

L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 77 – DÉCEMBRE 1994 I.S.S.N. 0290 - 0068

EUCLIDIS DANICI

Første Deel.

Bestaar udi EUCLIDES Werckstycker.

1. Frembsilling.



Da to foregiffuene pricker A oc B, vil mand beskriue et ligesidig Trehornne A B C.

Wercket.

Udaf A oc B, med dend samme Aabning A B, beskriue to buer, de skæerer huer andere udi C; da er det trehornne A B C det begierde.

2. Frembsill.

Et ligesidig Serhornne / vil mand beskriue udi et Rund; hvis halffmaaler A B er giffuen.

Wercket.

Med B A beskriue et Rund / oc udaf B sæt sexgange deud samme aabning udi sin kredz / huilcken iust der udi slutter; oc begieringen er da fyldest giort.

Tilgiff.

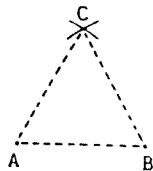
Naar med dend samme aabning A B, beskriues et stycke af et Rund / oc udi sin kredz sætter sexgange A B, udaf B; da staar de tre pricker B, A, E udi en indbildede rette linne.

NOTRE COUVERTURE :
"Euclides Danicus"

Il s'agit d'un extrait du livre "Euclides Danicus" du danois Georg Mohr (1640-1697), sur les constructions d'Euclide à la règle et au compas. Cet extrait présente la construction du triangle isocèle et de l'hexagone régulier.

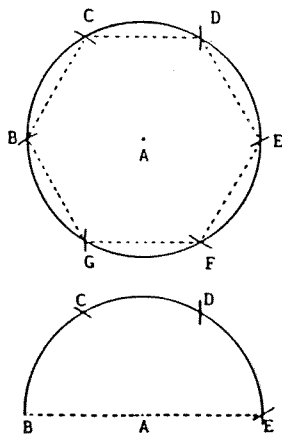
Nous proposons la traduction suivante :

At konstruere en ligesidet trekant ABC med længden AB (givet ved de to punkter A og B) som side.



Med centre i A og B og med samme radius AB tegnes to buer. De skærer hinanden i C. Da er trekant ABC den begærede.

At indskrive en regulær sekskant i en cirkel, der er givet ved radius AB.



På cirklen med centrum A og radius AB af-sættes fra B seks gange den samme radius (dvs AB) på cirklen, hvilket netop slut-ter i B. Og begæringen er fyldestgjort.

Når ovenstående udføres i tre trin, frem-kommer et punkt E, så de tre punkter B, A og E ligger på en ret linie.

Il s'agit d'une traduction de danois ancien en danois moderne, où l'on découvrira quelques similarités avec l'alsacien. Alors que la plupart des ouvrages savants de l'époque étaient publiés en latin, on a ici un exemple d'ouvrage publié en langue du pays, le danois. Pour des informations approfondies nous renvoyons au n° 74 de 'L'Ouvert', p. 45 à 47.

EDITORIAL

La volonté politique d'encourager la mobilité et les échanges, dans l'éducation, entre différents pays, s'est affirmée depuis longtemps. Des actions ont été mises en place progressivement.

Dans l'enseignement supérieur, les programmes européens Comett, Erasmus, Lingua, Brite, Science, Bridge ou Delta favorisent la mobilité et les échanges dans la recherche et dans la formation. Le premier congrès européen de mathématiques a été fondé à Paris en juillet 1992. Depuis cette date, les membres de l'Union Européenne, titulaires d'un titre ou diplôme sanctionnant un cycle d'études post-secondaires de trois ou quatre années, délivré par un autre Etat de l'Union Européenne, peuvent être candidats aux concours du CAPES respectivement de l'Agrégation.

L'enseignement des mathématiques est également concerné, comme l'ont montré les travaux de la commission internationale sur l'enseignement des mathématiques (C.I.E.M.). Les rencontres se multiplient : journées nationales de l'A.P.M.E.P. sur les mathématiques européennes à Strasbourg en 1992, la première université d'été européenne d'histoire et d'épistémologie dans l'éducation mathématique à Montpellier en juillet 1993, l'université d'été "mathématiques, facteur d'adaptation linguistique et culturelle" à Francheville en juillet 1994, le programme d'échange et de formation des professeurs de mathématiques entre l'association française des professeurs de mathématiques (A.P.M.E.P.) et sa correspondante russe (PAYME) qui devrait déboucher sur une collaboration institutionnelle entre les I.R.E.M. et I.U.F.M. et des instituts russes correspondants. Plus localement, l'I.R.E.M. de Strasbourg, l'Université de Coblence-Landau et l'Ecole supérieure de Pédagogie de Heidelberg ont organisé cette année la première rencontre franco-allemande sur les questions d'histoire et de didactique des mathématiques. Des professeurs de mathématiques de l'académie de Strasbourg se sont réunis avec des collègues de pays de l'Union Européenne, soit à l'aide du programme européen TEX, soit à l'aide d'action de la MAFPEN de Strasbourg : stage de découverte du système éducatif de la Suisse, échange TRIFOLIUM avec l'Italie et le Danemark.

Cet échange TRIFOLIUM avec le Danemark est à l'origine de l'article de ce numéro sur l'enseignement des mathématiques au Danemark. A l'échange entre les professeurs de mathématiques danois et français succède cette année un échange entre classes, avec travail mathématique commun à distance et lors des visites, en utilisant l'anglais comme langue de communication.

Comme le montre cet article, la découverte d'un système éducatif différent du nôtre nous permet d'acquérir ouverture et recul par rapport à notre système éducatif. Il permet de développer l'esprit de mobilité et de mieux comprendre les difficultés d'adaptation d'un élève étranger et les pesanteurs culturelles attachées à chaque système. Il faut bien entendu se garder de vouloir transposer un système d'un pays à l'autre lorsque l'environnement culturel et socio-économique est très différent.

C'est aussi l'occasion de s'enrichir de pratiques professionnelles expérimentées grandeur réelle et d'en discuter les avantages et les inconvénients. Par exemple, nos collègues danois enseignent en section "littéraire" un enseignement des sciences regroupant mathématiques, physique, chimie, environnement, astronomie. Ceci n'est pas sans rappeler l'enseignement scientifique en section L dans la nouvelle réforme des lycées. Il est donc intéressant d'observer cet enseignement au Danemark, notamment d'étudier les manuels scolaires proposés pour cet enseignement et regroupant des activités interdisciplinaires, alors que de tels manuels restent confidentiels voire inexistantes en France.

La formation initiale et continue des enseignants reste le cheval de bataille de cet encouragement à la mobilité. Le fait d'instituer dans la formation en I.U.F.M. un stage à l'étranger permettrait, dès le début de carrière, de sensibiliser à la mobilité et de mettre en contact de jeunes professeurs. On regrettera que l'enseignement des langues soit trop souvent absent des formations initiales en I.U.F.M. et dans les stages MAFPEN, ce qui explique qu'en France les sciences soient sous-représentées dans ces actions d'échanges. On souhaiterait que les lieux de rencontre se développent, notamment pour rendre compte des actions déjà réalisées, bien souvent confidentielles et cloisonnées, et pour mettre en place des réseaux de personnes ou d'institutions ressources. '*L'Ouvert*' se veut un de ces lieux de rencontre et continuera d'ouvrir ses colonnes pour encourager les échanges entre enseignants de mathématiques, y compris entre ceux qui enseignent à des niveaux différents (*).

R. CABASSUT.

(*) le prochain numéro proposera un article sur la liaison lycée-université.

SOMMAIRE

N° 77 – DÉCEMBRE 1994

◇ <i>Notre couverture : Euclides Danicus</i>	I
◇ <i>Editorial</i>	II
◇ <i>Enseignement des mathématiques au Danemark,</i> par R. CABASSUT	1
◇ <i>Des hexagones aux polygones,</i> par R. RENFER	17
◇ <i>Petites perturbations et grandes erreurs,</i> par S. AKESBI et J. LEFORT	23
◇ <i>Un théorème arithmo-géométrique et ses généralisations,</i> par E. EHRHART	33
◇ <i>Deux problèmes amusants de physique,</i> par le groupe "Math-physique"	35
◇ <i>Le logiciel "Derive" au collège, oui! mais attention à la dérive,</i> par J. OURLIAC	47
◇ <i>A vos stylos, par 'L'Ouvert'</i>	51

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
- ◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
80 F (130 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
120 F (200 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro* : 30.- F

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU DANEMARK

Richard CABASSUT

Lycée International de Strasbourg

1) LE SYSTÈME ÉDUCATIF DANOIS

Un pays à taille humaine

Le Danemark est un pays d'environ 400 îles ou péninsules, peuplé par 5,15 millions d'habitants, dont les principales villes sont Copenhague (1337000), Odense (139000), Arhus (202000), Alborg (113000) et Esbjerg (81000). Les établissements scolaires sont donc implantés essentiellement dans de petites agglomérations et avec une taille humaine. En 1990, 632000 élèves fréquentaient l'enseignement obligatoire (école maternelle, primaire et 1er cycle du secondaire dans la Folkeskole). 72000 fréquentaient le lycée d'enseignement général, 240000 l'enseignement professionnel et 126000 l'enseignement supérieur.

Le ministère de l'éducation régleme nte le système scolaire : orientations, directives, recommandations (non obligatoires), contrôle général des examens de fin d'études, fixation de normes minimales pour les bâtiments scolaires, subventions globales au privé comme au public sans décider de l'affectation des fonds.

L'enseignement obligatoire : une école où l'enseignement primaire ne se distingue pas de l'enseignement secondaire 1er cycle :

Jusqu'à 7 ans les enfants peuvent être accueillis en garderie de jour (de 0 à 3 ans) ou jardin d'enfants (de 3 à 7 ans) ou classes préparatoires de 5 à 7 ans. La scolarité est obligatoire de 7 à 16 ans et se déroule dans un même lieu : la Folkeskole (école municipale) ou l'école privée (10 % des élèves). La 10^e année existe pour des cours de niveau supérieur et prépare à un examen non obligatoire de fin d'études avancées. Il n'est pas obligatoire de suivre cette dixième année pour poursuivre les études en lycée : elle est réservée aux élèves souhaitant consolider leurs acquis avant de poursuivre des études ou avant de quitter le système éducatif.

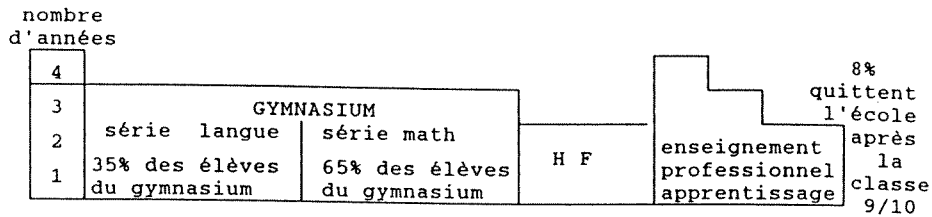
L'enseignement post-obligatoire : le choix entre l'enseignement général ou l'enseignement professionnel :

A la fin de la scolarité obligatoire, l'élève peut choisir sous certaines conditions (explicitées dans le paragraphe évaluation) le Gymnasium, qui s'apparente à notre lycée d'enseignement général, et qui prépare en trois ans au Studentereksamen (l'équivalent de notre baccalauréat) permettant l'accès à l'Université. Les élèves plus âgés considérés aptes à reprendre les études générales qu'ils ont interrompues pour participer à une expérience professionnelle ou à d'autres expériences de formation peuvent choisir les cours de HF (Hojere Forberedelseksamen) :

R. CABASSUT

ORGANISATION DES ENSEIGNEMENTS

ENSEIGNEMENT SUPERIEUR



examens non obligatoires; certificats de fin d'études.

âge	n°classe		
16	10°	classe suivie par 45% des élèves de la classe 9	
15	9°		
14	8°		
13	7°	FOLKESKOLE	ECOLEES PRIVEES
12	6°	enseignement public primaire et premier cycle du secondaire	
11	5°		
10	4°		
9	3°		
8	2°	90% des élèves	10% des élèves
7	1°		
6	mater-nelle	Bornehaveklasse (90% des élèves)	

ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

	SERIE MATHEMATIQUE choisie par 65% des élèves	SERIE LANGUE choisie par 35% des élèves		
1ère année	5x45mn hebdomadaire	3x45mn hebdomadaire d'enseignement général des sciences		
2ième année	5x45mn hebdomadaire	4x45mn ens. général des sciences	niveau intermédiaire	haut niveau
	épreuve écrite obligatoire (niveau B)
	pas d'oral	oral	4h math ou rien	5h math
3ième année	haut niveau 5x45mn	pas d'enseignement scientifique	rien ou 4h math	5h math
		examen oral niveau C
	épreuves écrite et orale (niveau A)			écrit + oral niveau B

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU DANEMARK

ces cours préparent en deux ans à l'examen préparatoire supérieur HF qui permet également l'accès à l'enseignement supérieur. Plus de deux tiers des élèves de HF ont interrompu leur scolarité après la Folkeskole pendant plus d'un an. Chacun des 14 comtés danois est responsable, dans la grande majorité des cas, des écoles secondaires supérieures (Gymnasium et cours de HF) du comté.

L'élève peut également choisir l'enseignement professionnel par l'apprentissage (durée de 2 à 4 ans, avec une formation théorique en école technique ou de commerce et formation pratique en entreprise) ou l'accès à des écoles techniques (dessinateurs techniques, assistants techniciens, laborantins,...), commerciales, agronomiques, d'éducation sanitaire et sociale ou d'autres types d'enseignement professionnel. Les écoles d'enseignement professionnel sont plutôt privées mais reçoivent des subventions de l'état.

Les universités et la majorité des établissements d'enseignement supérieur sont gérés par l'état.

2) L'ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiques à la Folkeskole :

L'enseignement des mathématiques est obligatoire à raison de 4 séquences de 45 mn par semaine. Des programmes différenciés sont proposés en 8^o, 9^o ou 10^o.

Les mathématiques au lycée :

L'enseignement dure 3 années, de 16-17 ans à 18-19 ans. Deux séries sont proposées : la série "mathématique" ou la série "langue".

Dans la série mathématique, les élèves reçoivent un enseignement de **mathématiques obligatoires** (niveau B) les deux premières années, à raison de 5 heures hebdomadaires (1 heure de cours dure en fait 45 mn). A l'issue de ces deux années, ce qui correspond à la fin de première française, les élèves passent un examen écrit de 4 heures pleines et un examen oral de 25 mn. La troisième année ils peuvent soit ne pas avoir d'enseignement de mathématiques, soit avoir un enseignement de **mathématiques de haut niveau** (niveau A), ce que choisissent environ 85 % des élèves de deuxième année de série mathématique. Cet enseignement de 5 heures hebdomadaires est évalué par un examen écrit de 4 heures pleines et un examen oral de 30 mn. Cet examen oral remplace celui de fin de deuxième année dont sont dispensés les élèves qui poursuivent les mathématiques en troisième année. Il y a également la possibilité de préparer, pendant une semaine pour laquelle l'élève est dispensé des cours, un mémoire en mathématiques dont il est tenu compte dans la note de baccalauréat (une description plus complète est donnée dans le paragraphe sur le mémoire).

Dans la série langue, un enseignement général des sciences, constitué de mathématiques, physique, chimie, environnement et astronomie, est dispensé la même année par un seul et même professeur à raison de 3 heures par semaine. A l'issue de cette première année trois possibilités sont offertes à l'élève.

Soit il continue en deuxième année un enseignement général des sciences, à

raison de 4 heures par semaine, sanctionné par un examen oral. Il n'y a plus d'enseignement scientifique en 3^e année.

Soit il choisit la **série langue niveau intermédiaire** (niveau C). Alors il reçoit un enseignement de mathématiques de 4 heures hebdomadaires, ou bien en deuxième année, ou bien en troisième année, sanctionnées par un examen oral de 25 mn.

Soit il choisit la série **langue de haut niveau** (niveau B) pour laquelle il suit un enseignement mathématique de niveau comparable à celui de l'enseignement obligatoire de série "mathématique", à raison de 5 h par semaine et sanctionné par un examen écrit et oral.

Tous ces choix sont sous la seule responsabilité des élèves : les professeurs et les conseils de classe peuvent donner un avis mais leur accord n'est pas nécessaire.

Les programmes de mathématiques en lycée :

Série "mathématique" :

Mathématiques obligatoires (niveau B) :

Les finalités de cet enseignement :

- les étudiants doivent acquérir une compréhension de modes de pensée, de concepts et de méthodes mathématiques fondamentales;
- les étudiants doivent devenir familiers avec les mathématiques comme moyen de formulation, d'analyse et de résolution de problèmes à l'intérieur de différents domaines (du programme).

Le programme comprend cinq domaines et trois aspects.

Les cinq domaines sont :

- 1) nombres : entiers, rationnels et réels, exposants, racines, pourcentages, intérêts;
- 2) géométrie : triangle, triangles rectangles et semblables, aire dans le plan, distance dans le plan, sinus, cosinus et tangente, calcul des longueurs et angles dans un triangle;
- 3) fonctions : fonctions linéaires, polynômes, trigonométriques, exponentielles, logarithmes, puissances. Résolution de problèmes d'équations et inégalités faisant intervenir les fonctions ci-dessus;
- 4) calcul différentiel : nombre dérivé, tangente, approximation affine, règle de dérivation, maximum, minimum, fonctions monotones, méthodes de tracer de courbes;
- 5) statistiques et probabilités : expériences aléatoires, probabilité a priori et par fréquence, univers des possibles, probabilités des événements, variable aléatoire, distribution binomiale et normale.

Les trois aspects sont :

- 1) l'aspect historique : les étudiants doivent acquérir une connaissance des mathématiques et des éléments d'histoire des mathématiques dans un contexte socio-culturel;
- 2) l'aspect modélisation : le programme doit donner aux étudiants une connaissance de construction de modèles mathématiques comme représentation de la réalité et une impression des possibilités et des limites de l'application de modèles mathématiques et leur permettre de manière autonome de modéliser des situa-

tions simples;

3) structure interne des mathématiques : les étudiants doivent acquérir une compréhension des modes de pensée et des méthodes caractéristiques des mathématiques. Ils doivent comprendre comment ces modes de pensées et ces méthodes affectent le développement et la structure des domaines (du programme);

Etude des aspects : les trois aspects sont étudiés en relation avec l'étude des cinq domaines et à travers un enseignement spécial d'unités organisées en relation avec un ou plusieurs aspects. Ces unités peuvent être incluses dans un thème obligatoire (du programme) aussi bien que dans un thème additionnel (du programme). Ces unités doivent prendre au moins 20 leçons.

Mathématiques haut niveau (niveau A)

Se rajoute aux finalités de l'enseignement obligatoire la finalité suivante : les étudiants doivent développer davantage la capacité d'utiliser des concepts mathématiques et des méthodes de manière autonome, et devenir capables de connaître, analyser et évaluer des problèmes qui peuvent être formulés et traités au moyen de concepts et méthodes mathématiques.

Le programme comprend trois domaines, une unité au choix et trois aspects.

Les trois domaines sont :

1) Géométrie de dimension 2 et 3. Vecteurs, coordonnées, produit scalaire, orthogonalité, produit vectoriel, projection, description analytique d'ensemble de points, distance, angle, intersection entre ensembles.

2) Calcul intégral. Equations différentielles : primitives, intégrales définies et indéfinies; définition d'une intégrale comme limite de sommes, méthodes analytiques et numériques d'intégration, calcul d'aire et de volume, modèles d'équations différentielles, incluant $y' = f(x)g(y)$ et $y'' = ky$.

3) Un domaine lié aux mathématiques et à l'informatique. Les étudiants doivent acquérir une compréhension d'un domaine des mathématiques qui illustre l'interaction entre mathématique et informatique... Le concept d'algorithme doit jouer un rôle central. Ce domaine doit durer au moins vingt séquences.

4) Une unité au choix doit durer environ vingt-cinq séquences.

Les trois aspects sont les mêmes que pour l'enseignement obligatoire précédent.

Mathématiques de la série langue : niveau intermédiaire (niveau C)

Les finalités de cet enseignement :

- les étudiants doivent acquérir une compréhension des modes de pensée et des méthodes mathématiques,

- les étudiants doivent acquérir une connaissance des mathématiques comme un moyen de formulation, d'analyse et de résolution des problèmes dans des domaines variés (du programme),

- les étudiants doivent devenir compétents dans l'application de quelques concepts mathématiques élémentaires et méthodes pour résoudre des problèmes.

Le programme comprend trois domaines et une unité au choix. Les trois domaines sont :

1) fonction, optimisation : les étudiants doivent acquérir une compréhension des fonctions comme moyen de description et d'analyse des relations entre variables aussi bien qu'une connaissance des fonctions élémentaires et des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation;

2) traitement et analyse des données : l'enseignement doit développer la capacité des étudiants à utiliser les moyens de description statistique et les outils de calcul (ordinateurs compris) pour analyser les données. De plus les étudiants doivent devenir familiers avec les concepts et les descriptions des problèmes économiques courants;

3) géométrie : l'enseignement doit accroître la connaissance des étudiants pour les concepts fondamentaux de la géométrie. Le but principal est d'augmenter la compréhension des étudiants pour les modes de pensée et les méthodes mathématiques et de leur donner quelques applications pratiques de géométrie ou un aperçu des mathématiques dans un contexte historique.

Un sujet de choix libre doit être traité pendant environ vingt leçons.

3) ÉVALUATION ET ORIENTATION AU DANEMARK

Le système de notation :

A la Folkeskole, le système de notation reflète une philosophie libérale. Jusqu'à la classe 7 (environ 13 ans) les parents sont informés au moins deux fois par an sur la scolarité de leurs enfants sans qu'aucune note ne soit donnée. A partir de la classe 8 (environ 14 ans) des notes sont attribuées dans les matières que l'élève choisit de présenter pour l'examen de fin d'études. Il n'y a pas obligation de se présenter à l'examen; simplement ce dernier peut servir de certificat attestant le niveau acquis à la sortie de la Folkeskole. Cependant pour les élèves qui souhaitent poursuivre leurs études au lycée il est obligatoire de passer l'examen dans certaines matières. Pour continuer au lycée il faut remplir simultanément les conditions suivantes : avoir terminé la classe 9 (ou 10), avoir suivi allemand ou français de la classe 7 à la classe 9 (l'anglais étant obligatoire dès la classe 5), avoir passé une épreuve écrite avec un résultat acceptable en danois et en calcul-mathématiques pour les deux séries, une épreuve orale avec un résultat acceptable en anglais, allemand ou français pour la série langue, en physique-chimie pour la série mathématiques. De plus, les professeurs de la Folkeskole doivent avoir reconnu l'élève apte à poursuivre en lycée, sinon l'élève doit passer un examen oral supplémentaire.

Que ce soit à la Folkeskole ou au lycée, l'échelle des notes données aux productions d'élèves est constituée de neuf notes, représentant des catégories bien délimitées. Un des objectifs de ce système de notation est d'assurer l'uniformité de l'évaluation des résultats dans l'établissement et entre établissements. 13 est donné pour une production exceptionnellement originale et excellente; 11 est donné pour une production originale et excellente; 10 est donné pour une production excellente mais pas particulièrement originale; 9 est donné pour une production un peu

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU DANEMARK

au-dessus de la moyenne; 8 est donné pour une production moyenne c'est-à-dire le dernier niveau de production acceptable; 7 est donné pour une production médiocre, un peu au-dessous de la moyenne; 6 est donné pour une production hésitante mais plus ou moins satisfaisante; 5 est donné pour une production hésitante et non satisfaisante; 03 est donné pour une production très hésitante, imparfaite et très insuffisante; 00 est donné pour une production totalement inacceptable. Pour des épreuves écrites en mathématiques il existe une table convertissant les pourcentages obtenus du total des points en notes précédentes. Le barème doit être composé de manière à ce que la signification des catégories précédentes soit respectée.

L'évaluation au lycée :

Au lycée le passage d'une classe à l'autre est automatique : les professeurs donnent seulement des conseils (quitter l'école ou travailler plus,...). De même pour l'orientation (choix des matières de haut niveau ou de niveau intermédiaire ou pour le choix de la discipline où le mémoire sera rédigé) et c'est l'élève seul qui prend la responsabilité de ces choix.

Un contrôle continu est effectué. Dans la série "mathématique", les élèves doivent rédiger 26 devoirs à la maison par an, qui s'apparentent à la résolution d'une série d'exercices, de type baccalauréat plus on se rapproche de l'épreuve. C'est une faute professionnelle pour le professeur que de ne pas proposer ces devoirs et de ne pas les corriger individuellement. Ces devoirs ne sont cependant pas notés mais simplement les fautes sont corrigées et des remarques adressées.

Chaque trimestre un devoir en classe de deux fois 45 mn est rédigé et noté. Un bulletin trimestriel situe par une note orale et une note écrite le niveau mathématique de l'élève. Pour les élèves de deuxième et troisième années une épreuve de baccalauréat blanc est organisée dans les mêmes conditions de durée et de présentation, mais est corrigée seulement par le professeur de la classe.

L'épreuve de mathématiques du baccalauréat dans la série "mathématique" :

L'épreuve écrite de fin de deuxième année :

Au lycée les élèves sont évalués par l'examen terminal correspondant à notre baccalauréat : le Studentereksamen. Pour la série "mathématique" dès la fin de la deuxième année de lycée (l'équivalent de la fin de la classe de première en France), une épreuve écrite de 4 h en mathématiques est obligatoire. Cette épreuve est constituée de quatre parties indépendantes, couvrant l'ensemble du programme, combinant des questions d'exécution d'algorithmes ou de tâches routinières avec des questions exigeant une réflexion plus grande, avec des thèmes de mathématiques pures et appliquées (voir annexe 1). Le concept de problème à la française n'apparaît pas dans ce type de sujet d'épreuve. L'élève dispose d'un formulaire de baccalauréat très complet de 27 pages, couvrant toutes les rubriques du programme. La correction de l'épreuve écrite est effectuée par deux examinateurs qui se rencontrent pour fixer la note définitive.

L'épreuve orale de fin de deuxième année :

Si l'élève ne continue pas l'enseignement des mathématiques en 3^e année, une épreuve orale est obligatoire. Le sujet de l'épreuve orale est un sujet de cours que l'élève doit développer (définitions, théorèmes, applications, . . .), en disposant du livre de cours pour une préparation de 20 mn suivie d'un exposé de 25 mn. D'autres aides peuvent être utilisées par le candidat : d'autres livres, les notes de cours du candidat, les calculatrices de poches autorisées, les tables, . . . En aucune façon il ne s'agit de résoudre un ou des exercices, comme pour les épreuves françaises. Le professeur de la classe pose des questions et intervient lors de cet exposé. Un professeur externe assiste à l'exposé mais n'intervient pas. Après l'exposé les deux professeurs fixent d'un commun accord la note définitive, avec prédominance de l'examineur externe en cas de désaccord.

Les épreuves éventuelles de 3^e année :

Si l'élève continue l'enseignement des mathématiques en troisième année, il aura une nouvelle épreuve écrite obligatoire en mathématiques, d'une durée de 4 heures, sur les thèmes de la classe de 3^e année, avec un nouveau formulaire de cours pour troisième année et une épreuve orale de 30 mn ayant même organisation que celle de deuxième année.

Les programmes des épreuves écrites ainsi que les sujets sont nationaux et peuvent porter sur toute partie du programme. Les programmes des épreuves orales portent sur 50 % du programme national (pour l'épreuve de fin de 2^e année) et 2/3 du programme (pour l'épreuve de 3^e année) de manière à ce que les parties principales du programme aient une importance appropriée. Le choix du contenu du programme de l'oral est fait par le professeur et sa classe et est communiqué au Ministère en cours d'année en indiquant les pages correspondantes du livre de cours dont disposera l'élève pendant l'examen. Le nombre de pages sélectionnées est compris entre 140 et 220 pour l'examen de fin de de 2^e année et entre 125 et 175 pour l'examen de fin de de 3^e année. C'est le professeur qui rédige les sujets d'oraux tirés au hasard par chaque candidat en présence du second examinateur extérieur.

Toutes les épreuves d'examens sont effectuées sous le contrôle du Ministère : il élabore et diffuse les sujets des épreuves écrites; il nomme et rétribue les examinateurs extérieurs pour l'oral et pour l'écrit. En plus des traditionnelles annales de sujets d'écrit il existe une cassette vidéo qui montre des épreuves orales réelles avec le résultat de la délibération du jury. Ces cassettes sont surtout destinées à la formation des professeurs.

Enfin l'élève peut choisir de rédiger sous certaines conditions un mémoire en mathématiques : pendant une semaine il est libéré des cours pour le rédiger (voir une description plus complète dans le paragraphe sur le mémoire).

Les notes comptant pour la note finale de baccalauréat sont les notes de fin de cours données dans chaque discipline suivie au lycée, les notes obtenues aux examens, la note obtenue au mémoire. La moyenne de ces notes est prise en compte pour

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU DANEMARK

l'accès à l'enseignement supérieur pour lequel il existe un numéris clausus.

L'épreuve de mathématiques dans la série "langue" :

Pour les élèves qui ne suivent que l'enseignement général des sciences auquel est intégré l'enseignement des mathématiques, une épreuve orale d'enseignement général des sciences est prévue en fin de de 2^e année.

Pour les élèves qui choisissent l'enseignement des mathématiques de haut niveau de la série "langue", cet enseignement est comparable à l'enseignement obligatoire de la série "mathématique". Il sera donc évalué en fin de de 3^e année par un examen écrit et un examen oral comparables à ceux de fin de de 2^e année des élèves de la série "mathématique".

Enfin, les élèves peuvent choisir, à la fin de la de 1^{ère} année ou de la de 2^e année, les mathématiques de niveau intermédiaire de la série "langue". Ils sont évalués par un examen oral en fin d'année. Le temps de préparation et de consultation des documents est de 25 mn. En incluant le temps de délibération du jury, il doit être interrogé 2,5 candidats par heure. La partie du programme sélectionnée pour l'examen doit couvrir environ 2/3 du programme de manière à ce que les parties principales au programme aient une importance appropriée.

La partie correspondant à ce programme dans les documents de référence mis à disposition pendant la préparation de l'oral (le plus souvent le livre de classe) doit couvrir entre 80 à 120 pages.

LE MÉMOIRE DE LA CLASSE DE TROISIÈME ANNÉE

Les élèves de classe de 3^e année doivent rédiger un mémoire, et un seul, dans une discipline. Les mathématiques de haut niveau peuvent être choisies pour le mémoire. Ce dernier sera évalué par le professeur de l'élève et un professeur extérieur à l'établissement, qui attribueront, d'un commun accord, une note qui sera prise en compte dans la moyenne du baccalauréat.

Pour décrire plus en détail l'organisation de ce mémoire voici la traduction d'une feuille diffusée aux élèves en début d'année de de 3^e année lors d'une réunion d'information concernant ce mémoire.

Aux élèves

Le mémoire de classe terminale

Calendrier :

28 octobre : information sur l'organisation générale du mémoire ;

12 novembre : les professeurs des différentes disciplines possibles pour le mémoire conseillent les élèves ;

23 novembre : choix de la discipline et du sujet général ; ce choix est enregistré officiellement par l'administration ;

18 janvier à 12 h : les élèves reçoivent le descriptif précis (cahier des charges) du mémoire et sont libérés de cours pendant une semaine pour le rédiger ;

25 janvier à 12 h : remise du mémoire.

Discipline : On peut choisir comme discipline le danois, l'histoire ou une discipline de haut niveau de la série que l'on suit.

Sujet : Il doit être dans les limites de la discipline choisie et doit contenir un thème qui n'a pas été étudié en classe (s'il s'agit d'un thème que les élèves connaissent déjà il faut l'étudier d'une autre manière et l'approfondir). La description du sujet (23 novembre) est approuvée par signature de l'élève et de son professeur. Pendant les études préliminaires (avant la semaine de rédaction) on a le droit de préciser davantage le sujet mais pas de le changer.

Formulation du sujet : Seul le professeur formule le sujet précis, avec un cahier des charges, de façon que l'élève ne puisse pas à l'avance rédiger la copie finale. Cependant le professeur doit prendre en considération les idées de l'élève pendant la période de préparation.

Copie du mémoire : Elle doit être de forme claire et précise : pas plus de 15 pages dactylographiées de format A4 de texte réel, non compris l'index, les notes, la bibliographie, les graphes, les tables, les illustrations, les citations, même s'ils sont placés dans le texte. Les 15 pages auront un intervalle de ligne 1,5, 60 caractères par ligne, 40 lignes par page.

Remise : Le mémoire en deux exemplaires signés, l'un avec la mention "original", l'autre avec la mention "copie" doit être remis à la date indiquée; en cas de litige seule la mention "original" prévaudra. (L'un des exemplaires est destiné au professeur, l'autre au professeur extérieur.)

Evaluation : Il importe que le candidat respecte les instructions données dans la formulation du sujet, qu'il sache analyser, interpréter et traiter les questions d'une façon personnelle, qu'il ne se contente pas de résumer un texte, qu'il transmette bien les idées et qu'il sache documenter son travail en se référant à des sources adéquates.

Fraude : L'épreuve fait partie de l'examen du baccalauréat; une fraude éventuelle serait punie très sévèrement, par l'exclusion de l'examen final. Il est notamment interdit de remettre un essai que l'on n'a pas rédigé personnellement, de copier des informations importantes sans indiquer la source...

Réclamation : Une réclamation éventuelle de la note obtenue sera à remettre au proviseur au plus tard deux semaines après réception de la note.

Deux exemples de cahier des charges donné à un élève pour un mémoire concernant les fractales et le chaos.

1) décrire des figures fractales et certaines de leurs caractéristiques, si possible à travers des exemples. Ce faisant, vous évoquerez le concept de dimension de Hausdorff pour un objet. Eventuellement vous pouvez mesurer la dimension d'une ligne de côte ou de quelque chose d'analogue.

2) expliciter pour quelques figures fractales comment elles sont construites. Par exemple vous pouvez considérer la fonction quadratique du plan et son lien avec l'ensemble de Mandelbrot.

Aux endroits correspondants de votre rapport vous expliquerez les concepts centraux comme itération, point fixe, chaos... Quand c'est pertinent vous utiliserez avec modération l'ordinateur.

Programmation linéaire : théorie et pratique.

1) Expliquez la programmation linéaire à deux variables. Vous devez expliquer les concepts fondamentaux, notamment ceux de fonction linéaire à deux variables, fonction de critère, fonction numérique d'une variable vectorielle, polygone des contraintes, lignes de niveau, maximum ou minimum de la fonction de critère. Illustrer si possible la méthode de résolution avec un ou plusieurs exemples (un exemple est fourni à l'élève).

2) Mentionner la méthode des simplexes, la M-méthode et l'analyse des petites variations si possible à partir d'un exemple (voir autre exemple en annexe).

3) La programmation linéaire en pratique.

Etudier soit à partir des exercices 6.6 à 6.10 du livre de Blomhoj, m.fl. Programmation linéaire, FAG (1984) ... l'exemple 6.5 du même livre (ndlr : il s'agit de l'application de la programmation linéaire au système de gestion des écoles Folkeskoles (c'est-à-dire primaire-collège) de la ville de Odense), soit à partir d'autres exemples concrets (pages 123 à 126). Si c'est pertinent, on utilisera un ordinateur avec modération.

Exemples de sujets de mémoires :

Réseaux de neurones, récurrence et récursivité, fractions continues, recherche opérationnelle, cryptologie, algèbre, complexes, coniques, analyse numérique, calcul approché, formule de Taylor et développement en série, fonctions trigonométriques, histoire du calcul différentiel, équations différentielles, modèles mathématiques appliqués à l'économie, statistiques et probabilités, théorie des jeux, test d'hypothèses, probabilité appliquée à l'économie, topographie, géométrie sphérique, itération et chaos, fractales, mathématiques babyloniennes, mathématiques grecques.

Exemples de livres disponibles :

L'établissement dispose d'un fond de livres de mathématiques plus approfondis que le professeur peut utiliser pour développer un thème libre ou pour conseiller les élèves sur des choix de sujets de mémoires. A titre d'exemple voici la liste des titres des livres disponibles en une trentaine d'exemplaires dans le fond de livres d'un lycée :

Programmation linéaire; aspect des mathématiques : histoire de la détermination des tangentes; au cœur des mathématiques : du mythe aux mathématiques physiques; qu'est-ce que les mathématiques; les nombres; prouver les mathématiques; les algorithmes formels (graphes); dessins en trois dimensions; complexes et fractales; algèbre de Boole; l'utilisation des mathématiques en biologie; calcul financier; Georg Mohr : Euclide Danicus; Euclide : éléments 1 à 4; sources et commentaires sur l'histoire des équations; quadrature du cercle; trisection de l'angle; duplication du cube; de la croissance linéaire au chaos; nombre et pensée : l'opinion des Pythagoriciens sur la vie et de monde; le nombre d'or dans l'art; la

nature et les mathématiques; combinatoire et algorithmes; complexes; nombre et géométrie avec des extraits de l'histoire des mathématiques grecques.

Ces ouvrages sont édités soit par des éditeurs privés, soit par l'association des professeurs de mathématiques.

Annexe 1

Exemple de sujet de baccalauréat de la série mathématiques,
fin de 2e année (équivalent de notre première française).

STUDENTEREKSAMEN – mai-juin 1993 – Série mathématique
Mathématiques : niveau obligatoire – Vendredi le 21 mai 1993 (9 h à 13 h)

Un seul des problèmes 6a et 6b est à traiter.

La répartition des points sera approximativement la suivante :

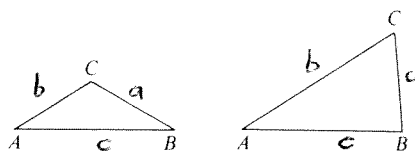
problème 1	...	environ 25 points
problème 2	...	environ 10 points
chacun des problèmes 3 et 4	...	environ 15 points
problème 5	...	environ 20 points
problème 6	...	environ 15 points

Problème 1 :

- a) Pour la fonction $f(x) = b.a^x$, si x augmente de 3, alors $f(x)$ double sa valeur. Déterminer a .
- b) Déterminer la dérivée $f'(x)$ de $f(x) = \frac{x+3}{\sin x}$.
- c) 10000 couronnes sont placées sur un compte. Quatre ans plus tard, on obtient 14641 couronnes. Déterminer l'intérêt annuel moyen.
- d) Tracer le graphe de $f(x) = 120x^{-2}$ dans un système logarithmique double de coordonnées.
- e) Effectuer la division : $(x^3 - 4x^2 + 7x - 6) : (x^2 - 2x + 3)$.

Problème 2 :

Dans le triangle ABC , $\hat{A} = 32,8^\circ$;
 $a = 3,51$ et $c = 5,72$. Comme
montré sur la figure il y a deux
formes possibles de triangles ABC .
Calculer b pour chacune.



Problème 3 :

Une fonction f est définie par : $f(x) = \ln(2x + 1) - 4x, x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. Déterminer la monotonie de f . Dessiner précisément le graphe de f . Déterminer l'ensemble image de f .

Problème 4 :

Dans un jeu d'ordinateur vous devez décrire rapidement une orbite. La table ci-dessous donne les pourcentages de joueurs répartis en fonction du temps, pour un grand nombre de joueurs :

temps en mn	% de joueurs
0 - 5	2,4 %
5 - 7	19,6 %
7 - 9	43,0 %
9 - 11	29,3 %
11 et +	5,7 %

- 1) Montrer que le temps pris par un joueur pour décrire l'orbite est distribué approximativement suivant une loi normale.
- 2) Déterminer la moyenne et l'écart type de cette loi normale.
- 3) Dix joueurs sont choisis au hasard. Calculer la probabilité qu'ils prennent 7 à 9 mn pour décrire l'orbite.

Problème 5 :

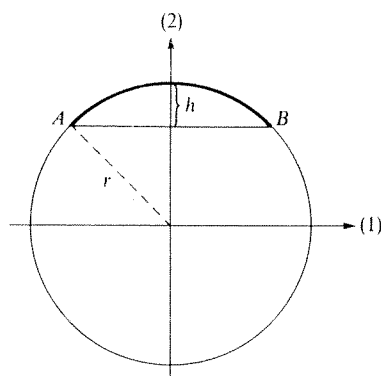
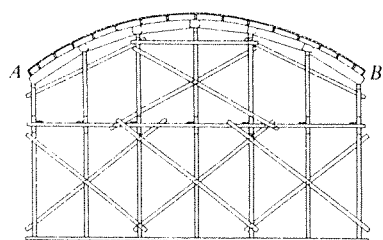


Figure 1 : l'échelle n'est pas respectée pour les relations entre dimensions.

On utilise un coffrage en bois pour couler du béton. Dans la figure 1 on voit un dessin, en coupe verticale, du coffrage d'un toit de forme circulaire. Sur la figure 2, ce cercle est tracé dans un système de coordonnées. L'arc \widehat{AB} correspond au coffrage et h est la plus grande hauteur du coffrage au-dessus de la corde $[AB]$ avec $AB = 9m$ et $h = 1,5m$.

Montrer que le rayon r du cercle vaut $7,5m$ et déterminer une équation de ce cercle.

L'équation du cercle est utilisée pour la construction, par exemple pour calculer la hauteur en différents points. Déterminer la hauteur en un point situé à $2m$ de A . L'angle entre la tangente en A au cercle et l'horizontale est une donnée importante pour le coffrage. Si l'angle est supérieur à 35° , le coffrage doit être plus solide. Déterminer si c'est le cas.

Problème 6a :

La figure 1 montre un container, de forme cylindrique, de rayon r , de largeur l et de volume $V = \pi r^2 l$. La figure 2 est extraite d'un document postal de 1992. Un paquet doit être envoyé au Groenland. La forme du paquet doit être celle de la figure 1. La longueur du paquet plus le périmètre du cercle valent 250 cm. Montrer que le volume du paquet est $V = 250\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$.

Déterminer le volume V maximum.



Figure 1

Formater maksimum Pakker		
Danmark	100 x 60 x 60 cm	Længde 150 cm
Færøerne		Diameter 25 cm
Volumenpakker	Længde 150 cm	Længde 200 cm
	Rumfang 1m ³	Rumfang 1m ³
Grønland	Længde 100 cm	Længde 150 cm
	Længde	Længde
	+omkreds 250 cm	+omkreds 250 cm

Figure 2

Problème 6b :

Dans un système de coordonnées on considère la parabole \mathcal{P} et la droite l avec $\mathcal{P} : y = x^2 - 8x + 11, l : y = -\frac{1}{2}x$. Dessiner l et \mathcal{P} dans le système de coordonnées. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre l et \mathcal{P} et résoudre $-\frac{1}{2}x < x^2 - 8x + 11$. \mathcal{P} a une tangente parallèle à l . Déterminer l'intersection de cette tangente avec (Oy) .

[On rappelle que des problèmes 6e et 6b seul l'un d'eux doit être traité.]

Annexe 2

Exemple de sujet du baccalauréat série mathématique, fin de 3e année
 Mathématiques : haut niveau – Mercredi le 18 août 1992 (9 h à 13 h)

Un seul des problèmes 6a et 6b est à traiter.

Parmi les problèmes 6e et 6b un seul doit être résolu.

La répartition des points est la suivante :

pour chaque problème 1, 2, 3 et 4	environ 15 points ...
pour le problème 5	environ 25 points ...
pour le problème 6	environ 15 points. ...

Problème 1 :

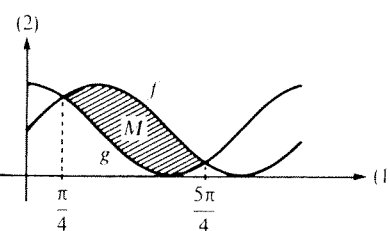
Dans un système de coordonnées de l'espace on donne deux droites parallèles l et m sous forme paramétrique :

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Déterminer la distance entre l et m . Déterminer une équation du plan α , contenant l et m . Une sphère K de centre $C(-5, 2, 1)$ est tangente au plan α . Déterminer une équation de K .

Problème 2 :

Sur la figure est hachuré un ensemble M de points délimité par les courbes des fonctions f et g , avec : $f(x) = \sin x + 1$, $g(x) = \cos x + 1$. Déterminer l'aire de M . Déterminer le volume du solide de révolution engendré par une rotation de M autour de l'axe (Ox) .

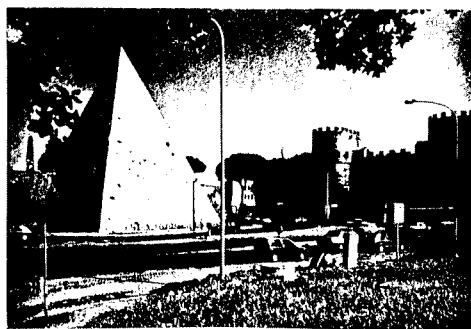


Problème 3 :

Déterminer la solution f de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} e^{-y}$ sachant que $f(\sqrt{3}) = 0$. Donner l'allure de la courbe de f .

Problème 4 :

La figure ci-jointe montre la pyramide de Cestius à Rome. Cette pyramide a pour base un carré de 30 m de côté. Son sommet se situe à 37 m, au-dessus du point d'intersection des diagonales de sa base. Déterminer l'angle entre la base et une face inclinée de la pyramide.



Déterminer l'angle entre deux faces inclinées voisines.

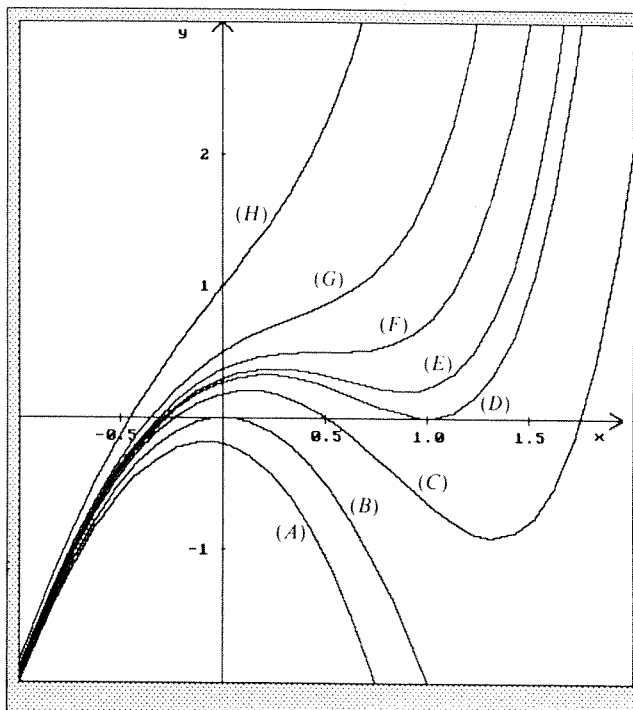
Indication : on pourra dessiner éventuellement la pyramide dans un système de coordonnées.

Problème 5 :

La figure ci-jointe montre l'impression d'une série de courbes solutions de l'équation différentielle : $y' - 2y = 4x^2 - 4x$.

Déterminer le polynôme du 2^e degré $p(x)$ solution de l'équation différentielle. Déterminer parmi les courbes précédentes quelle est sa courbe.

On considère la famille de fonctions f_c définies par $f_c(x) = c e^{2x} + p(x)$, où c est un réel.



Montrer que chaque fonction f_c est solution de l'équation différentielle.

Pour une valeur déterminée de c la fonction f_c a la courbe (D) . Déterminer cette valeur de c .

Sur la figure ci-jointe on voit que des courbes ont une tangente horizontale. L'ensemble des points de tangence des tangentes horizontales décrit une parabole. Déterminer une équation de cette parabole.

Problème 6 :

6a) On indique que $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ est une primitive de $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Utiliser cette indication pour calculer $\int \frac{1-\ln x}{x^2} (\frac{1}{2}x^2 + 3) dx$.

6b) Soient dans un système de coordonnées les deux vecteurs $\vec{a} = (\frac{2t}{7+t})$ et $\vec{b} = (\frac{8+2t}{7-t})$, où t est réel.

Déterminer la valeur de t pour laquelle $\frac{1}{2}\vec{b}$ est la projection de \vec{a} sur \vec{b} .

Remarque : parmi les problèmes 6a) et 6b) un seul doit être résolu.

Il devient difficile pour l'I.R.E.M. de composer tous les articles proposés pour 'L'Ouvert' et nous nous trouvons souvent confrontées à de petits problèmes.

S'il vous est possible de nous transmettre un texte à reproduire tel-quel, pourriez-vous veiller à respecter certains petits détails :

- impression recto seulement,
- interligne 2,
- titre centré et en gras,
- pas d'alinéa,
- largeur du texte : 15 cm,
- hauteur du texte : 22 cm,
- nous fournir les figures sur feuille séparée.

Si vous avez l'habitude de travailler en T_EX ou en Word (sur PC ou sur Mac) merci de nous transmettre votre texte sur une disquette (qui sera retournée) ainsi que le document papier.

O. SCHLADENHAUFEN et E. LE GUYADER.

DES HEXAGONES AUX POLYGONES

Pierre RENFER

Lycée Fustel de Coulanges de Strasbourg

L'article sur les hexagones du "Rallye de Première", publié dans 'L'Ouvert' n° 76, m'a suggéré le problème suivant :

Problème

Soient P_1, P_2, \dots, P_n les sommets consécutifs d'un polygone convexe régulier à n sommets.

Combien existe-t-il de polygones, ayant pour sommets les points P_1, P_2, \dots, P_n , étant entendu qu'on ne distingue pas deux polygones isométriques ?

Ce petit problème peut agréablement illustrer la notion d'opération de groupe sur un ensemble.

Rappels sur les résultats généraux

1) Définition

Une opération (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble E est une application

$$\begin{aligned} f : G \times E &\longrightarrow E \\ (\sigma, x) &\longmapsto \sigma.x \end{aligned}$$

vérifiant les deux propriétés :

- $\forall x \in E, e.x = x$, e désignant l'élément neutre de G ,
- $\forall (\sigma, \tau) \in G^2, \sigma.(\tau.x) = (\sigma\tau).x$.

2) Orbites

L'opération définit sur E une relation d'équivalence \mathcal{R} par :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists \sigma \in G, y = \sigma.x.$$

Les classes d'équivalence sont appelées les **orbites** (le choix du mot orbite est un clin d'œil à un exemple facile d'opération de groupe, où E est le plan affine euclidien et G est le groupe des rotations autour d'un centre O donné dans E avec :

$$\begin{aligned} f : G \times E &\longrightarrow E \\ (r, M) &\longmapsto r(M). \end{aligned}$$

Les orbites sont alors les cercles concentriques, de centre O).

3) Stabilisateur d'un élément de E

Pour tout x dans E , soit $S(x) = \{\sigma \in G \mid \sigma.x = x\}$, $S(x)$ est un sous-groupe de G , appelé **stabilisateur de x** .

4) Une première formule de dénombrement

On suppose que le groupe G est d'ordre fini. Si $\omega(x)$ désigne l'orbite de l'élément x de E , alors :

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(\omega(x)) \times \text{Card}(S(x)).$$

Démonstration

Pour $y \in \omega(x)$, soit $C_y = \{\sigma \in G \mid \sigma.x = y\}$. Si τ est un élément particulier de C_y , on peut définir la bijection :

$$\begin{aligned} C_y &\longrightarrow S(x) \\ \sigma &\longmapsto \tau^{-1}\sigma. \end{aligned}$$

Donc : $\text{Card}(C_y) = \text{Card}(S(x))$.

Et :

$$\begin{aligned} \text{Card}(G) &= \sum_{y \in \omega(x)} \text{Card}(C_y) = \sum_{y \in \omega(x)} \text{Card}(S(x)) \\ &= \text{Card}(\omega(x)) \times \text{Card}(S(x)). \end{aligned}$$

5) Théorème de Burnside-Frobenius

Soit $A_\sigma = \{x \in E \mid \sigma.x = x\}$, pour $\sigma \in G$.

Soit Ω l'ensemble des orbites. Alors

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{\sigma \in G} \text{Card}(A_\sigma).$$

Démonstration

Soit $U = \{(\sigma, x) \in G \times E \mid \sigma.x = x\}$. Il suffit de calculer de deux façons $\text{Card}(U)$:

$$\begin{aligned} \text{Card}(U) &= \sum_{\sigma \in G} \text{Card}(A_\sigma) = \sum_{x \in E} \text{Card}(S(x)) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \text{Card}(S(x)) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\omega)} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \text{Card}(G) = \text{Card}(\Omega) \times \text{Card}(G) \end{aligned}$$

Solution du problème

• L'ensemble E est ici l'ensemble des polygones, avant l'identification des polygones isométriques. Cet ensemble est facile à dénombrer.

Un polygone s'obtient par un circuit partant de P_1 et revenant sur P_1 , en suivant n arêtes et en passant par tous les points de $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$. Cela revient à donner une permutation de $\{P_2, P_3, \dots, P_n\}$. Le nombre de ces permutations est $(n-1)!$.

DES HEXAGONES AUX POLYGONES

Alors : $\text{Card}(E) = \frac{1}{2}(n-1)!$ car le circuit parcouru en sens inverse définit le même polygone.

- On fait opérer le groupe diédral \mathcal{D}_n des isométries conservant \mathcal{P} (il contient n rotations et n symétries axiales).

Le problème consiste à compter le nombre d'orbites, qui est fourni par la formule de Burnside-Frobenius. Il reste à calculer $\text{Card}(A_\sigma)$, pour tout σ de $G = \mathcal{D}_n$.

1) Cas : n impair $n = 2m + 1$

C'est le cas le plus simple.

a) Si σ est une rotation d'ordre d

Alors d divise n . Soit $k = \frac{n}{d}$.

Si l'on fait opérer le groupe cyclique engendré par σ sur $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, on obtient k orbites. Un polygone de A_σ , c'est-à-dire invariant par σ , est défini par un circuit dont les k premiers sommets appartiennent à des orbites distinctes, sinon on obtiendrait un retour prématuré sur P_1 , en faisant agir les puissances de σ sur cette première partie du circuit.

Le $(k+1)^{\text{e}}$ point du circuit est dans l'orbite de P_1 et si l'on identifie cette orbite au groupe des racines d èmes de l'unité, P_1 étant identifié à 1, alors le $(k+1)$ ème point doit être générateur du groupe, sinon on aurait encore un retour prématuré sur P_1 . Ces générateurs sont au nombre de $\varphi(d)$, où φ est l'indicateur d'Euler.

Finalement :

$$\text{Card}(A_\sigma) = \frac{1}{2}(k-1)!d^{k-1}\varphi(d).$$

(Il y a $(k-1)!$ façons de choisir les orbites du 2^e, 3^e, ... k^{e} point, puis d^{k-1} façons de choisir les $(k-1)$ points dans ces $(k-1)$ orbites, puis $\varphi(d)$ façons de choisir le $(k+1)^{\text{e}}$ point.

On divise par 2, car le circuit en sens inverse définit le même polygone).

b) Si σ est une symétrie axiale

L'axe δ passe par un point de \mathcal{P} , par exemple P_1 . Parmi les arêtes d'un polygone de A_σ , une et une seule est symétrique par rapport à δ et elle passe par le $(m+1)^{\text{e}}$ et le $(m+2)^{\text{e}}$ point du circuit partant de P_1 , sinon on obtiendrait un retour prématuré sur P_1 en faisant agir σ sur la première partie du circuit.

Si l'on fait opérer le groupe $\{Id, \sigma\}$ sur \mathcal{P} , on obtient m orbites à deux éléments et l'orbite $\{P_1\}$.

Les 2^e, 3^e, ..., $(m+1)^{\text{e}}$ points du circuits sont dans les m orbites distinctes à deux éléments.

Finalement :

$$\text{Card}(A_\sigma) = \frac{1}{2}m!2^m.$$

(Il y a $m!$ façons de choisir les m orbites, puis 2^m façons de choisir les m points dans ces orbites.)

On peut maintenant appliquer la formule de Burnside-Frobenius, sachant que $G = \mathcal{D}_n$ contient $\varphi(d)$ rotations d'ordre d (si d divise n) et n symétries axiales.

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2} m! 2^m n + \sum_{d/n} \frac{1}{2} \left(\frac{n}{d} - 1 \right)! d^{\frac{n}{d}-1} \varphi(d)^2 \right)$$

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{4n} \left(m! 2^m n + \sum_{d/n} \left(\frac{n}{d} - 1 \right)! d^{\frac{n}{d}-1} \varphi(d)^2 \right)$$

2) Cas n pair $n = 2m$

a) Si σ est une rotation d'ordre $d \neq 2$.

On obtient comme en 1) a) :

$$\text{Card}(A_\sigma) = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{d} - 1 \right)! d^{\frac{n}{d}-1} \varphi(d).$$

b) Si σ est une symétrie dont l'axe δ passe par deux points de \mathcal{P} .

Soit P_1 l'un des points de l'axe δ .

Aucune arête d'un polygone de A_σ n'est perpendiculaire à δ , car en complétant à l'aide de σ la première partie du circuit de P_1 jusqu'à une telle arête, on obtiendrait un retour prématuré sur P_1 .

Le $(m+1)^{\text{e}}$ point du circuit est P_{m+1} , le point diamétralement opposé à P_1 , sinon on aurait encore un retour prématuré sur P_1 .

Si l'on fait opérer le groupe $\{Id, \sigma\}$ sur \mathcal{P} , on obtient $(m-1)$ orbites à deux éléments et les deux orbites $\{P_1\}$ et $\{P_{m+1}\}$. Les 2^{e} , 3^{e} , ..., m^{e} points sont dans les $(m-1)$ orbites distinctes à deux éléments.

Finalement :

$$\text{Card}(A_\sigma) = \frac{1}{2} (m-1)! 2^{m-1}.$$

c) Si σ est une symétrie dont l'axe δ ne passe par aucun point de \mathcal{P}

Pour un polygone de A_σ , il y a 0 ou 2 arêtes perpendiculaires à δ , sinon on aurait un retour prématuré sur P_1 .

- Dans le premier cas, le $(m-1)^{\text{e}}$ point du circuit est le symétrique de P_1 par rapport à δ . On trouve : $\frac{1}{2} (m-1)! 2^{m-1}$ polygones de ce type.

- Dans le second cas, il y a C_m^2 façons de choisir les deux arêtes perpendiculaires à δ .

Si l'on note P_1 l'un des sommets de l'une de ces deux arêtes, le m^{e} point du circuit est sur l'autre arête. Si l'on fait opérer le groupe $\{Id, \sigma\}$ sur \mathcal{P} , on obtient m orbites à deux éléments. Les 2^{e} , 3^{e} , ..., $(m-1)^{\text{e}}$ points sont dans les $(m-2)$ orbites distinctes autres que celles des arêtes perpendiculaires à δ .

On trouve $C_m^2 \times 2(m-2)! 2^{m-2}$ polygones de ce type (il y a $(m-2)!$ façons de choisir les orbites des 2^{e} , 3^{e} , ..., $(m-1)^{\text{e}}$ points, puis 2^{m-2} façons de choisir les points dans les $(m-2)$ orbites, puis deux façons de choisir le m^{e} point.

Ici la division par 2 n'a pas lieu, car on a privilégié le sens de parcours ne commençant pas par l'arête perpendiculaire à δ issue de P_1).

Finalement :

$$\begin{aligned}\text{Card}(A_\sigma) &= \frac{1}{2}(m-1)!2^{m-1} + 2C_m^2(m-1)!2^{m-2} \\ \text{Card}(A_\sigma) &= (m-1)!(m+1)2^{m-2}\end{aligned}$$

d) Si σ est la symétrie centrale

Un polygone de A_σ possède 0 ou 2 arêtes diamétrales, qui jouent le même rôle que les arêtes perpendiculaires à δ dans 2) c).

Donc :

$$\text{Card}(A_\sigma) = (m-1)!(m+1)2^{m-2}.$$

On applique maintenant la formule de Burnside-Frobenius sachant qu'il y a $\varphi(d)$ rotations d'ordre $d \neq 2$, m symétries de type b), m symétries de type c) et une symétrie centrale.

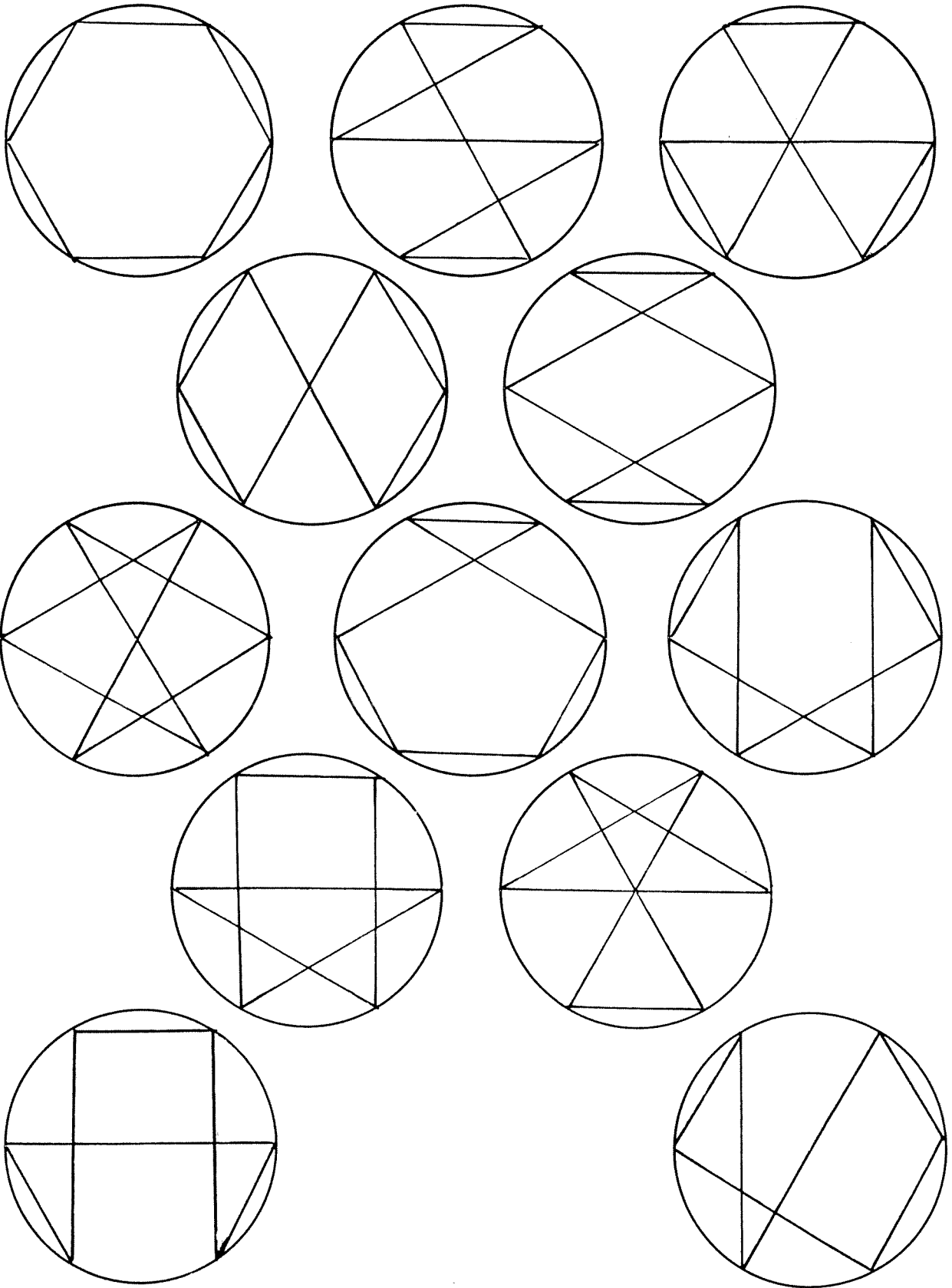
$$\begin{aligned}\text{Card}(\Omega) &= \frac{1}{2n}((m-1)!2^{m-2}(m+1)^2 + \frac{1}{2} \sum_{d/n, d \neq 2} \left(\frac{n}{d} - 1\right)! d^{\frac{n}{d}-1} \varphi(d)^2) \\ \text{Card}(\Omega) &= \frac{1}{4n}((m-1)!2^{m-1}m(m+3) + \sum_{d/n} \left(\frac{n}{d} - 1\right)! d^{\frac{n}{d}-1} \varphi(d)^2)\end{aligned}$$

Dans cette dernière formule, le cas $d = 2$ est compris dans la somme.

Quelques valeurs :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Card (r)	1	2	4	12	39	202	1219	9468	83435	836017

Voici à titre d'exemple, en page suivante, les douze orbites correspondant au cas de l'hexagone régulier.



PETITES PERTURBATIONS ET GRANDES ERREURS

Samir AKESBI et Jean LEFORT ¹

INTRODUCTION

Calculer est une part non négligeable de l'activité mathématique. L'usage systématique de puissantes machines a rejeté dans l'ombre les problèmes de fiabilité des calculs. Ne suffit-il pas de travailler avec beaucoup de chiffres significatifs pour être sûr du résultat sans avoir à se préoccuper de la précision ou à se lancer dans un calcul d'erreurs toujours assez fastidieux ?

En fait les logiciels actuels ne font que reculer les difficultés et s'ils permettent de résoudre sans fautes un système de quelques équations à quelques inconnues (en général), les problèmes resurgissent devant un système de quelques milliers d'équations avec autant d'inconnues (et ces problèmes ne sont pas rares dans l'industrie).

Par ailleurs, des problèmes courants sont fournis avec des données mesurées, c'est-à-dire entachées d'une erreur de mesure. Comment se propage jusqu'au résultat une légère perturbation des données ? Le résultat reste-t-il fiable et avec quelle précision ?

Enfin de nombreuses méthodes mathématiques ne sont elles-mêmes que des méthodes approchées : calcul d'intégrales définies, tabulation de fonctions, résolution d'équations différentielles... On y discrétise un problème continu et l'on se rend vite compte qu'il ne sert à rien de prendre le pas de discrétisation trop petit et qu'il y a un optimum fonction de la méthode utilisée et des erreurs d'arrondis dont on ne peut s'affranchir.

QUELQUES EXEMPLES

Illustrons un peu notre propos :

1) Considérons le système linéaire $AX = B$: $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \end{pmatrix}$.

On a $\det A = -1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$ et la solution exacte est : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Modifions très légèrement le vecteur colonne B en $B' = \begin{pmatrix} 19,2 \\ 16,9 \end{pmatrix}$; alors la nouvelle solution

est : $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 9 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19,2 \\ 16,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3,8 \end{pmatrix}$. On peut comparer la perturbation initiale à la perturbation finale en utilisant la norme euclidienne des vecteurs colonnes et en mettant en regard les erreurs relatives : $\frac{\|B'-B\|}{\|B\|} = 0,0088$ tandis que $\frac{\|X'-X\|}{\|X\|} = 2,6542$. L'erreur relative est ainsi multipliée par 300 et quelques !

2) Reprenons le même système linéaire et perturbons cette fois ci la matrice A en écrivant $A'Y = B$ avec $A' = \begin{pmatrix} 10 & 8,9 \\ 9,1 & 8,1 \end{pmatrix}$ ce qui donne : $A'^{-1} = \begin{pmatrix} 810 & -890 \\ -910 & 1000 \end{pmatrix}$, $\det A' = 0,01$ et la

¹ D'après la conférence prononcée par Samir Akesbi le 23 février 1994 à l'U.H.A à Mulhouse et qui avait pour titre : « *Grandes erreurs dues à des petites perturbations en calcul sur machine* ». Le texte de la conférence a été remanié et augmenté pour le présent article.

solution est $Y = \begin{pmatrix} 260 \\ -290 \end{pmatrix}$. On remarque que ni $\det A'$, ni A'^{-1} , ni Y n'ont de point commun du point de vue ordre de grandeur avec $\det A$, A^{-1} et X . Une variation d'environ 1% en valeur relative sur chacun des coefficients de A a entraîné des variations non maîtrisables (de l'ordre de 300 % en valeur relative) sur les divers résultats.

3) Prenons maintenant le système linéaire :
$$\begin{cases} (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}y = 0 \\ 2x + (3 - \sqrt{3})y = 0 \end{cases}$$
 dont le déterminant est

nul. Remplaçons ce système par le système approché :
$$\begin{cases} 2,732x + 1,732y = 0 \\ 2x + 1,268y = 0 \end{cases}$$
 dont le

déterminant vaut alors $2 \cdot 10^{-4} \neq 0$ et le système n'admet plus que la solution $(0; 0)$ ce qui est fort ennuyeux si on cherche, par exemple, les vecteurs propres d'une matrice dont on n'a les valeurs propres que de façon approchée.

4) Un troisième exemple de système linéaire est donné par le suivant que l'on cherche à résoudre par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 37639840x - 46099201y = 0 \\ 29180479x - 35738642y = -1 \end{cases}$$
 Avec une

calculatrice travaillant avec dix chiffres on trouve $(x = 78,9898$ et $y = 64,4949)$; avec une calculatrice travaillant avec seize chiffres on obtient $(x = 42407323,20$ et $y = 34625434,40)$. Cependant la valeur exacte de la solution est $(x = 46099201$ et $y = 37639840)$.

5) Considérons le polynôme $P(x) = 12192x^3 - 32257x^2 - 85344x + 225799$ et calculons $P(2,645752)$. La plupart des calculatrices donnent 0 (que l'on utilise la méthode de Horner ou une méthode directe) alors que la valeur exacte est $3,0563905536 \cdot 10^{-8}$. Mais même une calculatrice travaillant avec 16 chiffres significatifs donne $3,05590220 \cdot 10^{-8}$ par la méthode de Horner et $3,06172296 \cdot 10^{-8}$ par un calcul direct ce qui correspond tout de même à une erreur relative de 1,7 ‰, alors que x est connu à moins de 10^{-6} près.

6) On se propose de calculer une valeur approchée de la dérivée seconde au point 1 de la fraction rationnelle : $f(x) = \frac{4970x - 4923}{4970x^2 - 9799x + 4830}$. Pour cela, on utilise la formule :

$$f''(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - 2f(1) + f(1+h)}{h^2}$$
 en prenant h petit. La valeur exacte de $f''(1)$ est 94.

En prenant $h = 10^{-4}$ on devrait trouver la valeur approchée 90,79 et pour $h = 10^{-5}$, 93,76. Or un calcul sur ordinateur conduit respectivement à 113,59 et à 4952,31.

7) N'oublions pas l'exemple classique depuis l'article de Vignes en 1984² : Calculer l'expression $9x^4 - y^4 + 2y^2$ pour $x = 10864$ et $y = 18817$, calcul dont le résultat dépend essentiellement de la marque et du type de machine utilisée, ce qui a un effet spectaculaire sur des élèves de lycée, surtout quand ils apprennent que le résultat exact est 1 !

8) Dans l'article de Vignes déjà cité, on trouve le problème suivant : calculer $\exp(-30)$ à partir de la série entière de la fonction exponentielle. Le calcul itératif fait avec 14 chiffres significatifs sur un ordinateur CDC 7600 conduit à $6,25 \cdot 10^{-4}$ au lieu de $9,36 \cdot 10^{-14}$.

Nous pourrions multiplier les exemples et nous en rencontrerons d'autres dans cet article. Cherchons à comprendre ce qui se passe dans les différents cas pour savoir s'il est possible d'éviter ce genre de phénomènes et si oui, comment ?

² Peut-on faire confiance aux ordinateurs pour faire du calcul scientifique ? in « Gazette des mathématiciens » n°24, avril 1984.

UNE TENTATIVE DE CLASSIFICATION

Traditionnellement, on parle de problèmes de conditionnement dès qu'apparaissent les difficultés qu'ont illustrées les exemples précédents. Mais il nous faut distinguer au moins deux types différents de conditionnement : ceux inhérents au problème proposé, et ceux inhérents à la machine utilisée qui cumule les erreurs d'arrondi. Cette classification est assez sommaire. Un même problème peut être résolu par des algorithmes différents qui sur une même machine conduiront à des résultats plus ou moins précis. Nous ne ferons dans cet article qu'une brève allusion aux questions d'algorithme pour insister essentiellement sur les problèmes mal conditionnés.

Il ne faudra cependant pas oublier que les trois types de difficultés : conditionnement, arrondi et algorithme, sont souvent mêlés. Dans le paragraphe précédent, il est possible de dire que les exemples 1 et 2 sont clairement des problèmes de conditionnement, l'exemple 3 est clairement un problème d'arrondis mais les exemples 4 et 5 mêlent les trois difficultés. Quant aux exemples de calcul de valeurs de fonction, il est encore plus difficile de séparer le conditionnement intrinsèque du problème d'avec les erreurs d'arrondis.

§1 – CONDITIONNEMENT DES SYSTÈMES LINÉAIRES

NORME D'UNE MATRICE

Nous supposons que dans l'espace \mathbf{R}^n c'est la norme euclidienne qui est utilisée et nous définissons la norme euclidienne induite d'une application linéaire représentée par sa matrice A

par : $\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$ (définition clairement indépendante de la base orthonormée choisie).

Pour démontrer quelques propriétés élémentaires de cette norme sur les applications linéaires (et donc sur les matrices) nous définirons le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice (ou de l'application linéaire correspondante) comme étant $\max\{|\lambda_i|, \det(A - \lambda_i I) = 0\}$ c'est-à-dire que le rayon spectral est la plus grande des valeurs absolues des valeurs propres calculées sur \mathbf{C} (et non sur \mathbf{R}).

Si A est symétrique, alors $\|A\| = \rho(A)$. En effet, en notant λ la valeur propre de plus grand module, c'est-à-dire que l'on a $\rho(A) = |\lambda|$, et en prenant pour X , dans la définition de $\|A\|$, un vecteur propre associé à λ , on voit que $\|A\| \geq \rho(A)$. Réciproquement, on sait qu'une matrice symétrique admet une base de vecteurs propres orthonormés. Dans une telle base (e_i) on a : $X = \sum a_i e_i$ et $AX = \sum a_i \lambda_i e_i$ mais aussi $\|X\|^2 = \sum a_i^2$ et $\|AX\|^2 = \sum a_i^2 \lambda_i^2 \leq \lambda^2 \sum a_i^2$ ce qui prouve que $\|A\| \leq |\lambda|$ et assure la conclusion annoncée.

La première partie de la démonstration montre que l'on a toujours $\|A\| \geq \rho(A)$.

La définition de la norme d'une matrice implique que $\|AX\| \leq \|A\| \times \|X\|$. Mais on a d'une façon plus générale : $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$. Ceci se démontre grâce aux égalités et inégalités suivantes :

$$\|AB\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|ABX\|}{\|X\|} = \sup_{X \neq 0} \frac{\|ABX\|}{\|BX\|} \frac{\|BX\|}{\|X\|} \leq \sup_{X \neq 0} \frac{\|ABX\|}{\|BX\|} \times \sup_{X \neq 0} \frac{\|BX\|}{\|X\|} \leq \|A\| \times \|B\| .$$

On trouvera en annexe le calcul de la norme d'une matrice dans le cas général.

RETOUR SUR LES DEUX PREMIERS EXEMPLES

Le premier exemple consiste, à partir d'un système $AX = Z$, à perturber Z et à chercher la perturbation qui en résulte sur X , c'est-à-dire à transformer le système proposé en

$A(X + \Delta X) = Z + \Delta Z$ puis à calculer ΔX en fonction de ΔZ . Nous avons clairement, comme $AX = Z$, $A\Delta X = \Delta Z$ soit $\Delta X = A^{-1}\Delta Z$ et en passant aux normes :

$$\|\Delta X\| = \|A^{-1}\Delta Z\| \leq \|A^{-1}\| \times \|\Delta Z\|. \text{ Par ailleurs nous avons } \|Z\| \leq \|AX\| \leq \|A\| \times \|X\| \text{ et en divisant membre à membre (dans le bon sens !) les deux dernières inégalités sur les normes, il vient :}$$

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \|A\| \times \|A^{-1}\| \times \frac{\|\Delta Z\|}{\|Z\|}.$$

Le deuxième exemple consiste à perturber la matrice A et à chercher la perturbation qui en résulte sur le résultat X . Nous avons donc transformé le système en $(A + \Delta A)(X + \Delta X) = Z$. Nous trouvons donc $A\Delta X + \Delta A(X + \Delta X) = 0$ soit $\Delta X = -A^{-1}\Delta A(X + \Delta X)$ et en passant aux normes : $\|\Delta X\| \leq \|A^{-1}\| \times \|\Delta A\| \times \|X + \Delta X\|$ ou encore: $\frac{\|\Delta X\|}{\|X + \Delta X\|} \leq \|A\| \times \|A^{-1}\| \times \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$.

Dans les deux cas nous voyons apparaître la quantité $\|A\| \times \|A^{-1}\|$ à laquelle nous donnerons le nom de conditionnement de la matrice A et que nous noterons $\text{Cond}(A)$.

Dans les exemples proposés, A est une matrice symétrique de valeurs propres $9 \pm \sqrt{82}$ ce qui conduit à : $\|A\| = 9 + \sqrt{82}$ et $\|A^{-1}\| = |9 - \sqrt{82}|^{-1} = 9 + \sqrt{82}$ et par suite $\text{cond}(A) \approx 326$. Ce résultat explique bien la multiplication par 300 des erreurs relatives. Il faut toutefois noter que $\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$ et que $\|\Delta A\|$ ne peut se calculer qu'en revenant à la définition ; on trouve $10^{-1}\phi$, où ϕ est le nombre d'or, soit environ 0,16.

PROPRIÉTÉS DU CONDITIONNEMENT

- a) Le conditionnement d'une matrice est toujours supérieur ou égal à 1. En effet : $1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \times \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$. Plus ce nombre est proche de 1, meilleur est le conditionnement.
- b) On a de façon immédiate : $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$ et $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$.
- c) Si on note μ_n et μ_1 la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice symétrique $A \times A$ (ou $A^* \times A$ dans le cas complexe), alors $\text{cond}(A) = \sqrt{\mu_n / \mu_1}$. (On trouvera la démonstration en annexe).
- d) Si A est une matrice orthogonale (c'est-à-dire si $A^t = A^{-1}$) alors $\text{cond}(A) = 1$.

On voit donc que le conditionnement est une question de largeur spectrale et non pas une question de valeur du déterminant. Certes si le déterminant est petit en valeur absolue, la plus petite des valeurs propres sera faible et le conditionnement risque d'être mauvais, mais l'exemple 1 montre que cela n'est nullement une condition nécessaire.

Ce qu'il faut aussi savoir c'est que le conditionnement est en général d'autant plus mauvais que

la matrice a une grande taille. Par exemple la matrice $n \times n$ suivante :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

admet les nombres $4 \sin^2(k\pi/(2n+2))$ comme valeurs propres (pour k variant de 1 à n). Cette matrice étant symétrique, son conditionnement est le rapport de la plus grande à la plus petite des valeurs propres, c'est-à-dire que pour n grand ce conditionnement est de l'ordre de $4n^2/\pi^2$.

PETITES PERTURBATIONS ET GRANDES ERREURS

Or cette matrice joue un rôle important dans la résolution approchée de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(t) = 0$ comme on peut le voir en annexe.

QUELLE SOLUTION ?

La première idée consiste à remplacer le système proposé $AX = B$ par le système $CAX = CB$ avec C inversible et CA bien conditionnée. Malheureusement le calcul du produit CA dans le cas général et pour des matrices de très grandes dimensions coûte cher en temps machine. De plus C va dépendre de A et doit être recalculé dans chaque exemple ce qui accroît le temps de calcul. C'est pourquoi on préfère la méthode suivante : on écrit la matrice A sous la forme $M - N$ où M est une matrice facilement inversible (diagonale ou triangulaire). L'équation $AX = B$ se transforme en $MX = NX + B$ ou encore $X = (M^{-1}N)X + (M^{-1}B)$. On considère alors la suite récurrente de vecteurs : $X_n = (M^{-1}N)X_{n-1} + (M^{-1}B)$ qui, moyennant certaines précautions, converge vers la solution. On prend très généralement pour M soit la diagonale de A , soit le triangle inférieur gauche de A .

CAS DES MATRICES DE DÉTERMINANT NUL

Il n'est pas question ici de chercher un conditionnement qui est évidemment infini. Mais le but est en général autre comme le montre l'exemple 3. Il s'agit de trouver un espace propre. Quand les matrices qui interviennent ne sont pas trop grosses en taille, le plus simple consiste à supprimer une équation et à résoudre le système ainsi réduit ; c'est bien ainsi que l'on opère « à la main ». Bien évidemment il vaut mieux choisir correctement la ou les équations que l'on supprime pour être sûr de trouver tout l'espace propre cherché.

Ce principe ne s'applique pas dès que la taille des matrices est importante. On utilise alors des méthodes itératives qui permettent d'atteindre en même temps et de façon indépendante les vecteurs propres et les valeurs propres correspondantes. Il n'est pas question d'aborder ici l'étude de ces méthodes et de leur précision.

§ 2 – CALCUL DES VALEURS D'UNE FONCTION

GÉNÉRALITÉS

Calculer la valeur d'une fonction pour un choix particulier de la variable ne semble pas poser de difficultés particulières surtout qu'avant les études supérieures les élèves ne rencontrent guère de fonctions non explicites, et pourtant les fonctions trigonométriques, les fonctions exponentielles, les fonctions logarithmiques sont autant de fonctions pour lesquelles on devrait se poser des problèmes de tabulation, mais peu de personnes (y compris parmi les enseignants) savent comment ces fonctions ont été tabulées ou comment elles sont implantées sur les calculatrices ou les ordinateurs.

Un simple polynôme ou une fraction rationnelle révèle cependant des surprises. Les exemples 5, 6 et 7 donnés au début de l'article montrent bien certaines des difficultés qui peuvent apparaître.

Comme dans le cas des systèmes linéaires, on peut se poser la question de savoir quelle est la variation relative de $f(x)$ pour une variation relative donnée de x . Or la formule de Taylor ne permet de répondre que pour des variations absolues : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + o(x - x_0)$, ce qui montre que « l'erreur » sur la fonction est égale à « l'erreur » sur la variable multipliée par $|f'(x_0)|$. Mais souvent, ce qui est intéressant, c'est la façon dont se propage « l'erreur rela-

tive » qui est donnée par $\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_0} \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}$ à un $o(x - x_0)$ près ce qui fait que c'est la quantité $\frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}$ qui va mesurer le « conditionnement » de la fonction f .

Ceci ne tient pas compte des erreurs d'arrondi qui peuvent intervenir au cours des calculs. Il est connu de tous que le calcul sur calculatrice de $(1 + 10^{-15} - 1)/10^{-15}$ fournit la réponse 0 tandis que celui de $(1 - 1 + 10^{-15})/10^{-15}$ donne la réponse 1. Ce qui montre encore une fois que l'algorithme utilisé joue un rôle important dans la précision du résultat.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Tous les logiciels qui proposent le tracé graphique d'une fonction commence par tabuler la fonction en des points convenablement choisis puis ils relient les points obtenus par une courbe ou un segment³. Le plus souvent il s'agit de points régulièrement répartis à l'intérieur d'un intervalle qui est défini automatiquement ou bien que l'utilisateur peut préciser. Dans les deux cas, mais surtout dans le premier le logiciel n'aboutit à rien si la fonction présente des variations trop rapides. C'est ainsi que les exemples 5 et 6 ne donnent rien de bien probant sur la plupart des calculatrices graphiques et même avec un logiciel de calcul formel comme « Dérive ». Par contre, avec un tel logiciel, une fois étudiées les variations de la fonction, il est tout à fait possible d'obtenir un tracé acceptable en précisant une fenêtre de taille correcte. Ainsi dans l'exemple 5 il faut choisir x entre -3 à $+3$ et y entre -10^5 à $+3 \cdot 10^5$. Mais la fonction de l'exemple 6 ou même l'inverse de la fonction de l'exemple 5 sont plus rebelles. Cherchons à comprendre pourquoi.

Le polynôme $12192 X^3 - 32257 X^2 - 85344 X + 225799$ se factorise en $(12192 X - 32257)(X^2 - 7)$ c'est-à-dire que ses racines sont $\pm \sqrt{7}$ soit environ $\pm 2,645\ 751\ 311\ 06\dots$ et un nombre rationnel $32257 / 12192$ voisin de $2,645\ 751\ 312\ 33\dots$. Deux des racines sont donc séparé d'un peu plus de 10^{-9} . Entre ces deux nombres, la fonction atteint un minimum relatif de l'ordre de $-2,613 \cdot 10^{-14}$. Il est très difficile, voire impossible de mettre en évidence une telle situation graphiquement (c'est-à-dire même avec un fort agrandissement de la région considérée). Il est alors facile de croire à l'existence d'une racine double.

Considérons alors la fraction rationnelle correspondant à l'inverse de ce polynôme. La courbe représentative admet trois asymptotes verticales dont deux sont séparées d'environ 10^{-9} . Entre ces deux asymptotes, la courbe admet un maximum d'ordonnée $-3,827 \cdot 10^{13}$, valeur pratiquement inaccessible quelque soit l'échelle adoptée sur chacun des axes.

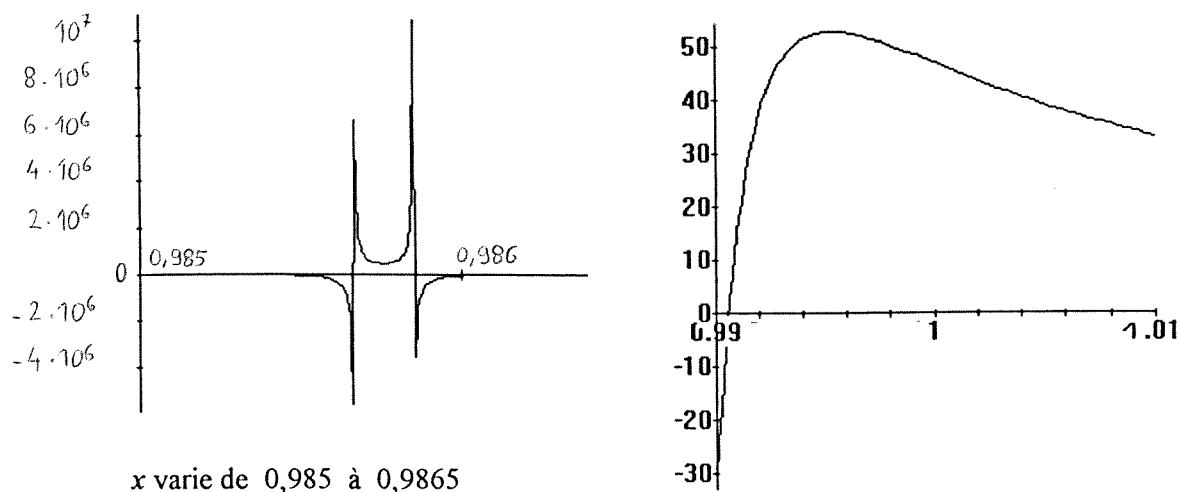
Il est facile de multiplier de tels exemples en utilisant des réduites convenables des racines carrées d'entiers (par exemple $99/70$ pour $\sqrt{2}$, etc.).

La fonction de l'exemple 6 présente les mêmes vicissitudes puisque l'on a : $f(x) = \frac{4970x - 4923}{4970x^2 - 9799x + 4830} = \frac{1680}{70x - 69} - \frac{1633}{71x - 70}$ ce qui montre que les deux asymptotes verticales sont situées aux environs de $0,9857$ et $0,9859$ et qu'entre ces deux asymptotes, la courbe présente un minimum dont les coordonnées valent environ $(0,9858 ; 467127)$, alors qu'il existe un maximum de coordonnées voisines de $(0,9953 ; 52,85)$ c'est-à-dire à droite des deux asymptotes. Il est donc quasiment impossible de dessiner sur un même graphique cartésien l'ensemble de la courbe. On trouvera ci-après deux extraits, à des échelles différentes,

³ Nous ne cherchons pas ici à analyser la gestion des asymptotes verticales. L'une des méthodes utilisées consiste à ne pas relier deux points dont la différence des ordonnées est trop grande.

PETITES PERTURBATIONS ET GRANDES ERREURS

obtenus à l'aide du logiciel « maple » et qui permettent de se rendre compte du phénomène ; il semble difficile de faire mieux.



TABULER UNE FONCTION

Ceux qui sont suffisamment âgés pour avoir fait du calcul numérique à l'aide de tables de logarithmes se souviennent que le calcul de $\log(\sin x)$ et $\log(\tan x)$ ne se faisait pas de la même façon selon que x était supérieur ou non à 4° . Dans le premier cas, on trouvait le nombre voulu directement dans la table (ou par interpolation linéaire) ; dans le second cas il fallait recourir aux quantités $\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ et $\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)$ où x était exprimé en minutes d'arc, quantités qui étaient tabulées à part. Cet artifice avait pour but de pallier la variation trop rapide des fonctions $\log(\sin x)$ et $\log(\tan x)$ au voisinage de 0 (présence d'une asymptote verticale).

La plupart des fonctions étudiées sont dérivables et par suite lipschitziennes sur des intervalles fermés convenables. Mais rien n'est dit sur la valeur de la constante et une fonction, même dérivable sur tout \mathbf{R} , peut présenter localement des variations très brutales qui remettent en cause la possibilité d'effectuer une interpolation linéaire entre deux points consécutifs.

a) **Le schéma de Horner** : Cette méthode, très en vogue dans les programmes actuels, minimise le nombre d'opérations (essentiellement des multiplications) dans le calcul des valeurs d'un polynôme. Elle n'assure pas la meilleure précision possible compte tenu du matériel utilisé. Pour s'en rendre compte étudions les résultats partiels dans l'exemple 5 :

opérations effectuées	résultats pour $x = 2,645\ 752$
$A = 12192x - 32257$	$A = 0,008\ 384$
$B = A \times x$	$B = 0,022\ 181\ 984\ 768$
$C = B - 85344$	$C = -85\ 343,977\ 818\ 015\ 232$
$D = C \times x$	$D = -225\ 798,999\ 999\ 969\ 436\ 094\ 464$
$E = D - 225799$	$E = 0,000\ 000\ 030\ 563\ 905\ 536$

On remarque que les résultats intermédiaires sont beaucoup trop grands (en particulier C et D) devant le résultat final qui est obtenu par soustraction et qu'il y a ainsi une perte de précision tout à fait catastrophique. On peut améliorer la précision du calcul sur machine en divisant le polynôme par $12192x$ avant tout calcul, pour remultiplier par cette même quantité à la fin. Mais c'est un palliatif difficile à mettre en oeuvre dans le cas général comme on peut s'en rendre compte dans l'étude de l'exemple 7 en effectuant le calcul selon divers regroupements.

b) **La précision relative** : Nous avons vu dans les généralités que ce qui est important c'est souvent la précision relative du résultat. Il est en effet assez futile d'obtenir une précision absolue de 10^{-5} sur un résultat de l'ordre de 10^{-8} ! Or la précision relative est gérée par la quantité $\frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}$ dont on voit bien qu'elle risque d'être grande (donc mauvaise) non

seulement quand $f'(x_0)$ est grand, mais aussi quand x_0 est voisin d'une racine de f . C'est exactement ce qui se passe dans le cas de l'exemple 5 où cette quantité vaut à peu près $7,687 \cdot 10^6$. Un exemple encore plus simple est donné par l'étude de la variation de $x^2 - 2$ entre $x = 1,414$ et $x = 1,415$ où $f(x)$ passe de la valeur $-0,000\ 604$ à la valeur $0,002\ 225$. On devra donc faire un calcul permettant d'évaluer l'erreur dès que le résultat paraîtra très faible

CALCUL APPROCHÉ DE LIMITES

C'est un exercice classique que de deviner la valeur d'une limite en utilisant la calculatrice. L'expérience montre qu'il ne faut pas prendre x trop près de x_0 dans le calcul approché de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ faute de quoi le résultat risque de ne pas correspondre à la réalité. C'est ce qui se passe dans les exemples 6 et 8 donnés au début de l'article. Cela provient du fait que pour $h = x - x_0$ trop petit les erreurs d'arrondi finissent par être du même ordre de grandeur que le résultat. Étudions de ce point de vue les deux exemples proposés.

Dans l'exemple 6, il y a d'abord l'erreur due à la méthode qui peut être évaluée à l'aide d'une formule de Taylor. On trouve $f^{IV}(1) \cdot h^2/12$ soit ici $-2\ 320\ 950\ 146 h^2$. On voit donc que h doit être très petit (de l'ordre de 10^{-6}) si on veut obtenir une précision acceptable sur le calcul de $f''(1)$. Mais c'est alors que l'erreur due aux arrondis devient très grande puisque, d'une part $f'(1)$ vaut -1657 et d'autre part au cours des calculs la machine est amenée à soustraire deux grands nombres pour obtenir le résultat.

Dans l'exemple 8, le calcul de $\exp(-30)$ se fait à l'aide de la série « exponentielle » ; cette série est alternée (dans le cas présent) et les termes croissent en valeur absolue jusqu'à $(-30)^{30}/(30!)$ qui est de l'ordre de $7,762 \cdot 10^{11}$ pour décroître ensuite. Comme le résultat final vaut environ $9,36 \cdot 10^{-14}$, le résultat qui sera affiché par la machine sera essentiellement la somme des erreurs d'arrondi, aussi loin qu'on puisse aller dans le développement en série de l'exponentielle. Ici le terme d'ordre 10^{-14} est atteint vers $n = 107$ et le terme d'ordre 10^{-16} , vers $n = 111$. On voit bien ici que l'algorithme utilisé n'est pas bon. Ce n'est d'ailleurs pas celui qui est utilisé dans les calculatrices.

CONCLUSION PROVISOIRE

Si le premier vol de la navette spatiale américaine n'a eu lieu qu'au printemps 1981 avec près de deux ans de retard sur le projet initial c'est en particulier en raison des difficultés de l'installation d'une protection thermique. Il a fallu trouver un compromis entre une configuration facilitant les manœuvres lors du retour où la navette évolue comme un planeur ne disposant d'aucun moyen de propulsion et une configuration permettant de limiter le flux de température au cours du freinage aérodynamique (la vitesse passe de 28 000 à 300 km/h en une demi-heure). Lors d'un des premiers essais, la navette s'est posée avec un gros trou sur le

PETITES PERTURBATIONS ET GRANDES ERREURS

bord d'attaque de la dérive. Fort heureusement aucun organe vital ne se trouvait derrière ce trou.

Pourquoi cette mauvaise prévision. Tout simplement parce que le flux thermique est régi par des équations aux dérivées partielles qu'on ne sait résoudre que par des méthodes numériques. On se contente donc de telles méthodes en calculant des valeurs aux nœuds d'un maillage que l'on espère assez serré. Ce ne fut pas le cas car la température variait de façon trop rapide dans la zone où se forma le trou, atteignant près de 1300°.

Cette mésaventure montre bien l'importance de l'évaluation des erreurs dans tout calcul approché. Puisse cela inciter les professeurs à mettre en garde leurs élèves face à un recours trop systématique à la calculatrice en attendant de réhabiliter un certain type de calcul d'erreur

§ 3 – ANNEXES

ANNEXE 1 : CALCUL DE LA NORME D'UNE MATRICE

On utilise le fait que $\|X\| = \sqrt{{}^t X X}$ (plus exactement $\det({}^t X X)$ mais on identifie les matrices 1×1 avec les scalaires). On peut alors écrire : $\|A\| = \sup \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup \sqrt{\frac{{}^t X' A A X}{{}^t X X}} = \sqrt{\sup \frac{{}^t X' A A X}{{}^t X X}}$.

Or ${}^t A A$ est une matrice symétrique qui admet donc une base de vecteurs propres orthonormés (e_i) associés aux valeurs propres respectives (μ_i) avec $0 < \mu_i \leq \mu_j$ si $i < j$. Les μ_i sont strictement positifs car $\|Ae_i\|^2 = {}^t e_i {}^t A A e_i = \mu_i$. Si on écrit $X = \sum a_i e_i$ on obtient $\|AX\|^2 = \sum a_i^2 \mu_i$ et $\|X\|^2 = \sum a_i^2$ ce qui permet d'affirmer que $\frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} = \frac{\sum a_i^2 \mu_i}{\sum a_i^2} \leq \mu_n$ la plus grande des valeurs propres et μ_n est manifestement atteinte (par le vecteur e_n) et par suite $\|A\| = \sqrt{\mu_n}$.

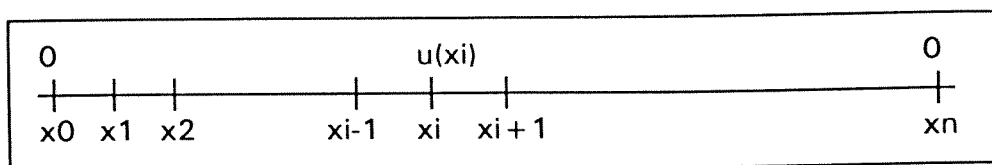
Comme la matrice A est inversible, on sait que pour tout X il existe un unique Y tel que $X = AY$ et on peut écrire $\|A^{-1}\|^2 = \sup_x \frac{\|A^{-1}X\|}{\|X\|} = \sup_y \frac{\|Y\|}{\|AY\|} = \frac{1}{\inf_y \frac{\|AY\|}{\|Y\|}} = \frac{1}{\mu_1}$ où μ_1 est la plus

petite des valeurs propres précédemment mises en évidence (le raisonnement est analogue).

En regroupant les deux résultats ci-dessus, on a le résultat $\text{cond}(A) = \sqrt{\mu_n/\mu_1}$ où μ_n et μ_1 sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de ${}^t A A$.

ANNEXE 2 : RESOLUTION APPROCHEE DE $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(t) = 0$

C'est le problème du mouvement d'une corde vibrante attachée à ses deux extrémités et dont on connaît l'accélération en tout point.



Découpons le segment représentant la corde en n morceaux égaux de longueur h dont les extrémités sont x_0, x_1, \dots, x_n . Les formules de Taylor nous permettent d'écrire :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{1}{2} h^2 u''(x_i) + o(h^2)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{1}{2} h^2 u''(x_i) + o(h^2)$$

En additionnant membre à membre et en négligeant le $o(h^2)$, il vient :

$$u(x_{i-1}) - 2 u(x_i) + u(x_{i+1}) = h^2 u''(x_i) = -h^2 f(x_i)$$

Comme on suppose que $u(x_0) = u(x_n) = 0$, puisque la corde est attachée à ses deux extrémités, on peut écrire les différentes égalités ci-dessus obtenues en faisant varier i de 1 à $n-1$ sous la

forme :
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}) \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}.$$
 On a bien mis en évidence cette matrice

tridiagonale.

On comprend bien que pour obtenir une précision importante il faut diminuer la valeur de h mais ce faisant on augmente la taille de la matrice et donc son conditionnement. Il semble naturel de penser qu'il existe une valeur de h optimale qui dépend de la précision avec laquelle est connue la fonction f .

HISTOIRE D'ALGORITHMES

Du caillou à la puce

Jean-Luc CHABERT

Évelyne BARBIN, Michel GUILLEMOT, Anne MICHEL-PAJUS,

Jacques BOROWCZYK, Ahmed DJEBBAR, Jean-Claude MARTZLOFF

Au sommaire :

Algorithmes des opérations arithmétiques – Les carrés magiques – Autour des méthodes de fausse position – Autour de l'algorithme d'Euclide – De la mesure du cercle au calcul de π – Les méthodes de Newton – Résolutions d'équations par approximations successives – Des algorithmes de l'arithmétique – Résolution de systèmes d'équations linéaires – Tables et interpolation – Quadratures approchées – Résolutions approchées d'équations différentielles – Approximation de fonction – Accélération de convergence.

Voir un extrait p. 52.

(Dans la collection "Regards sur la science", aux éd. Belin (1993).)

UN THÉORÈME ARITHMO-GÉOMÉTRIQUE ET SES GÉNÉRALISATIONS

Eugène EHRHART

Monsieur E. Ehrhart nous propose des informations complémentaires à ses articles parus dans le n° 72 de 'L'Ouvrier' et dans le n° 394 du 'Bulletin vert APMEP'.

L'arithmo-géométrie est actuellement l'objet de bien des recherches. J'expose ici l'essentiel de ma contribution de valeur reconnue par des appréciations autorisées récentes : "Les travaux de E. Ehrhart ont été de pionnier et maintenant donnent naissance à de nombreux travaux" (1993); Marcel Berger, Directeur de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques. "J'ai rendu hommage à vos travaux comme ils le méritent", au séminaire Bourbaki du 5 mars 1994 sur les "points entiers dans les polytopes convexes" (Michel Brion, Université de Grenoble).

Définitions.— Un point est "entier" si ses coordonnées le sont. Un polytope est "entier" si ses sommets le sont. Le nombre de points entiers d'un polytope est son "dénombrant". On désigne par n un entier ≥ 1 .

Théorème fondamental.— Le dénombrant j_n du polytope nP est un polynôme $j(n)$ de degré d , dimension du polytope P fermé convexe entier. Pour P ouvert le dénombrant i_n de nP est lié à j_n par la loi de réciprocité

$$i_n = (-1)^d j(-n) \quad j_n = (-1)^d i(-n).$$

La seconde formule de cette élégante loi résulte immédiatement de la première et réciproquement.

Pour les polytopes à 2, 3 ou 4 dimensions on a respectivement

$$\begin{aligned} j_n &= Sn^2 + \frac{p}{2}n + 1 \\ j_n &= Vn^3 + \frac{p-2}{2}n^2 + (i + \frac{p}{2} - V)n + 1 \\ j_n &= Vn^4 + \frac{S}{2}n^3 + (i + \frac{p}{2} - V - 1)n^2 + \frac{p-S}{2}n + 1. \end{aligned}$$

On désigne par i et p les dénombrants de P ouvert et de son bord. Pour le polygone, S est la surface de P , pour le polyèdre, V est son volume. Pour le polytope à 4 dimensions V est le volume 4-dimensionnel de P et S la "mesure réticulaire" de son bord. On obtient S en prenant pour unité dans chaque face la base du réseau de points entiers de l'hyperplan à trois dimensions qui la porte.

“Votre théorème fondamental est maintenant connu partout” (J. Wills, Université de Siegen, 1993). Moins connues sont ses généralisations. En voici d’abord la copieuse terminologie.

Définitions.— Un polytope est dit *normal* s’il est homéomorphe à une boule. Un point est *rationnel* si ses coordonnées le sont. Un polytope est rationnel si ses sommets le sont (dont un au moins non entier). Le *dénominateur* d’un point rationnel M est le plus petit entier k tel que le point kM soit entier; le dénominateur d’un polytope rationnel P est le plus petit entier k tel que le polytope kP soit entier. Un polytope à d dimensions est *semi-ouvert* si on supprime de son bord quelques faces $(d - 1)$ -dimensionnelles. On obtient le **polytope associé** en supprimant au contraire de son bord les faces $(d - 1)$ -dimensionnelles précédemment conservées. Un *nombre périodique* $u_n = [u_1, u_2, \dots, u_p]$ est égal au terme du crochet dont le rang est égal à n modulo p , sa *période*. Ainsi

$$[5, 0, -2] = \begin{cases} 5 & \text{si } n = 1 \pmod{3} \\ 0 & \text{si } n = 2 \pmod{3} \\ -2 & \text{si } n = 3 \pmod{3}. \end{cases}$$

Un polynôme $f(n)$ est dit **pseudo-polynôme**, si certains de ses coefficients sont des nombres périodiques, au lieu d’être constants. Le p.p.c.m. des périodes de ces coefficients périodiques est la *pseudo-période* de $f(n)$. Un pseudo-polynôme a donc deux caractéristiques, son degré et sa pseudo-période.

Passons maintenant aux généralisations.

- 1) P entier normal (donc convexe ou non) : le théorème fondamental subsiste.
- 2) P rationnel normal : le théorème subsiste, en y remplaçant le mot “polynôme” par “pseudo-polynôme”. Les pseudo-polynômes j_n et i_n ont le degré d , dimension de P , et la pseudo-période k , dénominateur de P .
- 3) P semi-ouvert normal, entier ou rationnel : le théorème subsiste en désignant alors par j_n et i_n les dénombrants de deux polytopes nP associés.

Théorème général.— Dans les trois cas, selon que P est entier ou rationnel, les dénombrants j_n et i_n du polytope nP sont **des polynômes ou des pseudo-polynômes** en n , de degré d , dimension de P , qui vérifient la **loi de réciprocité**.

Méthode des polytopes en combinatoire.— Avec les démonstrations et de nombreuses *applications numériques aux systèmes diophantiens linéaires*, les résultats précédents figurent dans mon livre “Polynômes arithmétiques et méthode de polyèdres en combinatoire”, vol. 35 de la collection “International series of numerical mathematics”, Birkhäuser Verlag, Bâle-Stuttgart, 1977 (j’appelais alors polynômes arithmétiques mes pseudo-polynômes). J’ai traité de tels systèmes (à domaines polygonaux) dans ‘*L’Ouvert*’ en septembre 1993 et (à domaines polyédriques) dans le ‘*Bulletin*’ A.P.M.E.P. en juin 1994. J’ai aussi résolu par la méthode des polyèdres un problème combinatoire difficile à deux paramètres : de combien de manières peut-on payer une somme de n francs avec m pièces de 10, 20, 50 ou 100 centimes? (*Journal de Crelle*, Tome 311/312, 1979).

DANS NOS GROUPEs I.R.E.M. :
DEUX PROBLÈMES AMUSANTS DE PHYSIQUE

Jean-Luc GASSER

Au nom du GROUPE MATHS-PHYSIQUE

Voici donc le deuxième article de cette série. On trouvera ci dessous une solution à chacun des problèmes posés.

SOLUTION DU PREMIER PROBLEME: LA COLONNE PERCEE

Partie Physique:

La solution classique à ce problème de physique est basée sur le théorème de Bernoulli, dont on déduit le théorème de Toricelli qui donne la vitesse d'écoulement v d'un liquide par un orifice pratiqué en mince paroi en fonction de la hauteur de liquide h :

$$v = \sqrt{2gh}$$

C'est cette formule qui permet de calculer la vitesse initiale horizontale de l'eau à la sortie de la colonne d'eau. On peut remarquer qu'elle est proportionnelle à \sqrt{h} , ce qui fournit l'occasion d'étudier une fonction en racine carrée de façon motivante!

Cependant aucun des deux théorèmes cités ci-dessus ne figurent au programme de l'enseignement secondaire. On peut faire un autre raisonnement qui permet d'arriver au même résultat en utilisant les outils dont disposent les élèves:

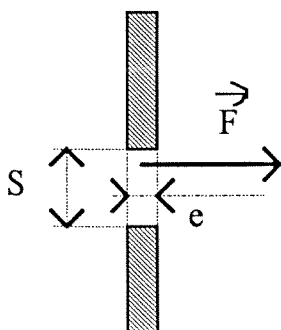


Figure 1

Les notations utilisées sont les suivantes:

- * S est la section de l'orifice, supposée "petite".
 - * F est la force s'exerçant sur la masse m de liquide que l'on étudie.
 - * ρ est la masse volumique de ce liquide.
 - * P est la pression s'exerçant à l'endroit considéré.
 - * h est la hauteur de liquide au dessus du point considéré.
 - * V est le volume de liquide contenu dans une goutte élémentaire de liquide, de masse m , qu'on étudie lors d'un déplacement de longueur e .
- La pression P , avant le passage à travers l'orifice est:

$$P = \frac{F}{S} \text{ (par définition) et on a aussi } P = \rho gh = \frac{m}{V} gh.$$

Par suite, le travail W de la force de pression F lors d'un déplacement du volume de liquide V sur une longueur e (traversée horizontale de la paroi) est:

$$W = F \times e = S \frac{m}{V} ghe.$$

Il est aussi égal à la variation de l'énergie cinétique: $W = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0$

Ce qui donne après simplification, comme $e = \frac{V}{S}$, la formule $v = \sqrt{2gh}$.

Remarquons que cette vitesse est égale à la vitesse acquise par un corps lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h . Le raisonnement, qui utilise le théorème de l'énergie cinétique, en

considérant une masse m d'eau partant du haut de la colonne et sortant par l'orifice donne le même résultat. Mais il est faux!

Partie Mathématique:

Une *première méthode* consiste à écrire l'équation de la parabole $y = f(x)$ décrivant la trajectoire de l'eau, et à écrire que la distance x cherchée est obtenue lorsque y prend la valeur correspondant au sol.

Une *deuxième méthode*, plus agréable à mettre en oeuvre, consiste à calculer d'abord le temps t de chute directement, qui ne dépend que de la hauteur entre l'orifice de la colonne et le sol ($H - h$). Il suffit alors de calculer la distance horizontale parcourue x , connaissant la vitesse horizontale v . Il est inutile d'établir l'équation de la parabole. Cette méthode est intéressante d'un point de vue physique puisqu'elle distingue les deux types de mouvement intervenant dans beaucoup de problèmes de chute des corps: le mouvement horizontal qui est uniforme, et le mouvement vertical qui est uniformément accéléré.

Le temps de chute t pour parcourir la distance $H - h$ est donné par la relation: $H - h = \frac{1}{2}gt^2$.

On en déduit la valeur de t : $t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$.

La distance x parcourue horizontalement pendant le même temps t est $x = vt$, soit:

$$x = \sqrt{2gh} \times \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}.$$

La fonction donnant la distance x du point de chute du jet d'eau par rapport à la colonne en fonction de la hauteur h de liquide est donc:

$$f(h) = 2\sqrt{h(H-h)}$$

On obtient alors les points de chute des jets d'eau suivants en prenant $H = 5,5$:

Pour Albert: $f(4) = 2\sqrt{6} \cong 4,90m$

Pour Bertrand: $f(1) = 2\sqrt{4,5} \cong 4,24m$

Pour Claude: $f(2,5) = 2\sqrt{7,5} \cong 5,47m$

Claude gagne donc son pari, mais il est possible de faire mieux! En effet, il s'agit de trouver le maximum de la fonction $f(h)$. Calculons sa dérivée:

$$f'(h) = \frac{-2h + H}{\sqrt{h(H-h)}}$$

Elle s'annule pour $h = \frac{H}{2}$ et le point de chute maximum du jet d'eau est: $f(2,75) = 5,5m$.

SOLUTION DU DEUXIEME PROBLEME: LE BICONE REMONTE LA PENTE

La maquette réalisée permet de constater que, pour certaines valeurs de l'angle de la déclivité et de son angle d'écartement, le bicône semble remonter la pente! L'interprétation physique est bien sûr immédiate: en réalité, le centre de gravité du bicône descend. On peut de plus conjecturer les propriétés suivantes en faisant varier les différents angles de la maquette: le bicône "descend" la pente si:

- l'angle d'écartement δ des deux pentes est trop faible.
- l'angle de la déclivité γ est trop élevé.
- l'angle au sommet β de chacun des cônes est trop faible.

Ces différentes observations devront être vérifiables sur la condition mathématique qui décrira le phénomène observé.

DEUX PROBLÈMES AMUSANTS DE PHYSIQUE

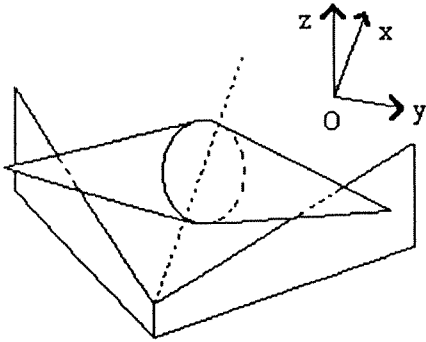
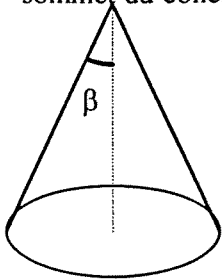


Figure 2

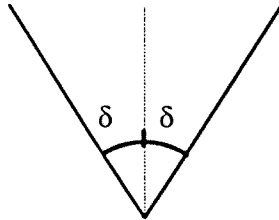
Pour la cohérence des notations, on se place dans un repère (O,x,y,z) comme indiqué sur la figure 2. Le point O est situé dans le plan vertical qui passe par les bases des deux cônes. L'axe z est vertical, les axes x et y sont dans un plan horizontal. Dans l'analyse du problème interviennent trois angles (quatre si on considère la fabrication du cône):

- Le demi angle au sommet du cône noté β précédemment.
- Le demi angle d'écartement de la pente noté δ .
- L'angle de la pente que remonte le cône, noté γ .

Le demi angle au sommet du cône.



L'angle d'écartement de la pente.



L'angle de la déclivité de la pente.

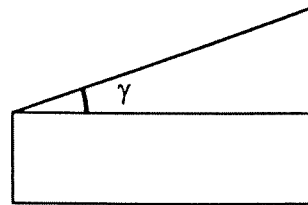
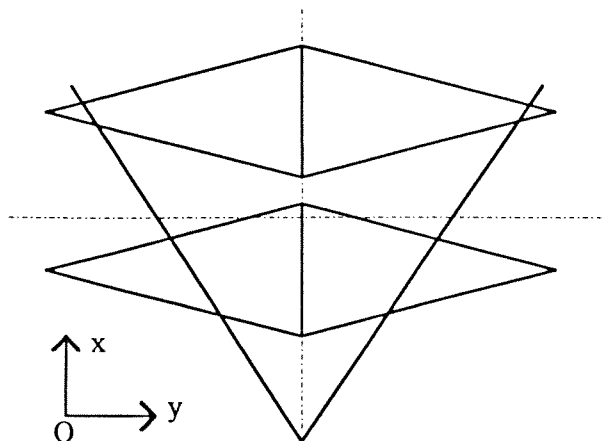
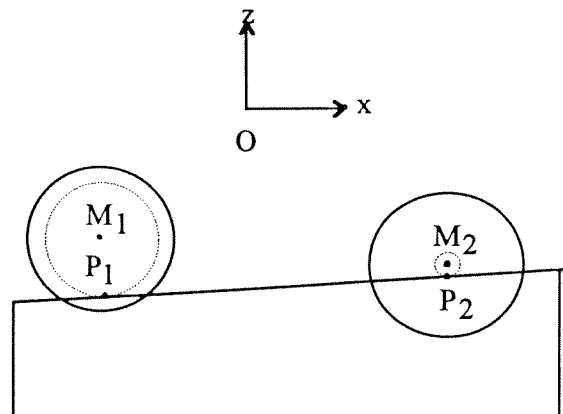


Figure 3

Il est utile de réaliser différentes vues de l'expérience, en ayant présent à l'esprit que les grandeurs réelles ne sont pas forcément respectées sur le dessin (voir figure 4). On note P_1 et P_2 les points de contact du cône avec le support. Leurs projections orthogonales sur l'axe du cône sont notées M_1 et M_2 . La dénivellation de l'axe du cône et donc de son centre de gravité est donnée par la distance $M_1P_1 - M_2P_2$. Le cône "remonte" la pente si cette valeur est positive, ce qui correspond en fait à une position plus basse du centre de gravité.



Vue de dessus



Vue de gauche

Figure 4

Les cotes des points M_1 et M_2 , et donc du centre de gravité du solide (voir figure 5) sont données par les relations:

$$z_1 = M_1 P_1 + z_0 \quad \text{et} \quad z_2 = M_2 P_2 + P_2 R + z_0$$

où z_0 représente une constante qui dépend du repère choisi, et qui s'éliminera dans la suite.

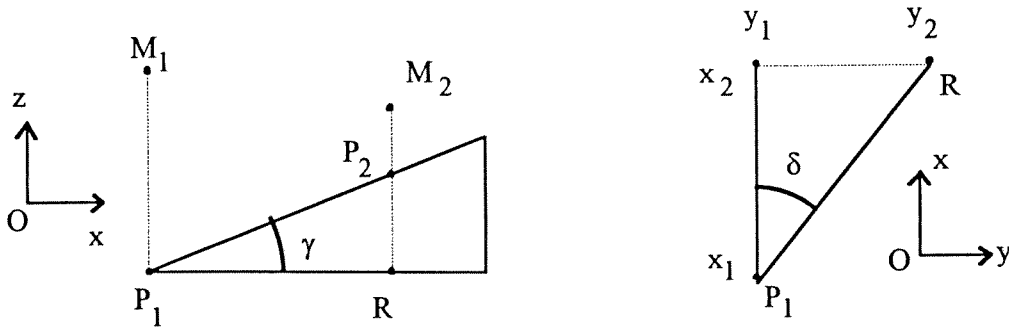


Figure 5

On obtient alors, compte tenu des diverses relations trigonométriques existant:

$$z_2 - z_1 = (y_2 - y_1) \left(\frac{\tan \gamma}{\sin \delta} - \tan \beta \right)$$

Le cône avance si, lorsque $y_2 - y_1 > 0$ (le cône s'est déplacé dans le sens de la montée), $z_2 - z_1 < 0$ (son centre de gravité descend). On obtient alors la condition recherchée pour que le cône "remonte" la pente:

$$\frac{\tan \gamma}{\sin \delta} - \tan \beta < 0$$

Si le cône est construit, l'angle β est fixé et on sait que $\sin \delta > 0$. Cette condition s'écrit alors:

$$\tan \gamma < \sin \delta \cdot \tan \beta$$

On peut vérifier la cohérence de la formule grâce aux remarques faites au début de l'article:

- Le cône étant fixé, si $\sin \delta$ augmente, donc si δ augmente (dans le cadre de notre problème), c'est à dire si l'angle d'ouverture de la pente augmente, l'angle γ peut augmenter. Ce qui se traduit par: plus l'ouverture de la pente est forte, plus le cône peut "remonter" une pente à déclivité élevée.

- L'angle de déclivité γ étant fixé, plus l'ouverture δ de la pente sera faible (δ petit), plus l'angle au sommet du cône devra être élevé (β grand). On peut remarquer que quelle que soit la valeur de δ , il existe un cône qui donnera l'impression de gravir une pente.

Cette solution qui n'utilise pas d'outils mathématiques évolués, mais qui demande une bonne vision dans l'espace, est inexacte si elle est présentée sous cette forme!! Elle a été rédigée par un mathématicien, qui savait qu'elle était fautive (!). En effet, si on observe le montage réalisé, il semble que le point de contact du demi bicône avec la déclivité (points P_1 ou P_2) n'est pas celui que l'on a supposé: il semble que ce point de contact ne soit pas sur la même verticale que l'axe du cône. A ce stade, il était difficile de déterminer la position exacte du point de contact sans faire appel à des notions de géométrie que personne n'avait envie de mettre en oeuvre.

DEUX PROBLÈMES AMUSANTS DE PHYSIQUE

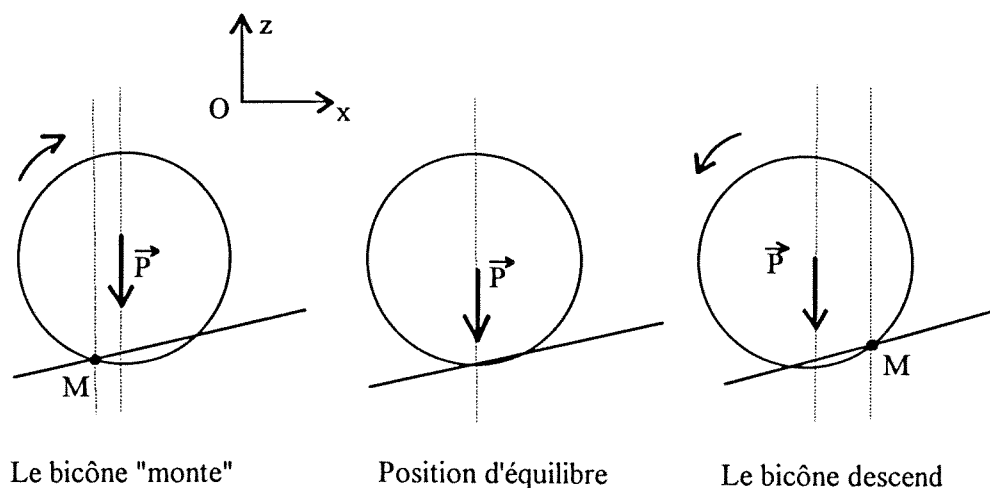


Figure 6

C'est alors que le physicien est venu au secours du mathématicien: si le cône roule, c'est qu'il est soumis à des forces qui le font avancer dans un sens ou dans l'autre. Faisons donc le bilan des forces qui s'exercent sur ce solide! Le cône est soumis à trois forces: le poids P et les réactions normales du plan incliné. Ces dernières n'interviennent pas dans la description du mouvement et leurs directions réelles sont difficiles à déterminer. C'est pourquoi on les a ommises sur la figure 6. Un solide qui est en mouvement de rotation est soumis à un couple de forces. L'axe instantané de rotation du solide est un axe dont la direction est Oy et qui passe par le point M cherché. Selon la position de cet axe par rapport à la verticale passant par le centre de gravité du solide, le cône ira dans un sens ou dans l'autre. En effet, le couple qui s'exerce change de sens suivant la position des points de contact par rapport à la verticale (voir figure 6). Sa valeur dépend de la distance entre les deux droites représentées en pointillés et du poids P . Cette figure est évidemment fautive puisqu'en vue de gauche, en faisant une coupe suivant un plan (O,x,z) , on n'obtient pas un cercle. Le point de tangence ne correspond pas à celui du cercle qui est dessiné, mais il faut bien faire une figure compréhensible! Par conséquent, on en déduit également la position des points de contact si le cône est soumis à un couple nul (il n'avance pas et ne recule pas): ils se trouvent sur la verticale de l'axe du cône.

On peut donc reprendre le raisonnement mathématique développé ci-dessus en modifiant légèrement sa forme: on suppose que les angles sont tels qu'on se trouve dans le cas d'équilibre du cône.

Toutes les relations écrites sont donc vraies, et la conclusion se fait alors sous la forme suivante:

Comme le cône est en équilibre, quelles que soient les valeurs de y_1 et de y_2 , $z_2 - z_1 = 0$. Il faut donc que le second terme du produit soit nul, et on aboutit à la relation d'égalité:

$$\tan \gamma = \sin \delta \cdot \tan \beta$$

Il reste encore à vérifier que cette égalité se transforme bien en l'inégalité précédemment établie si on modifie un des paramètres pour se retrouver dans une position où le cône roule, ce qui est évident d'un point de vue physique, mais l'est moins d'un point de vue mathématique.

Il est également intéressant de remarquer que le raisonnement physique permet de justifier a posteriori la solution mathématique envisagée. La recherche mathématique du point de contact du cône avec la pente est ardue et a été évitée de cette façon.

La solution générale a été développée ci-dessus, mais on peut la rendre plus accessible à des élèves en fixant certains paramètres, par exemple en prenant $\delta = \frac{\pi}{4}$ et en fixant $\beta = \frac{\pi}{6}$. L'expérience montre qu'il est plus facile de réaliser des expériences avec un cône peu pointu, ce qui correspond à une valeur élevée de β .

CONCLUSION

Nous avons présenté deux problèmes issus de la physique, que nous estimons être motivants, et qui peuvent être traités par le professeur de mathématiques en collaboration avec son collègue physicien. Dans le premier cas, la décomposition du mouvement de la chute suivant les axes permet une résolution agréable du problème. Dans le deuxième cas, le concours du physicien est indispensable pour valider simplement la solution mathématique envisagée. Au travers de ces deux problèmes, nous avons essayé de faire sentir au lecteur que:

-il est possible de partir de problèmes issus de la physique pour utiliser de façon intéressante les outils mathématiques du programme. De plus c'est l'occasion d'expérimenter, conjecturer, établir une relation et vérifier sa validité.

-la physique peut aussi servir à développer une idée en mathématique. Très souvent, on n'envisage que les mathématiques au service de la physique, alors que la réciproque peut aussi être envisagée. Les échanges peuvent s'effectuer dans les deux sens!

Bien entendu, nous n'avons présenté qu'un des aspects des interactions possibles. D'autres champs d'investigation existent, tels les problèmes de notation, ou les progressions éventuelles à respecter pour utiliser les notions de chacune des matières de façon harmonisée. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive, et beaucoup d'idées sont encore en cours de développement...

Pour aller plus loin dans l'analyse mathématique du phénomène observé avec le bicône, le lecteur peut se reporter à l'article suivant de F. DOUE intitulé "le bicône sur ses deux demi-droites".

DEUX PROBLÈMES AMUSANTS DE PHYSIQUE
LE BICÔNE SUR SES DEUX DEMI-DROITES

Lorsque nous avons découvert le problème posé par un bicône roulant ou glissant sur deux demi-droites fixes, nous n'avons pas pu résister au plaisir d'en rechercher une solution **purement mathématique**. En particulier, nous avons cherché à décrire précisément le contact du bicône sur son support, à voir quelle est la trajectoire du centre (de symétrie) du bicône, puis, au cours d'un roulement sans glissement, à déterminer le nombre de tours effectués par le bicône en fonction du déplacement linéaire de son centre.

Accrochez-vous, il va falloir une bonne vision dans l'espace!

I. Etude géométrique Soit OA et OA' les deux demi-droites de même origine supportant le bicône et soit P le plan bissecteur de ces demi-droites. On supposera, pour respecter une certaine symétrie, que le cercle de base du bicône reste constamment dans P , si bien que P est un plan de symétrie de la figure.

Le problème *géométrique* du contact du bicône avec son support est indépendant du problème *dynamique* posé, c'est-à-dire du mouvement ou non du bicône. En particulier, toute la figure reste invariante lors d'une rotation autour d'un axe horizontal Oy perpendiculaire à P . Il semble donc préférable, pour décrire la position des deux demi-droites OA et OA' dans l'espace, d'adopter d'autres notations, plus intrinsèques. Donc :

Avertissement : Changement de notations!

On appelle γ le demi-angle formé par les deux demi-droites OA et OA' , mesuré dans le plan OAA' , et on repèrera par α l'angle de ce plan (mesuré autour de Oy) par rapport à un plan fixe xOy , par exemple (mais ce n'est pas nécessaire, cf ci-dessous) un plan horizontal. Si on appelle OB la (demi-)bissectrice des droites OA et OA' , α est l'angle de OB avec xOy .

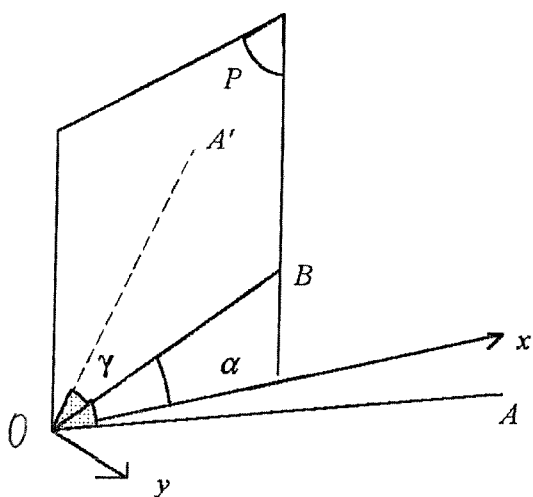


Figure 1

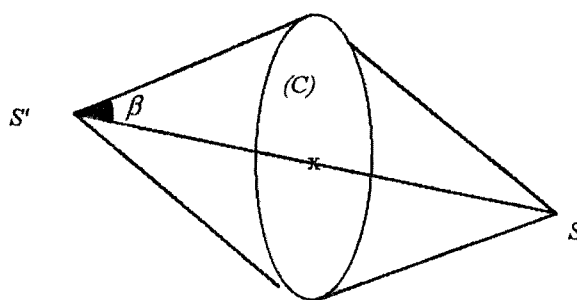


Figure 2

On désigne toujours par β le demi-angle au sommet des deux cônes; on appelle S et S' leurs deux sommets, et (C) leur cercle de base commun.

Dire que le bicône *repose* sur son support signifie que les droites OA et OA' sont tangentes aux deux cônes, c'est-à-dire sont contenues dans deux plans tangents. Appelons encore A et A' les points de contact de ces demi-droites avec les cônes. Vu notre hypothèse de symétrie, A et A' sont symétriques par rapport au plan bissecteur P , donc AA' est parallèle à l'axe SS' du bicône, et AA' coupe orthogonalement la bissectrice OB en B . Le plan tangent P_A en A contient la génératrice SA du cône et aussi la tangente au cercle de base (C) au point H d'intersection de celui-ci avec SA . Cette tangente en H est en fait l'intersection du plan tangent P_A avec le plan P , et comme O est aussi dans cette intersection, alors O est sur cette tangente en H , ou, autrement dit, OH est tangente au cercle (C).

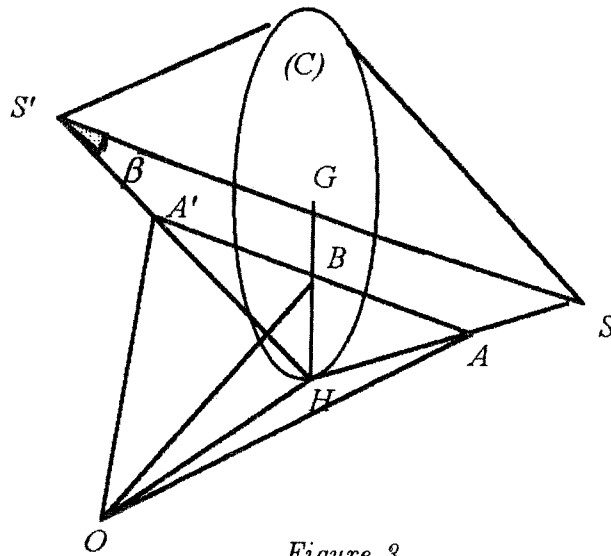


Figure 3

Or un plan tangent à un cône fait un angle constant avec l'axe du cône, donc ici le plan tangent P_A fait l'angle constant β avec la direction fixe SS' ou Oy . Comme de plus ce plan tangent contient la droite fixe OA , on en déduit que nécessairement ce plan reste fixe lors du déplacement du bicône. De même, le plan tangent $P_{A'}$ en A' reste fixe aussi, et donc leur intersection OH est une droite fixe aussi.

Soit α l'angle de OB avec OH . Nous venons de montrer que α est constant, c'est-à-dire ne dépend pas de la distance du bicône à O . Nous allons le retrouver en déterminant α en fonction de β et γ .

Il suffit pour cela de considérer le tétraèdre $OABH$, dont les faces sont toutes des triangles rectangles et où on retrouve β comme angle \widehat{BAH} (car, puisque AA' est parallèle à SS' , $\widehat{BAH} = \widehat{S'SH}$). Des relations trigonométriques simples nous donnent :

$$BH = AB. \tan \beta$$

$$AB = OB \tan \gamma$$

$$BH = OB. \sin \alpha$$

On en déduit :

$$\sin \alpha = \tan \beta. \tan \gamma$$

DEUX PROBLÈMES AMUSANTS DE PHYSIQUE

On voit que cette relation exige que $\tan \beta \cdot \tan \gamma \leq 1$. Ceci se conçoit bien, car si on appelle β' l'angle complémentaire de β , qui est l'angle des génératrices du cône avec le plan de base, cette relation équivaut à $\tan \gamma \leq \tan \beta'$, soit $2\gamma \leq 2\beta'$: l'angle des deux demi-droites du support doit être inférieur à l'angle de deux génératrices SH et $S'H$, sans quoi il n'y a pas de support possible, comme le montre la figure ci-dessous.

On peut aussi dire que cette relation traduit le fait que O se trouve nécessairement à l'extérieur du cercle de base (C) .

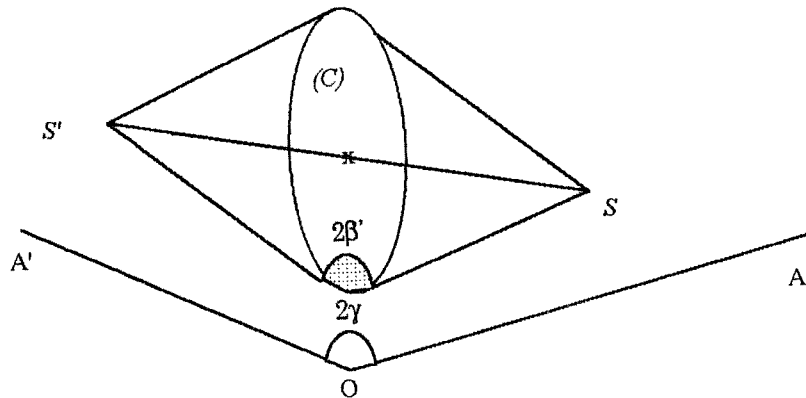


Figure 4

II. Etude statique et dynamique

Appelons α_0 l'angle du plan OAA' avec un plan horizontal xOy :

L'étude précédente a montré que la droite OH reste fixe lorsque le bicône glisse ou roule sur son support (à condition que son axe reste constamment perpendiculaire au plan bissecteur P). Donc le centre de gravité G décrit également une droite fixe, parallèle à OH , à la distance R de celle-ci, R étant le rayon du cercle de base (C) . D'après les lois de la dynamique (théorème de l'énergie cinétique), le mouvement se fera dans le sens de la *descente* de G par rapport à un plan horizontal :

– si $\alpha < \alpha_0$ alors $\sin \alpha_0 > \tan \beta \cdot \tan \gamma$, le bicône se rapprochera de O , ... sans intérêt!

– si $\alpha > \alpha_0$ alors $\sin \alpha_0 < \tan \beta \cdot \tan \gamma$, le bicône s'éloignera de O , c'est-à-dire donnera l'impression de remonter la pente.

Et qu'en est-il si $\alpha = \alpha_0$? Le bicône est immobile, car en équilibre!

Etudions de plus près cet équilibre. Le poids \vec{P} du bicône s'applique au centre G du cercle de base (C) . Les réactions du support s'appliquent en A et A' et équilibrent \vec{P} , elles sont donc nécessairement dans le plan vertical passant par G , soit le plan $SS'AA'$. De plus, à l'équilibre, ces réactions sont perpendiculaires à leur support respectif, donc, si elles ont bien une composante verticale \vec{R}_V valant chacune $\vec{P}/2$, elles ont aussi une composante horizontale \vec{R}_H et \vec{R}'_H qui sont égales et opposées pour s'équilibrer entre elles. Ces forces de réaction \vec{R}_H et \vec{R}'_H rendent compte du fait que le poids du bicône a tendance à écarter les deux demi-droites OA et OA' , et donc que la rigidité en O produit cette réaction inverse.

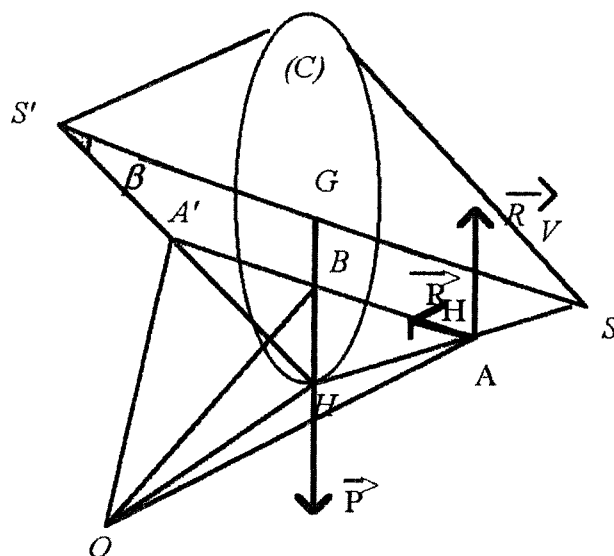


Figure 5

Revenons au cas où $\alpha > \alpha_0$, et où, donc, le bicône s'éloigne de O . L'angle de descente du point G est $\delta = \alpha - \alpha_0$, il se retrouve comme angle entre la verticale et les droites parallèles GH , VA , $V'A'$. On voit alors (cf figure) que la force \vec{P} précédente a un moment non nul par rapport à l'axe AA' . Ce moment est moteur et a tendance à faire tourner le bicône en "remontant la pente". Remarquons toutefois que ce moment vaut $P \times r \times \sin \delta$, et comme r diminue au fur et à mesure que le bicône avance, ce moment diminue de plus en plus.

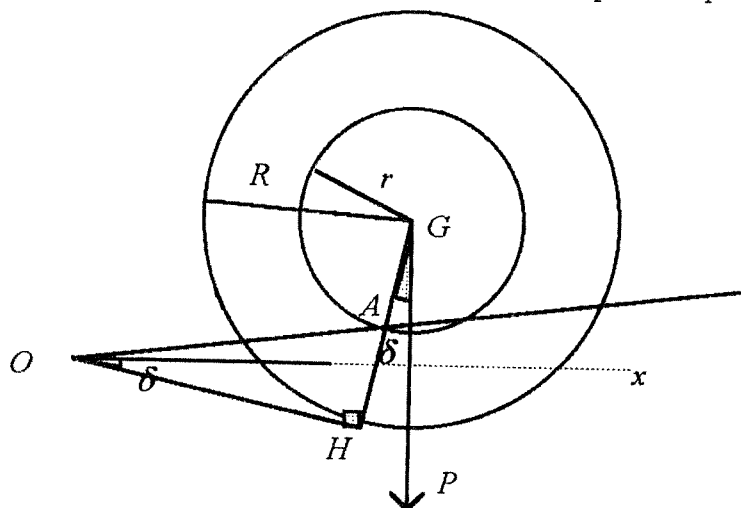


Figure 6

III. Roulement sans glissement

Supposons que le bicône roule sans glisser sur son support : quelle est alors la relation entre le déplacement du point G et l'angle de rotation effectué lors du roulement ?

Prenons la droite OH précédente comme axe Ox , et soit x l'abscisse du point G , θ l'angle, compté positivement, de rotation du bicône. La relation de roulement

DEUX PROBLÈMES AMUSANTS DE PHYSIQUE

sans glissement se traduit par $\frac{dx}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$, soit encore, en considérant que x est une fonction de θ , $\frac{dx}{d\theta} = r$ (r représente le rayon du petit cercle parallèle sur lequel s'appuie le bicône). Et on a les relations (cf la figure 2 du I.) :

$$\begin{aligned} r &= R - BA \cdot \tan \beta \\ BA &= OB \tan \gamma \\ x &= OH = OB \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation $\sin \alpha = \tan \beta \cdot \tan \gamma$, on en déduit finalement $r = R - x \tan \alpha = \frac{dx}{d\theta}$, d'où $x = R(\cotan \alpha)(1 - e^{-\tan \alpha \cdot \theta})$. Si nous appelons ℓ la longueur maximale que peut parcourir le bicône (jusqu'à ce que les points A et A' coïncident avec ses sommets S et S'), il vient $\frac{R}{\ell} = \tan \alpha$, d'où une autre expression de x :

$$x = \ell \left(1 - e^{-\frac{R}{\ell} \theta} \right)$$

Cette expression montre que ℓ n'est qu'une valeur limite de x quand θ tend vers $+\infty$. Donc, si le bicône atteint effectivement le bout de son support, c'est qu'il finit nécessairement par glisser!

Cette relation permet aussi de tracer la roulante, c'est-à-dire l'ensemble des points du bicône qui viennent en contact avec les demi-droites du support au cours du roulement. Ces roulantes (une par cône) sont des loxodromies, c'est-à-dire qu'elles coupent les génératrices du cône suivant un angle constant. Cela se voit par le fait qu'au cours du roulement, la tangente à la roulante au point A de contact coïncide avec la tangente en A au support, c'est-à-dire la droite OA , or OA fait un angle constant avec la génératrice SH à tout instant.

La figure 7 tente de rendre compte du mouvement de roulement du bicône sur son support.

IV. Cas d'un bicône à facettes

Pour les plus courageux, nous suggérons de reprendre le problème en remplaçant le cercle de base par un polygone régulier à N côtés. On verra apparaître alors une suite géométrique traduisant la relation entre la progression x_n de G et l'angle $\theta_n = \frac{2\pi n}{N}$ de rotation du bicône. Affaire à suivre, donc!

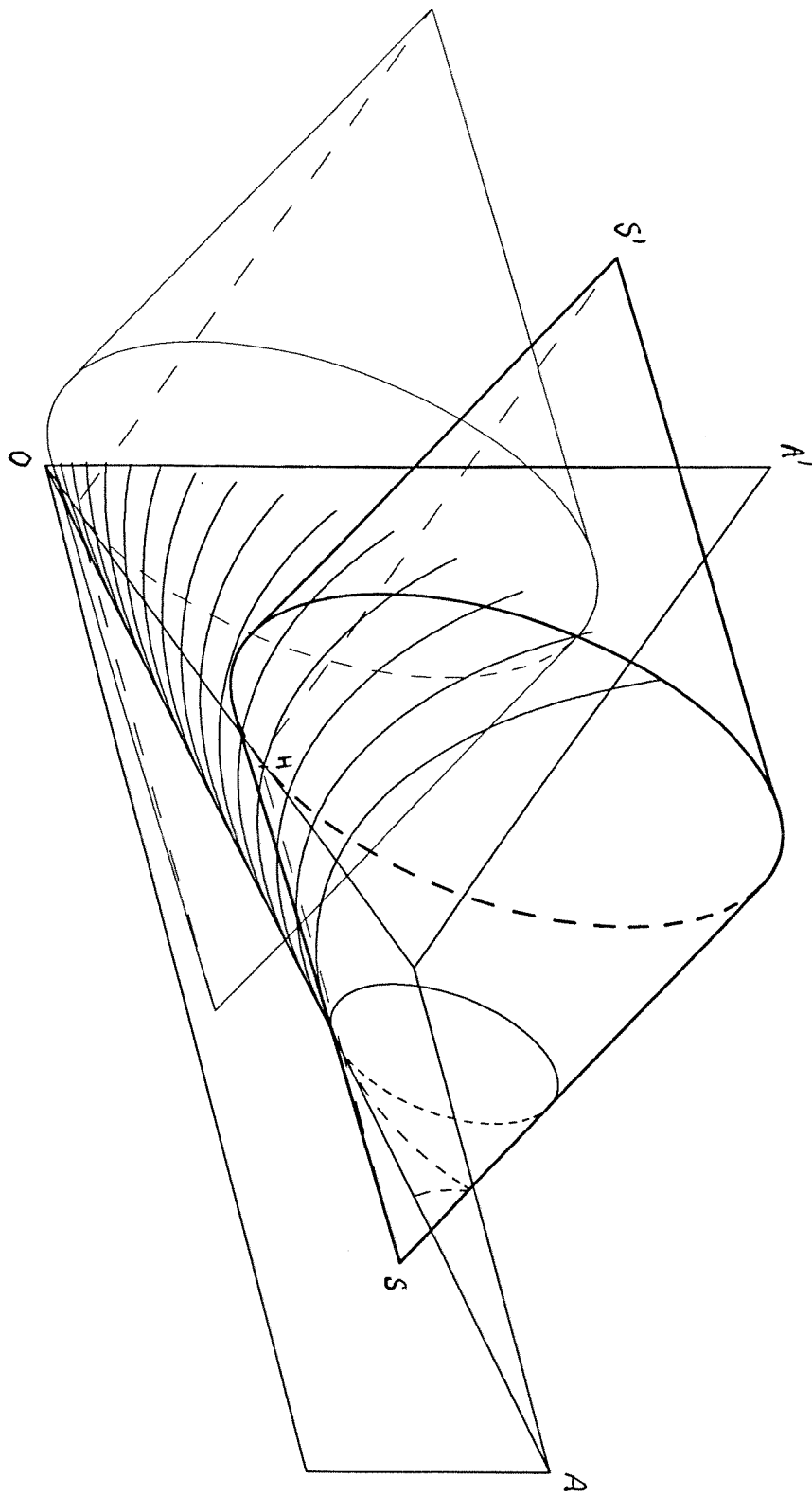


Figure 7

LE LOGICIEL "DERIVE" AU COLLÈGE, OUI! MAIS ATTENTION À LA DÉRIVE ...

Jacques OURLIAC
Collège de Geispolsheim

Le logiciel de calcul formel DERIVE n'est plus à présenter (cf. Cari_Info Licences Mixtes 1992) ; il reste maintenant à faire la synthèse des exemples d'utilisations dans les classes ; d'ailleurs, plusieurs sont parues récemment sur ce sujet (voir la bibliographie). Si l'utilisation de l'informatique, que ce soit avec un dispositif de rétroprojection ou dans une salle d'ordinateurs, augmente toujours l'intérêt de l'auditoire, il ne faut pas perdre de vue pour autant l'efficacité de la démarche (c'est à dire le rapport entre le temps de traitement informatique et le temps d'analyse mathématique). Ainsi, lorsqu'il s'agit de rentrer des expressions fractionnaires "osées", on risque de perdre son temps à gérer les erreurs d'écriture (DERIVE n'est pas ce qu'il y a de plus convivial du point de vue de la saisie). Observons par exemple une expression proposée à des élèves de 3^e, sans perdre de vue que les instructions officielles de la classe rappellent : "...aucune virtuosité ne sera demandée..." :

Ici par exemple l'élève va devoir affronter un éditeur "en ligne" avec une gestion plus que délicate des parenthèses ; toute fausse manipulation ramènera l'utilisateur à la case départ sans que l'on puisse conclure pour autant une maîtrise insuffisante de la notion. La seule satisfaction étant de constater qu'après avoir saisi toutes nos parenthèses, le logiciel en donne une écriture mathématique correcte...

$$1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{x + 5}}$$

$$6 + 10$$

$$7 + \frac{8}{9 + x}$$

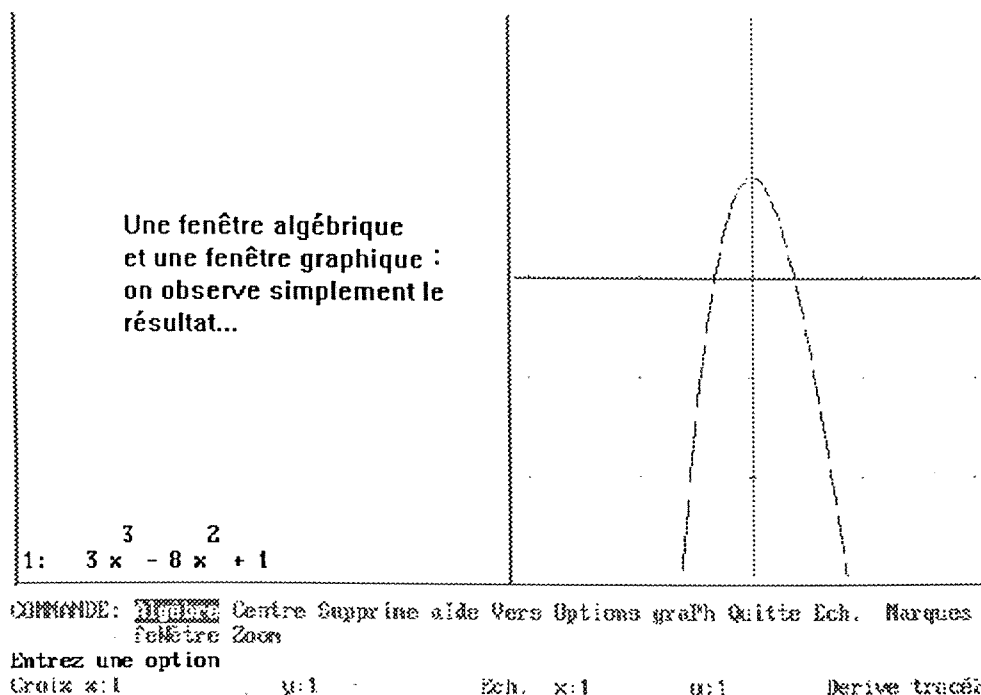
Cette expression m'a pris du temps ; la gestion des parenthèses interpelle l'élève, mais n'est-ce pas ce que l'on fait avec une calculatrice ? D'ailleurs, ne vaut-il pas mieux les aider à optimiser l'usage de leur calculatrice (qui gère aussi les fractions) ?

De même dans l'observation de carrés, de cubes de sommes, d'identités remarquables : le logiciel brille par sa virtuosité, mais pour l'élève que restera-t-il ? Le nombre de termes du développement ?

J'ai essayé de convaincre mes élèves (classes de 3^e) que factoriser une expression n'était pas seulement une exigence scolaire, mais une technique essentielle, parfois délicate, parfois impossible, mais indispensable dans la recherche des solutions d'une équation. Après avoir fait passer la notion de représentation graphique d'une fonction, même si leurs connaissances techniques se limitent à la maîtrise de l'application affine, nous observons la représentation d'autres fonctions afin de tenter de déterminer graphiquement les solutions d'une équation :

$$3x^3 - 8x^2 + 1 = 0$$

Avec le logiciel DERIVE, une tablette de rétroprojection, nous entrons l'expression (Auteur), nous passons à la représentation graphique (graPhe deux fois), on partage en deux fenêtres et voici le résultat :



Jusque-là rien de bien étonnant. Donnons une approximation de l'abscisse du point d'intersection de la représentation graphique avec l'axe des abscisses, et calculons la valeur correspondante de l'expression. Voici d'ailleurs quelques résultats obtenus :

1: $3x^3 - 8x^2 + 1$

2: $x := 0.375$

3: $F(x) := 3x^3 - 8x^2 + 1$

4: $\frac{17}{512}$

La valeur 0,375 a été lue grâce au réticule que l'on déplace à l'écran ; par contre, la substitution dans la fonction est faite par les élèves à l'aide de leur calculatrice ; dans ce cas, le logiciel nous donne la valeur exacte sous forme d'une fraction. Il en est de même avec la deuxième valeur lisible à l'écran (-0,333). Les élèves savent en 3^e, ou en ont la preuve à cet instant, que les solutions proposées sont approchées et issues de l'observation visuelle. Bien sûr, on peut à coup de zooms successifs (merci Thalès !) obtenir une meilleure visualisation des points qui nous intéressent, sont-ce des valeurs exactes pour autant ?

Nombreux sont ceux qui proposent une factorisation et ont déjà remarqué que cette option était disponible ! Alors c'est parti, Factorisons !

LE LOGICIEL "DERIVE" AU COLLÈGE

1: $3x^3 - 8x^2 + 1$

2: $(3x + 1)(x^2 - 3x + 1)$

3: $\left[x - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2}\right] \left[x + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2}\right] (3x + 1)$

L'étape 2 nous montre la valeur que nous avons approchée : -0,333.

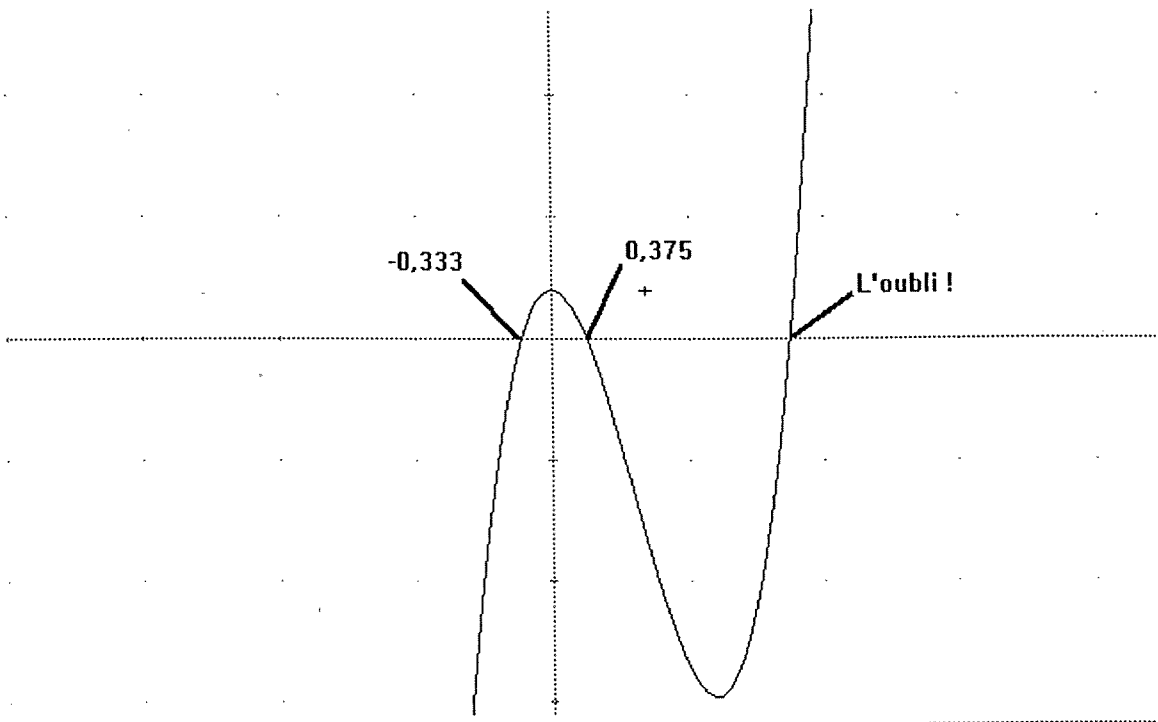
Par contre, où se trouve le 0,375 ?

Il reste une expression du deuxième degré ; pourquoi n'est-elle point factorisée ?

Dans les options de factorisations, nous avons choisi "Rationnel" ; si maintenant on prend radical alors c'est la factorisation n° 3 qui apparaît ; mais où se cache 0,375 ? Il y a une réponse de trop ! Pour les élèves, encore une façon de leur montrer que les racines carrées n'ont pas été créées pour les embêter, et que notre observation nous a peut-être caché quelque chose....

Reprenons donc notre représentation graphique et cherchons...

Nous allons maintenant affiner cette représentation, dans un premier temps à l'aide du Zoom ; mais bien plus intéressante est la notion d'échelle, qui est tout à fait dans les cordes des élèves de la classe de 3^e, qui en entendent parler depuis la 6^e (sciences naturelles, humaines, physiques, proportionnalité...) et là, tout d'un coup, ils en sont maîtres.



La représentation graphique confirme maintenant que l'équation possède trois solutions qui, sans être accessibles à nos techniques de calcul, n'en existent pas moins. C'est mettre une nouvelle fois l'accent sur les limites de l'outil (calculatrice graphique, ordinateur, etc.) s'il n'y a pas l'analyse pertinente du problème par l'utilisateur, qu'il soit élève ou autre...

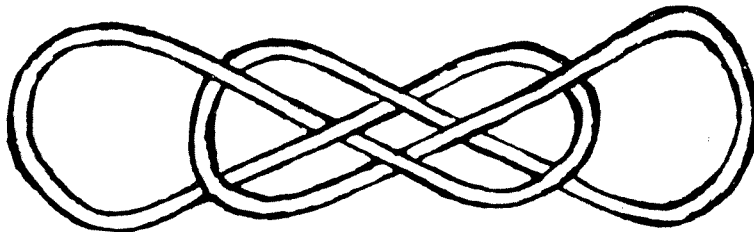
D'autres exemples sont ainsi proposés aux élèves pendant la séance ; leurs suggestions sont écoutées et notées sur la feuille de travaux dirigés ; le travail se poursuit sous forme d'exercice chez eux (recherche d'encadrements avec calculatrice), mais surtout sur le Nanoréseau de l'établissement avec 15 postes en état de marche (ça existe !) et un logiciel fort ancien mais capable de représentation graphique, zoom (Trace-On).

Incroyable ! Mais vrai en 1994 !

Bibliographie disponible :

- "Les nouvelles technologies au service de l'enseignement des mathématiques", Académie de Strasbourg, février 1993 ;
- "Prise en main de logiciels et utilisations pédagogiques de l'ordinateur, MAFPEN Poitiers, 1^{er} trimestre 1994 ;
- "Enseignement des Mathématiques et logiciels de calcul formel", DLC innovations pédagogiques, janvier 1994 ;
- "Faire des mathématiques au lycée avec l'ordinateur", DLC innovations pédagogiques, 1993 ;
- "Faire des mathématiques au collège avec l'ordinateur", DLC innovations pédagogiques, 1993 ;
- "Pratique de DERIVE en lycée", Centre de Ressources Orléans, septembre 1991 ;
- "Outils informatiques pour l'enseignement modulaire en mathématiques", MAFPEN, Aix-Marseille, septembre 1993.

Et bien d'autres, notamment 3614 OPTA ; mais ça, vous le saviez déjà....



*Motif décoratif alsacien se trouvant sur presque toutes les peintures murales
(Huit couché - Liegende Acht)
Symbole de longévité.*

A VOS STYLOS

PROBLÈME 29

Énoncé

Vrai ou faux? Toute suite de 100 nombres deux-à-deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur 10 ou une sous-suite décroissante de longueur 12.

Solution

Toute suite de $mn + 1$ nombres deux-à-deux distincts contient une sous-suite croissante de longueur $m + 1$ ou une sous-suite décroissante de longueur $n + 1$ (théorème de Erdős-Szekeres). Soit en effet (x_1, \dots, x_{mn+1}) une telle suite. Notons $C_i \in \mathbb{N}^*$ et $D_i \in \mathbb{N}^*$ les longueurs des plus longues sous-suites croissante et décroissante commençant par x_i . Pour $1 \leq i < j \leq mn + 1$, il est clair que $C_i > C_j$ si $x_i < x_j$ et que $D_i > D_j$ si $x_i > x_j$; en conséquence, l'application $i \mapsto (C_i, D_i)$ est injective et prend donc exactement $mn + 1$ valeurs distinctes. Comme l'ensemble produit $P = [1, m] \times [1, n]$ a mn éléments, il existe un i tel que $(C_i, D_i) \notin P$, donc tel que $C_i > m$ ou $D_i > n$.

PROBLÈME 30

Énoncé

Pour quels entiers $p \geq 2$ et $q \geq 2$ le rectangle de dimensions $p \times q$ peut-il être pavé par des dominos 1×2 de manière que toute droite traversant le rectangle coupe en deux l'un (au moins) des dominos du pavage?

Indication

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$ les rectangles $(5 + 2a) \times (6 + 2b)$ et $(6 + 2a) \times (8 + 2b)$ admettent un tel pavage.

PROBLÈME 31

Énoncé

Dans la matinée, la neige se mit à tomber, régulièrement, uniformément. Pour dégager la route, trois chasse-neige partirent du village vers la ville, le premier à midi, le second à quatre heures, le troisième à six heures. (Les trois engins sont du même modèle et ont une vitesse inversement proportionnelle à la quantité de neige présente sur la route.) Sachant que le troisième a rattrapé le second au moment où le second rattrapait le premier, on demande à quelle heure il a commencé à neiger.

PROBLÈME 32

Énoncé (proposé par P. Renfer, d'Ostwald)

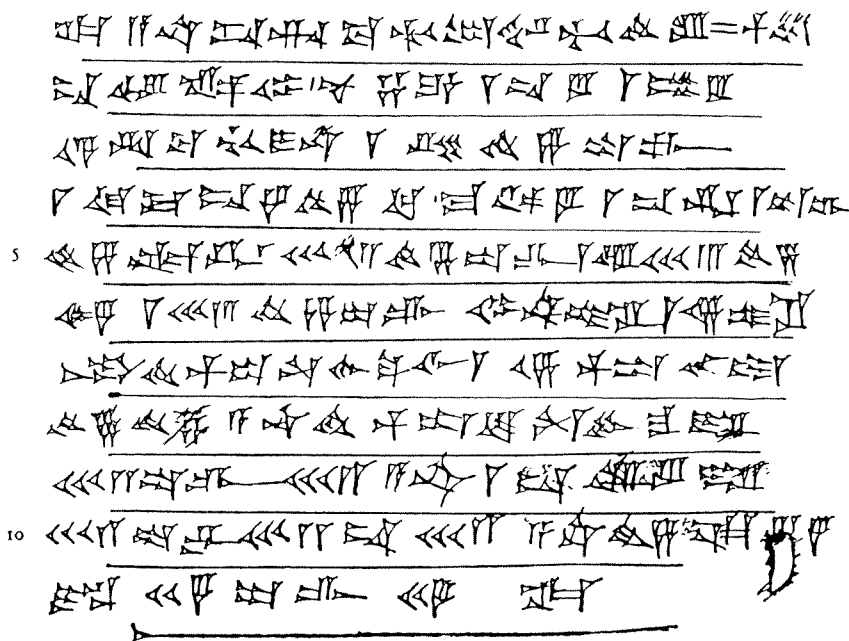
On désigne par E la droite, le plan ou l'espace. Trouver toutes les applications f de E dans E qui préservent la distance 1, c'est-à-dire telles que, pour tous points x et y de E vérifiant $d(x, y) = 1$, on a aussi $d(f(x), f(y)) = 1$.

Voici un extrait de l'ouvrage "*Histoire d'algorithmes*" dont vous trouverez une publicité à la page 32.

HISTOIRE D'ALGORITHMES

La tablette de Suse

Extrait des *Textes mathématiques de Suse*, édités et traduits par E.M. Bruins & M. Rutten, Geuthner, Paris, 1961 (p. 102). Problème XIX, C.



Posons que la largeur (du rectangle) mesure un quart de moins par rapport à la longueur. 40 (est la dimension de la diagonale). Quelles sont la longueur et la largeur ?

Toi, pose 1, la longueur, pose 1 le prolongement. 15 le quart, soustrais de 1, tu trouveras 45.

Pose 1 comme longueur, pose 45 comme largeur, carre 1 la longueur, 1 tu trouves. Carre 45, la largeur : 33;45 tu trouves. Du 1 et 33;45 (fais) la somme : 1;33;45 tu trouves. Quelle est la racine carrée ? 1;15 tu trouves.

Attendu que 40, la diagonale t'a été indiquée, cherche l'inverse de 1;15 la diagonale.

48 (tu trouves). Porte 48 à 40 la diagonale qui t'a été dit, 32 tu trouves.

Porte 32 à 1 la longueur que tu as posée : 32 tu trouves, 32 (c'est) la longueur. Porte 32 à 45 la largeur que tu as posée : 24 tu trouves. 24 (c'est) la largeur.