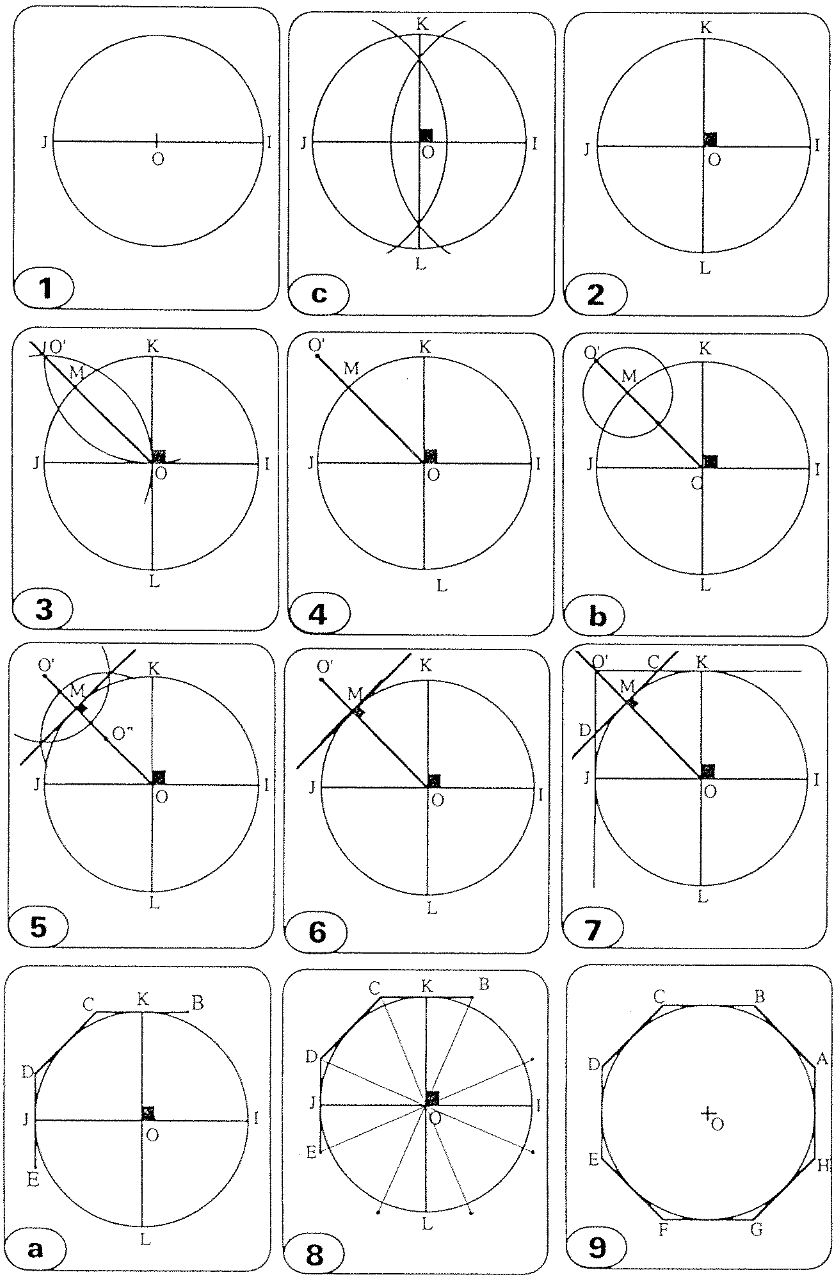
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 73 – DÉCEMBRE 1993 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

Construction d'un octogone régulier à la règle et au compas

Pour la deuxième fois, en début d'année scolaire, les élèves de Seconde ont passé des tests dans quatre matières : français, mathématiques, histoire-géographie et langue vivante 1. Ces tests ont été élaborés au niveau national, organisés par la Direction de l'Evaluation et de la Prospective (DEP) du Ministère de l'Education Nationale. Ils doivent permettre aux professeurs d'effectuer un diagnostic sur les capacités et compétences des élèves et de "moduler" leur enseignement selon le profil de la classe et les qualités ou difficultés observées pour chaque élève.

L'un des exercices proposés en mathématiques cette année était inspiré du problème de la construction des polygones réguliers à la règle et au compas. En voici l'énoncé :

> Une construction d'un octogone régulier dont chaque côté est tangent à un cercle de diamètre $[IJ]$ donné est décomposé en 12 étapes.
>
> Cette construction a été faite uniquement à la règle et au compas. Certains points et certains traits de construction devenus inutiles ont été effacés.
>
> Les 9 figures ci-dessous, repérées par un numéro sont placées dans l'ordre chronologique de la construction :
> (suivent les figures **1, 2, 3,** ...**9**).
>
> Il reste à intercaler convenablement les figures ci-dessous :
> (suivent les figures **a**, **b**, **c** avec des textes à remplir tels que :
>
> 1° La figure **a** doit être placée entre la figure ...et la figure ...)

Les trois questions posées sont dans l'ordre croissant de difficulté apparu à l'expérimentation.

La page reproduite en couverture (réduite de A4 à A5) était imprimée dans le cahier du professeur (mais sans numéro **1**, **2** ou **9** ni lettre **a**, **b** ou **c**), avec la suggestion de donner les vignettes dans le désordre pour demander de les reclasser. Un beau cadeau pour les professeurs.

Rappelons que les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas sont ceux dont le nombre n de côtés est de la forme 2^α avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \geq 2$ ou de la forme $2^\alpha p_1.p_2 \ldots p_r$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et où les p_i sont des nombres premiers de Fermat distincts. La construction à la règle et au compas du polygone régulier de 17 côtés ($17 = 2^{2^2} + 1$) fut la première découverte publiée de Gauss (il avait alors 18 ans).

AU REVOIR

Quand il y a plus d'une vingtaine d'années je suis arrivé en Alsace, à Sélestat, j'y ai fait la connaissance d'un collègue dynamique, un certain Michel de Cointet, qui m'a tout de suite invité aux réunions de la régionale APMEP. J'y ai ainsi rencontré tous les professeurs qui ont lancé l'IREM, et que je ne nommerai pas de peur d'en oublier. C'est lors d'une de ces réunions qu'un dénommé Jean Samson relança l'idée de '*L'Ouvert*'. J'ignorais alors de quoi il s'agissait et quand j'acceptai de prendre la responsabilité de sortir trois numéros par an, je ne savais pas que j'en prenais pour vingt ans! Je pensais qu'avec quelques idées et l'expérience de publication pour des groupes de jeunes, je m'en tirerais assez bien d'autant plus que j'avais le soutien de tout un groupe. Ce fut effectivement ce qui se passa au début.

Mais voilà, l'IREM se développa et le groupe de l'APMEP s'y investit chaque année davantage et comme tout le monde était satisfait de '*L'Ouvert*', on me fit de plus en plus confiance ce qui eut pour résultat de m'isoler. '*L'Ouvert*' devint ainsi, d'une certaine façon, la retranscription des œuvres complètes de Jean Lefort. Il était temps qu'arrivât Eric Chaney qui sût, avec l'aide de Georges Glaeser, donner une nouvelle direction à la politique éditoriale. Je ne peux que regretter son passage trop court à la rédaction de '*L'Ouvert*' puisqu'il fallut que je reprenne le collier au bout de quatre ans.

Aujourd'hui, je quitte définitivement, du moins je l'espère. Non seulement je ne m'occupe plus de la rédaction, mais pour la première fois mon nom n'apparaît plus comme responsable de la publication, ces deux fonctions étant séparées. Jean-Pierre Friedelmeyer assure la tâche de rédacteur en chef avec le soutien de l'IREM, Odile Schladenhaufen celle de directrice de la publication en tant que présidente de la régionale APMEP d'Alsace. C'est une façon d'institutionnaliser notre revue. C'est peut-être pour cela que depuis deux ans je cherchais à trouver un (une, des) remplaçant((e)s). '*L'Ouvert*' est devenu une institution, à mon grand dam, ce qui diminue l'espace de liberté qu'il représente pour chaque professeur, même si cela se traduit d'un autre côté par une plus grande reconnaissance de la communauté professorale.

Je sais qu'entre les mains d'Odile et de Jean-Pierre, '*L'Ouvert*' est assuré de continuer; avec leurs idées, leurs orientations, ils sauront insuffler un nouvel esprit à un périodique qui a une notoriété internationale. Quant à moi, je dis simplement au revoir car j'espère bien vous donner à tous l'occasion de me lire dans l'un ou l'autre article de culture mathématique.

J. LEFORT.

NE FERMONS PAS "L'OUVERT" (*)

Pendant bien des années Jean LEFORT a porté à bout de bras '*L'Ouvert*' , découvrant pour les lecteurs des auteurs et des sujets qui leur permettent d'être informés, d'en savoir plus et de trouver des idées pour leur enseignement. Mais voilà, la tâche est rude et Jean a décidé de souffler un peu. Pour le remplacer une équipe s'est formée, qui ne comprend pas moins de cinq personnes, convaincues que cette revue doit durer pour tirer parti d'une richesse locale qui, sinon, s'éparpille ou se perd.

Notre université tient un bon rang dans le travail mathématique et plus d'un professeur (de collège, de lycée ou d'université) est satisfait lorsqu'il trouve l'occasion d'être informé de l'actualité mathématique, des travaux en cours et de résultats de recherche, même lorsque cela touche à un domaine qui n'est pas le sien. Il est dans notre intention de maintenir, comme aurapavant, cette information à un niveau qui ne dépasse pas les compétences d'un Deug 2^e^ année pour que la lecture reste aisée. Mais à côté de cette curiosité intellectuelle, indispensable et formatrice, reste une curiosité pratique pour l'enseignant de collège ou de lycée. Or, il se passe bien des événements dans les recherches pédagogiques actuelles. L'ingéniosité des professeurs ou leur simple envie de bien faire passer un message ou un savoir, conduit à des activités de classe, à des documents, qu'il serait bon de diffuser. Les idées se propagent et nous souhaitons les faire rebondir dans '*L'Ouvert*' (c'est un défi puisque '*L'Ouvert*' n'a pas de paroi!).

"Nous", c'est en fait : Richard CABASSUT, enseignant en lycée, Michel EMERY (qui maintient la rubrique "A vos stylos"), enseignant en université, Jean-Pierre FRIEDELMEYER, enseignant en lycée, Paul GIRAULT, enseignant en université, Odile SCHLADENHAUFEN, enseignante en lycée.

O. SCHLADENHAUFEN.

(*) Ce titre est inspiré d'une question que Jean Lefort posait quelquefois : faut-il fermer '*L'Ouvert*'?

SOMMAIRE

N° 73 – 1993

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
80 F (130 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
120 F (200 F/2 ans) dans les autres cas.
◇ Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 25.– F

LES 350 ANS DU "GRAND THÉORÈME DE FERMAT" (*)

Norbert SCHAPPACHER

Strasbourg, U.F.R. de Mathématique et d'Informatique

Dans une série de trois conférences données à l'Institut Isaac Newton de Cambridge (Angleterre), Andrew Wiles de l'Université Princeton annonça une preuve de l'énoncé suivant :

"Grand théorème de Fermat". *Soient a, b, c et n des entiers tels que n soit au moins égal à 3. Si $a^n + b^n = c^n$ alors $abc = 0$.*

En d'autres termes, l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$, pour $n > 2$, n'admet pas de solution en nombres entiers tous non nuls (1).

Cette conjecture générale (qui concerne **tous** les n égaux à 3,4,5,6...) fut proposée, apparemment pour la première fois, par Fermat (1601-1665), et resta non démontrée durant 350 ans environ. Son attrait particulier provient du contraste saisissant entre sa formulation élémentaire et les méthodes étonnamment sophistiquées qui semblent nécessaires à sa preuve : la démonstration de Wiles utilise presque tous les concepts complexes, théories et méthodes qui ont été créés dans le domaine très actif de la Géométrie Algébrique Arithmétique au cours des vingt dernières années.

Bien plus : la proposition de Fermat a suscité de l'intérêt **uniquement** parce qu'elle a procuré aux mathématiciens un formidable et durable défi. Malgré l'indifférence affichée par bon nombre des plus grands arithméticiens des derniers siècles – tel Carl Friedrich Gauss – et malgré leurs intérêts de recherche souvent très différents – voir l'intérêt de Kummer pour les lois de réciprocité –, le problème de Fermat s'est établi au fil des âges comme un critère suprême de la puissance des méthodes théoriques développées par l'arithmétique professionnelle. Et comme il se présentait d'autre part de façon élémentaire, il a exercé une énorme fascination sur les mathématiciens non professionnels dont beaucoup déjà se sont essayés là-dessus afin de démontrer l'incompétence des experts dans le domaine.....
Maintenant que la proposition de Fermat a été transformée en un théorème démontré, elle perd tout intérêt. En fait, je ne connais aucune application du "grand théorème de Fermat", ni interne ni externe aux mathématiques (2).

(*) Conférence IREM de Strasbourg - Régionale APMEP d'Alsace donnée le 3 novembre 1993.

(1) Pour le cas exclu $n = 2$, les Babyloniens connaissaient déjà des nombres entiers x, y, z tels que $x^2 + y^2 = z^2$. En d'autres termes, il existe des triangles rectangles à côtés entiers, par exemple le triangle $(3, 4, 5)$: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Il existe en fait une infinité de tels "triplets Pythagoriciens" entiers, et ils peuvent tous être paramétrés explicitement – voir l'appendice

(2) Il y a une exception qui prouve la règle : D. Kubert [Proc. LMS (3) 33 (1976), 193–237] (voir aussi les travaux de Hellegouarch et Demyanenko cités par Kubert) discute d'un lien entre la conjecture de Fermat et le problème de borner la torsion rationnelle des courbes elliptiques sur **Q**. Toutefois ce problème a été résolu, sans recours au "grand théorème de Fermat", par B. Mazur déjà en 1976.

Ceci étant dit, je m'empresse de préciser qu'il n'en est pas du tout de même pour la démonstration d'Andrew Wiles. En fait, le "grand théorème de Fermat" en découle comme un résultat annexe. Ce que Wiles établit, c'est une part essentielle d'une conjecture très générale portant les noms des mathématiciens Y. Taniyama et G. Shimura, qui est assez forte pour que le "grand théorème de Fermat" en soit une conséquence très particulière. Cette conjecture générale date du milieu des années 50 (de notre siècle) et n'est pas aussi simple à formuler que le "grand théorème de Fermat" (voir le paragraphe 4 de cet article (3)). Mais, contrairement à l'énoncé difficile à motiver du "grand théorème de Fermat", les mathématiciens ont d'excellentes raisons de considérer la conjecture de Taniyama-Shimura comme extrêmement intéressante. Et elle a beaucoup de belles applications et conséquences autres que le "grand théorème de Fermat".

Enfin, comme c'est le cas de tout élément remarquable du progrès scientifique, le travail de Wiles ouvre de nouvelles perspectives et montre très clairement nombre de problèmes à affronter maintenant. Ceux-ci cependant ne sont pas faciles à exprimer dans des termes aussi élémentaires que le "grand théorème de Fermat".

Le but de cet article est de placer la conjecture de Fermat et la démonstration annoncée de Wiles dans une perspective historique en mettant en évidence quatre étapes dans leur évolution :
1621–1665 : L'arithmétique de Fermat.
1844–1855 : Kummer et la création de la Théorie algébrique des nombres.
1901–1983 : La Géométrie arithmétique des courbes de Fermat.
1984–1993 : Relation avec l'arithmétique des courbes elliptiques.

1.– L'arithmétique de Fermat (1621–1665)

Rechercher les origines du "grand théorème de Fermat" nous conduit dans l'ancienne cité grecque d'Alexandrie située sur la côte méditerranéenne de l'Egypte. C'est là que, pendant une période de luttes ethniques, religieuses et politiques prolongée, les mathématiciens Diophante et Pappus (probablement au milieu, respectivement à la fin du III^e^ siècle après J.C.) ont travaillé et écrit leurs livres. Certains de ces travaux furent parmi les premiers traités mathématiques à être redécouverts dans les copies grecques byzantines, en Europe occidentale au XVI^e^ siècle, alors que le principal moyen de diffusion des classiques grecs se faisait non par la culture byzantine mais par les traductions arabes transmises par la culture islamique en Espagne et en Italie.

La redécouverte des mathématiques grecques tardives d'Alexandrie, dans une Europe qui était avide de définir ses propres origines classiques, poussa les mathématiciens européens de cette époque (en particulier les français, tels Pelletier et Viète) à proposer une interprétation anti-arabe du développement de l'Algèbre (4).

---

(3) dans le prochain numéro de "*L'Ouvert*".
(4) Voir les travaux récents de l'historienne de mathématiques Giovanna Cifoletti. Cf. le compte rendu de la table ronde sur "'L'Europe Mathématique" dans les Actes du premier Congrès

Selon cette idéologie, les travaux de Diophante montraient que les grecs étaient en possession d'une première forme d'algèbre, qu'ils traitaient comme une science pure (contrairement aux manuels de comptabilité, etc...), que cette réussite des mathématiques grecques avait été oubliée ou, en fait, "'salie et souillée" (comme le dit Viète dans la préface de sa *Zetetica*) par les Arabes, mais était maintenant retrouvée et développée dans l'Europe chrétienne (5).

Il est vrai que Diophante a établi une notation algébrique rudimentaire, même si elle ressemble plutôt à une sténographie pour les expressions courantes utilisées dans les argumentations mathématiques. Il a des abréviations pour un nombre (rationnel) inconnu (un seul à la fois!), son carré, son cube, ses puissances quatrième et sixième, pour la soustraction et pour les fractions (6). Et en ce qui concerne Pappus, on pourrait éventuellement lire la "méthode d'Analyse" – qu'il décrit comme inversion heuristique des démonstrations déductives d'Euclide – comme une sorte de transformation algébrique du problème donné en vue de trouver la solution.

Mais, au tournant de siècle de 1600, les fiers algébristes chrétiens français ont donné trop d'importance à l'algèbre venue d'Alexandrie, et peut-être aussi exagéré leur propre originalité dans le but d'exclure les contributions arabes de cette branche des mathématiques. En fait, non seulement la culture islamique a favorisé des travaux et des échanges d'idées très fructueux sur l'algèbre et l'arithmétique suivant les livres de Diophante, entre divers érudits du monde sous domination arabe, mais nombre de ces résultats avaient déjà été intégrés aux manuels européens du XV[e] siècle sur les techniques de calcul appliqué – traités bien connus, sinon mentionnés, par nos algébristes chrétiens.

Pierre de Fermat (1601–1665), un juge qui vivait à Toulouse mais exerçait à Castres, aimait bien écrire des poèmes en latin ou en italien et faire des mathématiques pendant son temps libre. Son appréciation des travaux de Diophante était assez différente de celle de Viète. Fermat lut l'auteur d'Alexandrie dans l'édition gréco-latine commentée de Bachet – traduction parue en 1621, qui réalisait un progrès considérable dans la correction des erreurs de copies des manuscrits byzantins, et ajoutait en même temps un grand nombre de problèmes arithmétiques, sous forme de commentaire au texte diophantien. Guidé par la passion et la connaissance de Bachet des casse-tête de la théorie des nombres, Fermat creusa donc de

---

Européen des Mathématiques, Paris 1992, à paraître chez Birkhäuser.

(5) Il est amusant de noter à ce sujet que l'érudit allemand Oswald Spengler dans son "Untergang des Abendlandes" (Fin de l'Occident, 1918 ff) très important – et politiquement influent – classe Diophante comme appartenant à ce qu'il appelle la culture "Arabe" (avant l'avènement de l'Islam). Et H. Hankel, dans son Histoire des Mathématiques (Leipzig 1874), insiste beaucoup sur le style "non-grec" de Diophante. Cependant il n'y a rien de connu sur la biographie de Diophante, son origine ethnique, son itinéraire, etc ..., ni sur les influences scientifiques que son travail peut avoir reçu dans le centre traditionnellement ouvert aux courants intellectuels les plus divers d'Alexandrie.

(6) Les traductions arabes de Diophante tendent à moins utiliser la notation fractionnaire que les manuscrits de la Grèce byzantine. Ces versions arabes (qui étaient aparemment inconnues en Europe au temps de Fermat) sont généralement plus fiables que les sources grecques.

vrais problèmes arithmétiques : la recherche de solutions rationnelles (ou même entières) des équations proposées.

Le progrès mathématique décisif réalisé par Fermat en arithmétique fut l'invention de la méthode de "descente infinie" (7) : pour certaines équations il est possible de construire à partir d'une solution en entiers positifs une autre solution en entiers positifs, qui est plus petite que la première en un sens qui peut dépendre du problème. Dans certains cas cette construction prouve par l'absurde que l'équation n'a pas de solutions en entiers positifs : s'il y en avait une, elle donnerait lieu à une suite infinie strictement décroissante d'entiers strictement positifs. Mais une telle suite ne peut, bien sûr, pas exister. On se reportera à l'appendice pour voir la mise en application d'une descente infinie de Fermat, qui prouve également le cas particulier $n = 4$ du "grand théorème de Fermat".

Cette sorte d'argument n'est valable que pour une collection d'entiers positifs – ou plus généralement pour un sous-ensemble discret et minoré, de nombres réels – mais pas pour des solutions en nombres réels ou rationnels. Partant de cette observation, Fermat sauta apparemment à la conclusion quelque peu hâtive que l'algèbre, avec sa notation qui s'applique aussi bien aux quantités continues qu'aux entiers, ne doit pas être utilisée en arithmétique. En conséquence, il n'eut pas de formalisme pour exprimer ses idées en théorie des nombres; il dut décrire ses démonstrations verbalement. Ceci peut ne pas apparaître tellement différent de la notation rudimentaire de Diophante (ou, d'ailleurs, de la prose mathématique arabe). Mais en réalité c'était quelque chose de pire pour Fermat, car en prouvant l'impossibilité de résoudre une équation on ne peut se replier sur la méthode avantageuse de Diophante, qui consiste à poser des valeurs numériques "génériques" pour les variables que le formalisme ne permet pas de traiter comme telles. Aucune surprise alors que Fermat ait souvent trouvé la marge de son Bachet-Diophante trop exigüe pour contenir ce qu'il avait en tête ...

L'énoncé du "grand théorème de Fermat", dans la marge d'un problème de Diophante qui demande de partager un carré en deux carrés, est formulé ainsi :
Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.
Partager un cube en deux cubes, ou un bicarré en deux bicarrés, ou en général, à l'infini, n'importe quelle puissance plus grande que le carré en deux puissances du même ordre, est impossible. J'ai découvert une preuve vraiment magnifique de cette propriété. L'exiguïté de la marge ne pourrait la contenir.

Il n'y a aucun moyen de dater cette note. En fait, nous n'avons même pas la copie

(7) Il n'y a pas de raison de douter que cette méthode fut une découverte de Fermat lui-même. En même temps elle se fonde sur l'inversion de procédures souvent employées par Diophante, et utilisées aussi dans les mathématiques indiennes des XI^e et XII^e siècles (pour trouver les solutions de ce que nous appelons l'équation de Pell) sous le nom de cakravala – voir A. Weil : Number Theory. An Approach through History. From Hammurapi to Legendre; Boston, Birkhäuser 1983.

originale du Bachet-Diophante de Fermat. La citation vient de l'édition imprimée de ce livre et des notes en marge que Samuel, le fils de Fermat, publia en 1670. L'affirmation, souvent reprise, que cette note fut écrite "autour de 1637" (si l'on croit le New York Times du 24 juin 1993, ce fut précisément "en 1637") est juste une hypothèse, basée seulement sur le fait que nous savons, par sa correspondance, que Fermat a commencé à s'occuper de questions arithmétiques au milieu de années 1630.

La chose la plus remarquable à propos de cette note dans la marge est que l'énoncé général (concernant tout $n \geq 3$) ne revient jamais plus dans la correspondance de Fermat (au moins autant que nous le sachions), bien qu'il ait écrit quelques lettres où il énumére ses réussites en arithmétique. Ceci pourrait signifier soit qu'il écrivit la note postérieurement à toutes ces lettres, auquel cas ce pourrait bien être son "dernier théorème", soit qu'il réalisa bientôt lui-même que sa "preuve vraiment magnifique" était défectueuse.

Je trouve la seconde hypothèse bien plus plausible, et j'adhère donc à la conjecture de Jean Itard(8) disant que la note fut écrite lorsque Fermat était encore assez jeune dans cette matière, manquant de l'expérience nécessaire pour voir ce qu'il introduisait quand le degré n de l'équation tend vers l'infini (voir le paragraphe 3 de cet article (9)). L'hypothèse de Itard a également le grand avantage de nous mettre plus à l'aise par rapport au fait de ne pas savoir quel argument particulier de descente Fermat avait en tête quand il écrivait sa note célèbre.

Avant d'aller d'un bond dans le XIX[e] siècle passons en revue les tout premiers résultats particuliers concernant le "grand théorème de Fermat" : comme il a été mentionné plus haut et explicé dans l'appendice, Fermat a prouvé le cas $n = 4$ de la conjecture. Et $n = 3$ fut résolu par Euler (1707–1783), également au moyen d'une descente infinie.

Si l'énoncé du "grand théorème de Fermat" est vrai pour l'exposant $p > 2$, alors il l'est aussi pour chaque multiple $n = pm$ car $x^n + y^n = (x^m)^p + (y^m)^p$ et $(z^m)^p = z^n$. En joignant cette remarque aux résultats particuliers de Fermat et d'Euler, on voit qu'il suffit de prouver le "grand théorème de Fermat" pour des exposants $n = p$ qui sont des nombres premiers au moins égaux à 5. Dans la suite nous nous restreindrons à de tels exposants premiers $p \geq 5$.

(Fin de la première partie)

APPENDICE

Un exemple de descente infinie chez Fermat

L'exemple suivant d'une preuve par descente infinie – la seule que Fermat ait esquissée de façon suffisamment détaillée pour nous permettre de la reconstruire avec certitude – inclut la méthode de Fermat pour vérifier que l'équation $x^4 + y^4 = z^4$

(8) J. Itard, Les méthodes de Fermat en théorie des nombres, Revue d'Hist. Sciences **2**; reproduit dans : Itard, Essais d'histoire des mathématiques, Paris (Blanchard) 1981.
(9) dans le prochain numéro de "*L'Ouvert*".

n'a pas de solutions en nombres entiers strictement positifs. Nous citons la note de Fermat dans la marge de son édition de Diophante par Bachet, à côté du tout dernier théorème de ce livre, insérant nos explications et commentaires au fur et à mesure de sa lecture.

Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus. Huius theorematis a nobis inventi demonstrationem, quam & ipsi tandem non sine operosa & laboriosa meditatione deteximus, subjungemus. Hoc nempe demonstrandi genus miros in arithmeticis suppeditabit progressus.
L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré. Je vais donner la démonstration de ce théorème que j'ai découvert (je ne l'ai pas trouvée au reste sans une pénible et laborieuse méditation), car ce genre de démonstration conduira à des progrès merveilleux en arithmétique.

En notation algébrique moderne, nous pouvons énoncer le résultat de la façon suivante :

Théorème : Si $a, b, c \in \mathbf{Q}$ sont des nombres rationnels tels que $a^2 + b^2 = c^2$ alors $\frac{ab}{2} \notin \mathbf{Q}^{*2}$.

L'esquisse verbale de la preuve de Fermat qui suit, peut être reconstruite, une fois que nous avons rappelé un prérequis concernant les triangles rectangles, que Fermat ne connaissait que trop bien par Diophante, qui a même un terme technique spécifique pour lui ($\pi\lambda\alpha\sigma\sigma\epsilon\iota\nu$) :

Paramétrisation des triplets pythagoriciens

Par un changement d'échelle sur le triangle – ce qui ne modifie son aire que par un facteur carré – nous pouvons admettre, sans perte de généralité, que $a, b, c \in \mathbf{Z}$ sont des entiers positifs premiers entre eux : pgcd $(a, b, c) = 1$. Une considération *modulo 4* (comme l'on dit aujourd'hui) montre que a et b doivent être de parité distincte. Nous pouvons ainsi normaliser le triplet (a, b, c) de telle façon que par exemple a soit pair et b impair. Alors il existe deux entiers entre eux positifs premiers p et q, tels que $p > q$ et $p - q$ impair et

$$(a, b, c,) = (2pq, p^2 - q^2, p^2 + q^2).$$

A l'aide de cela, voici une reconstruction de l'admirable preuve de Fermat
Si area trianguli esset quadratus, darentur duo quadratoquadrati quorum differentia esset quadratus.
Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait deux bicarrés dont la différence serait un carré.(10)

En effet : si l'aire du triangle est un carré

$$\frac{ab}{2} = pq(p^2 - q^2) = \text{ un carré,}$$

(10) P. de Fermat, Observatio XVL, [I], p.340f; traduction française par Paul Tannery.

les trois facteurs de ce produit sont deux à deux premiers entre eux. Donc chacun d'eux doit être un carré

$$p = x^2 \ ; \ q = y^2 \ ; \ p^2 - q^2 \ ; \ x^4 - y^4 = \text{ un carré.}$$

Notons que le reste de la démonstration va montrer que ce problème : $x^4 - y^4 =$ un carré, n'a aucune solution en entiers positifs premiers entre eux. Le cas $n = 4$ du "grand théorème de Fermat" s'en déduit immédiatement.

Inde sequitur dari duo quadratos quorum & summa & differentia esset quadratus.
Il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés dont la somme et la différence seraient des carrés.
Nous avons $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$ où à nouveau les facteurs sont premiers entre eux du fait que p et q le sont et que $p - q$ est impair. Nous trouvons donc :

$$p + q = x^2 + y^2 = u^2 \ ; \ p - q = x^2 - y^2 = v^2.$$

Datur itaque numerus, compositus ex quadrato & duplo quadrati, aequalis quadrato, ea conditione ut quadrati eum componentes faciant quadratum.
Par conséquent, on aurait un nombre carré, somme d'un carré et du double d'un carré, avec la condition que la somme des deux carrés qui servent à le composer, soit également un carré.

Soustrayant membre à membre les deux dernières équations il vient:

$$2y^2 = u^2 - v^2 = (u+v)(u-v) \ (\S)$$

ce que Fermat décrit comme la donnée d'un carré qui est la somme d'un carré et du double d'un carré : $v^2 + 2y^2 = u^2$, de telle façon que les carrés de gauche additionnés, donnent également un carré : $v^2 + y^2 = x^2$.

Sed, si numerus quadratus componitur ex Quadrato & duplo alterius quadrati, ejus latus similiter componitur ex quadrato & duplo quadrati, ut facillime possumus demonstrare.
Mais si un nombre carré est somme d'un carré et du double d'un carré, sa racine est également somme d'un carré et du double d'un carré, ce que je puis prouver sans difficulté.

Des hypothèses sur p et q on déduit que pgcd $(u+v, u-v) = 2$ (autrement dit, ni 4, ni aucun nombre premier impair ne divise à la fois $u + v$ et $u - v$). Ainsi, à l'exception de ce diviseur commun 2, les deux facteurs de droite de l'égalité (§) doivent de nouveau être chacun un carré. Nous pouvons donc écrire : $u + v = 2r^2$ et $u - v = 4s^2$, pour un certain entier impair r, ou bien $u - v = 2r^2$ et $u + v = 4s^2$. Dans chaque cas il s'ensuit

$$u = r^2 + 2s^2.$$

Unde concludetur latus illud [u] esse summam laterum circa rectum trianguli rectanguli, & unum ex quadratis illud componentibus [r^2] efficere basem, & duplum quadratum [$2s^2$] aequari perpendicolo.

On conclura de là que cette racine est la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'un des carrés composants formera la base, et le double carré la hauteur.

Additionnant les équations qui définissent u et v, nous obtenons :

$$x^2 = \frac{u^2+v^2}{2} = \frac{1}{4}[(u+v)^2 + (u-v)^2] = (r^2)^2 + (2s^2)^2.$$

Ainsi nous avons un nouveau triangle rectangle $(2s^2, r^2, x)$ à côtés entiers.

Nous pourrions remarquer tout de suite que son aire, r^2s^2, est de nouveau un carré, et que ce triangle est strictement plus petit que celui dont nous étions partis (a, b, c). En fait, sa base x est un diviseur propre de l'un des plus petits côtés du triangle original : $2pq$. Mais Fermat, à cette occasion(11), choisit de raisonner sur les équations obtenues à partir des triangles en les paramétrisant à la manière pythagoricienne : partant de $(a', b', c') = (2s^2, r^2, x)$, nous écrivons $(a', b', c') = (2p'q', p'^2 - q'^2, p'^2 + q'^2)$.

Illud itaque triangulum rectangulum conficietur a duobus quadratis quorum summa & differentia erunt quadrati.
Ce triangle rectangle sera donc formé par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés.

Comme précédemment, parce que l'aire du nouveau triangle est encore un carré, p' et q' seront des carrés, et nous obtenons de nouveaux nombres x' et y' tels que $x'^2 \pm y'^2$ soient chacun un carré.

At isti duo quadrati minores probabuntur primis quadratis suppositis, quorum tam summa quam differentia faciunt quadratum.
Mais on prouvera que la somme de ces deux carrés est plus petite que celle des deux premiers dont on a également supposé que la somme et la différence soient des carrés.

En fait, nous savons déjà que $x' < x$ et $y' < y$.

Ergo, si dentur duo quadrati quorum summa & differentia faciant quadratum, dabitur in integris summa duorum quadratorum ejusdem naturae, priore minor.
Donc, si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure.

Afin de compléter la "descente infinie" avec soin, Fermat associe donc un entier positif unique à une solution (triangle) comme mesure de ses côtés : il prend la somme $x + y$; $x' + y' < x + y$.

---

(11) Dans une lettre à Huygens où il décrit sa méthode de démonstration en une seule phrase, il souligne qu'elle conduit d'un triangle ayant une aire carrée à un autre triangle plus petit, avec la même propriété. Voir Weil, loc. cit., p. 76f.

Eodem ratiocinio dabitur & minor ista inventa per viam prioris, & semper in infinitum minores invenientur numeri in integris idem praestantes. Quod impossibile est, quia, dato numero quovis integro, non possunt dari infiniti in integris illo minores.
Par le même raisonnement, on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et en continuant indéfiniment on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petits.

La contradiction finale prouve le théorème : s'il y avait une solution, nous pourrions, en itérant la procédure ci-dessus, obtenir une suite infinie décroissante d'entiers positifs : $x + y > x' + y' > x'' + y''$, $\ldots$ ce qui est absurde.

Demonstrationem integram et fusius explicatam inserere margini vetat ipsius exiguitas.
La marge est trop étroite pour recevoir la démonstration complète et avec tous ses développements.

Pour plus de détails concernant la preuve précédente, et sa comparaison à une preuve du même énoncé due à Frenicle de Bessy, voir l'article de Catherine Goldstein dans les actes du congrès Inter-IREM d'histoire des mathématiques (Lille 1990), à paraître.

Xème COLLOQUE INTER-IREM
ÉPISTÉMOLOGIE & HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

LA MÉMOIRE DES NOMBRES

CHERBOURG, 27 & 28 Mai 1994

Célèbre, remarquable, ou simplement naturel, le nombre est fondateur de l'activité mathématique. Mémoire des grandeurs, le nombre est aussi objet de mémoire. De la mesure des terres de la Haute Vallée du Nil, à la récente et très probable démonstration de la conjecture de Fermat par Andrew Wiles, le nombre est un témoin de la course humaine à l'abstraction.

Le Xème Colloque inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques, avec des conférences plénières, des ateliers et des exposés en parallèle, des rencontres avec des animateurs des IREMs, des chercheurs et des historiens de tous horizons, ravivera la mémoire des nombres chez des enseignants soucieux de la transmettre.

Créée en 1975, la Commission inter-IREM, qui organisa en 1977 son premier colloque, de bonne mémoire, à Tailleville, près de Caen, fête un anniversaire. Pour faire bonne mesure, ce colloque, qui n'est donc pas l'un des premiers, et qui ne saurait être négatif mais, à l'opposé, d'une absolue valeur, rassemblera à l'amiable et sans réel complexe, enseignants de nombreuses disciplines et de tous degrés, ayant un commun dénominateur. Venez nombreux, nous comptons sur vous et votre imaginaire... Mais prenez garde: nul ne sait s'il reviendra entier de Cherbourg, et chacun repartira en se demandant s'il était bien rationnel de remettre ça, près de vingt ans après, sur les lieux du crime, même parfait !

Si vous voulez participer ou intervenir à ce Colloque, adressez-vous à:
IREM de B.-N., I.U.T., Boulevard Maréchal Juin, 14000 CAEN.
Tél.: 31-44-27-91, Fax.: 31-94-32-59.

BULLETIN INTER-IREM - SECOND CYCLE

MATHS EN SECONDE :

Enoncés et scénarios

SOMMAIRE

La plupart des activités décrites dans cette brochure ont été conçues pour permettre dans la classe une pratique mathématique comportant un temps de recherche et de production de solutions (en groupes), un temps de débat de validation des solutions produites et des méthodes utilisées et un temps de synthèse mettant en évidence le savoir à retenir. Elles visent à mettre l'accent sur une notion mathématique nouvelle qui intervient comme outil efficace (voire indispensable) de résolution du problème posé, donc de donner du sens à cette notion.

La première partie de cette brochure montre comment ce type d'activité fait partie de l'organisation de la classe préconisée par les programmes et le situe dans la panoplie des types de situations d'enseignement.

Les onze activités présentées dans la deuxième partie comportent toutes une fiche synthétique de présentation, l'énoncé du problème, des propositions de gestion de la classe sous forme de scénarios, un compte rendu d'une utilisation contenant des exemples de productions d'élèves.

Une bibliographie et des éléments de réflexion sur l'apprentissage et sur le rôle joué par les situations d'enseignement proposées complètent cette brochure.

Pour commander, s'adresser à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg et établir le paiement à l'ordre de l'Agent Comptable de l'ULP - IREM.

Prix sur place, expédition en Alsace ou envoi dans un établissement scolaire (hors Alsace) : 60 F ; si envoi à une adresse personnelle (hors Alsace) : 80 F.

FRACTALS ARITHMÉTIQUES (*)

Jean-Pierre REVEILLÈS

Strasbourg, U.F.R. de Mathématique et d'Informatique

1. Introduction

Les fractals sont souvent présentés à partir de l'une de leurs caractéristiques essentielles: leur comportement étrange vis-à-vis de la dimension. Ils semblent — intuitivement — avoir une dimension différente de leur dimension topologique. Nous exposerons ici une classe d'ensembles qui méritent ce qualificatif mais qui sont engendrés par un processus très simple : l'itération d'applications *quasi-affines*, composées d'une transformation affine rationnelle et de la partie entière. Cette simplicité cache des propriétés très complexes et peu connues; la littérature mathématique est peu loquace sur ce sujet.

Nous montrerons que les applications quasi-affines de $\mathbb{Z}^2$ dans lui-même apparaissent naturellement dans la question des systèmes de numération de l'anneau des entiers de Gauss, nous donnerons quelques résultats élémentaires sur leur dynamique et nous montrerons qu'elles apportent une réponse au problème des rotations discrètes. Nous terminerons cet article par un bref commentaire sur la notion — difficilement évitable dès qu'on parle de fractals — de dimension.

2. Notations

Avant de continuer, fixons les notations. Soient x un rationnel et n un entier positif :

- $[x]$ désigne comme d'habitude la *partie entière* de x. On a donc l'inégalité $[x] \leq x < [x] + 1$.
- $\{x/n\}$ désigne le nombre $x - n[x/n]$. On a donc $0 \leq \{x/n\} < n$ et l'égalité

$$x = \left[\frac{x}{n}\right]n + \left\{\frac{x}{n}\right\}.$$

On remarquera que lorsque x est entier, $[x/n]$ et $\{x/n\}$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne de x par n.

(*) Conférence IREM de Strasbourg - Régionale APMEP d'Alsace donnée le 14 avril 1993.

3. Bases de numération de l'anneau des entiers de Gauss

La question des systèmes de numération a été périodiquement abordée dans la littérature dans l'espoir d'en découvrir qui soient mieux adaptés aux architectures récentes d'ordinateurs (cf. Knuth [8], Gilbert [3] et [4], Muller [9]). Un aspect intéressant de ces travaux est leur tentative d'extention des systèmes de numération de l'anneau $\mathbb{Z}$ à des anneaux plus généraux, par exemple l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

3.1 Division euclidienne dans l'anneau des entiers de Gauss

Il est bien connu que $\mathbb{Z}[i]$ possède une *division euclidienne* que nous rappelons brièvement. Soit $\rho = a + ib \neq 0$ un entier de Gauss donné et posons $N = a^2 + b^2$.

Soit $\xi = x + iy$ un entier quelconque et considérons le nombre complexe $\xi/\rho = X+iY$, où X, Y sont des *rationnels*. En considérant l'entier de Gauss $\chi = [X]+i[Y]$, on voit immédiatement qu'il existe un entier de Gauss $\sigma = s + it$ qui vérifie les deux conditions :

$$\xi = \chi\rho + \sigma, \quad s^2 + t^2 < N.$$

Cependant, ces conditions n'assurent pas l'unicité du quotient χ et du reste σ. En effet, lorsque X et Y sont de la forme $n + \frac{1}{2}$, il y a encore trois autres valeurs possibles pour σ.

Nous allons examiner s'il est possible de définir une division euclidienne dans laquelle le quotient et le reste sont uniques.

Nous supposerons désormais que a et b sont premiers entre eux. En notant a^{-1} l'inverse de a dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, il est alors facile de vérifier que l'application

$$\mathbb{Z}[i]/\rho\mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

définie par

$$\xi \longmapsto a^{-1}(ax + by) \pmod N \tag{1}$$

est un isomorphisme d'anneaux dont l'inverse est :

$$k \longmapsto k - \left[\frac{ak}{N}\right](a + ib) - \left[\frac{bk}{N}\right](b - ia) \pmod \rho. \tag{2}$$

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des entiers de Gauss qui vérifient les deux conditions :

$$\left[\frac{ax + by}{N}\right] = 0, \quad \left[\frac{-bx + ay}{N}\right] = 0. \tag{3}$$

Cet ensemble est formé des points à coordonnées entières appartenant au carré de sommets 0, ρ, $\rho + i\rho$ et $i\rho$.

On vérifie sans difficulté que les éléments de $\mathcal{R}$ forment un *système complet* de résidus de l'anneau quotient $\mathbb{Z}[i]/\rho\mathbb{Z}[i]$.

En utilisant les formules (1) et (2), il est possible de montrer que l'unique élément de $\mathcal{R}$ qui représente la classe résiduelle de ξ mod ρ est:

$$\sigma = x + iy - \left[\frac{ax+by}{N}\right](a+ib) - \left[\frac{-bx+ay}{N}\right](-b+ia).$$

En d'autres termes, l'entier de Gauss $(\xi - \sigma)$ est nul modulo ρ, ce qui veut dire que c'est un multiple de ρ. Nous avons donc muni $\mathbb{Z}[i]$ d'une division euclidienne en le sens suivant :

PROPOSITION.– *Soit $\rho \neq 0$ un entier de Gauss donné tel que $(a,b) = 1$. Pour tout entier de Gauss ξ, il existe un couple (χ, σ) et un seul tel que l'on ait :*

$$\xi = \chi\rho + \sigma, \quad \sigma \in \mathcal{R}.$$

Cette division présente encore un défaut : *elle n'est pas canonique* car elle dépend du choix du système complet de restes $\mathcal{R}$. Or il existe beaucoup d'autres systèmes complets de restes! En effet, on peut obtenir un nouveau système de restes en translatant par exemple l'ensemble $\mathcal{R}$. Plus généralement, si $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$ est une bijection telle que $\xi \not\equiv \xi'$ implique $\varphi(\xi) \not\equiv \varphi(\xi')$ (mod ρ), l'ensemble $\varphi(\mathcal{R})$ fait encore l'affaire.

Ceci précisé, le phénomène n'est pas nouveau. Nous utilisons couramment dans $\mathbb{Z}$ *deux* divisions euclidiennes : la division *canonique* et la division au *plus petit reste*, qui consiste à translater l'intervalle $[0, n-1]$.

Examinons maintenant d'un peu plus près ce qui se passe quand on translate $\mathcal{R}$ par l'un de ses éléments $\varepsilon = u + iv$. Posons :

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R} - \varepsilon, \quad e = -(au+bv), \quad f = bu - av.$$

Comme $\mathcal{R}$ est contenu dans le disque $|z| < N$, nous avons $|\varepsilon| < N$, ce qui implique $-N \leq e < N$ et $-N \leq f < N$.

Un calcul simple montre alors que l'unique élément $\sigma_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$ qui est équivalent modulo ρ à l'entier ξ est

$$\sigma_\varepsilon = x + iy - \left[\frac{ax+by+e}{N}\right](a+ib) - \left[\frac{-bx+ay+f}{N}\right](-b+ia),$$

le quotient correspondant étant

$$\chi_\varepsilon = \left[\frac{ax+by+e}{N}\right] + i\left[\frac{-bx+ay+f}{N}\right].$$

Pour chaque $\epsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$, nous obtenons ainsi une division euclidienne qui s'exprime de manière remarquablement simple.

3.2 Bases de numération

Un sous-produit de l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne de $\mathbb{Z}$ est l'existence de bases de numération.

Soit $\mathcal{R}$ un système complet quelconque de restes modulo ρ. Est-il possible d'écrire tout entier de Gauss ξ de façon unique sous la forme

$$\xi = c_k\rho^k + c_{k-1}\rho^{k-1} + \cdots + c_1\rho + c_0, \quad c_i \in \mathcal{R}_\varepsilon \ ? \tag{4}$$

DÉFINITION.– Nous dirons que ρ est une *base de numération* et que les éléments de $\mathcal{R}$ sont les *chiffres* de cette base si tout entier de Gauss s'écrit de manière unique sous la forme (4).

Remarque.– Dans les sytèmes de numération usuels que nous pratiquons, nous pouvons considérer qu'un «nombre à deux chiffres» est aussi un «nombre à trois chiffres», etc. Cette propriété n'est plus vraie si 0 n'appartient pas à $\mathcal{R}$.

Lorsque a et b sont premiers entre eux, Gauss a démontré que l'intervalle $[0, N[$ est un système complet de restes de l'anneau $\mathbb{Z}[i]/\rho\mathbb{Z}[i]$. Mais ceci ne suffit pas encore à assurer que le couple $(\rho, [0, N[\,)$ est un système de numération comme le prouve le résultat suivant.

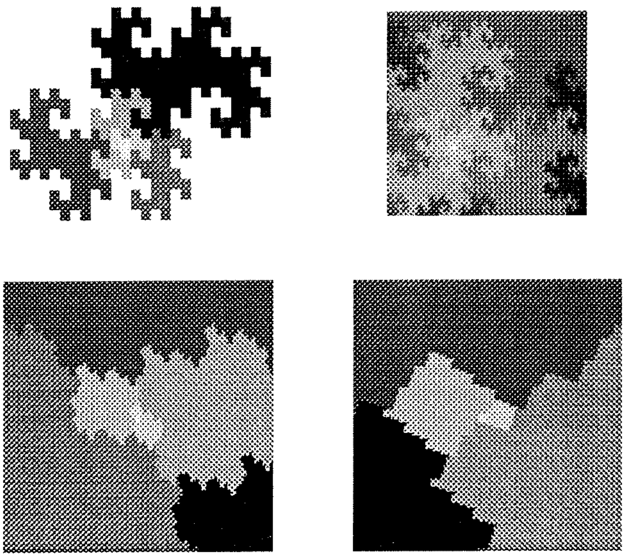
THÉORÈME (Kataï et Szabo, 1975).– *Soit $\rho = a + ib \neq 0$ un entier de Gauss donné où $(a, b) = 1$ et posons $N = a^2 + b^2$. Le couple $(\rho, [0, N[\,)$ est un système de numération de $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si on a :*

$$a < 0 \quad \text{et} \quad b = \pm 1.$$

Plus généralement, demandons-nous quels sont les couples $(\rho, \mathcal{R}_\varepsilon)$ qui forment un système de numération. A l'heure actuelle, on ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante. Nous pouvons cependant dégrossir le problème en introduisant la transformation $\Phi : (x, y) \mapsto (x', y')$ de $\mathbb{Z}^2$ dans lui-même définie par :

$$x' = \left\lceil \frac{ax + by + e}{N} \right\rceil, \quad y' = \left\lceil \frac{-bx + ay + f}{N} \right\rceil. \tag{5}$$

D'après la définition du quotient de la division euclidienne, il est clair que l'on a $\mathcal{R}_\varepsilon = \Phi^{-1}(0)$ et que l'ensemble des nombres de la forme $c_1\rho + c_0$ avec c_1 et c_0 dans $\mathcal{R}_\varepsilon$ sont exactement les éléments de l'ensemble $\Phi^{-1}(\mathcal{R}_\varepsilon)$. Plus généralement, il est facile de montrer par récurrence que l'ensemble des entiers qui ont au plus k chiffres coïncide avec l'ensemble $\Phi^{-k}(0)$ (Fig. 1).



$a = -1$, $b = 1$ (courbe du dragon)

$a = -2$, $b = 1$ $a = -3$, $b = -1$

Figure 1. Bases complexes de Kataï et Szabo. Les régions $\Phi^{-k}(0)$ sont représentées par des gris de plus en plus foncés lorsque k augmente.

Il résulte de ces considérations que si $(\rho, \mathcal{R}_\varepsilon)$ est un système de numération de $\mathbb{Z}[i]$ alors les images réciproques $\Phi^{-k}(0)$ doivent recouvrir $\mathbb{Z}[i]$ tout entier, autrement dit, on doit avoir :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Phi^{-k}(0) = \mathbb{Z}[i]. \tag{6}$$

Cette condition nécessaire se prête assez bien à une vérification sur ordinateur. Nous verrons un peu plus loin un énoncé plus précis donnant une condition suffisante (cf. M.-A. Jacob. [6]).

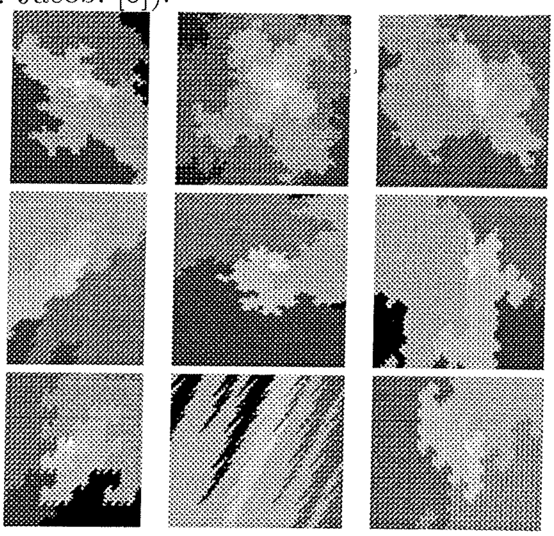


Figure 2. Neufs bases complexes de M.-A. Jacob. Les régions $\Phi^{-k}(0)$ sont représentées par des gris de plus en plus foncés lorsque k augmente.

3.3. Les propriétés élémentaires des aqas

DÉFINITION.– Nous appelerons *aqa* (application quasi-affine) une application de $\mathbb{Z}^2$ dans lui-même définie par la formule (5).

Posons

$$A = \begin{pmatrix} a/\omega & b/\omega \\ c/\omega & d/\omega \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Si X est un vecteur quelconque, nous désignerons par $[AX]$ l'image de ce vecteur par la transformation (5) (avec $e = f = 0$). Nous dirons que les transformations $X \mapsto AX$ et $X \mapsto [AX]$ sont *associées.*

Il est intéressant de mettre en parallèle les propriétés des aqas et celles des transformations affines associées. Pour cela, posons

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|},$$

où $\|AX\|$ et $\|X\|$ sont les normes euclidiennes usuelles.

Considérons l'itération d'une aqa en nous restreignant au cas où la matrice A est *contractante*, ce qui veut dire $\|A\| < 1$.

- Si nous considérons A comme une transformation de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, tout point est attiré par l'origine : la dynamique *réelle* est triviale.
- Pour l'aqa associée $[A]$, la dynamique est extrêmement compliquée. Des cycles apparaissent en général. En outre, on constate que chaque cycle $\mathcal{C}$ possède un *bassin d'attraction* $\mathcal{B}(\mathcal{C})$, c'est-à-dire le sous-ensemble des points de $\mathbb{Z}^2$ qui sont *attirés* par $\mathcal{C}$ (i.e. qui finissent par aboutir dans $\mathcal{C}$).

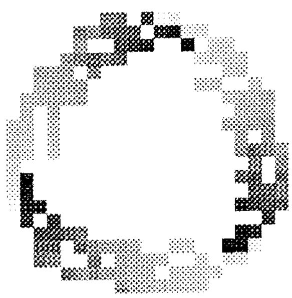


Figure 3. Exemple de bassin d'un 3-cycle ($a = -8$, $b = -15$, $c = 15$, $d = -8$, $e = f = 0$ et $\omega = 17$). Le 3-cycle est formé des points noirs de coordonnées $(3, 8)$, $(-9, -2)$ et $(6, -7)$. Les autres points sont les points du bassin associé; leur couleur décroît avec leur «éloignement» itératif.

Néanmoins, nous pouvons énoncer quelques résultats. Montrons par exemple qu'une aqa associée à une matrice contractante est effectivement contractante au voisinage de l'infini. La norme euclidienne du vecteur $R = AX - [AX]$ vérifie $\|R\| < \sqrt{2}$, d'où l'inégalité :

$$\frac{\|[AX]\|}{\|X\|} < \|A\| + \frac{\sqrt{2}}{\|X\|}.$$

Ceci montre que si X_0 est de module assez grand, la suite des normes des vecteurs $X_{i+1} = [AX_i]$ commence par être strictement décroissante.

Ensuite, la sitation se dégrade. Lorsque X_n ne vérifie plus la condition $\|[AX_n]\| < \|X_n\|$, l'itéré X_n s'éloigne de l'origine. Si les itérés suivants s'éloignent trop, ils sont de nouveau attirés par l'origine, d'où un jeu de va-et-vient.

L'aqa $[A]$ n'est pas contractante dans un voisinage compact de l'origine. Comme ce voisinage ne contient qu'un nombre fini de points à coordonnées entières, des cycles apparaissent.

Lorsque l'aqa $[A]$ possède au moins deux cycles, il est très difficile de prévoir si un point éloigné est attiré par l'un ou l'autre de ces cycles. Ceci explique la structure compliquée des frontières des bassins.

3.4 Majoration de la taille des cycles d'une aqa

Les considérations précédentes montrent qu'une aqa associée à un opérateur contractant ne possède qu'un nombre fini de cycles et donc un nombre fini de bassins, chacun étant constitué d'arbres attachés à son cycle limite. Nous allons préciser cela en majorant la taille des cycles d'une aqa associée à un opérateur A de norme euclidienne inférieure à 1.

Posons $R_0 = AX - [AX]$. Comme AX et $[AX]$ appartiennent à un même carré, nous avons l'inégalité $\|R_0\| < \sqrt{2}$. En prenant l'image de R_0 par A, nous obtenons $AR_0 = A^2X - A[AX]$, soit encore

$$A[AX] = A^2X - AR_0.$$

Posons ensuite $R_1 = A[AX] - [A[AX]]$. Nous avons encore $\|R_1\| < \sqrt{2}$. En procédant comme ci-dessus, nous obtenons :

$$[A[AX]] = A^2X - AR_0 - R_1.$$

Plus généralement, en convenant de désigner par $[AX]^k$ le k-ième itéré de X par l'aqa $[A]$, nous voyons qu'il existe k vecteurs $R_0, \ldots, R_{k-1}$ de norme $\|R_i\| < \sqrt{2}$ pour lesquels nous avons la relation

$$[AX]^k = A^kX - (A^{k-1}R_0 + A^{k-2}R_1 + \cdots + R_{k-1}).$$

L'inégalité triangulaire montre alors que l'on a:

$$\|[AX]^k\| \leq \|A\|^k\|X\| + \sqrt{2}\,(\|A\|^{k-1} + \|A\|^{k-2} + \cdots + 1).$$

Si X appartient à un k-cycle, nous avons $[AX]^k = X$, d'où la majoration :

$$(1 - \|A\|^k)\|X\| \leq \sqrt{2}\,(\|A\|^{k-1} + \|A\|^{k-2} + \cdots + 1).$$

En résumé, si X appartient à un cycle, nous avons :

$$\|X\| \leq \frac{\sqrt{2}}{1 - \|A\|}.$$

Cette majoration montre qu'une aqa contractante (i.e. $\|A\| < 1$) ne peut avoir qu'un nombre fini de cycles.

Remarque. — Si nous remplaçons la norme euclidienne par la norme du sup, nous obtenons la majoration analogue :

$$\|X\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \|A\|_\infty}.$$

3.5 Aqas connexes

Revenons aux bases de numération de $\mathbb{Z}[i]$. La formule (6) montre que l'origine est un point fixe de l'aqa associée, point fixe qui attire tous les points (l'origine est donc un «trou noir»).

Plus généralement, si $e = f = 0$, l'origine est un point fixe. Si l'aqa ne possède qu'un seul bassin, le cycle associé à ce bassin est réduit à l'origine.

DÉFINITION.– Une aqa qui ne possède qu'un seul bassin est appelée une *aqa connexe.*

Exemples.– Les aqas associées aux systèmes de numération de $\mathbb{Z}[i]$ sont connexes. Le théorème de Kataï-Szabo nous fournit d'autres exemples d'aqas connexes, de matrices

$$A = \frac{1}{n^2+1}\begin{pmatrix} -n & \pm 1 \\ \mp 1 & -n \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si l'aqa associée à une matrice de la forme

$$A = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

est connexe, celle-ci fournit un système de numération des entiers de Gauss.

Il est donc très intéressant de savoir s'il existe d'autres aqas connexes que celles qui sont associées aux matrices de Kataï-Szabo. M.-A. Jacob [6] a réussi à caractériser ces aqas.

THÉORÈME (M.-A. Jacob, 1993).– *Une aqa de matrice A qui vérifie $\|A\|_\infty < 1$ est connexe si et seulement l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée :*

$$a > 0,\ c > 0,\ a + b \leq 0,\ d < 0\ ; \quad a \leq 0,\ c \leq 0,\ d \leq 0\ ;$$
$$a \leq 0,\ b > 0,\ c + d \leq 0,\ d > 0\ ; \quad a \leq 0,\ b \leq 0,\ d \leq 0.$$

Ce théorème fournit — au passage — un très grand nombre de nouvelles bases complexes de l'anneau des entiers de Gauss.

3.6 Aqas et rotations

En traitement d'image, on est confronté au problème suivant : comment faire tourner une image composée de pixels? Mathématiquement parlant, existe-t-il des bijections de $\mathbb{Z}^2$ qui sont des rotations «au pixel près»? La solution naïve

$$x' = [x \cos\theta - y \sin\theta], \quad y' = [x \sin\theta + y \cos\theta],$$

qui consiste à «tronquer» une rotation réelle n'est pas satisfaisante car elle s'accompagne de pertes d'informations gênantes. En effet, cette application n'est pas injective (certains pixels se confondent) et elle n'est pas surjective (présence de «dislocations» visibles à l'œil nu).

Plusieurs solutions purement discrètes existent (cf. [10]). Examinons une solution fournie par les aqas. Il paraît naturel d'imposer les conditions suivantes :

• Une solution parfaite est bijective. Comme cette condition est très exigeante et comme une image est nécessairement bornée — pour ne pas faire le «héron» — nous nous contenterons d'aqas bijectives dans un voisinage (le plus grand possible) de l'origine.

• L'aqa idéale doit posséder un nombre infini de cycles et les bassins associés sont réduits à leurs cycles. Mais cette condition est elle aussi trop exigeante. En effet, une application qui ne possède que des cycles est manifestement bijective. Nous nous contenterons donc d'approximations : aqas dont les bassins sont aussi proches que possibles de leur cycle au voisinage de l'origine.

Essayons de réaliser ce programme en considérant la matrice (7) avec $c = -b$ et $d = a$. Cette matrice représente une similitude d'angle arctan b/a et de norme euclidienne

$$\|A\| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\omega}.$$

Nous en déduisons que les cycles de l'aqa $[A]$ sont contenus dans le disque de rayon

$$R = \frac{2\sqrt{2}\omega}{\omega^2 - a^2 - b^2}. \tag{8}$$

Appelons *triplet pythagoricien* un triplet (a, b, ω) qui vérifie la condition

$$a^2 + b^2 = \omega^2.$$

• Si le triplet (a, b, ω) n'est pas pythagoricien, l'égalité (8) n'autorise pas l'aqa $[A]$ à posséder un nombre infini de cycles. Nous sommes donc loin d'une rotation.

• Si le triplet (a, b, ω) est pythagoricien, on peut vérifier que l'aqa $[A]$ possède une infinité de cycles dont les bassins associés sont petits tant que l'on ne s'éloigne pas trop de l'origine. Nous dirons que cette aqa est *pythagoricienne*.

Soit α un angle donné. Est-il possible de trouver une aqa pythagoricienne qui «approche» arbitrairement la rotation d'angle α? Autrement dit, nous nous intéressons aux solutions $a, b \in \mathbb{Z}$ approchées de l'équation

$$\frac{b}{a} = \tan \alpha.$$

Ces solutions ne fournissent pas — en général — une aqa pythagoricienne car la somme $a^2 + b^2$ n'est que très rarement un carré. Pour obtenir de bonnes aqas, souvenons-nous du paramétrage classique des triplets pythagoriciens, ce qui nous conduit à calculer la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

ce qui fournit l'aqa pythagoricienne associée à la matrice

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons une réponse en associant l'aqa précédente à des solutions approchées de l'équation

$$\frac{b}{a} = \tan \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Les réduites du développement en fraction continue de $\tan \frac{1}{2}\alpha$ fournissent naturellement de telles solutions. Pour un α fixé, on constate expérimentalement que les aqas obtenues en prenant des réduites d'ordre croissant sont des permutations locales de $\mathbb{Z}^2$ dans des disques dont les rayons tendent vers l'infini. Bien que l'étude détaillée de cette convergence reste à faire, la considération des dynamiques induites sur $\mathbb{Z}^2$ est fascinante. Nous ne pouvons qu'encourager les lecteurs à découvrir ces phénomènes au travers des petits programmes qu'ils écriront facilement.

4. La dimension des fractals

La dimension topologique — qui vaut 1 pour les courbes régulières — ne paraît pas bien adaptée dès que celles-ci deviennent chaotiques, lorsqu'elles remplissent l'espace et semblent donner l'impression d'avoir un «volume». Pour remédier à cette carence, d'autres dimensions *à valeurs non-entières* ont été introduites et étudiées depuis fort longtemps. L'une des plus efficaces est la dimension de Hausdorff; mais sa technicité rend souvent impossible son évaluation et a conduit progressivement à son remplacement par d'autres dimensions plus faciles à calculer.

La littérature abonde en excellentes présentations (cf. [1], [2], [5]). Rappelons brièvement la *dimension de similitude* qui est très bien adaptée aux ensembles fractals de la classe I.F.S.

Considérons l'ensemble $\mathcal{X}$ des compacts du plan (traduction : l'ensemble des images noires et blanches). Donnons-nous n applications continues $u_1, \ldots, u_n$ du plan dans lui-même et associons-leur la fonction $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ définie par

$$\Phi(K) = u_1(K) \cup u_2(K) \cup \cdots \cup u_n(K).$$

Un exercice classique — qu'on infligeait autrefois aux étudiants de topologie — consiste à montrer que l'on peut munir l'ensemble $\mathcal{X}$ d'une métrique (la *métrique de Hausdorff*) qui en fait un espace complet.

Si les applications $u_1, \ldots, u_n$ sont contractantes, on sait montrer que l'application Φ est elle-même contractante pour la métrique de Hausdorff. Cette remarque anodine prend tout son sens si l'on se rappelle qu'une application contractante possède un point fixe et un seul (que l'on obtient d'ailleurs par itération).

Traduisons : si K est l'unique compact du plan qui est le point fixe de Φ, nous pouvons *coder* ce compact à l'aide des applications $u_1, \ldots, u_n$. Un magnifique exemple a été popularisé par Barnsley avec sa célèbre fougère (codée à l'aide de quatre applications affines, soit 24 nombres réels!).

Cette théorie porte le nom de *iterated functions system*, d'où l'appellation I.F.S.

Supposons maintenant que les applications $u_1, \ldots, u_n$ sont des similitudes contractantes de rapports $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. On attribue au compact codé par ces similitudes la *dimension de similitude* s qui est l'unique solution de l'équation

$$r_1^s + r_2^s + \cdots + r_n^s = 1.$$

Voici quelques exemples de dimension de similitude :

- Triangle de Sierpinski: $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \sim 1,585$.
- Courbe de von Koch: $\dfrac{\ln 4}{\ln 3} \sim 1,2618$.
- Courbe du dragon $\dfrac{2 \ln \lambda}{\ln 2} \sim 1,5235$ où λ est l'unique zéro réel du polynôme $\lambda^3 - \lambda^2 - 2 = 0$.

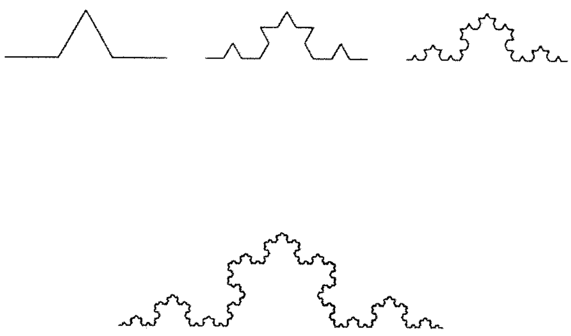


Figure 4. Les premières étapes de la construction de la courbe de von Koch.1

Soit φ une aqa connexe. On constate que les frontières des ensembles $\varphi^{-k}(0)$ «tendent» vers un fractal du plan. La courbe du dragon s'obtient par exemple à partir de l'aqa de matrice

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'étude des frontières des ensembles $\varphi^{-k}(0)$ et un théorème de passage à la limite permettent un calcul efficace de la dimension de similitude de l'ensemble limite.

5. Bibliographie

[1] EDGAR (G.A.).– *Measure, topology, and fractal geometry.* Undergraduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1990.

[2] FALCONER (K.J.).– *The geometry of fractal sets*, Cambridge tracts in mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[3] GILBERT (W.J.).– Geometry of radix representation, *The Geometric Vein : Essays presented to H.S.M. Coxeter*, Springer, New York.

[4] GILBERT (W.J.).– *Fractal geometry derived from complex bases*, Math. Intell. tome **4**, p. 78-86, 1982.

[5] HUTCHINSON (J.).– *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Journ. of Math. tome **30**, p. 713-747, 1981.

[6] JACOB (M.-A.).– *Applications quasi-affines*, Thèse U.L.P. (Strasbourg), 1993.

[7] KATAI (I.) and ZSABO (J.).– *Canonical number systems for complex integers*, Acta Sci. Math. (Szeged), **37**, p. 255-260,1975.

[8] KNUTH (D.E.).– *The art of computer programming, vol. 2 : Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[9] MULLER (J.M.).– On-line computing: A survey and some new results. in *Algorithms and Parallel VLSI Architectures II*, P. Quinton and Y. Robert éd., Elsevier Science Publishers, 1992.

[10] REVEILLÈS (J.P.).– *Géométrie discrète, algorithmique et calcul en nombres entiers*, Thèse U.L.P. Strasbourg, 1991.

LA MÉTHODE D'ARBOGAST POUR DÉVELOPPER LA k–ième PUISSANCE D'UNE SÉRIE FORMELLE

Dominique DUMONT
E.E.S. Sciences, B.P. 906, Antananarivo-101, Madagascar

1. — Introduction

Dans ses précédents articles de l'Ouvert, et dans la thèse qu'il vient de soutenir [F], Jean-Pierre Friedelmeyer a remis à l'honneur les travaux du mathématicien alsacien Arbogast, et en particulier son *Calcul des dérivations* [Ar], qui était encore connu et cité par les membres de l'Ecole britannique de calcul symbolique au XIXe siècle (Cayley [Ca] etc.), mais qui depuis était, semble-t-il, tombé dans l'oubli. Dans cet article, nous voudrions rappeler comment Arbogast calcule directement les termes successifs du développement de $(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_ix^i + \cdots)^k$ sans supposer qu'il a préalablement calculé ceux du développement de la même série portée à la puissance $k-1$ (ce que tout un chacun aurait tendance à faire) et sans supposer non plus la moindre connaissance des coefficients dits *multinomiaux*.
La méthode d'Arbogast présente plusieurs avantages : d'abord on ignore les coefficients numériques, on calcule seulement sur les a_i en les traitant comme des variables formelles, et en utilisant des règles de différentiation et de substitution, ce qui d'ailleurs se pratique de plus en plus de nos jours en Combinatoire (cf. [Ch] et le paragraphe 4 du présent article). En outre il n'est pas exclu que la méthode d'Arbogast présente un intérêt du point de vue de la complexité algorithmique, qu'elle puisse constituer un outil supplémentaire pour les algorithmes de calculs formels actuellement implantés sur ordinateurs, car elle est très économe de mémoire, et très performante en temps de calcul.
Pour introduire la méthode d'Arbogast il nous suffira d'exploiter une notion combinatoire bien classique [An] [Co] [MM] quoique peu enseignée, celle de *composition* de l'entier n.

2. — Compositions de l'entier n.

Définition. *Etant donnés deux entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n$, on appelle composition de l'entier n en k parts un k–uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'entiers $x_i \geq 1$ tels que*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n.$$

Par exemple, $1 + 3 + 1 = 5$ est une composition de l'entier $n = 5$ en $k = 3$ parts. Le k–uplet étant ordonné, on considère par exemple la composition $3 + 1 + 1 = 5$ comme distincte de la précédente.
Lorsqu'on impose la condition supplémentaire de croissance des parts : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$ la composition porte le nom de *partition*.

On dira de deux compositions qu'elles sont équivalentes si elles se déduisent l'une de l'autre par permutation des parts (nos deux exemples sont donc deux compositions équivalentes). Il est clair que chaque classe d'équivalence contient une partition et une seule, dans le cas présent cette partition est $1 + 1 + 3 = 5$.
A une composition $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de l'entier n on associe le monôme $a_{x_1} a_{x_2} \cdots a_{x_k}$ de degré total k. Par exemple, on associe à $1 + 3 + 1$ le monôme $a_1 a_3 a_1$. Mais ce monôme sera considéré comme commutatif, une composition équivalente conduira donc au même monôme, qui, dans notre exemple, s'écrit $a_1^2 a_3$, quand il est ordonné selon les indices croissants.

Proposition 1. *Dans le développement de $(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_i x^i + \cdots)^k$, le coefficient $A_{n,k}$ de x^n est égal à la somme des monômes associés aux compositions de l'entier n en k parts.*

Exemple.— Considérons les compositions de l'entier 5 en 3 parts. On a d'une part $1+1+3$, $1+3+1$ et $3+1+1$, et d'autre part $1+2+2$, $2+1+2$ et $2+2+1$. La somme des monômes associés est $A_{5,3} = 3a_1^2 a_3 + 3a_1 a_2^2$, et on a :

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_i x^i + \cdots)^3 = \cdots + (3a_1^2 a_3 + 3a_1 a_2^2) x^5 + \cdots.$$

Démontrons cette proposition. Pour calculer le produit de k exemplaires de la série $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_i x^i + \cdots$, il faut par distributivité additionner tous les produits possibles obtenus en multipliant k facteurs : un terme choisi dans le premier exemplaire, de rang i_1, un terme choisi dans le deuxième exemplaire, de rang i_2, etc. et un terme choisi dans le $k-$ième exemplaire, de rang i_k. En faisant le produit, on obtient $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} x^{i_1 + i_2 + \cdots + i_k}$. En rassemblant tous les termes comportant x^n, on obtient exactement tous les monômes associés aux compositions $(i_1, i_2, \ldots i_k)$ de l'entier n en k parts, d'où le résultat.
Voici les premières valeurs des polynômes $A_{n,k}$:

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6
1	a_1					
2	a_2	a_1^2				
3	a_3	$2a_1 a_2$	a_1^3			
4	a_4	$2a_1 a_3 + a_2^2$	$3a_1^2 a_2$	a_1^4		
5	a_5	$2a_1 a_4 + 2a_2 a_3$	$3a_1^2 a_3 + 3a_1 a_2^2$	$4a_1^3 a_2$	a_1^5	
6	a_6	$2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2$	$3a_1^2 a_4 + 6a_1 a_2 a_3 + a_2^3$	$4a_1^3 a_3 + 6a_1^2 a_2^2$	$5a_1^4 a_2$	a_1^6

Table des coefficients d'Arbogast $A_{n,k}$

La proposition nous permet de calculer les $A_{n,k}$ en dénombrant les compositions dans chaque classe d'équivalence, ce qui se fait assez facilement tant que n et k sont assez petits. Mais si nous voulons poursuivre le calcul, il va se compliquer. Par exemple supposons qu'on veuille pousser assez loin le calcul de $(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_i x^i + \cdots)^5$. Le coefficient de x^{12} est déjà une somme de 13 monômes, car il existe 13 partitions de l'entier 12 en 5 parts (parmi ces 13 monômes figure par exemple $60a_1a_2^2a_3a_4$, car le nombre de compositions équivalentes à $1+2+2+3+4$ est égal à 60, et aussi $20a_1a_2a_3^3$, car le nombre de compositions équivalentes à $1+2+3+3+3$ est égal à $\frac{5!}{3!}=20$).

La question qui se pose est la suivante : si l'on veut obtenir la suite des coefficients de la 5−ième colonne, doit-on recommencer tout le calcul à chaque étape, ou existe-t-il une récurrence permettant de calculer un coefficient à partir du précédent et de bénéficier ainsi des calculs déjà faits? Dans le cas présent, il y a 10 monômes dans le coefficient de x^{11}, peut-on les utiliser pour calculer nos 13 monômes à la 12−ième ligne? C'est à ce problème que répond la règle d'Arbogast énoncée plus loin.

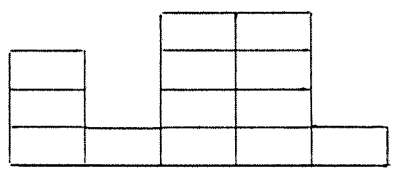
3. — Représentations graphiques des compositions.

Nous en retiendrons deux (le lecteur en trouvera une troisième, fort intéressante pour d'autres usages, dans [An][MM]) :
- la représentation "linéaire", qui consiste à dessiner n points sur une ligne, puis à délimiter les parts à l'aide de barres de séparation. Comme il y a k parts, on met $k-1$ barres de séparation. Par exemple,

$3+1+4+4+1$ donne o o o | o | o o o o | o o o o | o

- la représentation en "histogramme" :

$3+1+4+4+1$ donne



Proposition 2. *Le nombre des compositions de l'entier n en k parts est égal au coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$ (ou C_{n-1}^{k-1} dans l'ancienne notation).*

En effet, dans la représentation linéaire il existe $n-1$ interstices entre les n points, et la composition est définie par le choix de $k-1$ d'entre eux où l'on met une barre de séparation, d'où le résultat.
Cette proposition nous conduit à considérer le tableau d'Arbogast comme une extension polynomiale du triangle de Pascal, puisqu'on obtient le triangle de Pascal quand on remplace tous les a_i par 1.

4. — Prolongements des compositions.

Le problème posé à la fin du paragraphe 2 peut se reformuler de la manière suivante : comment peut-on, connaissant les compositions de l'entier $n-1$ en k parts, en déduire les compositions de l'entier n en k parts? On conçoit qu'il suffit d'ajouter 1 à l'une des parts. Mais nous devons définir une application (à *quelle* part ajoute-t-on 1?) qui soit injective (plusieurs compositions de $n-1$ peuvent aboutir à la même composition de n). Nous devons donc être plus précis. Etant donnée une composition $\gamma=(x_1,x_2,\dots x_k)$, posons $m=max\{x_1,x_2,\dots x_k\}$. Une part x_l est dite *maximale* si $x_l=m$, et *sous-maximale* si $x_l=m-1$.
Exemples : parmi les compositions de l'entier 12 en 5 parts,

$3+1+3+3+2$ contient trois parts maximales et une sous-maximale.
$1+4+3+1+3$ contient une part maximale et deux sous-maximales.
$2+2+2+4+2$ contient une part maximale et aucune sous-maximale.

A présent, nous définissons deux types de prolongements d'une composition γ de l'entier $n-1$ en k parts contenant q parts maximales de taille m et p parts sous-maximales en une composition γ' de l'entier n en k parts (penser à l'histogramme) :
- *prolongement maximal* : on choisit une part maximale x_l de γ et on l'augmente de 1, on obtient ainsi une composition γ' possédant une seule part maximale de taille $(m+1)$ et $q-1$ parts sous-maximales de taille m.
- *prolongement sous-maximal* : on choisit une part sous-maximale de γ et on l'augmente de 1, on obtient ainsi une composition γ' possédant $(q+1)$ parts maximales de taille m et $p-1$ parts sous-maximales.
Le prolongement maximal établit une bijection entre les couples (γ, x_l) formés d'une composition γ de l'entier $n-1$ en k parts et d'une part maximale x_l, et les compositions γ' de l'entier n en k parts ne possédant qu'une seule part maximale. Le monôme associé à γ s'écrit $\cdots a_m^q$, c'est-à-dire se termine par la lettre maximale a_m à la puissance q, donc il existe q prolongements maximaux de γ aboutisant à q compositions γ' ayant chacune un monôme associé se terminant par $a_m^{q-1}a_{m+1}$.
En revanche, le prolongement sous-maximal établit une bijection entre deux ensembles de couples : les couples (γ, x_l) formés d'une composition γ de l'entier $n-1$ en k parts et d'une part sous-maximale x_l de γ, et les couples (γ', x'_l) formés d'une composition γ' de l'entier n en k parts dont au moins deux sont maximales, et d'une part maximale x'_l de γ'. Le monôme associé à γ se termine par $\cdots a_{m-1}^p a_m^q$, il existe p prolongements sous-maximaux de γ aboutisant à p compositions γ' ayant chacune un monôme se terminant par $a_{m-1}^{p-1}a_m^{q+1}$. Mais une composition γ' contribue à $(q+1)$ couples (γ', x'_l), c'est-à-dire qu'elle est atteinte $(q+1)$ fois par des prolongements sous-maximaux issus de compositions de l'entier $n-1$ en k parts. Nous devons donc diviser par $q+1$ pour trouver le nombre exact de compositions γ' dont le monôme se termine par $a_{m-1}^{p-1}a_m^{q+1}$.
En résumé nous aboutissons au résultat suivant :

Proposition 3 (Règle d'Arbogast). *Soit D_a l'opérateur défini sur chaque monôme de la manière suivante :*

$$D_a(a_1^i a_2^j \cdots a_{m-1}^p a_m^q a_{m+1}^0) = q a_1^i a_2^j \cdots a_{m-1}^p a_m^{q-1} a_{m+1}^1 + p a_1^i a_2^j \cdots a_{m-1}^{p-1} \frac{a_m^{q+1}}{q+1} a_{m+1}^0,$$

autrement dit on additionne le monôme qu'on obtient en dérivant par rapport à la lettre a_m et en intégrant par rapport à la lettre a_{m+1}, et le monôme qu'on obtient en dérivant par rapport à la lettre a_{m-1} et en intégrant par rapport à la lettre a_m. On prolonge D_a aux polynômes par linéarité. Dans ces conditions, on a

$$A_{n,k} = D_a(A_{n-1,k}).$$

Remarques. — 1) Bien entendu, on peut si l'on préfère supprimer dans cette écriture le terme a_{m+1}^0 et énoncer qu'on multiplie par a_{m+1}, et non qu'on intègre par rapport à la lettre a_{m+1}, mais alors l'énoncé perd en symétrie.

2) L'opérateur D_a n'est pas à proprement parler un opérateur de dérivation, car il ne satisfait pas la formule de Leibniz. On a par exemple $D_a(a_1a_2) \neq D_a(a_1)a_2 + a_1D_a(a_2)$.
3) Le résultat qu'énonce cette proposition (semble-t-il tombé dans l'oubli?) était bien connu de Cayley [Ca] qui l'appelait *Arbogast's rule of the last and the last but one.*

Exemple d'application.— Revenons au problème formulé à la fin du paragraphe 2. Supposons qu'on connaisse le coefficient de x^{11}, qui contient en particulier le monôme $30a_1a_2^2a_3^2$. On obtient directement

$$D_a(30a_1a_2^2a_3^2) = 60a_1a_2^2a_3a_4 + 20a_1a_2a_3^3$$

(car $30.2/3 = 20$). La règle d'Arbogast permet donc de calculer successivement les termes d'une colonne du tableau par une récurrence qui n'utilise que le terme précédent. En outre on a le résultat suivant :

Proposition 4 (Arbogast). *En prenant la dérivée partielle par rapport à a_1 de $A_{n,k}$ on obtient*

$$\frac{\partial}{\partial a_1} A_{n,k} = kA_{n-1,k-1}.$$

Démonstration.— Nous dirons qu'une part x_l est minimale si $x_l = 1$. Considérons la bijection $(\gamma, l) \mapsto (\delta, l)$ qui, à tout couple formé d'une composition γ de l'entier n en k parts possédant au moins une part minimale et de l'indice l d'une part minimale x_l de γ, fait correspondre le couple formé de la composition δ de l'entier $n-1$ en $k-1$ parts obtenue en supprimant x_l, et du même entier l. C'est bien une bijection, car l'entier l représente pour δ le numéro de la place où l'on insère une part minimale pour retrouver γ. Le monôme associé à γ commence par $a_1^ia_2^j\cdots$ (avec $i \geq 1$) et celui de δ commence par $a_1^{i-1}a_2^j\cdots$. Chaque γ contribue i fois à un couple (γ, l), donc chaque monôme $a_1^ia_2^j\cdots$ donne $ia_1^{i-1}a_2^j\cdots = \frac{\partial}{\partial a_1}a_1^ia_2^j\cdots$. Mais chaque composition δ de l'entier $n-1$ en $k-1$ parts correspond à k couples (δ, l), car comme elle possède $k-1$ parts, il y a k places d'insertion de numéro l pour une nouvelle part minimale. D'où le résultat.

Exemple.— $(1+1+2, 1) \mapsto (1+2, 1)$, $(1+1+2, 2) \mapsto (1+2, 2)$, $(1+2+1, 1) \mapsto (2+1, 1)$, $(1+2+1, 3) \mapsto (1+2, 3)$, $(2+1+1, 2) \mapsto (2+1, 2)$, $(2+1+1, 3) \mapsto (2+1, 3)$. Dans cet exemple, $n = 4$, $k = 3$, $i = 2$. Chacune des trois compositions γ correspond à deux couples (γ, l) et chacune des deux compositions δ correspond à trois couples (δ, l). On a bien : $\frac{\partial}{\partial a_1}(3a_1^2a_2) = 3(2a_1a_2)$.

Ce résultat permet de calculer deux lignes successives du triangle d'Arbogast sans supposer connue les précédentes, en procédant de droite à gauche en zigzag :

Corollaire (deuxième règle d'Arbogast). *L'entier n étant donné, on déduit les $A_{n-1,k}$ et $A_{n,k}$ en faisant décroître k de $n-1$ à 1 et en utilisant :*

$$A_{n,n} = a_1^n, \quad A_{n-1,n-1} = a_1^{n-1}, \quad A_{n,k} = D_a(A_{n-1,k}), \quad A_{n-1,k-1} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial a_1}A_{n,k}.$$

Exemple.— Voici comment on calcule les 4–ième et 5–ième lignes. On part de a_1^5 à droite sur la 5-ième ligne, et de a_1^4, puis $D_a(a_1^4) = 4a_1^3a_2$, puis $\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial a_1}(4a_1^3a_2) = 3a_1^2a_2$, puis $D_a(3a_1^2a_2) = 3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2$, puis $\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial a_1}(3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2) = 2a_1a_3 + a_2^2$, puis $D_a(2a_1a_3 + a_2^2) = 2a_1a_4 + 2a_2a_3$, etc.
L'intérêt de calculer les coefficients d'une ligne provient de la question dont est parti Arbogast originellement, celle du développement d'une fonction composée, question que nous allons aborder à présent.

4. — Le développement d'une fonction composée

Soient

$$x(t) = x_1t + x_2\frac{t^2}{2!} + \cdots + x_n\frac{t^n}{n!} + \cdots \qquad y(x) = y_0 + y_1x + y_2\frac{x^2}{2!} + \cdots + y_n\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

deux séries formelles sous forme dite exponentielle (on met des $n!$ en dénominateurs). Nous substituons la première, qui est sans terme constant, à la variable de la seconde. Nous obtenons ainsi la composée des deux séries

$$y(x(t)) = y_0 + y_1x(t) + y_2\frac{x(t)^2}{2!} + \cdots + y_n\frac{x(t)^n}{n!} + \cdots$$

Nous cherchons un algorithme simple pour calculer le développement de cette série selon les puissances croissantes de t. Récemment, William Chen [Ch] a proposé la méthode suivante. Considérons $x^{(k)}(t)$, la dérivée k–ième de $x(t)$, que nous notons simplement X_k. De même, notons simplement Y_k pour désigner la fonction obtenue en substituant $x(t)$ à x dans $y^{(k)}(x)$. A présent, calculons les dérivées successives de $Y_0 = y(x(t))$ par rapport à t, en appliquant la règle bien connue pour une dérivée de fonction composée :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y(x(t)) = y'(x(t))x'(t) = Y_1X_1 \\
&\frac{d^2}{dt^2}y(x(t)) = y'(x(t))x''(t) + y''(x(t))x'(t)^2 = Y_1X_2 + Y_2X_1^2 \\
&\frac{d^3}{dt^3}y(x(t)) = Y_1X_3 + Y_2(3X_1X_2) + Y_3X_1^3
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\frac{d}{dt}X_k = X_{k+1}, \quad \frac{d}{dt}Y_k = \frac{d}{dt}y^{(k)}(x(t)) = y^{(k+1)}(x(t)).x'(t) = Y_{k+1}X_1.$$

Pour obtenir le développement cherché nous devons, d'après la formule de Taylor-Mac Laurin, porter $t = 0$ dans les dérivées successives de $y(x(t))$. Or les X_k et Y_k sont des fonctions de t telles que $X_k(0) = x_k$ et $Y_k(0) = y_k$. Considérons alors l'opérateur différentiel D défini sur l'alphabet

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\}$$

par $D(x_1) = x_2$, $D(x_2) = x_3$, $D(x_3) = x_4$, etc., $D(y_0) = y_1x_1$, $D(y_1) = y_2x_1$, $D(y_2) = y_3x_1$, $D(y_3) = y_4x_1$, etc. Nous étendons cet opérateur aux monômes à l'aide de la règle de Leibniz : $D(uv) = D(u).v + u.D(v)$, puis aux polynômes par linéarité. Voici les dérivées successives de la lettre y_0 selon cet opérateur :

$$\begin{aligned}
D^0(y_0) &= y_0 \\
D^1(y_0) &= y_1x_1 \\
D^2(y_0) &= y_1x_2 + y_2x_1^2 \\
D^3(y_0) &= y_1x_3 + y_2(3x_1x_2) + y_3x_1^3 \\
D^4(y_0) &= y_1x_4 + y_2(4x_1x_3 + 3x_2^2) + y_3(6x_1^2x_2) + y_4x_1^4
\end{aligned}$$

Nous sommes ainsi conduits au résultat suivant, qui est la forme que Chen propose pour la formule dite de Faa di Bruno [Co, p.148].

Proposition 5 (W Chen)[Ch]. *On a l'identité*

$$y(x(t)) = y_0+y_1x_1t+(y_1x_2+y_2x_1^2)\frac{t^2}{2!}+(y_1x_3+y_2(3x_1x_2)+y_3x_1^3)\frac{t^3}{3!}+\cdots+D^n(y_0)\frac{t^n}{n!}+\cdots$$

où D est l'opérateur différentiel défini ci-dessus.

Les polynômes $D^n(y_0)$ s'appellent les polynômes de Bell, mais la définition qu'en donne Chen est beaucoup plus agréable que la définition classique ([Co] p.144 et 184) car elle permet d'éviter d'avoir à écrire les coefficients numériques. Notons en passant que l'interprétation combinatoire classique des polynômes de Bell en termes de partitions d'ensembles s'obtient également de manière immédiate ([Ch]). Ce calcul littéral est assez apparenté à celui d'Arbogast. Nous allons d'ailleurs retranscrire le calcul de Chen dans le contexte des séries formelles ordinaires, qui est celui étudié par Arbogast.
Posons en effet $a_k = \frac{x_k}{k!}$ et $b_k = \frac{y_k}{k!}$. Par suite, le calcul de $y(x(t))$ devient celui de

$$y(x(t)) = b_0+b_1(a_1t+a_2t^2+\cdots)+b_2(a_1t+a_2t^2+\cdots)^2+\cdots+b_k(a_1t+a_2t^2+\cdots)^k+\cdots$$

Soit A_n le coefficient de t^n dans ce développement. D'après la proposition 5, $A_n = \frac{D^n(y_0)}{n!}$. D'après la proposition 1,

$$A_n = b_1a_n + \cdots + b_kA_{n,k} + \cdots + b_na_1^n.$$

Faisons le changement de variables pour l'opérateur D. On a

$$D(a_k) = D(\frac{x_k}{k!}) = \frac{x_{k+1}}{k!} = (k+1)a_{k+1} \quad \text{et} \quad D(b_k) = D(\frac{y_k}{k!}) = \frac{y_{k+1}}{k!}x_1 = (k+1)b_{k+1}a_1.$$

En outre,

$$D(A_n) = D(\frac{D^n(y_0)}{n!}) = \frac{D^{n+1}(y_0)}{n!} = (n+1)A_{n+1}.$$

Nous aboutissons ainsi au résultat suivant que nous appellerons formule de Chen-Faa di Bruno pour les séries ordinaires :

Proposition 6. *Soit l'alphabet $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ et soit D l'opérateur différentiel défini sur cet alphabet par $D(a_1) = 2a_2$, $D(a_2) = 3a_3$, $D(a_3) = 4a_4$, etc., $D(b_0) = b_1a_1$, $D(b_1) = 2b_2a_1$, $D(b_2) = 3b_3a_1$, $D(b_3) = 4b_4a_1$, etc. Alors, on a*

$$b_0 + b_1(a_1t + a_2t^2 + \cdots) + b_2(a_1t + a_2t^2 + \cdots)^2 + \cdots + b_k(a_1t + a_2t^2 + \cdots)^k + \cdots = \sum A_nt^n$$

où A_n est donné par la récurrence :

$$A_0 = b_0 \qquad \text{et} \qquad A_n = \frac{1}{n}D(A_{n-1}).$$

Remarques.— 1) On peut donner une preuve combinatoire directe de ce résultat en utilisant la représentation linéaire des compositions, avec points et barres de séparation (en ajoutant une barre à chaque extrémité), que voici, schématiquement sur un exemple :

$$|\circ\circ\circ|\circ|\circ\circ\circ\circ|\circ\circ\circ\circ|\circ| \qquad \text{donne} \qquad b_5a_3a_1a_4a_4a_1$$

(b_5 parce qu'il y a 5 parts, donc 6 barres) Il y a deux types d'insertion d'un nouveau point : soit *au sein* d'une part x_l de taille j (il y a $j+1$ places d'insertion dans cette part et il faudra remplacer a_j par a_{j+1} dans le monôme) soit en tant que *nouvelle* part et à la place d'une barre, ce qui signifie qu'on remplace une barre $|$ par $|\circ|$: il y a $k+1$ places d'insertion de ce type, et il faut remplacer b_k par $b_{k+1}a_1$. Notons enfin qu'une composition de l'entier n sera atteinte n fois, car elle possède n points.

2) Du point de vue du calcul, cet algorithme est plus facile à programmer que celui d'Arbogast car il comportera moins d'instructions conditionnelles, la loi de dérivation étant uniforme. Mais le fait qu'on doive différentier par rapport à toutes les variables de l'alphabet, au lieu de se contenter de le faire par rapport aux variables maximales et sous-maximales, rend le temps de calcul plus long. L'algorithme est également moins économe de mémoire, car on doit opérer ligne par ligne et non coefficient par coefficient comme on le fait par la méthode d'Arbogast.

BIBLIOGRAPHIE

[An] ANDREWS G.E., The theory of partitions, Encycl. of Math. and Its Applic., vol 2, Addison Wesley

[Ar] ARBOGAST L.F.A., Du Calcul des Dérivations, Imp. Levrault Frères, An VIII (1800)

[Ca] CAYLEY A., On an extension of Arbogast's method of Derivations, Philos. Transactions of the Royal Soc. London, vol. 151 (1861), 37 – 43

[Ca] CAYLEY A., Specimen of a litteral Table for binary quantics, otherwise a partition table, Amer. Jour. of Math. vol. IV (1881), 248 – 255

[Ch] CHEN W.Y.C., Context-free Grammars, Differential Operators and Formal Power Series, Actes Coll. Séries formelles et Combinatoire algébrique, LABRI, Bordeaux (1991)

[Co] COMTET L., Analyse Combinatoire, vol. 1, P.U.F.

[F] FRIEDELMEYER J.P., Un mathématicien alsacien pendant la Révolution, Louis Arbogast, l'Ouvert $n°53$

[F] FRIEDELMEYER J.P., Le calcul des dérivations d'Arbogast, l'Ouvert $n°54$, Mars 1989

[F] FRIEDELMEYER J.P., Le calcul des dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'Analyse à la fin du XVIIIe siècle, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, Strasbourg, Juin 1993

[MM] MAC MAHON P.A., Collected papers, vol I, chap. 5, M.I.T. Press, Cambridge 1978, 581–756.

Sommaire

DANS NOS GROUPES I.R.E.M.

Cette rubrique donne la parole aux groupes de l'I.R.E.M. de Strasbourg qui pourront y présenter le compte rendu de leurs activités, des extraits de leurs brochures, etc ..., en un mot tout ce qui peut aider à mieux faire connaître une recherche souvent très riche et variée, mais insuffisamment connue des collègues. Aujourd'hui, place au groupe d'histoire des mathématiques.

A partir de quand un élève fait-il, et a-t-il conscience de faire des mathématiques? Où se situe la frontière entre, d'une part **l'observation et le fait constaté**, et d'autre part **le raisonnement et le fait démontré**? Beaucoup de nos jeunes élèves ont des difficultés à comprendre la nécessité de démontrer des propriétés qui leur paraissent évidentes, et à franchir le pas décisif entre l'observation et la démonstration. En géométrie, ils sont soulagés lorsqu'ils disposent des outils analytiques qui leur permettent de remplacer le raisonnement géométrique par un calcul. Le caractère automatique et précis du calcul les sécurise, là où le raisonnement de géométrie pure les oblige à une initiative et à une recherche dont ils se sentent la plupart du temps incapables. L'apprentissage de la rigueur pourrait se faire en analyse, mais le caractère abstrait et formel des définitions qui l'accompagne nécessairement, a conduit à renoncer à cet apprentissage au lycée. L'enseignement de l'analyse y dépasse rarement le stade d'un bon usage de l'outil-informatique. Comme le remarque G. Kuntz (1) : "*Il suffit d'observer une classe de terminale technologique au cours d'un devoir en temps limité, pour se persuader que le travail sur machine a remplacé en grande partie le raisonnement mathématique. Ces élèves accordent à l'outil informatique une confiance totale, confortée par l'expérience : la calculatrice utilisée habilement leur permet de résoudre au moins 80 % d'un problème d'analyse proposé au baccalauréat.*" Faut-il s'étonner alors de ce que beaucoup d'élèves quittent le lycée avec un baccalauréat scientifique en poche, sans pourtant savoir organiser et rédiger un raisonnement correct, particulièrement en analyse, au grand désespoir des professeurs d'université ou de classe préparatoire?

Or historiquement, l'analyse s'est constituée et développée principalement autour du thème de la **mesure des grandeurs**. La notion d'irrationnalité, de réel, le calcul différentiel et intégral, sont nés de problèmes de mesure de longueurs, d'aires, de volumes. Ces problèmes ont leur ancrage dans une réalité physique, mais ont conduit très tôt à des découvertes qui dépassent très largement la simple intuition. Ils sont donc exemplaires pour mettre en évidence la frontière entre le **fait constaté** et le **fait démontré** : leur ancrage dans la réalité physique les rend accessibles à l'intuition de l'élève, mais l'incapacité de cette intuition à rendre compte de la situation et à résoudre le problème, l'oblige à dépasser le stade

---

(1) Repères IREM n° 11, avril 1993.

empirique pour accéder au stade théorique de la démonstration mathématique.

Le groupe d'histoire des mathématiques travaille actuellement à repérer cette problématique dans l'histoire à travers l'étude de trois thèmes qui paraîtront prochainement dans une brochure I.R.E.M. :
- incommensurabilité et irrationnalité,
- aires et quadratures sans calculs ni intégrales
- un cheminement historique vers l'élaboration du calcul différentiel et intégral.

Il vous livre ici un aperçu du premier thème : incommensurabilité et irrationnalité.

COMPARAISON N'EST PAS RAISON

Le bon sens veut que l'on peut toujours mesurer un segment. Ainsi, un vieux cours d'arithmétique (2) écrit : "*Deux segments de droite exactement superposables sont égaux. Ils ont même longueur. On peut* **mesurer** *cette longueur*". Mais que signifie **mesurer**? D'après le dictionnaire de Stella Baruk (3), mesurer c'est "*évaluer une grandeur par comparaison avec une unité*". Le problème de la mesure des grandeurs se ramène donc à un problème de comparaison. Etant donné un segment $[AB]$ et un segment $[OI]$ pris comme unité, on comptera "combien de fois" on peut reporter le segment $[OI]$ sur le segment $[AB]$, à partir de l'une de ses extrémités, par exemple A. Dans la pratique, avec une règle, on est dispensé de compter, car le segment $[OI]$ est répété une fois pour toutes un certain nombre de fois, et il suffit de lire le nombre qui mesure le segment $[AB]$ en face du point B (fig. 1)

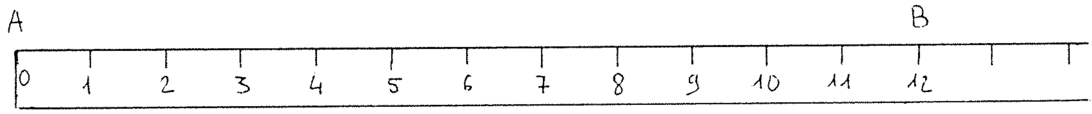


Figure 1

"Si l'on a de la chance", on trouvera un nombre juste en face de B, par exemple 12. On dira que $[AB]$ est égal à douze fois $[OI]$ ou que $[AB]$ mesure 12 cm si l'unité $[OI]$ mesure 1 cm. Mais en général, "on n'a pas de chance", le point B ne coïncide exactement avec aucune des graduations de la règle. Une solution consiste alors à subdiviser l'unité $[OI]$ selon une sous-unité, le millimètre, le micron, etc ... jusqu'à ce qu'enfin, le point B coïncide avec une de ces nouvelles graduations, ce qui ne peut manquer d'arriver tôt ou tard, compte tenu des limites de nos instruments de mesure, aussi perfectionnés soient-ils. Les Grecs eux, avaient imaginé une autre solution, qui permet de comparer deux segments, indépendamment d'une unité choisie **a priori** : ils l'appelaient antyphaïrèse, que l'on peut traduire par soustraction réciproque.

(2) Cours d'arithmétique de Ch. Pugibet : Cours moyen 1ère et 2ème année, 1953, Armand Colin.
(3) Stella Baruk : Dictionnaire de mathématiques élémentaires, éd. du Seuil, 1992.

La soustraction réciproque

Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments, et supposons que ce soit $[AB]$ le plus petit. De deux choses l'une :
— ou bien $[AB]$ mesure $[CD]$ (au sens défini plus haut)

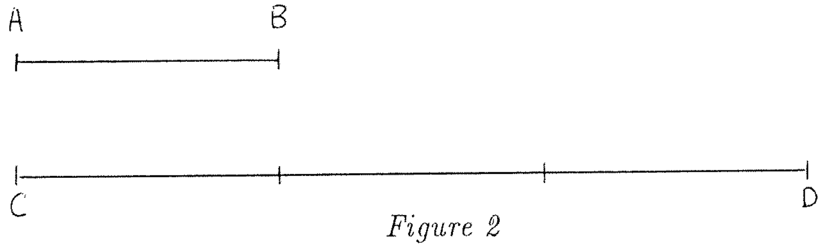


Figure 2

alors $[AB]$ est une mesure commune à $[AB]$ et $[CD]$, et c'est même la plus grande mesure commune.
On a alors une relation entre les longueurs du type : $CD = 3AB$
— ou bien $[AB]$ ne mesure pas $[CD]$:
il reste un segment $[A_1B_1]$ inférieur à $[AB]$.
Par exemple $CD = 4AB + A_1B_1$ avec $A_1B_1 < AB$

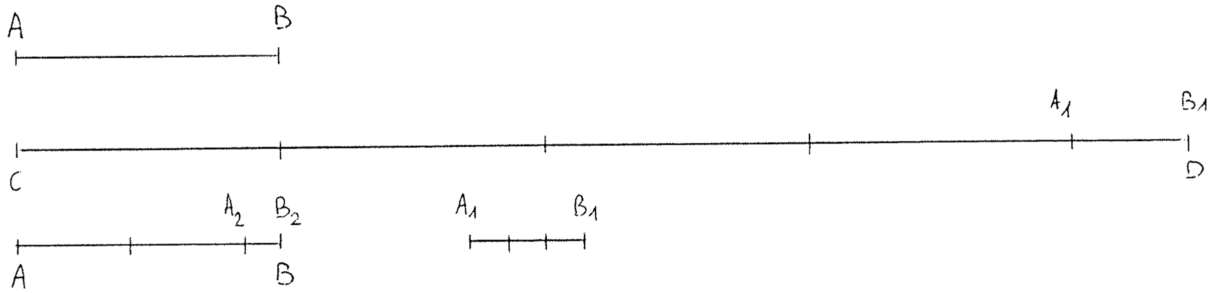


Figure 3

Mesurons de même $[AB]$ à l'aide de $[A_1B_1]$ puis $[A_1B_1]$ à l'aide de $[A_2B_2]$ etc ...jusqu'à ce que le dernier reste mesure exactement l'avant dernier reste.

Sur l'exemple de la figure 3 on a ainsi successivement

$$CD = 4AB + A_1B_1 \ ; \ AB = 2A_1B_1 + A_2B_2 \ ; \ A_1B_1 = 3A_2B_2.$$

Au total $AB = 7A_2B_2$ et $CD = 31A_2B_2$.

Ce procédé a mis en évidence une mesure commune entre $[AB]$ et $[CD]$, et même la plus grande mesure commune : A_2B_2 (4). Nous dirons comme les Grecs, que $[AB]$ et $[CD]$ ont une plus grande commune mesure, ou qu'ils sont **commensurables**, et que le segment $[AB]$ est au segment $[CD]$ comme 7 est à 31, ou encore, qu'ils ont entre eux la raison que le nombre 7 a avec le nombre 31.

Le procédé peut se généraliser à d'autres grandeurs : aires, volumes. Il est décrit exactement par Euclide dans la Proposition 3 du Livre X des **Eléments**. C'est

(4) car s'il y en avait une plus grande que A_2B_2, elle mesurerait AB et CD donc aussi A_1B_1 et donc aussi A_2B_2 ce qui est absurde.

pourquoi ce procédé est resté dans le langage mathématique sous la dénomination d'**algorithme d'Euclide**. Il s'applique aussi bien à des grandeurs qu'à des nombres ou à des polynômes. Il a donné la théorie des anneaux euclidiens.

Pour en revenir aux segments, nous pouvons essayer de l'appliquer à la comparaison de segments intervenant dans des figures géométriques usuelles ou remarquables : carrés, polygones. Nous sommes ainsi amenés à poser le problème suivant :

Problème 1 :
Trouver la plus grande mesure commune entre la diagonale $[AC]$ d'un carré $ABCD$ et le côté $[AB]$, à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Soit le carré $ABCD$ de côté a et de diagonale d. Par les constructions suivantes, cherchons à mettre en évidence une mesure commune à la diagonale et au côté.

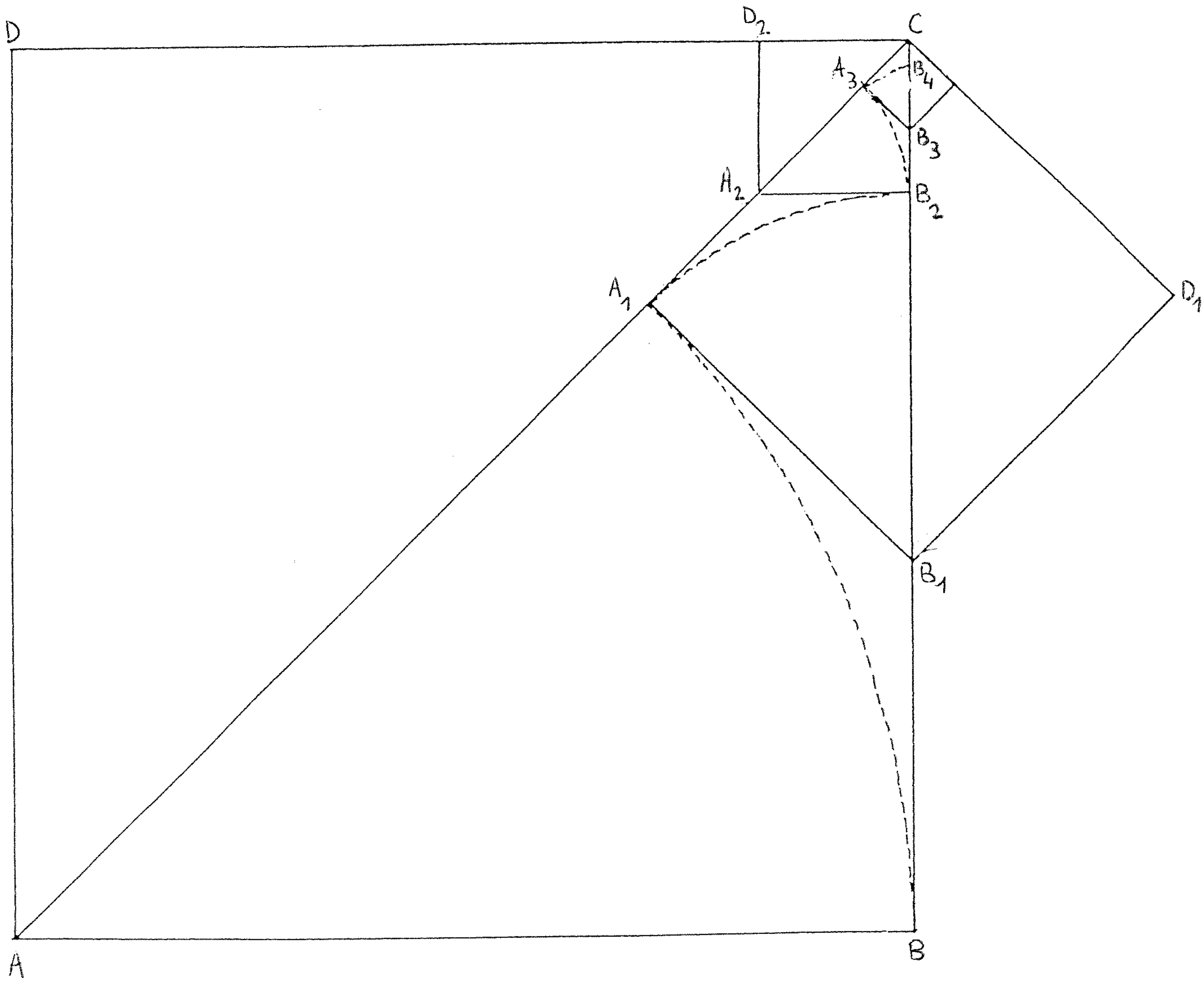


Figure 4

Dans le carré $ABCD$ **:**
— Sur la diagonale $[AC]$, plaçons A_1 de façon que $AA_1 = AB$.
La perpendiculaire à $[AC]$ en A_1 coupe $[BC]$ en B_1. (B_1A_1) et (B_1B) sont donc tangentes au cercle de centre A et de rayon AB $(= a)$, et $BB_1 = B_1A_1$.

— Le triangle A_1B_1C est rectangle et isocèle en A_1 (l'angle $\hat{A}_1$ est droit et l'angle $\hat{C}$ mesure 45°), donc $A_1C = A_1B_1$.
Notons a_1 le côté du carré $B_1A_1CD_1$ de diagonale B_1C.

$$a_1 = BB_1 = A_1B_1 = A_1C \text{ et } a_1 < a.$$

— **Réitérons la construction dans le carré** $A_1B_1D_1C$ **de côté** A_1B_1 **et de diagonale** B_1C**.** $B_1A_1 = B_1B_2$ et l'angle $\widehat{A_2B_2B}$ est droit.
Soient $a_2 = A_2A_1 = A_2B_2$ et $a_2 < a_1$.
$\widehat{A_2B_2C}$ est droit, le triangle A_2B_2C est rectangle isocèle et $A_2B_2C_2D_2$ est un carré (de côté $A_2B_2 = a_2$ et de diagonale A_2C).

— **Réitérons la construction dans le carré** $A_2B_2CD_2$ etc ...
Soit $a_0 = a$ et posons $a_1 = A_1B_1$ et

$$\begin{aligned} a_n &= A_nA_{n-1} \\ &= A_nB_n \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} AC = AA_1 + A_1C & \text{soit } (1)\ d = a_0 + a_1 & \text{et } a_1 < a_0 \\ BC = 2BB_1 + B_2C & \text{soit } (2)\ a_0 = 2a_1 + a_2 & \text{et } a_2 < a_1 \\ A_1C = 2A_1A_2 + A_3C & \text{soit } (3)\ a_1 = 2a_2 + a_3 & \text{et } a_3 < a_2 \\ B_2C = 2B_2B_3 + B_4C & \text{soit } (4)\ a_2 = 2a_3 + a_4 & \text{et } a_4 < a_3 \\ & \qquad\vdots & \qquad\vdots \\ & (n+2)\ a_n = 2a_{n+1} + a_{n+2} & \text{et } a_{n+2} < a_{n+1} \end{array}$$

A ce niveau là on "sent bien" que contrairement à l'exemple de la figure 3, il n'y aura jamais de mesure commune qui permette d'arrêter le processus de l'algorithme d'Euclide, en tombant sur un dernier reste a_{n+2} qui mesurait exactement a_{n+1}. En effet à chaque étape nous nous retrouvons dans la situation initiale de comparer la diagonale d'un carré avec son côté (certes de plus en plus petit). C'est là qu'il y a un pas essentiel à franchir et la nécessité de proposer une démonstration qui arrive à gérer en **termes finis** le caractère infinitésimal de la situation. Les Grecs ne nous ont pas laissé une telle démonstration (5) utilisant la soustraction réciproque à propos du carré, mais nous trouvons dans les **Eléments** d'Euclide toutes les propositions nécessaires pour la réaliser.

Supposons qu'il existe une mesure u commune à a et d.

(5) La démonstration "par le pair et l'impair" mettant en évidence l'impossibilité de trouver des entiers p et q tels que $p^2 = 2q^2$ se trouve chez Euclide à la fin du livre X. Elle a d'autres caractéristiques que nous analysons plus loin.

a)

$$\begin{aligned} a_1 &= d - a_0 = d - a \\ a_2 &= a_0 - 2a_1 \\ a_3 &= a_1 - 2a_2 \\ &\vdots \\ a_{n+2} &= a_n - 2a_{n+1} \end{aligned}$$

Si u mesure a et d, il mesure leur différence,
u mesure donc également $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$.

b) $d - a_0 = a_1$: **de** d**, on enlève une quantité** a_0 **plus grande que sa moitié** car $d^2 = 2a_0^2$ donc $a_0 < d < 2a_0$
donc $\frac{d}{2} < a_0$
(voir fig. 5).

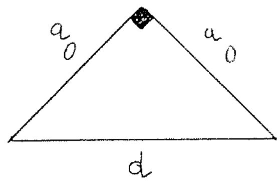


Figure 5

$(d - a_0) - 2a_2 = a_1 - 2a_2 = a_3 =$ du **reste** a_1**, on enlève une quantité** $2a_2$ **plus grande que sa moitié** car
$a_1 = 2a_2 + a_3 < 3a_2 < 4a_2$ car $a_3 < a_2$
donc $\frac{a_1}{2} < 2a_2$

$d - a_0 - 2a_2 - 2a_4 = a_3 - 2a_4 = a_5$ **du reste** a_3**, on enlève une quantité plus grande que sa moitié** $\frac{a_3}{2} < 2a_4$.

Pour l'entier p, nous pourrons écrire de façon analogue

$$a - a_0 - 2a_2 - 2a_4 - \ldots - 2a_{2p} = a_{2p+1} \text{ et } \frac{a_{2p+1}}{2} < 2a_{2p}.$$

(du reste on enlève encore une quantité plus grande que sa moitié). Or, Euclide dit : (Prop. I du Livre X) : "*deux grandeurs inégales étant proposées* (ici la diagonale d et la mesure u), *si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées*".

Nous finirons par obtenir un reste a_{2n+1} inférieur à la mesure u (u pouvant avoir été choisie même très petite).

$$a_{2p+1} < u$$

ce qui est impossible puisque nous avons démontré que u mesure a_n et donc a_{2p+1} ; u ne saurait mesurer une grandeur qui lui est inférieure.

D'où la conclusion : il n'existe pas de mesure commune au côté d'un carré et à sa diagonale : ils sont incommensurables, c'est-à-dire que leur rapport n'est pas comme celui d'un nombre à un nombre. Autrement dit encore, il n'y a pas de raison numérique qui puisse exprimer ce rapport : celui-ci est $\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$, **irrationnel.**

Problème 2 :
Le lecteur pourra s'exercer à démontrer par le même procédé l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un pentagone régulier convexe (voir fig. 6). La

récurrence s'établit plus facilement pour le pentagone que pour le carré à partir du moment où l'on dispose des propriétés du pentagone : essentiellement l'existence de triangles isocèles dont l'angle à la base est le double de l'angle au sommet :

$$ACD, ABE', BE'D', \ etc\ldots$$

Si nous posons $AC' = d$, $AB = a_0 = AE'$; $AD' = a_1 = D'A'$; $D'E' = a_2$; $D'B'' = a_3$ etc ...
nous avons les relations :
$d = a_0 + a_1$; $a_0 = a_1 + a_2$; $a_1 = a_2 + a_3$; etc ...

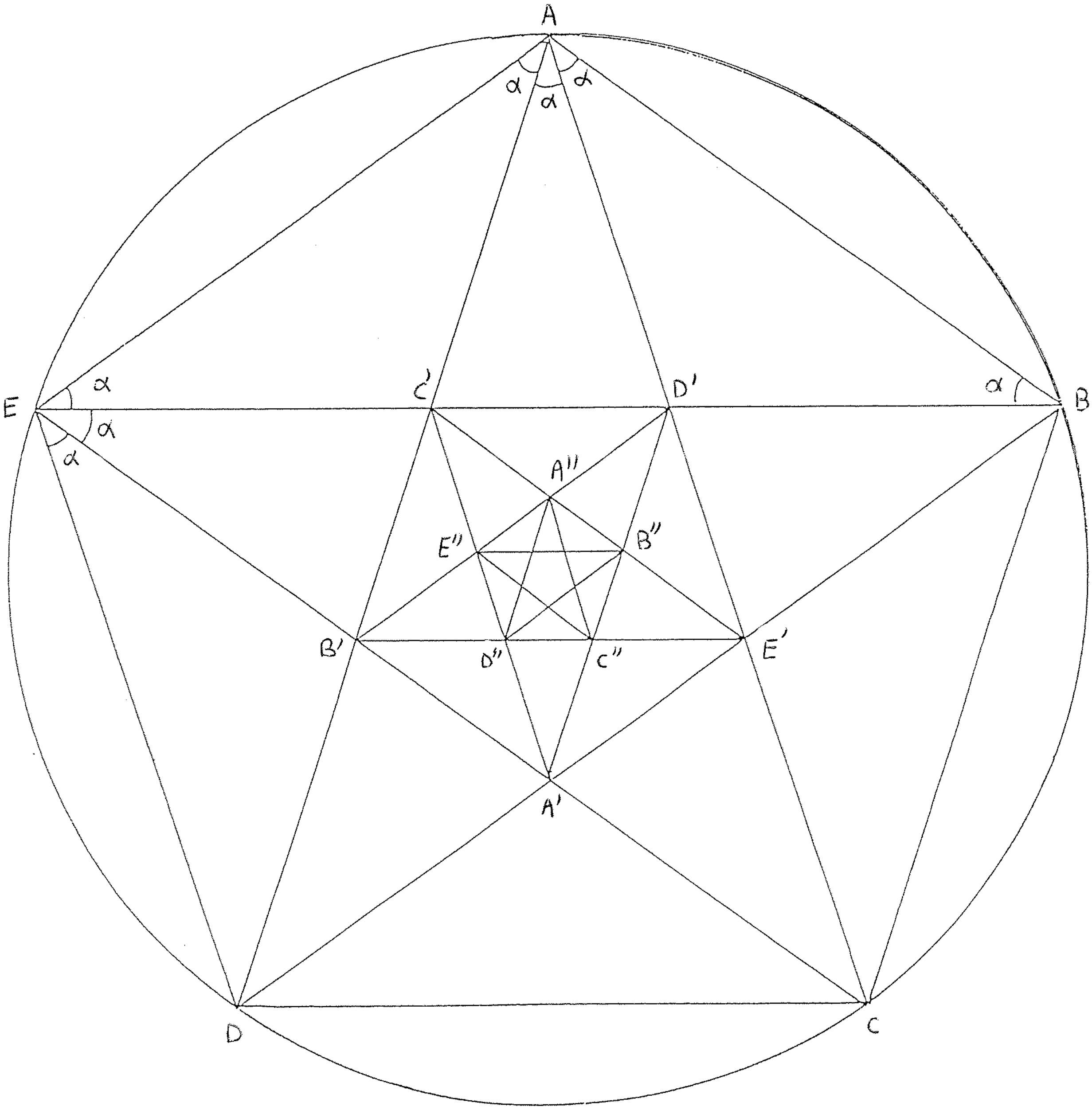


Figure 6

Problème 3

Démontrer à l'aide de l'algorithme d'Euclide l'incommensurabilité de la hauteur et du côté d'un triangle équilatéral, ou, ce qui revient au même, l'incommensurabilité du côté d'un triangle équilatéral avec le rayon du cercle circonscrit. On pourra s'appuyer sur la récurrence amorcée dans la figure 7.

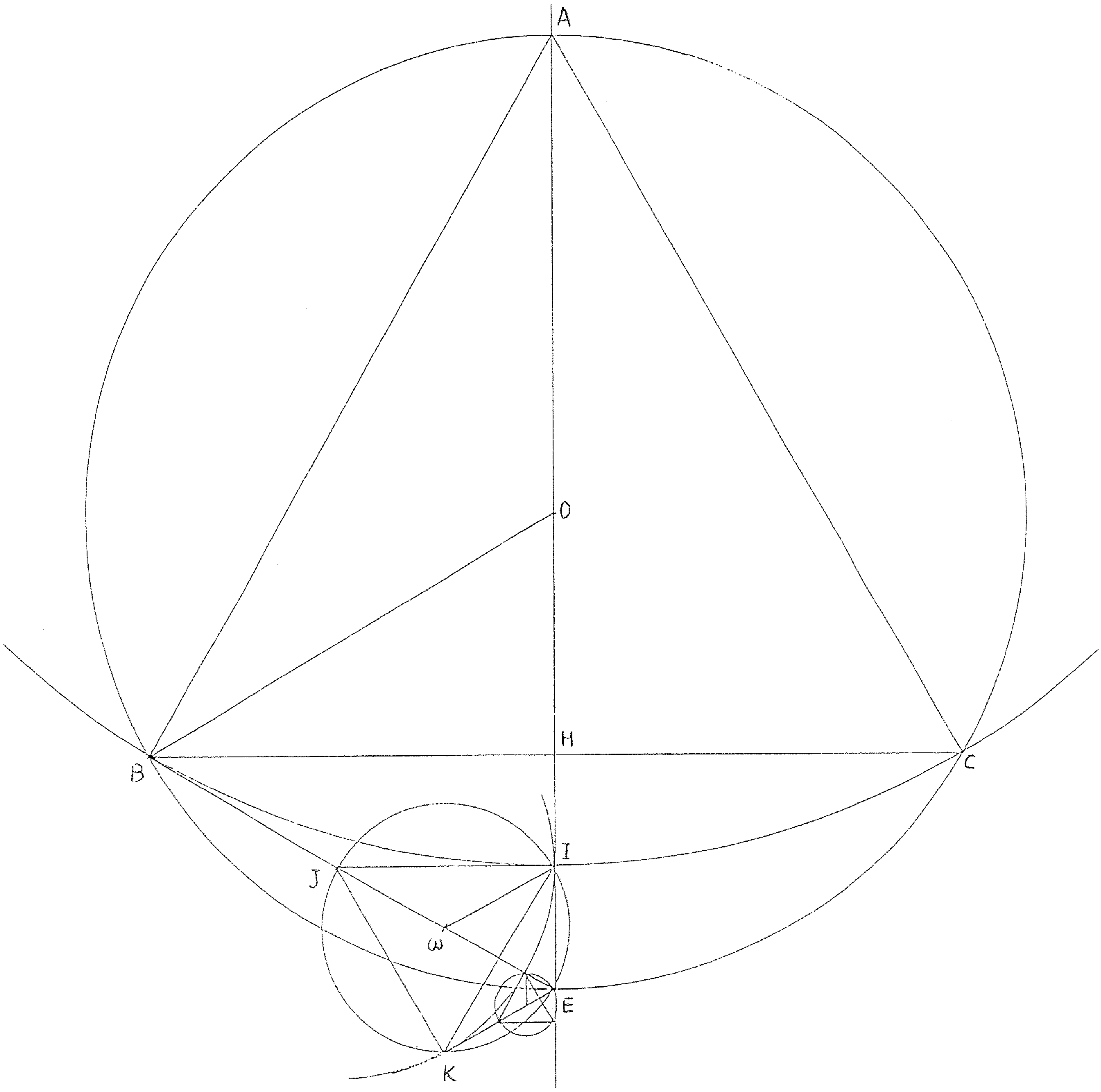


Figure 7

Eclairer ou convaincre : deux conceptions de la démonstration (6)

Pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$, on procède généralement d'une façon différente de celle proposée plus haut, en reprenant un raisonnement par l'absurde placé comme scholie dans certaines éditions des **Eléments** d'Euclide, à la fin du Livre X. Nous pouvons transcrire cette démonstration en termes actuels, de la façon suivante. Reportons nous à la figure 4 et supposons qu'il existe des entiers m et n tels que AB soit à AC comme m est à n (on peut supposer m et n premiers entre eux). Par le théorème de Pythagore $AC^2 = 2AB^2$ ou encore $n^2 = 2m^2$. Puisque n^2 est pair n l'est aussi et m est donc impair. Posons $n = 2k$ alors $m^2 = 2k^2$ et donc m est pair. Mais un nombre ne peut être à la fois pair et impair, il y a contradiction. Conclusion : AB et AC ne sont pas commensurables.

Quelle est la valeur et la signification de cette démonstration?

Françoise Van Dieren-Thomas du G.E.M. (7) de Louvain-la-Neuve (Belgique) a présenté cette démonstration dans une classe de 3^e, en s'arrêtant juste avant la conclusion, et a demandé aux élèves : "*Que peut-on en conclure?*" Les élèves ont répondu : "*Le théorème de Pythagore est faux*". Evelyne Barbin explique très bien la réaction des élèves. Ceux-ci ont bien compris le principe du raisonnement par l'absurde : "*Puisque nous arrivons à quelque chose d'absurde, c'est que l'un des arguments de la démonstration est faux. Examinons les trois arguments qui interviennent : AB et AC sont commensurables, le théorème de Pythagore et l'argumentation sur la parité. Lequel abandonner? Exposer la situation en ces termes peut paraître provoquant au mathématicien car seule la commensurabilité des segments était mise en jeu*".

En fait, pour les élèves comme pour les Pythagoriciens à l'origine, il n'est pas question de mettre en doute la commensurabilité des segments $[AB]$ et $[AC]$. Pour rendre manifeste leur incommensurabilité il faut avoir dépassé la mesure empirique donnée par l'observation, il faut avoir idéalisé ces segments, il faut avoir cherché leur mesure commune par un processus théorique où le segment est un objet pensé et abstrait. En ce sens, les démonstrations d'incommensurabilité au moyen de l'algorithme d'Euclide nous paraissent infiniment plus éclairantes que la démonstration par le pair et l'impair. Celle-ci peut nous convaincre, dit E. Barbin, mais elle force notre entendement. Nous constatons le résultat mais, comme l'écrit Bachelard à propos de la démonstration mathématique, "*il ne suffit pas d'en constater le résultat pour en saisir le sens*". Nous pouvons encore ne pas saisir pourquoi on ne peut vraiment pas trouver de mesure commune.

Un autre argument nous fait préférer l'algorithme d'Euclide que nous ne faisons qu'esquisser ici mais que l'on trouvera plus développé dans la brochure : il donne des approximations rationnelles (et en un certain sens les meilleures approxima-

---

(6) Nous reprenons ici une idée développée par E. Barbin dans les Actes de l'Université d'Eté de La Rochelle sur l'histoire des mathématiques (1988) : "*La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques*".
(7) Groupe d'Enseignement des Mathématiques.

tions rationnelles) des nombres irrationnels considérés. Dans le cas du carré les relations :

$$d = a_0 + a_1 \ ; \ a_0 = 2a_1 + a_2 \ ; \ a_1 = 2a_2 + a_3 \ ; \ a_2 = 2a_3 + a_4 \text{ etc}\ldots$$

donnent successivement :

$$\frac{d}{a_0} = 1 + \frac{a_1}{a_0} \ ; \ \frac{a_0}{a_1} = 2 + \frac{a_2}{a_1} \ ; \ \frac{a_1}{a_2} = 2 + \frac{a_3}{a_2}$$

ou encore :

$$\sqrt{2} = \frac{d}{a_0} = 1 + \frac{a_1}{a_0} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{a_2}{a_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{a_3}{a_2}}} \text{ etc}\ldots$$

D'où les approximations obtenues si nous négligeons le dernier reste : 3/2; 7/5; 17/12 etc...

Au total, nous ne pouvons que reprendre le commentaire que fait Stella Baruk dans son Dictionnaire de Mathématiques élémentaires à l'article "Commensurable-incommensurable" :

"*Il est tout à fait dommage, pour des raisons pédagogiques et culturelles, que ces mots et les notions qu'ils évoquent ne figurent pas au programme des collèges :*

- *ils rendent compte, en effet, (...) de distinctions essentielles entre des rapports de grandeurs : ceux auxquels on a affaire de manière courante, tant en mathématiques que dans ses utilisations dans les sciences ou les techniques, sont toujours commensurables, ceux de la théorie non;*
- *ils éclairent, par l'importance accordée aux notions de* **rapport** *et de* **proportion**, *qui étaient essentielles, plus de vingt siècles d'histoire des mathématiques, mais aussi d'histoire de la pensée et rendent compte encore aujourd'hui, de la "résistance" qu'elle peut opposer à des notions toujours difficiles, qui mettent en jeu le* **continu**, *l'***infini** *d'une écriture pour un nombre, lui, fini,*
- *ils permettent, au niveau des collèges, de justifier explicitement l'introduction des* **nombres réels** - *réels* **irrationnels** *qui autrement sont parfaitement inutiles".*

ERRATA :

Dans l'article de M. Ehrhart : "*Sur les polygones entiers ou rationnels*" (cf. n° précédent)

page 26, dernière ligne, lire : $i_n = Sn^2 - \frac{p}{2}n + 1, j_n = Sn^2 + \frac{p}{2}n + 1$;

page 28, troisième ligne, lire : $X + 2Y > 2n$

dans la seconde figure :
au lieu de $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ lire : $[1; \frac{1}{2}]$

au lieu de $[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$ lire : $[\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$

page 29, il faut lire :

$$V = \frac{i_3 - 3i_2 + 3i_1 + 1}{6} = \frac{j_3 - 3j_2 + 3j_1 - 1}{6}.$$

L'ECOLE POLYTECHNIQUE
LES POTYTECHNICIENS ET LA SOCIÉTÉ FRANCAISE

Bicentenaire de l'Ecole polytechnique (*)
Colloque historique international

L'Ecole Polytechnique fêtera son bicentenaire en 1994 : c'est en effet en 1794 que le Comité de Salut Public a créé cette école qui, depuis deux cents ans, a donc formé cinquante mille polytechniciens au service de la France, de son économie, de sa science.

Les cérémonies de ce bicentenaire, qui se dérouleront de mars à juin 1994, seront principalement tournées vers l'avenir et poseront des jalons sur la manière dont l'Ecole et ses élèves peuvent contribuer au développement du pays, dans le contexte actuel; cependant, l'Association pour la Commémoration du Bicentenaire de l'Ecole polytechnique a souhaité qu'un effort exceptionnel d'analyse soit effectué sur l'impact de l'institution et de la communauté polytechnicienne sur la société française pendant ces deux cents dernières années.

Le colloque présenté dans ces pages et qui se tiendra les 8, 9, 10 et 11 mars 1994, permettra donc à des historiens reconnus de faire le point de travaux effectués récemment, sur ce que les polytechniciens ont apporté dans des domaines aussi variés que le développement technologique, la gestion des entreprises, la conduite des services publics, l'aménagement du territoire, la défense du pays, etc...; il conduira à un regard précis, critique bien sûr au sens historique du terme; il fournira des bases de données et d'informations pour une réflexion à prolonger au delà de 1994. Par son importance, il constituera le travail le plus important et le plus global jamais effectué sur l'Ecole polytechnique et son impact.

Présentation du colloque

Investie d'une valeur symbolique, l'Ecole polytechnique incarne aujourd'hui encore les qualités et les défauts d'une certaine conception française de l'excellence scolaire et de la réussite sociale. Depuis le centenaire de sa fondation, en 1894, il manquait une réflexion historique d'ensemble sur la communauté polytechnicienne et son rôle dans la société. Le colloque historique international organisé à Paris à l'occasion du Bicentenaire de l'Ecole polytechnique, les 8, 9, 10 et 11 mars 1994, devrait être l'occasion de combler cette lacune.

Ce colloque tentera de dresser un bilan critique et équilibré de deux siècles d'histoire, en évitant les pièges des autocélébrations satisfaites. Au cours de sept sessions, d'une demi-journée chacune, des spécialistes, historiens de la société et de l'économie, historiens des sciences et des techniques, historiens de la vie militaire, sociologues, venus de France et de l'étranger, examineront les divers aspects de l'activité polytechnicienne. Chacune des sessions comprendra cinq communications suivies d'une discussion et se conclura par une intervention de synthèse.

(*) Cette annonce est publiée avec l'aimable autorisation du Comité d'organisation du colloque historique pour le bicentenaire de l'Ecole polytechnique.

Les participants au colloque seront conviés à l'inauguration de l'exposition historique *Paris-Polytechnique*, ainsi qu'à la projection, en première, du film de Christian Delage et Vincent Guigueno *La Petite Patrie*, consacrée à l'Ecole polytechnique au cours des premiers mois de l'Occupation.

Le colloque donnera lieu à une publication.

Les polytechniciens : deux siècles d'histoire

Le 11 mars 1794, la Convention décrète la fondation de l'Ecole centrale des travaux publics, rebaptisée un an plus tard Ecole polytechnique. Depuis cette date, deux cents promotions se sont succédées, réunissant cinquante mille polytechniciens. C'est "la poule aux œufs d'or", selon le mot de Napoléon. Par leur rôle intellectuel, technique, économique, administratif et militaire, les polytechniciens ont exercé une influence profonde, indiscutable, en France et dans le monde.

A l'origine de tout polytechnicien, il y a le concours et l'Ecole. Les polytechniciens forment une méritocratie fondée sur l'excellence scolaire, comme en avaient rêvé les réformateurs des Lumières. Leur culture est essentiellemment scientifique, privilégiant les mathématiques, avec une ambition encyclopédique et un souci des applications que résume le néologisme "polytechnique". Malgré les vicissitudes d'une histoire déjà longue, rien n'est venu altérer ce socle sur lequel repose, depuis l'origine, la légitimité polytechnicienne.

Mais le passage par l'Ecole est aussi une initiation. Après l'épreuve du concours, les polytechniciens, casernés jusqu'au déménagement à Palaiseau en 1975, apprennent pendant deux ans à vivre ensemble, à la fois profondément solidaires et concurrents pour le classement de sortie. Ainsi se façonne, à travers des traditions de camaraderie exaltées par les thuriféraires de l'institution, une identité commune, transmise promotion après promotion : quel que soit son destin ultérieur, le polytechnicien reste, sa vie durant, un ancien élève de l'Ecole polytechnique.

La formation scientifique reçue à l'Ecole a toujours donné au polytechnicien un tour d'esprit qui lui est propre. C'est un X. Dans la gestion comme à la guerre, il lui faut disséquer méthodiquement une situation, l'analyser comme un problème avant d'agir, rechercher la solution la meilleure, même si ce n'est pas nécessairement la plus simple. Au XIX^{e} siècle, les polytechniciens dominent la science française, fournissant quelques-uns des plus grands théoriciens du siècle, de Cauchy à Poincaré. Au XX^{e} siècle, leur terrain privilégié est plutôt la science appliquée et la technologie, où s'illustrent des noms comme Le Chatelier, Caquot ou Friedel.

De la construction des grands barrages hydro-électriques au programme des centrales nucléaires, la politique d'indépendance énergétique de la France a été profondément marquée par leurs conceptions.

Bardés de certitudes scientifiques, les polytechniciens forment une élite, jugée parfois arrogante. Il est vrai qu'héritiers des ingénieurs du Roi, ils sont liés organiquement au pouvoir à travers les grands corps techniques qu'ils alimentent :

Ponts et Chaussées, Mines, Télécommunications, Armement, etc. A la camaraderie d'Ecole, s'ajoute ainsi, dans chacun de ces services, un fort esprit de corps tendant à renfermer un peu plus sur elle-même la communauté polytechnicienne. Mais le polytechnicien est d'abord un serviteur de l'Etat qui, traditionnellement, a un sens développé de ce qu'il croit être l'intérêt général. D'où le succès rencontré chez ces ingénieurs par les grands projets d'inspiration technocratique, théorie saint-simonienne au XIX^e^ siècle, planisme et dirigisme au XX^e^ siècle. L'intérêt qu'ils portent au calcul économique, de Jules Dupuit à Maurice Allais, s'inscrit dans une perspective assez voisine.

Depuis Napoléon, l'Ecole polytechnique est une école militaire dont la vocation première, jusqu'en 1940, est de fournir à l'armée ses cadres techniques. Les polytechniciens contrôlent les armes savantes, Génie militaire et Artillerie. Ils demeurent de grands fortificateurs, dans la tradition de Vauban. Ils modernisent l'artillerie et participent à l'invention et au développement du char d'assaut. Enfin, avec Joffre, Nivelle et Foch, leur action est décisive pendant la Première guerre mondiale à la tête des armées françaises, puis alliées. S'ils sont beaucoup moins nombreux dans le corps des officiers depuis 1945, les polytechniciens n'en continuent pas moins de participer de manière majeure à l'effort de défense, en assurant l'équipement des armées.

Ingénieurs du corps des Ponts et Chaussées, les polytechniciens interviennent massivement dans les questions d'aménagement : constructions de routes et de canaux d'abord, puis le chemin de fer et les grands équipements urbains. L'œuvre se poursuit au XX^e^ siècle avec les nouveaux réseaux : autoroutes, lignes aériennes, TGV, télécommunications. Les polytechniciens apparaissent ainsi comme des acteurs majeurs de la politique de l'espace menée sans discontinuité par l'Etat jusqu'à ces dernières années. Longtemps au service d'une conception centralisée du territoire, il leur a fallu récemment s'adapter au nouveau contexte créé par la décentralisation.

D'abord serviteurs de l'Etat, les polytechniciens n'ont jamais été indifférents aux questions industrielles. Au XIX^e^ siècle, nombreux sont ceux qui adhèrent aux idées saint-simoniennes et participent aux grandes opérations industrielles du Second Empire. Mais c'est surtout au XX^e^ siècle que la vocation industrielle des polytechniciens s'affirme. Leur action est décisive dans la mise en route de tous les grands projets industriels de la deuxième moitié du siècle, ainsi que dans l'ouverture du capitalisme français à la concurrence internationale.

Aujourd'hui, à la veille d'un nouveau siècle, alors que l'Etat-nation, auquel la communauté polytechnicienne est liée depuis l'origine, doit affronter des transformations majeures – la mondialisation de l'économie, la construction européenne et la décentralisation administrative –, une réflexion lucide sur un passé qui a ses grandeurs mais aussi ses faiblesses peut aider à préparer l'avenir.

Thèmes du colloque

• L'Ecole et la formation polytechnicienne

On analysera le projet des fondateurs et le modèle méritocratique qui s'impose à la fin du XVIII^{e} siècle. On évoquera l'évolution du concours et du rôle de l'"analytique" dans la formation. L'institution sera replacée à la fois dans le cadre de l'histoire du système français d'instruction publique et dans celui, international, d'une histoire comparée des formations d'ingénieurs.

• Anatomie d'un groupe : les corps et les réseaux polytechniciens

On présentera le rôle historique des grands corps techniques qui recrutent à l'Ecole polytechnique et on analysera les relations complexes qu'entretiennent depuis le début de la Révolution industrielle, polytechniciens et ingénieurs civils. On tentera d'évaluer la place des polytechniciens dans les élites de la République au tournant des années 1900 et l'influence des réseaux polytechniciens dans le développement, hors de France, des grands mouvements nationaux.

• La production de l'espace national : aménagement du territoire et équipement

Les polytechniciens ont contribué largement, depuis la Révolution, à modeler l'espace national et l'espace colonial, par la réalisation de grands réseaux de transport et de communication et par l'aménagement des zones de développement urbain. Quelques aspects de cette œuvre de longue haleine seront ici plus particulièrement évoqués.

• Innovation technique, institution militaire et défense nationale

Longtemps, les armes savantes ont été le principal débouché de l'Ecole polytechnique. On examinera la place des polytechniciens dans le corps des officiers au XIX^{e} siècle, en mettant l'accent sur le programme de fortification et de rénovation de l'artillerie après la guerre de 1870 et on analysera l'action des officiers polytechniciens dans l'administration coloniale. Enfin, on analysera le rôle majeur des polytechniciens, officiers et ingénieurs de l'armement, dans l'élaboration et la mise en application de la stratégie de la dissuasion après 1960.

• Les polytechniciens, la science et la technologie

Les polytechniciens n'ont cessé depuis deux siècles de participer activement à l'effort de recherche scientifique et technique. Après avoir rappelé la contribution majeure des polytechniciens au développement des sciences mathématiques et physiques au cours des premières décennies du XIX^{e} siècle, on portera l'attention, à partir de quelques exemples, sur le XX^{e} siècle, aussi bien dans le domaine des technologie que dans celui des sciences fondamentales.

• La pensée économique et sociale et le service de l'Etat

Acteurs privilégiés de la politique d'intervention de l'Etat, les polytechniciens ont toujours été sensibles aux questions économiques et sociales. Sous la Restauration, les saint-simoniens recrutent avec succès à l'Ecole polytechnique. Dans l'Entre-deux-guerres, les polytechniciens d'X-crise apportent une contribution importante à la réflexion économique et sociale globale. On examinera également le rôle important joué par les polytechniciens, comme scientifiques et décideurs, dans le développement en France d'une pratique quantifiée de l'administration ainsi que de la science économique.

- **Logiques industrielles et gestion d'entreprise**

Longtemps éloignés de la libre entreprise, malgré quelques brillantes exceptions, les polytechniciens occupent une place grandissante dans la vie industrielle au cours du XX^e siècle, contribuant à introduire en France les méthodes modernes de gestion et d'organisation du travail. Quelques exemples particulièrement significatifs mettront en évidence le rôle moteur des polytechniciens dans la grande entreprise depuis 1945.

Pour des renseignements complémentaires, s'adresser à :

Irina Gouzevitch
Centre de recherche en histoire des sciences et des techniques
Cité des sciences et de l'industrie
75930 PARIS CEDEX 19
Tél. : 40.05.72.16 - Fax : 40 05 79 21.

Pour mémoire voici le :

PROGRAMME des connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique (1795)

Les connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique, sont :

1° L'arithmétique;

2° L'algèbre, comprenant la résolution des équations des deux premièrs degrés; la composition générale des équations; la démonstration de la formule du binôme de *Newton*, dans le cas seulement des exposants entiers positifs; les méthodes pour trouver les diviseurs commensurables qui peuvent être contenus dans une équation; pour résoudre les équations numériques par approximation; pour éliminer les inconnues dans les équations de tous les degrés;

3° La géométrie élémentaire, en y comprenant la trigonométrie rectiligne et la manière de faire usage des tables de logarithmes pour la résolution des triangles;

4° Les propriétés principales des sections coniques;

5° La mécanique statique, appliquée principalement à l'équilibre des machines simples;

Enfin, les candidats seront tenus d'écrire, sous la dictée de l'examinateur, quelques phrases françaises, pour constater qu'ils savent écrire correctement leur langue.

Nota. La théorie des proportions et progressions et des logarithmes sera exigée dans les examens; on exigera aussi l'exposition du nouveau système métrique.

JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P. 1993

Odile SCHLADENHAUFEN

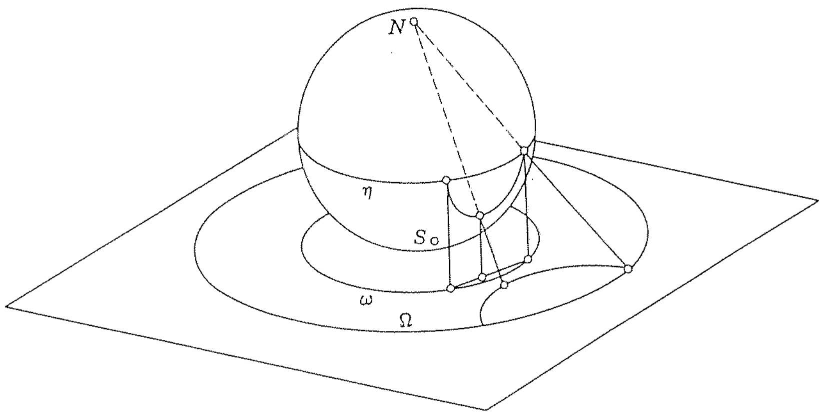
Les rentrées scolaires sont devenues épuisantes et il faut vraiment savoir que les Journées nationales de l'A.P.M.E.P. sont une mine d'enseignements pour un professeur de mathématiques du secondaire pour s'y inscrire, se déplacer et retarder ainsi un repos bien mérité. Celles de 1993 se sont déroulées à Poitiers les 22, 23 et 24 octobre, ont été riches d'informations, de points de vue, de discussions, de publications et ont encore récompensé les efforts précédemment cités. Un grand merci aux organisateurs.

Les conférenciers, au nombre de sept, ont parfois fonctionné en simultané donc il a fallu faire un choix et je ne parlerai que de ceux que j'ai écoutés. Daniel Dacunha-Castelle, qui a travaillé au Conseil National des Programmes, nous a exposé l'intérêt que nous pourrions avoir à organiser des débats sur les mathématiques à enseigner, sans rester fermé sur notre discipline mais en prévoyant aussi des participants physiciens, sociologues, économistes, ingénieurs, qui utilisent les mathématiques ainsi que des philosophes. De plus, nous sommes obligés de travailler par approximations successives dans l'élaboration de programmes, qui ne pourront rester immuables. Laissant filtrer son amertume sur les désaccords qui l'ont conduit à démissionner de son poste au C.N.P., il a donné son avis sur certains mots diffusés : au lieu de collège "unique" on devrait parler d'un collège "pour tous", et une discipline n'est sûrement pas "impérialiste" mais c'est l'usage qu'on en fait qui peut l'être.

Jean Dhombres nous a parlé du rôle des "problèmes" dans l'organisation des mathématiques en se référant au programme de Hilbert de 1900. En attendant que le texte de sa conférence paraisse dans un bulletin vert de l'A.P.M.E.P., j'indique que le numéro 257 (septembre 1993) de la revue "La Recherche" contient un article de Hourya Sinaceur et Jean-Pierre Bourguignon sur "David Hilbert et les mathématiques du XX^{e} siècle". Voici une information extraite de cet article : "*à l'instigation de Jacques-Louis Lions , l'an 2000 sera "Année mondiale des mathématiques" et la conférence de 1900 inspire la préparation de celles de l'an 2000.* Parallèlement d'autres que moi ont suivi Robert Noirfalise sur le thème "développement cognitif et résolution de problèmes : caractéristique du sujet ou adaptation à un milieu?".

Et pendant que Gilles Cohen intéressait son auditoire sur "les mathématiques, talent de société" en proposant des dimensions ludiques et culturelles intégrées à la pratique des mathématiques, Roger Cuppens nous incitait à reconsidérer l'enseignement des mathématiques en tenant compte des moyens de calculs modernes et de l'informatique. Même si on ne partage pas son envie d'enseigner l'informatique plutôt que l'analyse, on sent bien l'importance de ces nouveaux outils et l'intérêt d'une référence aux mathématiques discrètes. Mais on peut avancer sur ce terrain par "approximations successives" (voir les propos de Dacunha-Castelle) sans envisager une révolution.

Pour clore ces journées, Pierre Cartier puis Benoît Mandelbrot ont affirmé l'importance du dessin dans les mathématiques, alors qu'il fut un temps où il en était presque exclu. De cette époque Pierre Cartier garde toutefois le souvenir de Grothendieck qui faisait travailler ses étudiants de maîtrise sur des cubes et avec des couleurs, et qui se démarquait ainsi nettement de la communauté des mathématiciens. Citons quelques exemples de visualisations des mathématiques travaillées actuellement, qui ont été projetées ou signalées : une photo de la voute de l'église des Jéronimos (Lisbonne) qui donne une triangulation du plan, un dessin de Escher dans lequel on retrouve les 17 groupes de pavages réguliers de $\mathbb{R}^2$, un dessin de Escher où les anges et les démons pavent le disque de Lobachevski, une figure du livre de Coxeter où une projection stéréographique conduit à voir trois géométries : plan euclidien (somme des angles $= 180°$), sphère (somme des angles $> 180°$), disque de Lobachevski (somme des angles $> 180°$) (voir figure ci-dessous), des organigrammes en programmation.



Mais encore : les catégories peuvent se visualiser sur des graphes plans, la classification des nœuds a été conclue récemment par Vassiliev (pour quelques représentations de nœuds, voir '*L'Ouvert*' n° 66), des tambours restituant des sons particuliers sont étudiés sur dessins, et Viennot disait : "dessiner des calculs et calculer des dessins". Mais ce compte-rendu ne peut être exhaustif. Benoît Mandelbrot a parlé plus longtemps que l'heure qui lui était impartie et il fut très intéressant d'écouter le personnage, même si ses fractals sont suffisamment médiatisés pour ne pas s'y arrêter ici.

Je ne peux mentionner tous les exposés et ateliers, ni tous les éditeurs et IREM représentés dans le salon "Futuromath" où il était possible de feuilleter de nouveaux livres de mathématiques et de nouvelles brochures. N'oubliez pas que vous pouvez aussi en trouver un grand nombre à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg.

Avis aux amateurs : les prochaines "Journées nationales de l'APMEP" sont organisées par la Régionale APMEP de Bretagne Occidentale et doivent se dérouler les 13, 14, 15 et 16 octobre 1994 à Brest et à Loctudy (qui reste dans le souvenir de certains) sur le thème :

MATHÉMATIQUES À LA POINTE

De nombreuses régionales APMEP ont leur bulletin (*'L'Ouvert'* pour l'Alsace) et j'ai relevé dans celui de Poitiers, qui s'intitule Corol'aire, l'article suivant que je vous transmets avec la permission de son président.

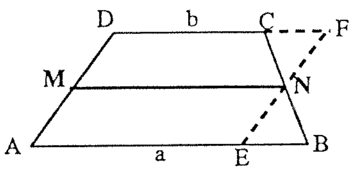
Cher professeur Hilare en sort,

En complément de ta rubrique au sujet du trapèze, je trouve intéressant de signaler que les moyennes arithmétiques A, géométrique G, harmonique H et quadratique Q des bases a et b du trapère s'interprètent facilement :

A , comme longueur du segment joignant les milieux des côtés obliques.

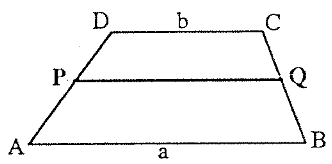
– puisque $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$,
alors $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}$
et donc $2MN = DC + AB$ (vecteurs colinéaires et de même sens).

– ou encore : $MN = AE = a - EB = DF = b + CF$; d'où $2MN = a + b$.



G , comme longueur du segment parallèle aux bases et partageant le trapèze en deux trapèzes semblables.

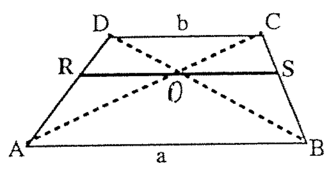
– puisque $\frac{PQ}{a} = \frac{b}{PQ}$
on a bien : $PQ = \sqrt{ab}$.



H , comme longueur du segment parallèle aux bases et passant par l'intersection des diagonales.

En effet, $\frac{a}{OR} = \frac{BD}{OD} = \frac{OD+OB}{OD} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}$. D'autre part, $\frac{BD}{OD} = \frac{AC}{OC} = \frac{a}{OS}$.
Donc $\frac{a}{OR} = \frac{a}{OS}$, donc O est le milieu de $[RS]$.
Donc $\frac{a}{RS} = \frac{a+b}{2b}$, d'où

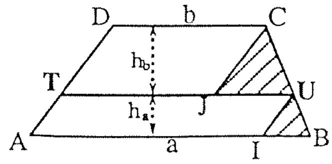
$$RS = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$



Q , comme longueur du segment parallèle aux bases et partageant le trapèze en deux trapèzes de même aire.

– L'existence et l'unicité de ce segment résulte de la continuité et des sens de variation contraires des deux fonctions :

$h_a \longmapsto$ aire du premier trapèze,
$h_b \longmapsto$ aire du second trapèze.
– D'autre part, $h_a \times \frac{a+TU}{2} = h_b \times \frac{TU+b}{2}$.
Donc $\frac{a+TU}{b+TU} = \frac{h_b}{h_a}$. Or, en considérant les triangles semblables CUJ et UBI, on voit que : $\frac{h_b}{h_a} = \frac{TU-b}{a-TU}$. On en déduit : $a^2 - TU^2 = TU^2 - b^2$, c'est-à-dire : $TU = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.



Jacques Chayé.

BIBLIOTHÈQUE

La bibliothèque de l'IREM de Strasbourg est ouverte
du lundi au jeudi
de 9 h à 12 h et de 14 h à 17 h.

Vous y trouverez 9000 ouvrages dans les domaines suivants : mathématiques (tous niveaux), manuels scolaires (des plus anciens aux plus récents), toutes les brochures de l'APMEP, brochures et revues des autres IREM, informatique, livres d'histoire des mathématiques et de l'enseignement, thèses de didactique des mathématiques, compte rendu de colloques, didactique, pédagogie, psychologie...

Des revues couvrant ces mêmes domaines peuvent également être consultées et/ou empruntées.

J'ai commencé l'informatisation au début de l'été : 1500 notices ont déjà été saisies et il est possible d'interroger le terminal à partir des mots-clé, du nom de l'auteur, du titre, etc...

Si vous souhaitez
– être régulièrement informés des nouvelles parutions et les emprunter,
– rencontrer des professeurs du secondaire ou du supérieur, des étudiants préparant le CAPES, un DEA ou une thèse de didactique des mathématiques,
– avoir des idées d'achat pour le CDI de votre établissement,
venez faire un tour à l'occasion...

Evelyne LE GUYADER.
Votre dévouée bibliothécaire depuis 20 ans.

PROBLÈMES POUR NOS ÉLÈVES (...et leurs professeurs)

Il s'agit, dans cette rubrique, de présenter des problèmes historiques ou classiques, dont la solution ne requiert pas d'autres connaissances que celles enseignées au lycée (voire au collège) et qui par conséquent, peuvent faire l'objet de travaux dans nos classes.

PROBLÈME 1

par Hieronymus Cardanus : Practica arithmetice et mensurandi singularis - Milan 1539.

Un pauvre homme allait tous les jours dans la maison d'un riche, afin d'y jouer pour une mise d'une pièce d'or, selon la règle suivante :

Si le pauvre gagne, il accepte de rejouer. Alors chacun remet en jeu toujours autant que le pauvre possède, et le jeu peut continuer ainsi jusque quatre parties, au bout desquelles ils arrêtent. Par exemple, le riche mise une pièce d'or à la première partie; s'il gagne le jeu s'arrête ce jour là; s'il perd, le pauvre possède deux pièces d'or; c'est pourquoi le riche misera deux pièces d'or à la deuxième partie; s'il gagne, le jeu s'arrête à ce moment là; s'il perd, le pauvre possède quatre pièces, de sorte que le riche remet quatre pièces en jeu; finalement il misera huit pièces dans la quatrième partie.

Dans ce cas, si le riche gagne, le pauvre perd les sept pièces déjà gagnées auparavant plus une pièce de son propre avoir; s'il avait gagné, il aurait emporté seize pièces, dont quinze gagnées. C'est pourquoi l'on demande : si le jeu se poursuit ainsi durant plusieurs mois, dans l'hypothèse d'une chance égale pour chacun de gagner ou de perdre (à chaque partie), lequel des deux joue dans les conditions les plus favorables, et dans quelle proportion?

PROBLÈME 2

extrait du "Shimpeki-Sampō" (1789). Ce titre signifie "mathématiques suspendues aux temples de Shintō" et correspondait à une coutume de cette époque au Japon, de suspendre aux murs des temples, des tablettes sur lesquelles se trouvait un problème de mathématiques et sa solution.

Etant donné un quadrilatère inscrit dans un cercle, démontrer que la somme des rayons des cercles inscrits dans les différents triangles qu'on obtient en menant les diagonales partant d'un même sommet, est la même quel que soit ce sommet. Généraliser à un polygone convexe quelconque inscrit dans un cercle.

PROBLÈME 3

Démontrer que les lignes trigonométriques d'un angle de 3° dont données par les relations suivantes :

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16}[\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}]$$
$$\cos 3^\circ = \frac{1}{16}[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)]$$
$$\tan 3^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1)$$

Envoyer solutions (de préférence d'élèves) et autres problèmes à '*L'Ouvert*'.

Les œuvres mathématiques de Simon Stevin
augmentées par Albert Girard, Leyde, 1634

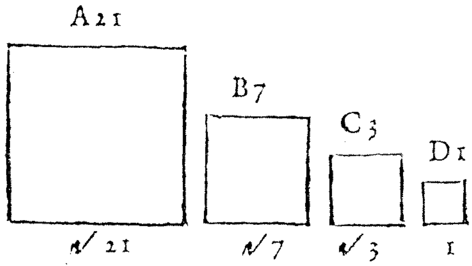
De la multiplication de racines ſimples.

PROBLEME XXII.

Estant donné racine ſimple à multiplier, & racine ſimple multiplicateur: Trouver leur produict.

Exemple I.

Explication du donné. Soit donnée racine à multiplier $\sqrt{}7$, & racine multiplicateur $\sqrt{}3$. *Explication du requis.* Il fault trouver leur produict. *Conſtruction.* On multipliera 7 (qui eſt le potence de $\sqrt{}7$) par 3 (qui eſt la potence de $\sqrt{}3$) faict 21, ſa racine quarrée (racine quarrée parce que les racines données ſont quarrees) eſt $\sqrt{}21$. Ie di, que $\sqrt{}21$, eſt le produict requis. *Preparation de la demonſtration.* Soyent deſcripts quatre quarrez, à ſçavoir A 21, & B 7, & C 3, & D 1, & leurs coſtez ſeront, $\sqrt{}21$, & $\sqrt{}7$, & $\sqrt{}3$, & 1.



Demonſtration. Comme le quarré A, au quarré B, ainſi le quarré C, au quarré D; Doncques par la 22 propoſition du 6 livre d'Euclide, comme le coſté de A, au coſté de B, ainſi le coſté de C, au coſté de D, c'eſt à dire, comme $\sqrt{}21$, à $\sqrt{}7$, ainſi $\sqrt{}3$, à 1: Nous avons donc trouvé le nombre $\sqrt{}21$, contenant autant de fois le premier donné $\sqrt{}7$, qu'il y a des unitez au nombre ſecond donné $\sqrt{}3$; c'eſt doncques par la 93 definition, legitime multiplication, & par conſequant le produict $\sqrt{}21$, eſt le vray produict requis; ce qu'il falloit demonſtrer.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 25

Énoncé

Etant donné un triangle, trouver tous les centres
a) des ellipses inscrites dans le triangle,
b) des ellipses ex-inscrites dans le triangle,
c) des hyperboles dont une branche est tangente aux trois côtés du triangle,
d) des hyperboles dont une branche est tangente à deux côtés du triangle et l'autre branche au troisième.

Solution

M. Dautrevaux nous a fait parvenir deux solutions très complètes et détaillées, qu'il nous a promis de synthétiser en une véritable petite monographie sur les coniques à centre tangentes aux trois côtés d'un triangle. Nous espérons être en mesure de vous en faire profiter dès le prochain numéro.

Voici en attendant une très élégante solution de M. Renfer (Strasbourg), qui se situe dans le cadre de la géométrie projective.

I.– Détermination du centre d'une conique tangente aux droites du triangle

Pour obtenir des calculs élégants et symétriques, on plonge le plan affine dans le plan projectif.
On choisit le repère projectif de sorte que les sommets A, B, C aient pour coordonnées homogènes $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ respectivement et que la droite de l'infini ait pour équation : $x+y+z=0$.
Une conique a une équation du type :

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2ayz + 2bzx + 2cxy = 0.$$

Si elle est tangente à la droite (AB), d'équation $z=0$, elle a un unique point d'intersection avec cette droite, donc : $c^2 - a'b' = 0$ (c'est le discriminant de l'équation : $a'x^2 + b'y^2 + 2cxy = 0$). En utilisant les relations analogues avec les tangentes (BC) et (CA), on obtient : $a'a^2 = b'b^2 = c'c^2 = a'b'c'$.
Si la conique est non dégénérée, le produit $a'b'c'$ est non nul ; car si a', par exemple, était nul, alors b et c seraient nuls aussi, ainsi que le déterminant de la matrice de la conique, dont la première ligne est (a', b, c).
Quitte à diviser tous les coefficients de l'équation de la conique par la racine cubique de $a'b'c'$, on peut donc supposer $a'b'c' = 1$.
Alors : $a' = \frac{1}{a^2}$; $b' = \frac{1}{b^2}$; $c' = \frac{1}{c^2}$ avec $abc = \pm 1$.

On peut exclure le cas : $abc = 1$, qui correspond à une conique dégénérée, car, en multipliant la première ligne de son déterminant par a, sa seconde ligne par b et sa troisième par c, on obtient :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & c & b \\ c & \frac{1}{b^2} & a \\ b & a & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = 0.$$

Au contraire si $abc = -1$, alors la conique est non dégénérée, car :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & c & b \\ c & \frac{1}{b^2} & a \\ b & a & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{b} & \frac{-1}{c} \\ \frac{-1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{-1}{c} \\ \frac{-1}{a} & \frac{-1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Le centre d'une ellipse ou d'une hyperbole est le pôle de la droite de l'infini. La polaire d'un point (x, y, z) a pour équation en X, Y, Z :

$$\frac{x}{a^2}X + \frac{y}{b^2}Y + \frac{z}{c^2}Z + a(yZ + zY) + b(zX + xZ) + c(xY + yX) = 0.$$

C'est la droite de l'infini si les coefficients de X, Y, Z sont égaux, c'est-à-dire si :

$$\frac{x}{a^2} + cy + bz = \frac{y}{b^2} + az + cx = \frac{z}{c^2} + bx + ay.$$

En posant : $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}, w = \frac{z}{c}$, le système s'écrit :

$$\frac{1}{a}(u - v - w) = \frac{1}{b}(v - w - u) = \frac{1}{c}(w - u - v),$$

ou encore :

$$\begin{cases} (a+b)u - (a+b)v + (a-b)w = 0 \\ (b+c)v - (b+c)w - (b-c)u = 0. \end{cases}$$

En éliminant w, on obtient : $(a+c)u = (b+c)v$.
Par permutation circulaire, on obtient donc, comme pôle de la droite de l'infini, le point (x, y, z), avec :

$$x = a(b+c),\ y = b(c+a),\ z = c(a+b).$$

En posant : $\alpha = \frac{-1}{a}$, $\beta = \frac{-1}{b}$, $\gamma = \frac{-1}{c}$, on peut écrire : $x = \gamma + \beta$, $y = \alpha + \gamma$, $z = \beta + \alpha$, avec $\alpha\beta\gamma = 1$.

II.– Nature de la conique

La conique est une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que la droite de l'infini la coupe en 2, 1 ou 0 point(s).

Pour obtenir les points (x, y, z) à l'infini sur la conique on remplace z par $-(x+y)$ dans l'équation de la conique et l'on obtient :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 \text{ avec :}$$
$$A = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} - 2b,\ C = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 2a,\ B = \frac{1}{c^2} - a - b + c.$$

Le calcul du discriminant Δ' donne :

$$\begin{aligned}\Delta' = B^2 - AC &= (\frac{1}{c^2} - a - b + c)^2 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{c})^2(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 \\ &= (\frac{1}{c^2} - a - b + c)^2 - (-c - b - a + \frac{1}{c^2})^2 \\ &= 4c(\frac{1}{c^2} - a - b) = 4(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = -4(\alpha + \beta + \gamma).\end{aligned}$$

La conique est donc :

- une ellipse, si $\alpha + \beta + \gamma > 0$,
- une parabole, si $\alpha + \beta + \gamma = 0$,
- une hyperbole si $\alpha + \beta + \gamma < 0$.

III.– Régionnement

Soit $M = (x, y, z)$ un point du plan affine.
On peut supposer : $x+y+z = 1$ (M est alors le barycentre de $(A, x), (B, y), (C, z)$).
Le point M est centre d'une conique tangente aux côtés du triangle ABC, si l'on peut trouver α, β, γ tels que $\beta + \gamma, \gamma + \alpha, \alpha + \beta$ soient proportionnels à x, y, z et tels que $\alpha\beta\gamma = 1$.
La proportionnalité s'exprime par :

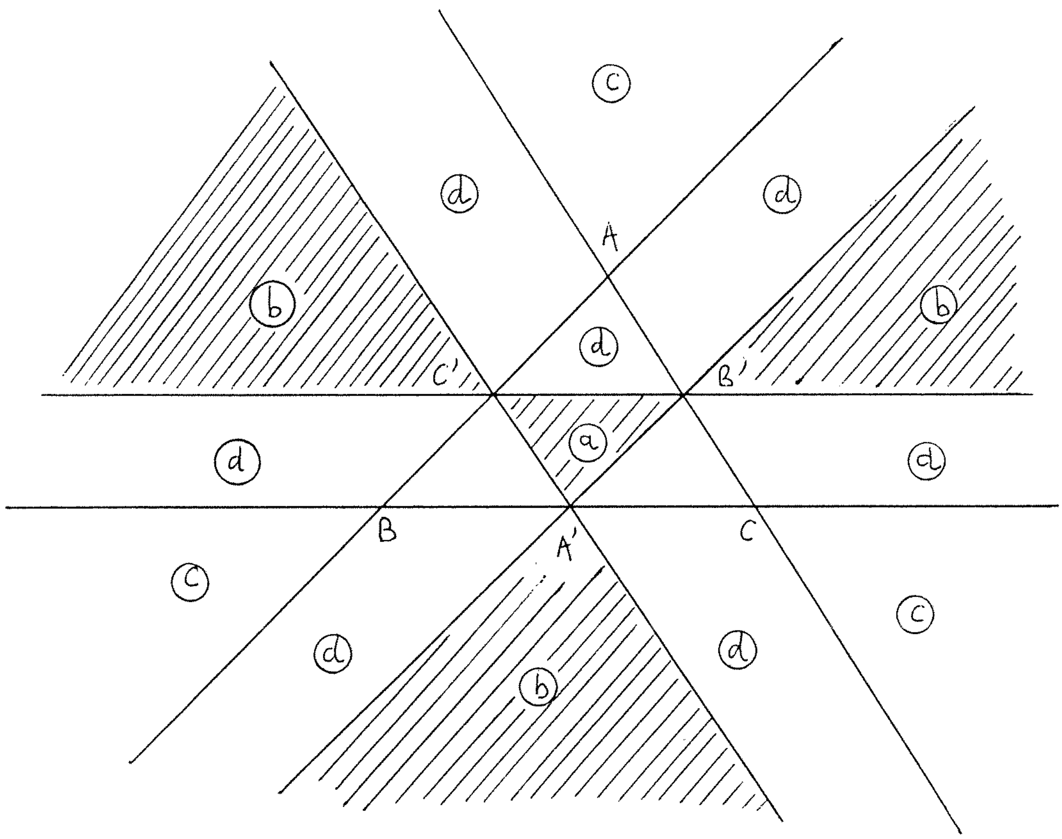
$$\begin{cases} x(\gamma + \alpha) = y(\beta + \gamma) \\ y(\alpha + \beta) = z(\gamma + \alpha). \end{cases}$$

En additionnant, on obtient : $(x + y - z)\alpha = (-x + y + z)\gamma$. Par permutation circulaire, on trouve :
Si $E = (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)$ est non nul alors :

$$\begin{cases} \alpha = & \lambda(-x + y + z) & = \lambda(1 - 2x) \\ \beta = & \lambda(x - y + z) & = \lambda(1 - 2y) \quad \text{avec : } \lambda^{-3} = E \\ \gamma = & \lambda(x + y - z) & = \lambda(1 - 2z) \end{cases}$$

Tout point est donc centre d'une et d'une seule conique, sauf les points des trois droites d'équations $2x = 1$, $2y = 1$, $2z = 1$ (il s'agit des droites $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$, où A', B', C' sont les milieux de $[B'C']$, $[C'A']$, $[A'B']$).
La somme $\alpha + \beta + \gamma$ est égale à λ. Son signe est celui de E.
La zone hachurée est celle des centres d'ellipses ($E > 0$) (on discerne facilement les ellipses inscrites et exinscrites). La zone non hachurée est celle des centres d'hyperboles ($E < 0$).

zone ⓐ : ellipses inscrites,
zone ⓑ : ellipses exinscrites,
zone ⓒ : hyperboles, dont une branche est tangente aux trois côtés,
zone ⓓ : hyperboles, dont une branche est tangente à deux côtés et l'autre au troisième.



Pour distinguer les deux zones ⓒ et ⓓ du cas hyperbolique, on remarque qu'**une hyperbole tangente aux trois côtés a les trois points de contact sur une même branche si et seulement si le centre de l'hyperbole est dans un angle opposé par le sommet à l'un des angles du triangle**. En effet, si l'on trace trois tangentes T_1, T_2, T_3 à une même branche d'hyperbole, les points de contact M_1, M_2 et M_3 se suivant dans cet ordre, le centre est dans l'angle limité par T_1 et T_3 qui ne contient pas la branche, et c'est l'angle opposé par le sommet à l'un des angles du triangle limité par T_1, T_2 et T_3. Réciproquement, si une hyperbole tangente à BC, CA et AB a son centre dans l'angle opposé par le sommet à l'angle A, la branche tangente à BC (respectivement CA, AB) est dans le demi-plan P_a (respectivement P_b, P_c) limité par BC (respectivement CA, AB) ne contenant par A (respectivement : contenant B, contenant C). Si les trois côtés n'étaient pas tangents à la même branche, la branche non tangente à BC serait dans P_b ou P_c, par exemple P_b et dans le demi-plan symétrique de P_a par rapport au centre; par symétrie par rapport au centre, l'autre branche (tangente à BC)

serait dans l'angle opposé par le sommet à l'angle C du triangle; mais aucune branche ne pourrait donc rencontrer la droite AB, ce qui est absurde.

PROBLÈME 26

Énoncé

Etant donnés n points distincts sur un cercle, on trace un polygone ayant ces points pour sommets. On suppose que p couples de côtés, et p seulement, ont un point commun autre qu'un sommet, et qu'aucun triplet de côtés n'a de point commun.

1) Ce polygone partage l'intérieur du cercle en r régions. Calculer r en fonction de n et de p.

2) Pour un nombre n donné de côtés, déterminer la valeur maximum du nombre p des points d'intersection des côtés.

Indication

Deux cas, selon que n est pair ou impair

PROBLÈME 27

Énoncé

Soient α et x_0 des nombres strictement positifs. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\alpha}{x_n}.$$

Donner un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

PROBLÈME 28

Énoncé

Etant donné un ensemble fini S à n éléments (sommets) et l'ensemble A des parties de S à deux éléments (arêtes), trouver l'effectif maximal d'une partie G de A telle que, pour tous x, y et z de S,

$$\{x, y\} \in G \text{ et } \{y, z\} \in G \Longrightarrow \{x, z\} \notin G.$$

Autrement dit, exprimer, en fonction du nombre n de sommets, le nombre maximal d'arêtes d'un graphe sans triangle.

PROGRAMME

Conférences IREM - APMEP

1993 - 1994

3 novembre 1993 :	Norbert SCHAPPACHER Le dernier théorème de Fermat
1er décembre 1993 :	Jean-Yves MÉRINDOL Résultant de Sylvester et symbole de Legendre-Jacobi
12 janvier 1994 :	Jean-Pierre FRIEDELMEYER 1799, une date dans l'histoire des mathématiques : la dissertation doctorale de Gauss sur le théorème fondamental de l'algèbre
9 février 1994 :	Augustin FRUCHARD Analyse complexe infinitésimale : voir une fonction analytique
16 mars 1994 :	Jean THOMANN Calcul formel
6 avril 1994 :	Maurice MIGNOTTE Equations diophantiennes et congruences
11 mai 1994 :	Jean-Claude RAUSCHER L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège

----

<u>Lieu :</u>

Salle de Conférences - 17 h

Bâtiment de l'IRMA

10, rue du Général Zimmer

67084 STRASBOURG CEDEX