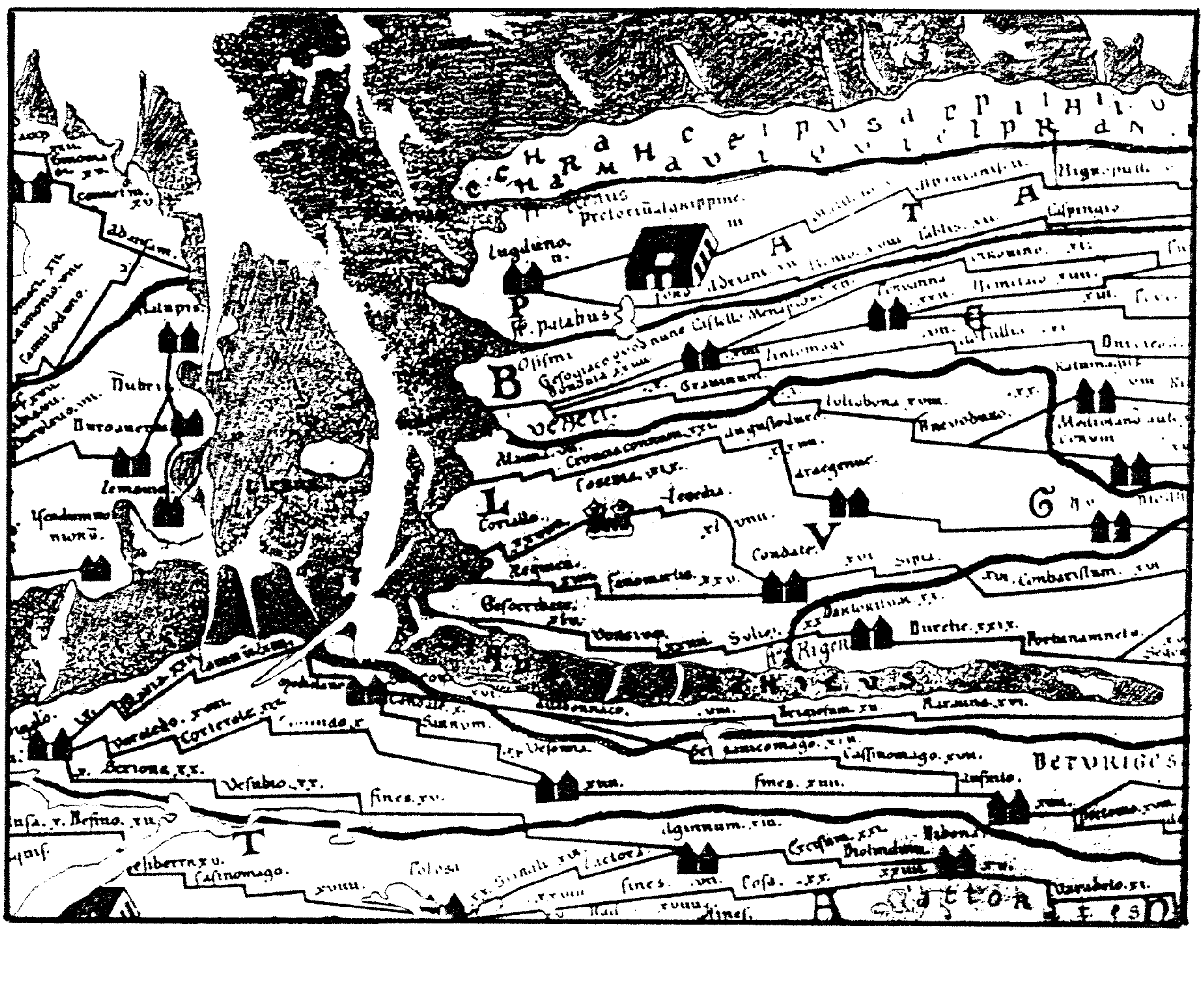
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 71 – JUIN 1993 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE : LA TABLE DE PEUTIGER

La "*Table de Peutiger*" constinue l'unique témoignage de la cartographie romaine antique. La forme actuelle en aurait été fixée vers 500 à partir d'un original du 1er siècle, recopié en 250 puis remanié jusqu'au IX^{e} siècle.

Le manuscrit actuel, conservé à la bibliothèque de Vienne a été éxécuté en 1264 par un moine de Colmar et a été retrouvé par un antiquaire d'Augsbourg, Conrad Peutiger, vers 1520.

La carte comprend 12 feuille de parchemin qui mises bout à bout donnent un document de 34 sur 680 cm. Elle représente l'empire romain de la Grande-Bretagne au Moyen-Orient. Le document de couverture est extrait de la 2^{e} feuille à partir de l'ouest (voir fac-similé p. 42, extrait du Nouveau Larousse Illustré de 1905).

C'est une représentation schématique qui ne respecte aucun des systèmes de projections modernes. Il s'agit seulement de donner des renseignements sur les routes à utiliser pour aller d'une ville à l'autre et sur les distances à parcourir (données en lieues gallo-romaines de 2,200 km). C'est donc plus une représentation conservant l'ordre et la continuité proche en ce sens de certains plans de lignes de métro ou d'autobus.

Les multiples copies sur un millénaire ont entraîné des erreurs et des modifications de nom. Ainsi la "Loire" est-elle notée "Riger" au lieu de "Liger". Les grandes lettres correspondent aux provinces :

BE(LGICA)	Belgique
LVG(DUNENSES)	Lyonnaise
(AQUI)TAN(IA)	Aquitaine

Voici quelques noms de villes et leur correspondant naturel :

Aginum : Agen
Arœgenue : Vieux (près de Caen)
Au(tricum) : Chartres
Burdigalo : Bordeaux
Castello : Cassel
Condate : Rennes
Dariorigum : Vannes
Divona : Cahors
Dubris : Douvres
Durocor(torum) : Reims
Gesocribate : Brest
Juliobona : Lillebonne
Mediolanum : Evreux
Nemataco : Arras
Ratumagus : Rouen
Teruanna : Thérouanne
Tolosa : Toulouse
Vesonna : Périgueux.

ÉDITORIAL

Traditionnellement, c'est '*PLOT*' qui assure la publication des comptes-rendu des ateliers des journées A.P.M.E.P. Il eut été curieux que les journées de Strasbourg soient publiées dans la revue de Poitiers-Limoges-Orléans-Tours alors que '*L'Ouvert*' assure par ses qualités (ne soyons pas modestes!) la renommée de la régionale alsacienne.

L'abondance des articles (trop nombreux pour n'occuper qu'un seul numéro de '*L'Ouvert*') et les relations amicales que nous entretenons avec '*PLOT*' nous ont conduit à imaginer un partage entre les deux revues. C'est pourquoi tous les abonnés du '*L'Ouvert*' recevront le numéro du '*PLOT*' consacré aux journées de Strasbourg, de même que les abonnés de '*PLOT*' recevront ce présent numéro de '*L'Ouvert*'. Et les abonnés communs? Eh bien ils recevront deux numéros, ce qui leur permettra de faire à bon compte de la publicité pour '*L'Ouvert*' (et pour '*PLOT*') en en faisant profiter un collègue qui trouvera les tarifs d'abonnement en dernière page.

Les excellentes conférences pleinières doivent être publiées dans le '*bulletin vert*' de l'A.P.M.E.P. Ainsi tous les collègues qui pour diverses raisons n'ont pu participer aux journées de Strasbourg pourront se rattraper par la lecture de ces différentes revues. Quant aux participants ils sauront enfin ce qui s'est fait dans l'atelier parrallèle qu'ils n'ont pu suivre faute de possèder le don d'ubiquité.

Merci aux auteurs de s'être donné la peine de rédiger (en français même pour les étrangers) le contenu de leur présentation quand cela était possible (ce qui ne l'est guère s'il s'agit d'un montage diapos ou d'un travail sur logiciel). Merci aux organisateurs des journées et plus particulièrement à Odile SCHLADENHAUFEN, Présidente de notre Régionale : le contenu du présent numéro et du numéro conjoint de '*PLOT*' ne donne qu'une faible idée du travail nécessaire pour la mise sur pieds et la réussite des journées nationales annuelles de l'A.P.M.E.P. dont l'édition strasbourgeoise a été particulièrement bonne.

J. LEFORT.

SOMMAIRE

N° 71 - JUIN 1993

◇ *Notre couverture : La "Table de Peutiger"* I

◇ *Editorial* II

◇ *Programme européen d'études mathématiques : réflexions*, par L. ROGERS 1

◇ *Ouvrages scolaires et apprentissages*, par M. FABRÉGAS 7

◇ *Des découvertes dans le triangle de Pascal*, par G. BERG 9

◇ *La formation continue des maîtres de Speyer (Palatinat)*, par M. SCHMIDT et M. BOHM 23

◇ *Carrefour européen : l'Allemagne et la Suisse*, par M. STRUBEL - M. MAYR et M. JACQUET 25

◇ *Droites discrètes et calendriers*, par A. TROESCH 27

◇ *Objectifs d'une politique européenne de l'enseignement*, par A. BULBER 43

◇ *A vos stylos*, par '*L'Ouvert*' 47

◇ *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes*, par J.-C. RAUSCHER 50

L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT

◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40

◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)

◇ *Prix du numéro* : 25.- F

SUPPLÉMENT AU NUMÉRO 63

PLOT

PROGRAMME EUROPÉEN D'ÉTUDES MATHÉMATIQUES : RÉFLEXIONS (1)

Léo Rogers

1. Introduction

Qu'il est bien choisi le rendez-vous de ce congrès dans cette cité historique de Strasbourg, carrefour des cultures européennes où depuis des siècles, le Rhin assure non seulement le transport des marchandises mais aussi le contact entre les personnes et la communication des idées!

Malgré les événements des semaines passées où le gouvernement britannique semble avoir eu peur d'un engagement total dans l'Europe, et malgré les doutes que nous pouvons avoir sur certains aspects du traité de Maastricht, je crois qu'il est très important que les nations européennes travaillent à l'unisson pour comprendre nos différentes cultures et découvrir les voies d'une coopération pratique dans le domaine de l'éducation des jeunes et pour l'avenir.

La politique du Parlement Européen est une idée et un idéal. Dans l'Europe unie, l'égalité des diplômes, des qualifications professionnelles et l'idée de transfert de crédits pour les études est particulièrement importante pour nous, en particulier dans le sens de l'éducation et de la formation des jeunes. Ainsi donc, nous, les professeurs, avons la tâche de mettre cette politique en pratique.

Les mathématiques ont non seulement une position centrale dans l'enseignement et la science, mais elles occupent aussi une place unique dans l'histoire et la culture de l'Europe.

Je crois qu'il est très important de comprendre les origines historiques et philosophiques des mathématiques européennes pour mettre en pratique une politique de coopération dans l'enseignement.

Ici, j'essayerai d'esquisser les grandes lignes des origines et des situations dans quelques programmes de mathématiques typiques de l'Europe. Je tenterai aussi de poser quelques questions importantes qui concernent les structures des futurs programmes français, allemand et anglais qui représentent des prototypes dans l'histoire de l'enseignement des mathématiques en Europe.

2. Les origines du programme anglais

En Angleterre en 1780 on trouve seulement deux universités. Après le conflit

(1) Ce texte est l'introduction à l'atelier, avec l'intention de provoquer des discussions sur les idées des sections 5 et 6.

malheureux de Newton et Leibniz, les mathématiques dans ces universités étaient très médiocres, il y avait un peu d'Euclide, un peu de "fluxions", un peu de tout !

Pour obtenir une place à l'université, il était nécessaire de prêter serment au Roi, chef de l'Église Anglicane.

Bien sûr, les non-anglicans, comme les méthodistes par exemple, ne voulaient pas faire cela et ils créèrent des académies privées pour l'éducation de leurs fils – fils qui sont devenus des chefs d'affaires au moment de la révolution industrielle.

Dans ces académies, on trouve un programme d'études très progressiste. Par exemple, les langues modernes (français, allemand), la géographie, l'histoire, la comptabilité, les sciences et les mathématiques appliquées.

L'"establishment" (l'aristocratie anglaise et l'Église anglicane) épouvanté par les effets de la Révolution sur les idées de liberté des peuples, puis préoccupé par les guerres Napoléoniennes, a rejeté les philosophies radicales et a interdit toute publication libérale. C'est l'origine d'une mentalité où les autorités se méfient des idées philosophiques, politiques et économiques du continent.

Ainsi, en Angleterre on trouve deux traditions séparées : les études théoriques dans les universités et les études pratiques dans les institutions pour la classe ouvrière – devenues plus tard les "polytechniques" (2).

A cause de cette division le gouvernement anglais n'a pas considéré sérieusement le système éducatif et a laissé l'organisation du programme d'études aux fondations charitables et religieuses. Ce n'est qu'en 1870 que l'on voit le gouvernement britannique promulguer les premières lois pour le système éducatif public; ces lois concernaient seulement l'âge de la scolarité, l'organisation et le financement du système, mais pas le programme d'études, croyant que ce programme faisait partie du domaine des fondations éducatives. Un autre facteur résidait dans la philosophie de l'éducation en Angleterre (3), où l'on désire placer les besoins de l'enfant au centre des programmes d'études.

Jusqu'à récemment, c'était un avantage; en fait toutes les réformes du système en Angleterre ont été motivées par les instituteurs, les professeurs et les maîtres de conférences des universités. Les auteurs des textes, les créateurs de programmes de télé et de radio, les réformateurs des programmes d'études étaient tous des professeurs qui, avec le soutien des associations professionnelles mathématiques ont contribué à la réforme de l'enseignement (4).

Grâce aux associations professionnelles et aux centres locaux pour les professeurs

(2) Cette division rend compte d'une partie considérable de l'histoire du système éducatif en Angleterre, et je crois aussi qu'elle explique un peu la situation présente; les politiciens de droite pensent que la plupart des professeurs des "polytechniques" et des écoles forment la gauche, dangereuse et progressiste.
(3) On dit en anglais "child-centred" d'après une idée du philosophe John Locke.
(4) On dit en anglais que ce type de réforme est "bottom-up" ou "grass-roots" ; voir Rogers L. (1992) "The development of the mathematics curriculum in England 1950-1990" in Gagatsis A. (Ed.) **Topics on didactics of mathematics**. Thessaloniki, 1992, pp. 245-258.

nous nous sommes attaqués aux problèmes de sexisme, de racisme et de préjugé culturel dans les programmes d'études. Bien sûr, dans la vie quotidienne nous n'avons pas trouvé toutes les solutions, mais dans les écoles, nous sommes bien conscients de la situation et nous avons travaillé pour changer les textes (les mots et les dessins) et les attitudes des étudiants et de leurs professeurs.

3. La situation présente en Angleterre

Sans doute, avez-vous entendu qu'en Angleterre nous avons le National Curriculum. Il est nécessaire d'expliquer brièvement ici comment la situation s'est développée (5).

En 1985, on trouve publié dans la revue politique du gouvernement Conservateur, le "National Economic Review" une comparaison sur la réussite en mathématiques des élèves allemands, japonais et anglais.

C'était un document politique et plein d'erreurs. Les données dataient déjà de quatre ans et "les mathématiques" étaient limitées à l'arithmétique commerciale.

Des questions d'un test de la Hauptschule allemande ont été données à quelques élèves anglais : cela a mal marché pour eux et dans la presse anglaise les élèves ont été appelé "les cancres de l'Europe".

Néanmoins ces armes étaient utilisées par les politiciens de droite, non seulement pour rejeter la responsabilité de l'échec des élèves sur les professeurs, mais aussi pour obtenir l'appui de tous les politiciens à l'idée d'un programme d'études contrôlé par le gouvernement. C'était le concept d'un programme établi dans le seul but d'améliorer les performances économiques de la nation.

Parce que le gouvernement ne pouvait faire confiance ni aux professeurs d'écoles, ni aux chercheurs, ni aux maîtres de conférences en didactique des universités, croyant que les enseignants des universités étaient des gauchistes subversistes (6). On créa des comités pour les différentes disciplines : les mathématiques, la science, etc ... chacun avec un président de droite et un programme de travail ne laissant que peu de temps aux consultations.

Alors, les politiciens pensèrent que les données de la comparaison des systèmes éducatifs entre les nations étaient corrélées au pouvoir économique et ils mirent en œuvre des politiques pour améliorer les données éducatives. Mais une amélioration dans les chiffres ne peut garantir que les jeunes apprennent mieux qu'avant. Il est nécessaire d'examiner aussi les systèmes, les méthodologies d'enseignement et plusieurs autres aspects.

Dans le nouveau curriculum, les mathématiques sont seulement pratiques, basées sur une hiérarchie des niveaux, sans aucun thèmes unifiants, sans référence à la culture et l'histoire des sciences.

---

(5) Pour les détails et une critique philosophique et polique, voir Dowling P. and Noss R. (Eds) (1990) **Mathematics versus the National Curriculum**. Falmer Press.
Voir aussi la présentation de mon collègue David Cain.
(6) Voir (2) ci-dessus.

Avec le programme d'études nous avons l'introduction d'un jugement national, contrôlé par le gouvernement, de la performance des élèves et des professeurs. Les résultats des jugements sont déjà publiés dans la presse nationale pour encourager la concurrence entre les écoles.

Tout est prévu pour faciliter le contrôle central du système selon l'idéologie de l'extrême droite, une "idéologie du marché" concerné seulement par l'idée que les mathématiques sont un outil à but économique.

4. La France et l'Allemagne

En France après 1789 il y eut une grande réforme du système éducatif et des programmes d'études; l'égalité d'accès devint très importante et avec les réformes Napoléonniennes, l'École Normale Supérieure et l'École Polytechnique eurent la responsabilité de la formation des officiers de l'armée, des ingénieurs, des artilleurs et des fonctionnaires.

Il est bien connu que les mathématiques et les sciences ont eu la part belle dans les nouveaux programmes d'études et l'histoire de cette époque est bien décrite et discutée.

En ce qui nous concerne, notons que les créateurs du système ont eu beaucoup d'estime pour les mathématiques et que ces mathématiques ont été vues dans un contexte non seulement pratique mais aussi culturel et philosophique.

Après la défaite de l'armée prussienne par Napoléon, on retrouve en Prusse une réforme éducative où les mathématiques occupaient plus de 30 % du programme. De plus on avança la théorie que les mathématiques étaient le fondement d'une formation pratique (7).

Les français et les prussiens ont cru tous deux que la position des mathématiques était essentielle dans la formation pratique des jeunes et des fonctionnaires de l'état, mais aussi que le système offrait une philosophie dans laquelle les mathématiques étaient vues dans un contexte culturel.

Un peu plus tard, après la défaite de la France lors de la guerre avec la Prusse, on trouve la remarque suivante : "les professeurs allemands ont gagné – pas les soldats", et encore que le système éducatif français a subi une autre réforme (8).

5. Comparaisons et contrastes

Les deux traditions, la française et l'allemande sont très différentes dans leurs racines culturelles et pendant que les politiciens s'attaquaient aux problèmes économiques, les deux nations créaient leurs systèmes éducatifs précis.

En France la philosophie mécanique de Descartes puis les mathématiciens du dix-

(7) Gerstell M. "Prussian education and mathematics" in American Mathematical Monthly 82 (3) 1975, pp. 240-245.
(8) Gispert Hélène, Université de Paris Sud.
"Characteristic features of mathematics in France 1860-1914" Papers given to the meeting of the British Society for the history of mathematics, September 1992.

huitième siècle ont établi les mathématiques comme faisant partie de la science et au dix-neuvième siècle la naissance du positivisme qui s'appuie sur les faits, les données et les détails techniques a renforcé cette position. En Allemagne les traditions de Kant, Fichte, Hegel et les néo-humanistes, les idées de Goethe sur la relation entre le genre humain et la nature, la fondation de l'Université de Berlin par Humboldt ont placé les mathématiques dans le domaine philosophique.

Dans les deux cas, les mathématiques ont été placées dans un rôle central au sein de leur contexte culturel particulier.

Chaque culture a établi la connaissance sur des idées différentes et à cause de l'influence mutuelle des pays voisins dans l'histoire des trois derniers siècles, il est possible d'identifier trois idées très générales : "l'encyclopédisme" de la France, "l'humanisme" de l'Allemagne et le "naturalisme" de l'Angleterre (9).

Pour l'encyclopédisme, on peut distinguer l'universalité, la rationalité et l'utilité que l'on retrouve dans la tradition des programmes français; pour l'humanisme, la moralité et l'individualisme (dans le sens de "Bildung") que l'on trouve dans la tradition allemande et pour le naturalisme, l'épistémologie avec le besoin de placer l'enfant au centre, comme on le trouve de façon typique dans les programmes d'études des écoles primaires d'Angleterre.

Bien que tous ces aspects se retrouvent dans les programmes des différents pays d'Europe, le degré de spécialisation des programmes secondaires en Angleterre et au Pays de Galles les ont séparés à ce niveau des autres pays européens.

6. Un programme européen d'études?

Est-il possible de trouver une place aux mathématiques entre ces traditions anciennes et complexes et les nouvelles idées de spécificité culturelle, de féminisme, d'identité politique et économique et du droit à une éducation bien choisie pour chacun de nos citoyens?

Les programmes de mathématiques se sont développés dans un contexte historique et culturel particulier où il n'y avait qu'une minorité qui accédait aux études. Ce qui n'était alors réservé qu'à quelques-uns est aujourd'hui obligatoire pour tous.

Dans nos établissements nous avons décidé les styles de mathématiques et leur niveau d'enseignement. Dans ces limites nous avons décidé la formation appropriée à l'artiste, au technicien, à l'ingénieur et à l'universitaire. Nous nous mettons d'accord avec l'idée que les "mathématiques doivent être enseignées à tous". Mais quelles mathématiques et à quels étudiants?

Les filières professionnelles modernes sont très différentes et les exigences concernant la nature, les niveaux de compréhension et les aptitudes aux mathématiques sont très variables.

---

(9) Ces idées sont très profondes mais pas entièrement distinctes.
Voir McLean M. (1990) **Britain and a single market Europe; Prospects for a common school curriculum**. Institute of education, London, pp. 13-32.

Il faut que nous examinions soigneusement nos hypothèses et que nous cherchions les réponses à plusieurs questions sur la nature de nos programmes ainsi que sur la nature des mathématiques dans le contexte contemporain.

Nous supposons que nous avons en commun quelques idées sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Par exemple quand nous parlons de compétences en mathématiques il s'agit :
- des capacités de l'exécution des algorithmes, etc;
- des structures conceptuelles et de tous les rapports qui les lient entre elles;
- des stratégies, des plans qui guident le choix des capacités et des rapports.

Mais nous sommes bien conscients des grands problèmes de compréhension qui sont :
- les liens entre symboles et significations, où la manipulation écrite des symboles contraste avec l'interprétation qu'on peut s'en faire dans la tête;
- les liens entre concepts et contextes, où les concepts sont isolés, abstraits, et chacun des contextes donnant lieu à des significations différentes.

Est-il possible de trouver entre ces aspects quelques thèmes, quelques niveaux en commun pour tous nos élèves? Mais, si nous cherchons quelques chose de commun à tous, ne risquons-nous pas de terminer sur le plus petit dénominateur?

D'un autre côté, si on continue d'enseigner les mathématiques comme d'habitude, nous savons bien que plusieurs étudiants échouant, seuls quelques-uns continuent en réalité l'étude des mathématiques.

Nous avons ici un conflit entre deux philosophies opposées. La première assez traditionnelle : les mathématiques sont neutres, a priori, elles existent et nous devons les apprendre. La seconde plus nouvelle : les mathématiques sont une construction humaine et sont rattachées au contexte socio-culturel.

La réponse idéale est peut-être que les mêmes mathématiques devraient être enseignées à tous les étudiants mais à des vitesses différentes. Mais on peut aussi envisager des mathématiques appropriées selon le niveau, les aptitudes et le contexte culturel des étudiants.

On trouve ici un très grave problème de choix. Qui choisira quelles mathématiques étudier? Les professeurs ou les étudiants? Qui saura le faire? Et les programmes d'études, pourront-ils être réalisés (10).

L'enseignement des mathématiques est plein de conflits et de défis et créer un programme européen, si cela est possible, demandera du temps. Mais si nous voyons l'avenir de cette façon, il faut dès maintenant travailler pour mieux comprendre les racines culturelles, les exigences socio-économiques contemporaines et la nature des mathématiques elles-mêmes.

---

(10) Pour une discussion minutieuse de ces problèmes, voir Howson G. and Wilson B (Eds), (1986) **School mathematics in the 1990s**, ICMI study series, Cambridge University Press.

OUVRAGES SCOLAIRES ET APPRENTISSAGES

Michèle Fabrégas

Responsable de la commission "Inter-IREM/APMEP"

Le titre de cet atelier était :

"Les manuels scolaires dans certains pays européens"

Le fait de n'avoir pas au départ précisé les pays n'a pas dissuadé les collègues! Il y eut une trentaine de participants dont un collègue de l'Institut de recherche et documentation du canton de Neufchâtel, un universitaire britannique ainsi que trois collègues espagnols.

En une heure trente, nous ne pouvions pas présenter un ou plusieurs types de manuels de chacun des pays ... Nous avons donc décidé de nous limiter à deux pays, l'Espagne et la Grande-Bretagne. De plus M. Calame, collègue helvétique, auteur de manuels, présent à notre atelier, a expliqué la conception des manuels du canton de Neuchâtel. Il n'y a pas de cours dans les livres, l'objectif étant de rendre l'élève actif (ateliers, jeux, manipulations).

L'atelier s'est donc déroulé en deux parties. La première, animée par Michel Leberre, avait pour thème les ouvrages scolaires espagnols. Une discussion s'est engagée entre les participants et les collègues espagnols après que fut distribuée et présentée la compilation de certaines pages de manuels espagnols. Les pages des manuels que nous présentions nous semblaient bien mettre en évidence les disparités avec nos livres scolaires; il y a des tableaux chronologiques, des catalogues de formules ou de représentation graphiques, des exercices de calculs, peu d'exercices avec des questions enchaînées ... Etait-ce dû à la collection que nous possédions? De plus, nous ne savions pas trop comment ils sont utilisés dans la classe. Des éléments de réponses furent donnés par les collègues espagnols présents. Apparemment, 80 % des enseignants travaillent avec cette collection mais à des fins diverses. La majorité fait des cours magistraux traditionnels. Tous les manuels reçoivent le label de conformité du ministère. C'est une formalité. Le contenu des programmes actuels ressemble beaucoup à ceux que nous avions il y a une dizaine d'années. Cependant, le langage et les notations sont moins rigoureuses, l'approche des nouveaux concepts se fait à l'aide d'images mentales (asymptote : avion qui atterrit). Ils se sont aussi inspirés des fiches du Mathematical Shell Center.

En fait, chaque lycée adapte le programme à sa façon. Actuellement, les programmes sont en cours de transformation ce qui provoque une certaines inquiétude chez les collègues.

La seconde partie, animée par Bernadette Denys, fut consacrée à la présentation de la géométrie dans l'espace dans quelques manuels britanniques. Après une présentation du système scolaire en Grande-Bretagne, Léo Rogers a situé la complexité des relations entre les différents systèmes en place et le National Curriculum, introduit actuellement en Angleterre et au Pays de Galles.

Les participants eurent en main les copies de trois leçons destinées à des élèves d'un niveau moyen de 15-16 ans. Ils furent sensibles à l'aspect concret de la présentation faite aux élèves. L'esprit de l'exposition d'un même sujet varie suivant le niveau de compétences des élèves.

Cette rencontre n'est qu'un premier pas vers une collaboration et une réflexion plus large avec les enseignants espagnols, britanniques et suisses. Tout au long de l'atelier les échanges furent fructueux.

Nous envisageons de prolonger ces ateliers lors des journées de Poitiers.

> ...le spectacle sportif résoud en imagination la contradiction entre égalité et inégalité, incarnant une synthèse exemplaire entre notre "culture de la concurrence" et notre "culture de la justice". La concurrence est tenue pour légitime dès lors qu'elle s'exerce loyalement et que chacun a sa chance. L'inégalité est acceptée puisque les meilleurs gagnent, mais ces hommes et ces femmes qui s'affrontent pour une médaille, un titre ou toute autre récompense, réelle ou symbolique, sont pareils à nous, ils sont sortis de nos rangs et, une fois passé leur moment de gloire, y retourneront.
>
> Thomas FERENCZI
> *Eloge du premier venu*
> "Le Monde" 2-3 août 1992.

DES DÉCOUVERTES DANS LE TRIANGLE DE PASCAL

Gregor BERG

0.– Remarques préliminaires

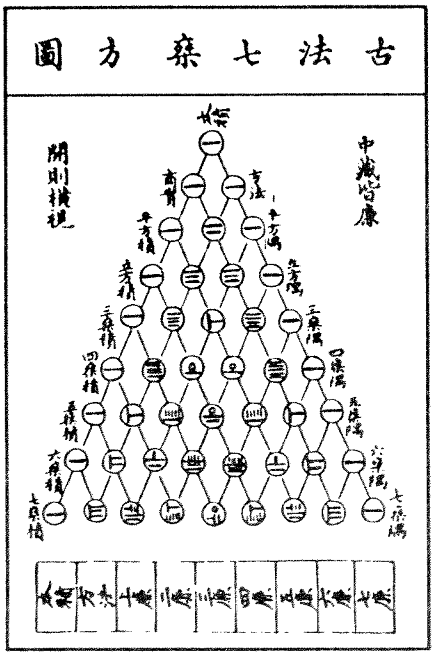


Figure 0

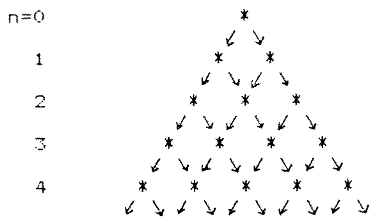
Le "triangle arithmétique" a été étudié par Blaise Pascal dans un traité publié en 1665 à titre posthume, c'est pourquoi il porte le nom de "triangle de Pascal". Il était pourtant connu depuis longtemps, par exemple en Chine au 11^e siècle (voir fig. 0, page de l'œuvre "Le miroir de jade des quatre éléments", publié par le mathématicien chinois Zhu Shi Jie en 1303).

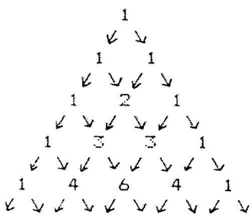
Dans cet article on donne une méthode générale pour introduire le triangle et découvrir de nombreuses propriétés. On terminera en présentant un algorithme rapide pour calculer de très grands coefficients binomiaux (on pourra consulter à ce sujet les deux articles suivants : Berg G. "Entdeckungen am Pascaldreick" in DdM 4 (1986) pp. 264–283 et Berg G. "Exakte Berechnung von Binomialkoeffizienten", in DdM 2 (1988) pp. 115–127).

1.– Définitions et propriétés simples

Considérons un système de rues à sens unique reliant des lieux. Du point de vue mathématique, ce système représente un graphe orienté. Les lieux sont les sommets ou nœuds, les rues sont les arêtes. Le graphe peut être continué indéfiniment vers le bas. Les sommets seront repérés par leurs coordonnées (n, k), les lignes sont numérotées de 0 à n ... et les colonnes de 0 à k ... (voir fig. 1).

Cherchons maintenant **le nombre de chemins différents** qui relient $(0, 0)$ à (n, k). Désignons ce nombre par le symbole C_n^k. Pour les sommets du bord du graphe (c'est-à-dire pour $k = 0$ ou pour $k = n$) il n'y a qu'un chemin, par conséquent $C_n^0 = C_n^n = 1$. Pour $1 \leq k \leq n - 1$, nous pouvons remarquer qu'on doit passer par un des sommets $(n - 1, k - 1)$ ou $(n - 1, k)$ pour atteindre le sommet (n, k). (Appelons de tels sommets par lesquels on doit passer , **points de contrôle.**)





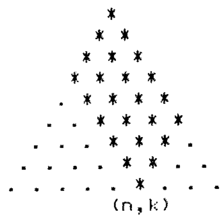


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3*

On obtient ainsi la formule de récurrence :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Nous poserons par définition $C_0^0 = 1$ et $C_n^k = 0$ pour $k < 0$ ou $k > n$. De cette façon la formule est juste pour tout $n > 0$ et tout k. En remplaçant les sommets par les nombres C_n^k nous obtenons **le triangle de Pascal** (fig. 2).

Quelques caractéristiques du triangle sautent à l'œil immédiatement :
– Le bord du triangle n'est formé que de nombres 1.
– La première colonne ($k = 1$) est formée des entiers naturels successifs, c'est-à-dire que $C_n^1 = n$.

Explication : En chacun des n points du bord, on peut passer de la colonne $k = 0$ à la colonne $k = 1$ pour atteindre le sommet $(n, 1)$.
– De la même façon, pour la colonne symétrique $k = n - 1$, on trouve $C_n^{n-1} = n$.
– Le schéma paraît symétrique par rapport à un axe partageant chaque ligne en deux.

Cela est évident : puisque le système des rues possède cette symétrie, il en est de même du système des nombres. Nous en déduisons le :

Théorème 1 :
Pour tout (n, k) on a $C_n^k = C_n^{n-k}$.
En particulier $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

2.– Un programme de calcul des C_n^k

On cherche un algorithme qui calcule C_n^k pour n et k donnés. Comme la récurrence utilise pour le calcul de C_n^k les deux nombres immédiatement supérieurs – dans le tableau –, il faut calculer tous les nombres qui se trouvent dans le parallélogramme de sommets $(0, 0)$, (k, k), (n, k), $(n - k, 0)$ (fig. 3).

De façon élégante, on utilise une procédure récurrente qui contient la formule et les conditions initiales. Cette procédure s'appelle elle-même et parcourt le tableau jusqu'au bord pour obtenir des valeurs concrètes puis calcule à partir de ces valeurs, le coefficient cherché.

```
PROGRAM PASCAL;
VAR N,K:INTEGER;

FUNCTION C(I,J:INTEGER):INTEGER;
    BEGIN
        IF J>I THEM C:= 0 ELSE
            IF (I=J) OR (J=0) THEN C:=1
                ELSE C:= C(I-1,J)+C(I-1,J-1)
    END;

BEGIN
    PAGE;
    WRITELN('donner N et K');
    READ(N,K);
    WRITELN('C(',N:2,',',K:2,')=',C(N,K):4);
END.
```

Programme (en PASCAL)

3.– Une autre récurrence et la formule explicite

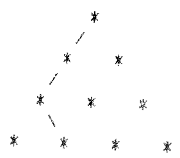


Figure 4

Nous décrivons un chemin qui relie $(0,0)$ à (n,k) d'une façon plus précise en notant à chaque ligne si l'on continue à droite (d) ou à gauche (g) selon la direction du mouvement (fig. 4). Par exemple (d,d,g) signifie : "Deux fois à droite puis une fois à gauche en partant de $(0,0)$". On obtient ainsi le sommet $(3,1)$.

Chaque chemin aboutissant au sommet (n,k) est décrit de façon unique par un n-uplet dans lequel la lettre "g" apparaît k fois et la lettre "d" $(n-k)$ fois.

Comparons les deux nombres C_{n-1}^{k-1} et C_n^k $(k \geq 1)$, c'est-à-dire demandons-nous comment varie le nombre de chemins quand on fait un pas de plus vers la gauche. Pour cela imaginons un $(n-1)$-uplet contenant $(k-1)$ fois la lettre "g". Il nous faut maintenant amplifier ce $(n-1)$-uplet en un n-uplet en introduisant un "g" supplémentaire. Cela est possible de n façons : avant le premier élément, entre deux éléments quelconques ($n-2$ façons) ou après le dernier. On obtient n fois plus de chemins mais ces chemins ne sont pas tous différents. Dans un n-uplet contenant k fois la lettre "g", chaque "g" peut être considéré comme la lettre ajoutée. On a donc compté k fois le même chemin par la construction précédente. Finalement :

Théorème 2 :
Dans le triangle de Pascal on a la récurrence suivante sur le nombre de chemins :

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}.$$

En appliquant cette récurrence k fois, on trouve une formule explicite pour C_n^k :
$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ avec $k! = k(k-1)\dots 1$.
En multipliant haut et bas par $(n-k)!$ il vient :
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, relation également valable pour $k = 0$ ou $k = n$ si on pose $0! = 1$.
D'où le :

Théorème 3 :
Les nombres du triangle de Pascal sont donnés par les formules explicites :

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

4.– Le théorème du binôme

On se propose d'écrire sous la forme d'une somme le binôme $(a+b)^n$. Quand on effectue le produit, en raison de la distributivité, on est amené à choisir l'un des termes a ou b dans chacun des n facteurs $(a+b)$ et ce de toutes les façons possibles.

On a ainsi une analogie avec le triangle : à un produit de n facteurs où apparaît k fois le facteur b et $(n-k)$ fois le facteur a correspond un chemin dans le triangle où l'on se décide k fois pour la gauche et $(n-k)$ fois pour la droite. On a bien C_n^k produits égaux, k pouvant prendre toutes les valeurs de 0 à n.

Théorème 4 :
Pour a et b réels, n naturel, on a la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

C'est à cause de ce théorème que les nombres apparaissant dans le triangle s'appellent "**coefficients binomiaux**". On écrit indifféremment C_n^k ou $\binom{n}{k}$, forme que l'on va utiliser maintenant.

5.– Quelques sommes dans le triangle

Etudions les sommes de termes pris de diverses manières.

1) Somme des termes d'une ligne :

$$\begin{array}{cl} 1 & = 1 \\ 1+1 & = 2 \\ 1+2+1 & = 4 \\ 1+3+3+1 & = 8 \\ \dots & \dots \end{array}$$

On trouve 2^n pour la ligne n.

2) Somme alternée des termes d'une ligne

$$\begin{array}{ll} 1 - 1 & = 0 \\ 1 - 2 + 1 & = 0 \\ 1 - 3 + 3 - 1 & = 0 \\ 1 - 4 + 6 - 4 + 1 & = 0 \\ \dots & \dots \end{array}$$

On trouve toujours 0 pour $n > 0$.

3) Somme des termes d'une colonne (k fixe) jusqu'à la ligne n.

$$\begin{array}{lll} k = 3 & 1 & =1 \\ & 1 + 4 & = 5 \\ & 1 + 4 + 10 & = 15 \\ & 1 + 4 + 10 + 20 & = 35 \\ & 1 + 4 + 10 + 20 + 35 & = 70 \\ & \dots & \dots \end{array}$$

On obtient l'élément $\binom{n+1}{k+1}$.

4) Somme des m termes d'une colonne affectés des facteurs décroissant $m, m-1, \dots, 1$.

$$\begin{array}{lll} k = 2 & 1 & =1 \\ & 2 \,.\, 1 + 1 \,.\, 3 & = 5 \\ & 3 \,.\, 1 + 2 \,.\, 3 + 1 \,.\, 6 & =15 \\ & 4 \,.\, 1 + 3 \,.\, 3 + 2 \,.\, 6 + 1 \,.\, 10 & = 35 \end{array}$$

On obtient l'élément $\binom{n+2}{k+2}$ avec $m = n - k + 1$.

5) Somme des carrés des nombres de la ligne n :

$$\begin{array}{ll} 1 \,.\, 1 & = 1 \\ 1 \,.\, 1 + 1 \,.\, 1 & = 2 \\ 1 \,.\, 1 + 2 \,.\, 2 + 1 \,.\, 1 & = 6 \\ 1 \,.\, 1 + 3 \,.\, 3 + 3 \,.\, 3 + 1 \,.\, 1 & = 20 \end{array}$$

On obtient l'élément $\binom{2n}{n}$.

6) On effectue la somme, non pas d'une ligne ou d'une colonne, mais en oblique. En commençant par un 1 du bord gauche, on prend à chaque fois le 2[e] terme à droite dans la ligne immédiatement au-dessus :

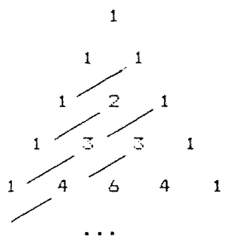


Figure 5

On obtient les termes successifs f_i de la suite de Fibonacci, termes définis par la récurrence $f_0 = 1, f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n-1}$ pour $n \geq 0$. Plus précisément :

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots$$

La démonstration se fait aisément par récurrence :
- Pour $n = 0$ et $n = 1$ on obtient bien 1.
- On prouve ensuite que la somme vérifie la formule de récurrence de Fibonacci.

$$\begin{array}{r} \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots \\ + \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \dots \\ \hline = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \dots \end{array}$$

Le signe d'égalité est justifié par la récurrence du théorème 1.

La démonstration des exemples 1 et 2 est simple : on pose $a = 1$ et $b = 1$ (resp. -1) dans la formule du binôme.

Pour les démonstrations des autres exemples, on se sert d'une méthode expliquée au paragraphe suivant. Mais notons tout d'abord le :

Théorème 5 :
Dans le triangle de Pascal on a les formules sommatoires :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i . \binom{n}{i} = 0$$
$$\sum_{i=k}^{n} = \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$
$$\sum_{i=k}^{n} (n-i+1) . \binom{i}{k} = \binom{n+2}{k+2}$$
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Pour les nombres de Fibonacci on a :

$$f_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots$$

6.– La convolution de Vandermonde

```
              *
             * *
            * * *
r          % % % .
          . * * . .
n        . . ? . . .
```

Figure 6

On obtient une généralisation du théorème 1 quand on cherche dans une ligne quelconque les points de contrôle par lesquels on doit passer si l'on veut atteindre le sommet (n, k); (voir la barrière de % dans la ligne r de la figure 6).

Pour obtenir $\binom{n}{k}$ on calcule d'abord le nombre de chemins qui passent par le point de contrôle (r, i), nombre qui est précisément $\binom{n-r}{k-i}$. Par conséquent $\binom{n}{k}$ est la somme de tous les produits $\binom{r}{i}.\binom{n-r}{k-i}$, d'où en posant $r + t = n$:

Théorème 6 :
Pour les coefficients binomiaux on a la "convolution de Vandermonde" :

$$\binom{r+t}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{r}{i}\binom{t}{j}.$$

La formule conduit à un schéma très simple pour calculer de nouveaux coefficients. On utilise pour cela une analogie avec la multiplication des nombres réels. On remarque que les coefficients qui interviennent sont ceux qui apparaissent dans l'équation $(1 + x)^{r+t} = (1 + x)^r (1 + x)^t$ quand on développe les deux membres. Le coefficient de x^k dans le membre de gauche est $\binom{r+t}{k}$ tandis que dans le membre de droite il est obtenu en faisant la somme de tous les produits qui contiennent les facteur x^i et x^j avec $i+j = k$. C'est exactement ce que l'on fait en multipliant deux nombres à la différence près qu'on n'a pas de retenues puisque x est indéterminé.

Exemple :

3^e^ ligne . 4^e^ ligne

7^e^ ligne

$$\begin{array}{cccccccc}
\multicolumn{8}{c}{(1\ \ 3\ \ 3\ \ 1)\cdot(1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1)} \\
\hline
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
 & 4 & 12 & 12 & 4 & & & \\
 & & 6 & 18 & 18 & 6 & & \\
 & & & 4 & 12 & 12 & 4 & \\
 & & & & 11 & 3 & 3 & 1 \\
\hline
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

7.– Le triangle de Pascal modulo 2

Cherchons maintenant des propriétés de divisibilité des coefficients binomiaux. Commençons par le diviseur 2. Pour avoir une vue d'ensemble, on considère le triangle modulo 2 (fig. 7) dans lequel on n'a marqué que les restes non-nuls. On remarque une structure de triangles imbriqués, les uns à l'endroit séparés par des triangles de zéros qui sont à l'envers. De plus :

Théorème 7 :
Tous les nombres des lignes $2^m - 1$ sont impairs.

La démonstration peut se faire par récurrence.

D'une manière analogue on obtient les triangles modulo p où p est un nombre premier (fig. 8, 9, 10). Il apparaît alors une structure **autosimilaire** : à toute échelle, plusieurs triangles égaux composent un triangle semblable.

p = 2

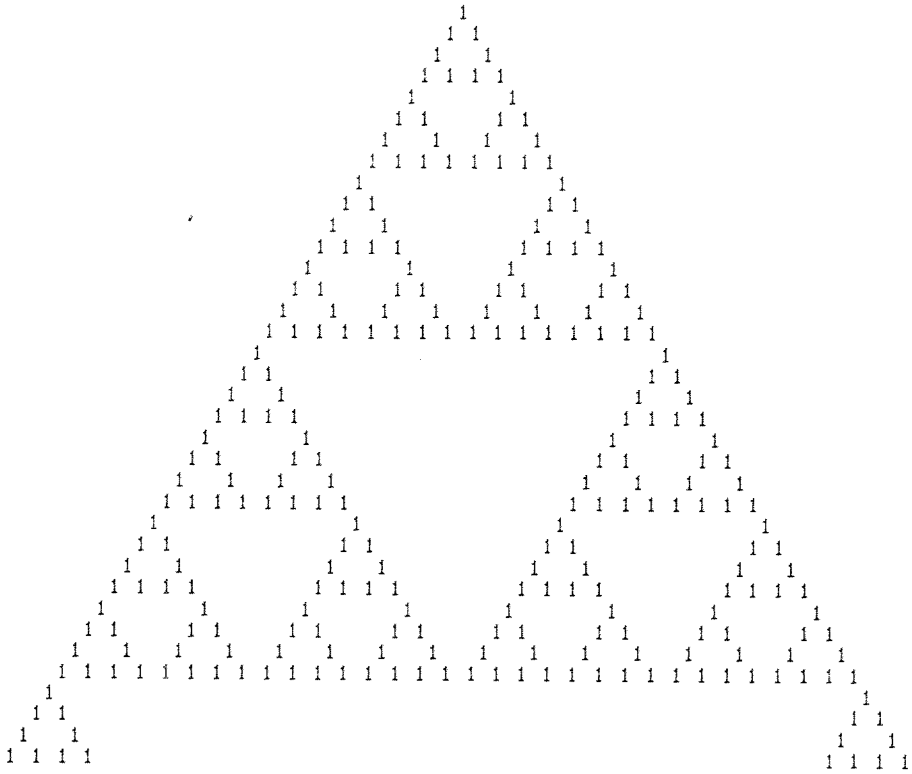


Figure 7

p = 3

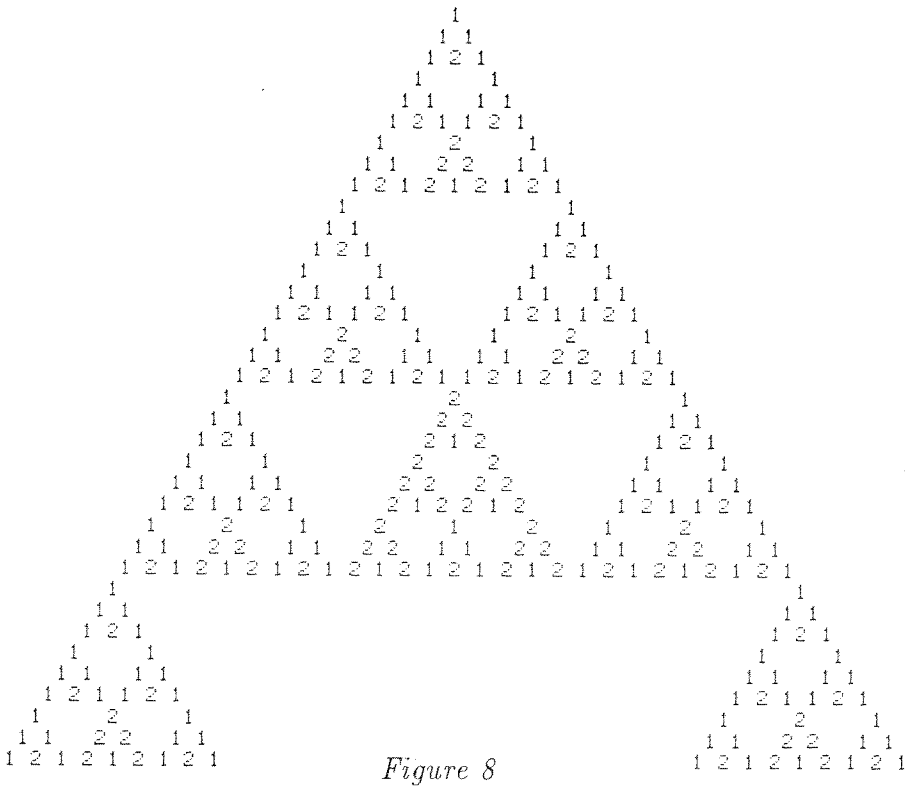


Figure 8

p = 5

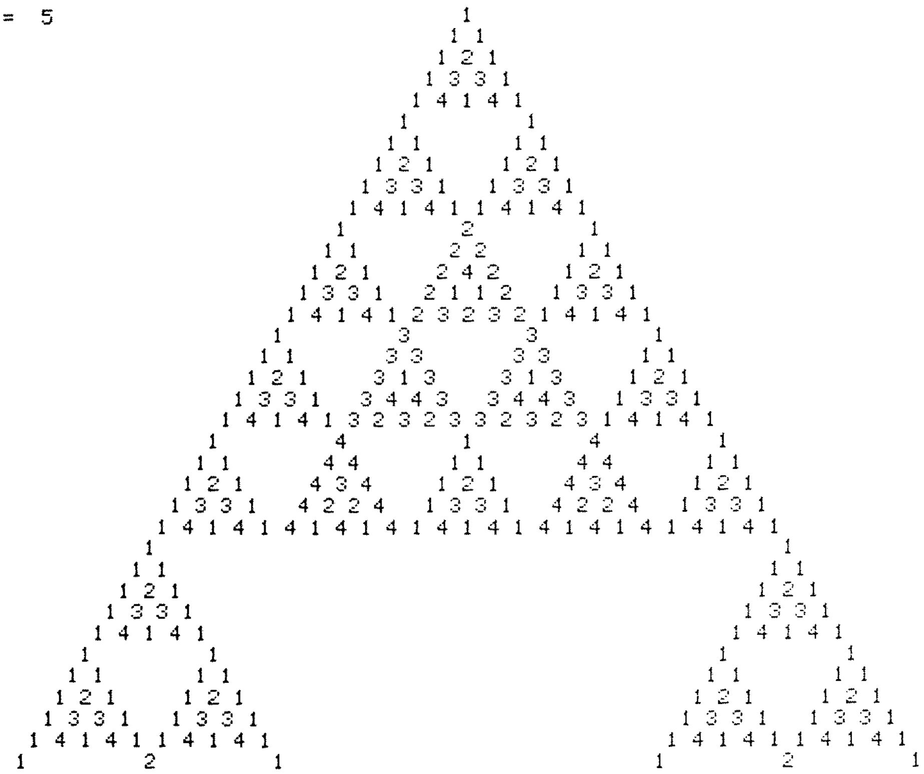


Figure 9

p = 7

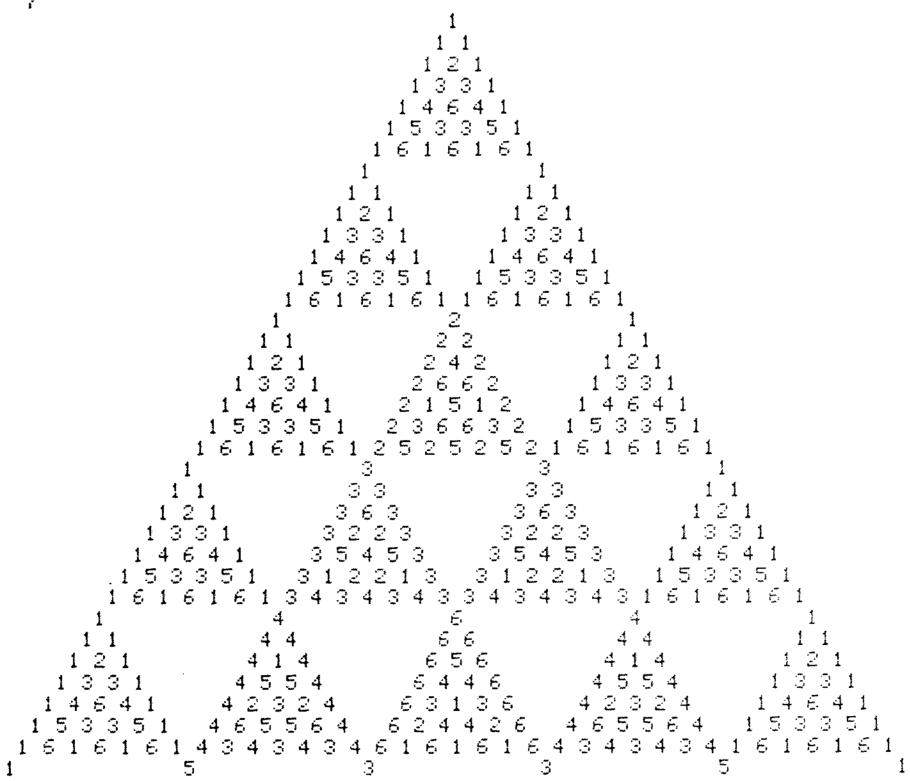


Figure 10

Une propriété générale est qu'il n'y a que des zéros (sauf au bord) dans la ligne p^m.

Théorème 8 :
Soit p un nombre premier. La ligne p^m du triangle de Pascal modulo p ne contient que des zéros sauf aux bords où apparaît le nombre 1.

Démonstration par récurrence sur m en utilisant la convolution de Vandermonde.

Par ailleurs, considérons les triangles les plus petits – nous parlerons de "triangles élémentaires" qui ne contiennent pas de zéro. Nous avons :

Théorème 9 :
Les coefficients $\binom{u}{v}$ avec $0 \leq v \leq u \leq p-1$ ne sont pas divisibles par p.

Démonstration : la formule du théorème 3 montre que tous les facteurs premiers de $\binom{u}{v}$ sont plus petits que p.

Considérons les sommets de triangles particuliers, sommets se trouvant aux points $(up^m, vp^m), (0 \leq u, v < p)$. On constate que :

- Ces sommets portent la valeur correspondante du triangle élémentaire, c'est-à-dire $\binom{u}{v}$.
- Les triangles particuliers qui les portent ont la hauteur p^m et la largeur p^m. Nous désignerons ces triangles particuliers par $D^m(u,v)$. En raison de la linéarité de la récurrence et des zéros entre les $D^m(u,v)$, nous avons :

Théorème 10 :
Pour tout nombre naturel m on a :

$$D^m(u,v) = \tbinom{u}{v} D^m(0,0) \qquad 0 \leq v \leq u \leq p-1$$

l'égalité étant considérée élément par élément

et $D^m(u,v)$ est le triangle à p^m lignes dont la pointe est située en (up^m, vp^m).

```
(p=5)              D
                 D   D
               D  2D   D
             D  3D  3D   D         = D'
           D  4D  1D  4D   D
```

Figure 11

Exemple (fig. 11) : un $(m+1)$ triangle D' est formé de plusieurs m triangles, chacun étant multiplié par les facteurs du triangle élémentaire. D' est ainsi une image agrandie p fois du triangle D.

8.– Dimension fractale

On peut, si l'on veut, calculer pour ces objets autosimilaires une **dimension fractale** ou **dimension de Hausdorff**. On a la formule $\dim = \frac{\log N}{\log(1/f)}$, si l'on a

N objets égaux composant un objet semblable dans le rapport de similitude $1/f$. Ainsi pour un cube dont on divise les arêtes en 3 ($f = 1/3$) on obtient une division en 3^3 cubes égaux ($N = 3^3$ et $dim = 3$). Autrement dit $N = (1/f)^{\mathrm{dim}}$.

Pour les triangle modulo p on a $N = \frac{p(p+1)}{2}$ et $1/f = p$. Exemple : pour $p = 2$ on a le fameux triangle de Sierpinski avec dim $= \log 3/\log 2 = 1,58\cdots$

9.– Triangle modulo-p et représentation en base p

On cherche pour un élément de $D^m(u,v)$ de coordonnées (n,k) l'élément correspondant du triangle $D^m(0,0)$. Soit $n < p^{m+1}$, alors l'élément correspondant a les coordonnées "réduites" $(n - up^m, k - vp^m)$. Nous écrirons n et k en base p :

$$n = u_m p^m + u_{m-1}p^{m-1} + \ldots + u_0 = u_m u_{m-1}\ldots u_0$$
$$k = v_m p^m + v_{m-1}p^{m-1} + \ldots + v_0 = v_m v_{m-1}\ldots v_0.$$

avec tous u_i et v_i appartenant à $[\![0, p-1]\!]$ et $u_m \neq 0$. Par suite (n,k) est un point de $D^m(u,v)$ si et seulement si $u = u_m$ et $(n - up^m, k - vp^m)$ est un point du triangle de Pascal, c'est-à-dire si $0 \leq k - vp^m \leq n - up^m$. C'est le cas si v vaut au plus v_m. S'il n'y a pas de tel v, l'élément se trouve dans un "zéro-triangle" entre deux m-triangles.

Exemple :
$n = 15$; $k = 9$; $p = 7$
$15 = 2 \times 7 + 1 = 21_7$
$9 = 1 \times 7 + 2 = 12_7$.
On a $\binom{15}{9} = 0 \bmod 7$ (voir fig. 10), l'élément ne se trouve dans aucun des trois 1-triangles qui sont coupés par la ligne numéro 15. Les coordonnées réduites sont en effet (1,2), point qui se trouve en dehors du triangle.

Nous allons faire m réductions pour obtenir une relation surprenante entre les coefficients binomiaux et la représentation en base p.

1er pas : on calcule les coordonnées réduites de (n,k) :

$$(n_1, k_1) := (n - u_m p^m, k - v_m p^m) = (u_{m-1}, u_{m-2}\ldots u_0, v_{m-1}v_{m-2}\ldots v_0)$$

Si $k_1 > n_1$ alors $\binom{n}{k} = 0 \bmod p$. Et d'après le théorème 10 on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{u_m}{v_m}\binom{n_1}{k_1} \bmod p.$$

2ème pas : analogue avec (n_1, k_1).
Et on recommence ainsi m fois. On obtient un résultat déjà publié par E. Lucas en 1878 dans l'American Journal of Mathematics.

Théorème 11 :
Soit p un nombre premier, n et k des naturels représentés en base p par $n = u_m \ldots u_0$ et $k = v_m \ldots v_0$; on a $\binom{n}{k} = \binom{u_m}{v_m}\ldots\binom{u_0}{v_0}$ mod p.

Corrolaire : $\binom{n}{k}$ est divisible par p si et seulement si il existe un indice i tel que $u_i < v_i$.

Démonstration : $\binom{u_i}{v_i}$ n'est pas divisible par p si $0 \leq v_i \leq u_i \leq p-1$ (d'après le théorème 9).
Exemple : $n = 53$; $k = 29$; p=5
$53 = 2 \times 25 + 0 \times 5 + 3 = 203_5$
$29 = 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 = 104_5$. Comme $4 > 3$ on a $v_0 > u_0$ et $\binom{53}{29} = 0 \bmod 5$.

Autre question : combien d'éléments non nuls y-a-t-il dans la n-ième ligne du triangle?

Solution : on compte les possibilités de choisir k dans $\binom{n}{k}$ de façon que pour chaque i on ait $v_i \leq u_i$. Pour chaque u_i il y a u_i+1 nombres v_i. En faisant la multiplication il vient :

Théorème 12 :
Le nombre des coefficients binomiaux non divisibles par p est égal au produit

$$\Pi_{i=0}^{m}(u_i + 1) \text{ si } n = u_m u_{m-1} \ldots u_{0_{(p)}}.$$

En particulier le nombre de coefficients impairs dans la ligne n est égal à $2^{\mathcal{L}(n)}$ où $\mathcal{L}(n)$ est le nombre de chiffres 1 dans la représentation binaire de n.

10.– Un algorithme très rapide :

Présentons rapidement un autre résultat concernant la divisibilité des coefficients binomiaux en liaison avec la décomposition en base p (voir Berg).

Théorème 13 :
L'exposant $e_p\left(\binom{n}{k}\right)$ de p dans la décomposition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de retenues dans la soustraction $n - k$ effectuée en base p.

Exemple : $p = 5$; $n = 53$; $k = 29$ 3)

$$\begin{array}{r} n = 203_5 \\ k = 104_5 \\ \hline 11 \\ n - k = \ 44_5 = 24 \end{array}$$

on a deux retenues donc $r = 2$ et par conséquent $\binom{53}{29} = \ldots 5^2 \ldots$
On en déduit un **algorithme très rapide** pour calculer $\binom{n}{k}$ (voir Goetgheluck) :

1) Disposer d'un tableau de nombres premiers assez grand (par exemple à l'aide du crible d'Eratosthène).

2) Calculer $r(p)$ pour chaque p du tableau en faisant la soustraction correspondante.

3) Calculer le produit $\Pi_{p \leq n} p^{r(p)}$ avec un algorithme de calcul pour nombres longs.

2^5	3	5	7	11^2	13	17	19	23	29
31^2	41	43^2	53	67	71	73	79	101	103
107	109	113	131	139	151	163	181	211	227
229	233	239	241	257	263	269	271	277	281
283	307	311	313	317	331	359	367	373	379
383	389	397	449	457	461	463	467	479	487
491	599	601	607	613	617	619	631	641	643
647	653	659	661	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	1801	1811	1823
1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877	1879	1889	1901
1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987	

```
02653904222867397545678739142905903777067104979338671762715016262418640430064272
62310937998111148389471423851218021330767044101117055854597216623602554597658168
45884652970651906334121969386919801638173200926910417305158133011239506272346202
914323346405194975698231850133683758620960
```

Voici le résultat d'une application de cet algorithme à $\binom{1991}{1791}$. D'abord la décomposition en facteurs premiers, puis la valeur exacte avec 281 chiffres (le calcul prend moins de 5 secondes sur le processeur 8088).

11.– Conclusions pédagogiques

Lors des explorations du triangle on tombe sur de nombreuses propriétés et relations qui peuvent être mises en valeur de plusieurs façons dans l'enseignement.

1) Le triangle de Pascal offre des possibilités de travail à tous les niveaux scolaires. Dès la 6ème on peut traiter le problème des chemins sur le graphe et introduire la notion de récurrence (naturellement sans coordonnées, par exemple de la façon suivante : "Le nombre de chemins aboutissant à un carrefour est la somme des deux nombres voisins immédiatement au-dessus"). Et on laisse les élèves découvrir une série de propriétés. On peut en expliquer quelques-unes par simple contemplation. D'autres seront seulement relevées sans qu'on puisse les prouver à ce niveau. Par exemple, on peut expliquer la relation entre le triangle et la formule du binôme, si l'on traite cette formule. Les démonstrations qui utilisent la récurrence ne sont faisables que plus tard (en Allemagne en 11ème année scolaire). C'est pourquoi la formule explicite ne peut être traitée que par des élèves plus avancés. Mais quelques formules sommatoires peuvent être expliquées plus tôt de manière combinatoire. Le problème des chemins est un des moyens pour que les élèves fassent connaissance avec les méthodes combinatoires. Par exemple l'algorithme utilisant la formule de récurrence est court et simple mais il est lent et utilise beaucoup de mémoire.

Quand on parle de divisibilité on peut introduire le triangle modulo-p de façon naturelle pour en faire découvrir des propriétés par les élèves. Ils s'exercent sur les calculs de congruences dans la construction de ces triangles. En outre l'apparition de l'aspect esthétique ajoute à leur motivation. Les liens entre le triangle modulo-p et la représentation en base p ne peuvent être traités que par des élèves plus âgés.

2) On met en valeur beaucoup d'idées fondamentales qui peuvent être expliquées à différents niveaux scolaires selon le degré de difficulté correspondant. Rappelons la spirale de Bruner. A côté d'activités centrales et caractéristiques comme calculer, ordonner, concrétiser, formaliser, démontrer, il faut noter, en raison de l'influence croissante de l'ordinateur sur l'enseignement des mathématiques, l'importance de la notion de généralisation qui est mise en œuvre dans la récurrence. Celle-ci joue un rôle crucial dans la génération du triangle et dans la démonstration de ses propriétés.

3) On apprend quelques stratégies spécifiques à différents domaines : calcul de congruence, raisonnement par récurrence, combinatoire, représentation en base p, décomposition en facteurs premiers ...

4) L'ordinateur est un outil qui donne des illustrations variées facilitant les découvertes. On peut montrer de façon exemplaire aux élèves ce qu'est la genèse des mathématiques dans le sens d'une mathématique expérimentale qui a gagné en importance avec l'utilisation des ordinateurs.

5) La résolution d'un problème apporte d'autres questions et motive pour réappliquer les techniques apprises à d'autres problèmes. Qu'obtient-on en appliquant le problème des chemins à un autre graphe, par exemple à celui des chemins du Roi sur un échiquier? Quels triangles obtient-on si la congruence ne se fait pas selon un nombre premier? ...

12.– Bibliographie.

BERG G.– *Exakte Berechnung von Binomialkoeffizienten.*– In DdM 2, 1988, pp. 115–127.

BERG G.– *Entdeckungen am Pascaldreieck.*– In DdM 4, 1986, pp. 264– 283.

GLAISHER J.W.L.– *On the residue of a binomial theorem coefficient with respect to prime modulus.*– In Quart. J. Math. 30, 1899, pp. 150–156.

GOETGHELUCK P.– *Computing binomial coefficients.*– In Am. Math. Monthly 94, 1987, pp. 360–365.

WOLFRAM ST.– *Geometry of binomial coefficients.*– In Am. Math. Monthly 91, 1984, pp. 566–571.

LUCAS E.– *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques.*– In Amer. J. Math. 1, 1878, pp. 184–240, 289–321).

LA FORMATION CONTINUE DES MAITRES DE SPEYER (PALATINAT)

Dr Günther SCHMIDT – Dr BÖHM

L'effort de l'Institut de Formation Continue des maîtres de Speyer (Palatinat) porte actuellement surtout sur les domaines suivants :

1) Dans le cadre de la formation

• Sur l'informatique pour donner aux professeurs un enseignement qu'ils n'ont pas suivi en faculté (**Fort**bildung = formation continuée).

• Dans le cadre de la formation continue (**Weiter**bildund) sur les probabilités et les statistiques (Stochastik) et leur histoire; sur la géométrie également.

2) Les méthodes

En ce qui concerne la "méthodologie de l'enseignement" les efforts portent sur l'élaboration d'une pédagogie par projet (Projektunterricht), sur l'inter et la pluri-disciplinarité – facilité par la bivalence des maîtres – sur la modélisation mathématique et son utilisation (Auwendungsorientierung) et sur les projets d'enseignement assisté par ordinateurs (Computer als Werkzeug).

3) Perspectives d'avenir et de changements (Veränderungen)

• Enseignement de l'algèbre.

• Mathématique nouvelle.

• "Bourbakismus" et son orientation.

• Bilinguisme dans l'enseignement.

• "Gesamtschule" = Ecole Polyvalente, conçue pour regrouper au sein d'un même établissement les programmes scolaires, les qualifications et les diplômes de fin de scolarité du premier cycle et pour assurer le passage dans le second cycle de l'enseignement général, technique et professionnel.

Beaucoup d'écoles polyvalentes assurent une préparation au baccalauréat et permettent, dans le domaine de l'enseignement technique, un accès à l'enseignement supérieur.

4) Fonctionnement

Les instituts de formation continue et continuée (Fort und Weiterbildung) fonctionnent sur la base du volontariat. Chaque professeur a droit à six journées de formation prises sur son temps de travail dans l'année, avec frais de déplacement et de mission.

Environ 20 % des professeurs viennent régulièrement (toujours les mêmes!).

5) Une activité nouvelle de l'institut : le recyclage

Le pays connaît, dans les domaines scientifiques et techniques, une crise de recrutement des professeurs. Des ingénieurs et techniciens supérieurs du privé (souvent des chômeurs) rejoignent la fonction enseignante. L'institut essaye, dans la mesure de ses moyens, de leur assurer une formation pédagogique initiale valable et un suivi effectif.

En conclusion, questionné sur "l'image de marque" de l'enseignant, le Dr Böhm a répondu avec son humour habituel : "L'enseignant, c'est comme l'Archevêque, s'il n'est pas aimé il est au moins respecté".

Un grand merci aux deux intervenants de Speyer.

VISION INFORMATIQUE D'UN NOMBRE BIEN CONNU

11.0010010000111111011010101000100010000101101000110000 1000
11010011000100110001100110001010001011100000001101110000011
10011010001001010010000001001001110000010001000101001100111
11001100011101000000001000001011101111101010011000111011000
10011100110110010001001010001010010100000100001111001100011
10001101000000010011011101111011111001010110111001101000110
01000111111101010111110110100100101111010100001001110111110
11100001111001011010010010000011100110010001011010101111110
01111110001010001110110001111101101100001111110010111000011
11001111011111011111011001010011101111001110111011011011111
11111110101011111111110100110000000001001110010100101011110
11111010000001001110010010111101001000100011100110001100110
01000011100100111100000110101001100111011001110000000110100
10001001011100100110001001010000110101011110010000100100111
11010111011101000111001101011010000011110001111011110110101
10110100100000110010101101111010100111111100011100011010010
11100100000100011001111001111000111100010011011100101110 0...

"*The American Math. Monthly*"
page 673 (1992)

CARREFOUR EUROPÉEN : L'ALLEMAGNE ET LA SUISSE

STRUBEL - MAYR - JACQUET (*)

L'Allemagne

La délégation allemande composée de M. le Dr Böhm, directeur du S.I.L. (Institut de formation des maîtres) de Speyer, du Dr Günter Schmidt professeur de didactique des mathématiques à l'université de Mayence, du Dr Strubel de Laudau, de Mr Mayr de Trèves et de M. Berg de Sarrebruck a été conduite et présentée à la cinquantaine de participants de l'Atelier A 10 par André Bulber.

La délégation a présenté et commenté les programmes de mathématiques des différents cycles de l'enseignement secondaire ainsi que les diverses voies de la formation initiale et continue des maîtres. L'exposé à ce sujet de Monsieur le professeur Schmidt, grâce à la traduction simultanée d'André Bulber, a été fort apprécié.

Le Dr Strubel a, quant à lui, présenté une rapide étude comparative des programmes français et de ceux du Palatinat. Les différents "Länder" ont des programmes différents mais qui, d'après les collègues les représentant, sont trop ambitieux et trop chargés ("zu grosszügig gedacht").

Monsieur Mayr a présenté les programmes de mathématiques du "Leistunskurs" – 11^{e} classe (ce qui équivaut à notre terminale C). Il a fait l'éloge des manuels français qui sont plus attrayants qu'en Allemagne où ils ne constituent qu'une "banque d'exercices". La bivalence du professeur de mathématiques à qui est confié l'enseignement de la physique au même niveau permet au professeur de montrer l'application pratique des concepts vus en cours.

La Suisse

Monsieur Jacquet enseignant suisse a lui aussi axé son intervention sur les programmes et la formation des maîtres.

L'idée force pour la tranche d'âge 12-16 ans est de développer auprès des élèves des "activités de recherche".

En ce qui concerne la didactique de la matière, la recherche y est pour le moment très peu structurée, voire inexistante. On assiste par contre à des "initiatives locales" très fructueuse, avec des commissions de coordinations multiples, des groupes de travail, des consultations de tous les partenaires sous différentes formes (orales, questionnaires, sondages, enquêtes, exercices d'évaluation communs), et ce qui porte le plus de fruits : des "commissions de lecture" pour l'élaboration de nouveaux manuels scolaires.

(*) Texte rédigé par A. Bulber d'après ses notes.

Monsieur Jacquet a également présenté les **deux filières de formation des enseignants** en Suisse Romande.

Par l'**École Normale** qui tente à former des "spécialistes" après avoir formé dans un premier temps des "généralistes". Une première phase de deux ans, comportant sept stages de deux semaines chacun, un enseignement des mathématiques de deux heures par semaine, débouche sur le Brevet d'Enseignement Général qui permet d'enseigner à des élèves jusqu'à 12 ans. Après ces deux années, l'élève suit les cours du B.F.C. 1 (Brevet de Formation Continue en un an) cours à plein temps, ce qui lui permet d'enseigner à des élèves jusqu'à 15 ans. L'élève-professeur est rémunéré. Il entre, s'il le désire, dans la section du B.F.C. 2 pour y suivre des enseignements de haut niveau (équivalents de nos 3^{e} cycles) sous forme d'unités de valeurs capitalisables de 2, 3 ou 4 ans, et ce à mi-temps, l'autre mi-temps étant consacré à une activité d'enseignement.

A 26 ans ou plus, et s'il a réussi à toutes les épreuves, le professeur est habilité à enseigner dans les classes terminales de l'enseignement secondaire et dans l'enseignement supérieur.

La deuxième filière est uniquement universitaire; elle comprend huit semestres d'étude et est sanctionnée par un Brevet d'Aptitude à l'Enseignement Secondaire Inférieur (collège) ou Supérieur (lycée). L'évaluation du stagiaire pendant ces huit semestres est continue, faite par des formateurs et des directeurs de stage. Trois visites sont programmées pour chaque stagiaire dans l'année, visites donnant chacune lieu à l'établissement d'un procès-verbal et d'un rapport :
- une évaluation formative lors de la 1ère visite de classe;
- une évaluation sommative intermédiaire en janvier;
- l'évaluation finale en juin.

C'est l'évaluation finale du 8^{e} semestre qui décide de l'attribution des Brevets d'Aptitude à l'Enseignement (degré inférieur ou supérieur). En cas d'échec, le stagiaire peut exercer un recours.

Au total, un carrefour très bien fréquenté, avec des questions-réponses nombreuses et très variées, des discussions riches, très denses et diverses se situant au delà et par delà des "frontières" dans un climat amical, détendu, mais malgré tout studieux et très attentif pour une "Europe des mathématiques".

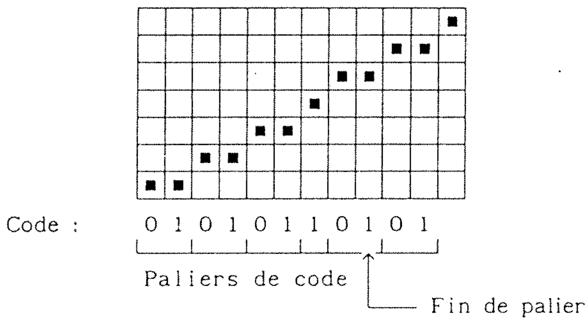
DROITES DISCRÈTES ET CALENDRIERS

Albert TROESCH

Nous allons voir comment un algorithme utilisé dans un traitement d'images pour reconnaître des segments de droite sur un écran d'ordinateur permet de décrire la structure d'un calendrier. Puis, en introduisant une généralisation des bases de numération, nous verrons comment aboutir à un algorithme simple et général de conversion de dates entre calendriers.

1. DROITES DISCRÈTES (voir [9], [10], [12], [13])

Lorsqu'on trace un segment de droite sur un écran d'ordinateur, on trace un ensemble de points tels que celui-ci :



La figure représente l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant

$$y = [7x/12] \text{ pour } 0 \leq x \leq 11$$

le crochet désignant la partie entière.

Plus généralement, si a, b, r sont trois entiers, avec $b > 0$, la droite discrète de caractéristiques (a, b, r) est l'ensemble des points de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant

$$y = [(ax + r)/b].$$

La fonction $f(x) = [(ax + r)/b]$ sera appelée *forme quasi-affine de caractéristiques* (a, b, r). Le paramètre r sera appelé le *reste initial* de f. Nous noterons encore $f = (a, b, r)$.

Un segment de droite discrète est l'intersection d'une droite discrète et d'une bande $x_0 \leq x \leq x_1$.

Code : On appelle code en x d'une droite discrète définie par une forme quasi-affine f le nombre entier

$$c_x = f(x + 1) - f(x).$$

Le code d'une droite discrète de caractéristiques (a, b, r) ne peut prendre que les deux valeurs $[a/b]$ et $[a/b]+1$. Il est périodique de période b. On définit de même le code d'un segment de droite discrète. Nous appellerons *longueur* d'un segment de code le nombre de ses éléments.

Paliers : lorsque $a \leq b$ on appellera *palier* de la droite discrète un sous-ensemble de cette droite formé de tous les points situés à une même ordonnée. Ces paliers correspondent aux *paliers de code* : segments de code de longueur maximale extraits du code de la droite, formés d'une suite de 0 (éventuellement vide) et se terminant par 1 (voir figure précédente). Le premier de ces éléments de code sera appelé *début du palier*, le dernier *fin du palier*. Pour un segment de droite le dernier palier peut ne pas contenir de 1 terminal. Pour cette raison nous remplacerons sa longueur réelle par sa *longueur corrigée* c'est -à-dire sa longueur augmentée de 1. Le premier palier et le dernier (s'il n'est pas terminé par 1) sont appelés *paliers externes*, les autres sont appelés *paliers internes*. Si le code contient des paliers internes, un palier externe est dit *complet* si sa longueur (corrigée pour le dernier palier) est strictement supérieure à la longueur du palier interne le plus court. En l'absence de paliers internes c'est le plus long des deux paliers externes qui sera considéré comme complet (en utilisant toujours la longueur corrigée pour le dernier palier).

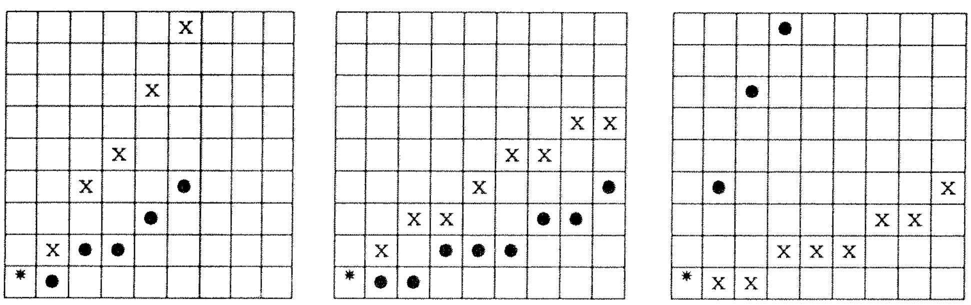
L'algorithme suivant permet de reconnaître si une suite d'entiers est le code d'un segment de droite discrète et dans l'affirmative de trouver ses caractéristiques (on suppose ici que le premier élément de code correspond à $x = 0$) :

ALGORITHME DE RECONNAISSANCE :
Soit c un code (de longueur finie).
Si c contient au plus deux entiers consécutifs
    alors *droite*:=vrai
    sinon *droite*:=faux;
n:=1;
tant que (*droite*=vrai) et (c non constant) faire
    { (Début de l'analyse du code)
    n:=n+1;
    p_n:=plus petit élément de code de c;
    Retrancher p_n à tous les éléments de c (Opération 1)
        (on obtient ainsi un code formé des seuls entiers 0 et 1);
    Si l'élément 1 n'est pas isolé alors
        {
        n:=n+1;
        Echanger les 0 et les 1; (Opération 2)
        E_n:=vrai;
        }
    sinon E_n:=faux;
    n=n+1;
    Remplacer les paliers de code internes et les paliers de code
    externes complets par leur longueur; (Opération 3)

g_n:=nombre d'éléments de code négligés
(=longueur du palier initial s'il n'est pas complet, 0 sinon).
Si c contient au plus deux entiers consécutifs
alors *droite*:=vrai
sinon *droite*:=faux;
} (Fin de l'analyse du code)
Si *droite*=vrai alors
{ (Début de la détermination des caractéristiques (a, b, r))
a_n:=c; (c est le code constant obtenu à la fin de l'analyse);
b_n:=1;
r_n:=0;
tant que n >0
{
n:=n-1
a_n:=b_{n+1}; b_n:=a_{n+1};
r_n:=a_n-1-r_{n+1}; (Opération 3)
r_n:=$(r_n - g_{n+1}a_n)$mod b_n; (Correction pour tenir comte des éléments de code négligés : on déplace l'origine au début du segment de code)
n:=n-1;
Si E_n=vrai alors
{
b_n:=b_{n+1};
a_n:=b_{n+1}-a_{n+1} (Opération 2)
r_n:=$b_n - 1$-r_{n+1};
}
n:= $n - 1$;
b_n:= b_{n+1};
a_n:= a_{n+1}+$p_{n+1}b_{n+1}$; (Opération 1)
}
} (Fin de la détermination des caractéristiques)
sinon c n'est pas un code de segment de droite discrète;

Commentaires :

Cet algorithme est basé sur les opérations suivantes :



Transvection $y'=y-x$ Symérie oblique $y'=x-y$ Symétrie $x'=y$, $y'=x$

x : droite initiale • : droite transformée * : point commun

Les deux premières transforment une droite discrète en une droite discrète. La troisième transforme l'ensemble des débuts de paliers d'une droite dont les caractéristiques a et b vérifient $a < b$, en une droite discrète. La deuxième partie de l'algorithme utilise les relations entre les caractéristiques des droites initiales et transformées pour calculer les caractéristiques du segment de droite. On pourra se reporter à [12] et [13] pour plus de détails.

2. APPLICATION À DIVERS CALENDRIERS

Pour une documentation sur les différents calendriers on pourra consulter [1], [2], [3], [7], [11]), et en particulier la suite d'articles parus dans *'L'Ouvert'* sous la plume de J. Lefort [6].

2.1. LES MOIS DES CALENDRIERS JULIEN ET GRÉGORIEN

Appliquons l'algorithme de reconnaissance à la suite des longueurs des mois en commençant par *mars* et en terminant par *janvier*.

Ligne n	Code											Op.	g_n	p_n
1	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31			
2	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1		30
3	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	2		
4			2			3		2		3		3	2	
5			0			1		0		1		1		2
6									2			3	2	

La colonne Op. contient le numéro de l'opération utilisée (voir algorithme),p_n est l'entier soustrait à tous les éléments de code dans l'opération 1. et g_n est le nombre d'éléments négligés dans l'opération 3.)

Ligne	a_n	b_n	r_n	Observations	g_n	p_n	Equation
6	2	1	0		2		$y=[2x]$
5	1	2	0	$r_5 \equiv (a_5-1-r_6-g_6 a_5) \pmod{b_5}$		2	$y=[x/2]$
4	5	2	0	$a_4=a_5+p_5 b_5,\ b_4=b_5$	2		$y=[5x/2]$
3	2	5	2	$r_3 \equiv (a_3-1-r_4-g_4 a_3) \pmod{b_3}$			$y=[(2x+2)/5]$
2	3	5	2	$r_2 \equiv (b_2-1-r_3) \pmod{b_2}$		30	$y=[(3x+2)/5]$
1	153	5	2	$a_1=a_2+p_2 b_2,\ b_1=b_2$			$y=[(153x+2)/5]$

Commentaires :

La suite des longueurs des mois depuis le mois 1er mars est le code de la droite discrète de caractéristiques (153,5,2) :

$$y = [(153x + 2)/5]$$

et par suite à la date $j.m$ il s'est écoulé

$$y = [(153M' + 2)/5] + j - 1$$

jours entiers depuis le 1er mars précédent, M' étant défini par

$$M' = m - 3 \text{ si } m \geq 3.$$
$$M' = m + 9 \text{ si } m < 3.$$

(Cette formule est donnée par D.-A. Hatcher [5]. Elle est valable aussi pour le mois de février puisque ce mois est entièrement contenu dans le 12e mois (de 30 jours) décrit par cette forme quasi-affine).

Vérification : Rangs des 1er de mois par rapport au 1er mars :

	mar	avr	mai	jun	jul	aou	sep	oct	nov	déc	jan	fév
M'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	337
c	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	

Si on pose $M = m$ si $m \geq 3$ et $M = m + 12$ si $m < 3$, on a $M' = M - 3$.
D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} J = [(153(M-3)+2)/5] &= [(153(M+1) - 4{*}153 + 2)/5)] \\ &= [(153(M+1) - 610)/5] \\ &= [30,6(M+1)] - 122. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi une formule empirique citée dans [6].

2.2. LA SUITE DES ANNÉES ABONDANTES DU CALENDRIER MUSULMAN

Les années du calendrier musulman ont 354 jours (années communes) ou 355 jours (années abondantes). Ces dernières sont réparties dans un cycle de 30 ans de la manière suivante :

Année :	2	5	7	10	13	16	18	21	24	26	29	(32)
Code :	3	2	3	3	3	2	3	3	2	3	3	

Examinons le code de deux tels cycles :

<table>
<tr><th>Ligne</th><th colspan="22">Code</th><th>Op.</th><th>g_n</th><th>p_n</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2"></td><td colspan="4">4</td><td colspan="3">3</td><td colspan="4">4</td><td colspan="4">4</td><td colspan="3">3</td><td colspan="2"></td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2"></td><td colspan="4">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="4">1</td><td colspan="4">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="2"></td><td>1</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2"></td><td colspan="4">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="4">0</td><td colspan="4">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="2"></td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="9"></td><td colspan="11">3</td><td colspan="2"></td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

Ligne	a_n	b_n	r_n	Observations	g_n	p_n	Equation
7	3	1	0		1		$y=[3x]$
6	1	3	1	$r_6 \equiv a_6 - 1 - r_7 - g_7 a_6 \pmod{b_6}$			$y=[(x+1)/3]$
5	2	3	1	$r_5 \equiv b_5 - 1 - r_6 \pmod{b_5}$		3	$y=[(2x+1)/3]$
4	11	3	1	$a_4 \equiv a_5 + p_5 b_5$, $b_4 = b_5$	2		$y=[(11x+1)/3]$
3	3	11	6	$r_3 \equiv a_3 - 1 - r_4 - g_4 a_3 \pmod{b_3}$			$y=[(3x+6)/11]$
2	8	11	4	$r_2 \equiv b_2 - 1 - r_3 \pmod{b_2}$		2	$y=[(8x+4)/11]$
1	30	11	4	$a_1 = a_2 + p_2 b_2$, $b_1 = b_2$			$y=[(30x+4)/11]$

Si on veut que $y(0) = 2$:

$$y = [(30x + 4)/11] + 2 = [(30x + 26)/11]$$

Vérification :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	5	7	10	13	16	18	21	24	26	29
c	3	2	3	3	3	2	3	3	2	3	

Si, au lieu de la suite des rangs des années abondantes, nous étions partis de la suite des longueurs des années, nous aurions eu

Ligne	Code												Op.	g_n	p_n
-1	354	354	355	354	354	355	354	355	354	354	355	...			
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	...	1		354
1					3			2		3			3	3	

La ligne 1 de ce tableau est la même que celle du tableau précédent; on a donc encore un code de droite discrète et on peut continuer le calcul des caractéristiques :

Ligne	a_n	b_n	r_n	Observations	Equation
1	30	11	4		$y=[(30x+4)/11]$
0	11	30	3	$r_0 \equiv a_0 - 1 - r_1 - g_1 a_0 \pmod{b_0}$	$y=[(11x+3)/30]$
-1	10631	30	3	$a_{-1} = a_0 + p_0 b_0$, $b_{-1} = b_0$	$y=[(10631x+3)/30]$

Vérification :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
n	0	354	708	1063	1417	1771	2126	2480	2835	3189	3543	3898	...
c	354	354	355	354	354	355	354	355	354	354	355	...	...

2.3. LA SUITE DES LONGUEURS DES MOIS DE L'ANNÉE MUSULMANE ABONDANTE

La suite des longueurs des mois de l'année musulmane abondante est la ligne 1 du tableau qui suit. Pour l'année commune le dernier mois a 29 jours.

Ligne	Code												Op.	g_n	p_n
1	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	30			
2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1		29
3	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	2		
4				2		2		2		2		3	3	2	
5				0		0		0		0		1	1		2
6								5					3	0	

Ligne	a_n	b_n	r_n	Observations	Equation
6	5	1	0		$y=[5x]$
5	1	5	0	$r_5=a_5-1-r_6-g_6a_5 \pmod{b_5}$	$y=[x/5]$
4	11	5	0	$b_4=b_5$, $a_4=a_5+p_5b_4$	$y=[11x/5]$
3	5	11	5	$r_3=a_3-1-r_4-g_4a_3 \pmod{b_3}$	$y=[(5x+5)/11]$
2	6	11	5	$r_2=b_2-1-r_3 \pmod{b_2}$	$y=[(6x+5)/11]$
1	325	11	5	$b_1=b_2$, $a_1=a_2+p_2b_1$	$y=[(325x+5)/11]$

Avec des numérotations à partir de 0, le rang n d'un jour dans l'année s'obtient à partir du rang m du mois dans l'année et du rang j du jours dans le mois par la formule

$$n = [(325m+5)/11] + j$$

que l'année soit abondante ou non.

Commentaires :

Dans [5], D.-A. Hatcher donne la formule suivante

$$[(59.2x+1.02)/2] + j.$$

Notre méthode a les deux avantages suivants sur les traitements classiques
– elle est algorithmique et par conséquent évite d'avoir à procéder par tâtonnement pour trouver les coefficients,
– elle fournit des coefficients entiers.

2.4. LA SUITE DES ANNÉES EMBOLISMIQUES DU CALENDRIER JUIF

Le calendrier juif est basé sur le cycle de Méton, période de 19 années solaires correspondant, avec une assez bonne précision, à 235 lunaisons. Les années comportent 12 mois (années communes) ou 13 mois (années embolismiques).

Les rangs dans ce cycle des années embolismiques sont :

Année :	0	6	8	11	14	17	(19)
Code :	3	3	2	3	3	2	

Examinons le code de deux tels cycles.

Ligne	Code														Op.	g_n	p_n
1	3	3	2	3	3	3	2	3	3	2	3	3	3	2			
2	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1		2
3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	2		
4				4				3			4				3	3	
5				1				0			1				1		3
6								2							3	1	

Ce qui nous donne les caractéristiques :

Ligne	a_n	b_n	r_n	Observation	Equation
6	2	1	0		$y=[2x]$
5	1	2	1	$r_5=a_5-1-r_6-g_6a_5 \pmod{b_5}$	$y=[(x+1)/2]$
4	7	2	1	$b_4=b_5,\ a_4=a_5+p_5b_4$	$y=[(7x+1)/2]$
3	2	7	1	$r_3=a_3-1-r_4-g_4a_3 \pmod{b_3}$	$y=[(2x+1)/7]$
2	5	7	5	$r_2=b_2-1-r_3 \pmod{b_2}$	$y=[(5x+5)/7]$
1	19	7	5	$b_1=b_2,\ a_1=a_2+p_2b_1$	$y=[(19x+5)/7]$

En partant de la suite des longueurs des années en mois on obtient

Ligne	Code																			
-1	13	12	12	13	12	12	13	12	13	12	12	13	12	12	13	12	12	13	12	13
0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1		3			3			2		3			3			3			2	

La ligne 1 est le code duquel nous étions partis précédemment. En continuant le calcul des caractéristiques nous trouvons pour

- la ligne 0 : $y = [(7x + 13)/19]$
- la ligne -1 : $y=[(235x + 13)/19]$.

Toutes les numérotations partant de 0, on obtient ainsi le rang n du mois dans le cycle à partir du rang a de l'année et du rang m du mois dans l'année par

$$n = [(235a + 13)/19] + m.$$

Le lecteur intéressé peut, à titre d'exercice, essayer de trouver la structure des années du calendrier juif en examinant la suite des longueurs des mois. Comme pour le calendrier julien il peut être utile de commencer la suite par un autre mois que le premier de l'année (voir [6] pour une description de ce calendrier ou [13] pour les résultats).

L'algorithme de reconnaissance se programme sans peine, ce qui permet l'automatisation de tous ces calculs.

3. FORMES QUASI-AFFINES ET BASES DE NUMÉRATION QUASI-AFFINES

3.1. QUOTIENT D'UN ENTIER PAR UNE FORME QUASI-AFFINE

On démontre (voir [13]) le résultat suivant.

Proposition

Soit $f(x) = [(ax + r)/b]$ *une forme quasi-affine telle que* $a \geq b \geq 0$. *La fonction* f^{-1} *définie par*

$$f^{-1}(y) = x$$

où x *est l'unique entier tel que* $f(x) \leq x < f(x+1)$ *est une forme quasi-affine. De plus* f^{-1} *est définie par* $f^{-1}(y) = [(by + b - 1 - r)/a]$.

Définition

Soint n *un entier et* f *une forme quasi-affine telle que* $a > b$. *Nous appellerons quotient de* n *par* f *l'entier* $q = f^{-1}(n)$. *L'entier* $R = n - f(q)$ *sera appelé le reste. On a* $0 \leq R \leq [a/b]$.

Exemples :

1) si $f(x) = ax$ alors $f^{-1}(y) = [y/a]$: c'est la division euclidienne;
2) si $f(x) = x - r$ alors $f^{-1}(y) = y + r$.

3.2. BASES QUASI-AFFINES

Définition

Nous appellerons base de numération quasi-affine d'ordre k *une suite de* k *formes quasi affines* $f_1(a_1, b_1, r_1)$ *vérifiant*
1) $a_0 = b_0 = 1$.
2) Pour $0 \leq i \leq k$, $a_i \geq b_i > 0$.
3) Pour $0 \leq i \leq k-1$, $[a_{i+1}/b_{i+1}] > [a_i/b_i]$.

En itérant la division d'un entier par une forme quasi-affine on trouve successivement

$$
\begin{array}{ll}
q_k = f_k^{-1}(n) & R_k = n - f_k(q_k) \\
q_{k-1} = f_{k-1}^{-1}(R_k) & R_{k-1} = R_k - f_{k-1}(q_{k-1}) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
q_1 = f^{-1}(R_2) & R_2 = R_2 - f_1(q_1) \\
q_0 = f_0^{-1}(R_1) = R_1 - r & R_0 = R_1 - f_0(q_0) = R_1 - (R_1 - r + r) = 0.
\end{array}
$$

D'où

$$n = f_k(q_k) + f_{k-1}(q_{k-1}) + \cdots + f_1(q_1) + f_0(q_0).$$

L'entier n sera donc représenté par la suite d'entiers

$$(q_k, q_{k-1}, \dots, q_1, q_0)$$

que nous appellerons le *développement de n dans la base quasi-affine*

$$(f_k, f_{k-1}, \dots f_1, f_0).$$

Exemples :
1) Si $f_i(x) = b^i x$, alors $f_i^{-1}(x) = [x/b^i]$ et on retrouve le développement usuel d'un entier en base b.
2) Si n_i est une suite d'entiers positifs, et si $f_i(x) = n_0 n_1 \dots n_i x$ alors $f_i^{-1}(x) = [x/n_0 n_1 \dots n_i]$ et on retrouve les développements dans des bases généralisées.

4. CONVERSIONS DE DATES

Pour faire les conversions de dates on utilise habituellement un système de référence qui est le *Jour Julien*, rang du jour depuis le

Lundi 1^er^ janvier de l'an -4712 (Date julienne) (*).

On résout alors le problème de la conversion des dates en donnant, pour chaque calendrier, des formules permettant, à partir d'une date, de calculer le Jour Julien de cette date, et inversement, à partir d'un Jour Julien, de retrouver la date de ce jour.

4.1. LE CALENDRIER JULIEN

Pour une date $j.m.A$ du calendrier julien, le Jour Julien JJ est donné par :

```
si m>=3  A'=A
         m'=m
si m<3   A'=A-1
         m'=m+12
JJ=[(1461A'+6884472)/4]+[(153m'-457)/5]+j-1
```

(*) Nous utilisons ici et dans toute la suite la notation algébrique pour les années, incluant des années négatives et une année 0. C'est le système généralement adopté en astronomie.

C'est-à-dire

$$\boxed{\begin{array}{ll} JJ=f_2(A')+f_1(m')+f_0(j) & \\ & f_2=(1461,4,6884472) \\ \text{avec} & f_1=(153,5,-457) \\ & f_0=(1,1,-1). \end{array}}$$

Ainsi (A', m', j) est le développement de JJ dans la base (f_2, f_1, f_0). Inversement, on déduit donc (a', m', j) de la donnée de JJ par les formules

$$\boxed{\begin{array}{lll} A' = f_2^{-1}(JJ) & = [(4JJ-6884469)/1461] \\ R_2 = JJ-f_2(A') & \\ m' = f_1^{-1}(R_2) & = [(5R_2+461)/153] \\ R_1 = R_2-f_1(m') & \\ j = f_0^{-1}(R_1) & = R_1-1. \end{array}}$$

REMARQUES :

La forme f_0 a pour rôle de déplacer l'origine de la numérotation des jours du mois de 0 à 1. La forme f_1 découle de la formule de 2.1. après un changement de numérotation des mois :

$$[(153(m'-3)+2)/5] = [(153m'-457)/5].$$

En 2.1. nous n'avions pas tenu compte du mois de février : c'est sans importance pour le calcul de JJ étant donné que les mois décrits par f_1 ont tous soit 30 soit 31 jours; février est donc entièrement contenu dans le 12^e mois décrit par f_1.

En appliquant l'algorithme de 1. à la suite des longueurs des années : 365 365 365 366, on obtient la forme quasi-affine $f_2'(1461, 4, 0)$. On a donc $f_2(x) = JJ_0 + f_2'(x) = [(1461x + 4JJ_0)/4]$ où JJ_0 est une constante à déterminer, constante dépendant de l'origine du Jour Julien.
Etalonnage :
On a alors pour le Jour Julien du 1.1.-4712 :

$$0 = JJ_0 + f_2'(-4713) + f_1(13) + f_0(1) = JJ_0 - 1721118.$$

D'où $JJ_0 = 1721118$, et $f_2 = (1461, 4, 6884472)$.
Le lecteur pourra vérifier, en appliquant les formules données, que JJ_0 est le Jour Julien du 1.3.0 (remplacer f_2 par f_2' revient à déplacer l'origine du Jour Julien à cette date).

6.2. LE CALENDRIER GREGORIEN

Le Jour Julien de la date grégorienne $j.m.A$ s'obtient par les formules :

si $m \geq 3$	$A'=A$	
	$m'=m$	
si $m<3$	$A'=A-1$	
	$m'=m+12$	
$s=[A''/100]$		(Nombre de siècles)
$A'=A''-100s$		(Nombre d'années dans le siècle)
$JJ=[(146097s+6884480)/4]+[1461A'/4]+[(153m'-457)/5]+j-1$		

ou encore

$$JJ=f_3(s)+f_2(A')+f_1(m')+f_0(j)$$

avec
$$f_3=(146097,4,6884480)$$
$$f_2=(1461,4,0)$$
$$f_1=(153,5,-457)$$
$$f_0=(1,1,-1)$$

Ainsi (s, A', m', j) est le développement de JJ dans la base (f_3, f_2, f_1, f_0). Inversement on obtient donc (s, A', m', j) à partir de JJ par

$$\begin{aligned}
s &= f_3^{-1}(R_4) &&= [(4R_4-6884477)/146097]\\
R_3 &= R_4-f_3(s) &&= R_4-[(146097s+6884480)/4]\\
A' &= f_2^{-1}(R_3) &&= [(4R_3+3)/1461]\\
R_2 &= R_3-f_2(A') &&= R_3-[1461a'/4]\\
m' &= f_1^{-1}(R_2) &&= [(5R_2+461)/153]\\
R_1 &= R_2-f_1(m') &&= R_2-[(153m'-457)/5]\\
j &= f_0^{-1}(R_1) &&= R_1-1\ .
\end{aligned}$$

REMARQUES :
La structure de ce calendrier se distingue de celle du calendrier julien par l'ajout d'une forme f_3. En appliquant l'algorithme de reconnaissance à la suite des longueurs des siècles : 36524 36524 36524 36525, on obtient la forme $f_3' = (146097, 4, 0)$. On a donc

$$f_3(x) = JG_0 + f_3(x)[(146097x + 4JG_0)/4]$$

où JG_0 est une constante à déterminer.

Etalonnage :
Le 15.10.1582 de ce calendrier correspond au 5.10.1582 dans le calendrier julien. On obtient ainsi dans le calendrier grégorien

$$JJ(15.10.1582) = JG_0 + f_3'(15) + f_2(82) + f_1(10) + f_0(15) = JG_0 + 578041$$

et dans le calendrier julien

$$JJ(5.10.1582) = 2299171.$$

D'où $JG_0 = 1721120$ et $f_3 = (146097, 4, 6884480)$.
Ici encore on peut vérifier que JG_0 est le Jour Julien du 1.3.0 de ce calendrier.

6.3. CALENDRIER MUSULMAN

Le Jour Julien d'une date musulmane $j.m.A$ s'obtient par la formule

$$\boxed{JJ = [(10631A + 58442583)/30] + [(325m - 320)/11] + j - 1}$$

ou encore

$$\boxed{\begin{array}{ll} JJ=f_2(A)+f_1(m)+f_0(j) & \\ & f_2=(10631,30,58442583) \\ \text{avec} & f_1=(325,11,-320) \\ & f_0=(1,1,-1) \end{array}}$$

Ainsi (A, m, j) est le développement de JJ dans la base (f_2, f_1, f_0). Inversement à partir du Jour Julien on retrouve donc la date musulmane par

$$\boxed{\begin{array}{lllll} A & = & f_2^{-1}(JJ) & = & [(30JJ-58442554)/10631] \\ R_2 & = & JJ-f_2(a) & = & JJ-[(10631A+58442583)/30] \\ m & = & f_1^{-1}(R_2) & = & [(11R_2+330)/325] \\ R_1 & = & R_2-f_1(m) & = & R_2-[(325m-320)/11] \\ j & = & f_0^{-1}(R_1) & = & R_1-1\ . \end{array}}$$

REMARQUES :

Nous avons obtenu en 2. la forme f_1 mais avec un reste égal à 5. Ici nous numérotons les mois à partir de 1 au lieu de 0, ce reste devient donc $r = -325 + 5 = -320$. Nous avions également obtenu f_2 mais avec un reste égal à 3. Notons cette forme f_2'. On a alors

$$f_2(x) = JM_0 + f_2'(x) = [(10631x + 30JM_0 + 3)]$$

où JM_0 est une constante à déterminer.

Etalonnage :
Le 1.1.1. du calendrier musulman correspond au 16.7.622 dans le calendrier julien.
Calculons $JJ(1.1.1)$:

$$JJ(1.1.1) = JM_0 + f_2'(1) + f_1(1) + f_0(1) = JM_0 + 354$$
$$JJ(16.7.622) = 1948440 \text{ (Calendrier julien)}.$$

On a donc $JM_0 = 1948440 - 354 = 1948086$ et $f_2 = (10631, 30, 58442583)$.
On vérifie que JM_0 est le Jour Julien du 1.1.0. dans ce calendrier.

CONCLUSION

Du fait de sa généralité et de sa nature algorithmique le procédé employé offre une très grande sécurité dans l'établissement des formules de conversion de date. Il s'applique à la plupart des calendriers (il faut cependant qu'ils soient suffisamment réguliers pour que leur structure puisse être décrite par une suite de formes quasi-affines).

La procédure à suivre est la suivante :
– On commence par appliquer l'algorithme de reconnaissance aux différents cycles qui décrivent le calendrier pour déterminer ses formes de structure. On obtient alors une base quasi-affine qui donne le Jour Julien à une constante près.
– On détermine la constante par étalonnage en calculant le Jour Julien d'une date dont on connaît la date correspondante dans un calendrier déjà traité, ou dont on connaît le Jour Julien.
– Une date est alors (à quelques modifications près) le développement du Jour Julien dans cette base quasi-affine.

Les calendriers moins réguliers peuvent tout de même être traités partiellement par cette méthode. Mais celle-ci doit alors être adaptée à chaque cas. C'est ce que j'ai fait dans [13] pour le calendrier juif. Par ailleurs, j'ai traduis ces idées en un programme en Pascal dont j'ai fait la démonstration au cours de l'atelier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COUDERC P.-*Le calendrier.* PUF 203 (1946).

[2] DUMOULIN C. - PARISOT J.-P.- *Astronomie pratique et informatique.* Masson (1987).

[3] GINZEL F.-K.- *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie.* (1911) J.-C. Hindrichs'sche Buchhandlung Leipzig.

[4] HATCHER D.-A.- *Simple formulae for Julian Day Numbers and Calendar Dates.* Q Jl R. astr. Soc. (1984) 25, 53-55.

[5] HATCHER D.-A.- *Generalized Equations for Julian Day Numbers and Calendar Dates.* Q. Jl R. astr. Soc. (1985) 26, 151-155.

[6] LEFORT J.- *La grande Saga des Calendriers. 'L'Ouvert'* , Journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg, n° 52, ..., 57, 64 et 67.

[7] MAHMOUD M.- *Mémoire sur les calendriers judaïque et mulsulman.* Mémo. des sav. étrang. de l'Acad. roy. de Belgique, T. XXVI (1855).

[8] PARISOT J.-P.- *Additif to the paper of D.-A. HATCHER : 'Generalized equations for Julian Day Numbers and Calendar Dates.* Q. Jl R. astr. Soc.

[9] REVEILLES J.-P.- *Les paliers des droites de Bresenham.* Pixim 88, pp. 81-101;

Ed. Hermès (1988).

[10] REVEILLES J.-P.- *Géométrie discrète. Calculs en nombres entiers et algorithmique.* Thèse d'Etat, soutenue à Strasbourg le 20-12-1991.

[11] SUACHER F. - PARISOT J.-P.- *Les calendriers liturgiques et les irrégularités de la date de Pâques.* Revue de l'Association Astronomique de Franche-Comté 18 (février 1988).

[12] TROESCH A.- *Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide et reconnaissance de segments.* I.R.M.A. (1990) 426/P-239 (à paraître dans Theoretical Computer Science, juin 1993).

[13] TROESCH A.- *Droites discrètes et calendriers.* I.R.M.A. (1992) 487/P-282.

PEUTINGER (Conrad), antiquaire allemand, né et mort à Augsbourg (1465-1547). Il devint, en 1493, syndic de sa ville natale, et fut nommé conseiller impérial par l'empereur Maximilien I^er^. Nous citerons, parmi ses ouvrages, les *Inscriptiones romanæ* (1520). Ce qu'on appelle la *Table de Peutinger* est une carte des voies de l'empire romain, rédigée vers le III^e^ siècle, mais conservée dans une copie de 1264. Cette copie fut trouvée à Worms par Conrad Celtes, qui la donna à Peutinger. Welser en donna des fragments en 1591. L'original de cette carte, trouvé en 1714, est à la bibliothèque de Vienne et a été édité par Mannert (Leipzig, 1824); par Desjardins (Paris, 1869-1876); par Miller [aux 2/3] (Ratisbonne, 1888).

Peutinger.

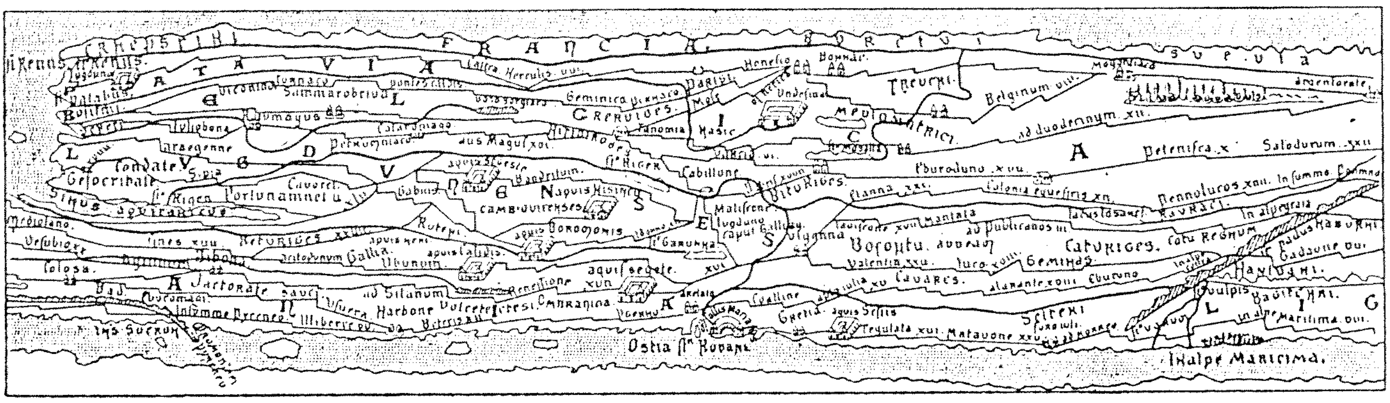


Table de Peutinger.

OBJECTIFS D'UNE POLITIQUE EUROPÉENNE DE L'ENSEIGNEMENT

André BULBER

Une société moderne exige une éducation performante, dont le fondement doit être culturel : en effet, les connaissances et les techniques évoluent de plus en plus rapidement, les politiques éducatives ont du mal à maîtriser les formations à l'emploi : l'école ne prépare plus à la vie. Les valeurs culturelles, moins périssables deviennent les références essentielles pour les jeunes.

Ceci est très net en Europe : dans tous les pays, il y a du chômage. La durée de la scolarité obligatoire est allongée, de nouveaux problèmes dûs aux migrants et étrangers surgissent, l'échec scolaire est omniprésent. L'échec scolaire est aussi une "question pour l'Europe".

Les arrivées successives d'élèves au niveau du second cycle et l'ampleur prise par la formation continue pour combattre le chômage marquent également la période actuelle. Après les prodigieuses avancées de sciences et techniques, des besoins nouveaux de qualification de haut niveau se manifestent dans tous les emplois. Dans toute l'Europe, on assiste à une prolongation de la scolarité et les entreprises prennent de plus en plus part à la formation continue.

L'Europe est de plus multiculturelle, une richesse à canaliser positivement en essayant de comprendre les divers systèmes culturels et aussi éducatifs, barrage efficace contre la montée des tensions : racisme, xénophobie, etc ... L'école a un rôle fondamental à jouer dans ce domaine en développant la conscience européenne des jeunes qui méconnaissent totalement certains pays européens, leurs cultures, leur système scolaire, leurs institutions.

I.– OBJECTIFS D'UNE POLITIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT

Dans tous les pays membres, l'Éducation est la priorité des priorités. Tant mieux! Cet effort intense en faveur de l'éducation et de la formation est un facteur de lutte contre le chômage. On forme donc un nombre important de scientifiques et de chercheurs et l'élévation du niveau de culture sensibilise l'opinion publique à l'importance de la Science et de la Technologie.

• L'objectif n° 1 de l'Éducation doit être de donner à chaque individu les armes pour se battre sur le marché de l'emploi, préparation à la vie de parent, de citoyen, de responsable, de consommateur.

Développer la conscience européenne et mondiale, permettre aux élèves et aux étudiants de mieux se sentir européens, de mieux faire passer les valeurs de respect et de solidarité envers les autres nations et cultures en mettant en avant les valeurs clés spécifiquement européennes comme la démocratie, le respect des droits de l'homme, de l'enfant, la justice sociale, la paix et la sécurité, le droit à l'information ainsi que l'équilibre écologique.

• Former des adultes responsables.

Les européens jouissent en effet de privilèges que des millions de personnes leurs envient.

Sur ce plan, il ne faut pas considérer les médias comme des concurrents mais comme des instruments. Le rôle des parents et des éducateurs dans ce domaine c'est aussi d'apprendre aux jeunes à acquérir un sens analytique et un esprit critique vis à vis des médias.

• Poursuivre et étendre les échanges et jumelages.

Cette pédagogie qui rapproche les individus est la plus efficace pour les adultes certes mais aussi pour les élèves.

ERASME - Jumelage et appariements des établissements scolaires.

Compétitions internationales des Mathématiques sans frontières.

Il faudrait donner plus d'ampleur aux échanges d'enseignants, beaucoup moins onéreux que les échanges d'élèves et d'étudiants (où les échanges se produisent surtout dans les disciplines linguistiques).

Création de sections européennes.

Les jumelages communaux existent, mais des villages perdus ou des régions européennes très éloignées en sont exclus (le Conseil de l'Europe communal 6000 communes jumelées - R.F.A. et France viennent en tête).

II.– RÉALISATION

Eveiller la conscience européenne.

La journée de l'Europe : l'École existe. Un thème est retenu par année.

Pour l'année scolaire 1992/1993, les jeunes européens doivent réfléchir sur leur patrimoine culturel, leur destinée commune et les apports de la communauté européenne (voir circulaire distribuée).

Le rôle des enseignants est fondamental et il faudrait introduire la dimension européenne dans les formations initiales et continues des enseignants, ainsi que les études comparatives sur les différents systèmes européens. Peu d'enseignants connaissent les pratiques pédagogiques du voisin!

Les instances supérieures ont également leur rôle à jouer dans ce domaine. Leur intérêt a été manifesté un peu tard (mais mieux vaut tard que jamais).

Dans tous les pays, on permet l'apprentissage de deux langues au long de la scolarité obligatoire. La deuxième, même si elle n'est pas obligatoire le jour de l'examen, l'est dans la vie.

Il faut aussi encourager la diversification des langues rares (exemple : grec moderne, danois, etc ...) qui peuvent être choisies comme deuxième langue au Baccalauréat.

Cet apprentissage précoce des langues est expérimenté en France, après avoir été longtemps pratiqué en Alsace pour les enfants des régions d'expression dialectale d'abord, pour les autres élèves ensuite.

But modeste :
- bilinguisme au moins (une deuxième Langue Vivante aussi)
- réticence pour la 3e (rapport de l'Inspection Générale).

Il est aussi facile de faire participer et de mobiliser les entreprises et le monde non enseignant. Par exemple : sponsoring (Médecin sans Frontières) et sollicitation des parents d'élèves pour accompagner les élèves au cours des jumelages et d'assistance aux voyages, visites des musées, etc ...

Les médias aussi peuvent y contribuer. Par exemple : les émissions pour les enfants "Le marchand de sable", "Sandmännchen", les émissions pour jeunes font acquérir du vocabulaire, "Telekolleg" SWF 3 du vocabulaire scientifique et technique. De même la correspondance scolaire, les journaux et livres pour jeunes, d'où le rôle des bibliothèques, des journées de lecture telle "Fureur de lire", également suivies par les bibliothèques municipales des régions frontalières, mais également celui des C.D.I. avec les ouvrages en langues étrangères ainsi que les livres scientifiques et littéraires de haut niveau dans les Lycées et Lycées Techniques. Encourager les jeunes à devenir des lecteurs actifs et critiques est notre rôle.

Orientations nouvelles des échanges, jumelages et appariements.

Je salue M. Mayr, Président de l'A.G. de Trèves – Les initiatives des pionniers (1981 - Trèves - A.P.M.) basées sur le bénévolat, laissent progressivement la place à une certaines institutionnalisation. Sera-t-elle plus bénéfique? Je ne le pense pas : il faut produire des dossiers, faire des demandes, et on passe à côté de la dimension humaine.

Les appariements associent des établissements scolaires de pays frontaliers, leur statut est réservé à des échanges durables et réciproques.

En France l'Allemagne est notre premier partenaire, puis l'Angleterre.

III.– LA FORMATION CONTINUE DES ENSEIGNANTS

Je salue dans la salle les représentants de la S.I.L. (*) : le Dr Bohm, M. Schmitt, M. Mayr. L'I.R.E.M. aussi a fait dès 1968 un travail considérable. J'ai fait partie des premiers formateurs avec M. Silvestre, de Cointet et ce dès 1970, date de la création de l'I.R.E.M. par le regretté professeur Frenkel décédé en 1972.

La notion de formation continue est d'une importance capitale et a pris ces dernières années des développements importants dans tous les pays européens.

(*) Institut de formation des maîtres.

Les M.A.F.P.E.N. organisent de nombreux stages et favorisent les rencontres et colloques.

Les collègues allemands nous disent brièvement leur organisation.

Au Danemark, le droit à la formation est reconnu depuis longtemps.

Le Portugal, l'Irlande, la Grande-Bretagne sont défavorisés.

En Belgique, elle est obligatoire, en mettant surtout l'accent sur l'informatique, l'introduction des technologies nouvelles, une large place est faite à la didactique des matières, mais aussi au travail en groupe, les relations enseignants-enseignés, une initiation à la recherche pédagogique aussi (l'enseignant doit être un chercheur : statut enseignant = chercheur du Supérieur).

Plus récentes sont les actions École - Entreprises pour une collaboration accrue avec les milieux extérieurs à l'école et aussi l'organisation des Université d'été.

Les I.U.F.M. nouvellement créés assurant la formation pédagogique après la formation académique des stagiaires : savoir et méthode se complètent.

Le projet d'établissement allié à un plan de formation continue est une condition d'efficacité.

Enfin, dans un esprit d'ouverture, favoriser les échanges entre les établissements et surtout inclure dans la formation initiale des enseignants des échanges, stages et visites dans des établissements à l'étranger. Dans ce domaine un gros travail de réflexion reste à faire. Je m'en suis tenu à une interrogation essentielle afin d'appréhender l'école d'aujourd'hui surtout pour préparer celle de demain.

IV.– BIBLIOGRAPHIE

Ecole et cultures en Europe (C.R.D.P.).
L'échec scolaire est-il une fatalité? Une question pour l'Europe (Hatier).
Pour une Europe de l'éducation (Conseil de l'Europe).
L'Europe en marche 1993 (Ministère des Affaire Européennes : 1er Ministre).
Les services d'orientation au Danemark (O.N.I.S.E.P. Oct. 1991).

A VOS STYLOS

PROBLÈME 23

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel)

Dans un jeu de 52 cartes battu, quelle est la probabilité pour qu'une dame et un roi soient voisins immédiats?

Solution

On peut parvenir à des algorithmes qui permettent le calcul de cette probabilité avec plus ou moins de difficulté. La méthode qui suit, proposée indépendamment par O. Adelman et M. Krier, donne facilement le résultat avec l'aide d'une calculatrice non programmable effectuant seulement les quatre opérations.

Le jeu comporte d dames, r rois et a autres cartes, en tout $n = d + r + a$ cartes (ici $n = 52$, $d = r = 4$, $a = 44$). Toutes les cartes sont deux-à-deux distinctes.

Appelons **couple** une paire consécutive dame-roi ou roi-dame; chaque dame ou roi contribue à au plus deux couples. Notons X le nombre de couples du paquet et Y le nombre de couples que l'on observe après avoir retiré du paquet les a autres cartes; il est clair que $Y \geq X$. Nous allons calculer pour tout i la probabilité $P[X = i]$ (l'énoncé demande de calculer $1 - P[X = 0]$ ou $P[X = 1]$ selon la manière dont on l'interprète). On écrit

$$P[X = i] = \sum_{k \geq i} P[X = i | Y = k] P[Y = k];$$

nous allons calculer séparément $P[Y = k]$ et $P[X = i | Y = k]$.

Pour le calcul de $P[Y = k]$ (qui revient à résoudre le problème avec $a = 0$), remarquons que le nombre de manières de ranger p cartes en q paquets ordonnés et non vides est $p!\binom{p-1}{q-1}$; il y a en effet $p!$ manières de les aligner sur la table, puis, parmi les $p - 1$ intervalles ainsi formés, $\binom{p-1}{q-1}$ manières de placer les $q - 1$ séparations entre paquets.

Pour k impair, le nombre de manières de placer nos $d + r$ cartes de façon à former exactement k couples en commençant à gauche par une dame est

$$d!\binom{d-1}{\frac{k-1}{2}} r!\binom{r-1}{\frac{k-1}{2}}$$

car il faut partager les dames en $\frac{k+1}{2}$ paquets, ainsi que les rois, et alterner les paquets de dames et de rois. On en déduit, toujours pour k impair,

$$P[Y = k] = 2\frac{\binom{d-1}{\frac{k-1}{2}}\binom{r-1}{\frac{k-1}{2}}}{\binom{d+r}{d}}$$

(le 2 vient de ce qu'on peut aussi commencer à gauche par un roi et $(d+r)!$ au dénominateur est le nombre total de placements des $d+r$ cartes).

De façon analogue, pour k pair

$$P[Y=k]=\frac{\binom{d-1}{\frac{k}{2}}\binom{r-1}{\frac{k}{2}-1}+\binom{r-1}{\frac{k}{2}}\binom{d-1}{\frac{k}{2}-1}}{\binom{d+r}{d}}.$$

Avec les valeurs $d=r=4$, le calcul se fait à la main et donne

k	1	2	3	4	5	6	7
$P[Y=k]$	$\frac{2}{70}$	$\frac{6}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{6}{70}$	$\frac{2}{70}$

Pour calculer $P[X=i|Y=k]$, nous partons d'une configuration des $d+r$ dames et rois présentant k couples et, en intercalant les a autres cartes de toutes les façons possibles, nous allons calculer la probabilité de réduire à i le nombre de couples ; ceci ne dépendra que de k et non de la configuration choisie, fournissant ainsi $P[X=i|Y=k]$.

Le nombre total de manières de placer les a autres cartes est

$$(d+r+1)(d+r+2)\dots(d+r+a)=\frac{(d+r+a)!}{(d+r)!}.$$

Le nombre de manières de les placer de façon à séparer $k-i$ couples et à en conserver i est

$$\binom{k}{i}\frac{a!}{(a-k+i)!}(d+r-i+1)\dots(d+r-i+a-k+i);$$

$\binom{k}{i}$ vient du choix des couples qui seront séparés, $\frac{a!}{(a-k+i)!}$ est le nombre de choix possibles pour les $k-i$ cartes commençant (à gauche) les $k-i$ blocs séparant les couples existant, et $(d+r-i+1)\dots(d+r-i+a-k+i)$ le nombre de manières de placer les $a-k+i$ autres cartes restantes. Il ne reste qu'à diviser le nombre de cas favorables par le nombre total pour obtenir, après regroupement,

$$P[X=i|Y=k]=\frac{\binom{k}{i}\binom{n-k}{d+r-i}}{\binom{n}{d+r}}.$$

Avec une calculatrice et un peu de patience on obtient, au millième près,

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$P[X=i]$	0,514	0,372	0,100	0,013	0,001	0,000	0,000	0,000

Remarques : Lorsque $d=r$, la loi de Y présente une symétrie : $P[Y=k]=P[Y=d+r-k]$. Ceci peut-il se voir sans calcul grâce à des bijections bien choisies ?

La formule obtenue pour $P[X = i|Y = k]$ n'est autre que la probabilité d'obtenir i dames ou rois en tirant au hasard k cartes du paquet (loi hypergéométrique). Est-ce une coïncidence ?

PROBLÈME 24

Énoncé

Un faisceau de droites parallèles fournit un exemple de partition du plan en droites.

a) Existe-t-il une partition du plan en cercles (non dégénérés, c'est-à-dire de rayon ni nul ni infini) ?

b) Existe-t-il une partition du plan en figures formées chacune de deux cercles (distincts et non dégénérés) tangents intérieurement ou extérieurement ?

Indication

a) Non. b) Non.

PROBLÈME 25

Énoncé

Etant donné un triangle, trouver tous les centres
a) des ellipses inscrites dans le triangle,
b) des ellipses ex-inscrites dans le triangle,
c) des hyperboles dont une branche est tangente aux trois côtés du triangle,
d) des hyperboles dont une branche est tangente à deux côtés du triangle et l'autre branche au troisième.

PROBLÈME 26

Enoncé (proposé par R. Iss)

Etant donnés n points distincts sur un cercle, on trace un polygone ayant ces points pour sommets. On suppose que p couples de côtés, et p seulement, ont un point commun autre qu'un sommet, et qu'aucun triplet de côtés n'a de point commun.

1) Ce polygone partage l'intérieur du cercle en r régions. Calculer r en fonction de n et de p.

2) Pour un nombre n donné de côtés, déterminer la valeur maximum du nombre p des points d'intersection des côtés.

L'HÉTÉROGÉNÉITÉ DES PROFESSEURS FACE À DES ÉLÈVES HÉTÉROGÈNES

Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège

par Jean-Claude RAUSCHER

NOUVELLE BROCHURE AYANT FAIT L'OBJET D'UNE THÈSE soutenue à l'Université des Sciences Humaines de Strasbourg le 5 janvier 1993 (*).

Une première hypothèse de notre démarche est la possibilité d'observer entre professeurs des écarts relatifs, non à leurs connaissances dans leur discipline d'enseignement, ni à leurs modèles d'organisation pédagogique, mais aux objets d'enseignement qu'ils se donnent. Une deuxième hypothèse est que des différences dans les progressions des élèves peuvent être associées à ces écarts.

Ces hypothèses nous ont amené, au cours de l'année scolaire 89-90, à observer les outils d'évaluation utilisés en géométrie par neuf professeurs expérimentés et à tester leurs élèves.

Du côté des professeurs, notre observation révèle des manières très différentes de prendre en compte la variété des registres et des niveaux de complexité dans les traitements à effectuer par les élèves.

Pour tester les élèves, nous disposions, en point de départ, de l'Évaluation Nationale entreprise en mathématiques au début de l'année de Sixième (élèves d'environ 11 ans). Nous avons procédé en fin d'année à une évaluation de la progression des 512 élèves de 22 classes, dont 14 classes où nos professeurs enseignaient.

Sur la composition des classes, nos observations montrent qu'il est difficile pour les élèves d'une classe de connaître une évolution favorable lorsque, par rapport à la population de référence, les élèves les plus avancés en début d'année sont trop rares.

Pour les autres classes, il apparaît que les élèves dont les professeurs semblent ignorer l'évaluation de capacités de traitements variés et progressifs évoluent moins favorablement que leurs camarades dont les professeurs peuvent proposer un large éventail de traitements parce qu'ils analysent les différents aspects en jeu pour en situer les difficultés.

Un aspect clé du métier et de la formation des professeurs apparaît ainsi.

Mots clés :
Enseignement des mathématiques – Apprentissages en mathématiques – Géométrie – Collège – Évaluation – Évolutions de classes – Formation des professeurs.

(*) Prix : 160 F (port compris si envoi à un établissement scolaire en France - Autrement ajouter 20 F) – Commande à envoyer à la Bibliothèque de l'I.R.E.M. de Strasbourg – Paiement à l'ordre de M. l'Agent Comptable de l'U.L.P. – I.R.E.M.