEL NECESSAIRE POUR L'EXPERIMENTATION.

- Un carton format A4.
- Du fil à coudre.
- Des plombs à pêche (Une dizaine de 0,5g chacun).

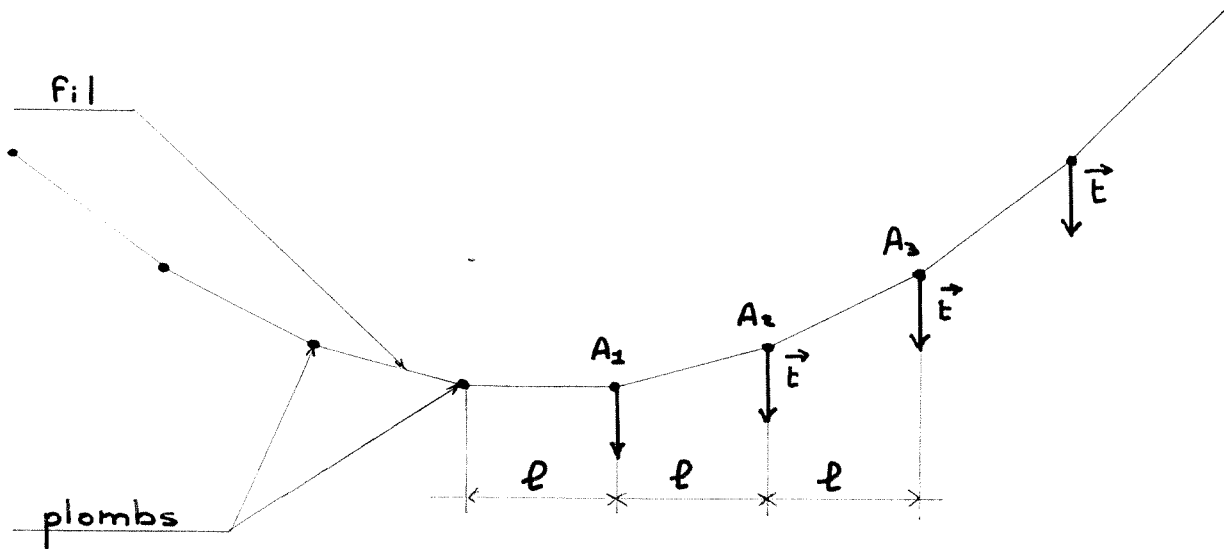
IV) MISE EN GARDE: Il est vivement conseillé au professeur de réaliser l'expérimentation.

V) DESCRIPTION A L'USAGE DU PROFESSEUR : Pour des raisons de simplification, nous nous intéressons ici à un tablier de pont, suspendu par un nombre pair de suspentes fixées sur celui-ci à intervalles réguliers, eux mêmes solidaires de deux câbles porteurs parallèles maintenus à leurs extrémités par des pylônes.

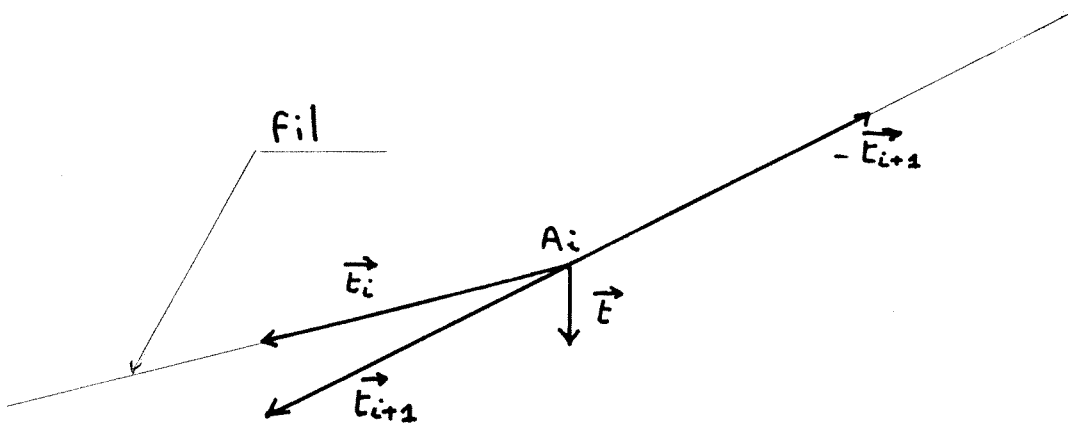




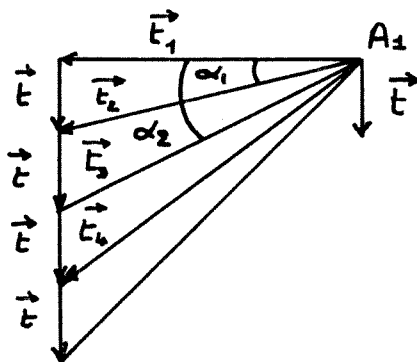
Pour raison de symétrie les tensions sur les différentes suspentes sont égales. Le but de l'étude est de découvrir comment ces tensions se répercutent sur le câble porteur et la forme adoptée par celui-ci. Le câble porteur est un fil à coudre. Les tensions  $\vec{T}$  que transmettent les suspentes au câble porteur sont matérialisées par des plombs fixés à ce fil.



Le système étant en équilibre, chaque point  $A_i$  est soumis à des forces dont la somme est nulle.



Comme le nombre de suspentes est pair,  $\vec{T}_1$  est horizontale et en reportant les tensions en  $A_1$  on obtient la figure suivante:



$$\tan \alpha_i = \frac{\|\vec{t}\|}{\|\vec{F}_i\|}$$

Cette considération permet de prouver que tous les points  $A_i$  sont sur une parabole (et non sur une chaînette).

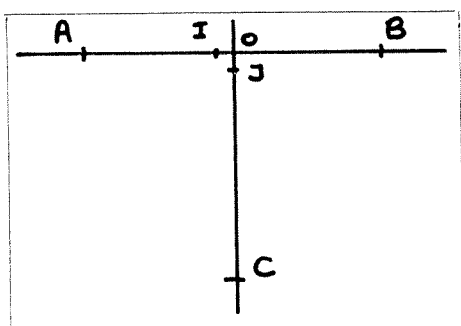
Le jour de la manipulation, le professeur donne le descriptif du pont suspendu et explique le transfert pont suspendu -----> fil à coudre et plombs à pêche.

#### VI) ACTIVITE POUR L'ELEVE:

1) Matériel à préparer chez soi:

Sur une feuille de format A4 tracez un repère orthonormé  $(O, I, J)$  (unité 1cm) ainsi disposé:

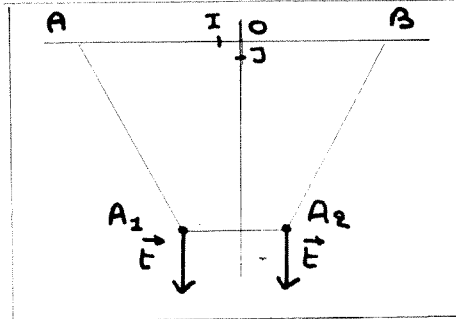
- Placez les points:  $A(10,0)$   $B(-10,0)$   $C(0,15)$
- Tracer en rouge les droites  $d_1$  et  $d_2$   
d'équation respective:  $d_1: x = -10/3$   
 $d_2: x = 10/3$
- Tracer en vert les droites  $e_1, e_2, e_3, e_4$   
d'équation respective:  $e_1: x = -6$   $e_2: x = -2$   
 $e_3: x = 2$   $e_4: x = 6$
- Tracer en bleu les droites  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$   
d'équation respective:  $g_1: x = -50/7$   $g_2: x = -30/7$   
 $g_3: x = -10/7$   $g_4: x = 10/7$   
 $g_5: x = 30/7$   $g_6: x = 50/7$



Cette feuille est collée sur un carton au verso duquel une patte lui permet de tenir debout. (Comme les cadres des photos). Trois fils à coudre sont passés à travers le carton en A et B. Leurs longueurs sont toutes égales à  $AC + CB$ .

2) ACTIVITE EN CLASSE:

- a) Sur un fil vous fixez deux plombs de poids identique de telle sorte que, livrés à eux mêmes, ils se placent sur les droites  $d_1$  et  $d_2$ . Vous notez  $A_1$  et  $A_2$  les positions acquises par les plombs. Le dispositif suivant est reporté sur une feuille 1 annexe.



Vous notez  $\vec{f}$  les forces créées par les deux plombs. (On choisira  $t = 4\text{cm}$ ). Les forces  $\vec{f}$  se décomposent selon la règle du parallélogramme sur les droites  $AA_1$ ,  $AA_2$ ,  $A_2B$ . Faites la figure. Notez les coordonnées de  $A_1$  et de  $A_2$ .

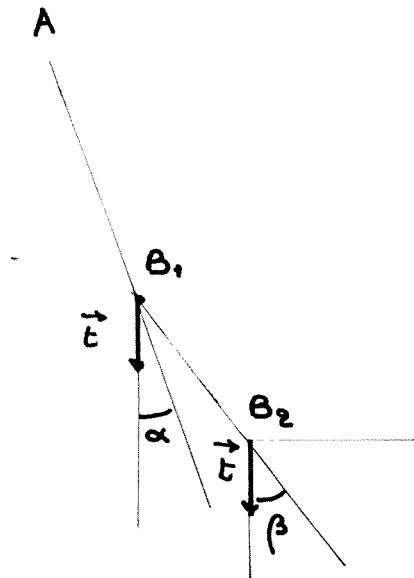
- b) Vous fixez 4 plombs de poids identique sur un deuxième fil de telle sorte que, livrés à eux mêmes, ils se placent sur les droites  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ,  $e_4$ . Vous notez  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  les positions acquises par les plombs. Comme précédemment reportez le dispositif sur une feuille annexe 2. Notez toujours  $\vec{f}$  les forces créées par les plombs. Décomposez les sur les droites  $AB_1$ ,  $BB_2$ ,  $B_2B_3$ ,  $B_3B_4$ ,  $B_4B$ . Notez les coordonnées de  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$ .
- c) Fixez les six plombs sur un troisième fil de telle sorte que, livrés à eux-mêmes, ils se placent sur les droites  $g$ . Notez  $C_1, \dots, C_6$  les positions acquises par les plombs. Réitérez, sur une feuille annexe 3 les décompositions. Notez les coordonnées de  $C_1, \dots, C_6$ .

d) Etude analytique:

Plus le nombre de poids augmente, plus il semble qu'ils sont placés sur une parabole.

Première partie:  $P$  est une parabole d'axe (OJ). Son équation est de la forme:  $y = px^2 + m$ . Sachant qu'elle passe par A et B montrez que:  $m = -100p$ . Pour chacun des cas que vous venez d'étudier vous allez déterminer les équations des paraboles. Pour cela, il suffit de calculer la valeur de  $p$  en utilisant les coordonnées de  $A_1$  ou  $B_1$  ou  $C_1$ . Vérifiez ensuite, pour chacun des trois cas que la parabole contient effectivement les autres points. La précision des résultats dépend du soin apporté à l'expérience.

Deuxième partie: Le contenu de cette deuxième partie consiste dans le cas b) à démontrer que  $B_1, B_2, B_3, B_4$  sont situés sur une même parabole en utilisant leur abscisse et la décomposition vectorielle.



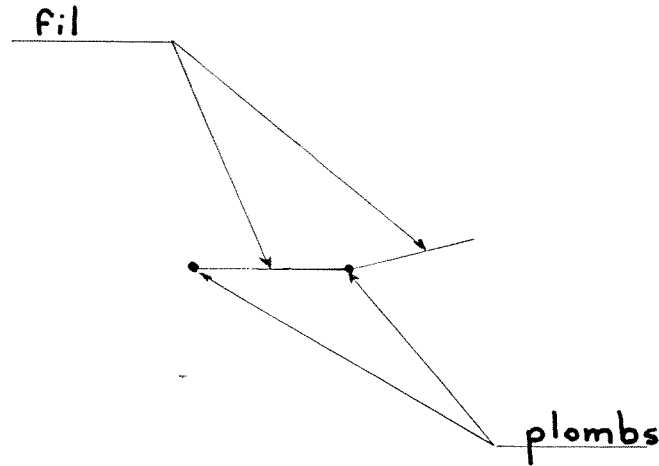
- 1) Démontrez que  $\tan \beta = 2 \tan \alpha$
- 2) Vous notez  $u$  et  $v$  les ordonnées respectives de  $B_1$  et de  $B_2$ . Calculez  $\tan \alpha$  en fonction de  $u$ .  
Calculer  $\tan \beta$  en fonction de  $u$  et de  $v$ . Justifiez que  $2v = 3u$
- 3) Démontrez que, si la parabole  $P$  contient  $B_1$ , son équation est:

$$y = -\frac{u}{64} x^2 + \frac{25}{16} u$$

Démontrez ensuite que  $P$  contient les autres points  $B_2, B_3, B_4$ .

e) Construction vectorielle:

Voici une partie d'un fil comportant 12 plombs. Seule la partie basse a été représentée. Reconstituez le schéma complet.

VII) Quelques remarques concernant l'expérience qui a été menée en classe.

Les élèves ont travaillé par binômes. (Un élève manipule, l'autre reporte les positions sur les feuilles annexes.) Il faut soixante minutes pour que la plupart des groupes placent tous les plombs. Le reste dépend, entre autre, des indications données par le professeur. La décomposition vectorielle ne pose pas trop de problème. Ici les élèves s'autocontrôlent. Un tracé inexact ne donnant pas l'alignement du fil et de  $\vec{u} + \vec{v}$ . La partie vectorielle, tout comme la première partie de l'étude analytique, peuvent être abordées par tous les élèves.

VIII) Bibliographie :

*Exemple de Problème à motif technique* par C. Delapierre, Bulletin de l'A.P.M.E.P. (Mars 1959);

*Les ponts préfabriqués* par J. Muller, Pour La Science (Avril 1992);

Pour un prolongement : T.P. de première par l'IREM de Strasbourg, à paraître chez Bordas.

(Septembre 92)

### 3. FREINS VTT

#### I - CONTENU

Etude de l'efficacité d'un frein arrière à tirage central de bicyclette classique ou de vélo tout terrain en fonction de la longueur du câble joignant les 2 étriers.

Beaucoup d'élèves possédant un VTT, il est intéressant d'étudier le frein arrière de celui-ci. Sa parfaite accessibilité permet de se livrer aux recherches suivantes :

- Comment la traction effectuée par la poignée de frein se répercute-t-elle sur les patins ?
- Quel est le réglage optimum du câble de liaison des 2 étriers ?
- Les formes des freins sont très variables : certaines sont-elles plus performantes que d'autres ?

#### II - PRE-REQUIS

- Addition des vecteurs.
- Notion de moments (cette activité ne peut être abordée que si le professeur de physique a traité les moments).

#### III - OBJECTIFS

- Mathématiser une situation pour laquelle les élèves se procurent leurs propres valeurs expérimentales.
- Introduire une fonction qu'on ne sait pas (encore) étudier, mais pour laquelle l'étude des variations présente un intérêt évident et que l'on peut représenter graphiquement point par point.

#### IV - ETUDE A L'USAGE DU PROFESSEUR

Frein schématisé (voir figure 2)

O : Centre de rotation

A : Fixation réglable du câble sur l'étrier.

P : Point central de la surface du patin.

d : Droite contenant P, tangente à la surface, incluse dans le plan OAP.

B : Point fictif obtenu par l'intersection des 2 droites portées par le câble de liaison.

Seule la variation du point B est envisagée.

La position des points O, A, P et de la droite d détermine les paramètres du frein.

Les patins sont en contact avec la jante. P est sur d.

Calcul du moment de  $\vec{f}$  par rapport à l'axe O.

$$\vec{t} = \vec{f} + \vec{f},$$

$$\|\vec{t}\|^2 = 2 \|\vec{f}\|^2 + 2 \|\vec{f}\|^2 \cos 2b$$

$$= 2 \|\vec{f}\|^2 \times [1 + \cos 2b]$$

$$= 4 \|\vec{f}\|^2 \cos^2 b$$

$$\text{d'où } \|\vec{f}\| \cos b = \|\frac{\vec{t}}{2}\| = \text{constante}$$

Calcul de OH

$$OH = OA \cos a$$

Si  $\widehat{OAB}$  est obtus

$$\widehat{OAB} + \widehat{OAH} = \pi$$

$$(\pi - c - b) + (\frac{\pi}{2} - a) = \pi$$

$$\text{d'où : } a = \frac{\pi}{2} - (b + c)$$

On démontre que si  $\widehat{OAB}$  est aigu :  $a = b + c - \frac{\pi}{2}$

Dans les 2 cas on a :

$$\cos a = \cos \left[ \frac{\pi}{2} - (b + c) \right]$$

$$\cos a = \sin (b + c)$$


Le moment de  $\vec{f}$  par rapport à O est :

$$m = \|\vec{f}\| \times OH = \frac{\|\vec{t}\|}{2} \times OA \times \frac{\sin(b+c)}{\cos b}$$

$\frac{\|\vec{t}\|}{2} \times OA$ , est une constante

$$\text{On pose } g(b) = \frac{\sin(b+c)}{\cos b} = \tan b \cos c + \sin c$$

b	0	$\frac{\pi}{2}$
g		$+\infty$

sin c 

A tension constante, plus le câble de liaison des étriers est court, plus le moment de  $\vec{f}$  est grand.

## V - DESCRIPTION DE L'ACTIVITE PROPOSEE AUX ELEVES

### 1ère ETAPE

- Chaque élève dessine chez lui, à l'échelle 1, le frein arrière du vélo, les patins étant en contact avec la jante.
- Cet exercice ne comporte pas de grandes difficultés. La figure 1 a été réalisée par un élève. Seule une coupe du pneu et de la jante a posé quelques problèmes.

Tout modèle de frein à tirage central peut être étudié. Le frein arrière a été choisi uniquement parce qu'il est facile de tester son efficacité : un blocage de roue provoque un dérapage du vélo. Un blocage de la roue avant présente des conséquences à éviter ...

### 2ème ETAPE (1 heure)

Schématisation du frein sur papier calque.

L'échelle 1 est conservée.

Quels sont les points importants ?



La discussion avec l'ensemble des élèves permet de progresser rapidement.

La dénomination des points doit être la même pour tous.

### 3ème ETAPE : Etude vectorielle (1 heure)

La traction sur le câble issu de la poignée est représentée par le vecteur  $\vec{t}$ . Pour comparer les résultats selon les réglages et les modèles de freins, tous les élèves adoptent une norme de 5,5 cm sur le dessin, par exemple.

Il est inutile d'appréhender cette étape comme un mécanicien, notamment en voulant obtenir une somme vectorielle nulle.

Il suffit d'étudier comment se transmet la traction.

Pour des raisons de symétrie, l'étude peut être limitée à celle de l'étrier droit.

Cette étape comporte :

- Une décomposition vectorielle selon la règle du parallélogramme.

$\vec{f}$  est définie.

- Un premier calcul de moment. L'étrier pivote sur son axe O.

$$\|\vec{f}\| \times OH = 19,4 \quad (\text{Données de la figure 2})$$

- Un deuxième calcul de moment. Le patin appuie sur la jante.

Définition de  $\vec{f}_j$  :  $\vec{f}_j$  est normale à (OP)

$$\|\vec{f}_j\| \times OP = \|\vec{f}\| \times OH$$

$$\|\vec{f}_j\| = 5,5$$

- Une deuxième décomposition vectorielle : seule la composante

$\vec{f}_t$  normale à la jante est efficace pour freiner.

$$\|\vec{f}_t\| = 4$$

Les difficultés rencontrées sont nombreuses :

Beaucoup d'élèves s'interrogent sur le fait que l'on choisisse une norme quelconque pour la traction. Les calculs des moments utilisent les données graphiques. Plusieurs élèves se heurtent au problème de la détermination du bras de levier et donc de la mesure de la distance d'un point à une droite.

Enfin, la dernière décomposition vectorielle, celle qui consiste à déterminer la composante efficace de freinage provoque une discussion animée !

#### 4ème ETAPE

L'élève reprend l'étude précédente en faisant varier la longueur du câble de liaison A'BA.

Il est souhaitable que chaque élève réalise au total 3 études correspondant à 3 réglages : court - moyen - long.

Cette étape peut être effectuée à la maison.

#### 5ème ETAPE

Comparaison des résultats.

Pour un frein donné, quel est le réglage optimum ?

Quel est le modèle de frein le plus performant ?

#### 6ème ETAPE (non expérimentée)



Le calcul du moment de  $f$  par rapport à 0 et la définition de la fonction  $g$  définie au paragraphe IV peuvent être abordés par les meilleurs élèves.

Ils traceront une représentation graphique de  $g$  sur  $] 0, \frac{\overline{V_0}}{2} [$

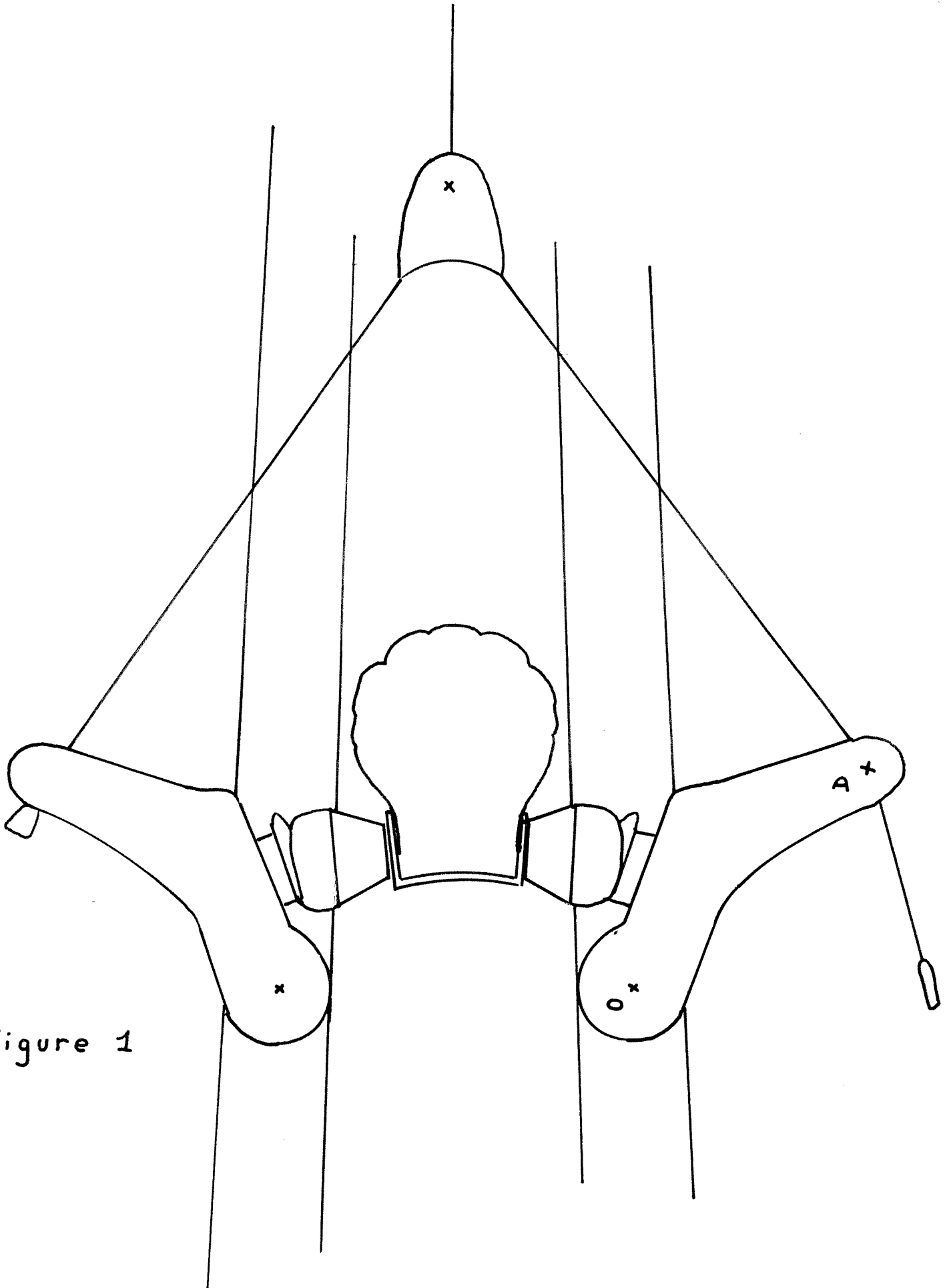


Figure 1

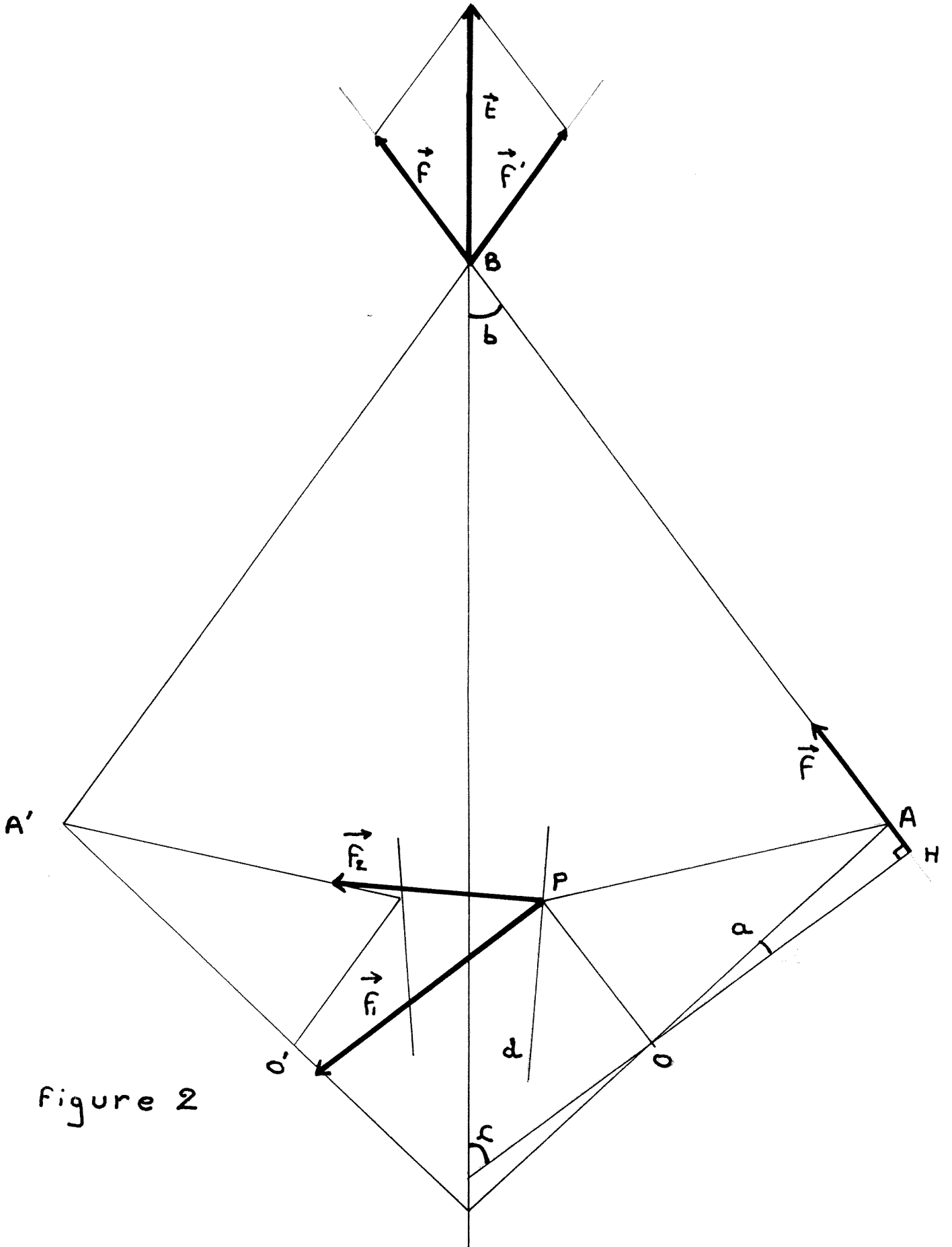


Figure 2

4.

LE PLUS COURT CHEMIN  
D'UN POINT A UN AUTRE  
SUR LA SURFACE D'UNE SPHERE

### 1. OBJECTIFS:

Proposer un exemple d'application concrète des mathématiques dans le domaine de la géométrie dans l'espace et de la trigonométrie.

### 2. INTRODUCTION:

Un route maritime de haute mer  
(Ceci n'a d'intérêt ni en croisière côtière, ni même en croisière semi-hauturière; de plus l'on ne tient compte ni des vents, ni des courants, ni de la présence de terres, banquises ou autres contraintes)

est usuellement

soit l'orthodromie (plus court chemin: celui que prend d'elle-même une ficelle tendue sur une sphère entre deux points); elle nécessite des corrections permanentes du cap suivi;

soit la loxodromie, qui est caractérisée par un angle constant avec tous les méridiens, et qui est représentée par un segment de droite sur une carte de Mercator (un parallèle en est un exemple simple),

soit, en fait, une route composite choisie sur la base de ces deux principes.

" De Sydney à Rio de Janeiro la loxodromie coupe l'Amérique du Sud en deux; l'orthodromie, elle, passe loin au sud du cap Horn ! De Sydney au cap Horn, la loxodromie suit le cap 103, traverse l'île Nord de la Nouvelle-Zélande et invite donc à passer entre les deux parties de cette terre, par le détroit de Cook; L'orthodromie part au cap 160, plonge très au sud de la Nouvelle-Zélande, plus de 1000 milles plus au Sud que l'autre. La première mesure 6057 milles, la seconde 5062. "  
(cf 6. Bibliographie -2-)

### 3. ENONCE GENERAL et notations:

Déterminer la longueur orthodromique, et celle de la loxodromie joignant, à la surface de la sphère terrestre, le point A de longitude  $L$  et de latitude  $\ell$ , au point B de longitude  $L'$  et de latitude  $\ell'$ , soit selon un écart de longitude de  $a$  et un écart de latitude de  $b$ .

O désignant le centre de la terre, et  $R \approx 6370$  km son rayon, on note de plus  $c$  la mesure en degrés de l'angle AOB. Les mesures  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont comprises entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ .

## 4. ACTIVITES POUR LES ELEVES

### A. REPERAGE DU POINT MILIEU D'UN ARC (orthodromique) AB:

(Dans l'optique de la correction permanente de cap que suppose le choix d'un tel chemin maritime)

Avec les notations définies dans le paragraphe 3, A et B étant supposés non diamétralement opposés, et selon la figure "Fig. 3" ci-jointe, les coordonnées de A et B par rapport au repère usuel sont:

$$A \begin{pmatrix} R.\cos(\varphi).\cos(L) \\ R.\cos(\varphi).\sin(L) \\ R.\sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} R.\cos(\varphi').\cos(L') \\ R.\cos(\varphi').\sin(L') \\ R.\sin(\varphi') \end{pmatrix} ,$$

celles du milieu du segment AB sont

$$\begin{pmatrix} R.(\cos(\varphi).\cos(L) + \cos(\varphi').\cos(L')) / 2 \\ R.(\cos(\varphi).\sin(L) + \cos(\varphi').\sin(L')) / 2 \\ R.(\sin(\varphi) + \sin(\varphi')) / 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit la longitude ( $\varphi_0$ ) et la latitude ( $\varphi_a$ ) du point milieu du "petit arc de grand cercle AB":  
Elles vérifient, sous réserve d'existence,

$$\tan(\varphi_0) = \frac{\cos(\varphi).\sin(L) + \cos(\varphi').\sin(L')}{\cos(\varphi).\cos(L) + \cos(\varphi').\cos(L')}$$

$$\text{et } \tan(\varphi_a) = \frac{\sin(\varphi) + \sin(\varphi')}{\sqrt{\cos^2(\varphi) + \cos^2(\varphi') + 2.\cos(\varphi).\cos(\varphi').\cos(L-L')}} ,$$

Ce procédé, répété par dichotomie, fournit une succession de points de la route: Ainsi le trajet orthodromique de Paris (2,20°E 48,52°N) à Tokyo (139,46°E 35,42°N) (par route aérienne) est ponctué comme suit, et, en particulier, passe au Nord de Moscou (37,35°E 55,45°N):

Longitudes (Est)	Latitudes (Nord)
2.200	48.5200
7.246	52.9896
13.420	57.1973
21.100	61.0266
30.713	64.3062
42.562	66.8002
56.454	68.2358
71.343	68.4005
85.615	67.2666
98.020	65.0105
108.172	61.9020
116.293	58.1909
122.803	54.0646
128.099	49.6516
132.496	45.0379
136.226	40.2809
139.460	35.4200

## B. EXEMPLE CONCRET

### SIMPLE :

Lisbonne et New-York sont situées toutes deux (approximativement) à la même latitude de 40° Nord, et leurs longitudes sont respectivement de 9° Ouest et 74° Ouest.

Un bateau naviguant de Lisbonne à New-York en suivant le 40<sup>ème</sup> parallèle se déplace sur la loxodromie. S'il revient de New-York à Lisbonne en suivant le grand cercle passant par ces deux villes, il emprunte l'orthodromie.

\*\*\*\*\*

A et B désignant les points associés à Lisbonne et New-York (voir les figures "Fig. 1" et "Fig. 2"), les longueurs des trajets aller et retour valent respectivement

$$\pi.R.\cos(\varrho).a / 180 \quad \text{et} \quad \pi.R.c / 180 .$$

Or c est tel que

$$\sin(c/2) = A'B' / 2R \quad \text{et} \quad \sin(a/2) = A'B' / (2R.\cos(\varrho))$$

d'où

$$\sin(c/2) = \cos(\varrho).\sin(a/2)$$

(Avec les acquis de 1ère:

$$\cos(c) = (2.R^2 - A'B'^2) / (2.R^2)$$

et

$$\cos(a) = (2.(R\cos(\varrho))^2 - A'B'^2) / (2.(R\cos(\varrho))^2)$$

d'où

$$\cos(c) = 1 + (\cos(a) - 1).\cos^2(\varrho) \quad ).$$

En particulier, avec  $\varrho = 40^\circ$ , et  
 $a = 74^\circ - 9^\circ = 65^\circ$ ,

l'aller et le retour mesurent respectivement, environ,

$$\pi * 6370 * \cos(40^\circ) * 65 / 180$$

et

$$\pi * 6370 * c / 180$$

où  $\cos(c) = 1 + (\cos(65^\circ) - 1).\cos^2(40^\circ)$

soit

$$\underline{5536 \text{ km} \quad \text{et} \quad 5404 \text{ km.}}$$

## C. FORMULE DES COSINUS EN GEOMETRIE SPHERIQUE :

Avec les notations de la figure "Fig. 4" ci-jointe, A, B, C étant trois points d'une sphère de centre O et de rayon 1 (A et B non diamétralement opposés), et D étant le projeté orthogonal du point C sur le plan OAB, on vérifie que:

$$OE = \cos(b) \quad (1)$$

$$OF = \cos(a)$$

$$CF = \sin(a)$$

$$OG = \cos(a).\cos(c) \quad (2)$$

$$DF = \sin(a).\cos(\hat{B})$$

d'où, les angles GFD et c étant égaux,

$$DH = GE = \sin(a) \cdot \cos(\hat{B}) \cdot \sin(c)$$

puis, par (1) et (2),

$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{B})$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} CD &= CF \cdot \sin(\hat{B}) = \sin(a) \cdot \sin(\hat{B}) \\ &= CE \cdot \sin(\hat{A}) = \sin(b) \cdot \sin(\hat{A}) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\sin(\hat{A})}{\sin(a)} = \frac{\sin(\hat{B})}{\sin(b)}$$

Ces formules permettent, si le niveau de la classe est suffisant, d'étudier le cas général ( § 5 ).

## 5. GENERALISATION

### ( CAS DE L'ORTHODROMIE ) :

Avec les notations définies dans le paragraphe 3, et selon la figure "Fig. 3" ci-jointe, la longueur de l'orthodromie vaut

$$\tau \cdot R \cdot c / 180$$

et c est calculé par l'une ou l'autre des méthodes suivantes:

Méthode 1 (trigonométrique):

En application de la formule du cosinus explicitée en paragraphe 4 C, les points A et C désignant les extrémités de l'arc orthodromique, et B désignant un pôle, on obtient le cosinus de c précisé dans l'encadré qui suit.

Méthode 2 (analytique):

c vérifie (au niveau 2<sup>de</sup>):  
 $\sin(c/2) = AB/(2R).$

Les coordonnées de A et B par rapport au repère usuel étant:

$$A \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varrho) \cdot \cos(L) \\ R \cdot \cos(\varrho) \cdot \sin(L) \\ R \cdot \sin(\varrho) \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varrho') \cdot \cos(L') \\ R \cdot \cos(\varrho') \cdot \sin(L') \\ R \cdot \sin(\varrho') \end{pmatrix} ,$$

la longueur du segment AB est telle que

$$AB^2 = R^2 \cdot (2 - 2 \cdot \cos(\varrho) \cdot \cos(\varrho') \cdot \cos(a) - 2 \cdot \sin(\varrho) \cdot \sin(\varrho'))$$

ce qui permet de calculer  $\sin(c/2)$  puis c.

Cependant

$$\begin{aligned} \cos(c) &= 1 - 2 \cdot \sin^2(c/2) \\ &= \cos(\varrho) \cdot \cos(\varrho') \cdot \cos(a) + \sin(\varrho) \cdot \sin(\varrho') \end{aligned}$$



En résumé, l'orthodromie mesure  
 $\pi .R.c/180$   
 avec  
 $\cos(c) = \cos(\varrho).\cos(\varrho').\cos(L-L') + \sin(\varrho).\sin(\varrho')$

En particulier, si  $\varrho = \varrho' = 40^\circ$  Nord  
 et  $L = 9^\circ$  Ouest, et  $L' = 75^\circ$  Ouest,  
 on retrouve  
 $\cos(c) = 1 + (\cos(65^\circ) - 1).\cos^2(40^\circ)$

Par ailleurs, si  $L = L'$ , alors  $\cos(c) = \cos(\varrho - \varrho')$ , et  
 l'orthodromie mesure

$$\pi .R. b /180 .$$

## 6. BIBLIOGRAPHIE

- 1- Navigation en haute mer Le point et les routes  
 Olivier Stern-Veyrin  
 Les Editions Arthaud 1985
- 2- Cours de navigation des Glénans  
 Editions du Seuil 1985
- 3- Périodique trimestriel Repères n° 6  
 I.R.E.M.  
 Topiques éditions
- 4- Mathématiques - classe de 3<sup>ème</sup>  
 I.R.E.M. de Strasbourg  
 Istra 1989





## 5. PLUS FORT QUE MA CALCULATRICE...!

Matériel préconisé : calculatrices scientifiques 10 chiffres programmables.

### PRÉAMBULE

La principale motivation des auteurs de cette activité a été de concilier sa conformité avec l'esprit des programmes de la classe de 2<sup>nd</sup>e tout en permettant une utilisation diversifiée suivant les acquis des élèves en présence.

Ainsi après un premier "état des lieux" que devraient constituer les tests d'évaluation, face à une classe le plus souvent hétérogène, cette activité devrait permettre d'apporter aux uns une **aide** personnalisée sur des apprentissages mal assimilés alors que d'autres y trouveront un élargissement du savoir ainsi qu'un **approfondissement** de leurs connaissances.

***Extraits des programmes de 2<sup>nd</sup>e** : En Seconde, les activités de résolution d'exercices et de problèmes fourniront un champ de fonctionnement pour les capacités acquises au Collège et permettront, en cas de besoin, de consolider ces acquis; on évitera en revanche les révisions systématiques.*

*...L'emploi des calculatrices a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche, ....*

Testée face à différentes classes de 2<sup>nd</sup>e de notre Académie, cette activité a connu un vif succès auprès des élèves qui n'ont pas ressenti le côté fastidieux de toute révision de début d'année ou de "déjà vu" mais qui y ont trouvé au contraire la motivation ou la nécessité d'apprentissage du cours et de méthodes jusque là jugées peu attrayantes.

C'est ainsi que pour chaque exercice nous signalons la partie du programme concernée, le professeur pouvant alors, suivant les acquis de ses élèves, se contenter d'un rappel ou au contraire profiter de l'occasion pour définir ou développer une partie de cours ou méthode.

## CONSEILS D'UTILISATION

Conçus dans le but d'éveiller la curiosité des élèves, ces exercices devraient également permettre de promouvoir la classe de mathématiques comme un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexion voire de débat sur les démarches adoptées tout en favorisant l'acquisition de méthodes.

L'ensemble est constitué de parties qui peuvent être étudiées indépendamment les unes des autres. Il est conseillé cependant de respecter la progression en les traitant dans l'ordre dans lequel elles sont placées.

Il ne nous semble pas souhaitable, en outre, de vouloir traiter ces exercices tout d'un coup sous peine de risquer de laisser les élèves ou en tout cas de leur faire perdre leur motivation. Cette motivation nous paraît en effet indispensable à toute activité mathématique où la participation active de l'élève est recherchée.

<b>SOMMAIRE avec durée possible d'utilisation</b>
---

### EXERCICES PRÉLIMINAIRES

Exercices I à III. \*( $\approx$  2 x 45 min)

Exemples d'exercices pour élèves plus avancés. \*( $\approx$  2 x 45 min)

### MÉFIANCE...

Première page ("exercices d'échauffement") ( $\approx$  45 min)

De l'utilité des identités remarquables... \*( $\approx$  2 x 45 min)

Comparer avec sa calculatrice. ( $\approx$  45 min)

Thème sur les puissances. ( $\approx$  45 min)

*\*(une séance supplémentaire de 45 min. pouvant s'avérer nécessaire)*

### EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

( $\approx$  2 x 45 min)

<b><u>Les documents qui suivent sont à l'usage des professeurs.</u></b>
---

<p>Ils ne peuvent, ainsi rédigés, servir de documents-élèves. Il incombe donc à chaque professeur, désireux de les exploiter, de rédiger des fiches de travail correspondantes se limitant aux énoncés ou, éventuellement, contenant des indications concernant la stratégie ou la démarche à utiliser.</p>
---

# EXERCICES PRÉLIMINAIRES

33

(D'après manuel de 4<sup>ème</sup> - collection IREM de Strasbourg)

Parties du programme concernées : Ces exercices ont pour but d'introduire ou de conforter l'emploi d'une calculatrice scientifique tout en permettant de vérifier, ou consolider, les acquis des élèves concernant les règles de priorités opératoires, les règles de calcul dans  $\mathbb{Q}$ , la notion d'inverse ...etc...

**Remarque** : A noter au passage l'utilisation de la touche  $\boxed{1/x}$  parfois mal interprétée par les élèves, ce qui peut être l'occasion d'expliquer la notion de "touche fonction" ( puis l'écriture  $x \longmapsto 1/x$  ).

Cette partie pourrait donc parfaitement s'intégrer au moment de l'étude de la fonction de référence  $x \longmapsto 1/x$  .

I. Voici des séquences pour calculatrice :

① 2  $\boxed{1/x}$   $\boxed{\div}$  3  $\boxed{=}$

② 2  $\boxed{1/x}$   $\boxed{\times}$  3  $\boxed{=}$   $\boxed{1/x}$   $\boxed{=}$

③ 2  $\boxed{1/x}$   $\boxed{\times}$  3  $\boxed{1/x}$   $\boxed{=}$

④ 2  $\boxed{\times}$  3  $\boxed{1/x}$   $\boxed{=}$   $\boxed{1/x}$   $\boxed{=}$

⑤ 2  $\boxed{\div}$  3  $\boxed{=}$   $\boxed{1/x}$   $\boxed{=}$

1° Indiquer lesquelles calculent:

a)  $(1/2)/3$  b)  $1/(2/3)$  c)  $1/(3/2)$

2° Effectuer les calculs a, b et c à la main puis vérifier sur votre calculatrice avec les séquences correspondantes.

Réponses a) séquences 1 et 3 , on trouve  $1/6$   
b) séquences 4 et 5 , on trouve  $3/2$   
c) séquence 2 , on trouve  $2/3$ .

Vérifications à la calculatrice : pour vérifier les résultats a) et c) on pourra faire découvrir l'utilisation judicieuse de la touche  $\boxed{1/x}$  après les séquences correspondantes...

Remarque : Suivant les calculatrices :

\* la touche  $\boxed{1/x}$  est remplacée par la touche  $\boxed{x^{-1}}$

\* et la touche  $\boxed{=}$  par  $\boxed{\text{ENTER}}$  ou  $\boxed{\text{EXE}}$  .

II. Voici des séquences pour calculatrice :

①  $2 \left[ \frac{1}{x} \right] \left[ + \right] 3 \left[ = \right] \left[ \div \right] 4 \left[ = \right]$

②  $2 \left[ \frac{1}{x} \right] \left[ + \right] 3 \left[ \div \right] 4 \left[ = \right]$

③  $2 \left[ \frac{1}{x} \right] \left[ \div \right] 3 \left[ + \right] 4 \left[ = \right]$

④  $2 \left[ + \right] 3 \left[ \div \right] 4 \left[ = \right] \left[ \frac{1}{x} \right] \left[ = \right]$

⑤  $2 \left[ \div \right] 3 \left[ + \right] 4 \left[ = \right] \left[ \frac{1}{x} \right] \left[ = \right]$

1° Ecrire l'expression correspondant à chacune de ces séquences.

2° Calculer à la main chacune des expressions trouvées puis vérifier sur votre calculatrice.

Réponses :

$$\frac{\frac{1}{2} + 3}{4} = \frac{7}{8} \quad ; \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad ; \quad \frac{\frac{1}{2}}{3} + 4 = \frac{25}{6}$$

$$\frac{1}{2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} \quad ; \quad \frac{1}{\frac{2}{3} + 4} = \frac{3}{14}$$

III. On se propose de calculer :  $\frac{1/9 - 1/8}{1/9 + 1/8}$

1° Ecrire une séquence pour calculatrice n'utilisant pas la touche  $\left[ + \right]$  et correspondant à ce calcul.

2° Effectuer cette séquence sur votre calculatrice puis taper sur la touche  $\left[ \frac{1}{x} \right]$ . Que peut-on en déduire ?

3° Vérifier en faisant le calcul à la main.

Réponse :

$$9 \left[ \frac{1}{x} \right] \left[ - \right] 8 \left[ \frac{1}{x} \right] \left[ = \right] \left[ X \right] \left[ ( \right] 9 \left[ \frac{1}{x} \right] \left[ + \right] 8 \left[ \frac{1}{x} \right] \left[ ) \right] \left[ \frac{1}{x} \right] \left[ = \right]$$

on trouve à la calculatrice : -0.05882352

puis après avoir appuyé sur  $\left[ \frac{1}{x} \right]$  : -17

d'où le résultat : -1/17.

**Thème de réflexion** : Est-il toujours possible (raisonnable) de remplacer la touche  $\left[ \div \right]$  par la touche  $\left[ \frac{1}{x} \right]$  ?

- IV. 1° Soit  $a = 1 + 1/3 + 1/4$ . Uniquement à la calculatrice vérifier que le tiers de  $a$  est supérieur à  $1/2$ .
- 2° En déduire la valeur de  $n$  telle que  $1/n + 1/2 = a/3$ .
- 3° Vérifier.

Réponses :

$$1^\circ \quad 1 \quad + \quad 3 \quad \boxed{1/x} \quad + \quad 4 \quad \boxed{1/x} \quad = \quad + \quad 3 \quad =$$

on trouve à la calculatrice :  $0.52777\dots > 0.5$

$$2^\circ \quad n = \frac{1}{\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}}$$

donc à la suite de la séquence précédente ajouter :

$$\boxed{-} \quad 0.5 \quad = \quad \boxed{1/x} \quad \text{on trouve } n = 36 \text{ ou } n = 36.000 \ 000 \ 1.$$

$$3^\circ \quad \frac{1}{3} a = \frac{1}{3} \times \frac{19}{12} = \frac{19}{36} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} = \frac{19}{36} - \frac{1}{2} = \frac{1}{36}.$$

- V. Voici une séquence calculatrice:

$$2 \quad \boxed{1/x} \quad + \quad 3 \quad \boxed{1/x} \quad = \quad \boxed{\times} \quad ( \quad 4 \quad \boxed{1/x} \quad + \quad 5 \quad \boxed{1/x} \quad ) \quad \boxed{1/x} \quad =$$

1° Ecrire l'expression correspondante.

2° Calculer à la main l'expression précédente en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

3° Vérification à la calculatrice:

Effectuer la séquence de l'énoncé sur votre calculatrice. Le résultat affiché suggère une **période** dans le développement décimal de la réponse. Laquelle? Donner l'écriture du résultat sous forme d'un développement décimal **illimité** que l'on notera  $d$  (on mettra des points de suspension pour indiquer la répétition infinie de la **période**). Calculer à la main  $1000d - d$  puis retrouver alors le résultat de la question 2°.

$$\begin{aligned} \text{Réponse :} \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = \frac{50}{27} \approx 1.851 \ 851 \dots \\ & \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} \\ 999 \ d = 1 \ 850 \ d'ou \ d = & \frac{1 \ 850}{999} = \frac{50}{27} . \end{aligned}$$

**Thème de réflexion :** Comment "récupérer" une fraction connaissant son écriture décimale ?



36 VI. Fractions continues. *Exemple*: soit la fraction  $q = 157/30$

$$157 \boxed{+} 30 \boxed{=} 5.2333\dots \text{d'où } 157 = 5 \times 30 + 7.$$

$$\text{Ce qui permet d'écrire } q = 5 + \frac{7}{30} = 5 + \frac{1}{30/7}$$

$$\text{Or } \frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7} \text{ d'où } q = 5 + \frac{1}{4 + \frac{2}{7}} = 5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7/2}}$$

$$\text{Finalement on obtient: } q = 5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}$$

Tout les numérateurs successifs étant égaux à 1, on considère la "transformation" de  $q$  comme achevée.

1° Rédiger une séquence calculatrice correspondant à cette transformation en utilisant des parenthèses et les touches  $\boxed{+}$  et  $\boxed{1/x}$  puis vérifier.

2° Rédiger l'expression transformée de  $q$  en remplaçant les traits de fraction par des "slash" (/) et des parenthèses. Comparer avec la séquence rédigée en 1°.

3° A la main, retrouver l'expression de départ de  $q$  en partant de son expression transformée.

4° Trouver les transformations des fractions suivantes puis vérifier :  $a = 593/520$  ;  $b = 283/255$  et  $c = 1993/1789$  .

Réponses :

$$1^\circ \boxed{(} \boxed{(} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{0.5} \boxed{)} \boxed{1/x} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{)} \boxed{1/x} \boxed{+} \boxed{5} \boxed{=}$$

2°  $q = 5 + 1/(4 + 1/(3 + \frac{1}{2}))$  . On obtient donc l'expression 1° mais écrite de la droite vers la gauche.

$$3^\circ 3 + \frac{1}{2} = 7/2; 4 + 2/7 = 30/7; q = 5 + 7/30 = 157/30.$$

$$4^\circ a = 1 + 1/(7 + 1/(8 + 1/9))$$

$$b = 1 + 1/(9 + 1/(9 + 1/3))$$

$$c = 1 + 1/(8 + 1/(1 + 1/(3 + 1/(2 + 1/(1 + 1/15))))))$$

Thème de réflexion : Obtenir à la calculatrice le quotient et le reste d'une division euclidienne.

VII. On considère les deux séquences pour calculatrice suivantes:

$$1 \quad \boxed{(} \boxed{a} \boxed{1/x} \boxed{+} \boxed{b} \boxed{1/x} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{(} \boxed{a} \boxed{+} \boxed{b} \boxed{)} \boxed{=}$$

$$2 \quad \boxed{a} \boxed{\times} \boxed{b} \boxed{=} \boxed{1/x}$$

Écrire un **programme** correspondant à ces séquences puis les exécuter pour des valeurs  $a$  et  $b$  de votre choix. Que constate-t-on ? Le démontrer.

Réponse : ces deux séquences aboutissent au même résultat  $1/ab$ . programme possible sur CASIO:  
Lbl 0 EXE ? → A: ? → B EXE (A<sup>-1</sup>+B<sup>-1</sup>):(A+B)▲ EXE (AB)<sup>-1</sup>▲  
Goto 0

1° Calculer à la calculatrice  $A = \frac{3\ 019\ 751,548}{1\ 515,178\ 9}$ .

On obtient 1 993 à l'affichage.... de quoi se poser des questions ! On peut alors proposer :

- soit de raisonner sur le dernier chiffre du produit  $1\ 515,178\ 9 \times 1\ 993$ . Comme  $9 \times 3 = 27$ , ce produit est un nombre ayant 4 chiffres après la virgule dont le dernier est un 7 et n'est donc pas égal au numérateur de A).

- soit de faire découvrir les chiffres de garde de sa calculatrice du type TI 81 ou CASIO graphique, par exemple, avec la séquence suivante :

$$3019751.548 \quad \boxed{+} \quad 1515.1789 \quad \boxed{=} \quad \boxed{\text{ANS}} \quad \boxed{-} \quad 1993 \quad \boxed{=}$$

qui donne l'affichage suivant :  $1.98\text{E-}7$  ou  $1.97\text{E-}07$   
ce qui permet de conclure que  $A \approx 1\ 993,000\ 000\ 197\dots$   
( $A \approx 1\ 993,000\ 000\ 197\ 996\ 421\ 412\ 679\ 387\ 232\ 755\ \dots$ )

partie du programme concernée : **notation scientifique.**

2° Calculer à la calculatrice  $B = \frac{123\ 456 \times 10^4 - 1}{10^9 - 1}$ .

Cet exercice peut être l'occasion de faire découvrir la touche  $\boxed{\text{EE}}$  (sur "TI") ou  $\boxed{\text{EXP}}$  (sur "CASIO", celle-ci étant souvent mal interprétée car confondue avec l'élévation à une puissance). Séquence possible (\*):

$$\boxed{(} \quad 123456 \quad \boxed{\text{EE}} \quad 4 \quad \boxed{-} \quad 1 \quad \boxed{)} \quad \boxed{+} \quad \boxed{(} \quad \boxed{1} \quad \boxed{\text{EE}} \quad 9 \quad \boxed{-} \quad 1 \quad \boxed{)} \quad \boxed{=}$$

On obtient 1.234 56. Comme cet affichage ne comporte que 6 chiffres, on peut se poser la question de savoir si ce résultat est exact.

Démarche proposée : on peut raisonner comme à l'exemple précédent après avoir transformé l'écriture de B :

$$B = \frac{1\ 234\ 559\ 999}{999\ 999\ 999}$$

Thèmes de réflexion :

- On peut rendre les élèves attentifs au fait que la calculatrice a simplifié abusivement par -1 (erreur encore trop souvent rencontrée chez bon nombre d'élèves...):

en effet  $\frac{123\ 456 \times 10^4}{10^9} = 123\ 456 \times 10^{-5} = 1,234\ 56.$

partie du programme concernée : **puissances de dix.**

- La séquence  $\boxed{\text{ANS}} \quad \boxed{-} \quad 1.23456 \quad \boxed{=}$  suite à la séquence (\*) permet d'obtenir à l'affichage :  $2.34\text{E-}10$  d'où l'on déduit  $B \approx 1,234\ 560\ 000\ 234\dots$ , ce qui permet alors de **motiver** les élèves les plus avancés à vérifier que :

en effet on a alors :  $B = 1,234\ 560\ 000\ 234\ 560\ 000\ 234\ 560\ 000\dots$

$$10^9 \times B = 1\ 234\ 560\ 000,234\ 560\ 000\ 234\ 560\ 000\dots$$

$$10^9 \times B - B = 1\ 234\ 560\ 000 - 1$$

$$B(10^9 - 1) = 123\ 456 \times 10^4 - 1 \quad \text{etc...}$$

partie du programme concernée : **résolution d'équation.**

## De l'utilité des identités remarquables...

(D'après ex. groupe de liaison 3<sup>e</sup> - 2<sup>nd</sup>e - stage MAPPEN Alsace)

1° Calculer avec différentes calculatrices le nombre suivant :

$$C = 28\,923\,761^2 - 28\,923\,760^2$$

Une fx-180P affiche 57 850 000 alors qu'avec une fx-8500G ou une T I 81, par exemple, on trouve 57 847 500.

Stratégies proposées par les élèves :

- on peut utiliser que C est une **différence de deux carrés** pour calculer sa valeur "à la main", ce qui donne :

$$C = 1 \times (28\,923\,761 + 28\,923\,760)$$

$$C = 2 \times 28\,923\,760 + 1 \text{ (qu'il est facile de calculer à la calculatrice...)}$$

$$C = 57\,847\,521.$$

- on peut poser  $x = 28\,923\,760$  d'où  $C = (x + 1)^2 - x^2$   
on retrouve  $C = 2x + 1$ .

2° On se propose maintenant de calculer :

$$D = 123\,456\,789^2 - 123\,456\,787 \times 123\,456\,791$$

a) Donner les résultats affichés par vos différentes calculatrices :

- en utilisant la touche  $\boxed{x^2}$

- en utilisant les touches  $\boxed{xy}$   $\boxed{2}$  ou  $\boxed{\wedge}$   $\boxed{2}$   
(suivant le type de la calculatrice)

Exemples de réponses rencontrées :

	$\boxed{x^2}$	$\boxed{xy}$ $\boxed{2}$
fx-180P	0	-1 000 000
fx-8500G	0	-20 000
T I 81	0	0

b) Quel est le "bon" résultat ?

Méthode : poser  $x = 123\,456\,789$

$$\text{d'où } D = x^2 - (x - 2)(x + 2)$$

$$D = 4 !!$$

**Thème de réflexion** : Certaines calculatrices tronquent ou arrondissent, voire l'un ou l'autre suivant les cas, .... Quelle en est l'influence ?

3° a) Calculer avec votre calculatrice le nombre suivant :

39

$$E_{10} = 10^{10} - \sqrt{10\,000\,000\,001^2 - 4 \times 10^{10}}$$

Réponses rencontrées avec la séquence suivante :

Ⓜ EE 10 - √ ( ( 1 EE 10 + 1 ) X<sup>2</sup> - 4 EE 10 ) =

f <sub>x</sub> -180P	f <sub>x</sub> -8500G	T I 81
2.1	1	1

Remarque : Sur les calculatrices à écran graphique, il est possible de taper 10 000 000 001 in extenso. On obtient alors 2 sur la f<sub>x</sub>-8500G !

b) Calculer avec votre calculatrice le nombre suivant :

$$E_{11} = 10^{11} - \sqrt{100\,000\,000\,001^2 - 4 \times 10^{11}}$$

Réponses rencontrées avec la séquence suivante :

Ⓜ EE 11 - √ ( ( 1 EE 11 + 1 ) X<sup>2</sup> - 4 EE 11 ) =

f <sub>x</sub> -180P	f <sub>x</sub> -8500G	T I 81
0	1.01	1

Remarque : En tapant 100 000 000 001 in extenso, on obtient alors 2.01 sur la f<sub>x</sub>-8500G .

c) Calculer avec votre calculatrice les nombres suivants :  
E<sub>12</sub>, E<sub>13</sub>, E<sub>14</sub> et E<sub>15</sub> .

Réponses rencontrées :

	f <sub>x</sub> -180P	f <sub>x</sub> -8500G	T I 81
E <sub>12</sub>	0	2.1	1
E <sub>13</sub>	0	0	2

Pour E<sub>14</sub> et E<sub>15</sub> ces trois calculatrices affichent 0.

d) Qu'en penser ?

Réponse :

$$E_n = 10^n - \sqrt{(10^n + 1)^2 - 4 \times 10^n}$$

$$E_n = 10^n - \sqrt{10^{2n} + 1 + 2 \times 10^n - 4 \times 10^n}$$

$$E_n = 10^n - \sqrt{(10^{2n} - 1)^2}$$

$$E_n = 10^n - 10^n + 1$$

$$E_n = 1 \text{ quelque soit la valeur de l'entier } n.$$

partie du programme concernée : puissances de dix et calcul sur les racines carrées.

40 4° Calculer à la calculatrice :

$$F = 9\,999\,999\,925^2 - 9\,999\,999\,875^2$$

$$G = 2\,599\,999\,999^2 - 2\,400\,000\,001^2$$

Réponses rencontrées :

**Pour une fois les résultats semblent concorder** . On obtient en effet pour :

F : 1. 1<sup>2</sup> (f<sub>x</sub>-180PA), 1.E+12 (f<sub>x</sub>-8500G) ou 1E12 (TI 81)

G : 9.9999999 1<sup>7</sup> (f<sub>x</sub>-180PA), 9.9999999E+17 (f<sub>x</sub>-8500G)  
ou 9.9999999E17 (TI 81).

Qu'en est-il vraiment ?

Stratégies proposées par les élèves :

- on peut utiliser que F et G sont des **différences de deux carrés** pour calculer leur valeur "à la main" (les calculs des sommes et différences se faisant cependant à la calculatrice), ce qui donne :

\* F = 50 x 19 999 999 800 = 999 999 990 000  
donc **affichage erroné pour les trois calculatrices.**

\* G = 199 999 998 x 5 000 000 000  
G = 999 999 990 x 10<sup>9</sup>  
G = 99 999 999 x 10<sup>10</sup>

donc **affichage exact pour les trois calculatrices.**

- "Voir" que F et G sont de la forme  $(a + b)^2 - (a - b)^2$  car :

$$F = (9\,999\,999\,900 + 25)^2 - (9\,999\,999\,900 - 25)^2$$

$$G = (25 \times 10^8 + 99\,999\,999)^2 - (25 \times 10^8 - 99\,999\,999)^2$$

Or  $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$  d'où :

$$F = 100 \times 9\,999\,999\,900 = 999\,999\,990\,000 = 99\,999\,999 \times 10^4$$

$$G = 100 \times 10^8 \times 99\,999\,999 = 99\,999\,999 \times 10^{10}.$$

5° Calculer avec votre calculatrice le nombre suivant :

$$H = \sqrt{10^{16} - (10^8 - 2 \times 10^{-8})^2}$$

Séquences possibles :

sur f<sub>x</sub>-180P : (1) EXP 16 - ( (1) EXP 8 - 2 X (1) EXP 8 +/- ) X<sup>2</sup> = √

sur T I 81 : √ ( (1) EE 16 - ( (1) EE 8 - 2 \* (1) EE (-) 8 ) ) X<sup>2</sup> )

On trouve 0 dans chaque cas ! Qu'en penser ?

Calcul à la main : posons  $R = 10^{16} - (10^8 - 2 \times 10^{-8})^2$

$$\text{On a } R = 10^{16} - (10^{16} - 4 \times 10^8 \times 10^{-8} + 4 \times 10^{-16})$$

$$R = 4 - 4 \times 10^{-16}$$

$$R = 4(1 - 10^{-16}) \text{ donc } H = 2\sqrt{1 - 10^{-16}} \approx 2$$

partie du programme concernée : puissances de dix, calcul sur les racines carrées et **notion d'ordre de grandeur** ( $1 - 10^{-16} \approx 1$ ).

## Comparer avec sa calculatrice.

On se propose de comparer les nombres suivants :

$$a = \frac{15\ 393}{7\ 238}, \quad b = \frac{2\ 830\ 113}{1\ 330\ 758} \quad \text{et} \quad c = \frac{4\ 373\ 341}{2\ 056\ 405}$$

Toutes les calculatrices affichant le même résultat **2.126692456** pour les trois nombres **a**, **b** et **c**, il est impossible de conclure .

Stratégie proposée : faire découvrir **les chiffres de garde** de sa calculatrice avec la séquence suivante, par exemple pour **a** :

$$15393 \boxed{+} 7238 \boxed{=} \boxed{-} 2.12 \boxed{=} \boxed{\times} 100 \boxed{=}$$

qui donne avec une fx-180PA: 0.66924564

avec une TI 81: 0.669245648

et avec une fx-8500G: 0.6692456 ce qui n'apporte aucune décimale supplémentaire. On pourra cependant obtenir des décimales supplémentaires avec la séquence :

$$\boxed{(} 15393 \boxed{+} 7238 \boxed{-} 2.12 \boxed{)} \boxed{\times} 100 \boxed{=}$$

qui donne alors: 0.6692456479 (d'où **a**  $\approx$  **2.126692456479**)

Sur ce modèle, on obtient :

	fx-180P	fx-8500G	TI 81
<b>b</b>	0.66924564	0.6692456479	0.669245648
<b>c</b>	0.6692456	0.6692456009	0.6692456009

On peut donc en déduire que **c est plus petit que a et b** mais on ne peut toujours pas conclure pour **a** et **b**.

**A ce moment de l'exercice, il peut être opportun de traduire algébriquement les séquences calculatrices précédentes afin de s'assurer du raisonnement utilisé. Par exemple :**  $0.6692456(009) < 0.66924564(79)$

se traduit par :  $(c - 2,12) \times 100 < (a - 2,12) \times 100$   
d'où :  $c - 2,12 < a - 2,12$   
puis :  $c < a$

partie du programme concernée : **ordre et opérations.**

Reste posée la question de comparer a et b.

Première idée proposée : utiliser la méthode des "produits en croix".

Cependant 15 393  $\times$  1 330 758 et 7 238  $\times$  2 830 113 aboutissent au même affichage : 2.048435789 $\times 10^{10}$ .

Il manque donc encore un chiffre que l'on peut obtenir avec la séquence suivante:  $\boxed{-}$  2  $\boxed{EE}$  10  $\boxed{=}$ .

On trouve pour les deux produits 484357894 d'où :

$$15\ 393 \times 1\ 330\ 758 = 7\ 238 \times 2\ 830\ 113 = 20\ 484\ 357\ 894$$

ce qui permet de conclure que **a = b**.

Deuxième idée proposée: examiner si l'on peut simplifier **a** ou/et **b**.

partie du programme concernée : **calculs dans Q**.

Après examen, **b** apparait comme la fraction la plus "sympathique" car son numérateur et son dénominateur sont des multiples de 9 d'où :

$$b = \frac{314\ 457}{147\ 862}$$

on peut alors utiliser la méthode des produits en croix sans problème!

Prolongement possible :

Dans "la foulée" on peut alors motiver les élèves à examiner si **a** est irréductible (ce qui apparait pour beaucoup une sage précaution dorénavant !).

$$\begin{aligned} \text{Or : } 7\ 238 &= 7\ 000 + 210 + 28 \\ \text{d'où : } 7\ 238 &= 7 \times (1\ 000 + 30 + 4) \\ 7\ 238 &= 7 \times 1\ 034 \end{aligned}$$

Reste alors à "voir" si 15 393 est divisible par 7.

$$\text{On trouve } 15\ 393 = 7 \times 2199. \text{ D'où : } a = \frac{2\ 199}{1\ 034}.$$

Autre exemple : (Exercice tiré de manuel de 2<sup>nde</sup> collection Terracher - Hachette )

$$\text{Les fractions } q_1 = \frac{489\ 451}{847\ 754} \text{ et } q_2 = \frac{2\ 314\ 756}{4\ 009\ 275} \text{ sont-elle égales ?}$$

Évidemment **non** car les "produits en croix" ont leurs chiffres des unités différents (5 et 4).

Il est par contre plus intéressant d'essayer de les comparer car quelque soit la "calculatrice 10 chiffres" utilisée, on obtient le même résultat pour **q1** et **q2**.

Remarques :

La recherche des chiffres de garde ne permet pas de conclure avec une calculatrice "ordinaire" du type par exemple fx-180P (on obtient 0.577 350 269 **06** aussi bien pour **q1** et **q2**).

Par contre cette méthode est suffisante avec une fx-8500G ou une TI 81, on obtient en effet : **q1**  $\approx$  0.577 350 269 **063 9**  
et **q2**  $\approx$  0.577 350 269 **063 6**

et donc **q1** > **q2**.

1° a) Calculer la valeur exacte de  $7^{12}$ .

En utilisant la touche puissance (  $\boxed{xy}$  ou  $\boxed{\wedge}$  ), on trouve  $1.38412872 \times 10^{10}$ .

On utilise le fait que  $7^{12} = 7 \times 7^{11}$ .  
Or  $7^{11} = 1977326743$  et  $43 \times 7 = 301$   
d'où  $7^{12} = 13\ 841\ 287\ 201$ .

On aurait pu chercher les chiffres de garde mais pour le calcul des puissances il faut s'en méfier !  
C'est le cas notamment avec la fx-180P où l'on trouve en effet  $13\ 841\ 287\ 199$ .

b) En déduire un ordre de grandeur de  $7^{120}$ .

$$7^{120} = (7^{12})^{10} \approx (1,38412872 \times 10^{10})^{10} \\ \approx (1,38412872)^{10} \times 10^{100}$$

Pour obtenir  $(1,38412872)^{10}$  rapidement à l'affichage, on peut, après avoir tapé  $7^{12}$ , utiliser la séquence suivante :

$$\boxed{+} \ 1 \ \boxed{EE} \ 10 \ \boxed{=} \ \boxed{xy} \ 10 \ \boxed{=}.$$

On trouve  $\approx 25.808621\dots$  d'où  $7^{120} \approx 25,8 \times 10^{100}$ .

c) Quelle est la plus grande puissance de 7 que peut afficher votre calculatrice ?

$7 < 25,8 < 7^2$  donc la plus grande puissance de 7 qu'il est possible d'obtenir sur une calculatrice de ce type est  $7^{118}$  (on trouve  $5.267\dots \times 10^{99}$ ).

2° D'après Rallye de la Réunion 1991:

On sait que  $3^3 = 27$  ; donc que  $3^3$  s'écrit avec 2 chiffres.

A la calculatrice on trouve  $30 \ \boxed{xy} \ 30 \ \boxed{=} \ 2.0589\dots \times 10^{44}$

donc  $30^{30}$  s'écrit avec 45 chiffres.

**Combien de chiffres faut-il pour écrire  $300^{300}$  ?**

$$300^{300} = (3 \times 100)^{300} = 3^{300} \times 100^{300} = 3^{300} \times 10^{600}$$

Comme  $3^{300}$  dépasse la capacité de nos calculatrices, on peut procéder ainsi :

$$3^{300} = (3^{150})^2 \text{ or } 3^{150} \approx 3,6998848\dots \times 10^{71}$$

d'où  $3^{300} \approx 13,689147\dots \times 10^{142}$  et donc  $3^{300}$  s'écrit avec 144 chiffres.

Donc  $300^{300}$  s'écrit avec  $(144 + 600)$  chiffres c'est-à-dire **744 chiffres !**



### Quelques attitudes observées :

Le fait que différents modèles de calculatrices puissent afficher des résultats différents pour un même calcul de départ et que leur calculatrice puisse afficher des résultats erronés interpelle un grand nombre d'élèves.

Passée la déception de ne pas avoir un outil à 100% fiable, les élèves se laissent ensuite prendre au "jeu" et l'on constate alors une motivation grandissante pour les calculs à la main ...! (Les exercices 4° et 5° de la rubrique "**De l'utilité des identités remarquables...**" ,où tous les résultats semblent concorder pourtant, achevant en principe de les convaincre !)

Ils admettent alors bien volontiers que leur calculatrice ne peut tout résoudre, qu'on ne peut se fier aveuglément à celle-ci, et sont "mûrs" pour se lancer dans des exercices du type de ceux traités dans les pages suivantes.

Bien que ne faisant pas partie des objectifs du programme (...*toute virtuosité technique est exclue...*), ces exercices ont cependant été retenus malgré leur aspect qui d'ordinaire attire peu les élèves.

En effet, sans doute "conditionnés" par les exercices précédents, on a au contraire pu constater chez un bon nombre d'entre-eux une grande motivation à effectuer ces calculs à la main (désir de surpasser sa calculatrice...?).

**Il va donc sans dire qu'il ne serait pas souhaitable et même déraisonnable de les traiter pour eux-même sans lien avec les parties précédentes.**

I. Ranger dans l'ordre croissant les trois nombres qui suivent :

$$A = 999\ 999\ 999\ 999 \times 999\ 999\ 999\ 999$$

$$B = 999\ 999 \times 999\ 999 \times 999\ 999 \times 999\ 999$$

$$C = 999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999 \times 999\ 999$$

partie du programme concernée : puissances de dix, identités remarquables, ordre.

exemple de solution trouvée par un élève :

$$A = (10^{12} - 1)^2$$

$$A = 10^{24} - 2 \times 10^{12} + 1$$

$$B = (10^6 - 1)^2 \times (10^6 - 1)^2$$

$$B = 10^{24} - 4 \times 10^{18} + 6 \times 10^{12} - 4 \times 10^6 + 1$$

$$C = (10^{18} - 1) \times (10^6 - 1)$$

$$C = 10^{24} - 10^{18} - 10^6 + 1$$

$$A - C = 10^{18} - 2 \times 10^{12} + 10^6$$

$$A - C = 10^6 \times (10^{12} - 2 \times 10^6 + 1)$$

$$A - C = 10^6 \times (10^6 - 1)^2$$

donc  $A - C > 0$  d'où  $A > C$  c'est-à-dire  $C < A$ .

$$C - B = 3 \times 10^{18} - 6 \times 10^{12} + 3 \times 10^6$$

$$C - B = 3 \times 10^6 \times (10^6 - 1)^2$$

donc  $C - B > 0$  d'où  $C > B$  c'est-à-dire  $B < C$ .

Conclusion :  $B < C < A$ .

autre méthode que l'on peut suggérer :

Poser  $\alpha = 999\ 999$  d'où :

$$A = (\alpha \times 10^6 + \alpha)^2 = \alpha^2 \times (10^6 + 1)^2 = \alpha^2 \times (10^{12} + 1 + 2 \times 10^6)$$

$$B = \alpha^4 = \alpha^2 \times (10^6 - 1)^2 = \alpha^2 \times (10^{12} + 1 - 2 \times 10^6)$$

$$C = (\alpha \times 10^{12} + \alpha \times 10^6 + \alpha) \times \alpha = \alpha^2 \times (10^{12} + 1 + 10^6)$$

or  $-2 \times 10^6 < 10^6 < 2 \times 10^6$  car  $-2 < 1 < 2$

d'où  $B < C < A$ .

46 II. Calculer la valeur exacte du produit suivant :

$$P = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \times (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \times (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}) \times (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ \times (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}) \times (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \times (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}) \times (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})$$

Quelle que soit la calculatrice "dix chiffres" utilisée, on trouve -71.

Trouver un nombre entier surprend plus d'un élève et ils se demandent alors si leur calculatrice ne leur a pas joué, à nouveau, un mauvais tour...!

D'où une certaine curiosité suivie d'une motivation certaine pour se lancer dans un calcul manuel.

Cependant alors que certains élèves se lancent spontanément seul dans le calcul, d'autres moins à l'aise ou moins courageux songent à se répartir la tâche ! Il est alors intéressant de profiter de cette opportunité pour leur suggérer de faire cette répartition le plus "astucieusement" possible.

Les élèves les plus avancés arrivent assez vite à effectuer de "bons regroupements". Pour les autres un coup de main est souvent nécessaire sous peine de les voir céder au découragement !

Pour plus de facilité on note, dans l'ordre, A, B, C, D, E, F, G et H les huit facteurs constituant le produit P.

Solution trouvée par un élève :

$$\begin{aligned} \mathbf{A \times F} &= [(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{5})] \times [(1 - \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5})] \\ &= 1 - 2 + (1 + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} + \sqrt{5})(1 - \sqrt{2}) + 3 - 5 \\ &= -3 + 2 \times (\sqrt{3} - \sqrt{10}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E \times G} = -3 - 2 \times (\sqrt{3} - \sqrt{10})$$

$$\mathbf{B \times D} = -3 + 2 \times (\sqrt{3} + \sqrt{10})$$

$$\mathbf{C \times H} = -3 - 2 \times (\sqrt{3} + \sqrt{10})$$

$$\text{puis } \mathbf{AF \times EG} = -43 + 8\sqrt{30} \quad \text{et} \quad \mathbf{BD \times CH} = -43 - 8\sqrt{30}$$

$$\text{d'où } \mathbf{P} = (-43)^2 - 64 \times 30 = 1\,849 - 1\,920 = -71$$

Solution plus "élégante" :  $\mathbf{P = (AG \times CD) \times (BH \times EF)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A \times G} &= [(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{5})] \times [(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} + \sqrt{5})] \\ &= (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \\ &= -5 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{15} \end{aligned}$$

$$\mathbf{C \times D} = -5 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{15}$$

$$\text{d'où } \mathbf{AG \times CD} = (-5 + 2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{15})^2 = -27 - 20\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{puis } \mathbf{BH \times EF} &= (-5 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{15})(-5 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{15}) \\ &= (-5 - 2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{15})^2 = -27 + 20\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \mathbf{P} = (-27 - 20\sqrt{2})(-27 + 20\sqrt{2}) = 729 - 800 = -71.$$

1° Rendre irréductible la fraction suivante :

$$A = \frac{7\ 036\ 789^2 - 7\ 035\ 000^2 - 1\ 789^2}{7\ 036\ 989^2 - 7\ 035\ 000^2 - 1\ 989^2}$$

Après s'être "réconciliés" avec leurs calculatrices lors de l'exercice précédent, les élèves conviennent assez vite qu'elles ne sauraient leur être d'un grand secours étant donnée la question posée.

Aussi se lancent-ils volontiers dans le calcul manuel. Après avoir remis "dans le droit chemin" leurs camarades tentés par des simplifications abusives (par  $7\ 035\ 000^2$  par exemple...) les élèves trouvent assez naturellement différentes stratégies utilisant des identités remarquables.

Solutions rencontrées :

**a) solution la plus "tentante" :**

$$A = \frac{(7\ 036\ 789 - 7\ 035\ 000)(7\ 036\ 789 + 7\ 035\ 000) - 1\ 789^2}{(7\ 036\ 989 - 7\ 035\ 000)(7\ 036\ 989 + 7\ 035\ 000) - 1\ 989^2}$$

$$A = \frac{1\ 789 \times 14\ 071\ 789 - 1\ 789^2}{1\ 989 \times 14\ 071\ 989 - 1\ 989^2}$$

...les plus observateurs remarqueront, à ne pas en douter, les dates historiques du bicentenaire de la Révolution Française ...!

$$A = \frac{1\ 789 \times 14\ 070\ 000}{1\ 989 \times 14\ 070\ 000} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{1\ 789}{1\ 989}$$

**b) solution jugée plus "efficace" :**

$$A = \frac{(7\ 035\ 000 + 1\ 789)^2 - 7\ 035\ 000^2 - 1\ 789^2}{(7\ 035\ 000 + 1\ 989)^2 - 7\ 035\ 000^2 - 1\ 989^2}$$

$$A = \frac{2 \times 7\ 035\ 000 \times 1\ 789}{2 \times 7\ 035\ 000 \times 1\ 989} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{1\ 789}{1\ 989}$$

2° Exercice du même type avec :

$$B = \frac{1\ 000\ 894 \times 1\ 000\ 896 - 999\ 105 \times 999\ 107}{1\ 000\ 994 \times 1\ 000\ 996 - 999\ 005 \times 999\ 007}$$

Cet exercice est plus difficile car les identités sont "masquées".

$$B = \frac{(1\ 000\ 895 - 1)(1\ 000\ 895 + 1) - (999\ 106 - 1)(999\ 106 + 1)}{(1\ 000\ 995 - 1)(1\ 000\ 995 + 1) - (999\ 006 - 1)(999\ 006 + 1)}$$

$$B = \frac{1\ 000\ 895^2 - 999\ 106^2}{1\ 000\ 995^2 - 999\ 006^2} = \dots = \frac{1\ 789 \times 2\ 000\ 001}{1\ 989 \times 2\ 000\ 001}$$


$$\text{d'où} \quad B = \frac{1\ 789}{1\ 989}$$

Rubrique du programme concernée: Statistique

**Prérequis:** Savoir calculer une moyenne et un écart-type


**Contenu:** Calcul d'une "variance négative"

**Objectif:** Attention aux valeurs approchées!  
(Exercice original)

 Dans une classe de 37 élèves, on a relevé les moyennes suivantes:

notes	6	7	8	9	10	11	12
effectifs	1	2	3	9	15	5	2

Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

 Dans un groupe de 122 personnes, on a relevé les tailles suivantes:

tailles[cm]	[155-160[	[160-165[	[165-170[	[170-175[
effectifs	5	12	21	39

tailles[cm]	[175-180[	[180-185[	[185-190[
effectifs	31	11	3

Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

### Solution:

1. On trouve en utilisant les fonctions statistiques d'une calculatrice:

$$\bar{x} \approx 9,567\ 567 \dots \quad \sigma^2 \approx 1,650\ 840\ 029$$

Si on calcule la variance (avec la formule "moyenne des carrés moins carré de la moyenne") en arrondissant la moyenne à 9,6:

$$\sigma^2 \approx 1,029\ 189$$

Et si on arrondit la moyenne à 10:  $\sigma^2 \approx -6,810\ 810 \dots$

2. Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on trouve:

$$\bar{x} \approx 172,58 \quad \sigma^2 \approx 44,25$$

En arrondissant la moyenne à 172,6:  $\sigma^2 \approx 38,03$

Et si on arrondit la moyenne à 173:  $\sigma^2 \approx -100,209$

### Commentaire:

L'intérêt de l'activité est dans la distinction entre la moyenne exacte qu'on réutilise dans le calcul de la variance et la valeur approchée "raisonnable" qu'on donne comme solution. Une telle situation peut se produire dans une série statistique de faible dispersion, donc quand l'écart-type est petit (par exemple contrôle de production dans l'industrie), lorsque la moyenne peut être arrondie assez largement par excès (par exemple de 9,6 à 10: la différence des carrés est alors importante, ici 7,84).

**Expérimentation:**

La maladresse est facile à commettre... Et les élèves obtiennent en toute bonne conscience des variances négatives en appliquant correctement des formules justes... avec des données justes, arrondies correctement pour être présentées, trop pour être réutilisées.

## MODULES Seconde

### 7. Polyèdres de Platon

IREM Strasbourg

Contenu -Construction des polyèdres de Platon

Objectifs - manipuler des solides  
 - méthodologie: découverte de la définition des polyèdres de Platon (condition nécessaire et suffisante)  
 - Réflexion sur les angles

Lien avec le programme: Géométrie dans l'espace.  
 Il ne s'agit pas de représenter mais de fabriquer des solides .

Prérequis: Géométrie du collège

Conseil : Prévoir du matériel (papier dessin-ciseaux -colle)

On peut faire remarquer que même les élèves en difficulté réussissent.

Bibliographie Activités en première IREM de Strasbourg  
 Pour une mathématique vivante en seconde " "  
 La naissance de la science T.2 " "  
 La Grèce présocratique  
 André PICHOT Folio essais

#### VERSION 1

Cette activité a été imaginée par des étudiants en première année d'I.U.F.M. dans le cadre de leur préparation à l'oral du CAPES.

Jung Agnès, Mahler Adrien et Verteegh Serge

Ils sont intervenus dans une classe de seconde au mois de décembre durant une séquence de trois heures. (Il est tout à fait possible de n'y consacrer qu'une heure et demi et les élèves terminent la fabrication des solides chez eux.)

#### Un peu d'histoire extrait de André Pichot

p178 (...) Il est très probable que ces polyèdres ont été connus assez tôt. Vraisemblablement de la façon suivante. Les pythagoriciens avaient remarqué que, dans un plan, un point ne peut être entouré de polygones réguliers que de 6 triangles équilatéraux, 4 carrés ou 3 hexagones. Comme un sommet de polyèdre est l'intersection d'au moins trois polygones, il s'ensuit que, premièrement, les hexagones sont éliminés car trois hexagones autour d'un point forment un plan et non un sommet, deuxièmement un sommet ne peut être entouré que de trois carrés (car 4 forment un plan), troisièmement un sommet peut être entouré de 3, 4 ou 5 triangles équilatéraux (car six forment un plan). (...)

Il reste le cas du dodécaèdre, ses douze pentagones et ses vingt sommets. En général, il occupe une position particulière dans la littérature (par exemple, une tradition veut que ce soit parce qu'il avait révélé l'inscriptibilité ou la construction du dodécaèdre qu'Hippasos ait péri, ou encore dans "le Timée" -qui est d'inspiration pythagoritienne- Platon assimile les quatre éléments -feu, air, eau, terre- à quatre des polyèdres réguliers en réservant un rôle particulier au dodécaèdre). Ce qu'on peut comprendre par le fait que la découverte et la construction du dodécaèdre ont été atteintes d'une manière autre que celle utilisée pour les tétraèdres, cubes, octaèdre et icosaèdre. On peut difficilement préciser laquelle.(...)

Remarque : Il faut être honnête: on ne peut pas prouver aux élèves de seconde que l'icosaèdre et le dodécaèdre existent vraiment.

## Découverte de la définition d'un polyèdre de Platon

Les étudiants présentent aux élèves différents solides (voir annexe 1) qu'ils ont fabriqués : Cône, cylindre, Pyramides, prismes etc... et leur demandent de les regrouper comme ils le veulent :  
 Les élèves proposent de regrouper le cône avec le cylindre car ce sont des solides de révolution et tous les autres qui n'en sont pas.  
 Les élèves remarquent que certains solides "rentrent" un élève se souvient des mots "convexe et concave"

Définition : un solide est convexe s'il est entièrement situé d'un même côté de chacune de ses faces.

Parmi les solides convexes certains ont leurs faces faites de polygones identiques d'autres non.

Les étudiants proposent aux élèves de compter pour un sommet donné le nombre de faces qui le contiennent. On élimine le triacontaèdre, c'est en effet le seul où en un sommet il n'arrive pas toujours le même nombre de faces. (On pourra consulter les annexes 2 et 3 pour la construction du triacontaèdre.)

Les solides qui restent ont pour faces des polygones réguliers.

Définition : Un polygone régulier a ses côtés égaux et est inscriptible dans un cercle.

Les étudiants définissent ce qu'on appelle un polyèdre de Platon:

- il est convexe
- ses faces sont des polygones réguliers identiques
- chaque sommet appartient à un même nombre de faces

L'énoncé qui suit (p. 4 ) est distribué aux élèves.

### Déroulement de la séance.

Les élèves savent construire le triangle équilatéral et l'hexagone à la règle et au compas, pour le pentagone ils utilisent le rapporteur.  
 Les élèves se mettent par groupes de deux, trois ou quatre. Le rythme des groupes est très différent, rares sont ceux qui découpent effectivement trois triangles : "Comme après on doit les coller!"  
 Le tétraèdre et l'octaèdre ne posent pas de problème, pour le cube on passe directement par le patron après lecture de l'énoncé.  
 Pour compter les faces de l'icosaèdre un élève les a comptées en regardant le plafond alors qu'il avait l'objet devant les yeux. Les autres ont marqué les faces lors du comptage.

### VERSION 2

Cette version a été testée en classe de seconde en travaux dirigés en une séance d'une heure et demi.

Les élèves sont en groupes de trois ou quatre .

La définition d'un polyèdre de Platon est écrite au tableau.

On demande aux élèves de les trouver tous.



deux méthodes sont possibles



Construction: les élèves  
fabriquent les patrons

Réflexion

Expérimentation: Il y a huit groupes de 4 élèves, 7 choisissent les constructions et le dernier, appelons le A (il est constitué de bons élèves), choisit de réfléchir sans construire. (Un certain orgueil les anime)

Le tétraèdre est trouvé en premier suivi très vite du cube.

5 groupes découvrent l'octaèdre et c'est là que les difficultés commencent.

La plupart des groupes tracent des hexagones et tentent de fabriquer un solide. Le groupe A constate l'impossibilité de construire un polyèdre de Platon à partir d'un hexagone et ils expliquent pourquoi.

Pendant ce temps un autre groupe découvre l'icosaèdre: Un des élèves a eu l'idée d'enlever un triangle équilatéral à l'hexagone et de fabriquer ainsi le début d'un solide.

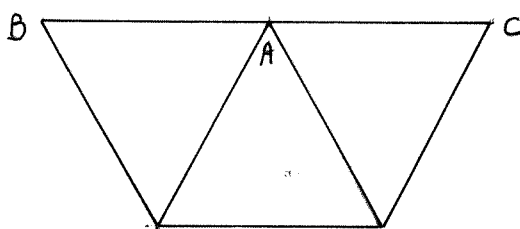
Un autre groupe découvre l'icosaèdre par une méthode fautive: Ils réunissent 20 tétraèdres.

Et c'est en travaillant sur les angles que deux groupes dont le A découvrent le dodécaèdre.

#### Prolongements possibles

- Comment aurait-on pu déterminer les polyèdres de Platon avec méthode?
- Calcul d'aires et de volumes (voir annexe 4)
- Pourquoi le raisonnement avec les 20 tétraèdres était-il faux?
- Qu'obtient-on en joignant le centre des faces d'un polyèdre de Platon?

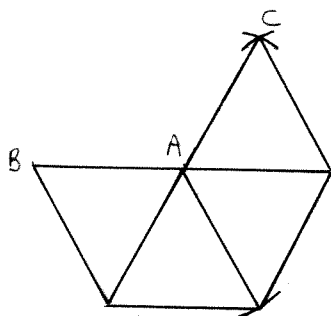
- I) Découpez trois triangles équilatéraux de 6cm de côté. Collez les triangles afin d'obtenir la figure ci dessous:



Faites coïncider les côtés  $[AB]$  et  $[AC]$  puis collez les. Avec quelle figure peut-on fermer l'objet obtenu? Cet objet s'appelle un tétraèdre régulier.

Combien de faces contiennent le point A? Et pour les autres sommets? Est-ce un polyèdre de Platon?

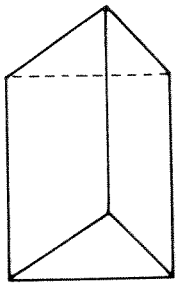
- II) Recommencez la manipulation avec 4 triangles équilatéraux que vous placerez et collerez comme l'indique le schéma suivant:



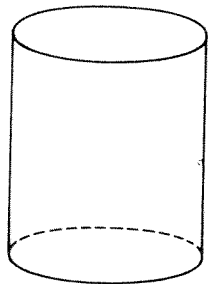
Faites coïncider les côtés  $[AB]$  et  $[AC]$ . Combien y a-t-il de faces qui contiennent le sommet A? Combien de faces doit-on rajouter en B pour obtenir un polyèdre de Platon? Le solide ainsi obtenu est appelé "octaèdre régulier".

- III) Recommencez la manipulation avec 5 triangles équilatéraux réunis autour de A. Fermez le solide pour obtenir un polyèdre de Platon. Combien a-t-il de faces? C'est un icosaèdre régulier. Peut-on continuer? Pourquoi?
- IV) Découper trois carrés de 6cm de côté, puis comme précédemment les réunir autour d'un même sommet A. Coller entre eux les deux côtés libres partant de A. Compléter pour obtenir un polyèdre de Platon. Comment appelle-t-on l'objet obtenu? Peut-on recommencer avec 4 carrés réunis autour de A? Pourquoi?
- V) Construire plusieurs pentagones réguliers. Comment faites vous? En vous inspirant des questions précédentes construire un polyèdre de Platon. On l'appelle un dodécaèdre régulier. Que se passe-t-il si on utilise des faces hexagonales ?
- VI) Conclusion: Combien y a-t-il de polyèdres de Platon? Faites un patron de chacun d'entre eux et nommez les .

QUELQUES UNS DES SOLIDES PRESENTES AUX ELEVES

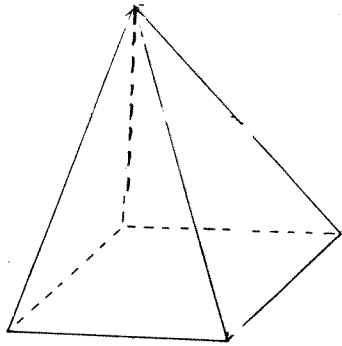
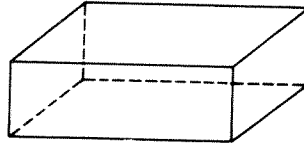


PRISME A BASE  
TRIANGULAIRE

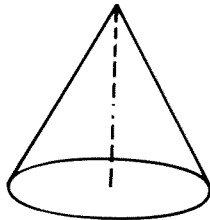


CYLINDRE

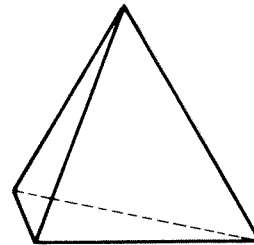
Parallépipède rectangle



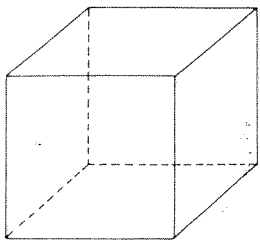
PYRAMIDE



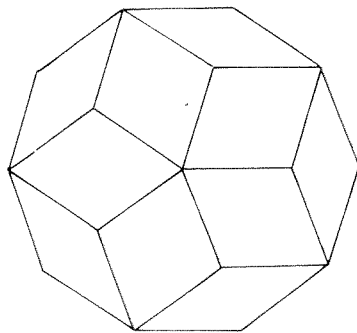
CONE



Tétraèdre

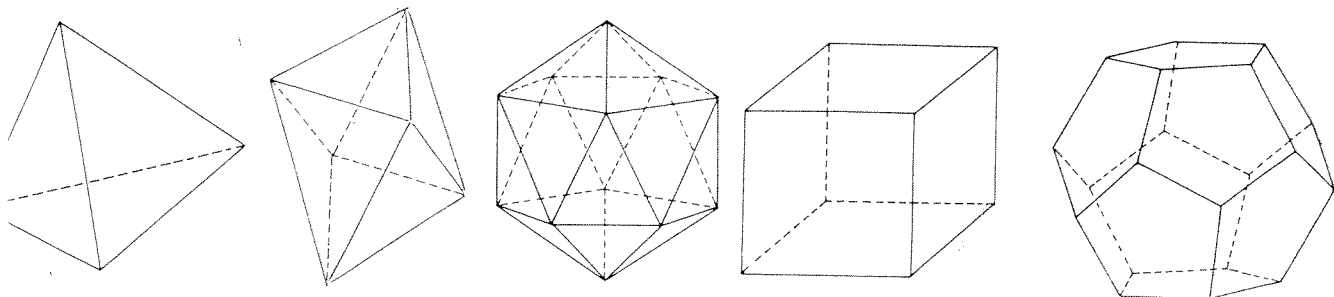


CUBE



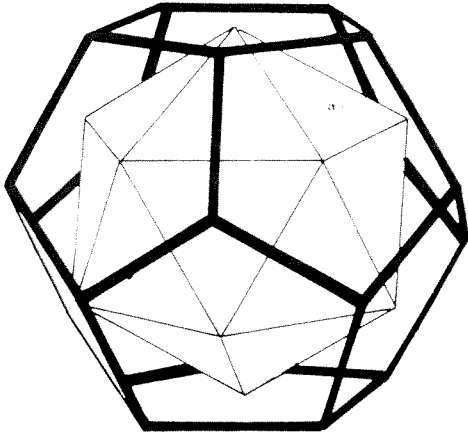
TRIACONTAEDRE

*Polyèdres de Platon*



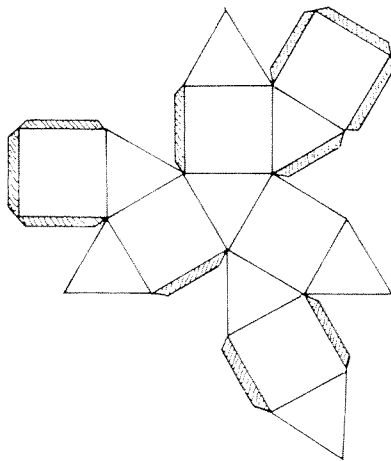
**Description de polyèdres :**

30

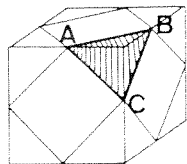


Observer, décrire, commenter.

31



- a) Redessiner sur carton, en l'agrandissant, ce patron fait de carrés et de triangles équilatéraux.
- b) Réaliser le solide correspondant (il s'appelle cube octaèdre d'Archimède).
- c) Fabriquer maintenant ce solide dans un cube de polystyrène, en sciant chaque coin du cube : il faut passer par trois milieux comme indiqué sur cette figure.

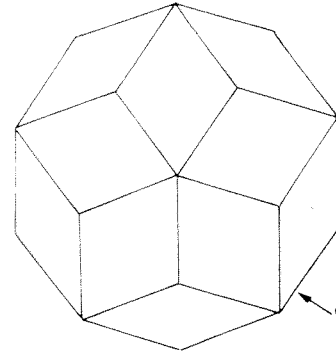


- d) Établir la fiche d'identité du cube octaèdre d'Archimède (voir exercice 7,b).

32

- a) • Tracer un triangle ABC rectangle en B tel que la longueur du côté BC soit le double de celle du côté AB.
- Construire un losange ADEC, tel que A, B et D soient alignés.

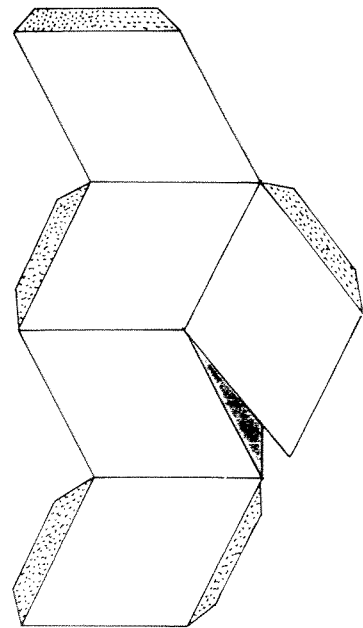
Un tel losange constitue l'unité de base d'un solide appelé triacontaèdre, constitué de 30 losanges parfaitement identiques.



Triacontaèdre

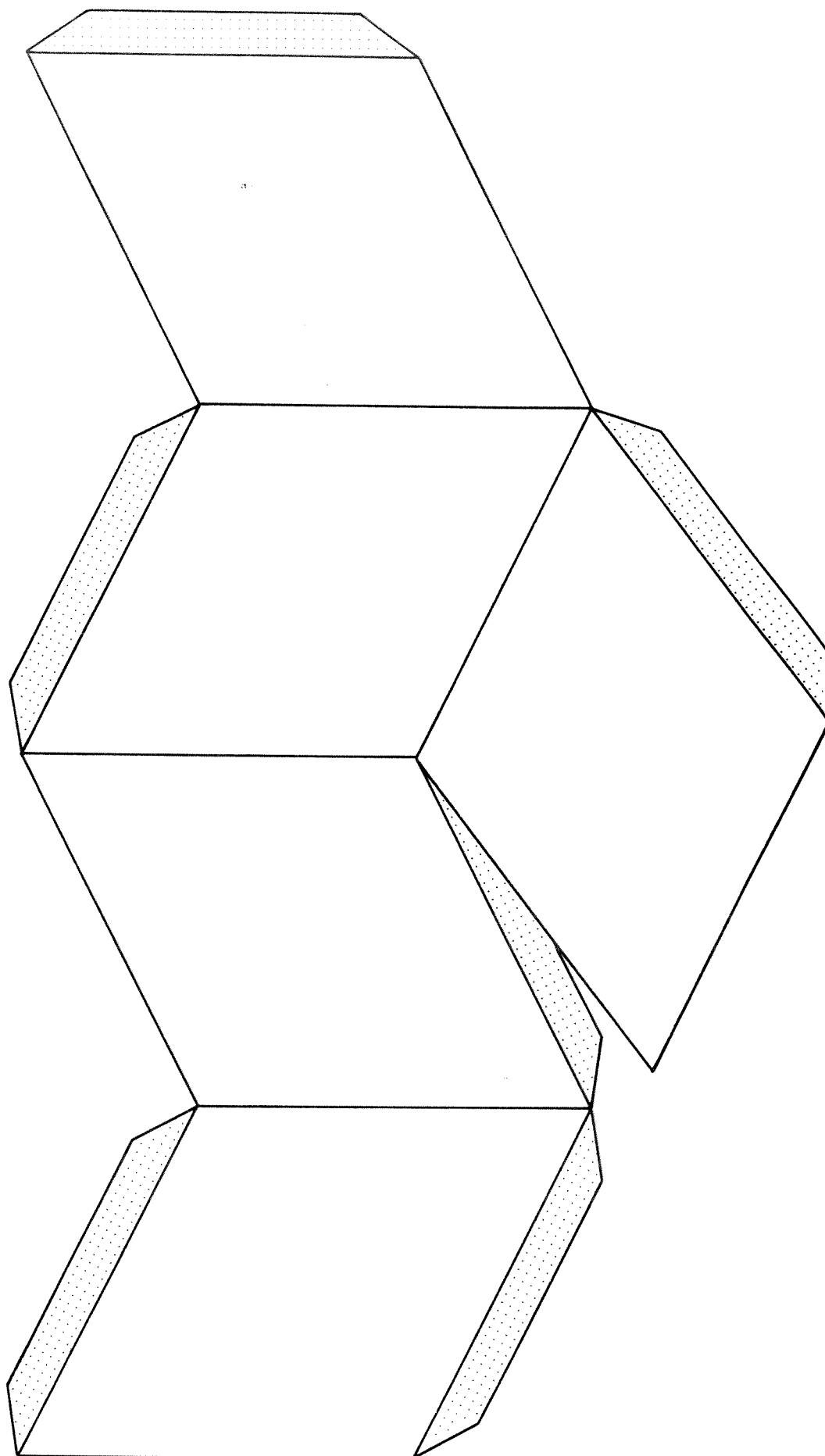
élément de base

- b) Pour le construire, il faut :
  - réaliser un élément de base fait de 5 losanges identiques comme ci-dessous :



- en collant le losange coloré sur la languette rouge.
- répéter cette opération 6 fois.
- accoler les 6 éléments de base.

- c) Quelle est la fiche d'identité du triacontaèdre ? (voir exercice 7,b)



Prolongement (3 heures)

Calcul du volume du tétraèdre et de l'octaèdre (réguliers)

Objectif: introduire l'orthogonalité dans l'espace

Énoncé: Calculer le volume d'un tétraèdre régulier de côté  $a$

Les élèves ont vu, en troisième, la formule donnant le volume d'une pyramide, il leur faut donc d'abord identifier l'objet tétraèdre.

La base étant un triangle équilatéral, ils devraient pouvoir aisément trouver son aire.

Problème: Comment trouver la hauteur de la pyramide?

Quel est le pied de la perpendiculaire au plan BCD issue de A?

Conjecture: le centre du triangle

Comment le prouver?

Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

On renverse la trousse sur la table un stylo fera office de perpendiculaire au plan de la table et les autres de droites tracées dans le plan de la table.

Comment montrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan?

Suffit-il de montrer qu'elle est perpendiculaire à une droite de ce plan?

Non, on construit des perpendiculaires en géométrie plane!

Alors à deux droites?

Oui à condition qu'elles ne soient pas parallèles.

Pour montrer que AO est perpendiculaire au plan BCD il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Indication Tracer (AI)

Le passage qui suit est un passage difficile pour les élèves mais ils finissent par écrire (BC) perpendiculaire à (AI) et (BC) perpendiculaire à (ID) donc (BC) perpendiculaire au plan AID et donc (BC) orthogonale à toutes les droites de ce plan donc à (AO).

Un élève demande: "Comment est-on sûr que (AO) est une droite du plan AID?"  
A est dans le plan, la droite (ID) aussi et O est un point de (ID) donc O est un point du plan AID et comme A et O sont deux points de AID la droite AO est dans le plan.

De même on démontre que AO est orthogonale à CD. La droite AO est donc bien perpendiculaire au plan BCD il s'agit donc bien de la hauteur du tétraèdre.

Les élèves calculent la longueur de cette hauteur à l'aide du théorème de Pythagore et finalement calculent le volume du tétraèdre.

Deuxième partie:

Comment, à partir d'un cube de côté  $c$ , obtenir un tétraèdre régulier dont les sommets sont des sommets du cube?

Après discussion (10mn) les élèves trouvent que les arêtes du tétraèdre sont obtenues à partir des diagonales des faces du cube.

Calculer son volume à partir de celui du cube.

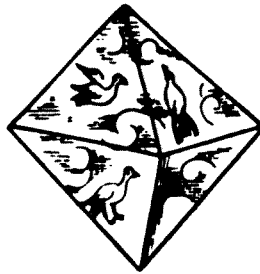
Les élèves voient assez vite qu'il suffit d'enlever trois tétraèdres du cube et mettent un peu plus longtemps pour voir qu'en fait il faut en enlever quatre! Ils ne voyaient pas celui qui était derrière.

Pour ces tétraèdres pas trop de problème pour trouver la hauteur intéressante et pour calculer leur volume. On calcule le volume du tétraèdre régulier puis après avoir exprimé la longueur de l'arête en fonction de  $c$  on remarque que l'on trouve le même résultat qu'avant!

12.5 POLYTOPES RÉGULIERS : DÉFINITION, EXEMPLES

12.5.5.7

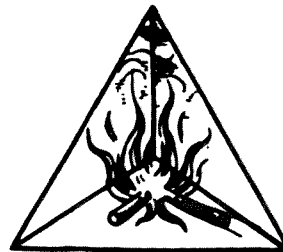
Pour ce qui est de l'homme, on a découvert un dodécaèdre en stéatite, de civilisation étrusque et d'au moins 500 B.C. ; on possède aussi une paire de dés icosaédriques, dynastie des Ptolémée, visible au British Museum, Londres. Les grecs ont philosophé sur les cinq polyèdres réguliers, voir, outre le « Timée » de Platon, des références précises dans [CR 2], p. 13, [FT 2], p. 120-121 et les figures 12.5.5.8.



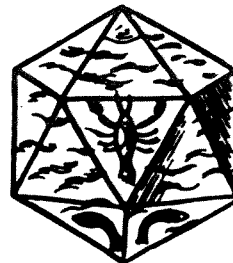
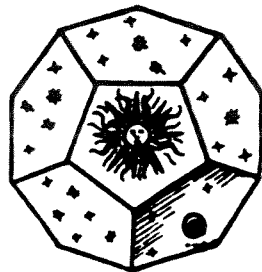
OCTAÉDRON  
*Air*



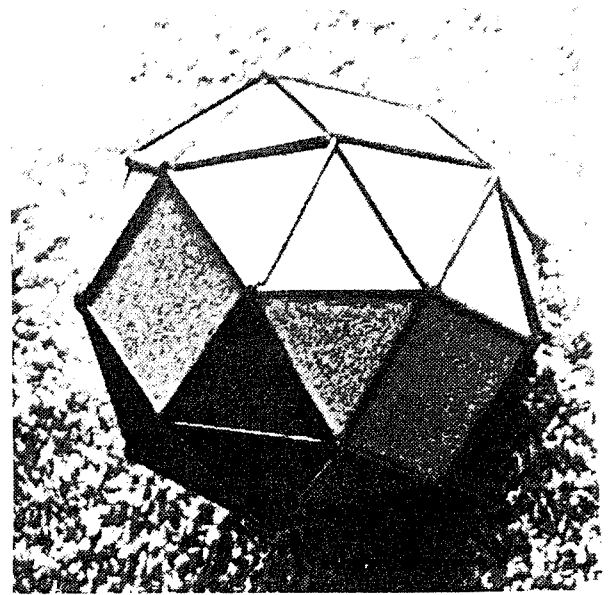
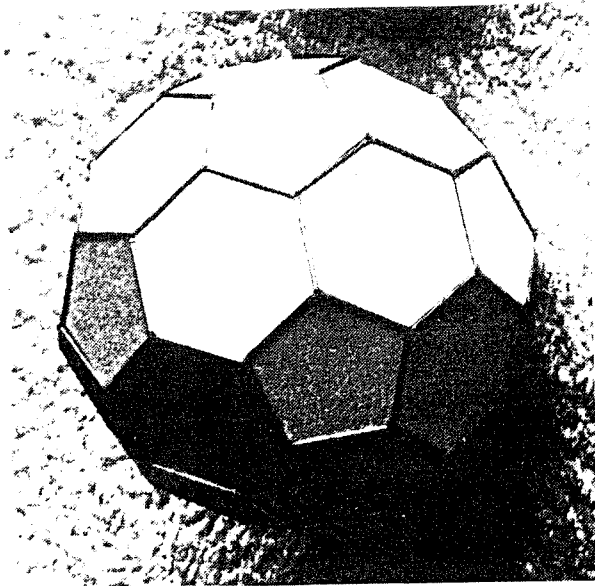
CUBE  
*Terre*



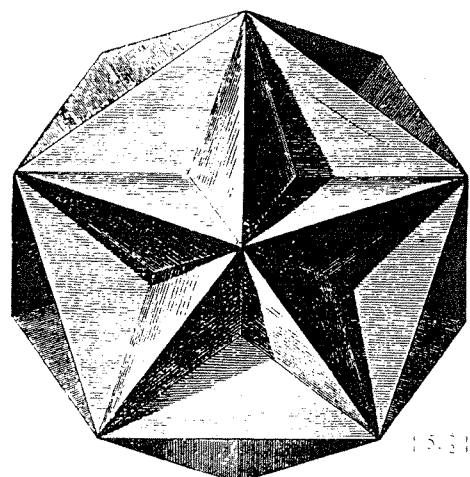
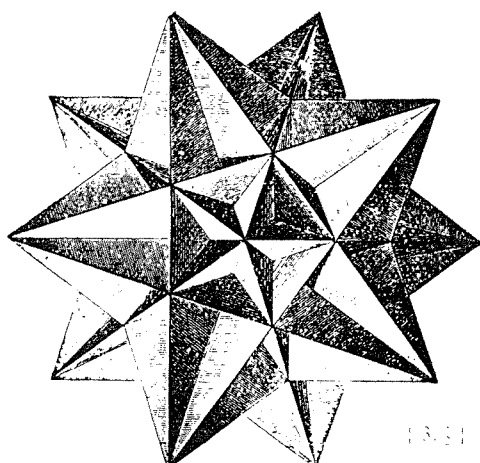
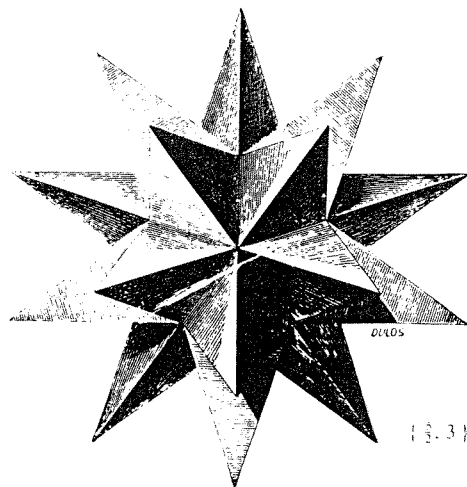
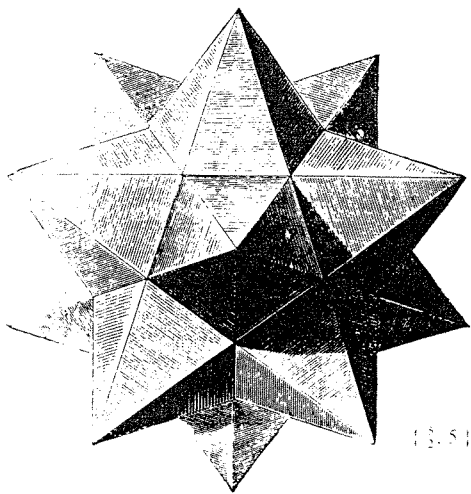
TÉTRAÉDRON  
*Feu*



Exemples de polyèdres convexes dont les faces sont des polygones réguliers non identiques :



12.6.10.5 Il existe des *polyèdres réguliers non convexes*, dit *étoilés* ; ils sont tous connus (voir [CR 2], chapitre 14) ; voici les quatre de la dimension 3 :





## 8. INTERSECTIONS DE PLANS

**1. Contenu :** Construction à la règle de points sur une figure correspondant à une situation spatiale en utilisant uniquement les 3 théorèmes de géométrie dans l'espace ci-dessous.

*Théorème A* . — Par 2 points distincts (*resp.* 3 points non alignés) passe une et une seule droite (*resp.* un et un seul plan).

*Théorème B* . — Si un plan contient 2 points distincts, il contient tous les points de la droite qui passe par ces deux points.

*Théorème C* . — Si deux plans ont un point commun, soit ils sont confondus, soit ils se coupent suivant une droite.

La partie A consiste à faire prendre conscience aux élèves du problème lié à l'intersection de droites dans l'espace (sans aucune théorie sur les projections).

La partie B est celle qui vise à répondre à nos objectifs. Il s'agit dans tous les cas de tracer l'intersection d'un plan avec une figure formée de plans ( tétraèdre, pyramide etc...)

**2. Objectifs :** Le but des activités proposées est de montrer l'utilité du raisonnement déductif dans des cas où il n'est pas facile de deviner les résultats ou de les voir sur une figure. Dans ces situations le raisonnement déductif peut se révéler aussi utile et puissant qu'un instrument d'optique.

Pour faire découvrir cette utilité, la géométrie dans l'espace se révèle être un champ idéal. Notre but n'est pas d'abord de faire de la géométrie. Il est de faire découvrir la puissance du raisonnement déductif.

Pour cela nous avons choisi quelques situations élémentaires. La mathématisation de ces situations, c'est-à-dire le choix de briques élémentaires à partir desquelles on va raisonner permet d'obtenir des résultats qui semblent difficiles au premier abord (voir par exemple le dernier exercice).

L'entrée dans le raisonnement déductif est plus souvent décourageante qu'atrayante, car elle est souvent liée à des exercices longs et fastidieux de rédaction. L'intérêt des problèmes proposés ici est de permettre une mise en oeuvre plus rapide du raisonnement. Une procédure simple peut en effet être utilisée pour visualiser les points coplanaires de la figure : **elle consiste à dessiner les points d'un plan avec une même couleur** ; (Pour la mise en oeuvre de cette procédure voir "*une suggestion*" à la fin des exercices 1 et 2). On peut donc demander aux élèves de justifier oralement la couleur assignée à un point de figure par l'utilisation de l'un des théorèmes proposés, quitte à demander une rédaction explicite de la solution dans un ou deux exemples.

Nous nous sommes volontairement restreints à des situations où le parallélisme n'intervient pas. **Dans tous les exercices la figure fait partie de l'énoncé.** Aussi faut-il veiller à fournir des figures aux élèves pour éviter les situations limites

où certaines droites sont parallèles (ou se coupent en dehors de la feuille de papier). Il serait bon de donner des figures plus grandes que celles qui accompagnent ce document.

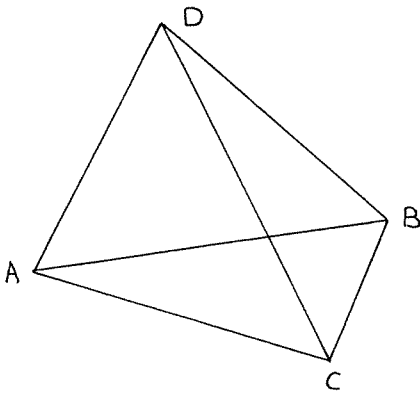
### 3. Bibliographie :

*Dessiner et comprendre l'espace*, IREM de Lorraine (1988).  
*Mathématiques 2<sup>e</sup>* par l'IREM de Strasbourg, ISTR (1981).

### 4. Progression pouvant être proposée à des élèves.

**A. Prendre conscience du fait suivant :** Si deux droites se coupent sur la figure, elles ne se coupent pas nécessairement dans l'espace, d'où la nécessité de décrire la situation avec des mots.

#### Exercice 1. —



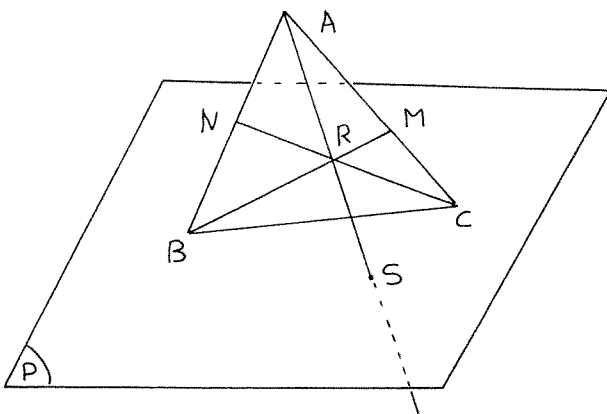
Description de la figure : Cette figure représente 4 points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $D$  deux à deux distincts de l'espace ainsi que les segments qui les joignent.

- 1) On suppose que les droites  $AB$  et  $DC$  se coupent (dans l'espace) en un point  $I$ . Montrer que  $D$  appartient au plan contenant  $A$ ,  $B$  et  $C$ . (Préciser les théorèmes utilisés).
- 2) On suppose maintenant que  $D$  n'appartient pas au plan contenant  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Que peut-on dire des droites  $AB$  et  $DC$  ? Examiner tous les couples de droites de la figure.

On pourra introduire ici l'utilisation des pointillés.

*Une suggestion.* — On pourra dès cet exercice introduire la pratique du coloriage des points coplanaires. Dans la première question on peut demander de colorier tous les points qui appartiennent au plan contenant  $A$ ,  $B$  et  $C$  (voir Th. 8) en rouge.

#### Exercice 2. —



Description de la figure : Cette figure représente un plan  $P$ , deux points  $B$  et  $C$  qui lui appartiennent et un point  $A$  qui ne lui appartient pas. Les points  $M$  et  $N$  sont choisis sur les segments  $AC$  et  $AB$ . Les droites  $BM$  et  $CN$  se coupent en  $R$ . La droite  $AR$  coupe le plan  $P$  en  $S$ .

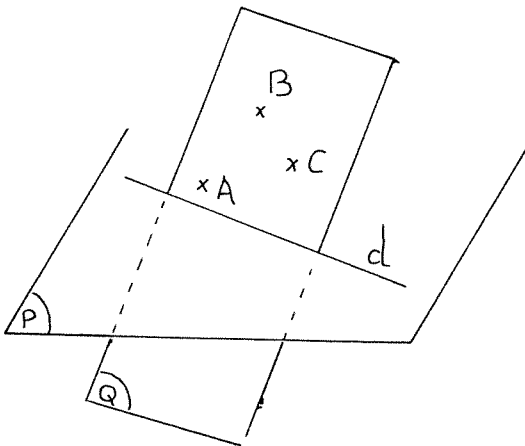
Expliquer pourquoi cette figure comporte une erreur.

Ici on applique le théorème C.

*Une suggestion.* — On pourra ici proposer de colorier en bleu (par exemple !!) les points du plan  $P$  et en rouge ceux du plan  $ABC$ . Les points de leur intersection apparaissent donc en rouge cerclé de bleu (ou en bleu cerclé de rouge!).

Le principe du coloriage peut donc être mis en place dès ces deux premiers exercices, puis appliqué dans toute la suite.

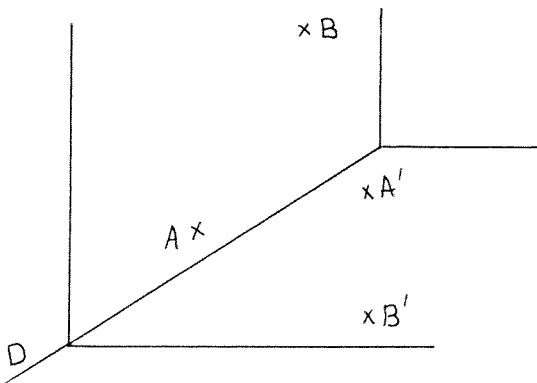
**Exercice 3.** —



Description de la figure : Cette figure est censée représenter deux plans distincts  $P$  et  $Q$ . Le plan  $Q$  contient les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Le plan  $P$  contient le point  $A$  mais pas les points  $B$  et  $C$ . Les plans  $P$  et  $Q$  se coupent suivant la droite  $d$ .

Expliquer pourquoi cette figure comporte une erreur.

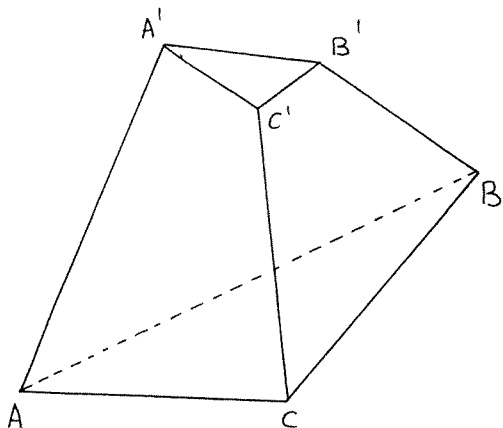
**Exercice 4.** —



Description de la figure : Cette figure représente deux plans qui se coupent suivant une droite  $D$ . Le premier plan contient les points  $A$  et  $B$  ainsi que la droite  $D$ . Le deuxième plan contient les points  $A'$  et  $B'$  ainsi que la droite  $D$ .

- 1) Les droites  $AB$  et  $A'B'$  se coupent-elles ?
- 2) Les droites  $AA'$  et  $BB'$  se coupent-elles ?

## Exercice 5. —



Description de la figure : Cette figure représente une “pyramide tronquée” qui est composée de 5 plans :

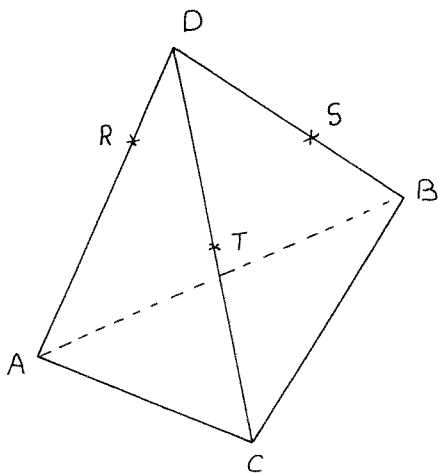
- les 3 faces de la pyramide c'est-à-dire
  - le plan contenant  $B, C, B'$  et  $C'$
  - le plan contenant  $A, B, A'$  et  $B'$  ;
  - le plan contenant  $A, C, A'$  et  $C'$  ;
- la base de la pyramide c'est-à-dire le plan contenant  $A, B$  et  $C$  ;
- le “toit” de la pyramide c'est-à-dire le plan contenant  $A', B'$  et  $C'$ .

Expliquer pourquoi ce dessin est faux.

Si deux droites se coupent dans l'espace, elles se coupent sur la figure.

## B. Tracer des intersections

## Exercice 6. —



Description de la figure : Les 3 points  $A, B$  et  $C$  déterminent un plan  $P$ . Le point  $D$  n'appartient pas à  $P$ .

Le point  $R$  appartient au segment  $AD$  ;

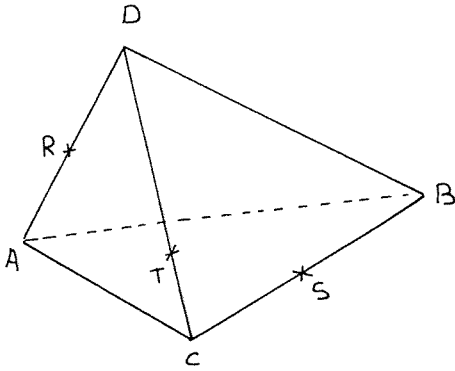
Le point  $S$  appartient au segment  $BD$  ;

Le point  $T$  appartient au segment  $CD$  ;

Dessiner l'intersection du plan contenant  $R, S$  et  $T$  avec le plan  $P$  et expliquer la construction en indiquant les théorèmes (A, B ou C) que l'on a utilisés ,

*Une indication . — Que peut-on dire des droites  $RT$  et  $AC$  ?* Si deux droites sont contenues dans le même plan , soit elles se coupent, soit elles sont parallèles ; Si elles sont parallèles, elles sont aussi parallèles sur la figure ( il faut l'admettre ; c'est une propriété de la projection utilisée).

## Exercice 7. —



Description de la figure : Les 3 points  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent un plan  $P$ . Le point  $D$  n'appartient pas à  $P$ .

Le point  $R$  appartient au segment  $AD$  ;

Le point  $S$  appartient au segment  $BC$  ;

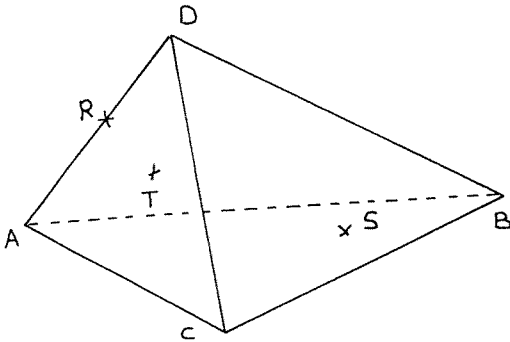
Le point  $T$  appartient au segment  $CD$  ;

1) Dessiner l'intersection du plan contenant  $R$ ,  $S$  et  $T$  avec le plan  $P$ .

2) Dessiner l'intersection du plan contenant  $R$ ,  $S$  et  $T$  avec le plan contenant  $A$ ,  $B$  et  $D$ .

3) Tracer en couleur l'intersection du plan contenant  $R$ ,  $S$  et  $T$  avec le tétraèdre  $ABCD$ , c'est-à-dire avec chacun des triangles (pleins)  $ABC$ ,  $DAB$ ,  $DAC$  et  $DBC$ .

## Exercice 8. —



Description de la figure :  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont donnés comme à l'exercice 7.

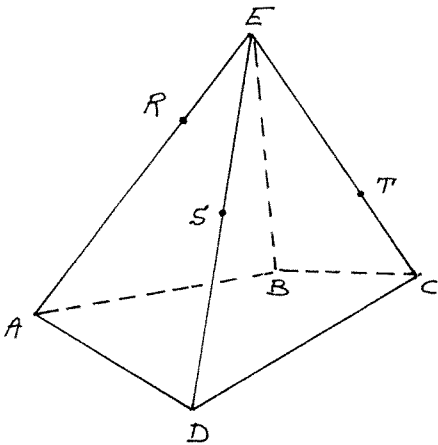
Le point  $R$  appartient au segment  $AD$  ;

Le point  $S$  appartient à la face  $ABC$  ;

Le point  $T$  appartient à la face  $ADC$  ;

Mêmes questions qu'à l'exercice 7 ou simplement question 3 de ce même exercice.

## Exercice 9. —



Description de la figure : Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  appartiennent à un même plan  $P$ .

Le point  $R$  appartient au segment  $AE$  ;

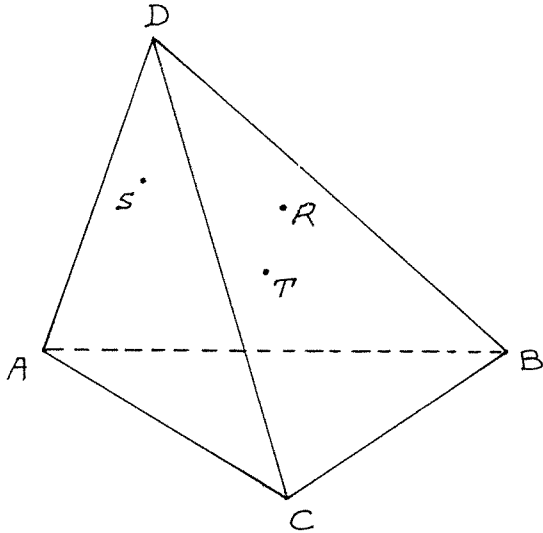
Le point  $S$  appartient au segment  $DE$  ;

Le point  $T$  appartient au segment  $CE$  ;

Dessiner l'intersection du plan  $RST$  avec la pyramide  $EABCD$ .

**Exercice 10.** — Analogue de l'exercice 9 en remplaçant le quadrilatère  $ABCD$  par un pentagone (puis par un hexagone, etc..... ).

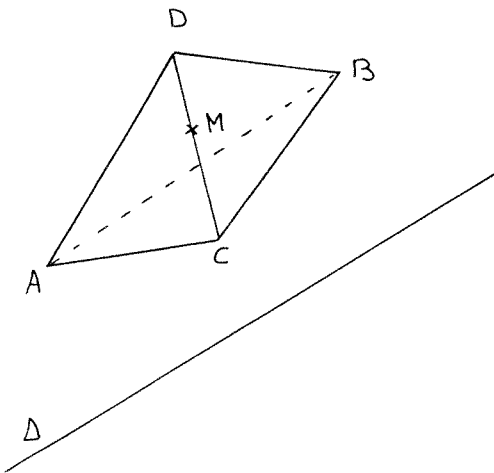
**Exercice 11.** —



Description de la figure : *On part à nouveau d'un tétraèdre (comme aux exercices 7 et 8) ;  
Le point  $R$  appartient à la face  $DAB$  ;  
Le point  $S$  appartient à la face  $DAC$  ;  
Le point  $T$  appartient à la face  $DCB$  ;  
Dessiner l'intersection du tétraèdre avec le plan  $RST$ .*

*Une indication . — Tracer l'intersection du plan  $DST$  (et du plan  $DRT$ ) avec le plan  $ABC$ .*

**Exercice 12.** —



Description de la figure : *On part à nouveau d'un tétraèdre  $ABCD$ .*

*La droite  $\Delta$  est contenue dans le plan  $ABC$  ;  
Le point  $M$  appartient au segment  $DC$  ;  
Tracer l'intersection du tétraèdre avec le plan contenant  $\Delta$  et  $M$ .*

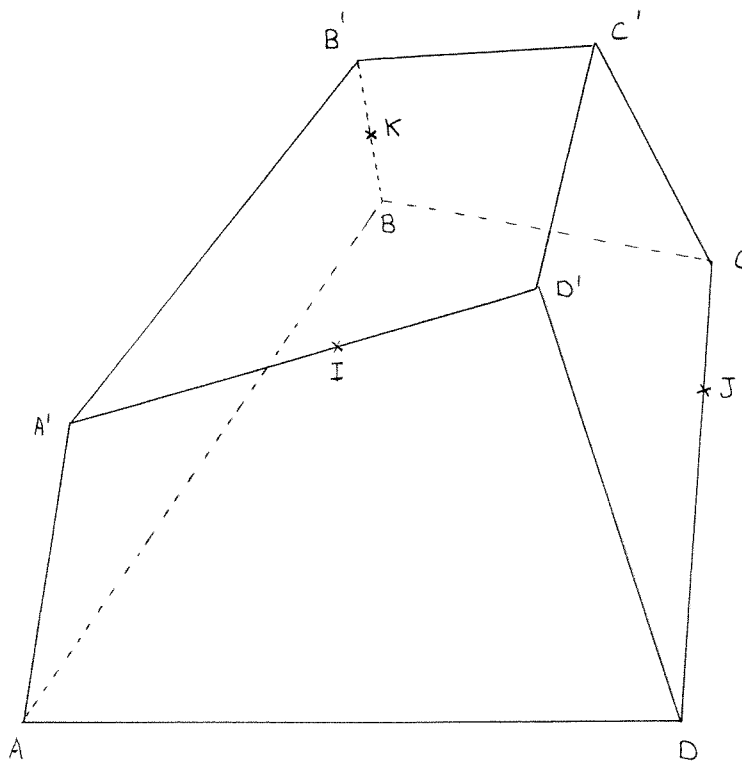
**Exercice 13.** —

Description de la figure :

- Les 4 points  $A, B, C$  et  $D$  sont coplanaires ;*
- Les 4 points  $A', B', C'$  et  $D'$  sont coplanaires ;*
- Les 4 points  $A, D, A'$  et  $D'$  sont coplanaires ;*
- Les 4 points  $A, B, A'$  et  $B'$  sont coplanaires ;*
- Les 4 points  $C, B, C'$  et  $B'$  sont coplanaires ;*
- Les 4 points  $C, D, C'$  et  $D'$  sont coplanaires ;*
- Le point  $I$  appartient au segment  $A'D'$  ;*
- Le point  $J$  appartient au segment  $CD$  ;*
- Le point  $K$  appartient au segment  $BB'$  ;*

Tracer l'intersection du plan  $IJK$  avec les 6 faces du solide  $ABCD A'B'C'D'$ .

*Remarque.* — Pour tracer cette figure nous avons construit l'intersection d'une pyramide avec un plan (*cf.* exercice 9), ce qui permet d'assurer que les points annoncés coplanaires le sont bien. On pourra en effet remarquer que les droites  $AA', BB', CC'$  et  $DD'$  sont concourantes.



*Une indication .* — Tracer l'intersection du plan  $IJD$  avec le plan  $AA'BB'$ .

## 9.

**GEOMETRIE****OBJECTIFS**

Cette fiche présente plusieurs énoncés de géométrie, et propose pour chacun d'entre eux diverses méthodes de résolution.

**ENONCE 1**

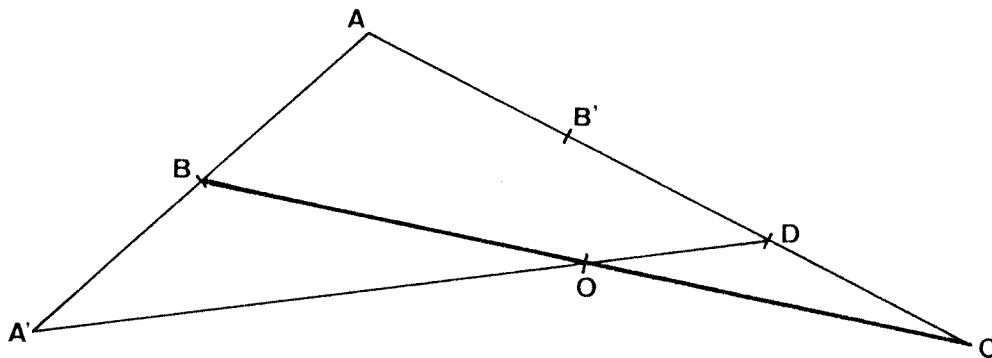
(T.P. I.R.E.M.)

Soient A, B, C trois points non alignés,

D le point défini par  $\vec{AD} = \frac{2}{3} \vec{AC}$

A' le symétrique de A par rapport à B,

O le point d'intersection des droites BC et A'D.



Démontrer que O est le milieu du segment BC.

Méthode 1 De configuration (par le théorème des milieux)

On introduit B', milieu du segment AD; les droites BB' et A'D sont parallèles (triangle AA'D); Il en résulte, car D est par ailleurs le milieu du segment B'C, que O est le milieu du segment BC (triangle BB'C).

Méthode 2 Vectorielle

Les points B, O, C étant alignés, et B et C étant distincts, il existe un réel k tel que

$$\vec{BO} = k \cdot \vec{BC}$$

De même, il existe un réel k' tel que

$$\vec{A'O} = k' \cdot \vec{A'D}$$

Le vecteur  $\vec{AO}$  s'écrit alors

$$\text{d'une part} \quad \vec{AO} = \vec{AB} + k \cdot \vec{BC} = (1-k) \cdot \vec{AB} + k \cdot \vec{AC}$$

$$\text{d'autre part} \quad \vec{AO} = \vec{AA'} + k' \cdot \vec{A'D}$$



$$= 2(1-k') \cdot \vec{AB} + \frac{2}{3} k' \cdot \vec{AC} \quad .$$

Ceci implique

$$\begin{cases} 2-2k' = 1-k \\ k = \frac{2}{3} k' \end{cases}$$

qui équivaut à

$$k = 1/2 \quad \text{et} \quad k' = 3/4 \quad .$$

Ainsi  $\vec{BO} = \frac{1}{2} \vec{BC}$  d'où le résultat.

### Méthode 3 Analytique

Le plan étant rapporté au repère  $(A, B, B')$  où  $B'$  est le milieu du segment  $AD$ ,

les vecteurs  $\vec{BC}$  et  $\vec{A'D}$  admettent pour coordonnées

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{A'D} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et les droites  $BC$  et  $A'D$  admettent pour équations respectivement

$$y = -3x + 3 \quad \text{et} \quad y = -x + 2 \quad .$$

Il en résulte que les coordonnées de  $O$  sont  $O \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

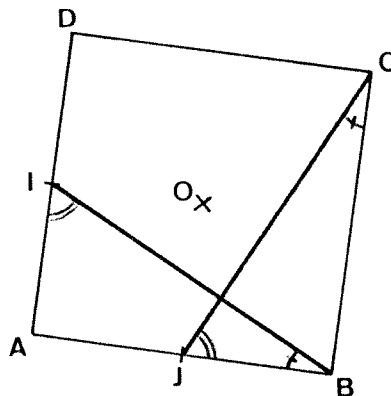
qui sont celles du milieu du segment  $BC$ .

### Méthodes 4 et 5

Barycentrique, ou  
Par transformations (des homothéties et leurs  
composées).

## ENONCE 2

Soient  $ABCD$  un carré,  
 $I$  et  $J$  les milieux des segments  $AD$  et  $AB$ .



Démontrer que les droites  $BI$  et  $CJ$  sont orthogonales.

Méthode 1 Par des considérations angulaires.

Méthode 2 Analytique

Le plan étant rapporté au repère  $(A, B, D)$ ,

les vecteurs  $\vec{BI}$  et  $\vec{JC}$  admettent pour coordonnées

$$\vec{BI} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \vec{JC} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où l'orthogonalité recherchée;

ou

les droites BI et CJ admettent pour équations respectivement

$$y = -1/2 x + 1/2 \quad \text{et} \quad y = 2x - 1,$$

d'où leur orthogonalité.

Méthode 3 Par transformations (rotation)

O étant le centre du carré,

soit  $r$  la rotation de centre O

et d'angle de mesure  $\pi/2$  radians

qui transforme

A en B,

B en C,

C en D,

D en A,

et donc I, milieu du segment AD, en le milieu du

segment BA soit J,

puis la droite IB en la droite JC, d'où l'orthogonalité.

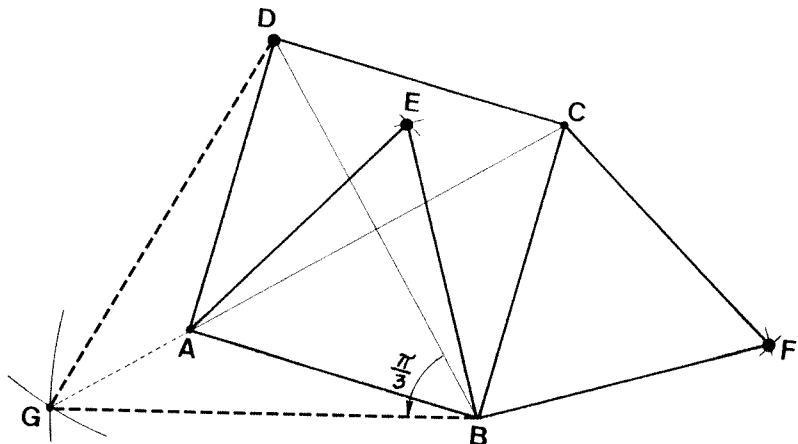
**ENONCE 3**

(T.P. I.R.E.M. Strasbourg)

Soient ABCD un carré,

ABE le triangle équilatéral construit intérieurement à ce carré,

BCF le triangle équilatéral construit extérieurement à ce carré.



Démontrer que les points D, E, F sont alignés.

Méthode 1 Par des considérations angulaires; On notera que EBF est un triangle rectangle isocèle.

Méthode 2 Analytique.

Méthode 3 Par transformations (rotation)

G étant l'unique point pour lequel le triangle BDG est équilatéral et contient le point A,

soit  $r$  la rotation de centre B

et d'angle de mesure  $\pi/3$  radians  
 qui transforme G en D,  
 A en E,  
 C en F.

Les points G, A, C étant alignés (ils appartiennent tous trois à la médiatrice du segment BD), leurs images D, E, F le sont également.

Méthode 4 Par les nombres complexes (classes Terminales; pour mémoire).

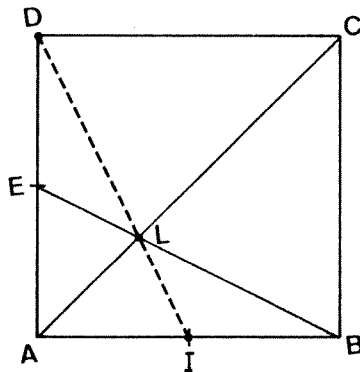
#### ENONCE 4

(Ed. Belin, collection Spirale, 2<sup>de</sup>, p.310)

Soient ABCD un carré,

E et I les milieux des segments AD et AB,

L le point d'intersection des droites AC et BE.



Démontrer que les points D, L, I sont alignés.

Méthode 1 Reconnaissance de figures usuelles.

Au sein du triangle ADB, les droites AC et BE sont deux médianes, et elles se coupent en L.

La troisième médiane, DI, passe par conséquent par L.

Méthode 2 Vectorielle (proposée, mais peu naturelle).

Méthode 3 Analytique

Le plan étant rapporté au repère (A,B,D),

les droites BE et AC admettent pour équations respectivement

$$y = -1/2 x + 1/2 \quad \text{et} \quad y = x$$

et ainsi les coordonnées du point L sont

$$L \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} .$$

On en déduit les coordonnées des vecteurs  $\vec{DL}$  et  $\vec{DI}$  :

$$\vec{DL} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad \vec{DI} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

puis leur colinéarité, et l'alignement des points D, L, I.

Méthode 4 Par transformations (homothétie)

Soit h l'homothétie de centre L qui transforme E en B:

Elle transforme la droite AD en la droite BC, puis

A en C,

la droite AB en la droite DC,

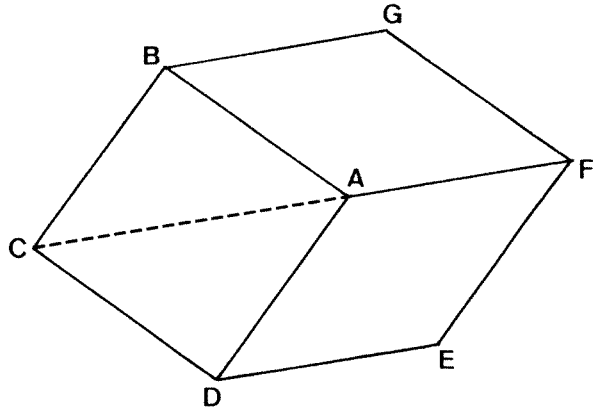
la droite EI en la droite BD (ces deux droites sont  
parallèles du fait des hypothèses),

I, point d'intersection des droites AB et EI, en le  
point d'intersection des droites DC et BD, soit D.

Ainsi D, L, I sont alignés.

**ENONCE 5**

Soient ABCD un carré,  
et, selon la figure suivante, ABGF et ADEF deux  
losanges tels que C, A, F soient alignés.



Déterminer une construction (exacte !) de cette figure, avec  $CF = 12$  cm.

Remarque: La principale difficulté réside dans la construction du carré ABCD; une fois celui-ci obtenu, il est facile de compléter la figure par le segment AF, puis les points G et E.

Méthode 1 Algébrique

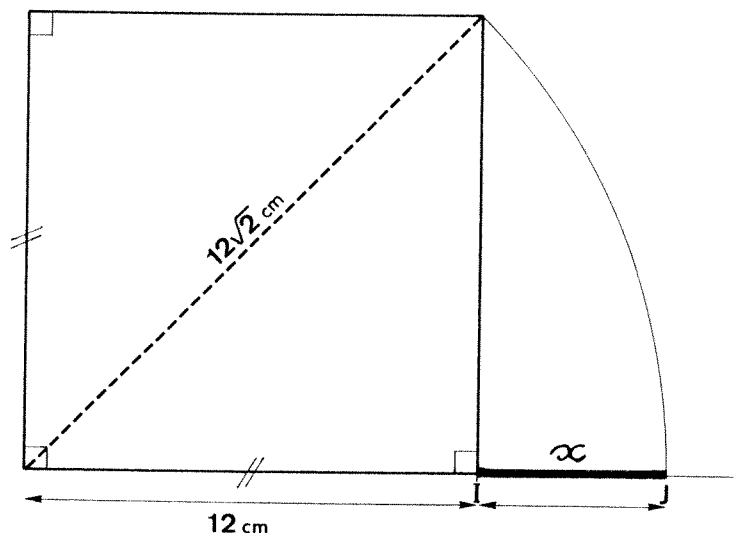
La longueur  $x$  du côté du carré vérifie:

$$x \cdot \sqrt{2} + x = 12 \qquad \text{d'où} \quad x = \frac{12}{1 + \sqrt{2}} .$$

Cette forme est peu commode pour une construction, et la transformation permettant de rendre le dénominateur rationnel (souvent perçue comme rébarbative et de peu d'utilité du fait des calculatrices, par les élèves) se révèle pour une fois fort utile:

$$x = 12 \cdot \sqrt{2} - 12$$

d'où la construction  
suggérée par le dessin  
tracé ci-contre, dont  
le résultat est un segment  
IJ de longueur exacte  $x$ ,  
à partir duquel se  
réalise alors sans  
problème la figure souhaitée.



## Méthodes 2 Géométries

au niveau collège Par des considérations angulaires

**Indication:** Suggérer aux élèves de faire intervenir le point  $F'$  de la droite  $CD$  pour lequel  $D$  appartient au segment  $CF'$  et pour lequel  $CF'$  mesure 12 cm.

**Justification:** Les segments  $DF'$ ,  $CA$ ,  $DB$  sont de même longueur, et ainsi le triangle  $BDF'$  est isocèle de sommet principal  $D$ . L'angle  $BDF'$  mesurant  $135^\circ$ , les angles  $DBF'$  et  $DF'B$  mesurent chacun  $22,5^\circ$ .

**Construction:** Il s'agit de construire un angle de  $\pi/8$  rd.

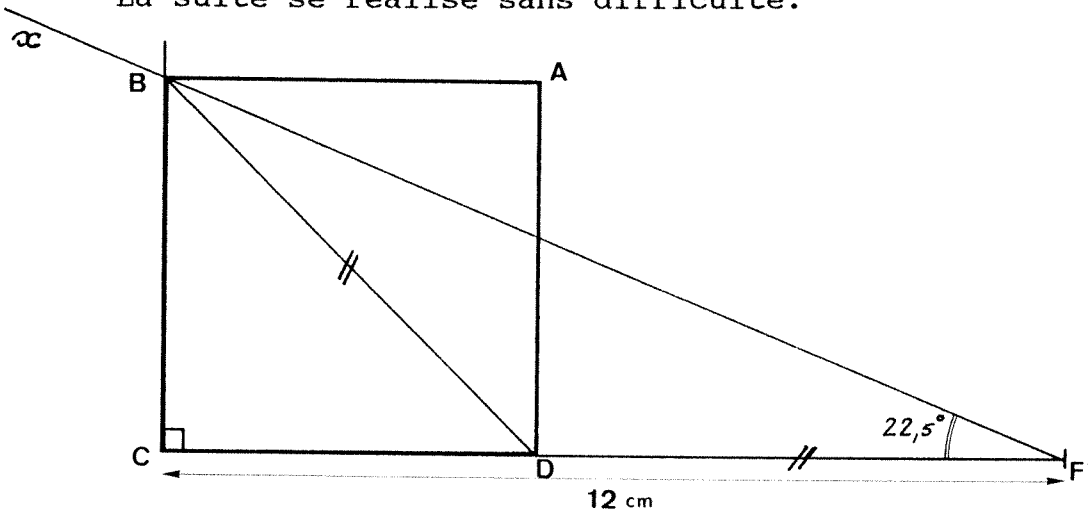
Tracer un segment  $CF'$  de 12 cm,

Tracer la droite perpendiculaire en  $C$  à la droite  $CF'$ ,

Tracer une demi-droite  $F'x$  telle que l'angle  $CF'x$  mesure  $22,5^\circ$  (par tracé de bissectrices:  $22,5$  est la moitié de  $45$ ),

Ceci détermine  $B$ ;

La suite se réalise sans difficulté.



au niveau 2de Par transformations (homothétie)

Construire une figure  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$  ayant les caractéristiques de la figure recherchée, à l'exception de la contrainte de distance (donc  $C_1F_1 \neq 12$  cm),

Construire un segment  $CF$  de 12 cm, parallèle au segment  $C_1F_1$ ;

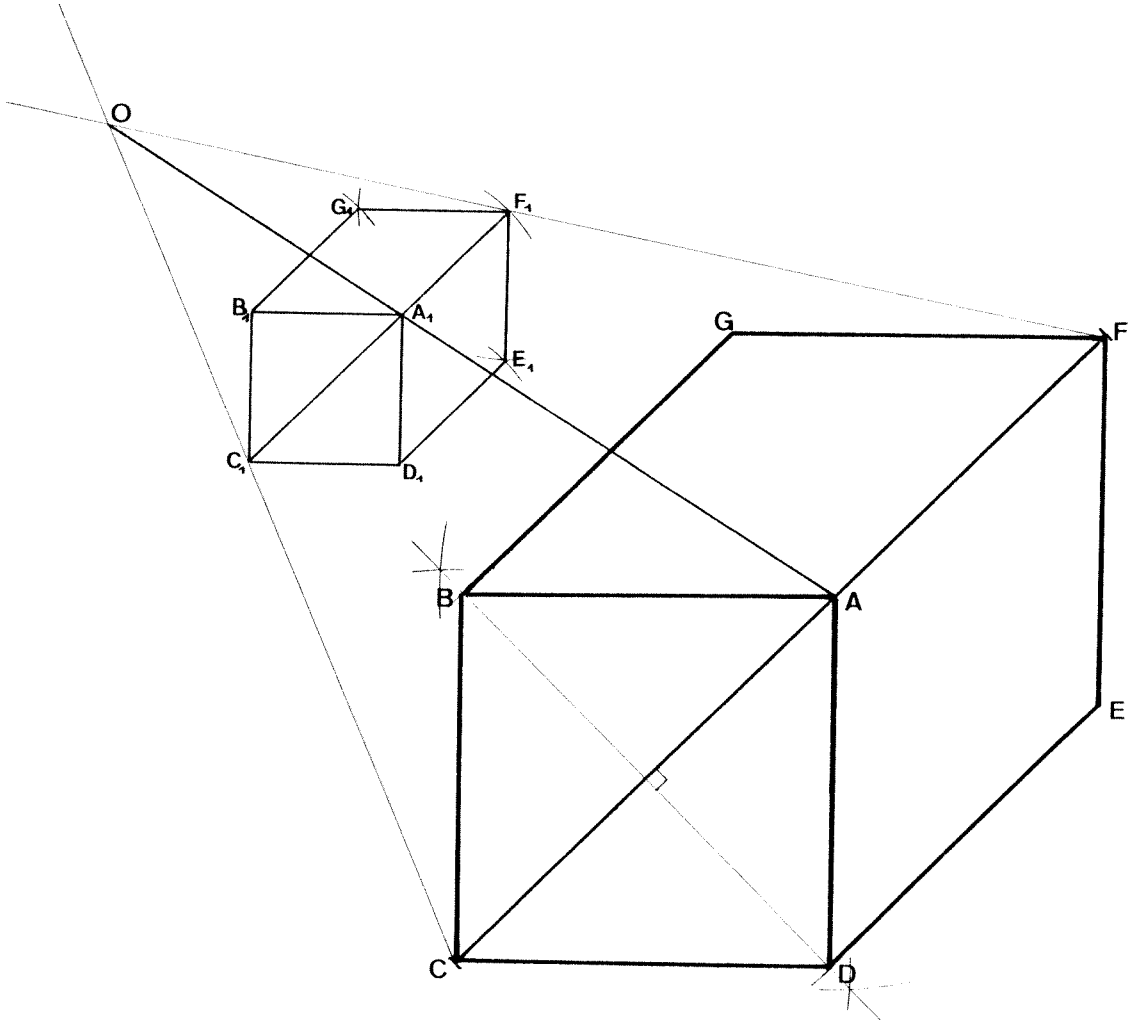
On note  $O$  le point d'intersection des droites  $F_1F$  et  $C_1C$ ;

Construire l'image  $A$  de  $A_1$  par l'homothétie de centre  $O$  qui transforme  $C_1$  en  $C$ , et  $F_1$  en  $F$

(Pour des raisons de place, on pourra choisir une homothétie de rapport négatif); l'alignement de  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $F_1$  et la propriété de conservation de l'alignement, impliquent l'alignement de  $A$ ,  $C$ ,  $F$ ;

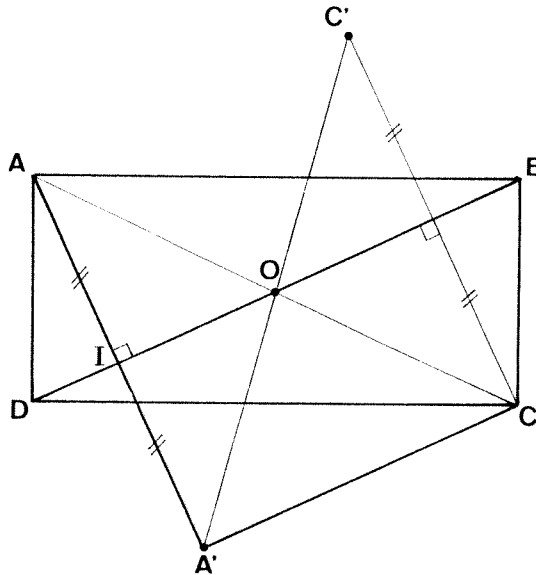
Construire  $B$  et  $D$ , points de la médiatrice du segment  $AC$  pour lesquels les segments  $AC$  et  $BD$  ont même milieu et même longueur (ou faire intervenir des considérations angulaires, ou transformer  $B_1$ ,  $D_1$ , etc. par cette même homothétie et invoquer les propriétés de conservation des angles, du parallélisme, etc.);

La fin de la construction ne présente pas de difficulté.



**ENONCE 6**

Soient  $ABCD$  un rectangle,  
et  $A'$  le symétrique (par symétrie orthogonale) de  $A$  par  
rapport à la droite  $BD$ .



Démontrer que l'angle  $\widehat{AA'C}$  est droit.

Méthode 1 Par le théorème des milieux des côtés d'un triangle

On note  $O$  et  $I$  les milieux des segments  $AC$  et  $AA'$ : La droite  $A'C$  est parallèle à la droite  $OI$ , qui, elle, est orthogonale à la droite  $AA'$ .

Méthode 2 Par transformations

On introduit  $C'$ , symétrique (par la même réflexion) du point  $C$ ; Les réflexions conservant les longueurs et les milieux, et  $O$  appartenant à l'axe de réflexion, les segments  $AC$  et  $A'C'$  ont même longueur et même milieu  $O$ : Ainsi  $AA'CC'$  est un rectangle.

Ou: L'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $2$  transforme les points  $A, I, O$  en les points  $A, A', C$ , et l'angle  $\widehat{AIO}$  étant droit, l'angle  $\widehat{AA'C}$  l'est également.



## 10.

## SCRUTIN PROPORTIONNEL

## I/ CONTENU

A partir de situations concrètes, étudier les différents modes de répartition des sièges dans un scrutin à la proportionnelle.

## II/ OBJECTIFS

- Lecture d'énoncés.
- Simulation de situations numériques; expériences en mathématiques.
- Organisation des calculs.
- Réflexion pluridisciplinaire sur le lien entre mathématiques et situations concrètes ( surtout avec la géographie et les sciences économiques ) .

## III/ LIEN AVEC LE PROGRAMME

- Calcul numérique .
- Programmation de calculs, écriture d'algorithmes.

## IV/ PRESENTATION DE L'ACTIVITE

On étudiera d'abord quelques situations de manière empirique, en demandant aux élèves de répartir des sièges de façon équitable, sans modèle théorique préalable . L'observation des situations litigieuses permettra ensuite de justifier la mise en place d'algorithmes méthodiques . La dernière phase du travail consiste à tester les différents procédés dans des situations sensibles, pour essayer de donner des moyens "politiques" de choisir entre les différents procédés .

## DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ

## I/ EXEMPLES INTRODUCTIFS

La première situation est triviale : deux listes ont recueilli respectivement 40% et 60% des voix lors d'une élection et doivent se répartir 5 sièges . Quelle est la répartition la plus équitable ?

La seconde situation est beaucoup plus délicate : que se passe-t-il s'il y a 4 sièges à se répartir, ou 6 ?

La troisième situation est encore plus délicate, et très liée au vécu des élèves : pour l'élection des délégués de classe, les textes officiels prévoient que, chaque fois que c'est raisonnable, il y aura un garçon et une fille . A partir de quelle répartition garçons/filles peut-on admettre que les deux délégués soient du même sexe, ou quelle est la taille à partir de laquelle une minorité peut être négligée ?

## II/ DESCRIPTION DES SYSTEMES CLASSIQUES

Les modes de répartition commencent tous par la même opération : on divise le nombre de suffrages exprimés par le nombre de sièges à pourvoir ; le nombre obtenu est appelé *quotient électoral* . Ensuite, on divise le nombre de voix obtenu par chaque liste par ce quotient électoral ; la partie entière du résultat correspond au nombre de sièges minimal que chaque liste recevra . Mais, sauf exception, cette première répartition ne permet pas d'attribuer tous les sièges . C'est pour

l'attribution des sièges restants que les procédés sont nombreux . Nous étudierons d'abord les deux plus classiques :

- Répartition au plus fort reste:

Après la division précédente, on classe les listes en présence dans l'ordre décroissant des parties fractionnaires des quotients obtenus ( ou des restes, pour garder le vocabulaire de l'arithmétique ) puis on attribue un des sièges restants à chacune des listes en tête du classement .

-Répartition à la plus forte moyenne:

Après la première attribution des sièges, on rajoute fictivement un siège à chaque liste, on divise le nombre de voix obtenu par chaque liste par ce nouveau nombre de sièges( ce qui revient à calculer combien d'électeurs représenterait chaque élu, en moyenne ) et on attribue un siège à la liste qui obtient ainsi la plus forte moyenne . On réitère ce procédé jusqu'à épuisement des sièges à pourvoir .

#### ACTIVITE N° 1

Répartir les sièges suivant les deux procédés, reprenant les résultats des élections régionales de Mars 1992 ( voir les données en annexe, ou au C.D.I. ) On pourra ensuite étudier l'impact de deux règles annexes du scrutin régional : les listes qui ont obtenu moins de 5% des voix n'ont aucun siège, et la répartition se fait département par département . On constatera que, dans l'ensemble, les différentes variantes ne modifient pas le résultat de façon significative .

#### ACTIVITE N° 2

Voici maintenant quelques situations plus particulières, pour prendre conscience des faiblesses de chaque mode de répartition:

Tout d'abord, on peut gagner des voix et perdre une place dans un classement, ce qui peut faire perdre un siège: trois listes se disputent cinq sièges . Un premier décompte des voix donne le résultat suivant: liste A: 1622 voix

liste B: 1757 voix

liste C: 1621 voix

En recomptant, on trouve: liste A: 1624 voix

liste B: 1751 voix

liste C: 1625 voix

Calculer la répartition des sièges dans les deux cas .

Ensuite, le nombre de sièges à pourvoir peut réserver des surprises: trois listes obtiennent respectivement 12%, 34% et 54% des voix . Calculer la répartition avec 4, puis avec 5 sièges .

### III/ PROBLEMES A L'ENVERS, QUESTIONS DE STRATEGIE.

On étudie maintenant le problème à l'envers: étant donné un mode de scrutin, et quelques informations générales, on cherche à prévoir le résultat des élections .

Situation n°1 : 7 sièges sont à pourvoir ; 2 listes sont en présence ; quel est le pourcentage de voix nécessaire pour obtenir un siège ? pour obtenir la majorité ? Reprendre la question avec 3 , n listes en présence . Pour que le travail soit intéressant, il faut bien sûr le faire avec les deux modes de répartition .

Situation n°2 : 7 sièges sont à pourvoir, au plus fort reste . Répartir les sièges entre trois listes ayant obtenu les résultats suivants :

listes	A	B	C
	40%	30%	30%
	50%	25%	25%
	52%	24%	24%
	52%	38%	10%

et vous verrez comment on peut avoir une coalition minoritaire en voix et majoritaire en sièges .

Situation n°3 : Reprendre les résultats des élections régionales, et étudier l'effet qu'aurait eu une fusion de deux listes, en supposant un report de voix parfait (par exemple Verts + Génération Ecologie, ou P.S.+P.C., ou toute autre alliance qu'on voudrait tester )

Situation n°4 : 7 sièges sont à pourvoir . Une liste A dispose, à coup sûr, de 40% des voix . Combien faut-il de listes adverses, qui se partagent équitablement les voix qui restent, pour que la liste A soit majoritaire en sièges ?

On verra ici comment, avec le scrutin à la plus forte moyenne, la majorité relative des voix permet d'avoir une majorité absolue des sièges, pourvu que les adversaires soient suffisamment divisés .

L'ensemble de ces observations permet de comprendre comment un mode de scrutin peut modifier le fonctionnement politique d'un pays, en favorisant les coalitions larges, ou en poussant à la dispersion . On peut attirer l'attention des élèves sur le fait que les mathématiques ne permettent pas de trancher de façon absolue, et que le choix d'un mode de scrutin est nécessairement un choix politique, pour lequel les modèles mathématiques ne sont que des aides à la décision .

#### IV/ D'AUTRES PROCÉDES DE REPARTITION

Les défauts vus ci-dessus ont conduit à mettre au point des procédés de répartition des sièges très variés . Chacun des trois procédés suivants est en vigueur ici ou là, et peut être étudié, en reprenant les mêmes situations qu'à la partie précédente .

##### METHODE D'HONDT:

$N_i$  étant le nombre de sièges à pourvoir de la liste  $i$ ,  $k$  le nombre de listes et  $p$  le nombre de sièges à pourvoir, on calcule tous les quotients :

$$\left( \frac{N_i}{j} \right) \begin{matrix} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix}$$

On classe ces quotients par valeurs décroissantes, on prend les  $p$  premières valeurs de cette suite, et pour chaque quotient  $N_i/j$  cité, la liste  $i$  obtient un siège . Un raisonnement un peu délicat permet de constater que cette méthode est, en fait, une autre méthode de calcul de la plus forte moyenne .

##### METHODE DU NOMBRE D'UDDA:

On reprend la méthode précédente, mais au lieu de diviser les  $N_i$  par les entiers successifs, on les divise par 1,4 puis par 3, puis par les autres entiers impairs .

##### METHODE DU QUOTIENT RECTIFIE:

On augmente fictivement le nombre de sièges à pourvoir, on applique la technique du quotient électoral ( voir au début ), jusqu'à ce que la somme des sièges attribués sans les restes soit supérieure ou égale au nombre de sièges à pourvoir . Cette méthode conduit parfois à rajouter un ou deux sièges .

Une étude attentive, sur des exemples ou de façon théorique, montre que ces

procédés sont des variantes de la plus forte moyenne, mais qui modèrent le nombre de sièges de la liste qui est en position dominante .

#### V/ POUR ALLER BEAUCOUP PLUS LOIN

Les remarques suivantes sont un essai de modélisation plus formelle du problème . On ne devra aborder cette partie avec des élèves qu'avec beaucoup de prudence, et dans la plupart des classes, on n'en parlera pas du tout .

On peut formaliser le problème ainsi :

$p$  sièges sont à répartir entre  $k$  listes, qui ont obtenu chacune  $N_i$  voix ( $1 \leq i \leq k$ ) . On note  $n_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) le nombre de sièges attribués à la liste  $i$  .

Un procédé est assez équitable quand les  $k$ -uplets  $\left( \frac{N_1}{\sum N}, \frac{N_2}{\sum N}, \dots, \frac{N_k}{\sum N} \right)$  et  $\left( \frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}, \dots, \frac{n_k}{p} \right)$  sont voisins .

La distance entre ces  $k$ -uplets peut s'estimer par n'importe quelle des normes définies sur  $\mathbb{R}^k$ . La répartition au plus fort reste revient à utiliser la norme du sup .

Mais on peut aussi étudier les  $k$ -uplets  $\left( \frac{n_1}{N_1}, \frac{n_2}{N_2}, \dots, \frac{n_k}{N_k} \right)$ , et chercher à les rapprocher de la droite d'équation  $x_1 = x_2 = \dots = x_k$  .

Cette approche donne des résultats plus proches de la répartition à la plus forte moyenne .

Il faut par ailleurs noter que les différents procédés évoqués ici, s'ils sont simples sur le plan théorique, peuvent donner lieu à de gros problèmes de calcul . La démocratie supporterait mal que le procédé de calcul des sièges ne soit pas directement calculable, à la main, par chaque électeur .

#### VI/ BIBLIOGRAPHIE

Peu d'ouvrages sont consacrés à cette question . On trouvera de nombreux commentaires sur les enjeux politiques des différents modes de scrutin dans le "Que sais-je" *Les Systèmes électoraux* . Michel EMERY, dans son article "Le Scrutin proportionnel: plus fort reste ou plus forte moyenne?" publié dans *L' Ouvert*, journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg, n°44 sept. 1986, donne des compléments sur les liens du problème avec la géométrie . Et bien sûr, on pourra se plonger, si on les trouve dans le fonds ancien de sa bibliothèque municipale, dans les écrits du marquis de CONDORCET, qui a examiné à peu près tous les paradoxes liés aux questions électorales .

ANNEXE :

**BAS RHIN****67****► REGIONALES** \*

27 SIEGES A POURVOIR  
INSCRITS : 628 495

Votants : 418 529  
Exprimés : 399 271  
Abstentions : 47,2 %

PCF - Wurtz (5 995 - 01,50 %) 0 él.  
PS - Estève (38 804 - 09,07 %) 3 él.  
MAJ - Braun (6 540 - 01,06 %) 0 él.  
GE - Moeglen (28 958 - 07,02 %) 2 él.  
VERTS - Buchmann (44 460 -  
11,10 %) 3 él.  
REG - Andres (7 405 - 01,80 %) 0 él.  
UPF - Hoeffel (137 065 - 34,30 %)  
10 él.  
DVD - Zeller (40 696 - 10,10 %) 3 él.  
FN - Krieger (65 520 - 16,40 %) 5 él.  
EXD - Spieler (23 828 - 05,09 %) 1 él.

**HAUT RHIN****68****► REGIONALES**

20 SIEGES A POURVOIR  
INSCRITS : 443 046

Votants : 300 235  
Exprimés : 285 104  
Abstentions : 32,23 %

PCF - Bechler : 5 143 (1,80 %)  
PS - Bockel : 45 441 (15,94 %) 3 él.  
GE - Winterhalter : 16 608 (5,83 %)  
1 él.  
VERTS - Waechter : 41 617 (14,60 %)  
3 él.  
SE - Gall : 17 447 (6,12 %) 1 él.  
UPF - Haenel : 89 358 (31,34 %) 7 él.  
FN - Freulet : 51 921 (18,21 %) 4 él.  
EXD - Cordonnier : 17 569 (6,16 %)  
1 él.

11.

<p>LE PROBLEME DE LA PARTIE INTERROMPUE</p>
---

ou comment réfléchir à un problème ouvert  
et comparer mille idées saugrenues

CONTENU :

- \* A partir d'un problème ouvert, comparer les propositions des élèves et différentes réponses "historiques".

OBJECTIFS :

- \* Initiation à la recherche : comment mathématiser un problème ?
- \* Lecture et rédaction de procédures de calcul
- \* Initiation à la démonstration en algèbre

LIEN AVEC LE PROGRAMME :

- \* Calcul numérique et littéral
- \* Proportionnalité, algèbre élémentaire

AVERTISSEMENT :

Malgré les souvenirs que ce travail évoquera, ce n'est pas, et ce ne doit pas être une façon détournée de faire le programme de probas de Première en Seconde.

PRESENTATION DE L'ACTIVITE :

Le document de travail qui suit (et qui provient du groupe de travail sur les probabilités de Paris VII) présente un problème ancien (attesté dès le XV<sup>e</sup> siècle, et qui, sous le nom de problème du Chevalier de Méré, a conduit Pascal à formaliser les probabilités), puis une rédaction en français moderne des solutions proposées aux XVI<sup>e</sup> et XVII<sup>e</sup> siècles, ainsi que leurs réfutations de l'époque. Les deux dernières sont conformes à la mathématisation dans le cadre probabiliste classique, mais sont compréhensibles sans théorie probabiliste.

Le travail peut s'échelonner sur deux séances de 1 h 30.

1ère séance :

Énoncé du premier problème  
 Recherche libre des élèves  
 Rédaction soignée des procédés de calcul imaginés par les élèves  
 Emploi de ces procédés sur d'autres énoncés pour en examiner la validité

2ème séance :

Distribution de l'ensemble des procédés proposés par les élèves et par l'histoire  
 Comparaison des divers procédés, et choix

Ce travail doit permettre de travailler dans les directions suivantes :

\* Formalisation d'un énoncé flou (donner un sens à la notion de partage équitable...)

\* Formaliser des procédés donnés en langage naturel, en particulier pour voir si des valeurs numériques égales relèvent de la coïncidence ou d'une identité des procédés. On aura à gérer des situations cocasses, où deux élèves défendent des procédés différents, qui sont en fait équivalents, sans voir l'équivalence...)

\* Dégager la notion d'expérience cruciale, pour apprendre à tester un modèle (c'est ce que l'on fait quand on modifie l'énoncé initial)

#### QUELQUES IDEES, POUR ALLER PLUS LOIN

\* La notion centrale, ici, est celle de partage équitable, et il faut bien reconnaître, avec les élèves, que ce n'est pas une notion mathématique. Le débat sur ce sujet est donc délicat, incontournable, et reste toujours en partie sans solution (dans le même ordre d'idées, voir le thème "scrutins proportionnels, dans ce même dossier).

\* Sur les partages équitables, on pourra étudier deux classiques :

A) Deux hommes se rencontrent au bord d'une route. L'un a deux pains, l'autre trois. Passe un soldat. Les trois hommes se partagent tout le pain. Le soldat laisse aux deux autres cinq pièces, qu'ils se partagent, deux pour celui qui avait apporté deux pains, trois pour l'autre. Le partage est-il correct ?



B) Un homme meurt et lègue 17 chameaux à ses fils, la moitié pour le premier, le tiers pour le second, et le neuvième pour le troisième. On hésite à couper les chameaux en morceaux... Passe un voyageur qui rajoute un chameau au troupeau, attribue 9 bêtes au premier fils, 6 au second, 2 au dernier, et repart avec son chameau et mille remerciements. Le partage est-il conforme aux vœux du père ?

\* Sur les partages équitables, bien des thèses s'affrontent :

- proportionnalité aux acquis
- proportionnalité "inverse" à ce qui manque pour terminer la partie
- proportionnalité à la probabilité de gain définitif, avec deux options :
  - + équiprobabilité des victoires dans les parties à venir
  - + probabilités des victoires à venir égales aux fréquences observées sur les parties déjà jouées

On voit bien que les premiers modèles correspondent à ce qu'on appellerait équitable pour un scrutin proportionnel, que le troisième nous convient pour un jeu de hasard, et le quatrième pour un jeu sans hasard (tournoi d'échecs ou de tennis, par exemple...).

On est donc bien dans une situation où les mathématiques aident au choix, mais ne permettent pas de prendre des décisions.

\* Le lien avec l'histoire peut être fait en replaçant chaque solution dans son époque. Les textes de Pascal, Fermat et Roberval sont d'une lecture délicate, mais on peut essayer de s'y lancer avec de bons littéraires. Les solutions plus anciennes sont italiennes, écrites dans une langue qui hésite entre le latin et l'italien, et dont la rhétorique - même en traduction littérale - est obscure pour nous. Inutile donc d'y introduire les élèves.

L'ensemble des textes originaux est disponible à l'IREM de Paris VII, brochure n° 61 : « Mathématiques, approche par des textes historiques. »

## Document de travail

### Extrait du bulletin n° 61 de l'IREM de Paris VII "Mathématiques, approche par des textes historiques"

#### AUTEURS ET SOURCES DES SOLUTIONS PROPOSEES

- XAVIER et YANN : X et Y, auteurs inconnus, solutions rapportées et critiquées par Luca PACIOLI.
- LUC : Luca PACIOLI (1445-1514).  
Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita, 1ère édition, Venise, 1494.
- NICOLAS : Niccolò TARTAGLIA (1500-1557).  
La prima parte del general trattato di numeri e misura, 1556.
- JEROME : Jérôme CARDAN (1501-1576).  
Pratica arithmetica et mensurandi singularis, 1539.
- LAURENT : Lorenzo FORESTANI.  
Pratica d'arithmetica e geometria, 1ère édition, 1603.
- PASCAL : Blaise PASCAL (1623-1662).  
Troisième usage du triangle arithmétique, 1665.  
Correspondance avec Fermat, 1654-1660.
- PIERRE : Pierre de FERMAT (1601-1665).  
Correspondance avec Pascal, 1654-1660.
- GILLES : Gilles Personne de ROBERVAL (1602-1675).

#### T0. PROBLEME.

Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de "pile ou face".

Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne.

Le premier qui a 8 points (c'est-à-dire qui a gagné 8 parties) est le vainqueur du jeu, et il gagne 84 francs (on appelle cette somme : la mise).

Seulement, Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu.

Quand ils s'arrêtent, Ariane a gagné 7 parties (elle a donc 7 points), et Bernard 5 parties (il a donc 5 points).

Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise puisque personne ne l'a complètement gagnée (aucun d'eux n'a 8 points).

Mais alors, comment partager la mise, c'est-à-dire que donner à Ariane et que donner à Bernard pour que le partage soit juste ?

Quel partage proposez-vous, et pourquoi ?

#### Rappel de la situation :

Le vainqueur est celui qui obtient le premier 8 points.

Quand ils s'arrêtent de jouer : Ariane a 7 points,

Bernard a 5 points.

La mise totale est de 84 francs.

#### Question supplémentaire :

Quel partage proposeriez-vous, et pourquoi, si la situation, pour le même jeu, était la suivante :

Le vainqueur est celui qui obtient le premier 8 points.

Quand ils s'arrêtent de jouer : Ariane a 7 points,

Bernard a 0 point.

La mise est toujours de 84 francs.

### T1. SOLUTION DE XAVIER.

Revenons en arrière, et ôtons 2 points à chaque joueur, de sorte qu' Ariane a 5 points et Bernard 3 points.

Puisque  $5 + 3 = 8$  et que 8 points font gagner 84F, alors Ariane, qui a 5 points, doit emporter  $\frac{5}{8} \times 84F = 52,50F$ , et Bernard ayant 3 points doit avoir, quant à lui,  $\frac{3}{8} \times 84F = 31,50F$ .

Donc la mise se partagera en :

$$\begin{array}{l} 52,50F \text{ pour Ariane,} \\ 31,50F \text{ pour Bernard.} \end{array}$$

### T2. SOLUTION DE YANN.

Revenons en arrière, et ôtons 5 points à chaque joueur, de sorte qu' Ariane n'a plus que 2 points et Bernard 0 point.

Puisque 2 est le quart de 8, on peut dire qu' Ariane a déjà le quart du jeu, donc elle doit déjà prendre le quart de 84F, c'est-à-dire 21F.

Le reste de la mise ( $84 - 21 = 63$ ) doit être partagé également entre les deux joueurs. Ce qui fera donc pour chacun 31,50F.

Donc la mise se partagera en :

$$\begin{array}{l} 21F + 31,50F = 52,50F \text{ pour Ariane,} \\ 31,50F \text{ pour Bernard.} \end{array}$$

### T3. LUC CRITIQUE LA SOLUTION DE XAVIER.

On ne doit pas faire comme Xavier pour partager la mise. Car, si on ôte deux points à Ariane, qui en a 7, cela veut dire qu'on lui retire  $\frac{2}{7}$  de ses points. Tandis qu'en ôtant 2 points à Bernard, on lui retire  $\frac{2}{5}$  de ses points.

Or  $\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$ . Proportionnellement, on a donc retiré plus à Bernard qu'à Ariane. C'est-à-dire qu'on a retiré une plus grosse partie de ses points à Bernard qu'à Ariane. Et cela n'est pas juste.

### T4. LUC CRITIQUE LA SOLUTION DE YANN.

La solution de Yann n'est pas bonne. Car, en ôtant 5 points à Ariane, on lui a retiré  $\frac{5}{7}$  de ses points (car elle en avait 7). Tandis qu'en ôtant 5 points à Bernard, on lui a tout retiré.

Proportionnellement, on a donc plus retiré à Bernard qu'à Ariane. Et cela n'est pas juste.

### T5. SOLUTION DE LUC.

Voici ma solution :

Les joueurs ont à eux deux 12 points. On peut donc dire qu' Ariane a  $\frac{7}{12}$  de tous les points, et que Bernard a  $\frac{5}{12}$  de tous les points.

Il faut donc partager la mise suivant cette proportion :  $\frac{7}{12}$  de la mise pour Ariane, et  $\frac{5}{12}$  de la mise pour Bernard.

Donc la mise se partagera en :

$$\begin{array}{l} \frac{7}{12} \times 84F = 49F \text{ pour Ariane,} \\ \frac{5}{12} \times 84F = 35F \text{ pour Bernard.} \end{array}$$

### T6. NICOLAS CRITIQUE LA SOLUTION DE LUC.

La règle de Luc n'est ni bonne, ni belle. Car, si Ariane avait un seul point et Bernard zéro point, et si l'on appliquait la règle de Luc, alors Ariane devrait recevoir toute la mise et Bernard rien du tout !!

Ce ne serait pas juste que, pour un seul point (alors qu'il en faut 8 pour gagner), Ariane doive retirer toute la mise en ne laissant rien à Bernard.

### T7. SOLUTION DE NICOLAS.

Quelle que soit la solution qu'on propose, on trouvera toujours moyen de la discuter. Je propose quand même ma solution qui me paraît être la moins discutable.

Si la mise est de 84F, on peut dire que chaque joueur a misé 42F.

Ariane, qui a le plus de points, doit déjà récupérer sa mise (42F). Mais, puisqu'elle a 2 points de plus que Bernard et que 2 points représentent le quart du jeu, Ariane doit prendre aussi le quart de la mise de Bernard (c'est-à-dire 42F divisé par 4), ce qui est égal à 10,50F.

Donc la mise se partagera en :

$$\begin{array}{l} 42F + 10,50F = 52,50F \text{ pour Ariane,} \\ 84F - 52,50F = 31,50F \text{ pour Bernard.} \end{array}$$

### T8. SOLUTION DE LAURENT.

Je pense aussi que Luc se trompe. Car il faut tenir compte de la chance qui peut se retourner rapidement et favoriser Bernard d'un seul coup.

Si la partie se gagne en 8 points, les deux joueurs peuvent jouer au maximum 15 parties. Or Ariane en a gagné 7 et Bernard 5, ce qui fait 12 parties en

tout. Il pourrait donc encore y avoir 3 parties et, sur ces parties là, on ne peut rien décider.

Il faut donc faire ainsi :

- Ariane a gagné 7 parties, donc elle doit prendre  $\frac{7}{15}$  de la mise, c'est-à-dire 39,20F .
- Bernard avec ses 5 parties doit prendre les  $\frac{5}{15}$  de la mise, c'est-à-dire 28F .

- Il reste  $\frac{3}{15}$  de la mise qui correspondent aux 3 parties qui pourraient avoir lieu s'ils continuaient de jouer. On ne sait rien de ces parties. Il faut donc diviser en deux parts égales ces  $\frac{3}{15}$  de la mise qui représentent 16,80F . Il faut donc donner en plus à chacun 8,40F .

Donc la mise se partagera en :

$$39,20F + 8,40F = 47,60F \text{ pour Ariane ,}$$

$$28F + 8,40F = 36,40F \text{ pour Bernard .}$$

T9. JÉRÔME CRITIQUE LA SOLUTION DE LUC.

Je veux d'abord dire que la solution de Luc est absurde. Il fait une erreur que même un petit enfant pourrait reconnaître. Voici laquelle :

Dans la solution de Luc, Ariane emporte 49F et Bernard 35F . Autrement dit, si on considère qu'ils ont chacun misé 42F , cela veut dire que Ariane a gagné 7F sur l'argent de Bernard.

Or la somme de 7F représente seulement  $\frac{1}{6}$  de la mise de Bernard, alors qu'il ne reste plus qu'une seule partie à gagner pour Ariane, tandis que Bernard doit encore en gagner 3 , c'est-à-dire 3 fois plus !!

On voit qu'Ariane ne gagne pas assez sur l'argent de Bernard. Ce partage est injuste.

Mais regardons encore un autre exemple où la solution de Luc n'est pas bonne : Si Ariane avait 7 points et Bernard 0 point, alors, d'après la solution de Luc, Ariane devrait prendre toute la mise et Bernard rien du tout.

Mais alors, ce serait faire comme si Ariane avait gagné le jeu, comme si elle avait 8 points, comme si la dernière partie n'avait pas d'importance. Cela ne serait pas juste.

T10. SOLUTION DE JÉRÔME.

Voici ma solution :

Pour trouver le bon partage, il faut seulement regarder ce qu'il manque à chaque

joueur pour gagner : il manque 1 partie à Ariane et 3 parties à Bernard.

Il faut donc 1 hasard à Ariane pour qu'elle gagne la partie qui lui manque.

Il faut 1 hasard à Bernard pour qu'il gagne la première partie nécessaire, 2 hasards pour qu'il gagne la seconde, et 3 hasards pour gagner la troisième et enfin gagner le jeu.

Il faut donc 1 hasard pour Ariane et 1 + 2 + 3 , soit 6 hasards pour Bernard.

Donc Ariane doit avoir 6 fois plus de chances de gagner que Bernard, et elle doit emporter 6 fois plus.

Donc la mise se partagera en :

$$\frac{6}{7} \times 84F = 72F \text{ pour Ariane ,}$$

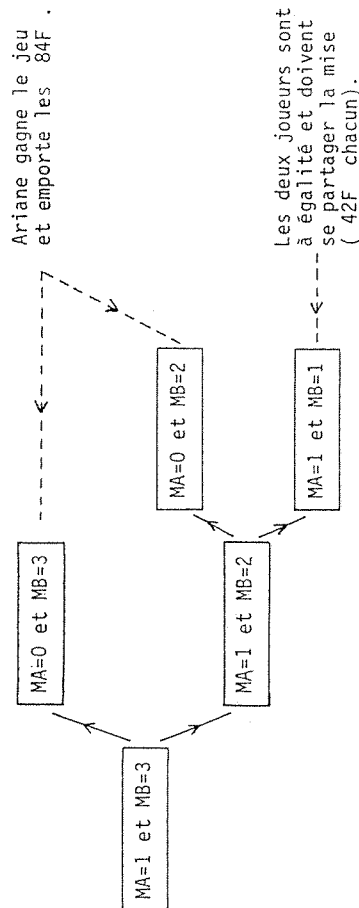
$$\frac{1}{7} \times 84F = 12F \text{ pour Bernard .}$$

T11. SOLUTION DE PASCAL.

Ce qui est important, c'est ce qu'il manque à chaque joueur pour gagner ( 1 point pour Ariane et 3 points pour Bernard), et ce qui pourrait se passer s'ils continuaient à jouer.

Par exemple : Si Ariane gagne la partie d'après, il lui manquera 0 point et elle aura gagné le jeu, mais si c'est Bernard qui gagne, il ne lui manquera plus que 2 points (et il manquera toujours 1 point à Ariane).

Pour imaginer tout ce qui pourrait se passer dans les parties qui suivraient s'ils ne s'arrêtaient pas de jouer, je représente cela sous forme d'un "arbre" (où MA désigne ce qui manque à Ariane, et MB ce qui manque à Bernard) :



Ensuite, voilà comment ils se partagent la mise. Ariane dit à Bernard :

"Imaginons qu'il me manque 1 point et toi 2 points. A la partie suivante :

- Si c'est moi qui gagne, il me manquera 0 point et j'aurai gagné le jeu.

Donc je devrai prendre toute la mise : 84F .

- Mais si c'est toi qui gagne, il nous manquera à chacun 1 point. Nous devrons donc partager la mise en deux parts égales : 42F pour chacun.

Or nous avons chacun une chance sur deux de gagner cette partie. Je suis donc sûr de gagner au moins 42F , et pour les autres 42F , j'ai une chance sur deux de les gagner.

Donc, s'il me manque 1 point et toi 2 , je dois prendre  $42F + \frac{1}{2} \times 42F = 63F$  .  
Et toi, tu prendras le reste : 21F .

Mais, en fait, il me manque 1 point et toi 3 points. Il faut donc remonter encore en arrière :

Si je gagne la prochaine partie, je gagnerai 84F , et si je la perds, il me manquera toujours 1 point, et toi il ne t'en manquera plus que 2 . Or je viens de te montrer que, dans ce cas, je dois prendre 63F et toi 21F . Je suis donc sûr de gagner 63F , et j'ai une chance sur deux de gagner le reste, c'est-à-dire  $84F - 63F = 21F$  .

Donc je dois recevoir, avant de jouer cette partie et si on décide de s'arrêter :  $63F + \frac{1}{2} \times 21F = 73,50F$  .

Donc la mise se partagera en :

73,50F pour Ariane ,  
10,50F pour Bernard .

#### T12. SOLUTION DE PIERRE.

Il manquera 1 point à Ariane et 3 points à Bernard. Donc, s'ils ne s'arrêtaient pas, ils devraient encore jouer au maximum 3 parties.

Regardons tout ce qui peut se passer pendant ces 3 parties. Je note "a" lorsque Ariane gagne, et "b" quand c'est Bernard qui gagne. On a alors comme possibilités tous les cas suivants :

	Partie n° 1	Partie n° 2	Partie n° 3
(1)	a	a	a
(2)	a	a	b
(3)	a	b	a
(4)	b	a	a

	Partie n° 1	Partie n° 2	Partie n° 3
(5)	a	b	b
(6)	b	b	a
(7)	b	a	b
(8)	b	b	b

Il y a 8 cas (en fait  $2^3$ ), et sur ces 8 cas, il y en a 7 où Ariane gagne (les sept premiers dans le tableau), et 1 seul où c'est Bernard.

Il faut donc qu'Ariane emporte une partie de la mise 7 fois plus importante que celle de Bernard.

Donc la mise se partagera en :

$\frac{7}{8} \times 84F = 73,50F$  pour Ariane ,  
 $\frac{1}{8} \times 84F = 10,50F$  pour Bernard .

#### T13. OBJECTION DE GILLES.

Pierre a tort de faire la répartition de la mise en supposant que Ariane et Bernard jouent encore 3 parties.

Car, s'il manque 1 partie à Ariane et 3 à Bernard, il n'est pas nécessaire qu'ils jouent 3 parties pour terminer. Il peut arriver qu'ils n'en jouent que 1 ou 2 .

Alors, je ne vois pas pourquoi Pierre prétend faire la répartition de la mise en suivant une règle imaginaire (à savoir qu'ils jouent en 3 parties), car la règle naturelle du jeu est qu'ils s'arrêtent de jouer dès que l'un des deux a gagné. Ce qui n'est pas le cas dans le tableau de Pierre (sauf pour les lignes (6) et (8)).

Ce que fait Pierre n'est peut-être pas faux, mais, en tout cas, cela n'est pas démontré. Il risque donc d'y avoir une erreur dans le raisonnement.

## 12. CARTOGRAPHIE ET MATHÉMATIQUES

### Proposition d'un travail commun Géographie-Mathématiques

A la demande de l'I.P.R. d'Histoire-Géographie de Strasbourg, l'article Cartographie paru dans REPERES-IREM n° 6 (Janvier 1992) est repris dans le dossier d'histoire-géographie consacré aux modules en Seconde.

Cette reprise justifiait l'ajout d'une préface, que vous trouverez ici, et qui précise l'emploi possible de ce document pour une activité interdisciplinaire. Le travail pourra être entrepris en faisant intervenir les deux professeurs (Maths et H.G.) en alternance sur deux demi-classes, ou en prévoyant une séance commune devant la classe entière, formule qui s'éloigne du cadre réglementaire des modules.

L'article cité en référence est illisible pour des élèves de Seconde, mais on peut en tirer une série d'activités que je détaille plus bas. Il importe au moins pour le professeur de garder à l'esprit que derrière de "petits exercices" de géométrie se cache un des problèmes moteurs des mathématiques.

## I DIVERSITE DES CARTES

Il serait bon de commencer le travail avec les élèves par une compilation de cartes. Les documents pédagogiques sont bien sûr excellents, mais les publications de moins bonne qualité sont aussi intéressantes. Par ailleurs, certaines bibliothèques municipales ont un fonds spécial cartographique (Mulhouse entre autres). Pourquoi ne pas y passer quelques heures ?

Cette approche devrait permettre d'insister sur deux points :

- a) On ne représente jamais tout sur une carte (c'est évident pour nous, mais pas pour tous nos élèves).
- b) Le choix d'une technique de représentation est lié à ce qu'on cherche à représenter, même si ce lien n'est pas toujours explicite et conscient chez le cartographe, encore moins chez le lecteur.

Cette approche "qualitative" peut être dirigée par un professeur d'histoire-géographie seul, en insistant sur l'aspect historique de certaines variations.



## II LES DIFFERENTS USAGES DES CARTES

Une classification pertinente pour notre propos est celle basée sur l'opposition entre itinéraires et territoires :

\* Une carte d'itinéraires doit respecter les angles, les orientations locales (pour permettre de faire le point). C'est ce qu'on appelle une carte conforme.

\* Une carte de territoires (administration, gestion) doit respecter les surfaces, pour visualiser le poids de chaque secteur (on se souvient que Louis XIV a refusé la cartes des CASSINI qui lui faisait "perdre" de nombreuses lieues carrées en Bretagne...). C'est ce qu'on appelle une carte équivalente.

Il faut aussi insister sur les erreurs volontaires, en particulier sur le truc qui consiste à représenter certains détails à une échelle différente de l'ensemble, pour mieux les visualiser (par exemple les plans des villages sur les cartes Michelin).

Enfin, il faut montrer les cartes spéciales, qui ne respectent ni les angles, ni les surfaces, mais conservent les positions\_\_relatives des entités géographiques (villes, pays), et mettent l'accent sur des données non géométriques, mais qui conservent quelques propriétés topologiques.

Citons deux exemples :

- Le réseau ferroviaire (ou routier) d'un pays, où les distances sont proportionnelles aux temps de parcours (avec des phénomènes de compression sur les grands axes, et de distorsion des régions mal desservies).
- Les cartes de populations, de production ou de revenus, où chaque pays est représenté par un rectangle de surface proportionnelle à la quantité représentée.

Il est important de donner à ces cartes un statut de travail sérieux, "scientifique", et en même temps d'exiger une approche rigoureuse de ces travaux.

### III PRATIQUEMENT...

Il faut faire manipuler les élèves : observer les cartes, mais aussi reporter des points, des routes, d'une carte à une autre. (Voir, dans ce même dossier, le module consacré aux géodésiques et aux loxodromies).

Il faut rappeler sans cesse qu'au niveau local, les différences sont imperceptibles, et qu'à l'échelle d'un pays comme la France, elles n'ont guère d'importance pratique.

Une activité annexe peut être de faire des relevés topographiques. Le travail de trigonométrie qui y est associé est tout-à-fait accessible en Seconde.

Il existe des logiciels de cartographie qui peuvent compléter utilement ce travail, mais qui sont assez onéreux.

Enfin, il faut être prudent sur l'emploi des mathématiques citées dans cet article en Seconde. La plupart des démonstrations sont au-dessus du niveau de la classe. Mais l'approche descriptive-qualitative devrait permettre de mieux structurer les bases de la géométrie dans l'espace, et la notion de coordonnées ; il peut être bon de rappeler sans cesse que le problème de la cartographie est à la base de certaines théories mathématiques (inversions, géométrie projective), et que le vocabulaire reste commun, malgré la relative séparation des deux domaines.

Et pour conclure, bon voyage... puisqu'une autre fonction de la carte est de faire rêver.

#### Note\_historique

Les Mulhousiens férus d'histoire locale pourront reprendre la vie et l'oeuvre du géographe LAMBERT (fondateur du réseau du même nom, toujours employé par l'I.G.N.), citoyen de la ville et république de Mulhouse.

Dans d'autres régions, le lien avec l'histoire est à chercher dans les archives municipales ou départementales.

**Titre** : Des activités pour un enseignement modulaire en classe de seconde.

**Auteurs** : Martine ALTSCHUH, Alain BONNET, Nicole BOPP, Michel BOURGUET, Michel BURET, Jean DREYER, Suzanne HAEGEL, Jean-Pierre RICHTON, Jean SAMSON.

**Mots-clés** : Modules - Mathématisation - Expérimentation.

**Résumé** : Nous avons voulu profiter de l'espace de liberté que donne l'horaire des modules pour essayer de proposer des activités dont le but essentiel est de motiver les élèves, c'est-à-dire de leur montrer la richesse des mathématiques et leur utilité. Le côté expérimental de certaines de ces activités permet d'éveiller la curiosité aussi bien des élèves dits faibles en Mathématiques que des élèves plus à l'aise.

**Sommaire** :

1. — Problème de bricoleur (hotte) ;
2. — Le pont suspendu ;
3. — Les freins du VTT ;
4. — Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la terre ;
5. — Plus fort que ma calculatrice... ! ;
6. — Erreur sur les écarts-types ;
7. — Les polyèdres de Platon ;
8. — Intersection de plans ;
9. — Géométrie (exercices à solutions multiples) ;
10. — Le scrutin proportionnel ;
11. — Le problème de la partie interrompue ;
12. — Cartographie et Mathématiques ;

**Public concerné** : Professeurs des lycées.

**Editeur** : IREM de Strasbourg (Brochure S. 150)