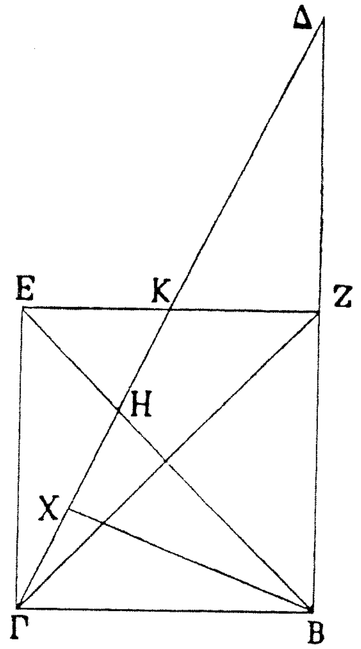
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 76 – SEPTEMBRE 1994 I.S.S.N. 0290 - 0068

III. — Soit donc un parallélogramme rectangulaire ZΓ (1), ... (2) la droite EZ au point K, menons les droites ΓK, BE des points Γ, B ; . . . . (3), et prolongeons les droites ΓK, BZ qui se rencontrent . . . (4). Puisque la droite EK est égale à la droite KZ, la droite ΓE, c'est-à-dire la droite BZ est égale à la droite ZΔ ; en sorte que la droite ΓZ est plus grande que la droite ZΔ, et, par conséquent, l'angle compris sous les droites ZΔ, ΔΓ est plus grand que l'angle compris sous les droites ZΓ, ΓΔ (5). Or, les angles compris sous HB, BΔ et sous ZΓ, ΓB sont égaux, car ils valent respectivement la moitié d'un angle droit ; par conséquent, l'angle sous ΓH, HB est plus grand que l'angle sous HΓ, ΓB, puisque l'angle sous ΓH, HB vaut les deux angles internes et opposés sous HB, BΔ et sous HΔ, ΔB (6), et la droite ΓB est donc plus grande que la droite BH (7). Dès lors, si la droite ΓH est divisée en deux parties égales au point X, l'angle sous ΓX, XB sera obtus. En effet, puisque ΓX est égal à XH, que XB est commun,on a deux côtés égaux à deux côtés et une base ΓB plus grande qu'une base BH,et, par conséquent, un angle plus grand que l'autre angle. Il en résulte donc que l'angle sous ΓX, XB est obtus, tandis que l'angle adjacent est aigu (1). Or, l'angle sous ΓB, BH vaut la moitié d'un angle droit, car cela a été supposé pour ce parallélogramme (2), tandis que l'angle sous BX, XH, est aigu. Et. . . . . (3).



NOTRE COUVERTURE :
Le Stomachion ou loculus d'Archimède

Divers passages d'auteurs latins (*) mentionnent l'existence d'un jeu géométrique composé par Archimède et qu'ils appelaient "Loculus Archimedius". D'après ces auteurs ce Loculus se rapportait à une logette carrée ou rectangulaire sur le fond de laquelle devaient s'ajuster exactement quatorze lamelles d'ivoire de forme triangulaire ou polygonale. Mais il n'existait aucun texte connu d'Archimède sur ce sujet lorsque en 1899 le paléographe Papadopoulous Kerameus découvrait parmi les manuscrits du Patriarcat grec de Jérusalem un palimpseste comportant un ouvrage de mathématiques dans lequel le professeur Heiberg reconnut, entre autres, un fragment du traité intitulé "Le Stomachion". La même année un autre fragment, découvert dans une version arabe était traduit en allemand par H. Sutter. Les fragments retrouvés, dont notre couverture présente un extrait de la traduction française, montrent qu'Archimède aurait subordonné l'établissement de cet ancêtre de nos casses-têtes géométriques à la condition que les lamelles soient découpées de manière à former quatorze parties commensurables entre elles. Ce problème illustre un ensemble de recherches qui restent d'actualité, comme celles développées dans ce numéro par Boris Bekker pages 17 à 20 et qui allient à des énoncés fort simples, des questions qui ne sont pas toujours évidentes.

(*) Voir références dans l'introduction des "Oeuvres complètes d'Archimède" traduction française par Ver Eecke (Ed. Blanchard, 1961).

Notes concernant la couverture :

1. Les relations qui vont être invoquées aussitôt indiquent qu'il s'agit d'un carré. Le manuscrit comporte une figure erronée et incomplète ; nous reproduisons celle qui a été reconstituée par Heiberg.
2. Lacune dont le texte pourrait être rétabli comme suit : « divisons la droite EZ en deux parties égales au point K ».
3. Petite lacune probablement relative au tracé de la droite ΓZ.
4. Lacune à reconstituer probablement par les mots : « au point Δ. »
5. EUCLIDE, livre I, proposition 18 : « Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle. »
6. Angle $Z\Delta\Gamma >$ angle $Z\Gamma\Delta$. Or, angle $HB\Delta =$ angle $Z\Gamma B$; donc : $Z\Delta\Gamma + HB\Delta > Z\Gamma\Delta + Z\Gamma B$. Mais $Z\Delta\Gamma + HB\Delta = \Gamma HB$, et $Z\Gamma\Delta + Z\Gamma B = H\Gamma B$, d'où, comme le texte : angle $\Gamma HB >$ angle $H\Gamma B$.
7. EUCLIDE, livre I, proposition 19 : « Dans tout triangle, un plus grand angle est opposé à un plus grand côté. »

EDITORIAL

Ce numéro de '*L'Ouvert*' est accompagné d'un numéro spécial sur Monsieur Georges Reeb. Nous avons préféré regrouper dans une seule brochure les articles qui rendent hommage à cet illustre collègue, mais souhaité tout de même maintenir la parution de quelques articles ou rubriques traditionnels. Vous ne trouverez pas les solutions des problèmes de physique proposés par le groupe IREM "Maths-physique", bien qu'elles soient déjà écrites; nous nous en excusons mais nous ne pouvions faire face à tous les suppléments. Elles sont inscrites au numéro de décembre.

Il nous faut déposer ces pages à l'impression début juillet. Nous sommes à la veille des vacances mais cela ne m'empêche pas de penser à la rentrée scolaire et de partager les inquiétudes d'un bon nombre de professeurs de terminales qui auront une fois de plus à réorganiser leur enseignement sur des "nouveaux programmes" pour un "bac nouveau". Je n'ai pas l'intention de prêcher l'immobilisme, mais ces modifications seraient mieux acceptées si elles avaient été mieux discutées. Sinon, en quoi les changements de programme nous dérangeraient-ils? Nous y sommes habitués. D'ailleurs les durées de vie – en année scolaire – des programmes de mathématiques me font penser aux termes d'une progression géométrique décroissante. Je ne suis pas sûre du modèle, mais je suis convaincue d'une chose et cela me rassure : les termes de cette progression sont des entiers naturels non nuls; nous ne descendrons pas en dessous de l'unité! Et tout un chacun sait que les premiers termes ne définissent pas entièrement une suite; des pronostics sur ses variations futures sont permis.

Gardons le moral face aux difficultés.

Bonne année scolaire.

O. SCHLADENHAUFEN.

SOMMAIRE

N° 76 – SEPTEMBRE 1994

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

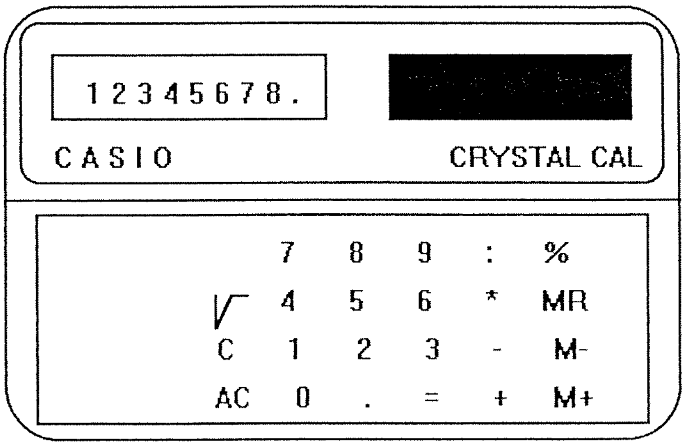
◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
80 F (130 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
120 F (200 F/2 ans) dans les autres cas.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 30.– F

POUR LES VIRTUOSES DE LA CALCULETTE

Jean Lefort

Vous avez sûrement dans votre entourage des personnes qui n'ont qu'une calculette 4-opérations. Soit parce qu'elles n'ont guère besoin de s'encombrer d'une calculatrice scientifique sophistiquée dans leurs calculs quotidients qui se limitent à quelques additions et multiplications (même pour calculer ses impôts cela suffit!), soit parce que leur enfant doit en avoir une à l'école ou au collège et qu'il a bien fallu qu'elles se penchent sur son utilisation pour ne pas perdre la face devant leur progéniture, soit parce qu'elles en ont reçu une en cadeau, cadeau d'entreprise ou cadeau d'amis. C'est ainsi que j'ai une très jolie calculette solaire extra-plate "Casio". Ce qu'il y a de formidable avec un tel engin c'est qu'il n'est point besoin de mettre des piles, le soleil se chargeant de faire les calculs, et si le temps est bouché ou s'il fait nuit, n'importe quelle source lumineuse convient également, même si, comble de malice, c'est une source électrique!

Ceci dit, il est de bon ton dans la communauté mathématique de faire la fine bouche devant une telle calculette; n'a-t-on pas beaucoup mieux? Calculatrice scientifique, calculatrice programmable, mini-ordinateur ou carrément P.C. ou Mac! On oublie qu'il y a une quinzaine d'années une simple calculette 4-opérations coûtait très cher et révolutionnait déjà les calculs. Il faut dire qu'une telle calculette facilitait infiniment les calculs habituels car elle ne fait pas 4 opérations mais 5 au minimum puisqu'il y a l'extraction de racine carrée quoiqu'il s'agisse ici d'une fonction et non d'une opération. Il faut y ajouter une ou deux mémoires et une touche de calcul des pourcentages. Voici à titre d'exemple comment se présente ma calculette solaire qui est joliment transparente :



Passons en revue les différentes touches et fonctions de cette calculette. Nous allons voir qu'un tel outil est beaucoup plus performant qu'on peut le croire à première vue et qu'en particulier il est capable d'exécuter des calculs dépassant largement les possibilités d'un collégien!

PREMIÈRES CONSTATATIONS

La calculette semble n'afficher que 8 chiffres. Effectivement, le calcul de 1/7 donne 0.1428571 et il n'y a pas de chiffre de garde comme on le constate en retranchant ce même nombre, autrement dit, la pression successive des touches donne bien 0 à

[1] [:] [7] [=] [-] [0] [.] [1] [4] [2] [8] [5] [7] [1] [=]

l'affichage. Cependant il peut s'afficher autre chose sur l'écran que ces 8 chiffres éventuellement précédés d'un signe moins. D'une part la pression d'une des touches opératoires (division, multiplication, soustraction, addition) est rappelée par le symbole correspondant à droite du nombre affiché, d'autre part un petit "K" apparaît à l'extrême gauche quand on appuie un nombre pair de fois de suite sur un symbole opératoire, enfin si on est amené à faire calculer un nombre trop grand, un petit "E" apparaît à gauche de l'écran. Ce symbole apparaît également lors d'une opération illicite (division par zéro par exemple), il signifie donc qu'une erreur a eu lieu.

La touche [C] efface le nombre affiché et seulement ce nombre, signe compris et non pas les autres symboles qui apparaissent à l'affichage (cette touche permet donc de corriger une erreur de frappe), tandis que la touche [AC] efface tout ce que contient la calculette.

La calculette dispose, en plus des mémoires de travail, d'une mémoire notée "M" que l'on peut atteindre à l'aide de l'une des trois touches [MR], [M-] ou [M+]. La touche [MR] permet de faire apparaître à l'affichage le contenu de la mémoire "M" tandis que la pression de la touche [M+] (respectivement [M-]) ajoute (respectivement retranche), le nombre affiché au contenu de "M".

LES TOUCHES OPÉRATOIRES

L'utilisation des touches opératoires (addition, soustraction, multiplication et division) est, dans un premier temps très naturel :

[x][*][y][=] donne x*y à l'affichage, où $*$ représente l'une quelconque des quatre opérations $(+,-,\times,\div)$. Il faut toutefois noter que la simple pression des touches [x][×][=] conduit au calcul de x^2 qui s'affiche. On peut remplacer le symbole de la multiplication par celui de la division, mais on obtient $x/x = 1$ ce qui ne paraît pas très intéressant, mais on verra l'utilité un peu plus loin.

En pressant deux fois de suite sur la touche opératoire, le premier nombre entré reste en mémoire (la mémoire K dont le symbole est rappelé à l'affichage) et est composé avec le second à chaque pression de la touche [=] :

[x][*][*][y][=] donne y*x à l'affichage; (notez l'inversion des nombres). Une seconde pression sur [=] affiche le résultat de y*x*x puis une troisième donne y*x*x*x, etc. Si au lieu d'appuyer directement sur la touche [=], on tape sur [z][=] on obtient z*x à l'affichage, ce qui prouve que la mémoire K conserve également la touche opératoire. Enfin, et de la même façon que pour l'opération "simple", la succession

de [x][×][×][=] conduit au résultat x^2, puis par pression de [=] à x^3 et ainsi de suite, ce qui permet d'obtenir x^n. Ici, le remplacement de [×] par [÷] aboutit à 1, puis 1/x, puis $1/x^2$, etc. Voici quelques exemples :

[8,3][+][7,5] donne à l'affichage (15,8)
[7][×][=] donne à l'affichage (49)
[9][+][+][=] donne à l'affichage (18)
[9][+][+][=][=] donne à l'affichage (27)
[5][−][−][7][=] donne à l'affichage (2)
[10][−][−][3][=] donne à l'affichage (−7)
[10][−][−][3][=][=] donne à l'affichage (−17)
[10][−][−][3][=][7][=] donne à l'affichage (−3)
[3][×][×][=] donne à l'affichage (9)
[3][×][×][=][=] donne à l'affichage (27)
[3][×][×][=][=][=] donne à l'affichage (81)
[5][÷][÷][7][=] donne à l'affichage (1,4)
[5][÷][÷][=][=] donne à l'affichage (0,2)
[5][÷][÷][=][=][=] donne à l'affichage (0,04).

Le redoublement du signe opératoire permet l'usage de ce qu'on appelle le "facteur constant". Quand on veut effectuer un grand nombre d'opérations binaires où l'un des nombres est toujours le même, on le tape en premier puis on appuie deux fois sur la touche du signe opératoire et on entre ensuite les autres nombres séparés par la touche [=]; chaque pression de cette dernière fait apparaître à l'affichage le résultat cherché. Par exemple on dispose d'un certain nombre de prix hors taxe et on désire connaître les prix T.T.C. correspondant; voici la manipulation à effectuer :

[1,186][×][×][113][=][218][=][60][=][etc...

on obtient successivement à l'affichage après chaque pression de [=] :

(134,018) (258,548) (71,16).

Attention cependant pour les opérations de soustraction et de division. Si on veut soustraire un même nombre de plusieurs autres ou si on veut diviser par un même nombre plusieurs autres, la manipulation précédente reste la même, mais si au contraire on cherche à soustraire différents nombres d'un même, ou diviser un même nombre par différents autres, il faut utiliser l'opération inverse, c'est-à-dire l'addition ou la multiplication respectivement. Par exemple si on veut soustraire "3" successivement de "18", "15", "21", il faudra taper :

[−][3][+][+][18][=][15][=][21][=]

pour obtenir successivement (15), (12), (18) après chaque pression de [=].
De la même façon, si on veut diviser ces mêmes nombres par "3", il faudrait taper :

[1][÷][3][×][×][18][=][15][=][21][=]

ou bien :

[3][÷][÷][=][=][×][×][18][=][15][=][21][=]

mais on remarque immédiatement que les résultats ne sont pas exactement ceux auxquels on est en droit de s'attendre puisque l'affichage donne successivement

(5,9999994), (4,9999995), (6,9999993) au lieu des (6), (5) et (7) attendus! Il est facile de comprendre ce qui s'est passé. C'est tout simplement un problème d'arrondi que connaissait parfaitement les calculateurs qui ont travaillé avant l'ère des ordinateurs. Cela se traduisait par le conseil : "Il vaut mieux effectuer toutes les multiplications avant de faire les divisions". C'est l'occasion de renouer avec cette sage habitude qui montre qu'il est plus exact de calculer [x][×]][y][÷][z][=] que [x][÷][z][×][y][=] comme le prouve l'exemple [13][×][5][÷][7][=] qui donne (9,2857142) tandis que [13][÷][7][×][5][=] donne (9,285714). Il n'est pas difficile de comprendre que dans le deuxième cas l'erreur d'arrondi est multipliée par le ...multiplicateur! Dans la pratique, il y a une autre méthode qui est d'utiliser la mémoire accessible de la calculette; nous verrons cela dans un prochain paragraphe.

On remarquera qu'il est très difficile de gérer les signes négatifs. Seul le premier nombre introduit peut être négatif; il suffit de commencer par une pression sur la touche [−]. Pour les multiplications ou les divisions il vaut mieux calculer le signe du résultat et l'introduire éventuellement au début (ou simplement le garder dans sa tête). On se doute bien qu'une calculette n'est pas un instrument performant pour le calcul algébrique, mais seulement pour le calcul arithmétique. Le calcul des termes successifs d'une suite arithmétique ou géométrique est ainsi immédiat.

ÉTUDE DE LA TOUCHE $\boxed{\%}$

Cette touche semble avoir un lien avec le calcul des pourcentages. C'est effectivement le cas, mais d'une marque ou d'un type de calculatrice à l'autre, la fonction de cette touche varie du tout au tout. Il est alors possible de proposer une expérience scientifique, s'apparentant tout à fait à un T.P. de physique, en mettant à la disposition d'un groupe différents modèles de calculettes et en demandant à chaque individu le rôle de cette touche dans différentes configurations. Il est alors astucieux de partir de nombres simples comme 100 et 5 pour essayer de "deviner" la fonction donnée par la pression d'une séquence de touches comprenant "%". Voici, à titre d'exemples, une liste d'expériences et les hypothèses, au sens physique de ce mot, (ou conjecture) qui sont faites pour ma calculette solaire :

[100][+][5][%] donne à l'affichage (105,26315)
[100][+][5][%][-] donne à l'affichage (5,2631575)
[200][+][10][%] donne à l'affichage (222,22222)
[200][+][10][%][-] donne à l'affichage (22,222222)
[100][-][5][%] donne à l'affichage (1900)
[100][×][5][%] donne à l'affichage (5)
[100][×][5][%][+] donne à l'affichage (105)
[100][÷][5][%] donne à l'affichage (2000)

[100][+][+][5][%] donne à l'affichage (E)
[200][+][+][5][%] donne à l'affichage (-5)
[200][+][+][5][%][%] donne à l'affichage (5)
[300][+][+][5][%] donne à l'affichage (-2,5))
[300][+][+][5][%][%] donne à l'affichage (1,25)
[300][+][+][5][%][%][%] donne à l'affichage (-0,625)

[100][—][—][5][%] donne à l'affichage (-95)
[100][—][—][5][%][%] donne à l'affichage (-195)
[100][—][—][5][%][%][%] donne à l'affichage (-295)
[200][—][—][5][%] donne à l'affichage (-97,5)
[200][—][—][5][%][%] donne à l'affichage (-148,75)
[200][—][—][5][%][%][%] donne à l'affichage (-174,375)

[100][×][×][5][%] donne à l'affichage (5)
[100][×][×][5][%][%] donne à l'affichage (5)
[200][×][×][5][%] donne à l'affichage (10)
[200][×][×][5][%][%] donne à l'affichage (20)
[200][×][×][5][%][%][%] donne à l'affichage (40)

[100][÷][÷][5][%] donne à l'affichage (5)
[100][÷][÷][5][%][%] donne à l'affichage (5)
[200][÷][÷][5][%] donne à l'affichage (2,5)
[200][÷][÷][5][%][%] donne à l'affichage (1,25)
[200][÷][÷][5][%][%][%] donne à l'affichage (0,625)

[5][+][+][100][%] donne 105.26315 puis [200][%] donne 210.52631.
[5][-][-][100][%] donne 1900 puis [200][%] donne 3900.
[5][×][×][100][%] donne 5 puis [200][%] donne 10.
[5][÷][÷][100][%] donne 2000 puis [200][%] donne 4000.

En multipliant les expériences, voici les hypothèses auxquelles on peut aboutir :

[x][+][y][%] conduit à $\frac{100x}{100-y}$ puis avec [−] on obtient $\frac{xy}{100-y}$

[x][−][y][%] conduit à $\frac{x-y}{y}100$

[x][×][y][%] conduit à $\frac{xy}{100}$ puis avec [+] on obtient $x + \frac{xy}{100}$

[x][÷][y][%] conduit à $100\frac{x}{y}$

[x][+][+][y][%] conduit à $y\frac{100}{100-x}$ puis [%] donne $y\left(\frac{100}{100-x}\right)^2$ puis [%] donne $y\left(\frac{100}{100-x}\right)^3$

[x][−][−][y][%] conduit à $\frac{100}{x}(y-x)$ puis [%] donne $\frac{100}{x}\left(\frac{100}{x}(y-x)-x\right)$ et on itère sur y

[x][×][×][y][%] conduit à $y\frac{x}{100}$ puis [%] donne $y\left(\frac{x}{100}\right)^2$ etc...

[x][÷][÷][y][%] conduit à $y\frac{100}{x}$ puis [%] donne $y\left(\frac{100}{x}\right)^2$ etc...

Une autre façon de voir et qui permet une interprétation des résultats précédents, c'est de dire que :
[x][+][y][%] donne le nombre dont il faut ôter y% pour obtenir x.
[x][+][y][%][−] donne le résultat précédent moins x.
[x][×][y][%] donne les y% de x.
[x][×][y][%][+] donne x augmenté de y% (ce dont on a le plus souvent besoin).
[x][−][y][%] donne le rapport d'augmentation, en pourcentage, quand on passe de y à x.

La répétition du symbole opératoire entre x et y permet d'itérer le calcul, mais on notera que les rôles de x et de y sont échangés par rapport au cas où l'on utilise un seul symbole opératoire. Ceci est tout à fait naturel après ce que nous avons vu au paragraphe précédent à propos de l'utilisation du facteur constant.

LES TOUCHES RELATIVES À LA MÉMOIRE

Il y a trois touches permettant de travailler avec la mémoire notée "M". Ce sont les touches [M+], [M−], [MR]. Précisons-en le rôle : la première est équivalente à une pression de la touche [=] et à l'addition du résultats au contenu de la mémoire "M"; la seconde agit de même avec une soustraction au contenu de la mémoire "M". Dès que la mémoire contient un nombre non nul, un petit "M" est affiché en haut à gauche de l'écran. Enfin une pression de la dernière touche remplace l'affichage par le contenu de la mémoire.

L'utilisation de cette mémoire est indispensable dès que l'on veut effectuer une ligne de calculs algébriques. En effet la machine effectue les calculs dans l'ordre indiqué sans aucune priorité opératoire. Ainsi, si l'on veut calculer 3+4×5 et que l'on tape [3][+][4][×][5] on obtient (35) au lieu du (23) attendu et l'on remarque que la pression de la touche [×] fait apparaître le résultat intermédiaire (7). Il est à noter à ce propos que la pression d'une touche opératoire implique le calcul des opérations précédentes. Plusieurs solutions sont alors possibles, chacune d'elles montre un aspect du rôle des priorités opératoires : soit calculer dans l'ordre 4×5+3, soit mettre en mémoire le résultat intermédiaire en tapant [3][M+][4][×][5][M+][MR]. En fait il y a essentiellement deux types de calcul qui vont nécessiter le recours à la mémoire :

1) Une somme algébrique de produit ou de quotient. C'est le plus simple, puisqu'au lieu de presser sur la touche opératoire [+] ou [−] il faudra presser sur les touches [M+] ou [M−] respectivement. En voici un exemple :
$3 \times 4 - \frac{7}{5} - \frac{2\times 11}{9}$ s'obtient par [3][×][4][M+][7][÷][5][M−][2][×][11][÷][9][M−][MR].
On veillera à bien faire attention à taper [M+] ou [M−] en fonction du signe qui était devant le groupe que l'on vient de reproduire et non pas en fonction du signe qui apparaît alors dans la succession des calculs. Il y a là une difficulté inhérente

à toute programmation où il faut anticiper sur les calculs et la façon dont ils sont pris en compte par la machine.

2) Un produit ou un quotient de facteurs qui sont chacun des sommes algébriques. Il est évident qu'on peut se ramener au cas précédent, dans le seul cas du produit, en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Ainsi : $(17+12-5)(13-6+11)$ peut s'écrire $17\times13-17\times6+17\times11+12\times13-12\times6+12\times11-5\times13+5\times6-5\times11$ mais cela est assez fastidieux même si c'est une excellente occasion de faire réviser la règle des signes! On préférera donc la méthode ci-après : [17][+][12][−][5][M+][13][−][6][+][11][×][MR][=]. Cependant cette méthode ne s'applique pas telle que à un produit de plus de deux facteurs et doit être adaptée dans le cas du quotient.

Réglons déjà le cas du produit de plusieurs facteurs. A la fin du calcul précédent, la mémoire contient toujours la valeur du premier facteur et faute de touche d'effacement de la seule mémoire, il est impossible d'en remplacer la valeur par le dernier résultat obtenu. Une astuce de procédure permet toutefois de parvenir à ses fins. Voyons-la sur un exemple. Soit à calculer le produit : $(17+12-5)(13-6+11)(7-4)(21-10-2)$. Effectuons la suite de manipulations ci-après : [17][+][12][−][5][M+][13][−][6][+][11][−][**1**][×][**MR**][**M+**][7][−] [4][−][**1**] [×][**MR**][**M+**][21][−][10][−][2][×][MR][=]. L'astuce de procédure qui apparaît en caractère gras consiste à diminuer d'une unité les facteurs autres que le premier et le dernier de façon qu'en ajoutant le résultat partiel au contenu de la mémoire on obtienne le résultat exact.

Voyons maintenant le cas du quotient. Soit à calculer : $\frac{(17+12-5)(13-6+11)(7-4)}{(21-10-2)(19+3)(8-4)}$.

Pour les produits, nous utilisons le principe qui vient d'être vu et les quotients seront transformés en produit en prenant les inverses, d'où la manipulation suivante (on y a pris alternativement un facteur du numérateur et un du dénominateur, mais ceci est arbitraire) :

[17][+][12][−][5][M+] [21][−][10][−][2][÷][÷][=][=][−][1][×][MR][M+]
[13][−][6][+][11][−][1][×][MR][M+] [19][+][3][÷][÷][=][=][−][1][×][MR][M+]
[7][−][4][−][1][×][MR][M+] [8][−][4][÷][÷][=][=][×][MR][=].

Malgré la complication, dans le cas général des calculs itérés, il est possible de trouver des formules où cela se passe relativement bien. Voici, par exemple, le cas du calcul de la racine carrée de 2 par la méthode de Babylone : on part d'une valeur approchée, puis on effectue plusieurs fois la séquence de touches suivantes : [M+][÷][÷][=][=][×][2][=][M+][MR][M−][÷][2][=]. L'analyse des astuces de calcul qui s'y trouvent est source d'enseignement.

ÉTUDE DE LA RACINE CARRÉE

La répétition d'une expérience telle que [2][√][×][=] montre que la touche [√] donne la racine carrée par défaut (à la précision de la calculette) du nombre affiché, que ce nombre corresponde à un calcul en cours ou soit le résultat d'un calcul. Dans le même temps, les opérations en cours sont annulées. Ainsi il est impossible de calculer directement $2\sqrt{3}$, il faut taper [3][$\sqrt{}$][×][2][=]. On remarque que l'ordre est inversé ce qui oblige à pas mal de virtuosité dès qu'interviennent plusieurs racines carrées dans un calcul. En voici un exemple : calculez

$$\Big(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\Big)^2.$$

Il est préférable de calculer

$$\Big(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}-\frac{1}{2}\Big)^2$$

c'est-à-dire qu'il faut taper [5][$\sqrt{}$][+][3][÷][2][=][$\sqrt{}$][−][0,5][×][=]. On note l'inversion de certains calculs et surtout le remplacement de 1/2 par 0,5 qui évite le recours à la mémoire. La calculatrice affiche 1,2499998 ce qui repose une fois de plus le problème de la précision du calcul ou bien du besoin d'une démonstration exacte. C'est l'occasion de justifier du calcul algébrique qui autrement pourraît être gratuit.

CALCULER MALGRÉ LES ERREURS

Nous avons noté que lors d'un dépassement de capacité ou lors de l'exécution d'une opération interdite, l'affichage laisse apparaître un petit E en haut à gauche. La présence de ce symbole bloque complètement la machine qui affiche cependant un résultat :

0 lors d'une division par zéro;
$\sqrt{|a|}$ lors du calcul de la racine carrée d'un nombre a négatif;
x . 10^{-8} lors d'un dépassement supérieur de capacité, $x \geq 10^8$;
0 lors d'un dépassement inférieur de capacité, (mais sans la présence du E).

Pour débloquer la machine il n'y a qu'une solution : appuyer sur une des touches d'effacement. Mais si la pression de [AC] remet la machine à zéro faisant ainsi disparaître tous les calculs antérieurs, il n'en est pas de même de la pression de [C] qui a pour effet de ne faire disparaître que le symbole E ce qui permet parfois de continuer le calcul comme le montrent les exemples ci-après :

Soit à calculer les puissance successives de 2. On effectue la manipulation suivante : [2][×][×][=][=][...][=]. Chaque pression de la touche [=] donne la puissance suivante. A la 25^e pression on obtient 2^{26}=67 108 864 et la 26^e pression donne 2^{27} = ^{E} 1,342 177 2 ce qui doit se lire 1,342 177 2 × 10^8; on peut continuer la série en pressant [C][=] qui conduit à 2,684 354 4 résultat qu'il faut multiplier par 10^8 si on veut avoir une bonne approximation de 2^{28}. Et on peut continuer jusqu'à la prochaine apparition du symbole E qui une fois ôté permettra le calcul de nombre qu'il faudra multiplier par 10^{16}.

Soit à calculer les carrés successifs de 2. On effectue la manipulation suivante : [2][×][=][×][=][×][=][×][=][×][=]. Chaque pression des touches [×][=]

donne le carré suivant, c'est-à-dire qu'on obtient successivement 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, et enfin 2^{32} qui conduit à l'affichage de E 42, 949 672 qu'il faut donc lire 42, 949 672 $\times$ 10^8. Mais ensuite la pression des touches [C][×][=] donne un résultat qui doit se lire 1844, 674 $\times$ 10^{16} car la puissance de 10 qui n'apparaît pas doit aussi être élevée au carré. L'étape suivante conduira à 3 402 823,2 qu'il faut mutiplier par 10^{32} et enfin E 115 792, 05 qu'il faut évidemment lire 115 792, 05 $\times$ 10^{72} ($72 = 32 \times 2 + 8$) et qui correspond à 2^{256}, etc... Cette technique permet facilement de dépasser la limitation 10^{99} de bien des calculatrices. Mais cela demande aussi de jongler avec les puissances de 10, ce qui est un excellent exercice!

En combinant les deux méthodes précédentes, il est facile de calculer rapidement une puissance quelconque entière d'un nombre donné. Voici l'exemple de $(3{,}5)^{43}$; on pourra proposer des variantes par rapport à la méthode indiquée.
[3,5][×][=][×][=][×][=][M+][×][=][C][×][=][×][MR][=] [×][3,5][×][3,5][×][3,5][=] qui conduit à l'affichage 24 827 088 qu'il faut multiplier par 10^{16} comme un décompte soigneux des puissances de 10 qui interviennent permettra de le constater. Finalement, on peut écrire : $(3{,}5)^{43} = 2{,}482\,708\,8 \times 10^{16}$.

Reprenons l'exemple du calcul avec plusieurs radicaux. Calculons $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$:
[5][$\sqrt{}$][−][3][=][$\sqrt{}$][C][M+][−][5][$\sqrt{}$][+][3][=][$\sqrt{}$][MR][=] et on pourra vérifier par un calcul algébrique que le nombre obtenu vaut bien $\sqrt{2}$. Mais gageons que cette méthode qui consiste à passer par le calcul de la racine carrée d'un nombre négatif (sic!) n'est pas à mettre entre les mains de tous les collégiens déjà aux prises avec bien des difficultés dans le calcul des radicaux.

CALCULER LES FONCTIONS TRANSCENDANTES

Quand j'ai dit à des collègues que je connaissais une méthode pour calculer les fonctions transcendantes sur une calculette 4-opérations, tous m'ont dit : "c'est facile avec un développement limité". C'est la preuve qu'ils n'avaient jamais essayé. En effet, s'il est relativement aisé de calculer $\exp(x)$ à l'aide d'un développement en série entière en utilisant le schéma de Hörner, je défie quiquonque de calculer ainsi $\log_a(x)$. Mais même pour l'exponentielle, le calcul de exp(10) avec une précision relative de l'ordre de 10^{-3} nécessite d'aller jusqu'au terme en x^{16} ou x^{17} et surtout cet ordre du développement dépend du nombre auquel on applique l'exponentielle; jusqu'ou faut-il aller pour calculer avec une précision du même ordre exp(100)? Quant au calcul de $\ln(x)$ pour x supérieur à 1 il demande beaucoup d'astuces et je ne parle pas de $\log_2(3)$ par exemple! Il est donc nécessaire d'utiliser une autre méthode basée sur les propriétés des fonctions étudiées. Voici ce que je propose pour les fonctions exponentielles et logarithmiques ainsi que pour la fonction cosinus.

Calcul de exp(x) :

L'algorithme de calcul repose sur le développement à l'ordre 1 de l'exponentielle, développement qui est une bonne approximation de la fonction pour une valeur petite de la variable. L'idée est donc de se ramener à une petite valeur de la variable par des extractions de racines carrées. On est toutefois limité par le fait que chaque racine carrée introduit une erreur d'arrondi et qu'il s'y ajoute l'erreur due au remplacement de la fonction par un développement limité à l'ordre 1. Voici l'algorithme :

Entrer x.
Diviser par 2048.
Ajouter 1.
Elever au carré 11 fois de suite.

On voit que l'on calcule $\left(1+\frac{x}{2048}\right)^{2048}$. Nous verrons plus loin la précision de cette approximation. Une vérification sur quelques nombres montre qu'elle est de l'ordre de 10^{-2} en valeur relative.

Calcul de ln(x) :

C'est la fonction réciproque de la précédente; il suffit donc de lire l'algorithme précédent à l'envers en remplaçant les fonctions par leur réciproque :

Entrer x.
Prendre la racine carrée 11 fois de suite.
Retrancher 1.
Multiplier par 2048.

On voit qu'on calcule $2048(x^{1/2048}-1)$. La précision s'améliore et est de l'ordre de 10^{-3}.

Calcul de x^y :

On utilise toujours la même idée en remplaçant x^y par $\exp(y.\ln(x))$. Il nous faut donc calculer par la méthode précédente le logarithme naturel de x, le multiplier par y et prendre l'exponentielle du tout. Ceci nous donne l'algorithme suivant :

Entrer x.
Prendre la racine carrée 11 fois de suite.
Retrancher 1.
Multiplier par y.
Ajouter 1.
Elever au carré 11 fois de suite.

On voit que l'on calcule $\Big(y\big(x^{1/2048}-1\big)+1\Big)^{2048}$. On peut se demander si, en appliquant cette méthode au cas particulier $x=e$ on obtient le même résultat que par la première méthode? Ce n'est pas tout à fait exact puisque cela revient à calculer une approximation de $\ln(e)$ qui se trouve valoir environ $2048/2047,5$. Ainsi le cas $y=10$ conduit à 21 549 par cet algorithme alors que le premier nous donnait 21 497 et que la valeur exacte à une unité près est 22 026, ce qui confirme que l'erreur relative est de l'ordre de 2.10^{-2}.

Calcul de $\log_a(x)$:

On utilise le fait que $\log_a(x)=\log_a(e)\times\ln(x)=\ln(x)/\ln(a)$ ce qui nous donne l'algorithme :

Entrer a.
Prendre la racine carrée 11 fois de suite.
Retrancher 1.
Mettre en mémoire.
Entrer x.
Prendre la racine carrée 11 fois de suite.
Retrancher 1.
Diviser par le contenu de la mémoire.

Ici aussi l'application de cet algorithme au cas particulier $a = e$ ne donne pas tout à fait le même résultat. Il y a encore ce facteur voisin de 2047,5/2048 comme le montre l'exemple $x = 2$ qui conduit par la présente méthode à 0, 693 016 5 tandis qu'on obtient par l'algorithme antérieur 0, 693 043 2 alors qu'une valeur exacte à 10^{-8} près est 0, 693 147 18 ce qui confirme, en passant, que l'erreur est de l'ordre de 10^{-4}. On remarquera que les erreurs d'arrondi dans les calculs de racines carrées font que l'écart entre les deux méthodes n'est pas aussi considérable que le voudrait la théorie.

Calcul de cos(x) :

On utilise la formule $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ qui nous permet, par une division de l'arc en 2^n parties, de nous ramener à un arc petit auquel on applique un développement limité à l'ordre 2. Ceci nous conduit à l'algorithme :

Entrer x en radians.
Diviser par 2^n.
Effectuer n fois de suite :
- Elever au carré.
- Multiplier par 2.
- Retrancher 1.

Dans la pratique, si x ne dépasse par $\pi/2$, on prend $n = 4$, mais on peut prendre une valeur supérieure si x est très grand. Mais attention, cette méthode ne donne pas le signe de $\cos(x)$ qu'il faut évaluer à part.

Tous ces exemples, on en conviendra, sont accessibles à des élèves de terminale scientifique mais il n'en est pas de même du calcul de la précision de l'approximation obtenue. J'utilise parfois, pour facilier le travail, des développements limités bien que l'on puisse s'en passer et se contenter, une fois obtenu le sens dans lequel évolue l'erreur à partir d'une valeur optimale, de tabuler la fonction (ou, ô ironie, utiliser une calculatrice scientifique graphique!).

ÉVALUATION DE L'ERREUR COMMISE

Approximations dans le calcul de exp(x) :

Nous allons comparer $\exp(x)$ avec $\left(1 + \frac{x}{2048}\right)^{2048}$ et pour cela nous allons étudier la fonction $f(x) = \left(1 + \frac{x}{2048}\right)^{2048} \exp(-x)$ ce qui nous permettra d'étudier l'erreur relative. La dérivation nous donne $f'(x) = \left(\frac{-x}{2048}\right)\left(1 + \frac{x}{2048}\right)^{2047} \exp(-x)$ ce qui nous conduit au tableau de variation suivant, valable au voisinage de 0 :

x		0		$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	
f	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0

On remarquera qu'il existe une autre valeur d'annulation de f' obtenue pour $x = -2048$ mais qu'elle ne présente pas beaucoup d'intérêt puisqu'on obtient alors 0 comme valeur approchée de $\exp(x)$ ce qui est excellent quand on la compare à la valeur exacte : 3,67 10^{-890}.

Sur tout intervalle $[a, b]$ avec $a < 0 < b$ l'erreur relative dans le calcul approché de l'exponentielle est maximum en l'une des bornes a ou b. Pour connaître un ordre de grandeur de cette erreur relative, effectuons un développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\Big(-x + 2048\ln(1+\frac{x}{2048})\Big) \\ &= \exp\Big(-x + 2^{11}(\frac{x}{2^{11}} - \frac{x^2}{2^{23}} + o(x^2))\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{x^2}{2^{12}} + o(x^2)\Big) = 1 - \frac{x^2}{2^{12}} + o(x^2). \end{aligned}$$

La valeur approchée obtenue l'est par défaut et l'erreur relative est de l'ordre de $x^2/4096$. Elle va croître assez vite avec x et vaut $0,1\%$ pour $x = \pm 2$. On ne peut améliorer le calcul qu'en utilisant quelques étapes de plus au risque de perdre le gain espéré en précision dans les arrondis des racines carrées. On sait que exp(10) vaut environ 22 026,465 79...et le calcul de $(1+\frac{x}{2^n})^{2^n}$ avec $n = 11$ donne 21 496,953 46...tandis qu'avec $n = 15$ il conduit à 21 993,003 75...ce qui montre que l'erreur relative passe de 0,24 % à 0,15% .

Approximations dans le calcul de ln(x) :

Nous allons comparer $\ln(x)$ avec $2048(x^{1/2048} - 1)$ et pour cela nous étudierons l'erreur absolue : $f(x) = \ln(x) - 2048(x^{1/2048} - 1)$. Le calcul de $f'(x)$ donne $\frac{1-x^{1/2048}}{x}$ qui est manifestement du signe de $(1 - x)$ pour x positif (ce qui correspond à l'ensemble de définition de f). Nous avons alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
f'	$\|$	$+$		$-$	
f	$\|-\infty$	$\uparrow$	0	$\downarrow$	$-\infty$

Ceci prouve que l'approximation obtenue l'est toujours par excès et que sur l'intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < 1 < b$ l'erreur est maximum en l'une des deux bornes a ou b. Pour mieux cerner l'erreur évaluons, à l'aide d'un développement limité au voisinage de 1 l'erreur relative due à la méthode et qui vaut : $\frac{f(x)}{\ln x} = 1 - \frac{2048(x^{1/2048}-1)}{\ln x}$. Dans cette optique nous poserons : $x^{1/2048} = 1 + h = \exp(\frac{\ln x}{2048})$ ce qui nous conduit à $h \sim \frac{\ln x}{2048}$ et par conséquent nous obtenons : $\frac{f(x)}{\ln x} = 1 - \frac{h}{\ln(1+h)} \sim -h/2 \sim \frac{-\ln x}{4096}$. Nous avons donc une précision de l'ordre de 0,1% dans l'intervalle $[\exp(-4); \exp(4)]$ ce qui correspond sensiblement à $[0,02\ ;\ 55]$.

Approximations dans le calcul de $\mathbf{x^y}$:

Ne cherchons pas ici un calcul rigoureux mais utilisons plutôt les calculs précédents pour évaluer l'erreur relative due à la méthode et qui ne tient donc pas compte des erreurs d'arrondi dans le calcul des racines carrées. Notons pour simplifier $L(x)$ l'approximation de $\ln(x)$ et $E(x)$ l'approximation de $\exp(x)$ que nous donnent les algorithmes proposés. Nous sommes amenés à calculer $E[y\ln(x)]$ et à le comparer à $\exp[y\ln(x)]$. Or, nous avons :

$$\frac{E[yL(x)] - \exp[y\ln(x)]}{\exp[y\ln(x)]} = \frac{E[yL(x)] - \exp[yL(x)]}{\exp[y\ln(x)]} + \frac{\exp[yL(x)] - \exp[y\ln(x)]}{\exp[y\ln(x)]}.$$

Le premier membre représente l'erreur relative sur le calcul de x^y. Le premier terme du deuxième membre est l'erreur relative sur $\exp[yL(x)]$ pourvu qu'on identifie cette expression avec $\exp[y\ln(x)]$ ce qui est tout à fait licite d'après les résultats des paragraphes précédents. Par suite ce premier terme vaut sensiblement $\frac{[y\ln(x)]^2}{4096}$. Le deuxième terme de ce même membre s'écrit aussi $\frac{\exp[yL(x)]}{\exp[y\ln(x)]} - 1$ soit $\exp[y(L(x) - \ln(x))] - 1$; il est donc équivalent à $[y(L(x) - \ln(x))]$. Mais nous avons vu que $\frac{L(x)-\ln(x)}{\ln(x)} \sim -\ln(x)/4096$ et par suite nous pouvons remplacer le deuxième terme par $\frac{-y(\ln x)^2}{4096}$ ce qui nous conduit finalement à évaluer l'erreur relative sur le calcul de x^y à environ $\frac{(y^2-y)(\ln x)^2}{4096}$. Etant données les valeurs usuelles de x et de y il n'est guère possible de négliger y^2 ou y l'un devant l'autre.

Approximations dans le calcul de $\mathbf{\log_a(x)}$:

Sachant que l'erreur relative d'un quotient est la somme des erreurs relatives du numérateur et du dénominateur, en remarquant que $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$ l'erreur relative vaudra $\frac{\ln x + \ln a}{4096}$ ce qui dans le cas particulier assez courant où $a = 10$ permet d'avoir une précision de l'ordre de 0,1 % dans l'intervalle [0,2 ; 5,5]. Or on peut toujours se ramener à cet intervalle en divisant par une puissance convenable de 10 ou de 2 dont les logarithmes sont très faciles à calculer.

Approximations dans le calcul de cos(x) :

En posant $f(\theta) = 2\theta^2 - 1$, il nous faut calculer $g(x) = ffff(x/16)$ et comparer ce résultat avec $\cos(x)$. Pour cela nous allons effectuer un développement limité de g

à l'ordre 4 au voisinage de 0 :

$$f(\frac{x}{16}) = \frac{x^2}{2^7} - 1$$
$$f(f(\frac{x}{16})) = 2(\frac{x^2}{2^7} - 1)^2 - 1 = 1 - \frac{x^2}{2^5} + \frac{x^4}{2^{13}}$$
$$f(f(f(\frac{x}{16}))) = 2(1 - \frac{x^2}{2^5} + \frac{x^4}{2^{13}})^2 - 1 = 1 - \frac{x^2}{2^3} + \frac{5}{2^{11}}x^4 + o(x^5)$$
$$fofofof(\frac{x}{16}) = 2(1 - \frac{x^2}{2^3} + \frac{5}{2^{11}}x^4 + o(x^5))^2 - 1 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{21}{2^9}x^4 + o(x^5)$$

On remarquera qu'un calcul analogue avec $f^{(5)}(x/32)$ conduit à $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{85}{2^{11}}x^4 + o(x^5)$. L'écart avec $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ est équivalent à $x^4/1536$ où 1536=3.2^9 ; en travaillant avec 5 étapes, nous aurions trouvé $x^4/6144$ où 6144=3.2^{11} et on généralise facilement, $\cos x$ étant toujours le plus grand. Comme on peut toujours ramener x dans l'intervalle $[0;\pi/2]$ l'erreur maximum absolue est de l'ordre de $\frac{(\pi/2)^4}{1536}$ soit environ 0,004. Dans la pratique, à cause des erreurs d'arrondi et de la présence de termes d'ordre plus élevé qui viennent en déduction, l'erreur ne dépasse pas 0,0025.

CONCLUSION

Je pense avoir illustré le fait qu'il faut parfois peu de choses pour faire des mathématiques intéressantes. Il n'est donc nul besoin de vouloir dépasser le programme, de vouloir traiter avec les "meilleurs élèves" des chapitres qui ne seront vus que l'année suivante au risque de déflorer un sujet et d'entraîner une certaine lassitude de la part d'élèves qui croiront déjà tout savoir. Il y a dans ce texte de quoi alimenter bien des exercices depuis la troisième jusqu'à la terminale et même un peu au delà qui entraîneront les élèves à une réflexion salutaire sur l'approximation (les maths, ce n'est pas que juste ou faux) sur la notation et les priorités opératoires, sur le fait que certaines machines, soi-disant élémentaires, permettent de faire mieux que des machines plus sophistiquées. Une telle réflexion, même si elle n'est qu'amorcée, fait partie d'une réelle éducation mathématique qui ne se limite pas à l'enseignement de la discipline aussi complet soit-il du point de vue technique. N'est-ce pas le rêve de tout professeur ? C'est le mien en tout cas.

MÉMOIRE D'I.U.F.M.

Avec la création des I.U.F.M., la formation initiale des enseignants se professionnalise davantage. En deuxième année d'I.U.F.M. les futurs professeurs de mathématiques réalisent un mémoire professionnel à l'occasion d'un stage en responsabilité. Voici le compte rendu d'un tel mémoire, intitulé : "Enseigner la programmation des calculatrices en classe de seconde : comment, pourquoi?" (*)

Une enquête menée au sein de trois classes révèle qu'il peut y avoir onze modèles différents de calculatrices sur une classe, et ces modèles ont des modes de fonctionnement différents. Comment inciter les élèves à la programmation de leur calculatrice sans y consacrer un temps excessif, malgré la diversité du matériel? Quels sont les enjeux de cet apprentissage?

Une autre enquête, auprès des professeurs cette fois, aborde trois thèmes : la place de la programmation et de la calculatrice programmable au lycée, le suivi de l'évolution du matériel, les méthodes d'enseignement de la programmation (en particulier l'emploi d'une fiche d'aide à la programmation). Pour la plupart des professeurs, savoir programmer sa machine est pour un élève "utile mais pas primordial" et intéressant seulement en filière scientifique, à partir de la Première tant comme outil de conjecture que de vérification. Du point de vue pédagogique quelques aspects positifs sont cités (par exemple entraînement à la logique et à la rigueur) mais de nombreux aspects négatifs sont évoqués : méconnaissance de la notion de valeur exacte, signification des opérations élémentaires, dégradation du niveau en calcul, etc...

Une seconde partie donne des éléments d'enseignement de la programmation et une troisième un scénario d'apprentissage. Retenons l'extrait suivant qui conclut cet intéressant Mémoire :

> L'état des lieux présenté en première partie montre que malgré les instructions officielles qui stipulent l'initiation à la programmation en classe de seconde, les professeurs ne consacrent peut-être pas un temps suffisant pour parvenir à initier tous les élèves à la programmation bien qu'ils reconnaissent l'utilité de la calculatrice programmable surtout dans les classes scientifiques. Comme l'a montré l'expérience initiale de l'un des auteurs bien des élèves ne parviennent pas à programmer si l'enseignant n'a pas recours à une séance systématique d'apprentissage.

(*) par MM. B. Daspet, B. Jung et Mlle V. Mariotti, mémoire suivi par M. J.-C. Rauscher. Ce mémoire, ainsi que d'autres, peuvent être consultés à la bibliothèque de l'I.R.E.M.

Pour répondre à cette difficulté, nous avons établi un scénario d'apprentissage reposant sur le concept de fiche d'aide à la programmation qui semble relativement efficace. Ainsi, une réponse est trouvée au problème posé par la diversité des modèles de calculatrice et des modes de fonctionnement. Si l'apprentissage de la programmation devait être approfondi, il serait éventuellement utile de convenir avec les élèves d'un "langage machine commun" (comme celui présenté dans la deuxième partie) afin de faciliter la communication - quoi que l'apprentissage de ce langage constituerait une charge supplémentaire de travail.

En préparation à ce scénario, nous avons mentionné des tâches intervenant lors de la programmation d'une calculatrice tant au niveau de l'élaboration de la séquence de calculs machine qu'au niveau de l'enregistrement de cette séquence. A cette occasion, on se rend compte que trois registres (ensemble de codes et de règles d'agencement de ces codes) rentrent en concurrence lors de l'élaboration de la séquence de calculs machine à savoir: le registre de l'écriture du calcul littéral; le registre de la logique du calcul papier-crayon; le registre du langage machine.

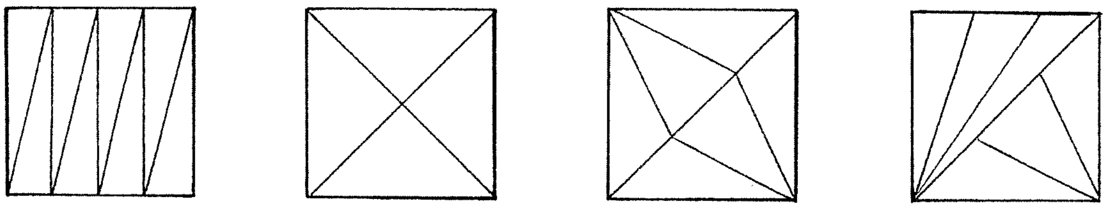
Lors des séances de travail avec nos classes, nous avons vérifié que les vraies difficultés relevaient de problèmes de conversion d'un registre à l'autre tant au niveau de l'élaboration de la séquence de calculs que de la conception du programme enregistré. A ce titre, l'apprentissage de la programmation est intéressant pour lui-même ne serait-ce qu'en tant qu'apprentissage à manier des structures formelles complémentaires. Et si, comme l'affirment, peut-être avec raison, certains enseignants, il y a avec l'outil électronique risque de "*vider l'enseignement des mathématiques de son contenu*", on ne peut pas affirmer que l'apprentissage de la programmation d'une calculatrice n'est pas formateur. Cet apprentissage est formateur pour des compétences de même nature que celles rencontrées en mathématiques et en français - et ce, dès le cycle 2 de l'enseignement primaire dit "*cycle des apprentissages fondamentaux*" - à savoir: être capable de convertir un ensemble de codes d'un registre dans un autre registre. En mathématiques, il s'agit, par exemple, du registre du langage naturel (compréhension d'un énoncé, démonstration), du registre de l'écriture du calcul littéral, du registre de la représentation figurale, du registre des tableaux... Depuis l'avénement des calculatrices s'est rajouté le registre du calcul machine.

PARTAGE D'UN CARRÉ EN TRIANGLES D'AIRES ÉGALES (*)

Boris BEKKER

Professeur à l'Ecole de Physique et Mathématique de Saint Pétersbourg

Il est facile de diviser un carré donné en un nombre pair arbitraire de triangles de même aire. On peut voir quelques exemples de subdivisions de cette sorte en figure 1.



Mais un carré peut-il être partagé en un nombre impair de triangles de même aire? Choisissons un système de coordonnées dans le plan, de telle sorte que les sommets du carré soient $O(0;0), K(1;0), L(1;1)$ et $M(0;1)$.

Dans [1], J. Thomas a démontré que le carré $OKLM$ ne peut pas être divisé en un nombre impair de triangles de même aire, avec la condition que les sommets aient des coordonnées rationnelles de dénominateurs impairs.

Dans [2], P. Monsky a amélioré considérablement le raisonnement de [1] et montré que la réponse à la question est toujours négative.

Récemment l'auteur de ce présent article a résolu un problème semblable dans le cas d'une dimension supérieure. Ici, cependant, nous nous limiterons au cas de la dimension 2.

Notons $S(P)$ l'aire d'un polygone P. Et rappelons que si P est un triangle de sommets $(x_A; y_A), (x_B; y_B)$ et $(x_C; y_C)$ alors :

$$(*) \qquad S(P) = \frac{1}{2}|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|.$$

Soit $OKLM$ le carré que nous devons diviser en triangles $T_1, \ldots, T_n$ avec $S(T_1) = \ldots = S(T_n) = \frac{1}{n}$. Notre but est de prouver que n est pair. A cette fin considérons d'abord certaines fonctions "inhabituelles" d'une variable réelle. Soit f une fonction qui est définie sur $\mathbb{R}$ et satisfait aux conditions suivantes :

(*) Conférence IREM de Strasbourg - Régionale APMEP d'Alsace donnée le 24 novembre 1993.

1) $f(x) \geq 0$ pour tout x,
2) $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
3) $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout x et tout y,
4) $f(x-y) \leq f(y)$ si $f(x) \leq f(y)$,
5) $f(x-y) = f(y)$ si $f(x) < f(y)$,
6) $f(\frac{1}{n}) > 1$ pour tout n pair, et $f(\frac{1}{n}) \leq 1$ pour tout n impair.

Ces conditions sont choisies de telle sorte que nous puissions calculer la valeur de $f(S(T_i))$ par la formule (*) et la comparer à $f(\frac{1}{n})$.

Remarquons que 3) implique que $f(1) = f(1.1) = [f(1)]^2$ et puisque $f(1) \neq 0$ nous avons $f(1) = 1$. Ensuite $1 = f(1) = f[(-1)^2] = [f(-1)]^2$ et, comme $f(-1) \geq 0$ d'après 1), nous avons $f(-1) = 1$. En outre, $f(-x) = f(-1.x) = f(-1)f(x) = f(x)$ pour tout x.

Maintenant choisissons une fonction f satisfaisant 1) à 6). A l'aide de cette fonction réalisons une partition de $\mathbb{R}^2$ en trois sous-ensembles de points de types respectifs A, B et C. Nous dirons que $(x;y)$ est du type A si $f(x) < 1$ et $f(y) < 1$; nous dirons que $(x;y)$ est du type B si $f(x) \geq 1$ et $f(x) \geq f(y)$; et enfin nous dirons que $(x;y)$ est du type C si $f(y) \geq 1$ et $f(x) < f(y)$.

Soient $(x_A;y_A), (x_B;y_B)$ et $(x_C;y_C)$ trois points de types A, B et C respectivement. Alors $f(x_B - x_A) = f(x_B), f(y_C - y_A) = f(y_C), f(x_C - x_A) < f(y_C)$ et $f(y_B - y_A) \leq f(x_B)$ (1).
Ainsi

$$f((x_B - x_A)(y_C - y_A)) = f(x_B - x_A)f(y_C - y_A) = f(x_B)f(y_C)$$

et

$$f((x_C - x_A)(y_B - y_A)) = f(x_C - x_A)f(y_B - y_A) < f(y_C)f(x_B)$$

en remarquant que $f(x_B) \neq 0$ et $f(y_C) \neq O$ car $f(x_B) \geq 1$ et $f(y_C) \geq 1$.
C'est pourquoi, si P est un triangle de sommets $(x_A;y_A), (x_B;y_B)$ et $(x_C);y_C)$ alors

$$(**) \qquad f(S(P)) = f(1/2)f(x_B)f(y_C) > 1.$$

(1) N.D.L.R. :
Un point A est tel que : $f(x_A) < 1$ et $f(y_A) < 1$.
Un point B est tel que : $f(x_B) \geq 1$ et $f(x_B) \geq f(y_B)$.
Un point C est tel que : $f(y_C) \geq$ et $f(x_C) < f(y_C)$.
Montrons qu'on a : $f(x_B - x_A) = f(x_B), f(y_C - y_A) = f(y_C), f(x_C - x_A) < f(y_C)$ et $f(y_B - y_A) \leq f(x_B)$.

a. $f(x_B - x_A) = f(x_A - x_B) = f(x_B)$ car $f(x_A) < f(x_B)$ et d'après 5)
b. $f(y_C - y_A) = f(y_A - y_C) = f(y_C)$ car $f(y_A) < f(y_C)$ et d'après 5)
c. si $f(x_C) \geq f(x_A)$ alors $f(x_C - x_A) = f(x_A - x_C) \leq f(x_C) < f(y_C)$ d'après 4) et d'après la définition des points C;
   si $f(x_C) < f(x_A)$ alors $f(x_C - x_A) = f(x_A) < 1 \leq f(y_C)$ d'après 5) et d'après les définitions des points A et C. Donc $f(x_C - x_A) < f(y_C)$.
d. si $f(y_A) < f(y_B)$ alors $f(y_B - y_A) = f(y_A - y_B) = f(y_B) \leq f(x_B)$ d'après 5) et d'après la définition des points B.
   si $f(y_A) \geq f(y_B)$ alors $f(y_B - y_A) \leq f(y_A) < 1 \leq f(x_B)$ d'après 4) et d'après les définitions des points A et B.
   Donc $f(y_B - y_A) \leq f(x_B)$.

En particulier $f(S(P)) \neq 0$, c'est-à-dire que $S(P) \neq 0$. Ceci signifie qu'aucune droite du plan ne contient simultanément des points des trois types.

Maintenant supposons qu'un certain triangle T_i ait un sommet de chaque type. Alors (**) implique que $f(S(T_i)) > 1$. Puisque $S(T_i) = \frac{1}{n}$, nous avons $f(1/n) > 1$ donc n est pair d'après 6).

Nous devons prouver qu'un tel triangle (ayant un sommet de chaque type) existe.

Nous dirons qu'un segment du plan est de type AB si l'une de ses extrémités est de type A et l'autre de type B. De même nous définissons des segments de type AC, AA, BC etc. La frontière de chaque T_i est l'union de "segments élémentaires" sans chevauchement : chacun de ces "segments élémentaires" joint deux sommets et ne contient pas d'autre sommet. Puisqu'aucune droite du plan ne contient des points de chacun des trois types, des segments élémentaires de type AB se trouvent seulement sur des segments de types AA, AB et BB. De plus un segment de type AA ou BB contient un nombre pair de segments élémentaires de type AB, et un segment de type AB contient un nombre impair de segments élémentaires de type AB. Maintenant il n'est pas difficile de voir que la frontière du carré $OKLM$ contient un nombre impair de segments élémentaires de type AB.

Supposons qu'il n'y ait pas de T_i ayant des sommets de chacun des trois types. Alors le nombre t_i de segments élémentaires de type AB sur la frontière de T_i est pair pour chaque i, et la somme $t_1 + \ldots + t_n$ est paire. D'autre part, un segment élémentaire de type AB est compté dans cette somme une fois s'il se trouve sur la frontière du carré $OKLM$, et deux fois s'il se trouve dans le carré. Ceci contredit le fait que la frontière du carré contienne un nombre impair de segments élémentaires de type AB.

Il reste à prouver qu'il existe une fonction satisfaisant 1) à 6). Nous devons définir $f(x)$ pour tout réel x. Tout d'abord, soit x un nombre rationnel. Si $x \neq 0$ nous pouvons écrire x sous la forme $x = 2^S \frac{m}{n}$, où m et n sont impairs. Et nous posons $f(x) = 1/2^S$ et $f(0) = 0$. Par exemple, $f(2) = 1/2, f(3) = 1, f(12) = 1/4, f(1/2) = 2$ et $f(1/5) = 1$.

Les conditions 1), 2) et 6) sont évidemment réalisées. Vérifions 3), 4) et 5). Soit $x \neq 0, y \neq 0$ et écrivons $= x = 2^{S_1}(m_1/n_1), y = 2^{S_2}(m_2/n_2)$ avec m_1, m_2, n_1 et n_2 impairs. Alors $xy = 2^{S_1+S_2}(m_1 m_2/n_1 n_2)$, d'où $f(xy) = (1/2^{S_1+S_2}) = f(x)f(y)$. Ainsi nous avons 3). Pour prouver 4) observons que, si $s_2 \leq s_1$, c'est-à-dire $f(x) = (1/2^{S_1}) \leq (1/2^{S_2}) = f(y)$, alors $f(x-y) \leq f(y)$. Et enfin, si $s_2 < s_1$ alors $f(x-y) = f(y)$, et nous avons 5). Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors les conditions 3) à 5) tombent de façon évidente.

Les fonctions définies dans l'ensemble des nombres rationnels et satisfaisant 1) à 6) jouent un rôle important dans la Théorie des nombres. Elles sont appelées "valeurs-absolues 2-adiques". Pour les détails voir [4]. Il est bien plus difficile de définir $f(x)$ pour un nombre irrationnel x; pour cette définition nous nous référons à [3].

Références

[1] J. Thomas. A dissection problem Math. Mag., 41 (1968), pp. 187-190.

[2] P. Monsky. On dividing a square into triangles. Amer. Math. Monthly, v. 77, n° 2, pp. 161-164.

[3] S. Lang. Algebra. Addison-Wesley, Reading, Mass., (1965), p. 299.

[4] B. Bekker - S. Vostokov - Yu-Ionin, 2-adic numbers, Kvant, n° 2, (1979), pp. 26-31.

Et pour complément à cet article voici l'un des exercices donné à l'épreuve du 17 mars 1994 de "Mathématiques sans Frontières" (compétition interclasses de 3ème et 2nde organisée en Alsace et à laquelle participent plusieurs pays).

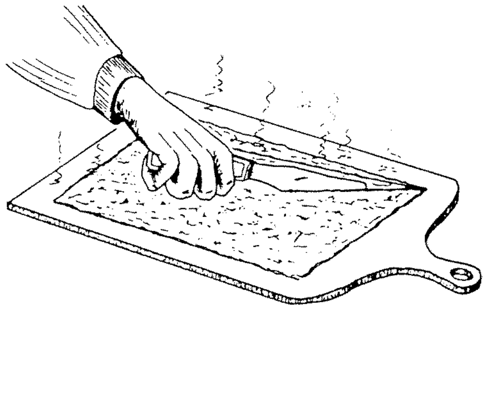
Exercice 8 — 5 Points

Tarte flambée

Après une longue séance de travail, sept professeurs de mathématiques ont décidé d'aller manger une tarte flambée.

Lorsque la tarte rectangulaire de 42 cm x 35 cm fut servie, on chargea l'un des convives de la couper équitablement en sept portions. Il s'en tira facilement par six coups de couteau rectilignes tous issus du même coin de la tarte.

Représenter cette solution sur la feuille-réponse: pour ce faire, tracer un rectangle ABCD de 8,4 cm x 7 cm que l'on partagera en sept morceaux d'aires égales par six segments de droites joignant le sommet A à des points de [BC] ou de [CD]. Donner une justification de la solution.



PROBLÈMES DE MODÉLISATION : LE SIDA

Paul GIRAULT

Strasbourg, U.F.R. de Mathématiques et d'Informatique

L'observation et l'étude des épidémies ont une longue histoire. Il en est de même d'ailleurs des modèles et des explications qu'elles ont suscités afin de justifier leur progrès et leurs causes. Rappelons que dans bien des cultures, et même en Europe avant l'invention des microbes ainsi que l'écrivait si joliment Marcel Pagnol, les épidémies comme les maladies étaient attribuées à l'action délétère d'esprits malfaisants ou de divinités mécontentes. Le SIDA, l'épidémie des années 1980 et probablement du vingtième siècle a même été présenté par beaucoup comme étant un châtiment... envoyé par Dieu... C'est pourquoi on n'en admirera que plus Daniel Bernoulli (1760) [2] : en effet, dans un article dont le titre fait tout le charme des écrits anciens, il est le premier à avoir proposé un modèle mathématique en épidémiologie. L'objet de sa modélisation (qui avait pour principal ingrédient une équation différentielle ordinaire non linéaire) était de constater l'effet de l'inoculation de la vaccine sur la propagation de la variole. C'est certainement la première fois qu'un modèle mathématique fut utilisé pour imposer les avantages pratiques d'un programme contrôlé de vaccination! Néanmoins, ce sont les travaux théoriques de Kermack et MacKendrick (1927, 1932, 1933) utilisant les données de la peste de Bombay de 1905 qui eurent une influence décisive dans le développement des modèles mathématiques en épidémiologie. De nos jours, la littérature sur le sujet est particulièrement abondante... Dans la suite, nous allons exposer succintement deux modèles simples de dynamiques de transmission du VIH inspirés des travaux d'Anderson et de ses collaborateurs (1986) afin d'allécher le lecteur aux problèmes de modélisation.

Le **virus de l'immunodéficience humaine** VIH conduit en général, mais pas toujours, au **syndrome de l'immunodéficience acquise** alias SIDA. Quand des anticorps au VIH sont détectés, le patient est infecté et dit être **séropositif**. Après la détection d'anticorps au VIH, il y a une période latente avant que le patient soit au dernier stade de la maladie, à savoir le SIDA. La durée de cette période dépend probablement des situations individuelles : elle n'est donc pas bien connue. Comme le montrent de nombreux documents, elle peut être de quelques mois à plusieurs années. En outre, la proportion de la population qui est séropositive est mal cernée. En fait, les paramètres épidémiologiques de base associés à la progression de la maladie sont encore mal connus. Ceci est dû en grande part aux nombreux problèmes sociaux créés par le rassemblement des données sur le nombre de personnes atteintes du VIH. Pourtant il est invraissemblable de croire que l'épidémie sera contenue si l'information n'est pas disponible dans un proche avenir. Rappelons aussi que, dans les pays développés, le SIDA est associé aux communautés homosexuelles alors que dans les autres contrées c'est l'extension hétérosexuelle qui prévaut. Toutefois, comme il appert de nombreux signes, le SIDA progresse nettement dans les communautés hétérosexuelles des pays développés. Pour finir sur cette présentation rapide du SIDA, il faut bien constater que la virulence et l'extension rapide de l'épidémie sont alarmantes.

Certains pronostiquent que ce sera une sévère épidémie mondiale, on parle alors de pandémie, dès la fin de ce siècle, comparable à la Peste Noire de 1347-1350 qui décima environ 25 % de la population européenne. Pour une plus ample information, on pourra consulter les ouvrages techniques [3], [4] et [5].

I. Un premier modèle [1]

Comme on l'a vu précédemment, un problème majeur avec le SIDA est la durée variable de la période d'incubation entre le moment où le patient est diagnostiqué comme étant séropositif et le moment où il montre les symptomes du SIDA. Ceci a d'ailleurs d'importantes conséquences dans la propagation du virus. Par conséquent, le premier modèle que nous allons considérer est consacré à l'évolution de la maladie dans une population qui, infectée par VIH, voit tous ses membres atteints du SIDA.

Considérons une population dont tous les individus sont infectés par le VIH au temps $t = 0$. On partitionne cette population en deux sous-ensembles et désignons par :
. $y(t)$ la fraction de la population totale qui a le SIDA au temps t,
. $x(t)$ la fraction de la population totale qui est séropositive mais n'a pas encore le SIDA.
Par conséquent, on a $x(t) = 1 - y(t)$. Soit maintenant $v(t)$ le taux de conversion de l'infection au SIDA. On obtient alors un modèle simple pour les dynamiques de ces deux populations, à savoir :

$$\frac{dx}{dt} = -v(t)x, \quad \frac{dy}{dt} = v(t)x, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

où $x(t) + y(t) = 1$.

On notera que ce modèle suppose que tous les individus infectés par le VIH auront le SIDA, ce qui n'est pas nécessairement le cas.

Il reste maintenant à caractériser la fonction v. Pour cela, si on suppose que le système immunitaire du patient, relativement aux maladies opportunes comme le cancer, est progressivement altéré depuis le début de l'infection, alors il est raisonnable de penser que v est une fonction croissante. Par conséquent, choisissons une fonction très simple, à savoir :

$$v(t) = at, \quad a > 0.$$

Après un calcul très simple, on obtient :

$$x(t) = \exp(-\frac{at^2}{2}), \quad y(t) = 1 - \exp(-\frac{at^2}{2}).$$

Peterman, Drotman et Curran (1985) ont présenté des données au sujet de 194 cas de SIDA associé à des transfusions sanguines. Les solutions précédentes furent ensuite appliquées à ces données, le plus difficile étant de déterminer un ajustement correct du paramètre a. La valeur $a = 0,237$ par an a été retenue. La courbe au tracé continu de la figure 1 montre le résultat que l'on obtient si on porte en ordonnée le taux de croissance dy/dt (en patients du SIDA) et en abscisse le temps (en années) écoulé depuis l'infection. La comparaison ainsi obtenue entre la théorie et les données peut être considérée comme assez bonne.

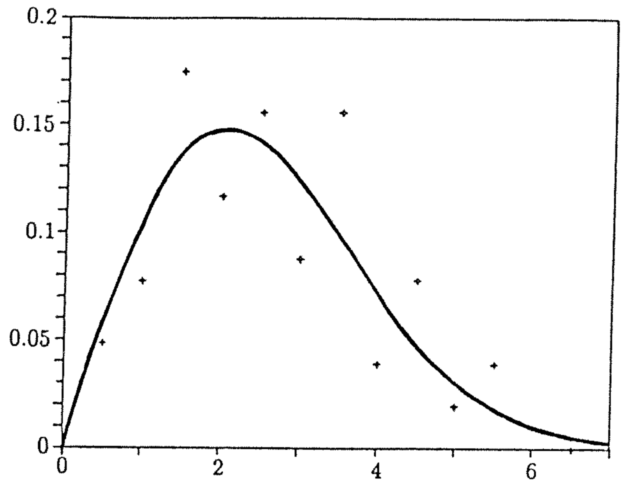


Figure 1

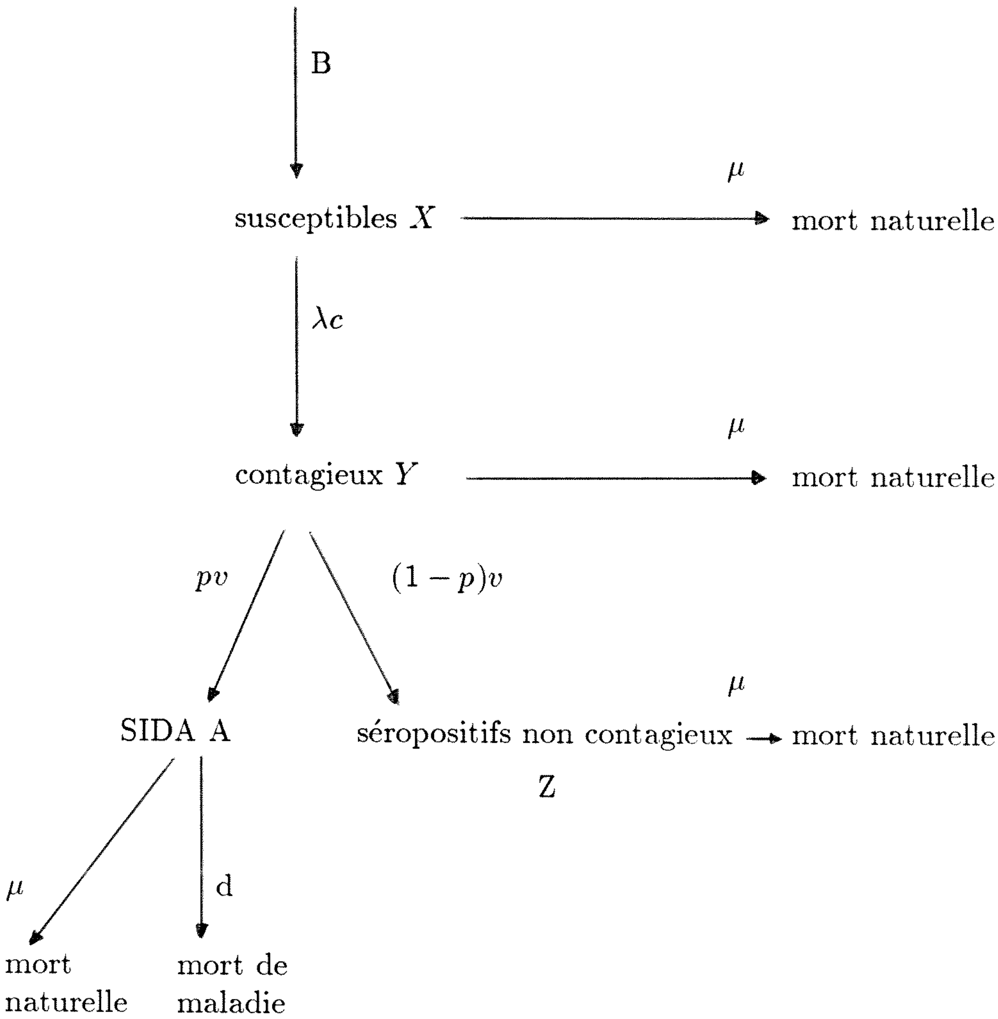
II. Un modèle d'épidémie [1]

L'objet de nos préoccupations dans ce paragraphe est de modéliser une épidémie de SIDA dans une population d'homosexuels.

Considérons une population masculine d'homosexuels d'effectif $N(t)$ au temps t. Désignons par
. $X(t)$ le nombre de susceptibles d'être atteints du SIDA,
. $Y(t)$ le nombre d'hommes contagieux (ou infectés),
. $Z(t)$ le nombre de séropositifs non contagieux,
. $A(t)$ le nombre de patients ayant le SIDA.

On suppose en outre que les susceptibles meurent naturellement au taux μ et que les malades du SIDA meurent au taux d. Indiquons en passant qu'une valeur typique de $1/d$ est de 9 à 12 mois. Evidemment les données précédentes ne sont pas suffisantes pour mettre en œuvre notre modélisation. Pour cela, aidons-nous du diagramme de la page suivante qui indique la "carrière" des individus.

Il ne reste plus qu'à supposer la population uniformément mêlée. Alors un modèle fondé sur le diagramme est donné par la formule qui lui succède :



$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{dX}{dt} = B - \mu X - \lambda c X, & (1)\\
\dfrac{dY}{dt} = \lambda c X - (v+\mu)Y, & (2)\\
\dfrac{dZ}{dt} = (1-p)vY - \mu Z, & (3)\\
\dfrac{dA}{dt} = pvY - (d+\mu)A, & (4)\\
N(t) = X(t) + Y(t) + Z(t) + A(t). & (5)
\end{array}
\right.
$$

Précisons maintenant la signification des différents paramètres introduits dans le diagramme (ou le système différentiel) précédent :
. B est le taux d'immigration d'hommes susceptibles dans la population,
. μ est le taux de décès naturel,
. λ est la probabilité d'acquérir l'infection à partir d'un partenaire choisi au hasard.

On a $\lambda = \frac{\beta Y}{N} \simeq \frac{\beta Y}{X+Y+Z}$ où β est la probabilité de transmission.
. c est le nombre de partenaires sexuels,
. d est le taux de décès consécutif au SIDA,
. p est la proportion de séropositifs contagieux,
. v est le taux de conversion de l'infection vers le SIDA : on le supposera constant.
Avec v constant, $1/v$ est le temps d'incubation moyen de la maladie.

On a donc obtenu un système différentiel d'ordre 4 non linéaire qu'il n'est pas question de résoudre puisque c'est une chose que l'on ne sait pas faire. On va plutôt en faire une étude qualitative qui sera tout aussi suggestive.

Après avoir remarqué que $N(t) = X(t) + Y(t) + Z(t) + A(t)$ n'est pas constant, si on additionne (1), (2), (3), (4), on obtient :

$$\frac{dN}{dt} = B - \mu N - dA. \qquad (6)$$

On constate que s'il n'y avait pas de SIDA (i.e. $A = 0$), l'état stationnaire de la population serait $N^* = \frac{B}{\mu}$.

A la vue du système, la question qui se pose est de savoir quand une épidémie se développe. La traduction mathématique se fait alors de la façon suivante : une épidémie apparaît si la fonction Y qui dénombre le nombre d'individus infectés est croissante dans un petit voisinage de $t = 0$. Par conséquent, si dans (2), au temps $t = 0$, un individu infecté est introduit dans une population de susceptibles sans autre infection, on a initialement $X \simeq N$ et pour un temps t proche de 0

$$\frac{dY}{dt} \simeq (\beta c - v - \mu)Y \simeq v(R_0 - 1)Y. \qquad (7)$$

On notera que la dernière égalité provient du fait que le temps d'incubation moyen $1/v$ est beaucoup plus court que l'espérance de vie $1/\mu$ d'un susceptible, i. e $\mu << v$. Eh bien, on en déduit le seuil approximatif pour qu'une épidémie se déclenche, à savoir :

$$R_0 \simeq \frac{\beta c}{v} > 1. \qquad (8)$$

On constate que le nombre R_0 appelé le taux basique de reproduction de la maladie ne dépend que du nombre de partenaires sexuels c, de la probabilité de transmission β et du temps d'incubation moyen de la maladie $1/v$.

Quand on contemple un système différentiel, une des premières recherches à effectuer, ce sont ses états stationnaires (1). Dans le cas qui nous préoccupe, on

(1) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine de $\mathbb{R}^n$ et v un champ de vecteurs sur U. Les états stationnaires du système différentiel

$$\dot{x} = v(x),$$

sont les vecteurs réels x^* tels que $v(x^*) = 0$.

trouve un unique état stationnaire défini par :

$$\begin{gathered}
X^* = \frac{(v+\mu)N^*}{c\beta}, \qquad Y^* = \frac{(d+\mu)(\beta-\mu N^*)}{pvd} \\
Z^* = \frac{(1-p)(d+\mu)(\beta-\mu N^*)}{pd\mu}, \qquad A^* = \frac{\beta-\mu N^*}{d} \\
N^* = \frac{B\beta[\mu(v+d+\mu)+vd(1-p)]}{[v+\mu][\beta(d+\mu)-pv]}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Ainsi, si une épidémie se développe, le système (1) évolue vers l'état stationnaire donné par (X^*, Y^*, Z^*, A^*). Plus précisément, on peut montrer que si on linéarise le système différentiel au voisinage de son état stationnaire, (X, Y, Z, A) tend vers (X^*, Y^*, Z^*, A^*) à la manière d'oscillations amorties avec une période d'oscillation donnée en fonction des paramètres du modèle. Avec des valeurs très courantes des paramètres, la période des éruptions épidémiques est de l'ordre de 30 à 40 ans.

On peut obtenir quelques informations intéressantes à partir d'une analyse du système concernant le début de l'épidémie. En effet, comme la population consiste essentiellement en susceptibles $X \simeq N$, l'équation donnant la croissance de la population de séropositifs Y est alors facile à obtenir. De (7), on déduit :

$$Y(t) = Y(0)\exp[v(R_0-1)t], \tag{10}$$

où $Y(0)$ est le nombre d'individus infectés introduits dans la population susceptible. Rappelons que si $R_0 > 1$, on est en présence d'une épidémie. Il est alors particulièrement intéressant de déterminer le **temps de doublement** de la population infectée, c'est-à-dire le temps t_d tel que $Y(t_d) = 2Y(0)$. On trouve facilement :

$$t_d = \frac{\ln 2}{r} = \frac{\ln 2}{v(R_0-1)},$$

où $r = v(R_0 - 1)$ est appelé le taux de croissance intrinsèque. On voit alors que plus R_0 est grand, plus le temps de doublement est court.
Si on susbtitue (10) dans (3), on obtient :

$$\frac{dA}{dt} = pvY(0)\exp(rt) - (d+\mu)A.$$

Comme on peut supposer qu'au début de l'épidémie aucun patient n'a le SIDA, donc que $A(0) = 0$, alors

$$A(t) = pvY(0)\frac{\exp(rt) - \exp[(d+\mu)t]}{r+d+\mu}. \tag{12}$$

Il reste à fournir une estimation des différents paramètres. Par exemple, Anderson et May ont obtenu $r = 0,88$ par an : pour cela ils ont utilisé des données concernant une population masculine composée d'homosexuels et de bisexuels de 6875 individus qui fréquentaient une clinique de San Francisco de 1978 à 1985. Plus généralement une estimation grossière des différents paramètres donnée à titre indicatif par les mêmes auteurs est :

$R_0 = 3$ à 4
$d + \mu \simeq d = 1$ à 1,33 par an
$p = 10\%$ à 30 % (probablement plus)
$v \simeq 0,22$ par an
$c = 2$ à 6 partenaires par mois.

Avec ces données, le temps t_d de doublement pour la classe Y est d'environ 9 mois. Des simulations numériques du système différentiel (1) - (4) donnent un bon aperçu du développement de l'épidémie après l'introduction du VIH dans une population masculine d'homosexuels susceptibles. La figure 2 montre une telle simulation : le modèle prédit que le nombre de séropositifs atteint un maximum 12 à 15 ans après introduction du VIH dans la population.

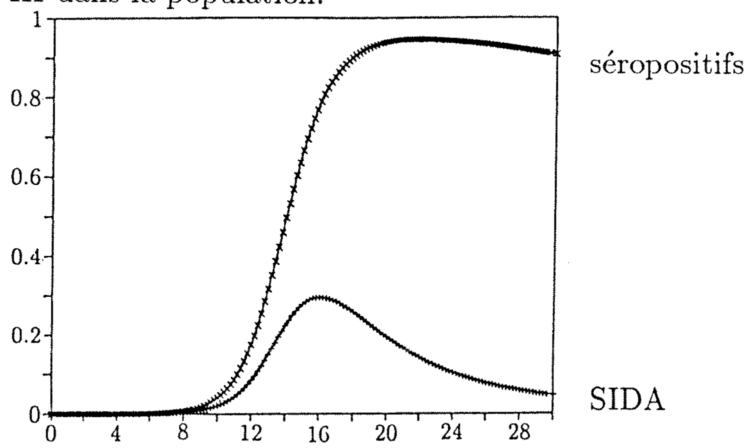


Figure 2

Les données numériques qui ont été employées pour cette simulation numérique sont toujours tirées des travaux d'Anderson et de ses collaborateurs [1]. Nous conseillons vivement le lecteur intéressé de se reporter à leur lecture pour le détail des calculs. Voici ces données :

$A(0) = Z(0) = 0$
$X(0) + Y(0) = N(0) = 100.000$
$B = 13333,3$ par an
$v = 0,2$ par an
$\mu = \frac{1}{32}$ par an
$d = 1$ par an
$p = 0,3$
$R_0 \simeq \frac{\beta c}{v} = 5,15.$

Le graphique montre la proportion des séropositifs et la proportion de ceux qui ont le SIDA reportées en ordonnée; en abscisse le temps est compté en années. On comparera la courbe de la population atteinte du SIDA avec celle donnée figure 1.

Conclusion finale

Malgré la simplicité des modèles, les résultats sont conformes aux observations concernant les populations masculines d'homosexuels. Evidemment on en a proposés bien d'autres. D'ailleurs, on trouvera une revue des modèles mathématiques de dynamiques de transmission du VIH les plus usuels répertoriés par Isham (1988) [6]. Avec l'accumulation de plus de données et de plus d'informations sur l'épidémie, des modèles plus sophistiqués seront nécessaires. Comme l'épidémie se déplace vers la communauté hétérosexuelle, de nouveaux modèles ont été batis qui tiennent compte de ce nouvel état des faits. Pour finir, des estimations mêmes grossières du temps de doublement sont en eux-mêmes du plus haut intérêt.

Bibliographie sommaire

[1] Anderson R.M., Medley G.F, May R.M., Johnson A.M.– *A preliminary study of the transmission dynamics of the human immunodeficiency virus (HIV), the causitive agent of AIDS.* IMA J. Maths. Appl. in Medecine and Biol. 3, 229-263 (1986).

[2] Bernoulli D.– *Essai d'une nouvelle analyse causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir.* Histoire de l'Acad. Roy. Sci. (Paris) avec Mém. des Math. et Phys., Mém., 1-45 (1760).

[3] Cassuto J.P., Pesce A., Quaranta J.F. : *Le SIDA*, coll. "Que sais-je?" n° 2332, P.U.F.

[4] Cassuto J.P., Pesce A., Quaranta J.F. : *SIDA et Infection à VIH*, Masson, Paris (1992).

[5] Hirschel B. : *Le SIDA. Guide du praticien, diagnostic, traitement, prise en charge..*– Ed. Médecine et Hygiène, Genève (1993).

[6] Isham V. : *Mathematical modelling of the transmission dynamics of HIV infection and AIDS : a review.*– J. Roy. Statist. Soc., A 151, 5-30 (1988).

RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 1994

Nous avons publié dans le n° 75 de *'L'Ouvert'* les énoncés des exercices proposés au Rallye mathématique d'Alsace au printemps 94. Nous vous donnons ci-dessous les solutions proposées dans le rapport de ce Rallye. Des prix ont été décernés à 32 élèves de Terminale et à 33 élèves de Première. Ce sont Vincent Bornert, David Gerber, Luc Maurer et Julien Pottecher qui ont eu un premier prix en Terminale et Dominique Stuzmann, Damien Bach, Benédicte Moritz, Philippe Ulrich, Emmanuel Wild, Youssef Alouahabj et Serge Himy qui ont eu un premier prix en Première. Bravo à tous!

RALLYE DE PREMIERE 1994

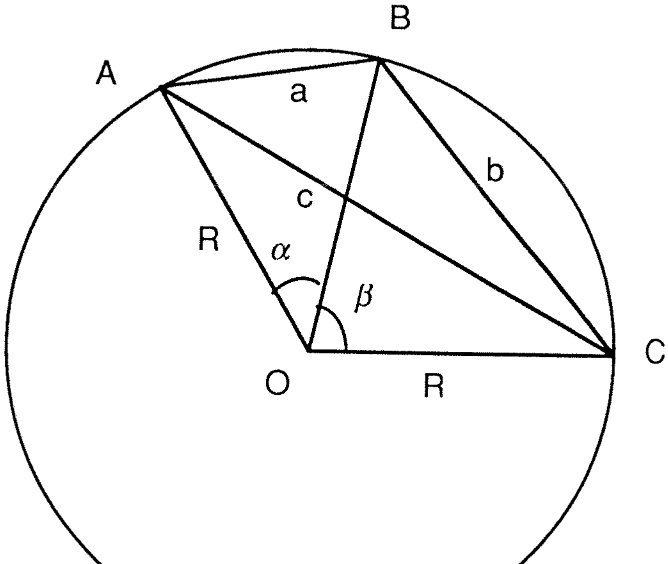
1e exercice

Un hexagone inscrit dans un cercle a 3 côtés de longueur a et 3 côtés de longueur b. Quel est le rayon du cercle ?

SOLUTION :

Il n'y a que 3 ordres de côtés possibles :
* a, a, a, b, b, b
* a, a, b, b, a, b (dans les 2 sens)
* a, b, a, b, a, b

Et à chaque fois, on pourra trouver deux côtés de longueurs a et b consécutifs. On aura donc toujours la figure ci-contre :



L' hexagone sera donc composé de 3 triangles isocèles de base a et de 3 triangles isocèles de base b, les côtés égaux valant R.
Si on appelle α l'angle au sommet du triangle de base a et β l'angle au sommet du triangle de base b on aura $3\alpha + 3\beta = 360°$
Donc on en déduit que $\alpha + \beta = 120°$

Dans le triangle OAC on aura donc

$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \times OA \times OC \times \cos(120°)$

$c^2 = R^2 + R^2 - 2 \times R \times R \times (-\frac{1}{2})$

$\boxed{c^2 = 3R^2}$

D'autre part les triangles OAB et OBC sont isocèles donc

$\widehat{ABO} = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{CBO} = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}$

Donc $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{CBO} = 90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2}$

$= 180° - \frac{120°}{2} = 120°$

Puis en appliquant la même relation on obtient

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(120°) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c^2 = a^2 + b^2 + ab}$

On en déduit $3R^2 = a^2 + ab + b^2$

c'est-à-dire $\boxed{R = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}}$

2e exercice

Alice, Betty et Carole ont subi une même série de tests notés de 1 à 10. Le professeur de Mathématiques leur annonce que l'ensemble de toutes les notes enregistrées comporte trois valeurs différentes apparaissant toutes le même nombre de fois. Le professeur de Physique ajoute que Betty est la première en Physique. En consultant leur Minitel, elles apprennent leurs totaux respectifs :

Alice : 20
Betty : 10
Carole : 9

Qui est première en Mathématiques ?

SOLUTION :

- Appelons x, y, z les 3 valeurs des différentes notes avec $x > y > z \geq 1$. Soit N le nombre de fois qu'apparait chaque note ; on a :

$N(x+y+z) = 20+10+9 \Leftrightarrow N(x+y+z) = 39$

. Les diviseurs de 39 sont 1 ; 3 ; 13 ; 39 .

. On a $x + y + z \geq 3+2+1 = 6$

Il y a seulement deux possibilités $N = 3$ et $x + y + z = 13$
ou $N = 1$ et $x + y + z = 39$.

Cette dernière possibilité ne convient pas car $x + y + z \leq 10 + 9 + 8 = 27$.

On a donc forcément $\underline{N = 3 \text{ et } x + y + z = 13.}$

- Cherchons maintenant les différentes manières d'obtenir $x + y + z = 13$.

On a : $13 = 10 + 2 + 1 = 9 + 3 + 1 = 8 + 4 + 1 = 8 + 3 + 2$
$= 7 + 5 + 1 = 7 + 4 + 2 = 6 + 5 + 2 = 6 + 4 + 3$
Puis procédons par élimination, en enlevant les cas où on ne peut pas obtenir un total de 20 avec 3 notes.

Avec $\{1;2;10\}$: • $10 + 10 + 10 = 30$ • $10 + 10 + 2 = 22$ • $10 + 10 + 1 = 21$
• les autres sont inférieurs à $10 + 2 + 2 = 14 < 20$

Avec $\{1;3;9\}$: • on ne peut avoir 20 en additionnant 3 nombres impairs

Avec $\{1;5;7\}$: • même raison

Avec $\{2;3;8\}$: • $8 + 8 + 8 = 24$
• les autres sont inférieurs à $8 + 8 + 3 = 19 < 20$

Avec $\{2;4;7\}$: • $7 + 7 + 7 = 21$
• les autres sont inférieurs à $7 + 7 + 4 = 18 < 20$

Avec $\{2;5;6\}$
et $\{3;4;6\}$: • le total est toujours inférieur à $6 + 6 + 6 = 18 < 20$

* La seule possibilité qui reste est $\{1;4;8\}$ et
la seule manière d'avoir 20 est $8 + 8 + 4$
la seule manière d'avoir 10 est $8 + 1 + 1$
la seule manière d'avoir 9 est $4 + 4 + 1$

* On a donc les notes suivantes :

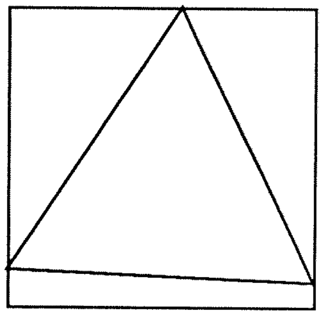
Alice :	8 ; 8 ; 4
Betty :	8 ; 1 ; 1
Carole :	4 ; 4 ; 1

On sait que Betty est première en Physique ; la note 1 ne lui permet pas d'être première car Alice a plus de 1 dans les trois tests. Betty a donc 8 en Physique et elle est **la** première donc Alice n'a pas 8 et elle ne peut avoir que 4 en Physique. Alice a donc 8 dans les 2 autres matières (dont les Mathématiques) et Betty et Carole n'ont pas 8 dans ces matières.

Conclusion : Alice est la première en Mathématiques

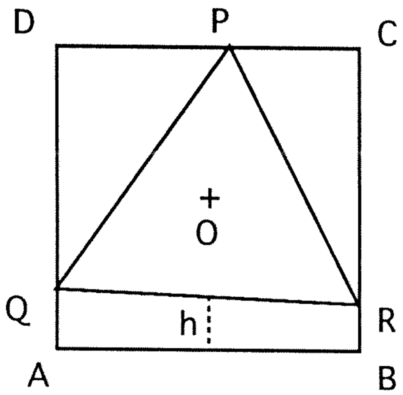
3e exercice

Un triangle dont tous les côtés sont de longueur strictement supérieure à 1 est inscrit dans un carré de côté 1. Montrez que le centre du carré est à l'intérieur du triangle.



SOLUTION :

Deux sommets du triangle ne peuvent être sur un même côté du carré (sinon le côté du triangle est de longueur inférieure ou égale à 1). Les sommets sont donc sur 3 côtés distincts du carré, et en mettant en bas le côté du carré sur lequel il n'y a pas de sommet du triangle, on obtient la figure suivante :



. Le centre O du carré est à l'intérieur du triangle si et seulement si O est au-dessus de (QR). En effet O sera toujours en-dessous de (PR) car O ∈ (DB) qui est en-dessous de (PR) et O sera toujours en-dessous de (PQ) car O ∈ (AC) qui est en-dessous de (QP) à cause de la disposition des points.

. Soit h la longueur du segment joignant le milieu de [AB] au milieu de [QR].

. Le point O est au-dessus de (QR) se traduit par $h < \frac{1}{2}$, or $h = \frac{1}{2}(AQ + BR)$, donc il faut prouver que $AQ + BR < 1$.

. On sait que $1 < PQ$ et $PQ \leq PD + DQ$ (inégalité triangulaire) et que $1 < PR$ et $PR \leq PC + CR$ (inégalité triangulaire) on en déduit PD + DQ + PC + CR > 2

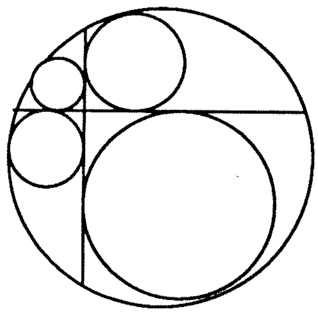
$$\begin{aligned} PD + DQ + PC + CR > 2 &\Leftrightarrow CD + DQ + CR > 2 \\ &\Leftrightarrow DQ + CR > 1 \qquad \text{(car } CD = 1\text{)} \\ &\Leftrightarrow (1-AQ) + (1-BR) > 1 \\ &\Leftrightarrow 1 > AQ + BR \end{aligned}$$

Conclusion :

Le point O est nécessairement à l'intérieur du triangle.

RALLYE DE TERMINALE 1994

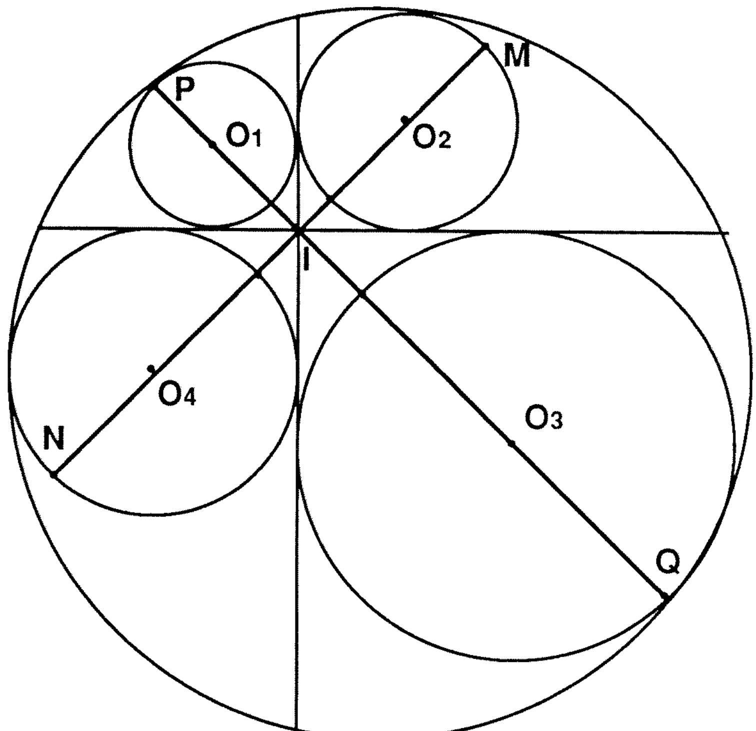
1e exercice



La construction du Tramway de Strasbourg a nécessité d'enterrer 4 câbles. Une des solutions techniques envisagées a été de choisir une gaine de diamètre intérieur D compartimentée par deux parois perpendiculaires, les câbles étant collés aux deux parois. Montrer que la somme des diamètres des 4 câbles est inférieure à $4(\sqrt{2}-1)D$.

SOLUTION :

Si on appelle I le point d'intersection des parois et O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des cercles représentant les 4 câbles, on a la figure ci-contre :



Les petits cercles étant tangents aux parois, les droites $(I\,O_1)$, $(I\,O_2)$, $(I\,O_3)$ et $(I\,O_4)$ sont les bissectrices des angles droits et on a à chaque fois des angles de 45°. On en déduit ainsi que I, O_1, O_3 sont alignés et I, O_2, O_4 sont alignés.

. La droite $(O_2\,O_4)$ recoupe les 2 petits cercles en M et N et on a

$$MN = M\,O_2 + O_2\,I + I\,O_4 + O_4\,N$$

on a $O_2I = \dfrac{R_2}{\cos 45°} = \sqrt{2}\,R_2$ et $O_4I = \dfrac{R_4}{\cos 45°} = \sqrt{2}\ R_4$

donc $MN \ = \ R_2 + \sqrt{2}\,R_2 + \sqrt{2}\,R_4 + R_4 = (1+\sqrt{2})(R_2 + R_4)$

D'autre part $MN \leq d$ car c'est un segment qui est à l'intérieur du cercle, on a donc

$$(1+\sqrt{2})(R_2 + R_4) \leq d$$

. On aura de même la droite $(O_1\,O_3)$ qui recoupera les petits cercles en P et Q et

$$PQ \ = \ (1+\sqrt{2})(R_1 + R_3) \leq d$$

.En additionnant les deux inégalités on aura :

$$\begin{aligned}
&(1+\sqrt{2})(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \leq d \\
\Leftrightarrow\ &(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \ \leq \ \frac{2d}{1+\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ &\quad d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \quad \leq \ \frac{4d}{1+\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ &\quad d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \quad \leq \ 4(\sqrt{2}-1)d
\end{aligned}$$

2e exercice

Déterminez les entiers naturels x, y, z tels que :

$$x^{(y^z)}y^{(z^x)}z^{(x^y)} = 1994^{1994}xyz$$

SOLUTION :

* Si l'un des nombres x, y ou z est nul l'égalité sera vérifiée (0 = 0), mais il ne doit pas y avoir 2 nombres nuls sinon l'équation n'est pas définie (0^0).

* Si x = 1, on obtient $y^z\ z = 1994^{\ 1994}\ y\ z$

$$\Leftrightarrow y^{\ z-1} = 1994^{\ 1994} \qquad (\text{si } z \neq 0)$$

Or 1994 = 2 x 997

On peut dont avoir $z - 1 = 1$ ou 2 ou 997 ou 1994

$z = 2$ ou 3 ou 998 ou 1995

Ce qui nous donne
$$\begin{aligned} z &= 2 \Rightarrow y = 1994^{1994} \\ z &= 3 \Rightarrow y = 1994^{997} \\ z &= 998 \Rightarrow y = 1994^{2} \\ z &= 1995 \Rightarrow y = 1994 \end{aligned}$$

On obtient donc 4 solutions et on refait de même lorsque $y = 1$ ou $z = 1$(permutation circulaire)

* Si $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$ alors $x^{(y^z-1)}\, y^{(z^x-1)}\, z^{(x^y-1)} = 1994^{1994}$

$$\Leftrightarrow x^{(y^z-1)}\, y^{(z^x-1)}\, z^{(x^y-1)} = 2^{1994} \times 997^{1994}$$

Donc l'un des 3 nombres x, y ou z est forcément divisible par 997. Si c'est y, alors $x^y - 1 \geq 2^{997} - 1$ (car $x \geq 2$) et $z^{(x^y-1)} \geq 2^{(2^{997}-1)}$

or $\ln(1994^{1994}) = 1994 \ln 1994 \approx 15150$

et on aura :

$\ln[x^{(y^z-1)}\, y^{(z^x-1)}\, z^{(x^y-1)}] \geq \ln 2^{(2^{997}-1)}$
qui est très nettement supérieur à 15 150

On en déduit que les 3 nombres ne peuvent pas tous être supérieurs ou égaux à 2 et que l'un vaut forcément 0 ou 1 (cas que l'on a déjà traité).

Conclusion :

$S = \{ (1; 1994^{1994}; 2) ; (1; 1994^{997}; 3) ; (1; 1994^2; 998) ; (1 ; 1994; 1995) ;$

$(2; 1 ; 1994^{1994}) ; (3 ; 1 ; 1994^{997}) ; (998 ; 1 , 1994^2) ; (1995 ; 1 ; 1994) ;$

$(1994^{1994} ; 2; 1) ; (1994^{997} ; 3 ; 1) ; (1994^2 ; 998 ; 1) ; (1994 ; 1995 ; 1) \}$

$\cup \{0\} \times \mathbb{N}^{*2} \cup \mathbb{N}^* \times \{0\} \times \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}^{*2} \times \{0\}$

3e exercice

Madame Lacraie, professeur de Mathématiques, enseigne dans deux classes de même niveau ayant chacune deux heures de Mathématiques par semaine. La classe A a une heure le lundi et une heure le jeudi. La classe B a une heure le mardi et une heure le vendredi. Normalement Madame Lacraie traite un paragraphe par heure, mais lorsqu'elle refait un cours pour la deuxième fois, elle va deux fois plus vite. Au bout de dix semaines de classe combien de paragraphes auront été traités dans chaque classe ?

SOLUTION :

. Dans chaque classe Madame Lacraie traite d'abord à vitesse double la partie de cours qu'elle a faite une première fois dans l'autre classe, puis elle traite à vitesse normale une nouvelle partie de cours pendant le temps qu'il lui reste. La quantité de cours faite à vitesse double correspond à la quantité faite à vitesse normale pendant l'heure précédente dans l'autre classe.

. Si on appelle u_n la quantité de nouveau cours traitée par Mme Lacraie à la $n^{\text{ième}}$ heure on a :

$$u_n = 1 - \frac{u_{n-1}}{2}$$

(la quantité u_{n-1} est traitée à vitesse double, donc le temps restant est $1 - \frac{u_{n-1}}{2}$)

Et on a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$

. On peut programmer la calculatrice pour calculer les premiers termes :

$u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{3}{4}$; $u_4 = \frac{5}{8}$; etc...

On constate en continuant les calculs que u_n s'approche de 0,666 ... c'est-à-dire $\frac{2}{3}$.

. Considérons alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ on aura

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = (1 - \frac{u_n}{2} - \frac{2}{3})$$

$$= \frac{1}{2}\ (\frac{2}{3} - u_n) = -\frac{1}{2}\ (u_n - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{2}\ v_n$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $(-\frac{1}{2})$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$ et par conséquent $v_n = -\frac{2}{3} \times (-\frac{1}{2})^n$ et $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\ (1 - (-\frac{1}{2})^n)$

. Cherchons maintenant la quantité totale de cours traité par Mme Lacraie ;
dans la classe A : à sa 1ère heure, elle traite u_1

à sa 3ème heure, elle traite $u_2 + u_3$

à sa 5ème heure, elle traite $u_4 + u_5$

à sa (2n + 1) ème heure, elle traite $u_{2n} + u_{2n+1}$

Au bout de 10 semaines, sa dernière heure dans la classe A sera sa 39ème heure, elle aura donc traité :
$(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{38} + u_{39})$ paragraphes dans la classe A

Dans la classe B : à sa 2ème heure, elle traite $u_1 + u_2$

à sa 4ème heure, elle traite $u_3 + u_4$

à sa 40ème heure, elle traite $u_{39} + u_{40}$

Au bout de 10 semaines, elle aura donc traité :

$(u_1 + u_2 + ... + u_{39} + u_{40})$ paragraphes.

$$\sum_{k=1}^{39} u_k = \sum_{k=1}^{39}\left(\frac{2}{3} + v_k\right) = 39 \times \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{39} v_k = 26 + v_1 \sum_{k=1}^{39}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 26 + \frac{1}{3}\,\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{39}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 26 + \frac{1}{3}\,\frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{39}}{\frac{3}{2}} = 26 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9 \times 2^{38}}$$

$$\approx 26{,}222$$

$$\sum_{k=1}^{40} u_k = \sum_{k=1}^{40}\left(\frac{2}{3} + v_k\right) = 40 \times \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{40} v_k = 26 + \frac{2}{3} + v_1 \sum_{k=0}^{39}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 26 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{40}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 26 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{40}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= 26 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9 \times 2^{39}} \approx 26{,}888$$

Conclusion : Dans la classe A : $26 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9 \times 2^{38}} \approx 26{,}222$

Dans la classe B : $26 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9 \times 2^{39}} \approx 26{,}889$

HEXAGONES DU RALLYE DE PREMIÈRE (*)

Pierre RENFER

L'énoncé n'imposait pas la convexité de l'hexagone. Si l'on renonce à cette hypothèse implicite, de nombreux cas peuvent se présenter.

Si l'on parcourt l'hexagone à partir d'un sommet pour y revenir, en suivant les arêtes successives, on décrit six angles au centre orientés, dont trois de mesure α ou $-\alpha$ et trois de mesure β ou $-\beta$. On choisit les mesures d'angles dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. Quitte à changer le sens de parcours, on peut supposer positive la somme des six angles. Cette somme est alors 0 ou 2π ou 4π.

Cas A : $3\alpha + 3\beta = 2\pi$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

ordre **A1** : $\alpha,\beta,\alpha,\beta,\alpha,\beta$

ordre **A2** : $\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta$ $\qquad R^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + ab}{3}$

ordre **A3** : $\alpha,\alpha,\beta,\beta,\alpha,\beta$

Cas B : $3\alpha + 3\beta = 2\pi$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$

ordre **B1** : $\alpha,\beta,\alpha,\beta,\alpha,\beta$

ordre **B2** : $\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta$ $\qquad R^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - ab}{3}$

ordre **B3** : $\alpha,\alpha,\beta,\beta,\alpha,\beta$

Cas C : $3\alpha + 3\beta = 4\pi$

ordre **C1** : $\alpha,\beta,\alpha,\beta,\alpha,\beta$

ordre **C2** : $\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta$ $\qquad R^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - ab}{3}$

ordre **C3** : $\alpha,\alpha,\beta,\beta,\alpha,\beta$

Cas D : $\alpha + 3\beta = 0$

ordre **D1** : $-\alpha,\beta,\alpha,\beta,\alpha,\beta$

ordre **D2** : $-\alpha,\beta,\beta,\alpha,\alpha,\beta$ $\qquad R^2 = \dfrac{b^3}{3b - a}$

(*) Sur une remarque de Jean-Claude Keyling, Pierre Renfer nous a proposé un complément au rapport du rallye.

Cas E : $\alpha + 3\beta = 2\pi$, $\alpha > \beta > 0$

ordre **E1** : $-\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta$

ordre **E2** : $-\alpha, \beta, \beta, \alpha, \alpha, \beta$ $\qquad R^2 = \dfrac{b^3}{3b - a}$

$\alpha + 3\beta = 2\pi$, $0 < \alpha < \beta$

ordre **E3** : $-\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta$

ordre **E4** : $-\alpha, \beta, \beta, \alpha, \alpha, \beta$ $\qquad R^2 = \dfrac{b^3}{3b - a}$

Cas F : $\alpha + 3\beta = 2\pi$, $\alpha < -\dfrac{2\pi}{5}$, $\beta > 0$

ordre **F1** : $-\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta$

ordre **F2** : $-\alpha, \beta, \beta, \alpha, \alpha, \beta$ $\qquad R^2 = \dfrac{b^3}{3b + a}$

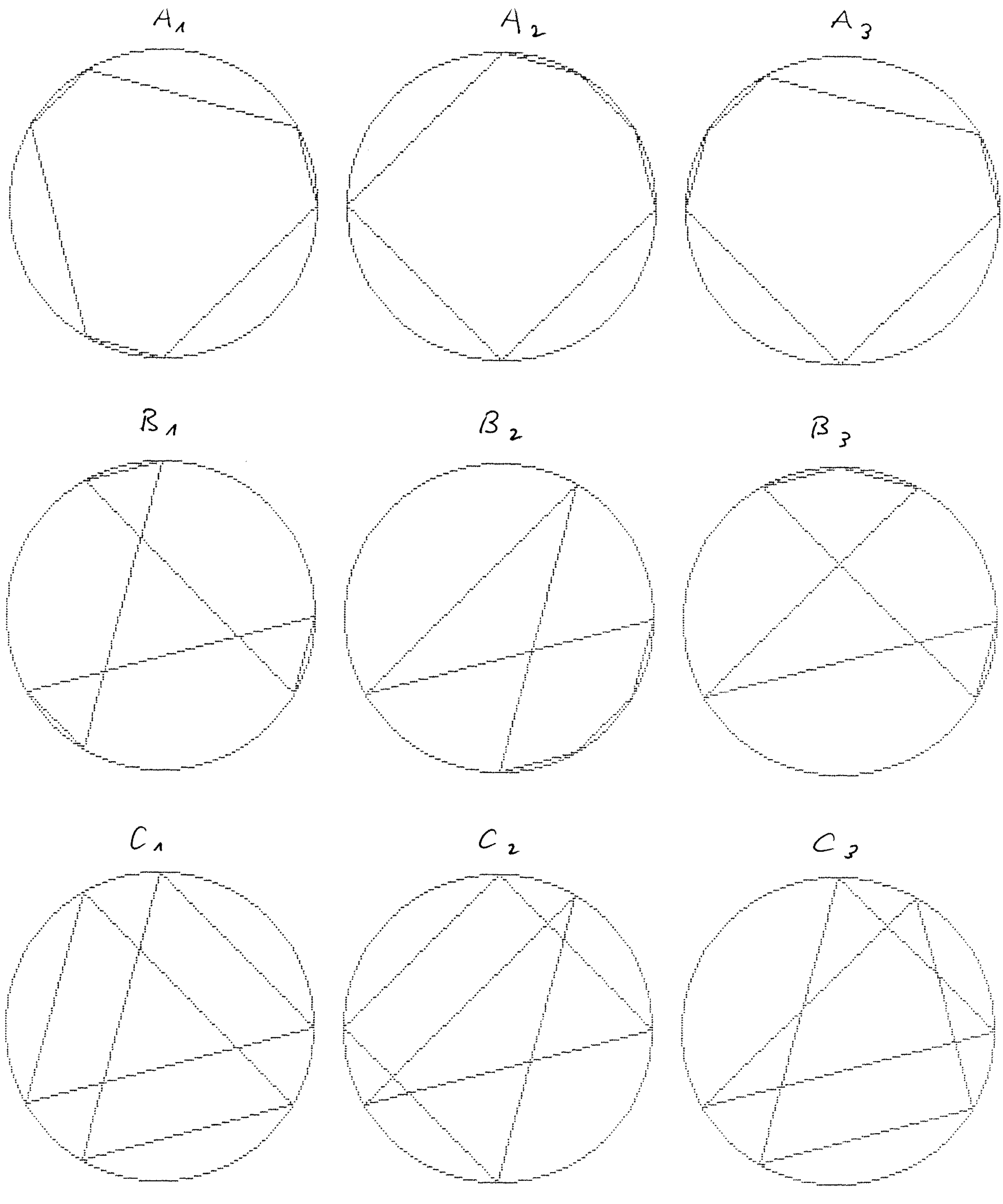
$\alpha + 3\beta = 2\pi$, $-\dfrac{2\pi}{5} < \alpha < 0$, $\beta > 0$

ordre **F3** : $-\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta$

ordre **F4** : $-\alpha, \beta, \beta, \alpha, \alpha, \beta$ $\qquad R^2 = \dfrac{b^3}{3b + a}$

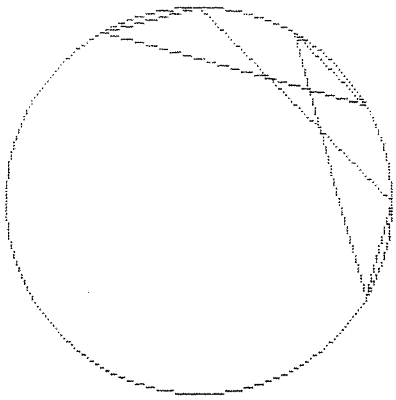
Sur le dessin, le sens positif est celui des aiguilles d'une montre.
Valeurs numériques choisies :

A1, A2, A3	:	$\alpha = \pi / 2$	$\beta = \pi / 6$
B1, B2, B3	:	$\alpha = 5\pi / 6$	$\beta = -\pi / 6$
C1, C2, C3	:	$\alpha = 5\pi / 6$	$\beta = \pi / 2$
D1, D2	:	$\alpha = \pi / 2$	$\beta = -\pi / 6$
E1, E2	:	$\alpha = 2\pi / 3$	$\beta = 4\pi / 9$
E3, E4	:	$\alpha = \pi / 3$	$\beta = 5\pi / 9$
F1, F2	:	$\alpha = -\pi / 2$	$\beta = 5\pi / 6$
F3, F4	:	$\alpha = -\pi / 3$	$\beta = 7\pi / 9$

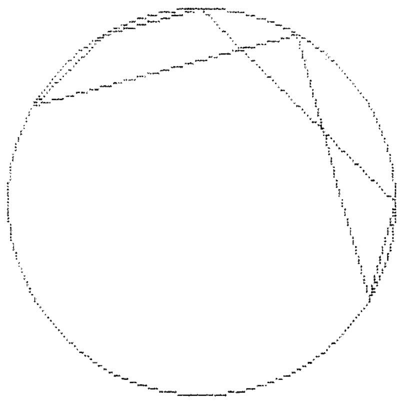

A_1
A_2
A_3
B_1
B_2
B_3
C_1
C_2
C_3

HEXAGONES DU RALLYE DE PREMIÈRE

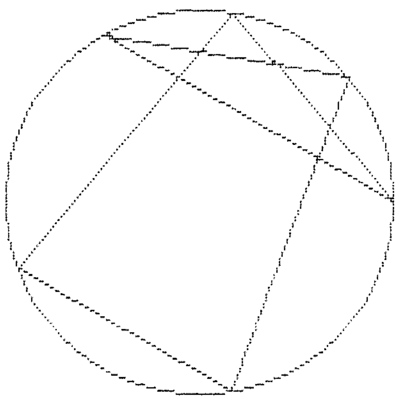
D_1



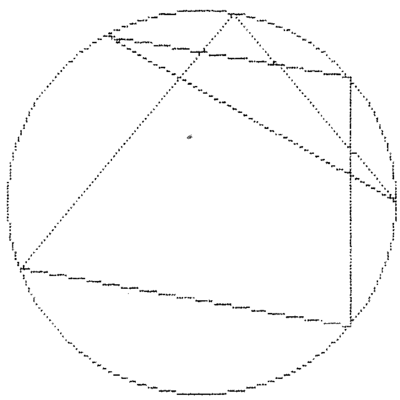
D_2



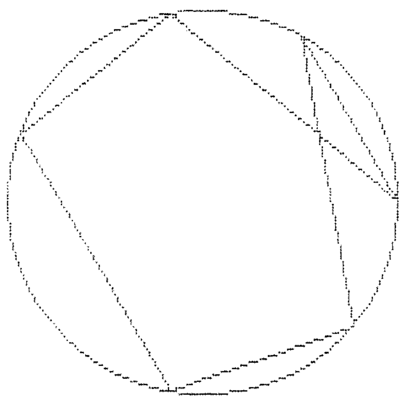
E_1



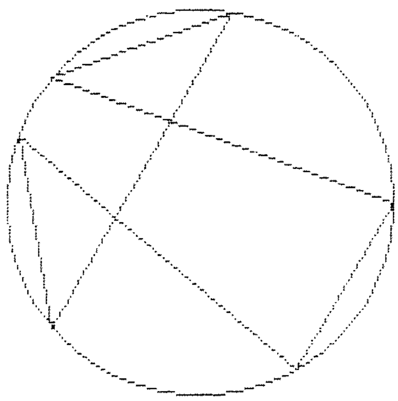
E_2



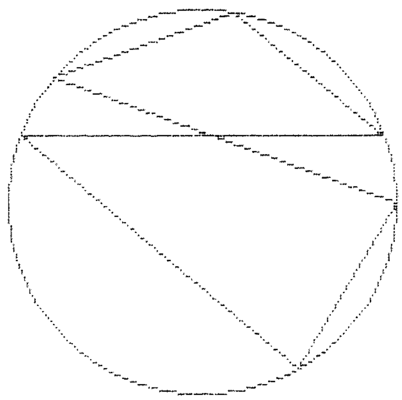
E_3



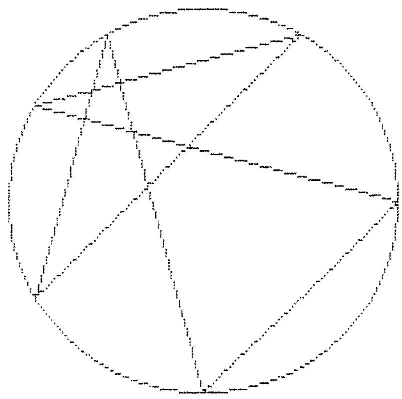
F_1



F_2



F_3



(**) Suite des dessins page 45.

PROBLÈMES POUR NOS ÉLÈVES (...et leurs professeurs)

Il s'agit, dans cette rubrique, de présenter des problèmes historiques ou classiques, dont la solution ne requiert pas d'autres connaissances que celles enseignées au lycée (voire au collège) et qui par conséquent, peuvent faire l'objet de travaux dans nos classes.

Nous n'avons pas encore reçu de solution d'élève pour le problème n° 2; nous publions donc ici la solution de Monsieur Renfer, professeur au Lycée Fustel de Coulanges.

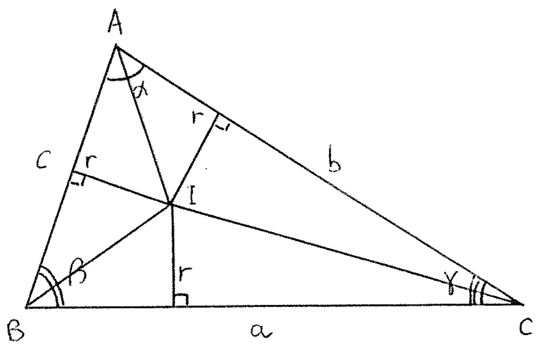
RAPPEL DE L'ÉNONCÉ DU PROBLÈME 2 :

Cet énoncé est extrait du "Shimpeki-Sampō" (1789). Ce titre signifie "mathématiques suspendues aux temples de Shintō" et correspondait à une coutume de cette époque au Japon, de suspendre aux murs des temples, des tablettes sur lesquelles se trouvait un problème de mathématiques et sa solution.

Etant donné un quadrilatère inscrit dans un cercle, démontrer que la somme des rayons des cercles inscrits dans les différents triangles qu'on obtient en menant les diagonales partant d'un même sommet, est la même quel que soit ce sommet. Généraliser à un polygone convexe quelconque inscrit dans un cercle.

Solution :

1) Calcul du rayon du cercle inscrit dans un triangle en fonction des angles du triangle.



Soit I le centre du cercle inscrit.
Soit r le rayon du cercle inscrit.
Soit R le rayon du cercle circonscrit.
Soit S l'aire du triangle.

• $2S = bc\sin\alpha = 2$ aire $(IBC) + 2$ aire $(IAC) + 2$ aire $(IAB) = r(a+b+c)$
Donc : $r = \frac{bc\sin\alpha}{a+b+c}$

• En utilisant : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, on obtient :

$r = 2R\frac{sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$

- Un peu de trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma =& 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\\
=& 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\\
& (\text{car } \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2})\\
=& 2\cos\frac{\gamma}{2}[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}]\\
=& 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}
\end{aligned}$$

- Donc :

$$r=2R\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

2) Problème du quadrilatère inscriptible

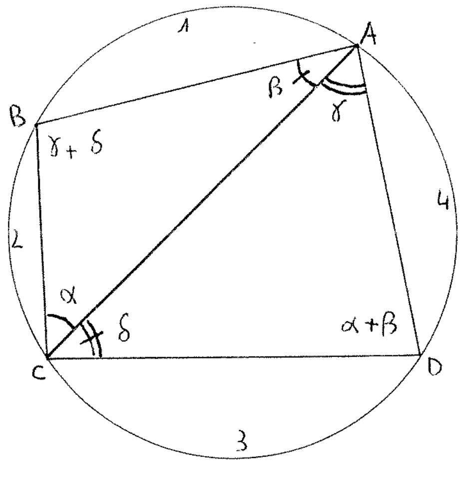


Figure 1

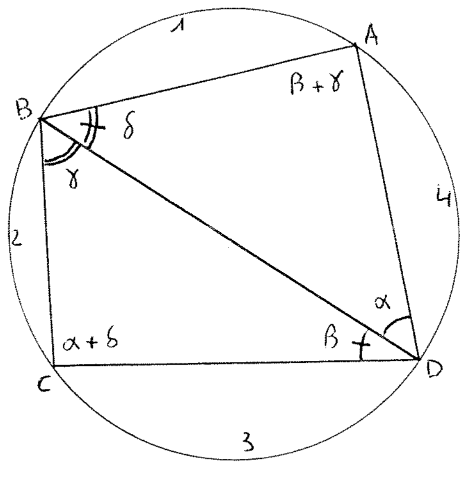


Figure 2

(L'ordre alphabétique des angles $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ correspond à l'ordre des arcs interceptés, à partir de A, dans le sens trigonométrique.)
Calculons la somme des rayons des cercles inscrits des deux triangles ABC et ACD (fig. 1). On trouve :

$$\begin{gathered}
4R(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2})\\
=4R(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\\
+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2})
\end{gathered}$$

On obtient une expression symétrique par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. La somme des rayons des cercles inscrits des triangles ABD et BCD (fig. 2) coïncidera donc avec l'expression précédente.

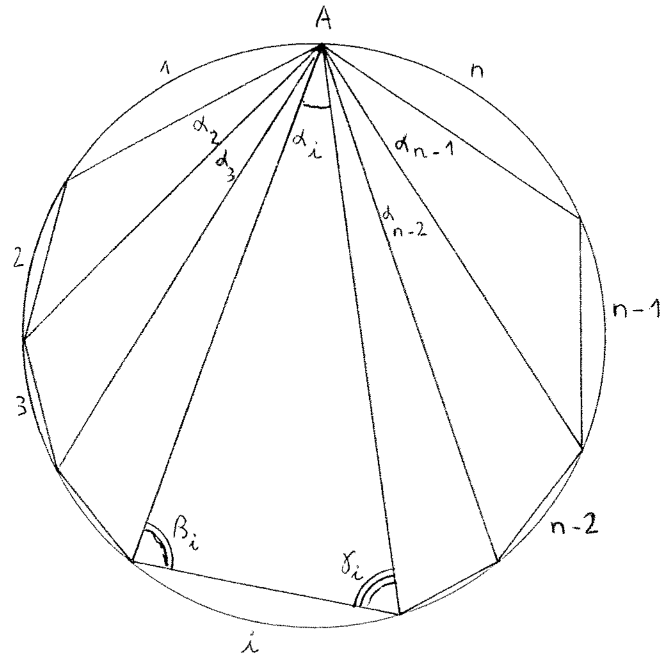
3) Intermède trigonométrique : généralisation de la formule d'addition du sinus

$$\sin(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j) = I_m\ e^{(i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j)} = Im(\Pi_{j=1}^{n}(\cos\alpha_j + i\sin\alpha_j))$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \left[(-1)^k \sum_{I\in\mathcal{P}_{2k+1}} (\Pi_{j\in I}\sin\alpha_j)(\Pi_{j\in \bar{I}}\cos\alpha_j)\right]$$

où $\mathcal{P}_{2k+1}$ désigne l'ensemble des parties à $(2k+1)$ éléments de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

4) Problème du polygone inscriptible à n sommets



• On choisit un sommet A. Les angles sont numérotés dans l'ordre des arcs interceptés, à partir de A, dans le sens trigonométrique.

• Soit r_i le rayon du cercle inscrit du triangle dont l'angle en A est α_i.

$$\beta_i = \sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k$$

$$\gamma_i = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k$$

• $r_i = 4R\sin\frac{\alpha_i}{2}.\sin\frac{\beta_i}{2}.\sin\frac{\gamma_i}{2} = 4R\sin\frac{\alpha_i}{2}.\sin(\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\alpha_k}{2}).\sin(\sum_{k=i+1}^{n}\frac{\alpha_k}{2})$

• On calcule $\sum_{i=2}^{n-1} r_i$, en utilisant la formule d'addition du sinus et en remarquant qu'une partie I à $(2k+1)$ éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$ peut s'écrire de k manières comme réunion $I = J \cup \{i\} \cup K$, où J et K sont des parties de cardinal impair de $\{1, 2, \ldots, i-1\}$ et $\{i+1, i+2, \ldots, n\}$ respectivement.

$$\sum_{i=2}^{n-1} r_i = 4R \sum_{k=1}^{[\frac{n-1}{2}]} \left[(-1)^{k+1}k \sum_{I\in\mathcal{P}_{2k+1}} \left(\Pi_{j\in I} \sin\frac{\alpha_j}{2}\right)\left(\Pi_{j\in \bar{I}} \cos\frac{\alpha_j}{2}\right)\right]$$

où $\mathcal{P}_{2k+1}$ désigne l'ensemble des parties à $(2k+1)$ éléments de $\{1,2,\ldots,n\}$ et où $\bar{I}$ désigne la partie complémentaire de I dans $\{1,2,\ldots,n\}$.

• On obtient une expression symétrique par rapport aux angles α_i : elle est donc indépendante du sommet A choisi !

ÉNONCÉ DU PROBLÈME 7

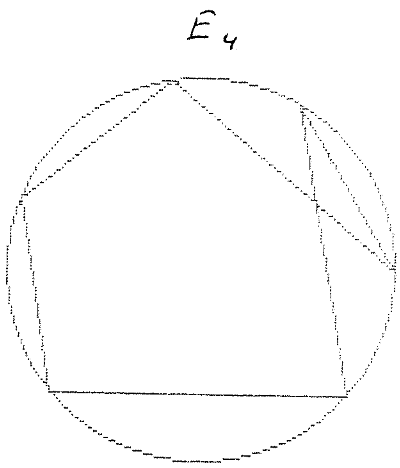
Le problème 2 résolu ci-dessus amène à en formuler un autre, dont la solution peut d'ailleurs servir à celle de ce problème 2. En voici l'énoncé : $ABCD$ étant un quadrilatère quelconque inscrit dans un cercle, démontrer que les quatre centres des cercles inscrits dans les triangles ABC, BCD, CDA, ABD, forment un rectangle.

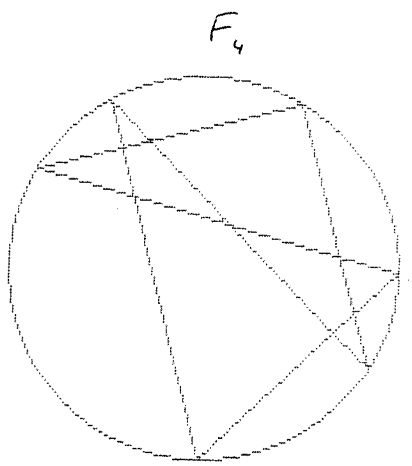
ÉNONCÉ DU PROBLÈME 8 (proposé par Marcel Krier)

Disposer six allumettes identiques de sorte que chacune touche les cinq autres (une allumette est un parallélépipède rectangle à base carrée).

Examiner le cas où la section est "petite" par rapport à la longueur et le cas où elle est "grande".

Etudier ensuite le cas de sept allumettes.





A VOS STYLOS

PROBLÈME 28

Énoncé

Etant donnés un ensemble fini S à n éléments (sommets) et l'ensemble A des parties de S à deux éléments (arêtes), trouver l'effectif maximal d'une partie G de A telle que, pour tous x, y et z de S,

$$\{x, y\} \in G \text{ et } \{y, z\} \in G \Longrightarrow \{x, z\} \notin G.$$

Autrement dit, exprimer, en fonction du nombre n de sommets, le nombre maximal d'arêtes d'un graphe sans triangle.

Solution (proposée par E. Kern)

Soit G un graphe sans triangle maximal. Si $s \in S$ soit $G(s) = \{y \in S | \{s, y\} \in G\}$. Choisissons $s_0 \in S$ tel que $|G(s_0)|$ soit maximum et posons $T = G(s_0)$ et $S_1 = S - (G(s_0) \cup \{s_0\})$. Si $x \in S_1$, on a $|G(x)| \leq |T|$. Considérons alors le graphe G' obtenu à partir de G en supprimant d'abord les arêtes issues de x puis en y ajoutant les arêtes de la forme $\{x, y\}$ où $y \in T$. Il est clair que G' est un graphe sans triangles et que $|G'| = |G| - |G(x)| + |T|$ et par suite $|T| \leq |G(x)|$ en raison du caractère maximal de G. On a donc $|G(x)| = |T|$ pour tout $x \in S_1$.

Montrons maintenant que si x_1, x_2 sont deux points distincts de S_1 alors $\{x_1, x_2\} \notin G$. Si non, en construisant à partir de x_1 le graphe G' comme ci-dessus on obtient un graphe vérifiant $|G'| = |G|$, $T = G(s_0)$ et $|G(s_0)| = \sup_s |G'(s)|$. On a donc $|G(x_2)| = |G'(x_2)| = |T|$, ce qui est contradictoire car $G(x_2) = G'(x_2) \cup \{x_1\}$ et $x_1 \notin G'(x_2)$.

Pour tout $x \in S_1$ on a donc $G(x) = T$ de sorte que

$$G = \{\{x, y\} | x \in T, y \in S - T\}.$$

Si on pose $n = |S|, r = |T|$ on a donc $|G| = r(n - r)$. Or ceci est maximal pour $r = E(\frac{n}{2})$ et par suite on a

$$|G| = E(\frac{n}{2})(n - E(\frac{n}{2})),$$

c'est-à-dire

$$|G| = p^2 \text{ si } n = 2p,$$
$$|G| = p(p + 1) \text{ si } n = 2p + 1.$$

(On a montré en outre que les graphes maximaux sont ceux de la forme $G = \{(x, y) | x \in A \text{ et } y \in S - A\}$ où A est une partie à $p = E(\frac{n}{2})$ éléments de S.)

PROBLÈME 29

Énoncé

Vrai ou faux? Toute suite de 100 nombres deux-à-deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur 10 ou une sous-suite décroissante de longueur 12.

Indication

Oui : toute suite de $mn+1$ nombres deux-à-deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur $m+1$ ou une sous-suite décroissante de longueur $n+1$ (théorème de Erdős-Szekeres).

PROBLÈME 30

Énoncé

Pour quels entiers $p \geq 2$ et $q \geq 2$ le rectangle de dimensions $p \times q$ peut-il être pavé par des dominos 1×2 de manière que toute droite traversant le rectangle coupe en deux l'un (au moins) des dominos du pavage?

PROBLÈME 31

Énoncé

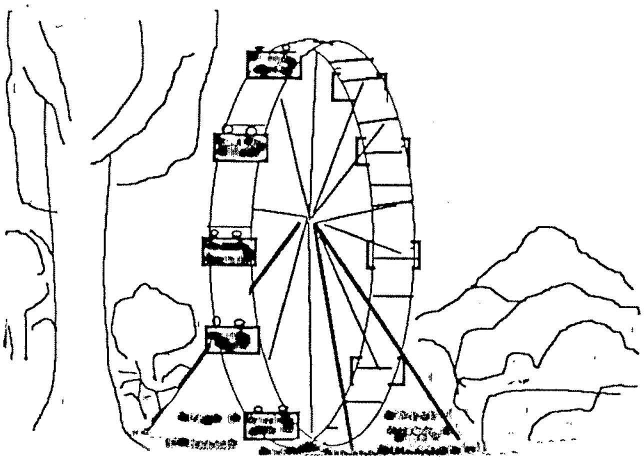
Dans la matinée, la neige se mit à tomber, régulièrement, uniformément. Pour dégager la route, trois chasse-neige partirent du village vers la ville, le premier à midi, le second à quatre heures, le troisième à six heures. (Les trois engins sont du même modèle et ont une vitesse inversement proportionnelle à la quantité de neige présente sur la route.) Sachant que le troisième a rattrapé le second au moment où le second rattrapait le premier, on demande à quelle heure il a commencé à neiger.

Nous avons reçu de M.-C. Arnaud une solution au problème 27, malheureusement trop tard pour être mentionnée dans '*L'Ouvert*' n° 75.

NOUVELLE BROCHURE :

MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE CHIMIE

IREM DE STRASBOURG



1992-1994

TABLE DES MATIERES

__Auteurs:__ Groupe Maths-Physique de l'IREM de Strasbourg.

__Mots clés:__ interdisciplinarité / Maths-Physique-Chimie.

__Résumé:__ Cette brochure présente le fruit de deux année de travail commun entre Mathématiciens et Physiciens. On y trouvera des activités pour les classes de lycée de la seconde à la terminale tenant compte des nouveaux programmes en vigueur suite à la rénovation pédagogique des lycées:

→ En Mathématiques: programmes applicables à la rentrée 1992 en seconde.

→ En Physique-Chimie: programmes applicables à la rentrée 1993 en seconde.

Chaque activité est suivie d'une solution détaillée et commentée en fonction des connexions interdisciplinaires.

__Public concerné:__ Professeurs de Mathématiques et de Physique-Chimie de lycée.

__Editeur:__ IREM de Strasbourg (brochure S.158).

Pour commander, s'adresser à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg et établir le paiement à l'ordre de M. l'Agent Comptable de l'ULP - IREM.
Prix sur place, expédition en Alsace ou envoi dans un établissement scolaire en France : 40 F ; si envoi à une adresse personnelle (hors Alsace) ou à l'étranger : 60 F.

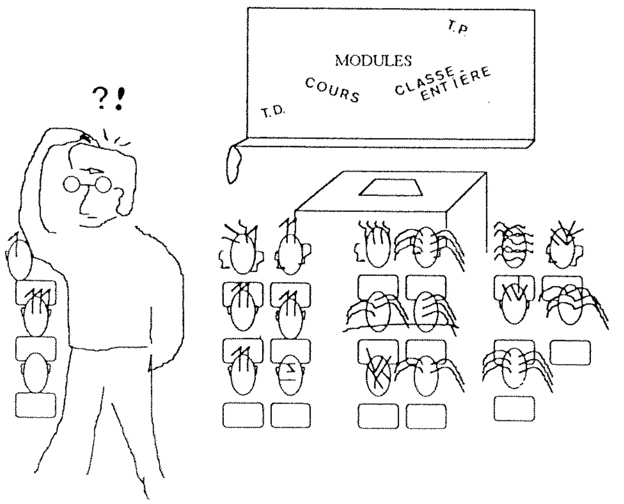
NOUVELLE BROCHURE :

DES SOLUTIONS POUR GERER LA CLASSE DE SECONDE

1993-1994

Auteurs: Jean DREYER, Suzy HAEGEL, Jean-Pierre RICHETON.

Mots-clés: Classe entière - Modules - Travaux Dirigés.
Gestion - Expérimentation.



Résumé: Nous avons voulu rendre service au professeur de seconde, expérimenté ou débutant, qui souhaite disposer d'exercices testés depuis quelques années déjà dans nos classes. Nous traitons une partie du programme de seconde sous forme de séquences d'apprentissage prévoyant la place de l'enseignement modulaire pour une meilleure articulation **classe entière ("cours")/modules/travaux dirigés.**

Sommaire:

Public concerné: Professeurs des Lycées.

Editeur: IREM de Strasbourg (Brochure S. 161)

Pour commander, s'adresser à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg et établir le paiement à l'ordre de M. l'Agent Comptable de l'ULP - IREM.
Prix sur place, expédition en Alsace ou envoi dans un établissement scolaire en France : 55 F; si envoi à une adresse personnelle (hors Alsace) ou à l'étranger : 70 F.

NOUVELLE BROCHURE :

ENSEIGNER AUTREMENT AU LYCEE

ou :

Thèmes cherchent programmes désespérément

par le groupe lycée

Gravure sur bois ornant la Margarita Phylosophica de Gregorius Reisch (Freiburg, 1503) : l'Arithmétique, symbolisée par la femme debout au centre, semble trancher le débat au sujet de la querelle entre "Abacistes" et "Algoristes" : elle regarde en effet dans la direction du calculateur usant des chiffres "arabes" (chiffres dont sa robe est d'ailleurs ornée). Museum of the History of Science (Oxford).

Auteurs : Claire CHAUVIERE, Claudine KAHN, Bernard KOCH, Gérard NAFFZGER, Anne-Marie RIGOURD et Dominique WEIL.

Mots-clés : lycée, proportionnalité, nombre, système binaire, calendrier, astronomie, mécanique céleste, probabilité, pavage, frise.

Résumé : Les thèmes proposés ici ne se rattachent pas à un programme mais ils permettent non seulement des activités mathématiques traditionnelles mais aussi l'exploitation de documents, des recherches bibliographiques et historiques et la constitution de dossiers.

Public concerné : Professeurs de lycée.

Nombre de pages : 145.

Prix : 65 F.

Editeur : I.R.E.M. de Strasbourg (S. 159).

Pour commander, s'adresser à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg et établir le paiement à l'ordre de M. l'Agent Comptable de l'ULP - IREM.
Prix sur place, expédition en Alsace ou envoi dans un établissement scolaire en France : 65 F ; si envoi à une adresse personnelle (hors Alsace) ou à l'étranger : 80 F.