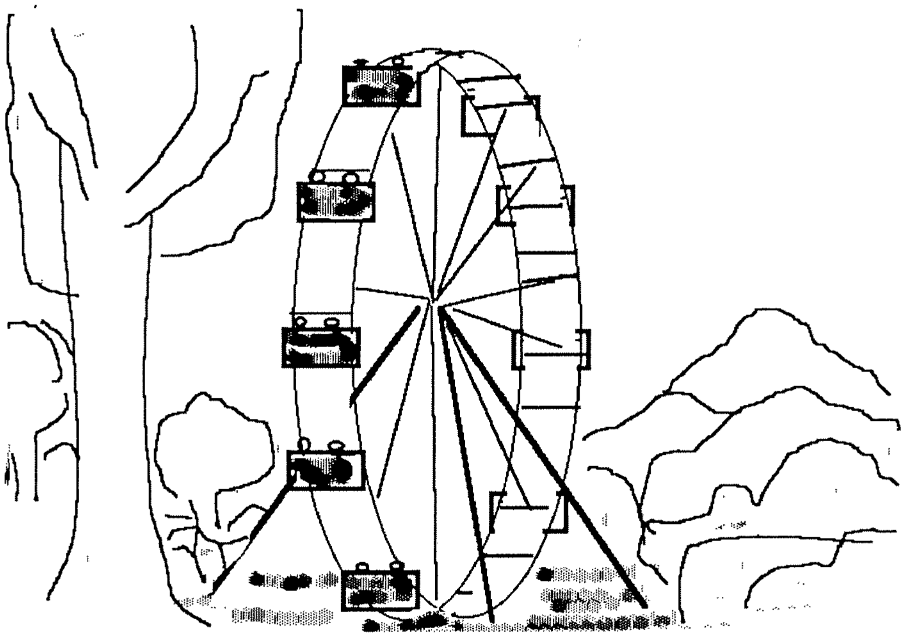
UNIVERSITE
LOUIS PASTEUR
STRASBOURG

MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE CHIMIE

IREM DE STRASBOURG



1992-1994

I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 Strasbourg Cedex
Tél. bib. : 88 41 64 40
Tél. sec. : 88 41 63 07
Fax : 88 41 64 49

PREFACE

Le groupe "Maths-Physique" était voué à l'échec, trop de choses nous séparent, les mathématiciens veulent donner des leçons au physicien et vice versa!

Hé bien **pas du tout**! Bien sûr comme tous les couples nous avons eu des moments (par rapport à un axe) où nous nous jetions nos théorèmes à la figure. Nous avons su relativiser nos différences, changer nos repères et nos unités pour repartir de manière uniforme. Nous avons su transformer notre différence de potentiel en énergie cinétique et nous vous présentons aujourd'hui le travail de nos forces.

Nous ne sommes pas satisfaits de tous nos enfants, mais nous les lâchons tout de même. Certains nous ont fait souffrir, d'autres sont nés dans un grand éclat de rire.
Saurez vous jamais l'étonnement du mathématicien, le scepticisme du physicien, les désaccords et soudain... l'idée qui fait repartir le manège?

Mathématiciens et physiciens? Ça marche! Nous en avons la preuve à chaque réunion du groupe, puissions nous vous en convaincre: il suffit de si peu de chose...

N'oublions pas de remercier nos IPR, MM Jost et De Cointet en mathématiques, M. Tschudy en physique: ils ont su nous donner cette impulsion, cette vitesse initiale déterminant tout mouvement.
Nous remercions également M. Pluvinage directeur de la MAFPEN et Mme Didierjean directrice de l'IREM de leur confiance. En effet, le groupe a pu fonctionner grâce à des heures attribuées par la DLC et la MAFPEN.

<u>Les membres du groupe:</u>

BECK Jean-Jacques (matheux), CABEL Jean-Yves (physicien), DELOURME Patrick (Physicien), DOUE Frédéric (matheux), FLEURY Norbert (physique), GASSER Jean-Luc (matheux), HAEGEL Suzanne (matheux), PAYCHA Sylvie (matheux).
Et pour l'impression et la mise en page finale, HAEGEL Marcel!

INTRODUCTION

Nous avons étudié les nouveaux programmes de physique de seconde (applicables à la rentrée 1993) et de première (1994) parallèlement au programme de mathématiques correspondant, et avons imaginé des activités permettant aux professeurs de mathématiques et de physique-chimie de les présenter, chacun à sa manière, dans leur cours.

Ce document présente le fruit de deux années de travail: des activités pour les élèves, grâce auxquelles ils pourront mettre en oeuvre des outils mathématiques, dans un contexte physique, dans le cadre du programme de chacune de ces matières.

Les discussions au sein du groupe ont mis en évidence des différences de compréhension de certaines notions par le physicien et par le mathématicien, dues à une terminologie commune, associée à un contenu différent. Une des activités présentées a pour objectif de sensibiliser les élèves à ces problèmes: l'activité intitulée «grande roue» qui a donné lieu à de vives polémiques...

Le programme de physique mentionnant quelques figures de l'histoire des sciences, on trouvera quelques éléments biographiques de Galilée et de Newton dans les activités 2 et 3. Des problèmes posés dans leurs oeuvres respectives sont présentés et peuvent donner lieu à des recherches stimulantes pour les élèves.

Les autres activités mettent en jeu des notions mathématiques et physiques variées dans le cadre des programmes à un niveau donné.

Il est très difficile de présenter un classement des différentes activités: fallait-il les classer par thème mathématique, par thème physique ou par niveau? Voici quelques thèmes qu'on peut dégager (liste non exhaustive):

Point de vue de la physique chimie:

→ comprendre ou interpréter un phénomène physique: n° 8, 15.
→ optimisation: n° 10, 12, 17.
→ mesures de constantes physiques: n°5, 13, 16.
→ description de phénomènes, utilisation de propriétés physiques: n° 4, 6, 14.
→ choix d'un référentiel: n° 1, 2, 3.

Point de vue des mathématiques:

→ dérivation des fonctions: n° 10, 12, 17.
→ fonctions affines, lectures graphiques: n° 6, 16.
→ géométrie plane et de l'espace, trigonométrie: n°5, 7, 8, 13, 15.
→ utilisation de suites numériques: n° 1.
→ la parabole: n° 4, 12.

On trouvera à la page 3 la liste des activités proposées, ainsi que les notions mathématiques et physique qu'elles mobilisent. Chacune des activités comporte un énoncé et des éléments de solution.

Nous avons également réfléchi à une progression commune possible dans les deux matières en classe de seconde qui devrait éviter aux élèves l'écueil bien connu d'une utilisation trop précoce de certaines notions: si le professeur de maths commençait par les règles sur les puissances puis par faire des lectures graphiques (en n'oubliant pas de parler de périodes) et si parallèlement le professeur de physique commençait l'année par deux ou trois semaines de chimie (si c'est possible!), les élèves s'en sortiraient peut-être beaucoup mieux.

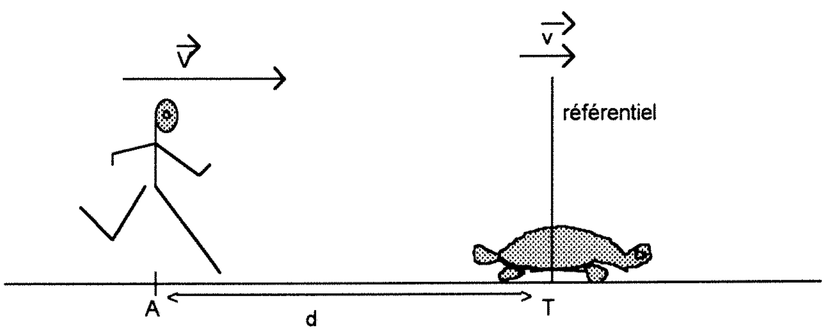
ACTIVITES	NOTIONS MATHEMATIQUES	NOTIONS PHYSIQUES
1. ACHILLE ET LA TORTUE	suites géométriques limite de la somme des termes d'une suite géométrique.	mouvement uniforme choix d'un référentiel
2. GALILEE	paraboles mises en équation choix d'un repère	référentiels mobiles chute libre accélération, vitesse
3. NEWTON	rotation translation	astronomie mouvement des planètes
4. FOUR SOLAIRE	définition par foyer et directrice de la parabole équation de la parabole coefficient directeur de la tangente produit scalaire meilleure approximation affine d'une fonction	lois de réflexion transfert d'énergie
5. VITESSE DE LA LUMIERE	meilleure approximation affine d'une fonction encadrement de la fonction sinus par des polynômes	vitesse angulaire réflexion de la lumière mesure de la vitesse de la lumière
6. FABRIQUER UNE IMAGE SUR UN ECRAN DE TELEVISION	fonctions périodiques fonctions affines par intervalles	écran cathodique période, fréquence
7. VOIR UNE IMAGE SUR UN ECRAN DE TELEVISION	théorème de Pythagore aires pourcentages	
8. LA GRANDE ROUE ET D'AUTRES MANEGES	translation rotation homothétie image d'un cercle par ces transformations	mouvement de translation non rectiligne mouvement de rotation
9. AVION	équations différentielles intégration	théorème du centre d'inertie relation fondamentale mouvement dans un champ
10. TEMPS MINIMUM	dérivées, extremum recherche d'une racine par approximations théorème des valeurs intermédiaires étude de la dérivée seconde tangente au cercle	lois de Snellius-Descartes
11. CHAPEAU	mise en équation choix d'un référentiel adapté	choix d'un référentiel composition de vitesses
12. LA COLONNE PERCEE	parabole. dérivée de la fonction composée $\sqrt{u(x)}$. optimisation.	travail d'une force. théorème de l'énergie cinétique. chute d'un corps avec vitesse initiale.
13. MOLECULE DE METHANE	géométrie dans l'espace produit scalaire trigonométrie relations métriques dans le triangle	chimie organique géométrie moléculaire
14. REACTIONS CHIMIQUES	système d'équations à 3 ou 4 inconnues	équilibrage d'une réaction chimique
15.1 LE CONE: ETUDES PRELIMINAIRES	théorème de Pythagore. théorème de Thalès. longueur d'un arc de cercle. le cône.	

15.2 LE BICONE REMONTE LA PENTE (PHYSIQUE)	trigonométrie le cône	centre d'inertie théorème de l'énergie cinétique
15.3 LE BICONE REMONTE LA PENTE (MATHS)	trigonométrie théorème de Thalès le cône vision et géométrie dans l'espace	centre d'inertie moments de force
15.4 LE BICONE SUR SES DEUX DEMI DROITES	géométrie dans l'espace trigonométrie équations différentielles	centre d'inertie moments de forces réactions du support
16. CARACTERISTIQUES D'UN DIPOLE	fonctions linéaires. fonctions affines. équations du premier degré. approximation affine d'un nuage de points.	dipôle actif. dipôle passif. point de fonctionnement.
17. EXTREMA EN ELECTRICITE	fonctions dérivées (autres notations) extremum	puissance électrique donnée ou reçue

1. ZENON : *ACHILLE ET LA TORTUE*

A l'époque de Zénon (deuxième moitié du V° siècle avant J.C.) deux conceptions s'opposaient: la conception *continuiste* pensait le nombre, l'espace, le temps et la matière comme divisible à l'infini; la conception *atomiste* préconisait l'existence d'éléments premiers indivisibles. Les arguments de Zenon sont des "apories " (impasses), ils tentent d'établir que dans les deux hypothèses on aboutit à une impasse.(...) Nous connaissons les paradoxes de Zénon grâce à Aristote qui les a rapportés dans la *Physique* afin de les critiquer.

A.Dahan-Dalmedico/ J.Peiffer" Une histoire des mathématiques ,Routes et dédales"



Enoncé: **Il s'agit de l'un des paradoxes bien connus de Zénon:**

Achille et la tortue font une course, Achille laisse une certaine avance à la tortue. Quand Achille arrive à l'endroit où se trouvait la tortue, un certain temps s'étant écoulé, celle ci a pu avancer et lorsqu'il arrive à l'endroit où se trouvait la tortue, un certain temps s'étant écoulé... Bref Achille ne rattrapera jamais la tortue.

Notions en mathématiques:	Notions en physique:
suites géométriques limite de la somme des termes d'une suite géométrique.	mouvement uniforme. choix d'un référentiel.

Cette activité a été testée en première S quand nous avons parlé de limite de suites, il faut prévoir à peu près trois quarts d'heure en effet, elle provoque des discussions passionnées: les élèves ont des difficultés dès qu'on leur parle d'infini et ne cherchent pas du tout à mathématiser le problème. Le prof leur fait une bonne blague, on va lui prouver en organisant par exemple une course dans les couloirs que si un élève marche lentement et que, même si le deuxième lui laisse une avance, s'il va plus vite , hé bien le deuxième le rattrapera!

C'est naïf quand même un prof!

Solution:

Physique

Soit $\vec{V}$ la vitesse d'Achille, $\vec{v}$ celle de la tortue. Mettons le référentiel sur la tortue et appelons d la distance qui les sépare à l'instant t = 0, instant auquel part Achille:

Soit T le moment où Achille rattrape la tortue:

(V - v)T = d d'où $T = \frac{d}{V - v}$

Mathématiques

Quand Achille arrive à l'endroit qu'occupait la tortue, il s'est écoulé le temps $t_1 = \frac{d}{V}$, pendant ce temps la tortue a parcouru $x_1 = vt_1 = v\frac{d}{V} = \frac{v}{V}d$. C'est la distance qui les sépare à présent, il suffit de réitérer ce raisonnement en remplaçant d par x_1 et il vient:

Achille parcourt donc après n déplacements:

$$x = d(1 + \frac{v}{V} + \frac{v^2}{V^2} + \ldots + \frac{v^n}{V^n}) = d\frac{1-(v/V)^{n+1}}{1-v/V}$$

On obtient finalement la distance totale à parcourir:

$$x = \lim_{n \to +\infty}\left(d\frac{1-(v/V)^{n+1}}{1-v/V}\right) = \frac{d}{1-v/V}$$

Et ce à la vitesse V, il mettra donc: $T = \frac{d}{(1-v/V)V} = \frac{d}{V-v}$

2. GALILEO GALILEI

Galileo Galilei, que nous nommons **Galilée** en français, astronome, géomètre et mathématicien de la fin du XVIème et du début du XVIIème siècle, est une des grandes figures de l'histoire de la science moderne.

Né à Pise en 1564, il y fait ses études et y enseigne ensuite les mathématiques et la mécanique à l'université pendant quelques années dès l'âge de 25 ans.

Dès le début de sa carrière de professeur, Galilée remet en question la présentation traditionnelle de la mécanique qui se fait à cette époque et qui repose essentiellement sur des idées anciennes datant du IIIème siècle avant J.C, celles d'**Aristote**. Aristote distinguait le *mouvement naturel* d'une part, comme celui d'un corps pesant (ou grave) qui, abandonné à lui-même, tombe à la verticale en tendant vers son lieu naturel qui est le centre de la terre, et le *mouvement violent* d'autre part, comme celui d'une boule de billard, qui, après l'impulsion de départ, tend à ralentir et à s'arrêter. Aristote pensait qu'un mouvement violent ne pouvait être maintenu qu'à l'aide d'une action extérieure. C'est essentiellement grâce aux travaux de Galilée que nous expliquons maintenant les *mouvements naturels* et *violents* par les mêmes lois, celles que nous appelons de nos jours les lois de la mécanique classique. Nous savons en particulier que le ralentissement de la boule de billard est dû aux forces de frottement et qu'en l'absence de toute force extérieure, la boule continuerait à se mouvoir indéfiniment (principe d'inertie dû à Galilée).

A l'époque où il enseigne à Pise, Galilée commence peut-être déjà à exprimer ses doutes quant aux principes sur lesquels se fondait la mécanique telle qu'elle était faite à l'époque. Ceci le conduit probablement à quitter en 1592, soit 3 ans après sa nomination, le poste de professeur qu'il occupait pour un poste équivalent à Padoue où il restera jusqu'en 1609.

Il fallut à Galilée toute une vie et beaucoup de travail pour que les nouvelles conceptions de la mécanique qui étaient encore en germe au début de sa carrière prennent la forme qu'on leur connaît. En particulier, il semble que la période de 1604 à 1609 ait été importante pour le cheminement intellectuel qui conduisit Galilée à la conception moderne de la chute des corps. C'est de 1604 que date la première version de l'énoncé de la loi suivant laquelle l'espace parcouru est comme le carré du temps écoulé depuis l'instant initial (ce que nous exprimons aujourd'hui par la formule $z = 1/2\, gt^2$, z étant compté suivant la verticale descendante), mais on ne sait pas dater de manière précise le moment où Galilée pensa à la trajectoire parabolique suivie par un projectile lancé à une vitesse initiale d'une certaine altitude (comme par exemple le boulet d'un canon). Cette idée que la trajectoire d'un projectile est parabolique lui posa quelques problèmes et il persista longtemps dans l'erreur de penser qu'elle était semi-circulaire. Bien que Galilée ait donné des solutions parfois fausses à certains problèmes de mécanique, il réussit à poser les principes de base de la mécanique moderne (que nous appelons maintenant mécanique classique), principes qui sont exposés dans un ouvrage paru en 1632 à Florence intitulé "**Dialogues sur les deux systèmes du monde; celui de Ptolémée et celui de Copernic**" (et encore appelé tout simplement "**Dialogues**"). Ils ont été repris en 1638 dans un deuxième ouvrage intitulé "**Discours et démonstrations mathématiques relatives à deux nouvelles sciences**" (encore appelé "**Discours**") dans lequel il fait une nouvelle mise au point de ses idées sur la mécanique. Galilée a, en particulier, établi le principe de "relativité" qui dit qu'étant donnés deux référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, les lois auxquelles sont soumis les mouvements restent les mêmes, quel que soit le référentiel auquel ces changements sont rapportés. Les "Dialogues" et les "Discours" ont été écrits en italien afin d'être lus par un plus grand nombre, ce qui était peu commun à une époque où la langue utilisée pour la divulgation des résultats scientifiques était le latin.

En 1609, un duc de Toscane qui avait été son élève, fait de Galilée son conseiller scientifique à Florence. De là, celui-ci pourra se rendre souvent à Rome, ville dans laquelle il deviendra ensuite membre de l'académie des Lincei. C'est à cette époque que Galilée invente la lunette qui porte son nom et qu'il développe ses observations astronomiques.

Le principe de la lunette n'a pas été inventé par Galilée mais c'est lui qui, le premier, s'en est servi pour observer les astres. Il a cependant inventé un type particulier de lunette qui donne une image non renversée de l'objet. Les résultats de ses observations astronomiques sont partiellement exposés dans un ouvrage intitulé "**Nuntius Siderius**" paru en 1614 . C'est grâce à ces observations que Galilée développe ses idées sur le système du monde et qu'il prend ouvertement position pour les conceptions de **Copernic** (exposées dans son ouvrage intitulé "**De revolutionibus orbium celestium**" publié en 1543). Ce dernier pensait que la terre tournait autour du soleil et sur elle-même. C'est pour avoir soutenu des idées contraires à la conception traditionnelle défendue par l'Eglise selon laquelle la terre est immobile que Galilée fut condamné une première fois en 1616 par l'Eglise. C'est après la parution des "Dialogues" dans lesquels il défend ouvertement le point de vue copernicien, que Galilée subit sa seconde condamnation en 1633 par l'Eglise. Elle le contraint à nier publiquement le fait que la terre se meut et l'assigne à résidence dans sa maison près de Florence pour le reste de sa vie, ceci après une courte détention à Rome. Galilée mourra à l'âge de 78 ans dans cette résidence près de Florence en 1642 après avoir écrit, malgré les infirmités qui l'accablent pendant sa vieillesse, les "Discours" dans lesquels il reprend sa théorie sur la mécanique en la précisant et en y apportant des corrections. Malgré sa rétractation apparente devant l'Eglise, Galilée conserva toute sa vie dans sa pensée la célèbre phrase "**E pur si muove**" (Et pourtant elle (la terre) se meut).

Les deux oeuvres majeures qu'a laissées Galilée, les "Dialogues" et les "Discours" ont été d'un apport théorique immense pour la physique et en particulier la mécanique. Elles ne sont pas écrites comme des ouvrages théoriques scientifiques tels que nous les concevons aujourd'hui. Elles se présentent sous forme de dialogues entre trois personnages, Sagredo, un honnête homme curieux et ouvert qui essaye de comprendre les phénomènes qu'il observe, Salviati, porte parole de Galilée et scientifique copernicien à travers lequel Galilée argumente contre Simplicio, l'aristotélicien étroit d'esprit et réfractaire aux conceptions nouvelles de son temps.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le contenu de ces dialogues comporte des erreurs parfois graves qui sont pour certaines corrigées dans les "Discours". La présentation des idées de Galilée sous forme de dialogues ne rend pas facile la compréhension de leur contenu théorique. Ceci conduit à des interprétations très variées de leur contenu réel. Certains voient en Galilée à travers la lecture de ces dialogues, un précurseur de la théorie de la relativité développée au début de ce siècle par Einstein. D'autres au contraire tendent à minimiser l'apport scientifique de Galilée en soulignant que ses théories n'étaient pas clairement formulées, mais simplement suggérées, et qu'elles reprenaient parfois des idées déjà ébauchées par ses prédécesseurs ou ses contemporains. De nombreuses polémiques persistent aussi quant au rôle de l'expérimentation dans la démarche scientifique de Galilée.

Est-ce d'avoir fait rouler une bille sur un plan incliné, d'avoir fait tomber un objet du haut d'une tour qui lui ont suggéré la loi du mouvement d'un corps en chute libre? Ou au contraire, l'expérience n'a-t-elle servi que de vérification à une loi que Galilée avait déjà conçue à priori? Bien que le débat reste encore ouvert, on peut cependant affirmer avec certitude que Galilée a été un très grand expérimentateur et qu'il a été un des premiers hommes de science à faire des expériences de manière systématique, pour vérifier des postulats théoriques. Il est incontestable que Galilée a été un grand penseur de la science qui a apporté beaucoup d'idées neuves sur lesquelles repose encore aujourd'hui notre conception du mouvement.

Paradoxes proposés par Galilée

I) Le problème du navire

Enoncé

Dans le "Dialogue concernant les deux grands systèmes du monde", Sagredo, honnête homme ouvert aux théories de son temps, essaye de comprendre le phénomène suivant que lui soumet Salviati:

Une pierre lâchée du haut du mât d'un navire immobile, tombera au pied du mât en un certain temps t. La même pierre lâchée du haut du mât de ce même navire supposé en mouvement de translation uniforme tombe aussi au pied du mât au bout du même temps t.

Cependant, pense Sagredo, comme le navire s'est déplacé pendant le temps de la chute de la pierre, celle-ci devra avoir effectué un mouvement de translation tout en tombant de façon à tomber au pied du mât et non dans la mer. Il semble donc à Sagredo que la pierre mettra moins de temps à atteindre le pied du mât si le bateau est immobile que si celui-ci est en mouvement, la trajectoire qu'elle devra décrire dans le premier cas étant plus courte que le dans le deuxième.

Qu'en pensez-vous? Justifiez votre réponse.

2-Problème du cavalier

Enoncé

Dans ce même ouvrage de Galilée, Simplicio, personnage réfractaire aux idées nouvelles de la physique, paraît convaincu qu'une balle que laisserait tomber dans sa course un cavalier sur un cheval en mouvement de translation uniforme, restera immobile après avoir atteint le sol. Etes-vous d'accord avec Simplicio? Quand la balle atteint-elle le sol? Vérifiez que la balle aura parcouru la même distance horizontale que le cheval dans le même temps.

3) Le problème des chasseurs.

Enoncé:

Dans ce même ouvrage, Salvatori qui est le porte parole de Galilée, tente d'expliquer la façon dont le chasseur vise à l'arquebuse les oiseaux en plein vol. On pourrait penser que le chasseur, après avoir estimé la vitesse de l'oiseau, place son point de mire en avant de l'oiseau sur la trajectoire que celui-ci va suivre. Or un chasseur vous dirait qu'il n'en est pas ainsi. Il place le point de mire sur l'oiseau qu'il suit au cours de son vol et tire.

Comment se fait-il que cette méthode marche et qu'il ne rate pas son objectif? (On supposera que l'oiseau se déplace sur une trajectoire circulaire centrée sur le chasseur avec une vitesse de rotation constante).

Solutions

I) L'interprétation de ce paradoxe apparent se base sur le principe de "relativité", qui dit qu'étant donnés deux référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, les lois auxquelles sont soumis les changements d'état des systèmes physiques restent les mêmes, quel que soit le référentiel auquel ces changements sont rapportés. Nous négligerons par la suite les forces de frottement de l'air.

Choisissons deux référentiels, l'un R(Ox,Oz) lié à la terre ferme, Ox étant porté par la trajectoire du bateau et orienté dans le sens de la marche et l'autre R'(IX,IY) lié au navire, I désignant le sommet du mât, les axes IX et IZ coïncidant avec les axes Ox et Oz. On suppose qu'à l'instant t=0, I est en O. Soient $\vec{i}$ (respectivement. $\vec{k}$) un vecteur directeur unitaire de l'axe horizontal (respectivement. vertical). h désigne la hauteur du mât. Le deuxième référentiel est en translation uniforme par rapport au premier à une vitesse $\vec{V}(t) = V\vec{i}$.

Les lois régissant les mouvements des systèmes physiques sont les mêmes dans les deux référentiels, car ils sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. Etant donné que R et R' sont galiléens, l'accélération " $\vec{a}$ " de la pierre est la même dans chacun de ces repères. On a alors :

$$m\vec{a}(t) = m\vec{g} \ (*) \qquad \text{où } \vec{g} = -g\vec{k}$$

g étant la constante de gravité, m la masse de la pierre, $\vec{a}(t)$ l'accélération de la pierre.

En projetant cette relation sur l'axe vertical , on obtient les mêmes équations différentielles dans chacun des repères soit z"(t)=-g dans le référentiel R et Z"(t) =-g, dans le référentiel R'. Après intégration, on trouve:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad Z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (2).$$

Le temps mis par le pierre pour atteindre le pied du mât est le temps t tel que z(t)=Z(t)=-h, soit $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. C'est bien sûr le même dans les deux cas!

Ce qui trouble Sagredo est le fait que **la trajectoire de la pierre vue dans le référentiel R est parabolique et non rectiligne comme elle l'est dans le référentiel R'.**

Ecrivons les équations du mouvement dans chacun des référentiels ce qui revient à écrire z en fonction de x et Z en fonction de X. En projetant l'équation (*) sur l'axe horizontal, on obtient X"(t) = x"(t) = 0. Si l'on suppose que la pierre a été lâchée au temps t = 0 sans vitesse initiale, on a:

x(t) = Vt (3) dans le référentiel R et X(t) = 0 (4) dans le référentiel R',

puisqu'au temps t = 0, la pierre dans le référentiel lié à la terre ferme a une vitesse horizontale V qui est celle du bateau. En combinant les équations (1) et (3), on obtient $z = -\frac{1}{2V}gx^2$ qui est l'équation d'une parabole alors que l'égalité X = 0 dit que dans le repère mobile, la pierre décrit une droite portée par l'axe vertical.

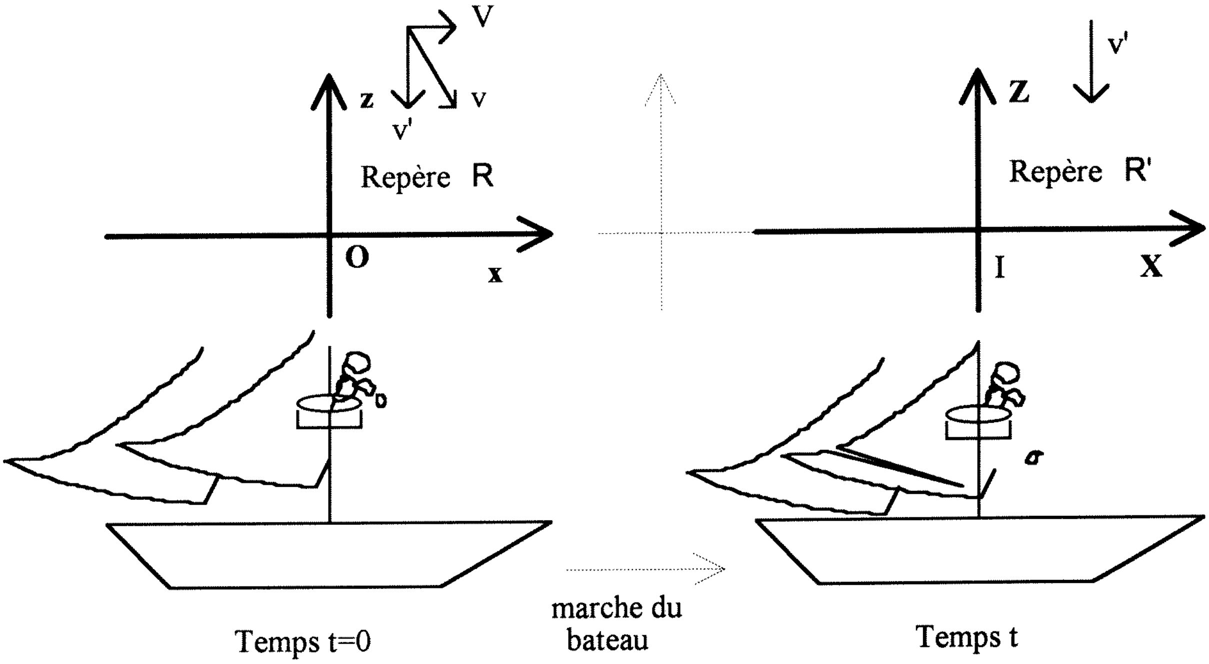


Figure 1

Dans le référentiel R lié à la terre, la vitesse de la pierre a une composante horizontale $\vec{V}$, celle du bateau, et donc sa vitesse est $v = \sqrt{v'^2 + V^2}$, où v' est sa vitesse dans le déplacement du bateau. Ainsi v' < V, ce qui explique que pendant le même temps de chute t = t' dans les deux repères, la trajectoire est plus longue dans R (arc de parabole) que dans R' (segment de droite).

Solution du II):

C'est un problème très semblable au précédent, pour lequel on utilise aussi le principe de relativité. On choisit un référentiel R(Ox,0z) lié au sol, 0 étant le point où se trouve la balle au moment où le cavalier la lâche, Ox étant l'axe de la trajectoire du cheval supposé se déplacer en ligne droite, cet axe étant orienté dans le sens de la trajectoire et Oz étant l'axe vertical en O, dont un vecteur directeur unitaire est $\vec{k}$. On choisit d'autre part un référentiel mobile R'(IX,IZ) en translation uniforme par rapport à R dans la direction 0x et qui coïncide avec R au temps t = 0.

Comme dans le problème précédent, dans chacun des référentiels, les équations du mouvement s'écrivent $m\vec{A}(t) = m\vec{g}$ où m désigne la masse de la balle, $\vec{g} = -g\vec{k}$, g étant la constante de gravité, A(t) l'accélération de la balle (c'est la même, qu'elle soit exprimée dans R ou R').

En projetant verticalement, on obtient la même chose dans les deux référentiels

soit z"(t) = Z"(t) = -g

d'où $Z(t) = z(t) = -1/2\, gt^2$ puisque Z(0) = Z'(0) = z(0) = z'(0) = 0.

La balle atteint le sol quand Z(t) = z(t) = -h, h étant la hauteur de la balle par rapport au sol au temps 0, soit au temps $t = \sqrt{2g/h}$.

D'autre part, en projetant sur l'axe horizontal, on obtient $x''(t) = 0$ soit, après intégration, $x(t) = Vt$, en tenant compte du fait que la vitesse initiale de la balle dans le repère fixe est celle qui lui a été communiquée par le cheval soit $V\vec{i}$, où $\vec{i}$ est un vecteur directeur unitaire de l'axe Ox. L'équation de mouvement du cavalier s'écrit aussi $x(t) = Vt$ puisqu' il se déplace à vitesse constante V d'où le fait que la balle et le cavalier parcourent une même distance $d = Vt$ pendant un temps t.

Solution du III):

Dans un référentiel fixe lié à la terre, l'extrémité B(t) de l'arme du chasseur se déplace selon une trajectoire circulaire centrée sur le chasseur assimilé à un point O, le rayon du cercle décrit étant la longueur de l'arme.

On peut assimiler le déplacement de l'oiseau A(t) à un arc de cercle de même centre. Dans le plan P du cercle (on le supposera orienté dans le sens trigonométrique), on considère deux référentiels, l'un fixe par rapport à la terre, l'autre en rotation uniforme par rapport au premier.

Soit Oz l'axe dans lequel est pointée l'arme du chasseur à un temps $t = 0$, le chasseur pointant toujours l'arme sur l'oiseau. On considère le référentiel R(Ox,Oz), Ox étant l'axe perpendiculaire à Oz dans le plan P tel que l'angle orienté des demi-droites Ox,Oz soit positif (voir figure ci-dessous). On considère aussi un référentiel mobile R' (0X,0Z) aussi centré en O en rotation uniforme autour de O avec la même vitesse angulaire de l'oiseau et choisi de telle manière qu'il coïncide avec le référentiel R au temps $t = 0$ (voir figure 2).

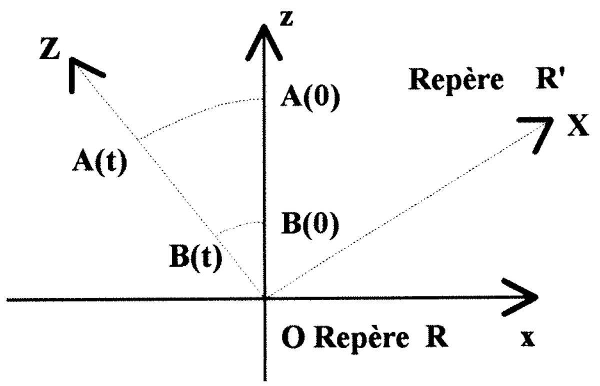


Figure 2

Comme le chasseur déplace son arme à la même vitesse angulaire que celle de l'oiseau, l'arme du chasseur est constamment portée par l'axe OZ ce qui se traduit par le fait que dans le référentiel R', le projectile suit une trajectoire rectiligne portée par l'axe OZ et que dans le référentiel fixe R, le chasseur communique au projectile une vitesse angulaire initiale qui est celle du référentiel R' en rotation dans R. Dans le référentiel mobile, on constate donc facilement que le chasseur ne va effectivement pas rater sa proie.

Remarque: Le repère R' n'est pas un repère galliléen , on néglige la force de Coriolis! Est-elle vraiment négligeable ou les chasseurs visent-ils devant la proie?

IV)Problème du mouvement de la Lune

1) En une durée de 27 jours, 7 heures 43 minutes, la Lune décrit une ellipse autour de la Terre (ellipse que nous assimilerons ici à un cercle). Nous supposerons que la vitesse de rotation est constante. Dans le même temps, elle accomplit une rotation complète sur elle-même. Expliquez le fait que de tout point de la Terre, on voit toujours la même face de la Lune.

2) Dans sa révolution autour de la Terre, seule une partie de la demi sphère éclairée est visible par l'observateur terrestre. Indiquez le(s)quels des schémas suivants correspondent:

a) à la pleine Lune (toute la face éclairée par le Soleil est visible).

b) aux premier et deuxième quartiers (une moitié de la face éclairée est visible).

c) à la nouvelle Lune (la face sombre est tournée vers la terre, la face éclairée n'est pas visible).

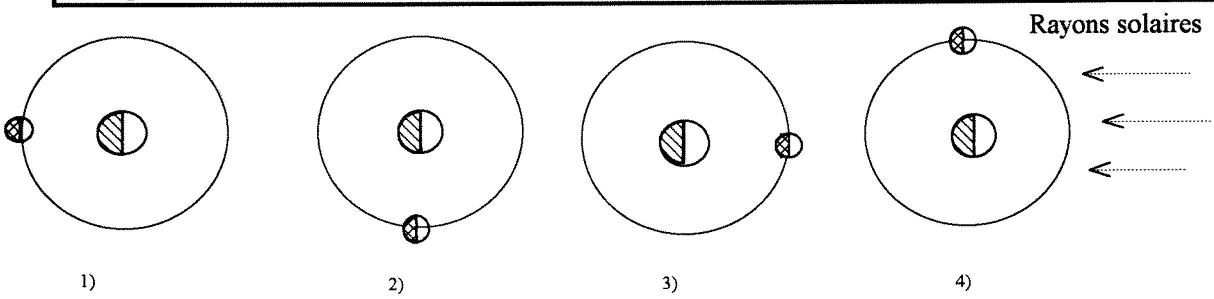


Figure 3

Solution

1) Soit (Ox,Oy) un référentiel lié à la Terre, centré au centre de la Terre. Le centre L(t) de la Lune décrit une trajectoire circulaire avec une vitesse de rotation constante Ω. Dans le référentiel (LX,LY) en "translation circulaire" autour de la terre (voir figure) et qui coïncide avec le référentiel (Lx,Ly) au temps t = 0, la Lune a un mouvement de rotation qui se fait dans le même sens que celui du repère, à vitesse angulaire Ω. Ainsi, lorsque la lune a tourné d'un angle $\theta(t)$ sur son orbite autour de la terre, elle a aussi tourné du même angle $\theta(t)$ sur elle même et dans le même sens. On a donc les situations suivantes (voir la figure 4) au temps t = 0 avec $\theta(0) = 0$, t_1 avec $\theta(t_1) = \frac{\pi}{2}$, t_2 avec $\theta(t_2) = \pi$, t_3 avec $\theta(t_3) = \frac{3\pi}{2}$. La partie hachurée représente la face cachée de la lune.

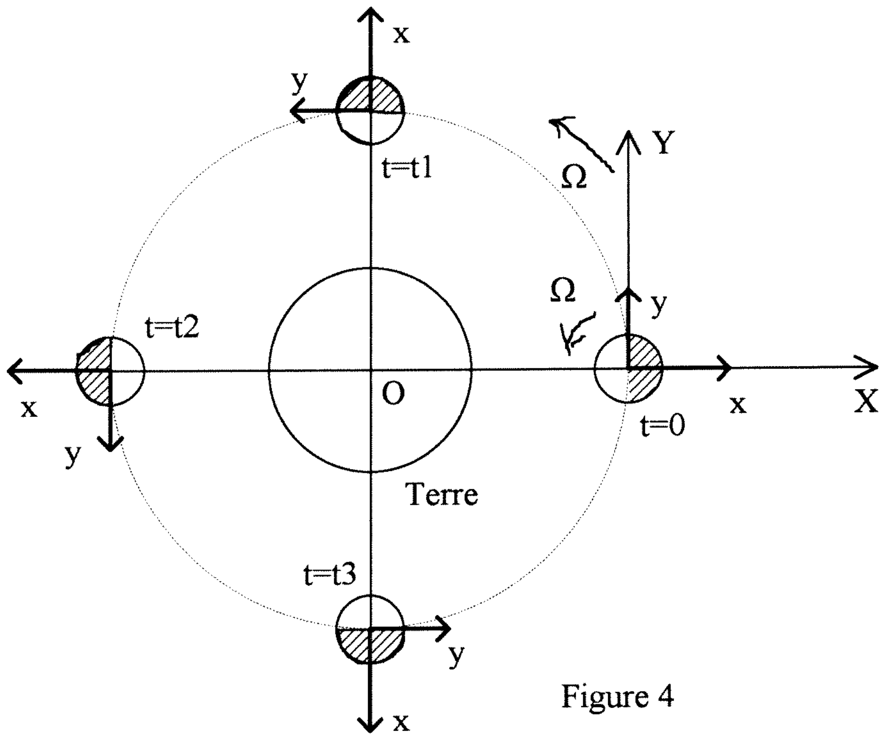


Figure 4

2) Il est clair que les cas de la pleine lune, les premiers et deuxièmes quartiers, la nouvelle lune correspondent respectivement aux schémas 1), 2), 4) et 3).

3. ISAAC NEWTON

Isaac Newton est né à **Woolsthorpe** dans le Lincolnshire en Angleterre le jour de **Noël 1642**, c'est à dire quelques mois seulement après la mort de **Galilée.** Initialement destiné à reprendre l'exploitation de son père fermier, Newton est retiré de l'école secondaire assez jeune. C'est sur l'insistance du directeur de l'école qui remarque les aptitudes particulières de Newton, que la mère de celui-ci consent qu'il retourne à l'école pour y préparer l'admission à l'université. Il est admis à l'**université de Cambridge** à l'âge de **dix-huit ans** et va y passer quarante années, d'abord comme étudiant, puis comme professeur. Ce séjour à Cambridge est cependant interrompu par quelques retraites dans sa ville natale Woolsthorpe, en particulier en 1665-66, lors de la fermeture de l'université en raison de la peste qui sévit en Angleterre. Ces deux années de retraite forcée marquent le début des travaux importants de Newton.

Il se consacre à la **méthode des fluxions, l'ancêtre du calcul infinitésimal.** La paternité de la découverte du calcul infinitésimal a longtemps été (et reste encore) un sujet de polémique, les uns (majoritaires) l'attribuant à **Leibniz,** les autres à Newton. Quelqu'ait été le père du calcul différentiel, il est clair que celui-ci a joué un rôle fondamental dans l'élaboration des lois du mouvement énoncées plus tard par Newton. Ce n'est que par la considération de ce qui se passe pendant un intervalle de temps infiniment petit que Newton a pu arriver à une formulation valable de n'importe quel type de mouvement.

On pourrait croire que Galilée, ayant déjà pressenti le principe d'inertie et découvert la loi de la chute des corps à la surface de la terre, il ne restait qu'un pas à faire pour découvrir les lois du mouvement énoncées par Newton: **"les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée"** (extrait de **"Principes mathématiques de la philosophie naturelle"** traduits de l'anglais par Mme de Châtelet). Ceci s'écrit: $\vec{F}dt = md\vec{v}$, où dt est un intervalle de temps infiniment petit.

Mais les énoncés de Galilée et de Newton diffèrent fondamentalement puisque ceux de Galilée concernent le mouvement dans sa globalité tandis que ceux de Newton le mouvement dans un intervalle infiniment petit. En ce sens, cette approche nécessite l'introduction de l'outil fondamental qu'est le calcul infinitésimal dont Galilée ne disposait pas encore.

C'est à partir de ces mêmes lois du mouvement que Newton conçoit **le principe de gravitation** qui explique du même coup le mouvement des planètes (et en particulier **les lois de Kepler)** et la trajectoire d'une pierre lancée à la main. Il formule les lois qui régissent tous les mouvements dans l'univers infini : celui d'une pomme qui tombe sur le sol et celui des planètes qui tournent autour du soleil. Ainsi, pour Newton, la matière possède deux qualités, **l'inertie** d'une part et la **gravitation** d'autre part. L'inertie est ce qui fait qu'un objet matériel continue sur sa lancée. La gravitation est l'attraction qu'exerce un morceau de matière sur un autre corps. Newton a vu qu'à la fois l'inertie, et la gravitation, font intervenir une quantité de matière contenue dans le corps, la masse inertielle et la masse gravitationnelle, qu'il ne parvient cependant pas à identifier.

L'ouvrage en latin "**Philosopia Naturales Principia mathematica**" (encore appelé "Principia") qui rassemble les travaux de Newton sur la lumière, les lois du mouvement, la gravitation (ces derniers ne constituant qu'environ un dixième de l'ouvrage) ne fut publié qu'en 1687 avec l'aide précieuse de l'astronome **E.Halley.** Celui-ci, s'intéressant aux trajectoires orbitales des planètes, consulte Newton sur ce sujet et aussitôt reconnaît la grande valeur de ses travaux. Il le presse de les rédiger, et se charge lui-même de leur publication. Ils sont ensuite traduits en anglais, puis de l'anglais en français par **Mme de Châtelet** grâce à laquelle ils seront connus en France. Cette traduction a été publiée en 1759 seulement, avec une préface de **Voltaire**. Ce dernier a beaucoup contribué à faire mieux connaître les travaux de Newton, en y introduisant parfois une pointe d'humour comme en témoigne ce passage extrait de sa "**Quatorzième Lettre Philosophique sur Descartes et Newton**" publiée un an après la mort de Newton :" *Un Français qui arrive à Londres trouve les choses bien changées en Philosophie comme dans tout le reste...Il a laissé le monde plein, il le trouve vide. A Paris on voit l'univers composé de tourbillons de matière subtile; à Londres, on ne voit rien de tout cela... A Paris, vous figurez la terre comme un melon; à Londres, elle est aplatie des deux côtés...*". Il fait ainsi référence à l'influence de Newton, encore méconnu en France, sur la pensée scientifique anglaise.

Le texte des "Principia" diffère des ouvrages traitant du système du monde de ses prédécesseurs par le souci manifeste de l'auteur de démontrer les énoncés et d'éviter les affirmations non démontrées. Ainsi, une phrase devenue fameuse (extraite des "Principia") "Hypothèses non fingo" (Je ne fais pas d'hypothèse) témoigne-t-elle du souci qu'a Newton de ne pas utiliser de propositions fausses comme prémisses et explications.

Après la rédaction des "**Principia**", Newton entreprend une carrière politique en réaction aux différentes mesures impopulaires parmi les universitaires, que le roi **Jacques II** tente d'imposer à l'université de Cambridge au début de 1687. Après la révolution qui éclate en 1688, Newton représente l'université de Cambridge au parlement de 1689, puis en 1697 il est maître de la Monnaie, poste qu'il convoitait depuis un certain temps. En 1703, il est élu président de la "**Royal Society**" fondée en 1660, une des plus anciennes sociétés scientifiques qui se sont formées en Europe au XVIIème. C'est à la "Royal Society" que les scientifiques communiquent leurs nouveaux résultats et c'est elle qui se charge de les publier. C'est avec l'expérimentateur de cette société, **R. Hooke**, que Newton a quelques différends au début de sa carrière au sujet de la paternité des résultats qu'il présente sur la théorie de la lumière. Dans une lettre, qui figure parmi les plus courtoises au sein de la correspondance entre ces deux hommes, on trouve ces quelques lignes écrites par Newton qui témoignent à la fois de la modestie de celui-ci et de la conviction qu'il avait de l'importance de ses théories : "*Mais d'autre part, (écrit-il à Hooke à propos de la théorie de la lumière), vous surestimez mes aptitudes à étudier cette matière. Ce que Descartes a fait, était un bon commencement. Vous y avez ajouté diverses choses, en particulier en ce qui concerne les couleurs des lames minces. Si j'ai vu plus loin, c'est parce que je suis monté sur les épaules de géants.*"

C'est en 1727 (âgé de 85 ans) que meurt Newton, laissant derrière lui cette oeuvre de géant de l'histoire des sciences.

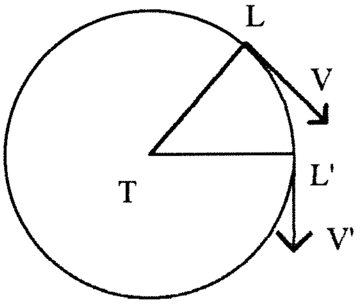
LA FORCE D'ATTRACTION EXERCEE PAR LA TERRE SUR LA LUNE

En admettant que la trajectoire de la Lune soit réellement un cercle centré sur la Terre assimilée à un point, on cherche la nature de la force qui maintient à chaque instant la Lune sur son orbite et l'empêche de continuer "tout droit". Pour répondre à cette question, nous suivrons le raisonnement que fit Isaac Newton déduisant la nature de cette force de la seconde loi du mouvement qu'il avait établie.

Deuxième loi du mouvement: Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été exercée soit:

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{V}' - m\vec{V} \qquad (*)$$

où $\vec{V}$ est le vecteur vitesse instantané de la Lune à un instant t, $\vec{V}'$ à un instant t+Δt et $\vec{F}$ la force qui s'exerce sur la Lune supposée de masse m. On supposera que $\vec{V}$ est constant et on posera m = 1.



1) A partir d'un point O dessiné sur la feuille, représenter les points A et A' tels que: $\overrightarrow{OA} = \vec{V}$ et $\overrightarrow{OA'} = \vec{V}'$ Vérifiez que ces points sont à égale distance de O.

2) Déduire de la relation (*) et du fait que m = 1 la relation $\vec{F}\Delta t = \overrightarrow{AA'}$

Représenter alors le vecteur $\vec{F}\Delta t$.

Le raisonnement que fait Newton est alors le suivant:

Comme V et V' sont perpendiculaires à TL et TL' respectivement, OA et OA' sont aussi perpendiculaires à TL et TL' respectivement d'où l'on déduit que AA' est perpendiculaire à LL'.

3) Dites à quel endroit ce raisonnement utilise le fait que le temps qui s'est écoulé entre le moment où la Lune est en L et le moment où elle est en L' est infiniment petit.

4) En admettant que pour Δt suffisamment petit, AA' soit effectivement perpendiculaire à LL', en déduire en utilisant la deuxième question la direction de la force F. Justifiez la dénomination "force d'attraction exercée sur la Lune par la Terre".

4. LE FOUR SOLAIRE OU L'ANTENNE PARABOLIQUE

Notions mathématiques:	**Notions en physique:**
dérivées vecteur directeur de la tangente produit scalaire	Loi de Snellius-Descartes

Le texte suivant relate le déroulement de l'activité en classe. L'énoncé est donné au fur et à mesure par le professeur.

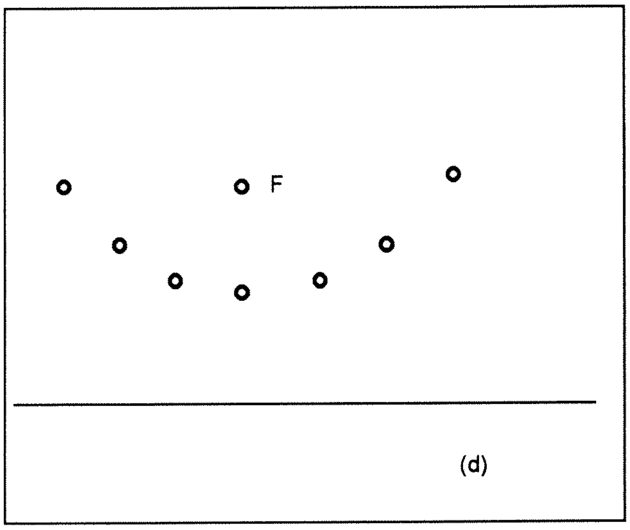
On dit qu'Archimède aurait, lors du siège de Syrracuse, brûlé les bateaux ennemis à l'aide de miroirs paraboliques. Est-ce vrai ou n'est ce qu'une légende? Les contradicteurs opposent l'argument que les lois d'optique n'étaient pas connues d'Archimède, elles furent en effet énoncées par Descartes.

De nos jours les paraboloïdes font parti de notre environnement. Elles servent à capter les émissions de télévision. Une gigantesque antenne parabolique est installée aux Etats Unis dans le but de capter les messages d'éventuels extraterrestres. L'activité qui suit propose d'expliquer aux élèves comment ça marche.

Première étape : Construction point par point d'une parabole

On se donne une droite d et un point F non situé sur d, construire l'ensemble des points M équidistants de la droite d et du point F.

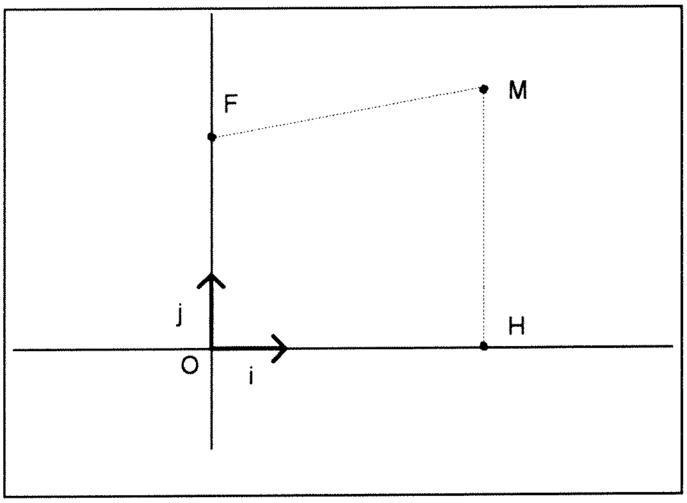
Il est intéressant de laisser les élèves chercher par petits groupes. Ils trouvent très vite trois premiers points. Pour les suivants le professeur aura souvent besoin de rappeler quel est l'ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite



Deuxième étape: Equation de cette courbe

On choisit la droite d comme axe des abscisses et la perpendiculaire à (d) comme axe des ordonnées. Le point d'intersection O des deux droites sera choisi comme origine du repère (*ce n'est pas le meilleur mais c'est en général celui proposé par les élèves*), le sens positif choisi sur l'axe des ordonnées sera celui de O vers F.

Posons OF = a et appelons H le projeté orthogonal de M sur la droite d. Quelles sont les coordonnées des points M, F et H ?



Le point M est sur la courbe *C* si et seulement si MF = MH

$MF^2 = MH^2$

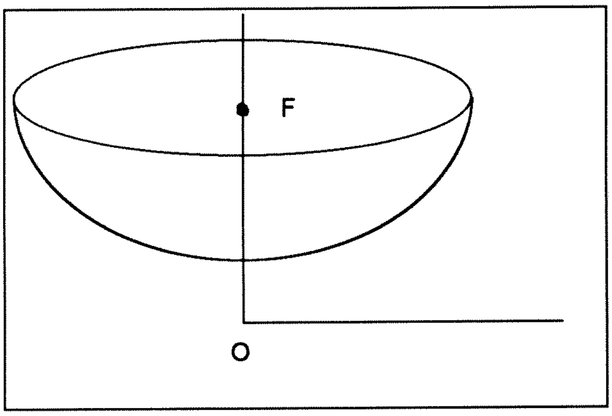
$x^2 + (a - y)^2 = y^2$

On trouve: $y = \frac{1}{2a}x^2 + a^2$

Le point M décrit une parabole.

On pourra en profiter pour dire aux élèves que toutes les paraboles admettent un foyer F et une directrice d et que chaque point de la parabole est à égale distance de (d) et de F.

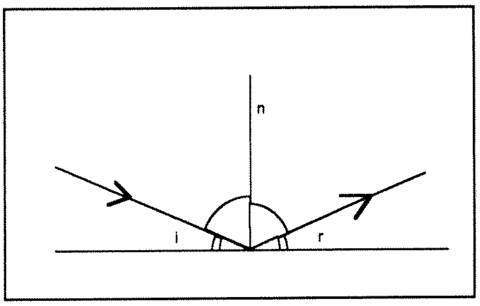
<u>Troisième étape</u> : Le paraboloïde



Un paraboloïde de révolution est un solide engendré par la rotation d'une parabole autour de son axe de symétrie. Si on coupe un tel paraboloïde suivant un plan contenant O et F on obtient une parabole de foyer F.

<u>quatrième étape</u> : Comment fonctionne une antenne parabolique?

Les ondes électromagnétiques arrivent parallèlement à la droite (OF) dans le paraboloïde. Il faut donc placer le point F de telle sorte que le paraboloïde soit largement ouvert. Les rayons sont alors réfléchis (à condition de tapisser l'intérieur d'un matériau réfléchissant) vers le point F. (C'est ce que nous allons démontrer) . Il suffit alors de placer un capteur en F.



Démontrons que les rayons sont réfléchis vers le point F

<u>Loi de Descartes:</u>

"Un rayon arrivant sur une surface réfléchissante plane est réfléchi selon la loi $i = r$" (voir figure ci dessus)

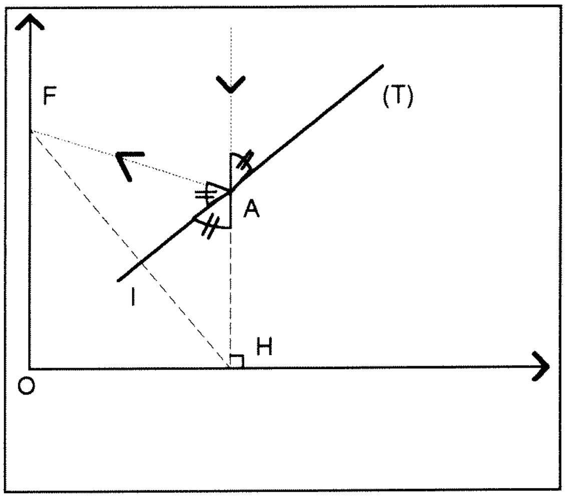
Mais dans un paraboloïde le rayon n'arrive pas sur une surface plane, il arrive sur une parabole! Comment sera-t-il alors réfléchi?

Rappel: La parabole peut, au voisinage d'un point, être approchée par une droite. La meilleure approximation affine d'une courbe au voisinage d'un point est la tangente à la courbe.

Appelons A le point de la parabole où arrive le rayon (le rayon arrive parallèlement à (OF)), il sera donc réfléchi suivant la loi de Descartes citée ci dessus, montrons qu'il arrive alors en F.

Le triangle AFH est, par hypothèse, isocèle. Il nous suffira de prouver que la tangente est bissectrice de l'angle FAH pour avoir terminé (voir les égalités d'angle sur le dessin)

Mais comme le triangle FAH est isocèle nous pouvons démontrer que la tangente est la hauteur issue de A.



Un vecteur directeur $\vec{w}$ de la tangente a pour coordonnées: (1 ; f ' (b)) où b est l'abscisse de A. Donc $\vec{w}\left(1, \frac{1}{a}b\right)$

Le vecteur $\vec{FH}$ a quant à lui pour coordonnées : (b ; -a)

Calculons le produit scalaire $\vec{FH}.\vec{w}$

$\vec{FH}.\vec{w} = b + (-a)\frac{1}{a}b = 0$ c'est ce que nous voulions démontrer.

5. MESURE DE LA VITESSE DE LA LUMIERE

La vitesse de la lumière est usuellement notée par la lettre c, qui est l'abréviation de célérité.

Historique: La première détermination astronomique de la célérité fut faite en 1676 par Olaüs Römer, en observant les éclipses des satellites de Jupiter. Il trouva une valeur peu précise, de l'ordre de 350 000km.s^{-1}.

En 1849, Hippolyte Fizeau mesura c par une méthode entièrement terrestre, à l'aide d'une roue dentée et d'un système de lentilles optiques. Certaines méthodes modernes de mesure de c en dérivent.

La méthode du miroir tournant fut appliquée en 1850 par Léon Foucault, et on se propose d'en expliquer le principe dans cette activité.

Principe de la mesure:

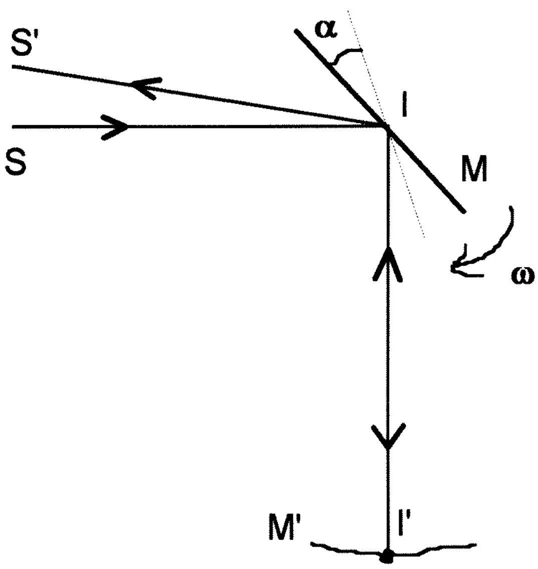


Figure 1

Une source ponctuelle de lumière S est à la distance d sur un miroir M (en trait gras), qui tourne à une grande vitesse angulaire ω.

Le faisceau incident SI se réfléchit, puis va à nouveau se réfléchir en un point I', sur un miroir fixe M' (voir figure 1). Le miroir M' est conçu de telle sorte que le faisceau réfléchi par M' soit renvoyé sur lui-même, c'est dire suivant la direction II' qui est fixe.

Pendant le temps mis par la lumière pour faire le trajet aller et retour, le miroir a tourné d'un petit angle α, de sorte que le faisceau retour se réfléchit suivant la direction IS'. De la mesure de SS', et de la donnée de d, l, et ω, on en déduit alors une valeur approchée de c.

Analyse du montage:

Sur quel parcours mesure-t-on effectivement la vitesse de la lumière? Dépend-t-il de d, de l? Quelle doit être la forme du miroir M'? Calculer la distance SS', en fonction de l'angle α dont a tourné le miroir, puis en fonction de ω et de c.

Application numérique:

ω = 1000 tours/seconde
II' = l = 15m
d = 10m
SS'≈12.5mm

Notions en mathématiques:	**Notions en physique:**
fonction sinus et son approximation affine à l'origine.	réflexion des rayons lumineux. vitesse de la lumière. réflexion sur un miroir.

Solution:

La célérité de la lumière est mesurée sur le parcours II'=l (aller et retour) uniquement, puisque c'est le miroir tournant seul qui fait intervenir le temps. La valeur de d n'intervient donc pas.

Pendant le temps $t = \frac{2l}{c}$ mis par la lumière pour effectuer le trajet aller retour II', le miroir a tourné d'un angle $\alpha = \omega\, t$ (voir la figure 2).

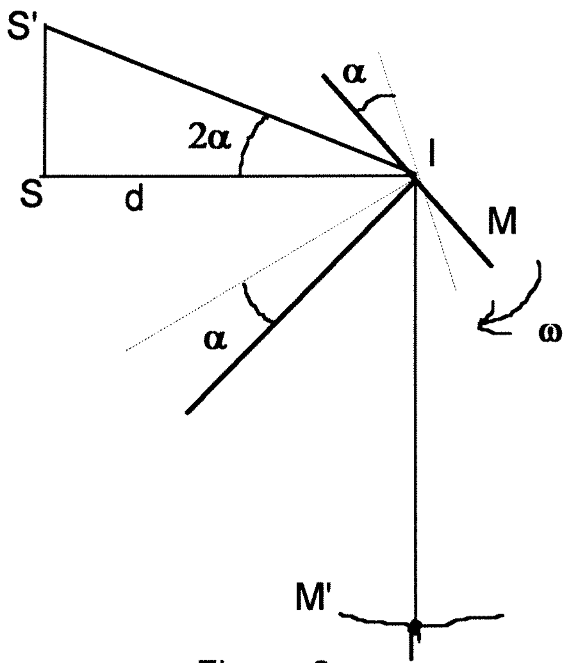


Figure 2

L'angle SÎS' est égal à 2α, ce qui se montre en traçant les deux normales au miroir en I qui font un angle α entre elles (il vaut mieux avoir montré cette propriété auparavant avec les élèves...!)
Le triangle SIS' étant rectangle en I, on a:
$\sin 2\alpha = \frac{SS'}{d}$
On en déduit alors facilement la relation:

$$\sin\left(2\omega \frac{2l}{c}\right) = \frac{SS'}{d}$$

La valeur de c s'en déduit grâce à la fonction Arcsinus qui n'est pas au programme de l'enseignement secondaire!
Il est évident que l'angle α est "petit" et on fait alors l'approximation classique $\sin\alpha \cong \alpha$, pour aboutir à la relation $c = \frac{4\omega l d}{SS'}$.

L'application numérique donne $c \cong 301\,593\,000\ kms^{-1}$

Commentaires:

L'énoncé de cet exercice se trouve dans certains livres de physique, mais la première idée était inspirée d'un article de l'Encyclopédia Universalis sur la lumière.

Cet exercice, dont la résolution est somme toute rapide et ne demande pas beaucoup de calculs, est riche en notions mathématiques utilisées fréquemment en physique:

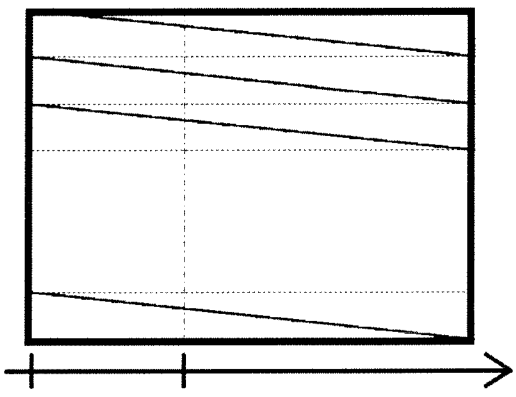
* La réflexion d'un rayon lumineux sur une surface plane, et le fait que si le miroir a tourné d'un angle α, sa normale a également tourné d'un angle α, et l'angle SÎS' est alors égal à 2α.

* La forme du miroir M' est circulaire, pour que le rayon incident soit réfléchi suivant la même direction. L'idée sous-jacente est que la tangente au cercle en un point est perpendiculaire à son rayon. On assimile localement l'arc de cercle à sa tangente.

* Dans certaines situations, on peut effectuer l'approximation affine d'une fonction (ici sinus) pour résoudre un problème. Cette approximation est souvent effectuée par le physicien et les élèves ont du mal à l'admettre. Cette idée apparaît naturellement dans ce problème et pourrait donner lieu à des développements mathématiques supplémentaires, comme par exemple l'approximation de la fonction sinus par des fonctions polynômes. Elle pourrait aussi servir de justification à l'idée mathématique d'effectuer l'approximation affine des fonctions.

Remarquons également que le physicien a résolu plus rapidement l'exercice que le mathématicien. En effet, les instruments d'optique sont souvent gradués directement en radians et l'approximation $\sin \alpha \cong \alpha$ n'apparaissait pas dans sa solution! Il était sous-entendu que l'on ne mesurait pas SS' en mm, mais qu'on lisait directement $\widehat{SIS'}$ en radians...

6. FABRIQUER UNE IMAGE SUR UN ECRAN DE TELEVISION



L'image d'un écran de télévision est formée par un point plus ou moins lumineux (le spot) qui balaye l'écran ligne par ligne, et de haut en bas. L'image est donc décomposée en un grand nombre de lignes si serrées et parcourues si rapidement par le spot que l'homme ne le distingue pas (persistance rétinienne).

L'ancien standard français était de 819 lignes. Le standard actuel des systèmes PAL SECAM, NTSC... est de 625 lignes. Le système de télévision haute définition prévoit 1250 lignes.

A Etude du mouvement horizontal.

On décrit le mouvement horizontal du spot en fonction du temps, par la fonction f qui à un instant t, associe l'abscisse x du spot sur l'axe horizontal de l'écran. On suppose qu'à l'instant t=0, le spot est à gauche de l'écran (x=0), lequel a 41cm de largeur. Les caractéristiques de son déplacement horizontal sont les suivantes:
*Le spot se déplace à vitesse constante à l'aller (de gauche à droite).
*Le spot se déplace à vitesse constante au retour (il est alors éteint).
*Le trajet aller dure 59 microsecondes, le trajet retour dure 5 microsecondes.

Etudier la fonction f, et tracer sa représentation graphique sur une durée supérieure à 200 microsecondes. Calculer la fréquence du balayage horizontal.

B Etude du mouvement vertical

L'image est formée de 625 lignes horizontales.
1) Combien d'images successives sont-elles formées sur l'écran en une seconde?
2) Combien de temps est-il nécessaire pour former une image complète sur l'écran?
3) En réalité, l'image qui est formée est entrelacée: on ne balaye qu'une ligne sur deux à chaque passage, et donc le temps nécessaire pour effectuer un balayage vertical est deux fois moindre. Quelle est la fréquence de balayage vertical et pourquoi a-t-on choisi cette valeur?

C Prolongement

Lire de façon critique une publicité vantant les mérites d'un moniteur d'ordinateur...

Notions en mathématiques:	**Notions en physique:**
fonctions périodiques.	fréquence, période.
fonctions affines par intervalles.	liens avec la base de temps de l'oscilloscope.

Objectif de l'activité: Découvrir le fonctionnement d'un écran de télévision, et faire le lien avec l'oscilloscope. Des fonctions périodiques sont ainsi mises en évidence.

Solution:

Lors de la lecture de l'énoncé et pendant l'activité, beaucoup d'élèves ont posé des questions en rapport avec la télévision. Voici donc quelques éléments qu'il est bon d'avoir présents à l'esprit:
*Le format de l'écran est 4/3: c'est le rapport de la longueur de l'écran sur sa largeur. C'était le format standard jusqu'à ces dernières années. Son inconvénient est que les films au format cinémascope ne s'y encadrent pas bien. D'où l'apparition de bandes noires en haut et en bas de l'écran qui réduisent considérablement la taille de l'image... (voir l'activité "voir une image sur un écran de télévision".
*Si le format de l'écran est de 16/9, l'inconvénient précédent est éliminé et on profite pleinement du format de l'enregistrement du film et de l'écran de télévision.
*Les publicités vantent la taille de l'écran, qui est indiquée en centimètres. C'est la mesure de sa diagonale.
*Une caractéristique importante d'un écran d'ordinateur est la taille élémentaire du spot lumineux: Une taille courante est de 0.28 pitch pour un écran de 14 pouces. On remarquera que le nombre de lignes est plus élevé pour un moniteur haute résolution (1024 colonnes par 768 lignes) que pour un écran de télévision.

A. Il est facile de tracer la fonction périodique qui décrit le mouvement horizontal du spot. C'est une fonction affine par intervalles, et périodique de période 64µs. La fréquence de balayage horizontal est donc de 15 625 Hz. On pourra remarquer qu'il est facile de dessiner la représentation graphique de cette fonction, mais que son expression analytique est difficile à obtenir. On peut écrire au passage quelques équations de droites.

B. Si l'image est non entrelacée, le spot met 625 x 64 =40 000µs pour parcourir l'écran dans sa totalité. Il se formera donc 1/0.04= 25 images par seconde. Cette valeur a été choisie pour dépasser celle de la persistance rétinienne qui est de l'ordre de 0.1s (soit dix images par seconde). La fréquence de balayage vertical est dans ce cas de 25Hz.

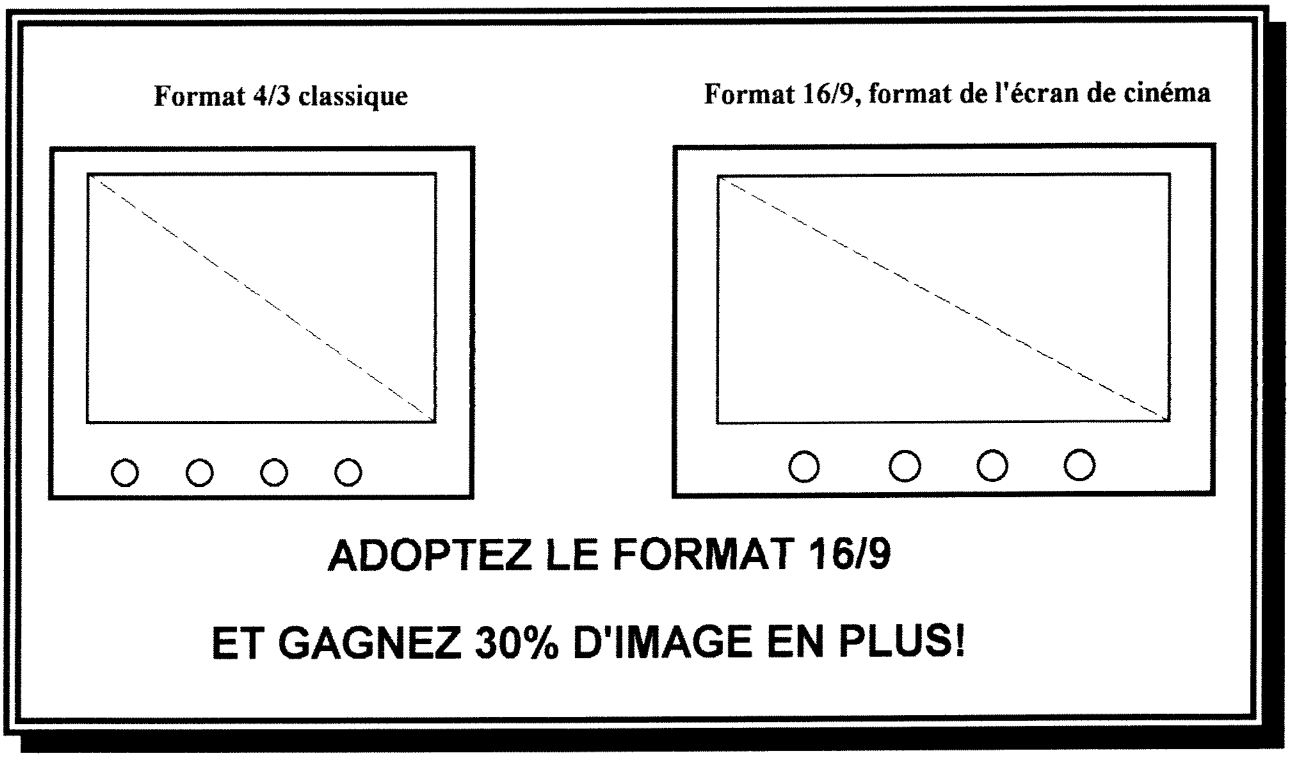
En fait le spot ne balaye qu'une ligne sur deux à chaque passage: il balaye dans l'ordre les lignes 1,3,..., 623,625, puis la ligne 627 qui correspond en fait à la ligne 2. C'est pourquoi tout système de télévision qui balaye l'écran de façon entrelacée a un nombre impair de lignes. D'un point de vue mathématique, on peut dire que 2 est un générateur de Z/625Z! Cette technique améliore la synthèse que fait le cerveau de l'image reçue. La fréquence du balayage vertical est donc de 50Hz, et est fournie par l'alimentation du secteur. Les américains ayant une fréquence du secteur de 60Hz, le nombre de lignes est réduit à 525 (standard NTSC: $525 \times 64 = 33600\,\mu s$ et la fréquence de balayage est de 30 Hz).

Selon le temps disponible, on peut faire calculer aux élèves la valeur de la diagonale de l'écran:

$41^2 + \left(\frac{4}{3} \times 41\right)^2 = \frac{42025}{9}$ d'où la valeur recherchée: $\sqrt{\frac{42025}{9}} \cong 68.3cm$

7. VOIR UNE IMAGE SUR UN ECRAN DE TELEVISION 2

Voici une publicité imaginaire, qui vante les qualités de l'écran de télévision au format 16/9:



Le format représente le rapport de la longueur de l'écran par sa largeur.
La taille de l'écran, mesurée en cm, représente la longueur de la diagonale du rectangle formé par l'écran.
Cette publicité est-elle mensongère? On prendra comme base de réflexion un écran dont la diagonale mesure 70cm en format 4/3.

Pour éviter de se laissez abuser par une publicité habilement construite, réfléchir aux questions suivantes:

1) La diagonale de l'écran 16/9 mesure-t-elle également 70cm, ou est ce la largeur de l'écran qui est inchangée?
2) Quel type d'émission est-il concerné? Une émission au format 4/3? Une image au format 16/9, qui apparaît avec des bandes noires sur l'écran au format 4/3?

Prolongements
1) Quelle est la taille de l'écran 16/9 qui procure la même surface visuelle que l'écran au format 4/3 ?
2) La diagonale de l'écran de télévision étant fixée à 70cm, quel est le format de l'écran qui procure une surface de vision maximale?

Notions mathématiques:	**Notions physiques:**
théorème de pythagore, aires, fractions	

Solution

La figure de base de ce problèmes est évidemment le théorème de Pythagore. Les calculs ne posent aucune difficulté, et les résultats sont consignés dans les tableaux ci-dessous:

	Ecran au format 4/3 Diagonale 70cm	Ecran au format 16/9 Diagonale 70cm		Ecran au format 16/9 Même largeur que l'écran au format 4/3 de diagonale 70cm	
			gain par rapport au format 4/3		gain par rapport au format 4/3
Surface de l'écran en cm^2	2352	2093	**-11%**	3136	**+33%**
Image au format 4/3 en cm^2	2352	1570	**-33%**	2352	**0%**
Image 16/9, avec bandes noires sur l'écran 4/3 en cm^2	1764	2093	**+18%**	3136	**+77%**

La lecture de ce tableau montre que la publicité indique simplement le gain de la surface de l'écran, si la largeur de l'écran reste constante! A diagonale constante, pour un film projeté en format 16/9, le gain en surface de l'image n'est que de 18%.

ECRAN	Ecran format 4/3 Diagonale70cm	Ecran format 16/9 Diagonale 70cm	Ecran format 16/9 Même largeur que l'écran 4/3 de diagonale 70cm
Diagonale en cm	70	70	$\sqrt{\frac{66052}{9}} \cong \frac{14\sqrt{337}}{3} \cong 85.67$
Largeur en cm	42	$\frac{630}{\sqrt{337}} \cong 34.31$	42
Longueur en cm	56	$\frac{1120}{\sqrt{337}} \cong 61.01$	$\frac{224}{3} \cong 74.67$
Surface de l'écran en cm^2	2352	$\frac{705600}{337} \cong 2093.77$	3136
DIMENSIONS DE L'IMAGE AU FORMAT 4/3			
Largeur en cm	42	$\frac{630}{\sqrt{337}} \cong 34.31$	42
Longueur en cm	56	$\frac{840}{\sqrt{337}} \cong 45.75$	56
Surface en cm^2	2352	$\frac{529200}{337} \cong 1570.32$	2352
DIMENSIONS DE L'IMAGE AU FORMAT 16/9			
Largeur en cm	31.5	$\frac{630}{\sqrt{337}} \cong 34.31$	42
Longueur en cm	56	$\frac{1120}{\sqrt{337}} \cong 61.01$	$\frac{224}{3} \cong 74.67$
Surface en cm^2	1764	$\frac{705600}{337} \cong 2093.77$	3136

8. LA GRANDE ROUE ET D'AUTRES MANEGES

PARTIE A

Un nouveau manège a fait son apparition à la fête foraine (Figure 1). Il est possible de choisir de monter dans une des deux cabines représentées sur la figure.

La cabine supérieure est fixée au rail au point t de telle sorte que son plancher soit toujours tangent à la courbe décrite par le point t. La cabine inférieure est reliée au rail par l'intermédiaire d'une tige métallique tp, de telle sorte que cette tige reste toujours verticale quelle que soit la vitesse de la cabine.

Observer la trajectoire décrite par chacune des cabines et leur mouvement, en répondant aux questions suivantes:

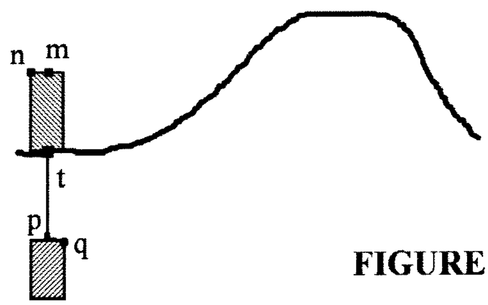


FIGURE 1

*Esquisser la trajectoire décrite par les points m et p. Le point m est tel que le segment [mt] reste toujours perpendiculaire à la tangente à la trajectoire en t.

*Proposer éventuellement une méthode de construction de ces trajectoires.

*Comparer les trajectoires de m, p, t (utiliser éventuellement du papier calque).

*Observer ce que devient le contenu d'un seau rempli d'eau que l'on met dans chacune des cabines.

Comment qualifie t-on en physique le mouvement de chacune de ces nacelles?

PARTIE B

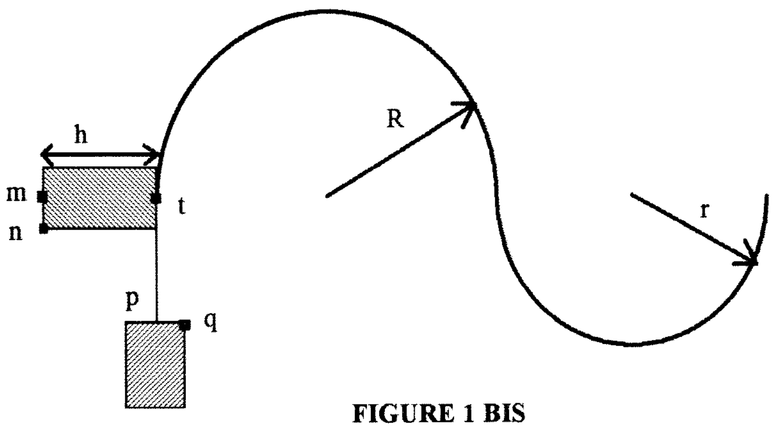


FIGURE 1 BIS

Dans cette partie, les propriétés des nacelles sont identiques, seule l'allure de la trajectoire a changé. Reprendre les questions de la partie A en prenant comme support les portions de rails circulaires comme indiqué sur la figure 1 bis, dans chacun des cas suivants (h est la hauteur de la nacelle supérieure):

-$R = 6cm$, $r = 5cm$ et $h = 4cm$

-$R = 6cm$, $r = 3cm$ et $h = 4cm$

PARTIE C

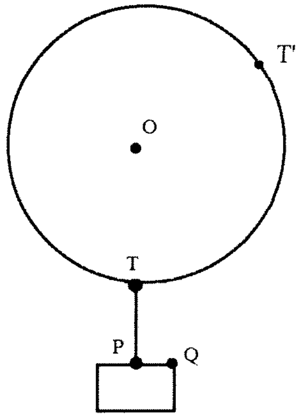


FIGURE 2

Venons à présent à une activité classique des fêtes foraines: la grande roue. Les points T, P et Q sont les points de départ de la nacelle, et le point O est le centre de la roue. Le segment TP est vertical, le segment PQ est horizontal (Figure 2).

Le point T est le point d'attache de la nacelle à la roue; ce point mobile décrit donc le cercle C lorsque la nacelle effectue un tour complet. Les points P et Q sont les points solidaires de la nacelle, et on s'intéresse à leur trajectoire.

1) On suppose que la grande roue tourne de telle sorte que le segment TP reste toujours vertical, et le segment PQ horizontal (liaisons articulées en T et en P).

Représenter quelques positions intermédiaires de la nacelle lorsque le point T décrit un tour complet sur le cercle C. Préciser en particulier cette position si le point d'attache de la nacelle est en T', image de T par la rotation de centre O et d'angle orienté $2\pi/3$ (La figure de référence étant la figure 2).

Décrire les trajectoires des points P et Q lorsque la nacelle effectue un tour complet, et répondre aux questions suivantes:

*Quelle est la nature de ces trajectoires?

*Comment les obtenir à partir du cercle C?

*Quelle transformation géométrique simple permet de passer des points T, P et Q de la figure 2 aux points correspondants lorsque le point d'attache de la nacelle se trouve en T'?

2) On suppose dans cette question que la mécanique de la grande roue ayant rouillé, le segment TP de la nacelle ne pivote plus autour de son point d'attache T. Par conséquent pour n'importe quelle position de la nacelle, les points O, T et P sont alignés et les segments PQ et TP sont orthogonaux (liaisons rigides en T et en P).

Représenter quelques positions intermédiaires de la nacelle lorsque le point T décrit un tour complet sur le cercle C. Préciser en particulier cette position si le point d'attache T est en T'. Répondre aux mêmes questions que celles posées dans la questions 1).

3) Conclusion: En physique, comment appelle-t-on les mouvements décrits par la nacelle dans chacun des cas précédents, et comment les caractériser?

Notions mathématiques:	**Notions physiques:**
translation, rotation, homothétie. image d'une figure par ces transformations.	mouvement de translation non rectiligne. mouvement de rotation.

Durée: environ 1h30.

SOLUTION:

Avant d'aborder cette activité, il est bon d'avoir présentes à l'esprit certaines idées qui y sont sous-jacentes. Deux points de vue sont constamment présents:
→Le point de vue dynamique: on étudie le mouvement d'un solide et sa trajectoire. C'est ce qui intéresse en priorité le physicien.
→Le point de vue statique: on étudie la position du solide photographiée à un instant quelconque. C'est à ce niveau qu'interviennent éventuellement des transformations géométriques (mathématiques).

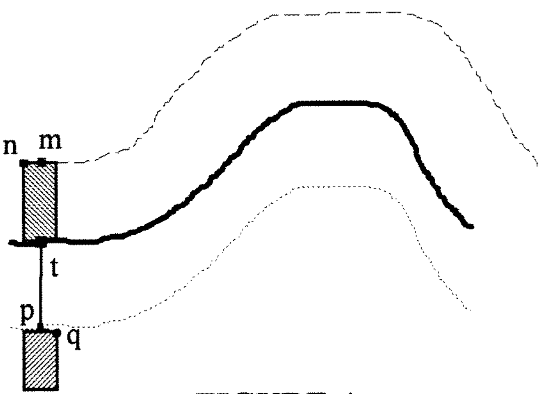


FIGURE 4

A On peut dessiner les trajectoires des points m et p point par point. On remarque rapidement que la trajectoire de p s'obtient par translation (au sens mathématique) de celle du point t. Par contre celle du point m est différente: pour chaque position de la nacelle, il faut dessiner la cabine supérieure tangente à la courbe, et la trajectoire de m ne se déduit pas aussi simplement de celle de t que dans la cas précédent (voir la figure 4, la trajectoire de la cabine supérieure étant un peu plus difficile à dessiner...). Le mouvement de la nacelle supérieure n'a pas de nom particulier, celui de la nacelle inférieure est un mouvement de translation (au sens physique).

Remarques: Cette question a été introduite pour mettre rapidement l'élève en situation d'appréhender le problème que l'on veut traiter. La première version de l'exercice proposait une trajectoire beaucoup plus longue. Les élèves avaient alors effectué les tracés demandés de façon très soigneuse en prenant trop de temps. Par la suite, ils ne voulaient plus recommencer un travail qu'ils estimaient identique dans la partie B (alors qu'il n'en n'est rien). Tous les élèves tracent la trajectoire point par point, et de nombreuses polémiques sont apparues en ce qui concerne la superposabilité des trajectoires! De plus il faut choisir une hauteur suffisamment élevée pour la cabine supérieure pour bien observer ce phénomène.

B L'objectif de cette partie est de tracer exactement les trajectoires suivies par les points observés à l'aide de cercles. Les choix des diverses grandeurs permettent de mettre en évidence un point de rebroussement dans l'un des cas, comme on l'observe sur la figure 5.

Pour effectuer ces tracés, il est nécessaire de bien comprendre la notion de tangente à un cercle. On peut remarquer que le point m étudié de la nacelle supérieure est toujours situé sur une droite qui passe par le point T et le centre du cercle sur lequel se déplace la nacelle.

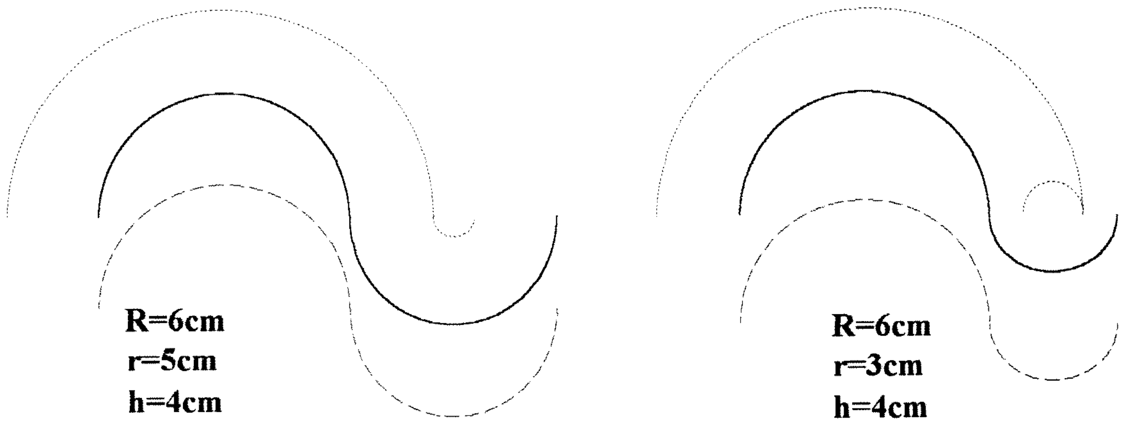


FIGURE 5

Remarques: Les élèves utilisent le compas pour tracer la trajectoire supérieure, qui s'obtient à l'aide d'une homothétie, mais ils continuent souvent à tracer la trajectoire inférieure point par point malgré l'observation faite dans la partie A.

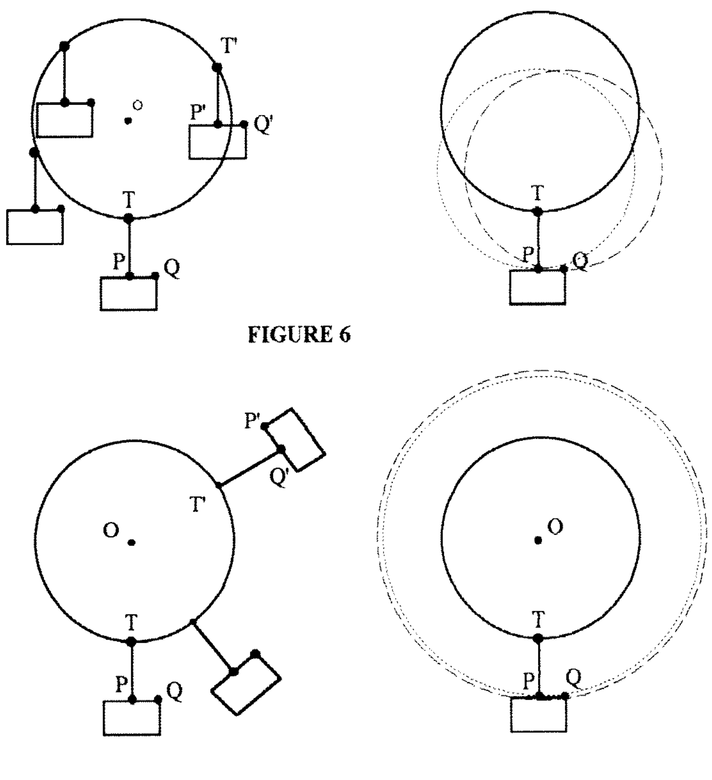


FIGURE 6

C 1. Les positions intermédiaires de la nacelle s'obtiennent aisément. Les trajectoires correspondantes sont circulaires, et on les obtient à partir de celle du point T par une translation (mathématique) de vecteur $\vec{TP}$ et $\vec{TQ}$ respectivement (voir figure 6).
On obtient les points P', Q' et T' à partir des points P, Q et T par la translation de vecteur $\vec{TT'}$. Ce mouvement est un mouvement de translation.

2. De même, les trajectoires décrites par les points P et Q sont circulaires, centrées sur le point O. On les obtient à partir de celle du point T par une homothétie de centre O dont le rapport est égal au rapport des distances OP/OT et OQ/OT. Dans le cas où le point T est en T', on obtient les points T', P' et Q' à partir des points P, T et Q grâce à la rotation de centre O et d'angle orienté $2\pi/3$. Le mouvement de la nacelle est un mouvement circulaire.

Remarques: Il existe une certaine ambiguïté dans les notations ci-dessus si l'on considère que le point T est un point mobile rattaché à la nacelle. Pour la lever, nous avions introduit une notation assez lourde, mais qui ne présentait pas ambiguïté. A l'usage il s'est avéré que les élèves ne la comprenaient pas, alors que le travail demandé est facilement compris grâce à quelques explications données par le professeur.

Conclusion: Une façon de caractériser le mouvement de translation quelques fois utilisée par le physicien, est de dire que pour n'importe quelle position du solide, il existe un vecteur qui permet de l'y translater (au sens mathématique) à partir de sa position initiale. Ce point de vue, peut-être simple, présente néanmoins un inconvénient pour le mathématicien qui est apparu au cours de l'élaboration de cette activité: on peut aboutir à l'idée fausse qu'une rotation (mathématique) peut être obtenue comme limite de translations (mathématiques). C'est la différence entre la transformation ponctuelle mathématique, et l'étude d'un solide (pour lequel on considère un ensemble de points liés) qui pose un problème. Cette étape de notre réflexion suggère qu'il est préférable de commencer par étudier un mouvement quelconque (parties A et B) avant d'aborder le mouvement circulaire.

La caractérisation du mouvement de translation qui nous est alors apparue comme étant préférable d'utiliser, pour éviter des confusions entre la translation mathématique et le mouvement de translation en physique est donnée ci dessous:

On peut choisir deux points distincts (par exemple P et Q) sur le solide étudié. Si le vecteur $\vec{PQ}$ est indépendant de la position du solide sur sa trajectoire, le mouvement de ce dernier est un mouvement de translation. Dans le cas des autres mouvements, on peut observer que la norme de ce vecteur est constante (le solide est indéformable!), mais que sa direction est variable (l'orientation du solide est variable).

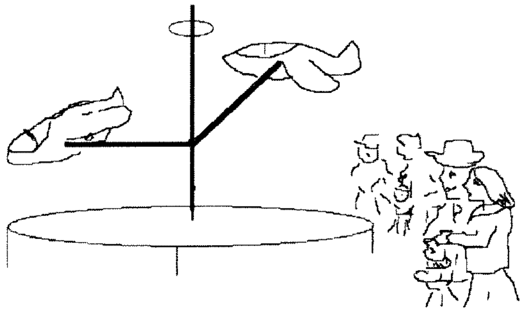
On peut mathématiser ceci en donnant comme définitions:

Si P et Q sont deux points d'un objet que l'on étudie, c'est un solide si $\frac{d}{dt}\left\|\vec{PQ}\right\| = 0$

Ce solide est en mouvement de translation si $\frac{d}{dt}(\vec{PQ}) = 0$

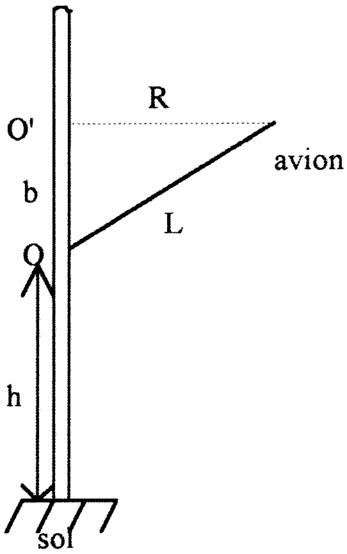
9. SECURITE AUTOUR D'UN MANEGE

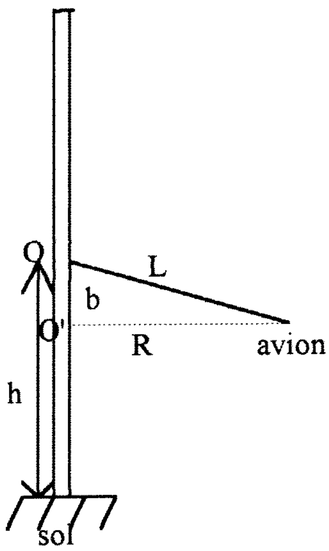
Un manège est constitué de petits avions qui tournent et que l'utilisateur peut faire monter et descendre.



Chaque avion est relié à l'axe de rotation D du manège par une tige mobile autour du point O (voir schéma). Le manège tourne à une vitesse constante et fait 6 tours par minute. Au cas où la tige (OG) viendrait à casser, on cherche à déterminer un périmètre de sécurité à l'intérieur duquel les spectateurs ne sont pas admis. **(Précisons qu'un tel accident serait impossible en France)**

Notions en mathématiques:	**Notions en physique:**
équations différentielles. intégration.	théorème du centre d'inertie. relation fondamentale. mouvement dans un champ.

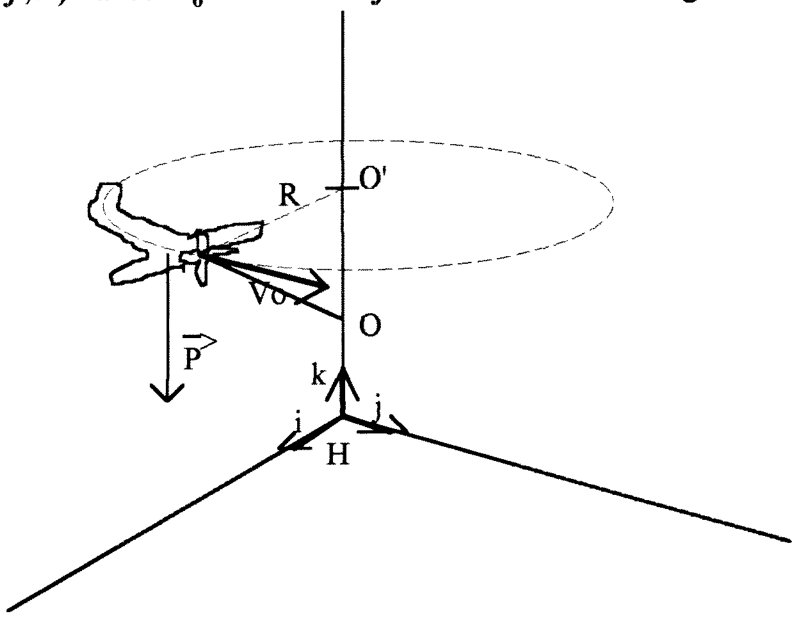




Pour déterminer le périmètre de sécurité , nous allons chercher les coordonnées du point de chute de l'avion en fonction de la hauteur à laquelle il se trouve au moment de l'accident.

Solution

* Référentiel galiléen: la Terre
* Système étudié: S ={G} centre d'inertie de l'avion.
* Forces: Le poids de l'avion (on néglige les frottements) (sic)
* Repère: $(H,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **avec** $\vec{v}_0$ **colinéaire à** $\vec{j}$ à l'instant t = 0 où la tige casse



Calculons la vitesse angulaire de l'avion:

$$\omega = 6t\,/\min = \frac{6\times 2\pi}{60} rad\,/\,s = \frac{\pi}{5} rad\,/\,s$$

Au moment de la rupture l'avion a une vitesse initiale vo, cette vitesse initiale est tangente au cercle qu'il décrivait et $v_0 = R\omega = \frac{\pi}{5}\sqrt{l^2 - b^2}$.

Grâce à la relation fondamentale de la dynamique , $\vec{F} = m\vec{a}$, nous pouvons écrire:

$$\vec{a}\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad d'où\ \vec{v}\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = v_0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \text{ on obtient } \overrightarrow{OG}\begin{cases} x = R \\ y = v_0 t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + h + b \end{cases}$$

Equation de la trajectoire

$$y = v_0 t \quad \text{d'où } t = \frac{y}{v_0}$$

$$z = -\frac{1}{2}g\frac{y^2}{v_0^2} + h + b$$

Cordonnées du point de chute

$$z = 0 \quad \text{d'où } y = \sqrt{\frac{2v_0^2(h+b)}{g}}$$

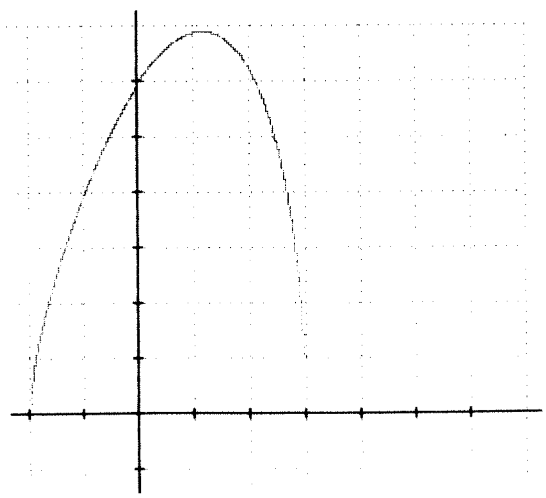
Application numérique

Nous supposons que le bras a une longueur de 3m et que le point O se situe à 2m du bas du mât, y est alors une fonction de b qui s'écrit:

$$y = f(b) = \frac{\pi}{5}\sqrt{5(9-b^2)(2+b)}$$

La représentation graphique de cette fonction se trouve à la fin de ce document. On pourra faire étudier le carré de cette fonction par les élèves , ce qui est aisé car on obtient un polynôme du troisième degré.

Conclusion Le périmètre de sécurité est donc au delà de 7mètres environ (voir courbe)

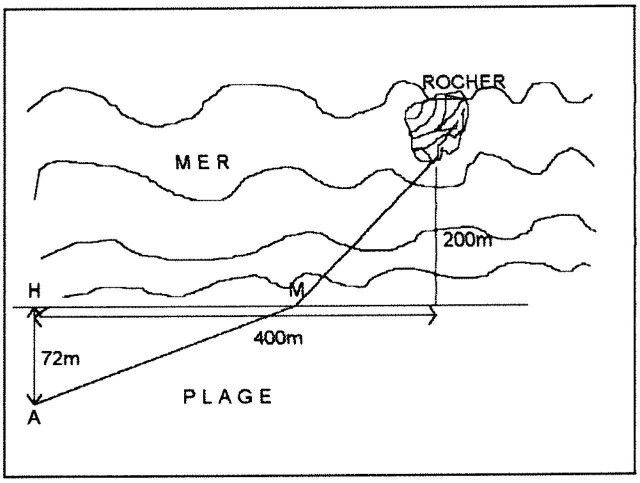


COURBE DE CHUTE DE L'AVION

10. TEMPS MINIMUM

Enoncé

Sur la plage Jean, qui est en A, parie avec son entourage qu'il mettra moins de 10 minutes pour rejoindre son amie sur le rocher au large. Jean qui court à 9km/h sur la plage et nage à 1,8km/h dans les flots agités. Il sait que le parcours en ligne droite lui fera perdre son pari.(Vérifiez!)

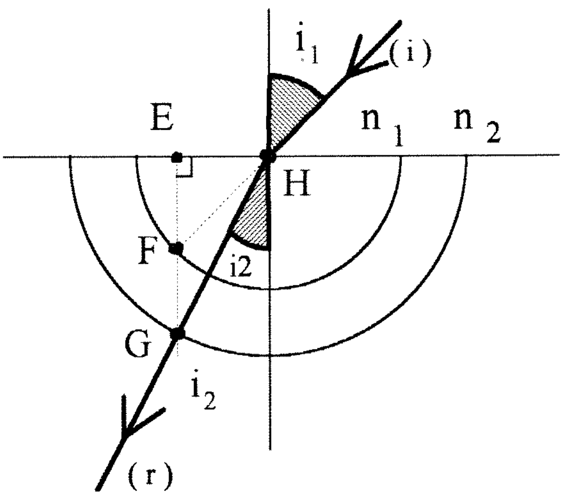


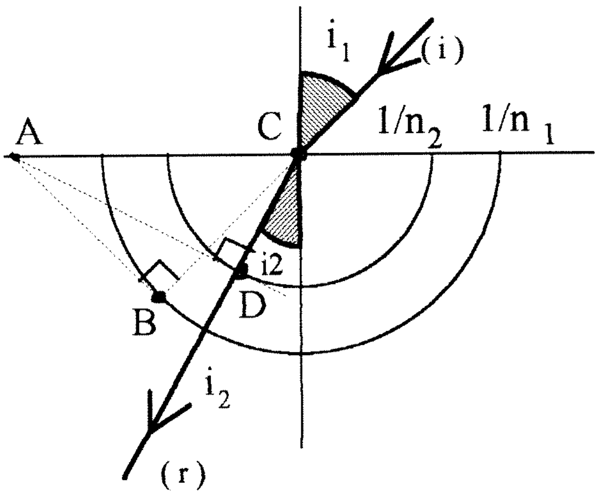
Il réfléchit à l'endroit M où il se jettera à l'eau pour suivre le trajet qui lui prendra le minimum de temps.

Complément: construction géométrique de l'angle de réfraction d'un rayon lumineux obéissant à la loi de Snellius-Descartes:

$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ qui s'écrit aussi $\dfrac{\sin i_1}{v_1} = \dfrac{\sin i_2}{v_2}$. (par définition $n_1 = \dfrac{c}{v_1}$ et $n_2 = \dfrac{c}{v_2}$)

Analyser les deux figures ci-dessous, et expliquer pourquoi les rayons incidents (i) et réfractés (r) vérifient bien les relations ci-dessus.





Notions en mathématiques:	**Notions en physique:**
théorème de pythagore. fonction dérivée recherche de racines par approximations. théorème des valeurs intermédiaires. étude de la dérivée seconde.	loi de Snellius- Descartes

Cette activité a été testée en première S. L'utilisation des calculatrices graphiques a permis de court-circuiter la difficile étude de fonction, les dérivées de fonctions composées n'étant pas au programme. Il nous a fallu trois quart d'heure environ pour résoudre ce problème.
Les élèves ont été tout à fait affirmatifs: il suffit que Jean trouve le trajet minimum dans l'eau pour gagner son pari. Il court donc en ligne droite sur la plage puis plonge. On peut vérifier que dans ce cas il gagne effectivement son pari. La ligne droite (du point A jusqu'au rocher) ne les a absolument pas effleurés. Pour les remotiver j'ai dû lancer un défi: et s'il y avait un point où il mettrait encore moins de temps? Ils n'y croyaient pas trop mais si le professeur le demande, on obéit!

Solution:

Mise en équation du problème

Le mouvement sur la plage et le mouvement dans l'eau sont deux mouvements uniformes. Appelons d_1 la distance parcourue sur la plage et d_2 celle parcourue dans l'eau, nous avons alors le temps T mis par Jean pour rejoindre son amie:
$T = t_1 + t_2 = d_1/v_1 + d_2/v_2 = AM/v_1 + MR/v_2$

posons HM = x, il vient: $T = \dfrac{\sqrt{72^2+x^2}}{\frac{5}{2}} + \dfrac{\sqrt{(400-x)^2+200^2}}{\frac{1}{2}}$

T est une fonction de x, pour plus de commodité nous l'appellerons f (x)

Problème: f admet-elle un minimum? si oui lequel?

C'est ici que les élèves ont programmé leur calculatrice graphique et après avoir réglé les problèmes liés au choix d'une échelle convenable, ils ont lu la valeur minimale et certains ont pensé à vérifier si 360 était effectivement la bonne valeur en calculant f (359) et f (361).

En terminale on peut étudier f

$$f'(x) = \frac{2x}{5\sqrt{72^2+x^2}} + \frac{2(x-400)}{\sqrt{(400-x)^2+200^2}}$$

On peut vérifier que $f'(0) = -4\frac{\sqrt{5}}{5}$ et $f'(400) \approx 0,39$

f ' qui est continue sur [0 ; 400] passe d'une valeur négative à une valeur positive, elle s'annule au moins une fois. Montrons qu'elle ne s'annule qu'une seule fois, pour cela posons:

f ' (x) = h(x) - g(x) où $h(x) = \dfrac{2x}{5\sqrt{72^2+x^2}}$ et $g(x) = \dfrac{2(400-x)}{\sqrt{(400-x)^2+200^2}}$ et étudions h et g

On pourra vérifier que
$h'(x) = \dfrac{2073,6}{(72^2+x^2)\sqrt{72^2+x^2}}$ h' est donc toujours positive d'où le tableau de variation:

x	0		400
h'(x)		+	
h(x)	0	↗	h(400)

Etudions g à présent:

$$g'(x) = \frac{-400^2}{\left[(400-x)^2+200^2\right]^{3/2}}$$ d'où le tableau:

x	0		400
g'(x)		—	
g(x)	$4\sqrt{5}$	↘	0

Nous pouvons donc affirmer à présent que f ' ne s'annule qu'une seule fois, on trouve assez facilement que f '(360) = 0

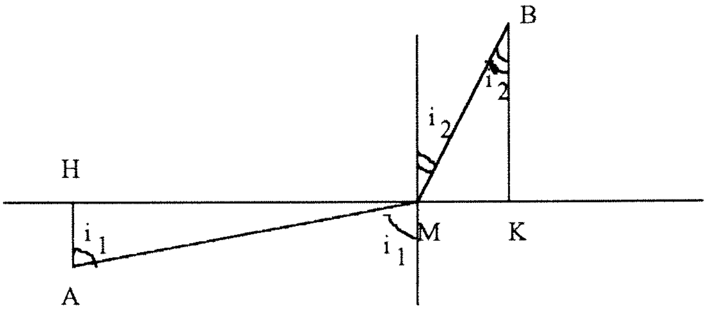
<u>Conclusion</u>
f admet un minimum qui est atteint pour x = 360 , pour mettre le minimum de temps Jean plongera à 360m de H, gagnera-t-il son pari?

LE POINT DE VUE DU PHYSICIEN: Loi de Snellius - Descartes:

Les relations trigonométriques du triangle rectangle permettent d'écrire:

$$\sin(i_1) = \frac{HM}{AM} = \frac{x}{\sqrt{72^2+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(i_2) = \frac{KM}{BM} = \frac{400-x}{\sqrt{(400-x)^2+200^2}}$$

On peut alors exprimer la dérivée de f(x) sur [0,400] par la relation: $f'(x) = \dfrac{\sin i_1}{v_1} - \dfrac{\sin i_2}{v_2}$



Or $n_1 = \dfrac{c}{v_1}$ et $n_2 = \dfrac{c}{v_2}$

Donc $f'(x) = 0$ est obtenu pour:

$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

On retrouve ainsi que la loi de Snellius-Descartes est équivalente au principe de Fermat: le rayon lumineux "choisit" le chemin le plus rapide pour aller de A vers B!

L'intérêt de ce point de vue est qu'il permet de construire géométriquement l'angle i_2 connaissant l'angle i_1 et les valeurs des deux vitesses v_1 et v_2. Cette construction permet de faire une révision très intéressante en mathématiques: la construction à la règle et au compas de la tangente au cercle!

Remarque: On peut placer approximativement le point cherché grâce à cette méthode géométrique. En utilisant le logiciel le géomètre et une des deux constructions proposées, on fait apparaître les rayons incidents et réfléchis: placer le point A, le rocher R, une droite symbolisant le rivage, un point M mobile sur cette droite et les éléments géométriques nécessaires à la construction. La droite (AM) étant donnée, le logiciel tracera "le rayon réfracté". Il suffit alors de faire coïncider ce dernier avec le point R.

On a facilement les relations suivantes dans les constructions géométriques proposées:

Pour la figure de gauche:

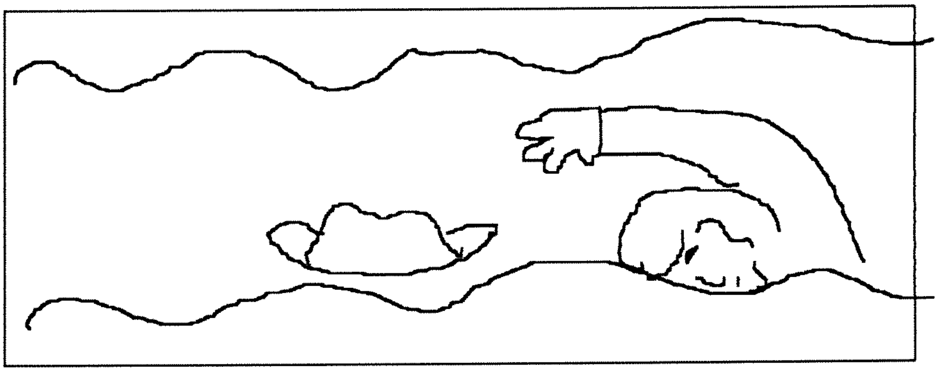
$\sin(i_1) = \dfrac{EH}{FH}$ et $\sin(i_2) = \dfrac{EH}{GH}$ et comme $FH = n_1$ et $GH = n_2$, on aboutit à la relation désirée.

Pour la figure de droite:

$\sin(i_1) = \dfrac{BC}{AC}$ et $\sin(i_2) = \dfrac{DC}{AC}$ et comme $BC = \dfrac{1}{n_1} = \dfrac{v_1}{c}$ et $DC = \dfrac{1}{n_2} = \dfrac{v_2}{c}$, on aboutit à la relation désirée.

11. LE PROBLEME DU CHAPEAU

Enoncé:



D'un bateau qui remonte la Seine tombe un chapeau en face de Notre Dame. Le voyageur ne s'en aperçoit qu'au bout de dix minutes. Il plonge et rattrape son chapeau en face de la tour Eiffel.

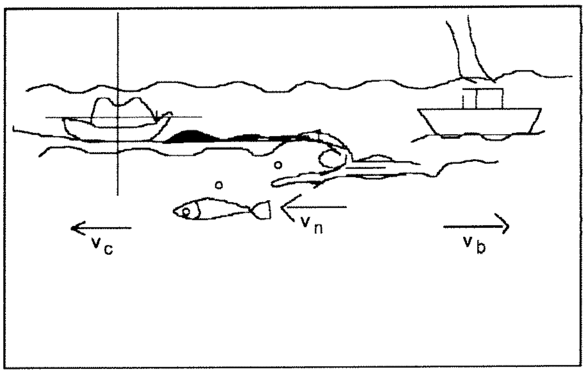
Quelle est la vitesse du courant de la Seine?

On donne * la vitesse du bateau par rapport à l'eau: 30km/h
* la vitesse du nageur par rapport à l'eau: 5km/h
* la distance entre Notre Dame et la tour Eiffel: 1750m

Notions en mathématiques:	Notions en physique:
Choix d'un référentiel adapté.	vitesse relatives dans divers référentiels.

SOLUTION

Méthode 1



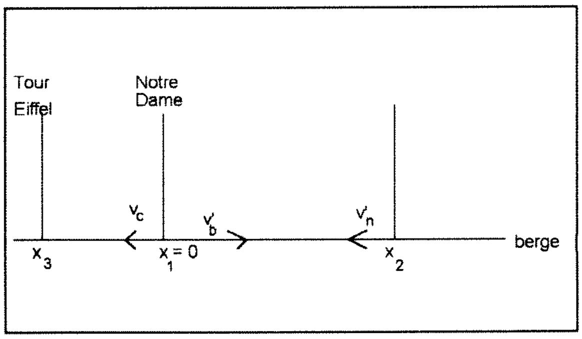
Il y a tout intérêt, par simplicité, à raisonner par rapport au référentiel lié à l'eau.

Soit $t = 0$ l'instant où le chapeau tombe à l'eau.
En 10 minutes le bateau a parcouru km (la distance bateau- chapeau) et le nageur, à 5km/h, doit nager pendant une heure pour parcourir cette distance.
Pendant une heure et dix minutes le chapeau a parcouru, à la vitesse du courant, 1750m.

On en déduit la vitesse du courant: $vc = \dfrac{1{,}75}{1+1/6} = 1{,}5 km/h$ (1h10mn est égal à 1+1/6 h)

Et en utilisant le système international: $v_c = \dfrac{1750}{3600+600} = \dfrac{5}{12} ms^{-1}$

Méthode 2



Choisissons un référentiel lié à la berge.
Au temps t_1 le chapeau tombe à l'eau:
$t_1 = 0$ et $x_1 = 0$
Au temps t_2 le voyageur plonge:
$t_2 = 10$min et $x_2 = v'_b\, t_2$
Au temps t_3 le voyageur rattrape son chapeau devant la tour Eiffel.

Posons v_c la vitesse du courant . La vitesse du bateau dans le référentiel lié à la berge est alors: $\vec{v}_b = \vec{v}'_b + \vec{v}_c$ avec $\vec{v}'_b = \vec{v}_b - \vec{v}_c$ et $x_3 = -1750$m

Pendant le temps t_3, le chapeau a parcouru 1750m à la vitesse v_c donc $t_3 = \dfrac{1{,}750}{v_c} = \dfrac{x_3}{v_c}$

Pendant le temps $(t_3 - t_2)$, le temps que le nageur rattrape le chapeau, le nageur parcourt $x_2 + x_3$ à la vitesse $v'_n = v_n + v_c$, donc: $v_n + v_c = \dfrac{x_2 + 1{,}750}{t_3 - t_2}$

On a ainsi obtenu deux équations:

$$t_3 = \frac{1{,}750}{v_c} = \frac{x_3}{v_c} \quad (1)$$

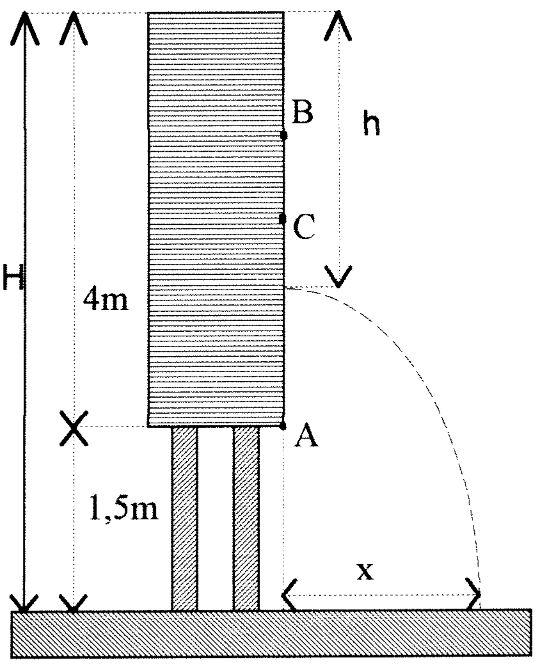
$$t_3 - t_2 = \frac{(v_b - v_c)t_2 + x_3}{v_n + v_c} \quad (2)$$

(1) - (2) donne: $t_2 = \dfrac{x_3}{v_c} - \dfrac{(v_b - v_c)t_2 + x_3}{v_n + v_c}$

D'où l'on tire: $v_c = \dfrac{x_3 v_n}{t_2(v_n + v_b)} = \dfrac{1{,}750 \times 5}{1/6(35)} = 1{,}5 km/h$ OUF!

Remarque: Le physicien utilise le système international pour effectuer les calculs, et reconvertit éventuellement le résultat.

12. LA COLONNE PERCEE



Albert, Bertrand et Claude viennent de sortir du cours de Physique. Ils y ont déjà abordé les notions d'énergie cinétique, d'énergie potentielle, de travail d'une force et de pression. Ils marchent et longent un petit château d'eau qui est une colonne de quatre mètres de hauteur dont le niveau est maintenu constant grâce à un système de pompe. Cette colonne est à un mètre cinquante au dessus du sol. Si on perce convenablement un trou dans la colonne, et si l'on attend que le débit soit régulier, l'eau s'en échappera avec une vitesse horizontale constante. Les trois amis parient, pour savoir où placer l'orifice de telle sorte que le jet d'eau touche le sol à la distance x la plus grande possible de la colonne. Voici leurs remarques:

Albert: «Plus la hauteur de la colonne d'eau au dessus du trou est élevée, plus grande sera la vitesse initiale de l'eau, et donc plus loin ira le jet d'eau. Je perce le tonneau en A, à un mètre cinquante du sol.»

Bertrand: «Dans ce cas l'eau arrivera beaucoup trop rapidement au sol! Le jet d'eau n'ira pas loin! Une colonne d'eau d'un mètre de hauteur suffit amplement pour que l'eau acquière une vitesse initiale suffisante . Je percerais la colonne au point B, la hauteur de chute étant de quatre mètres cinquante, le jet d'eau ira beaucoup plus loin...»

Claude: «Hum! Chacun des points de vue a son intérêt... Je pense qu'une position intermédiaire me fera gagner le pari: je percerais le tonneau en un point C telle que la hauteur de la colonne d'eau soit de deux mètres.»

Qui gagnera le pari? Sauriez vous proposer la position d'un point D, de telle sorte que le jet d'eau aille le plus loin possible?

Notions en mathématiques:	**Notions en physique:**
parabole. dérivée de la fonction composée $\sqrt{u(x)}$. optimisation.	travail d'une force. théorème de l'énergie cinétique. chute d'un corps avec vitesse initiale.

SOLUTION

Partie Physique:

La solution classique à ce problème de physique est basée sur le théorème de Bernouilli (ρ étant la masse volumique du liquide considéré):

Dans un écoulement permanent, le long d'un tube de courant, $H = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} =$ constante.

Cette relation exprime la constance de la charge H, c'est à dire de l'énergie mécanique totale par unité de poids, qui est la somme de trois termes: l'énergie due à la position z (énergie potentielle), l'énergie due à la pression $\frac{P}{g\rho}$ et l'énergie due à la vitesse $\frac{v^2}{2g}$ (énergie cinétique).

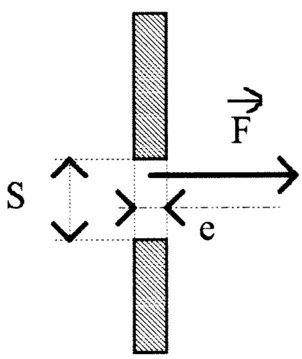
Cependant, ceci ne s'applique que s'il n'y a aucune perte d'énergie par tourbillons, frottements aux parois, viscosité, etc.

On en déduit le théorème de Toricelli qui donne la vitesse d'écoulement v d'un liquide par un orifice pratiqué en mince paroi en fonction de la hauteur de liquide h:

$$v = \sqrt{2gh}$$

C'est cette formule qui permet de calculer la vitesse initiale horizontale de l'eau à la sortie de la colonne d'eau. On peut remarquer qu'elle est proportionnelle à $\sqrt{h}$, ce qui fournit l'occasion d'étudier une fonction en racine carrée de façon motivante!

Cependant aucun des deux théorèmes cités ci-dessus ne figurent au programme de l'enseignement secondaire. On peut faire un autre raisonnement qui permet d'arriver au même résultat en utilisant les outils dont disposent les élèves:



Les notations utilisées sont les suivantes:
* S est la section de l'orifice, supposée "petite".
* F est la force s'exerçant sur la masse m de liquide que l'on étudie.
* ρ est la masse volumique de ce liquide.
* P est la pression s'exerçant à l'endroit considéré.
* h est la hauteur de liquide au dessus du point considéré.
* V est le volume de liquide contenu dans une goutte élémentaire de liquide, de masse m, qu'on étudie lors d'un déplacement de longueur e.

La pression P, avant le passage à travers l'orifice est:

$P = \frac{F}{S}$ (par définition) et on a aussi $P = \rho gh = \frac{m}{V}gh$.

Par suite, le travail W de la force de pression F lors d'un déplacement du volume de liquide V sur une longueur e (traversée horizontale de la paroi) est:

$$W = F \times e = S\frac{m}{V}gh.$$

Il est aussi égal à la variation de l'énergie cinétique: $W = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0$.

(sachant que l'énergie potentielle reste constante au cours du déplacement.)

Ce qui donne après simplification, comme $V = Se$, la formule $v = \sqrt{2gh}$.
Remarquons que cette vitesse est égale à la vitesse acquise par un corps lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h. Le raisonnement, qui utilise le théorème de l'énergie cinétique, en considérant une masse m d'eau partant du haut de la colonne et sortant par l'orifice donne le même résultat. Mais il est faux!

Point de chute du jet d'eau:

Dans le problème, on demande à l'élève de déterminer d'abord lequel des trois amis gagne son pari. Ceci lui permet de s'approprier le problème et de mettre en oeuvre un raisonnement qui aboutit à sa résolution. Ce sera aussi l'occasion pour l'enseignant de faire une première synthèse qui permet d'utiliser un raisonnement efficace pour trouver le point de chute:
Une *première méthode* consiste à écrire l'équation de la parabole $y = f(x)$ décrivant la trajectoire de l'eau, et à écrire que la distance x cherchée est obtenue lorsque y prend la valeur correspondant au sol.
Une *deuxième méthode*, plus agréable à mettre en oeuvre, consiste à calculer d'abord le temps t de chute directement, qui ne dépend que de la hauteur entre l'orifice de la colonne et le sol $(H-h)$.Il suffit alors de calculer la distance horizontale parcourue x, connaissant la vitesse horizontale v. Il est inutile d'établir l'équation de la parabole. Cette méthode est intéressante d'un point de vue physique puisqu'elle distingue les deux types de mouvement intervenant dans beaucoup de problèmes de chute des corps: le mouvement horizontal qui est uniforme, et le mouvement vertical qui est uniformément accéléré.
Le temps de chute t pour parcourir la distance $H-h$ est donné par la relation: $H - h = \frac{1}{2}gt^2$.
On en déduit la valeur de t: $t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$.
La distance x parcourue horizontalement pendant le même temps t est $x = vt$, soit:
$x = \sqrt{2gh} \times \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$.
La fonction donnant la distance x du point de chute du jet d'eau par rapport à la colonne en fonction de la hauteur h de liquide est donc:

$$f(h) = 2\sqrt{h(H-h)}$$

On obtient alors les points de chute des jets d'eau suivants en prenant $H = 5{,}5$:
Pour Albert: $f(4) = 2\sqrt{6} \cong 4{,}90m$
Pour Bertrand: $f(1) = 2\sqrt{4{,}5} \cong 4{,}24m$
Pour Claude: $f(2{,}5) = 2\sqrt{7{,}5} \cong 5{,}47m$
Claude gagne donc son pari, mais il est possible de faire mieux! En effet, il s'agit de trouver le maximum de la fonction $f(h)$. Calculons sa dérivée:

$$f'(h) = \frac{-2h+H}{\sqrt{h(H-h)}}$$

Elle s'annule pour $h = \frac{H}{2}$ et le point de chute maximum du jet d'eau est: $f(2{,}75) = 5{,}5m$.

La valeur de la hauteur de la colonne d'eau par rapport au sol de 1,5m a été choisie pour obtenir une valeur du maximum différente des valeurs obtenues par les amis. De plus, les valeurs obtenues pour les choix d'Albert, Bernard et Claude permettent de supposer l'existence d'un maximum pour une valeur de h comprise entre 1 et 3. Ce maximum n'est pas égale à la moyenne arithmétique de 1 et de 3, ce qui nous a semblé important pour éviter des raisonnements trop hâtifs...

13. LA MOLECULE DE METHANE

Enoncé

On souhaite connaître la structure de la molécule de méthane.
Rappelons que le méthane est un gaz contenant du carbone et de l'hydrogène, que le carbone a une valence de 4 et l'hydrogène une valence égale à 1. Il y a donc 4 atomes d'hydrogène situés à égale distance de l'atome de carbone et à égale distance les uns des autres.
Par quelle figure peut-on schématiser la molécule de méthane? Quelle est la position occupée par l'atome de carbone? Calculer l'angle $H_1\hat{C}H_2$

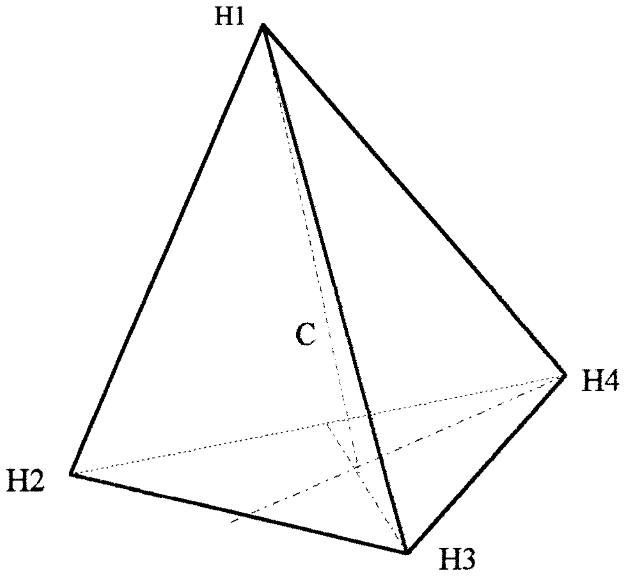


figure 1

En appelant H_1, H_2, H_3 et H_4 les atomes d'hydrogène justifier que la droite (H_1C) est perpendiculaire au plan $(H_2H_3H_4)$ qu'elle coupe en un point que l'on situera dans le triangle $H_2H_3H_4$ et dans le plan (H_1CH_2).

Notions en mathématiques:	**Notions en physique:**
barycentre.	molécule de méthane. angle de la liaison H-C-H.

Cette activité a été testée en classe de première S. (il faut environ une heure et quart pour la traiter)

Solution

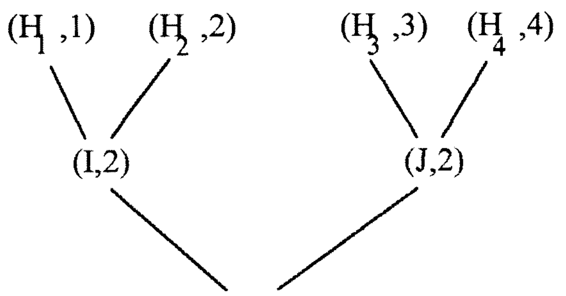
Les atomes d'hydrogène sont les sommets d'un tétraèdre régulier et le carbone est l'isobarycentre de ces quatre points.

Appelons

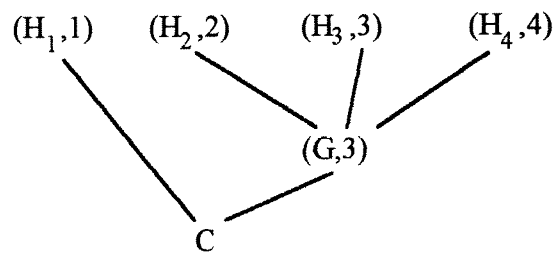
I le milieu du segment $[H_1H_2]$
J le milieu du segment $[H_3H_4]$
G le centre de gravité du triangle $H_2H_3H_4$
a la longueur de l'arête du tétraèdre

Les premières S ne peuvent pas utiliser le théorème de l'associativité des barycentres, mais ils savent utiliser la relation de Chasles ils introduisent les barycentres partiels dans l'égalité vectorielle qui caractérise le barycentre de quatre points.

Déterminons la position de C en utilisant le théorème de l'associativité des barycentres:



C milieu de [IJ]



C est donc tel que $\overrightarrow{H_1C} = \frac{3}{4}\overrightarrow{H_1C}$

Il reste à établir que la droite (H_1C) est orthogonale au plan $(H_2H_3H_4)$:

Comme le plan H_1H_2J est le plan médiateur du segment $[H_3H_4]$ et que la droite (H_1C) est contenue dans le plan (H_1H_2J) on a que (H_1C) est perpendiculaire à (H_3H_4) **(1)**

De même (H_1CH_4) est le plan médiateur de $[H_2H_3]$ implique que (H_1C) est perpendiculaire à (H_3H_4) **(2)**

(1) et **(2)** impliquent que (H_1C) est perpendiculaire au plan $(H_2H_3H_4)$

On peut calculer la valeur de l'angle H_1CH_2 en utilisant soit la trigonométrie, soit le produit scalaire dans le plan de la figure 2:

Mes élèves de première ont préféré utiliser le théorème d' Al Kashi dans le triangle H_1CH_2

$\overrightarrow{CH_1} . \overrightarrow{CH_2} = CH_1^2 \cos H_1\hat{C}H_2 = \overrightarrow{CH_1} . \overrightarrow{CG}$ (produit scalaire de deux vecteurs colinéaires)

Et donc $\cos(H_1\hat{C}H_2) = \dfrac{CG}{CH_1} = -\dfrac{1}{3}$ d'où $H_1\hat{C}H_2 \approx 109°$

Mes élèves étaient sûr du résultat, leur professeur de physique leur avait demandés de le retenir.

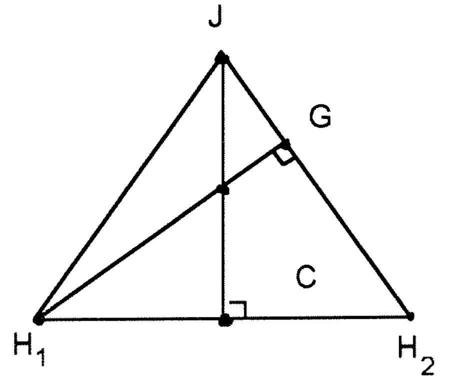


Figure 2 vue dans le plan H_1CH_2

14. UTILISATION DE SYSTEMES EN CHIMIE REACTIONS CHIMIQUES

Enoncé:

On veut analyser un mélange contenant de l'hydrogène, du méthane et de l'éthène. Pour cela on introduit 20cm^3 de ce mélange et 80cm^3 d'oxygène dans un eudiomètre. Après l'étincelle, quand on est revenu aux conditions initiales de température et de pression, il reste 62,5cm^3 d'une substance dont 25cm^3 sont absorbables par la potasse et le reste par du phosphore.

On peut rappeller que la potasse absorbe le gaz carbonique et que le phosphore absorbe l'oxygène.

Solution:

Appelons x, y, z les volumes respectifs d'hydrogène, de méthane et d'éthène disponibles au départ.

Les réactions s'écrivent:

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O$$
$$CH_4 + 3O_2 \to CO_2 + 2H_2O$$
$$C_2H_4 + 3O_2 \to 2CO_2 + 2H_2O$$

D'où les égalités:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ y + 2z = 25 \\ \frac{1}{2}x + 2y + 3z = 42,5 \quad \text{(oxygène utilisée)} \end{cases}$$

Il faut donc résoudre le système:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + 4y + 6z = 85 \\ y + 2z = 25 \end{cases}$$

On pourra utiliser la méthode du pivot de Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 3y + 5z = 65 \\ 3y + 6z = 75 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ z = 10 \end{cases}$$

En général la réponse est donnée en pourcentage: le mélange comprenait 25% d'hydrogène, 25% de méthane et 50% d'éthène.

15.1 LE CONE : ETUDES PRELIMINAIRES

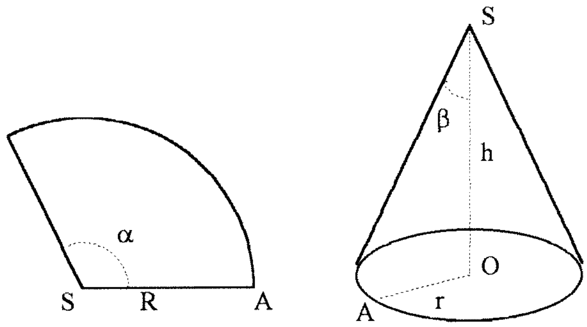


Figure 1

1) On coupe un secteur circulaire d'angle α et rayon R et on l'assemble pour former un cône (voir figure 1). La distance OA, notée r, est le rayon du disque de la base. La distance SO, notée h, est la hauteur du cône. L'angle entre la hauteur et une des génératrices du cône est noté β.

Connaissant les valeurs de R et de α, calculer les valeurs correspondantes de r, h et β .

2) Sur la figure 2, on a représenté une coupe du cône par le plan SOA. M étant un point du segment SO, on note x la distance OM. La perpendiculaire à la droite (SO) passant par m coupe la droite (SA) en P. En notant y la distance MP, exprimer y en fonction de x.

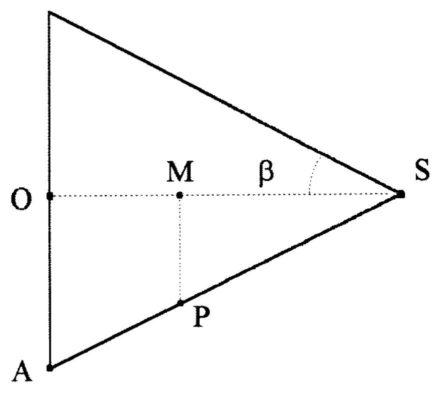
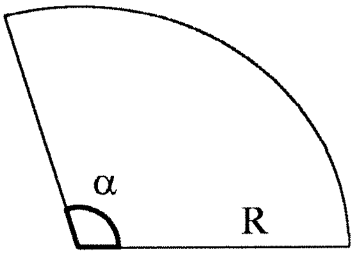


Figure 2

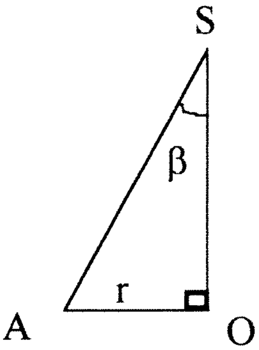
Notions en mathématiques:	Notions en physique:
théorème de Pythagore. théorème de Thalès. longueur d'un arc de cercle. le cône.	

SOLUTION



L'arc de cercle qui forme le périmètre de la base du cône assemblé mesure $R\alpha$ par définition du radian. Ce périmètre mesure également $P = 2\pi r$. On en déduit que $R\alpha = 2\pi r$, et donc le rayon r du disque de la base du cône est égal à:

$$r = R\frac{\alpha}{2\pi}$$



Dans le triangle SOA rectangle en O, on a $AS^2 = OA^2 + OS^2$, d'où $OS^2 = AS^2 - OA^2$

et $OS^2 = R^2 - \left(R\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2$ et donc $OS = R\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}$

Dans le triangle SOA rectangle en O, $\sin\beta = \frac{OA}{SA} = \frac{r}{R} = \frac{\alpha}{2\pi}$, d'où la valeur de l'angle d'ouverture du cône β.

Les dimensions du cônes sont maintenant calculées. L'objectif de la question 2) est d'établir une relation qui sera utile dans la résolution du problème concernant la condition qui permet d'exprimer que le bicône "remonte" la pente. Cette configuration aura donc déjà été étudiée lorsque qu'on abordera le problème présenté dans l'activité correspondante, et devrait permettre de l'aborder plus facilement.

2) D'après le théorème de Thalès dans le triangle SOA rectangle en O, on peut écrire:

$$\frac{MP}{OA} = \frac{SM}{SO}, \quad \text{d'où} \quad MP = OA\frac{SM}{SO},$$

ce qui donne avec les notations utilisées:

$$y = r\frac{h-x}{h} = r\left(1-\frac{x}{h}\right) = \frac{r}{h}(h-x) = \tan\beta(h-x)$$

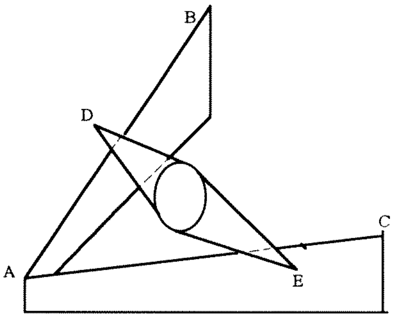
Voici quelques applications numériques, qui peuvent être envisagées pour effectuer l'expérience décrite dans l'activité "le cône remonte la pente":

** Pour $\alpha = \pi$ et R=20cm, on trouve $r = 10cm$, $h = 10\sqrt{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$.

** Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et R=20cm, on trouve $r = 5cm$, $h = 5\sqrt{15}$ et $\beta = Arc\sin\frac{1}{8} \approx 0{,}125rad \approx 7°$.

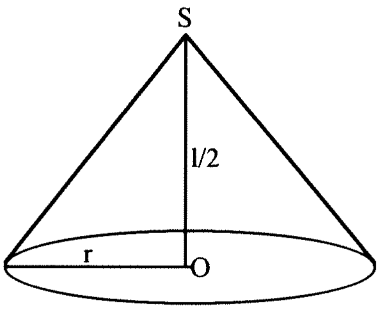
15.2 LE BICONE REMONTE LA PENTE (PHYSIQUE).

1. Expérience .



Le mobile est constitué de 2 cônes accolés

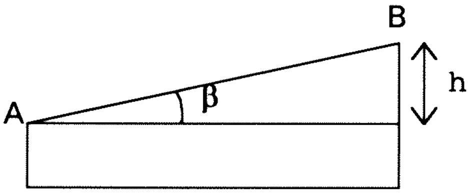
l = DE =longueur du bicône

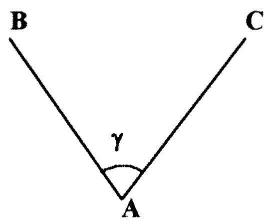


r = rayon du disque de base .

Le support est constitué de deux plans inclinés de dénivellation h, correspondant à l'angle β .

Ces deux plans sont écartés d'un angle γ .





CONSTAT : le bicône, parti de A vers B, semble remonter la pente !!

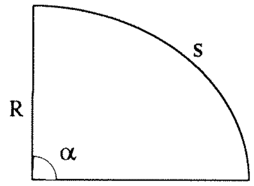
2. Activités proposées :

a) Quelle est l'explication physique du phénomène ?

b) On donne : $\gamma = 40°$; $\beta = 10°$; AB = AC = 20 cm . Calculer la dénivellation h et la valeur minimum de la longueur DE du bicône (pour qu'il puisse atteindre BC) .

c) Donner la valeur minimum du rayon r du disque de base du bicône pour que l'expérience fonctionne (voir a)) .

d) Donner le rayon R et l'angle α nécessaires pour fabriquer les deux cônes (se mettre dans les conditions de c)) .

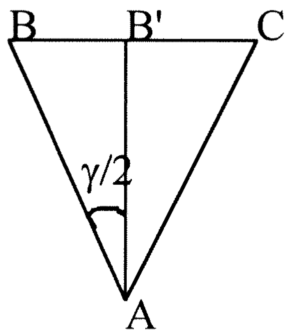


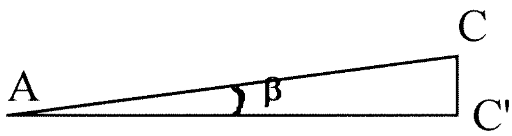
e) Calculer la vitesse du centre d'inertie du bicône lorsqu'il arrive en BC ;
On supposera qu'il n'y a pas de frottements et que l'on part sans vitesse initiale en A (g = 9,8 N/kg) .

Notions en mathématiques:	**Notions en physique:**
trigonométrie	centre d'inertie
le cône	théorème de l'énergie cinétique

Solution :

a) Quand le bicône est en A, son centre d'inertie G doit être tel qu'il soit à une hauteur supérieure à la dénivellation entre A et C . En C, ses deux pointes D et E se trouvent en B et C donc G est au même niveau . Entre ces deux positions, le poids P fournit donc un travail positif puisque G se trouve à la fin à un niveau inférieur à celui du début . Donc, si le cône semble remonter la pente, en fait son centre d'inertie descend .





BC = 2 BB' = 2 AB.sin (γ/2) = 13,68 cm
donc l ≥ 13,68 cm

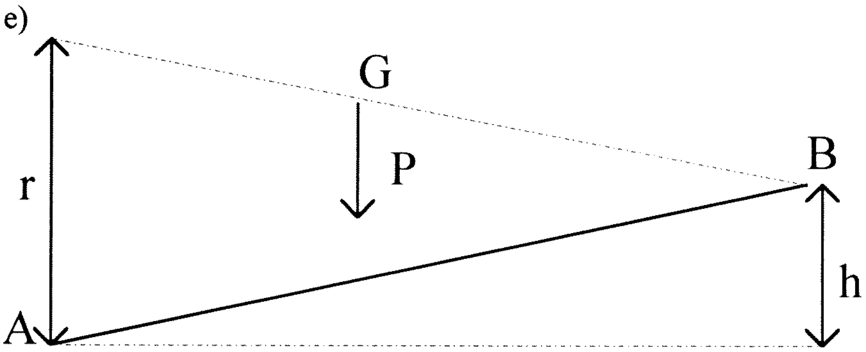
h = CC' = AC.sin β = 3,47 cm

c) r > h car G confondu avec O donc r > 3,47 cm

d) Prenons r = 5 cm et l = 13,7 cm : la circonférence c = 2 π r = 31,42 cm
Cette circonférence correspond à s, abscisse curviligne, or s = R α

$R = \sqrt{l^2 + r^2}$ = 14,58 cm ; α = s/R = 2,109 rad = 123,3 °

e)



Le travail du poids (seule force utile en jeu) est : W_P= mg(r-h) = mg.d
D'après le théorème de l'énergie cinétique : $\Delta Ec = \Sigma W_F$
donc : $1/2mv^2 = mgd$
d'où $v = \sqrt{2gd}$ = 0,55 m/s (avec r = 5 cm) .

Remarque : la vitesse est indépendante de la masse du cône !

15.3 LE BICONE REMONTE LA PENTE

ENONCE 1: Fabriquer un cône à l'aide d'un transparent , ou à défaut de carton souple, en coupant un demi cercle dont le rayon est le plus élevé possible (au moins vingt centimètres). Les assembler ensemble pour réaliser le solide dessiné sur la figure 2. Réaliser en carton fort deux supports qui permettent de réaliser une déclivité dont on peut choisir l'angle γ, et dont on peut régler l'angle d'ouverture δ. Poser le solide sur cette pente, faire varier les angles γ et δ, observer ce qui se passe et faire des conjectures. On peut également changer la forme du solide si on le désire, en changeant l'angle au sommet du cône. Choisir des valeurs pour les angles et expliquer le phénomène observé.

ENONCE 2: Fabriquer un cône à l'aide d'un transparent , ou à défaut de carton souple, en coupant un demi cercle dont le rayon est le plus élevé possible (au moins vingt centimètres). Les assembler ensemble pour réaliser le solide dessiné sur la figure 2. Réaliser en carton fort deux supports qui permettent de réaliser une déclivité dont l'angle γ est égal à 10°, et dont on peut régler l'angle d'ouverture δ. Poser le solide sur cette pente, faire varier l' angle δ, observer ce qui se passe et faire des conjectures. On peut également changer la forme du solide si on le désire, en changeant l'angle au sommet du cône. Expliquer le phénomène en choisissant par exemple l'angle δ égal à 45°.

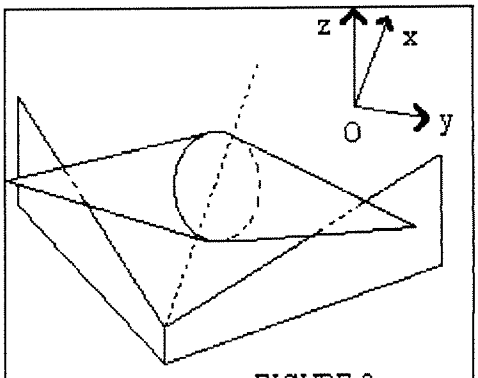


FIGURE 2

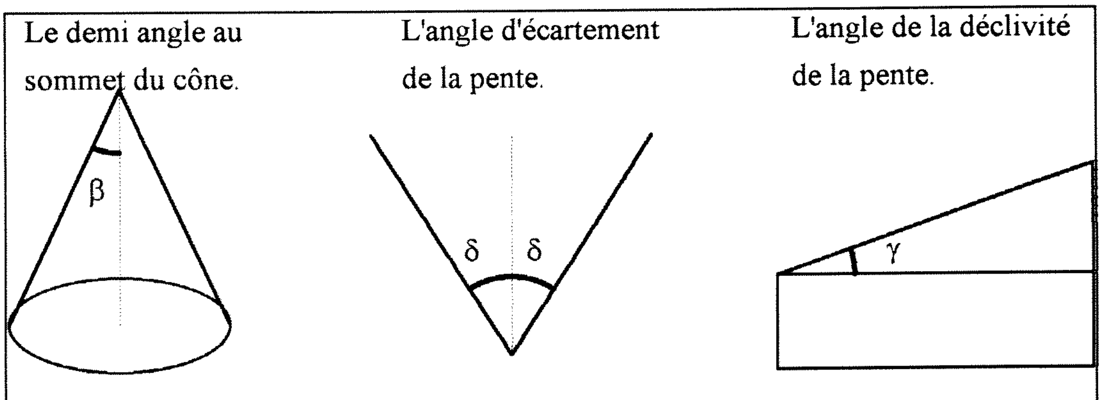


FIGURE 1

Notions en mathématiques:	Notions en physique:
trigonométrie	centre d'inertie
théorème de Thalès	moments de force
le cône	
vision et géométrie dans l'espace	

SOLUTION

Une solution complète est développée ci-dessous, sans tenir compte d'une éventuelle application numérique. Chacun pourra facilement l'adapter à ses besoins, et au niveau des élèves concernés.

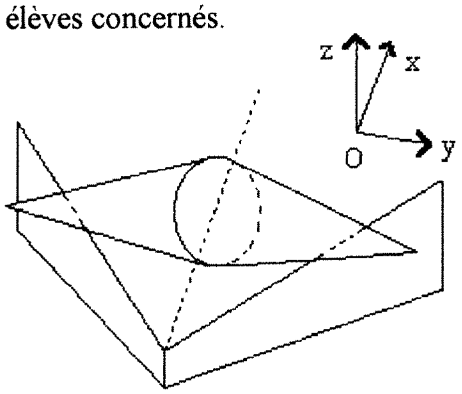


FIGURE 2

Pour la cohérence des notations, on se place dans un repère (O,x,y,z) comme indiqué sur la figure 2. Le point O est situé dans le plan vertical qui passe par les bases des deux cônes. L'axe z est vertical, les axes x et y sont dans un plan horizontal. Dans l'analyse du problème interviennent trois angles (quatre si on considère la fabrication du cône):

- Le demi angle au sommet du cône noté β précédemment.
- Le demi angle d'écartement de la pente noté δ.
- L'angle de la pente que remonte le cône, noté γ.

Le demi angle au sommet du cône. L'angle d'écartement de la pente. L'angle de la déclivité de la pente.

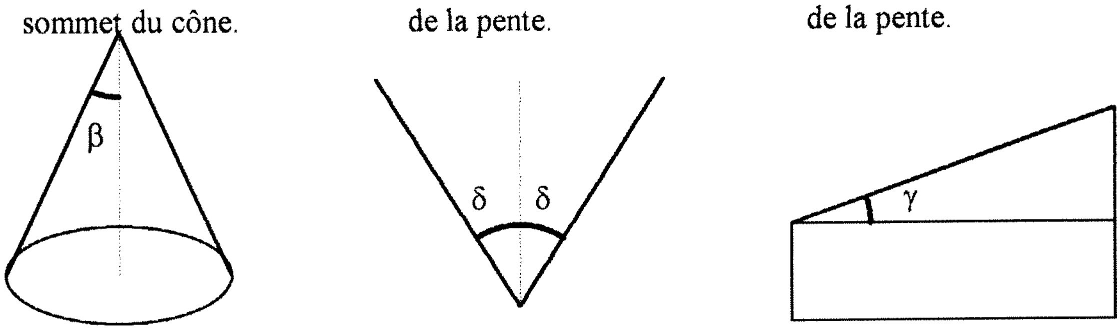
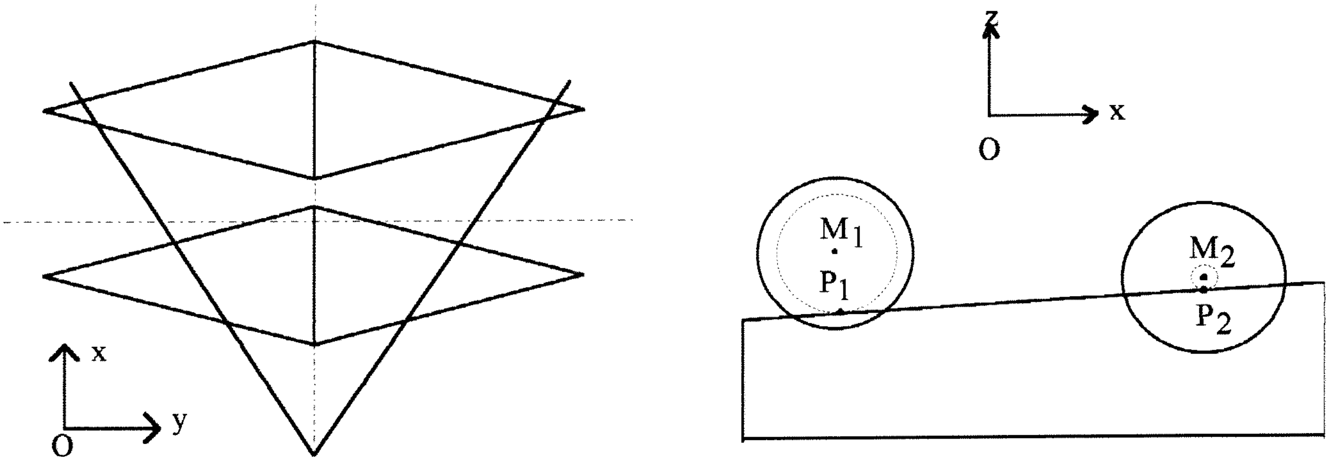


FIGURE 1

Il est utile de réaliser différentes vues de l'expérience, en ayant présent à l'esprit que les grandeurs réelles ne sont pas forcément respectées sur le dessin (voir figure 3). On note P_1 et P_2 les points de contact du cône avec le support. Leurs projections orthogonales sur l'axe du cône sont notées M_1 et M_2. La dénivellation de l'axe du cône et donc de son centre de gravité est donnée par la distance $M_1P_1 - M_2P_2$. Le cône "remonte" la pente si cette valeur est positive, ce qui correspond en fait à une position plus basse du centre de gravité.



Vue de dessus

Vue de gauche

FIGURE 3

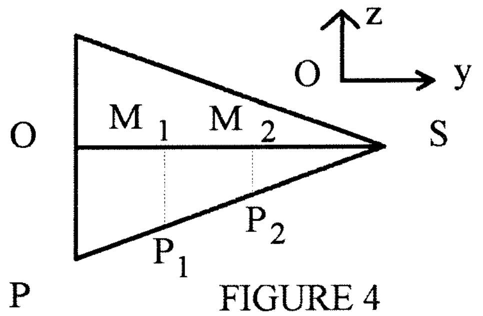


FIGURE 4

D'après les calculs déjà effectués dans l'activité "le cône: études préliminaires", on a d'après la forme du cône:

$$M_1P_1 = r\left(1-\frac{y_1}{h}\right) \text{ et } M_2P_2 = r\left(1-\frac{y_2}{h}\right)$$

Les cotes des points M_1 et M_2, et donc du centre de gravité du solide (voir figure 4) sont données par les relations:

$$z_1 = M_1P_1 + z_0 \quad \text{et} \quad z_2 = M_2P_2 + P_2R + z_0$$

où z_0 représente une constante qui dépend du repère choisi, et qui s'éliminera dans la suite.

Il reste à calculer la distance P_2R qui dépend de l'angle γ de la déclivité et de l'angle δ d'ouverture de la pente.

On a facilement $P_2R = P_1R \tan\gamma$.

La distance P_1R dépend de l 'angle d'ouverture de la pente δ. En se plaçant dans un plan horizontal sur lequel on projette les points intéressants (voir figure 5), on obtient:

$$P_1R = \frac{y_2 - y_1}{\sin\delta}$$

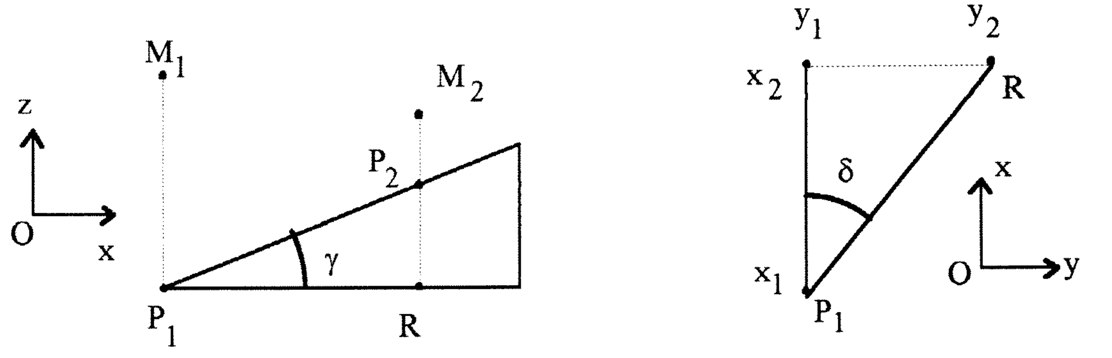


FIGURE 5

En reportant cette expression dans z_2, on obtient:

$$z_2 - z_1 = r\left(1 - \frac{y_2}{h}\right) + \frac{\tan\gamma}{\sin\delta}(y_2 - y_{1-})$$

$$z_2 - z_1 = r\left(1 - \frac{y_2}{h}\right) + \frac{\tan\gamma}{\sin\delta}(y_2 - y_1) - r\left(1 - \frac{y_1}{h}\right)$$

$$z_2 - z_1 = \frac{r}{h}(y_2 - y_1) + \frac{\tan\gamma}{\sin\delta}(y_2 - y_1)$$

Et comme $\frac{r}{h} = \tan\beta$, on obtient : $z_2 - z_1 = (y_2 - y_1)\left(\frac{\tan\gamma}{\sin\delta} - \tan\beta\right)$

Le cône avance si lorsque $y_2 - y_1 > 0$(le cône s'est déplacé dans le sens de la montée), $z_2 - z_1 < 0$ (son centre de gravité descend). On obtient alors la condition recherchée pour que le cône "remonte" la pente:

$$\frac{\tan\gamma}{\sin\delta} - \tan\beta < 0$$

Si le cône est construit, l'angle β est fixé et on sait que $\sin\delta > 0$. Cette condition s'écrit alors:

$$\tan\gamma < \sin\delta . \tan\beta$$

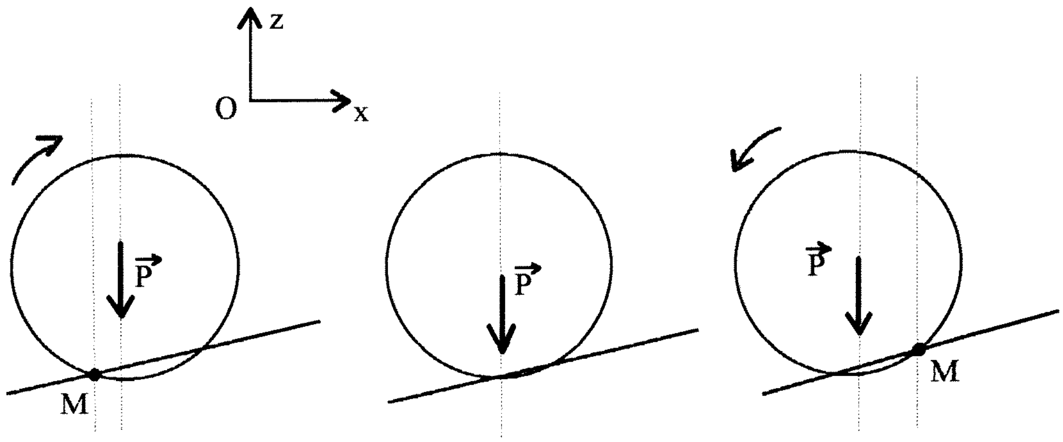
On peut vérifier la cohérence de la formule grâce aux remarques ci-dessous qui se vérifient expérimentalement:

- Le cône étant fixé, si $\sin\delta$ augmente, donc si δ augmente (dans le cadre de notre problème), donc si l'angle d'ouverture de la pente augmente, alors l'angle γ peut augmenter. Ce qui se traduit par: plus l'ouverture de la pente est forte, plus le cône peut "remonter" une pente à déclivité élevée.

- L'angle de déclivité γ étant fixé, plus l'ouverture δ de la pente sera faible (δ petit), plus l'angle au sommet du cône devra être élevé (β grand). On peut remarquer que quelle que soit la valeur de δ, il existe un cône qui donnera l'impression de gravir une pente.

Cette solution qui n'utilise pas d'outils mathématiques évolués, mais qui demande une bonne vision dans l'espace, est inexacte si elle est présentée sous cette forme!! Elle a été rédigée par un mathématicien, qui savait qu'elle était fausse (!). En effet, si on observe le montage réalisé, il semble que le point de contact du cône avec la déclivité (points P_1 et P_2) n'est pas celui que l'on a supposé: il semble que ce point de contact ne soit pas sur la même verticale que l'axe du cône. A ce stade, il était difficile de déterminer la position exacte du point de contact sans faire appel à des notions de géométrie que personne n'avait envie de mettre en oeuvre.

C'est alors que le physicien est venu au secours du mathématicien: si le cône roule, c'est qu'il est soumis à des forces qui le font avancer dans un sens ou dans l'autre. Faisons donc le bilan des forces qui s'exercent sur ce solide! Le cône est soumis à trois forces: le poids P et les réactions normales du plan incliné. Ces dernières n'interviennent pas dans la description du mouvement et leurs directions réelles sont difficiles à déterminer. C'est pourquoi on les a omises sur la figure 7. Un solide qui est en mouvement de rotation est soumis à un couple de forces. Le centre instantané de rotation du solide est un axe dont la direction est Oy et qui passe par le point M cherché. Selon la position de cet axe par rapport à la verticale passant par le centre de gravité du solide, le cône ira dans un sens ou dans l'autre. En effet, le couple qui s'exerce change de sens suivant la position des points de contact par rapport à la verticale (voir figure 7). Sa valeur dépend de la distance entre les deux droites représentées en pointillés et du poids P. Cette figure est évidemment fausse puisqu'en vue de gauche, en faisant une coupe suivant un plan (O,x,z), on n'obtient pas un cercle. Le point de tangence ne correspond pas à celui du cercle qui est dessiné, mais il faut bien faire une figure compréhensible! Par conséquent, on en déduit également la position des points de contact si le cône est soumis à un couple nul (il n'avance pas et ne recule pas): ils se trouvent sur la verticale de l'axe du cône.



Le bicône "monte" Position d'équilibre Le bicône descend

FIGURE 7

On peut donc reprendre le raisonnement mathématique développé ci-dessus en modifiant légèrement sa forme: on suppose que les angles sont tels qu'on se trouve dans le cas d'équilibre du cône. Toutes les relations écrites sont donc vraies, et la conclusion se fait alors sous la forme suivante:
Comme le cône est en équilibre, quelles que soient les valeurs de y_1 et de y_2, $z_2 - z_1 = 0$. Il faut donc que le second terme du produit soit nul, et on aboutit à la relation d'égalité:

$$\tan\gamma = \sin\delta.\tan\beta$$

Il reste encore à vérifier que cette égalité se transforme bien en l'inégalité précédemment établie si on modifie un des paramètres pour se retrouver dans une position où le cône roule, ce qui est évident d'un point de vue physique, mais l'est moins d'un point de vue mathématique.

Il est également intéressant de remarquer que le raisonnement physique permet de justifier à posteriori la solution mathématique envisagée. La recherche mathématique du point de contact du cône avec la pente est ardue, et a été évitée de cette façon (voir le dernier texte pour une solution mathématique complète: le bicône sur ses deux demi-droites).

15.4 LE BICONE SUR SES DEUX DEMI-DROITES ou " Le mathématicien fou va encore frapper ! "

Lorsque nous avons découvert le problème posé par un bicône roulant ou glissant sur deux demi droites fixes, nous n'avons pas pu résister au plaisir d'en rechercher une solution ***purement mathématique.*** *En particulier, nous avons cherché à décrire précisément le contact du bicône sur son support, à voir quelle est la trajectoire du centre (de symétrie) du bicône, puis, au cours d'un roulement sans glissement, à déterminer le nombre de tours effectués par le bicône en fonction du déplacement linéaire de son centre.*

Accrochez vous, il va falloir une bonne vision dans l'espace!

I. Etude géométrique;

Soit OA et OA' les deux demi-droites de même origine supportant le bicône et soit P le plan bissecteur de ces demi-droites. On supposera, pour respecter une certaine symétrie, que le cercle de base du bicône reste constamment dans P, si bien que P est un plan de symétrie de la figure.
Le problème *géométrique* du contact du bicône avec son support est indépendant du problème *dynamique* posé, c'est à dire du mouvement ou non du bicône. En particulier, toute la figure reste invariante lors d'une rotation autour d'un axe horizontal Oy perpendiculaire à P. Il semble donc préférable, pour décrire la position des deux demi droites OA et OA' dans l'espace, d'adopter d'autres notations, plus intrinsèques. Donc:

Avertissement : Changement de notations!

On appelle γ le demi angle formé par les deux demi-droites OA et OA', mesuré dans le plan OAA', et on repérera par α l'angle de ce plan (mesuré dans P) par rapport à un plan fixe xOy, par exemple (mais ce n'est pas nécessaire cf. ci dessous) un plan horizontal. Si on appelle OB la (demi-) bissectrice des droites OA et OA', α est l'angle de OB avec xOy

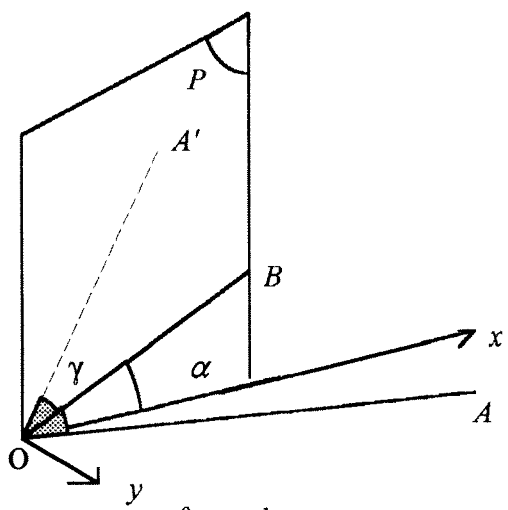


figure 1

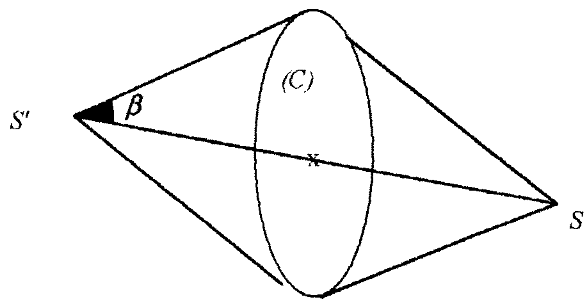


figure2

On désigne toujours par β le demi-angle au sommet des deux cônes; on appelle S et S' leurs deux sommets et *(C)* leur cercle de base commun.
Dire que le bicône repose sur son support signifie que les droites OA et OA' sont tangentes aux deux cônes, c'est à dire sont contenues dans deux plans tangents. Appelons encore A et A' les points de contact de ces demi-droites avec les cônes. Vu notre hypothèse de symétrie, A et A' sont symétriques par rapport au plan bissecteur P, donc AA' est parallèle à l'axe SS' du bicône et AA' coupe orthogonalement la bissectrice OB en B. Le plan tangent P_A en A contient la génératrice SA du cône et aussi la tangente au cercle de base *(C)* au point H d'intersection de celui ci avec SA. Cette tangente en H est en fait l'intersection du plan tangent P_A avec le plan P, et comme O est aussi dans cette intersection, on a que O est sur cette tangente en H, ou, autrement dit, que OH est tangente au cercle *(C)*.

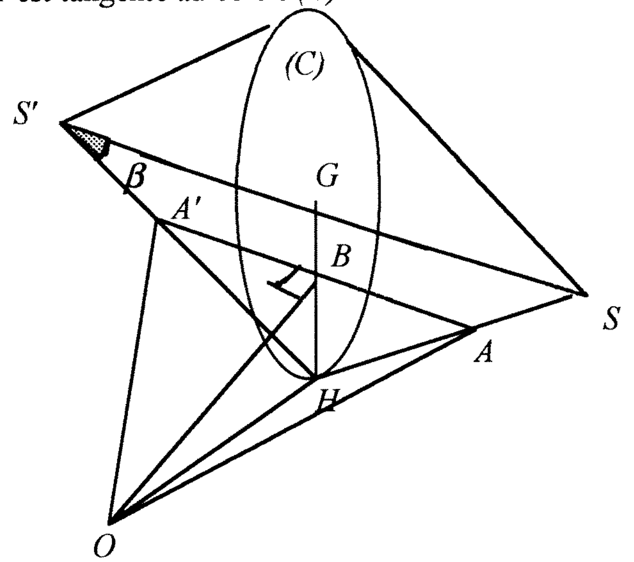


figure 3

Or un plan tangent à un cône fait un angle constant avec l'axe du cône, donc ici le plan tangent P_A fait l'angle constant β avec la direction fixe SS' ou Oy. Comme de plus ce plan tangent contient la droite fixe OA, on en déduit que nécessairement ce plan reste fixe lors du déplacement du bicône. De même, le plan tangent P_A' en A' reste fixe aussi, et donc leur intersection OH est une droite fixe aussi.
Soit α l'angle de OB avec OH. Nous venons de montrer que α est constant, c'est à dire ne dépend pas de la distance du bicône à O. Nous allons le retrouver en déterminant α en fonction de β et γ.
Il suffit pour cela de considérer le tétraèdre $OABH$, dont les faces sont toutes des triangles rectangles et où on retrouve β comme angle $\boldsymbol{B\hat{A}H}$ (Comme AA' est parallèle à SS', $\boldsymbol{B\hat{A}H = S'\hat{S}H}$) Des relations trigonométriques nous donnent:

$$\boldsymbol{BH = AB.\tan\beta}$$

$$\boldsymbol{AB = OB.\tan\gamma}$$

$$\boldsymbol{BH = OB.\sin\alpha}$$

On en déduit:

$$\boxed{\boldsymbol{\sin\alpha = \tan\beta.\tan\gamma}}$$

On voit que cette relation exige que $\boldsymbol{\tan\beta \times \tan\gamma \leq 1}$. Ceci se conçoit bien, car si on appelle β' l'angle complémentaire de β, qui est l'angle des génératrices du cône avec le plan de base, cette relation équivaut à $\boldsymbol{\tan\gamma \leq \tan\beta'}$, soit $\boldsymbol{2\gamma \leq 2\beta'}$: l'angle des deux demi-droites du support

doit être inférieur à l'angle des deux génératrices *SH* et *SH'*, sans quoi il n'y a pas de support possible, comme le montre la *figure 4*.
On peut aussi dire que cette relation traduit le fait que *O* se trouve nécessairement à l'extérieur du cercle de base *(C)*

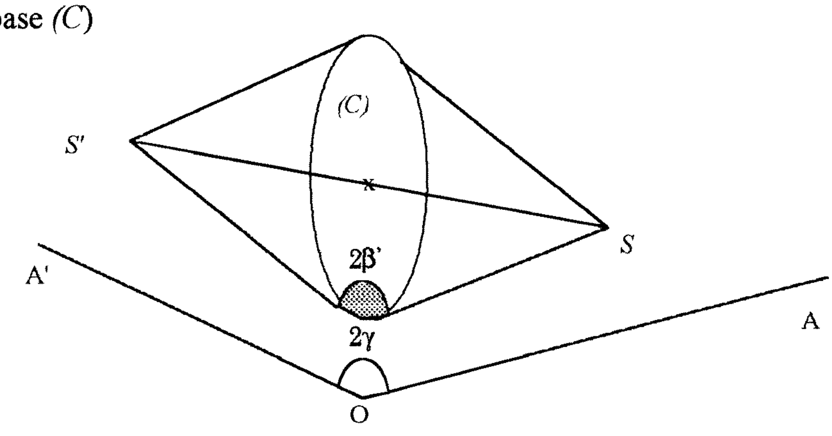


figure 4

II) Etude statique et dynamique.

Appelons α_0 l'angle du plan *OAA'* avec le plan horizontal *xOy*:
L'étude précédente a montré que la droite *OH* reste fixe lorsque le bicône glisse ou roule sur son support (à condition que son axe reste constamment perpendiculaire au plan bissecteur *P*).
Donc le centre de gravité *G* décrit également une droite fixe, parallèle à *OH*, à la distance *R* de celle ci, *R* étant le rayon du cercle de base (*C*). D'après les lois de la dynamique (théorème de l'énergie cinétique), le mouvement se fera dans le sens de *la descente de G* par rapport à un plan horizontal :

$-$***si*** $\alpha < \alpha_0 \Leftrightarrow \mathbf{sin}\,\alpha_0 > \mathbf{tan}\,\beta.\mathbf{tan}\,\gamma$, le bicône s'approchera de *O*,... sans intérêt!
$-$***si*** $\alpha > \alpha_0 \Leftrightarrow \mathbf{sin}\,\alpha_0 < \mathbf{tan}\,\beta.\mathbf{tan}\,\gamma$, le bicône s'éloignera de *O*, c'est à dire donnera l'impression de remonter la pente.

Et qu'en est-il si $\alpha = \alpha_0$? Le bicône est immobile car en équilibre !

Etudions de plus près cet équilibre.
Le poids $\vec{P}$ du bicône s'applique au centre *G* du cercle de base (*C*). Les réactions du support s'appliquent en *A* et *A'* et équilibrent $\vec{P}$, elles sont donc nécessairement dans le plan vertical passant par *G*, soit le plan SS'AA'. De plus, à l'équilibre, ces réactions sont perpendiculaires à leur support respectif, donc, si elles ont bien une composante verticale $\vec{R}_v$ valant chacune $\vec{P}/2$, elles ont aussi une composante horizontale $\vec{\boldsymbol{R}}_H$ et $\vec{\boldsymbol{R}}'_H$ qui sont égales et opposées pour s'équilibrer entre elles. Ces forces de réaction $\vec{\boldsymbol{R}}_H$ et $\vec{\boldsymbol{R}}'_H$ rendent compte du fait que le poids du bicône a tendance à écarter les deux demi droites *OA* et *OA'*, et donc que la rigidité en *O* produit cette réaction inverse.

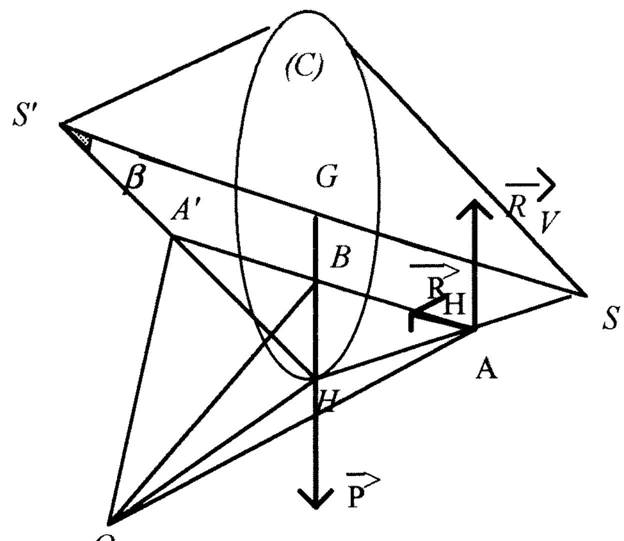


figure 5

Revenons au cas où $\alpha > \alpha_0$, et où, donc, le bicône s'éloigne de O. L'angle de descente du point G est $\delta = \alpha - \alpha_0$, il se retrouve comme angle entre la verticale et les droites parallèles GH, $\vec{R}_V$, $\vec{R}'_V$. On voit alors (cf. figure) que la force $\vec{P}$ précédente a un moment non nul par rapport à l'axe AA'. Ce moment est moteur et a tendance à faire tourner le bicône en "remontant la pente". Remarquons toutefois que ce moment vaut $\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{r} \times \sin\delta$, et comme r diminue au fur et à mesure que le bicône avance, ce moment diminue de plus en plus.

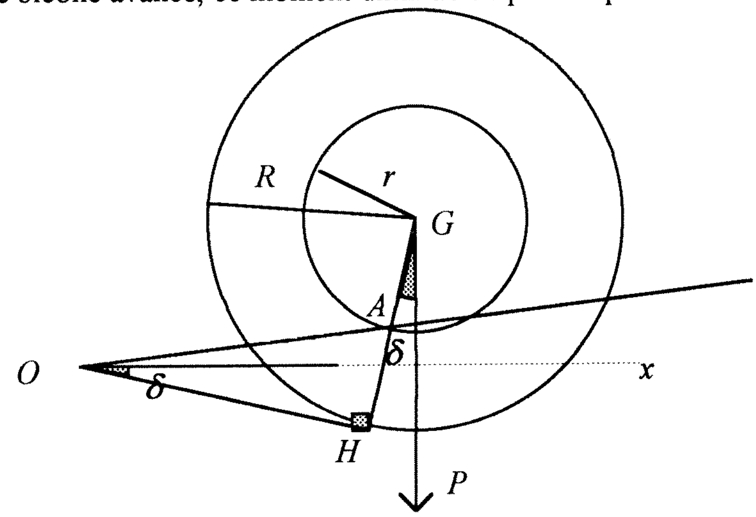


figure 6

III) Roulement sans glissement

Supposons que le bicône roule sans glisser sur son support: quelle est alors la relation entre le déplacement du point G et l'angle de rotation effectué lors du roulement?
Prenons la droite OH précédente comme axe Ox, et soit x l'abscisse du point G, θ l'angle, compté positivement, de rotation du bicône. La relation de roulement sans glissement se traduit par:

$$\frac{dx}{dt} = r.\frac{d\theta}{dt}$$

soit encore, en considérant que x est une fonction de θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = r$$

(r représente le rayon du petit cercle parallèle sur lequel s'appuie le bicône). Et on a les relations (cf. la figure 3 du I.):

$$r = R - BA\tan\beta$$
$$BA = OB\tan\gamma$$
$$x = OH = OB\cos\alpha$$

Compte tenu de la relation $\sin\alpha = \tan\beta.\tan\gamma$, on en déduit finalement:

$$r = R - x\tan\alpha = \frac{dx}{d\theta},$$

d'où :

$$x = \frac{R}{\tan\alpha}\left(1 - e^{-\theta\tan\alpha}\right).$$

Si nous appelons l la longueur maximale que peut parcourir le bicône (jusqu'à ce que les points A et A' coïncident avec les sommets S et S') , il vient $\frac{R}{l} = \tan\alpha$, d'où une autre expression de x :

$$\boxed{x = l\left(1 - e^{-\frac{R}{l}\theta}\right)}$$

Cette expression montre que l n'est qu'une valeur limite de x quand θ tend vers l'infini. Donc si le bicône atteint effectivement le bout de son support, c'est qu'il finit nécessairement par glisser!

Cette relation permet aussi de tracer la roulante, c'est à dire l'ensemble des points du bicône qui viennent en contact avec les demi-droites du support au cours du roulement. Ces roulantes (une par cône) sont des loxodromies, c'est à dire qu'elles coupent les génératrices du cône suivant un angle constant. Cela se voit par le fait qu'au cours du roulement, la tangente à la roulante au point de contact A coïncide avec la tangente en A au support, c'est à dire la droite OA, or OA fait un angle constant avec la génératrice SH à tout instant.
La figure 7 tente de rendre compte du mouvement de roulement du bicône sur son support.

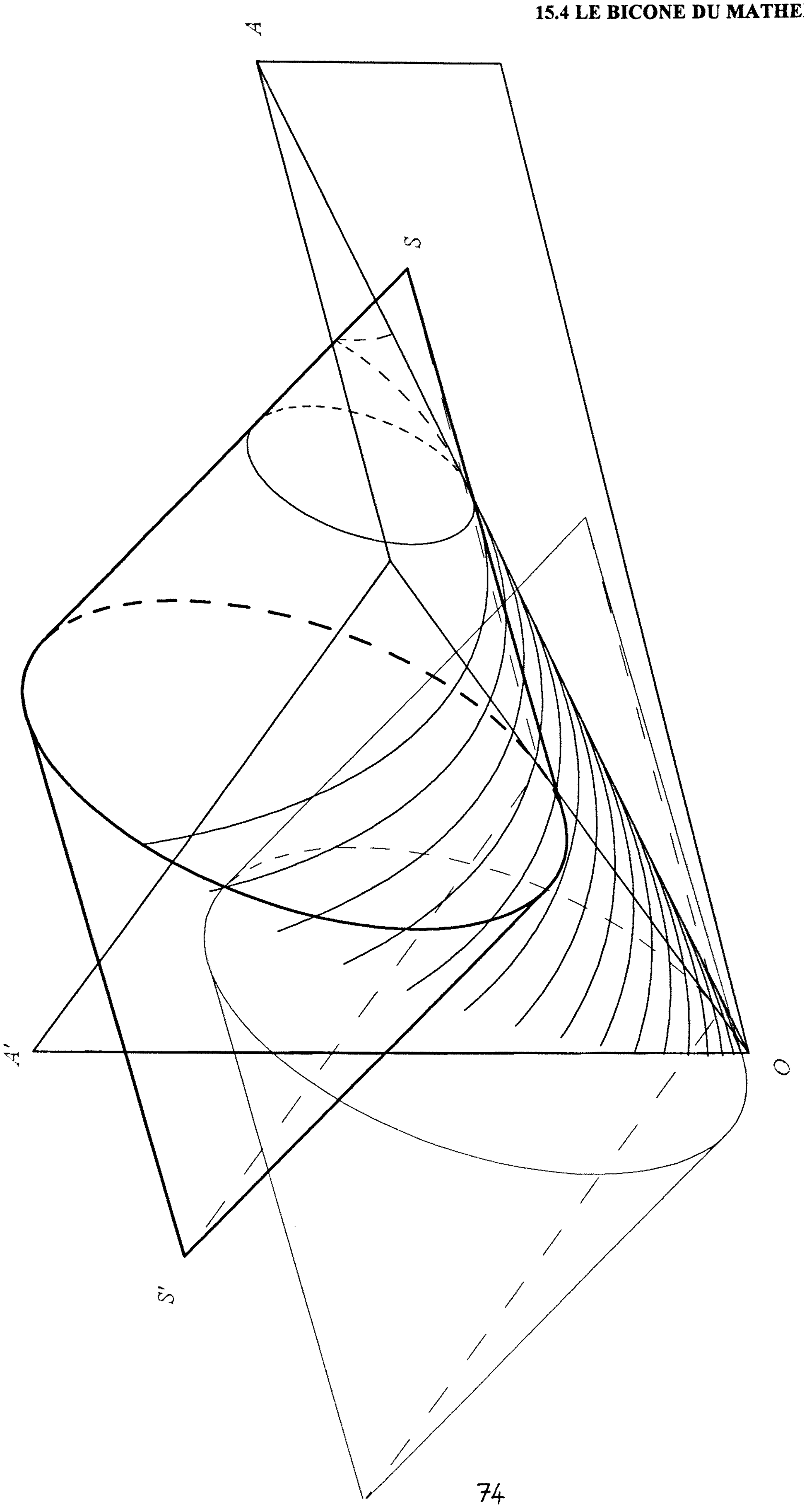


figure 7

16. CARACTERISTIQUES D'UN DIPOLE

Enoncé

On veut brancher une pile, dont les caractéristiques E et r sont à déterminer, à un resistor dont on ignore la résistance R. On désire savoir sous quelle tension se trouveront alors les deux dipôles ainsi que l'intensité qui circule dans le circuit.

Ce que savent les élèves:

Avant le T.P., on a tracé les caractéristiques respectives du dipôle et du resistor. Les élèves savent que la courbe obtenue pour la pile est une droite qui ne passe pas par l'origine et que c'est donc la représentation graphique d'une fonction affine. C'est l'occasion de faire un parallèle entre le cours de mathématiques et celui de physique:

En math $f(x) = ax + b$ f est une fonction de la variable x; a est le coefficient directeur: $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ et b est l'ordonnée à l'origine $b = f(0)$	En physique $U = E - rI$ U est une fonction de la variable I Le coefficient directeur est (-r) $-r = \dfrac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1}$ l'ordonnée à l'origine est E

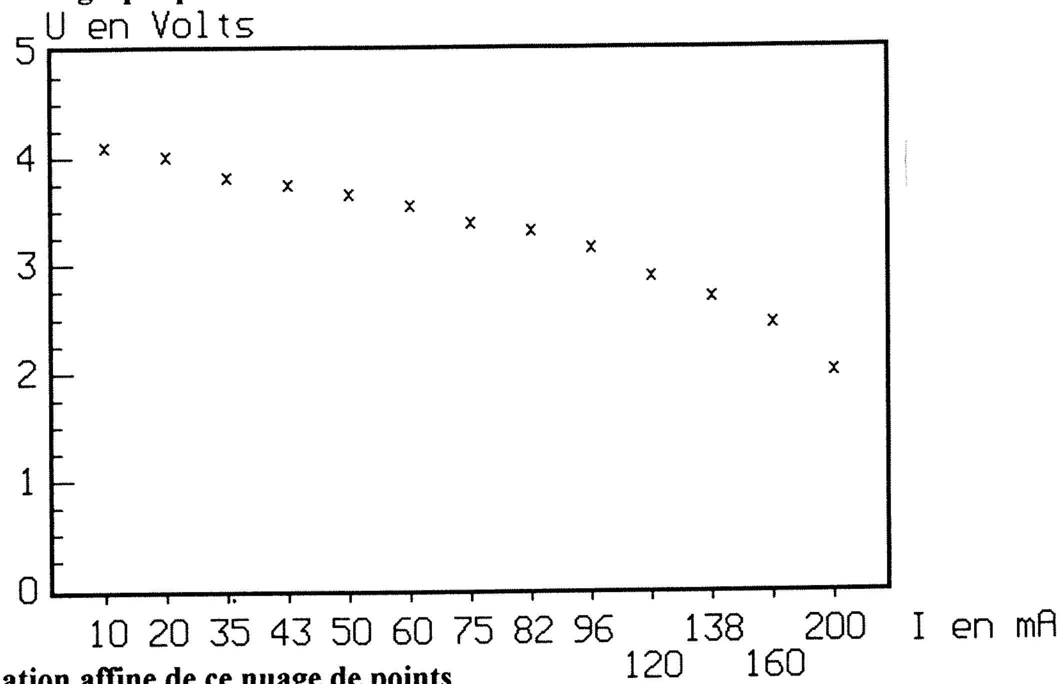
Ils savent aussi que la courbe obtenue pour le resistor est une droite passant par l'origine, c'est donc la représentation graphique d'une fonction linéaire

En math: $f(x) = ax$ (b = 0)	En physique $U = RI$

Voici les relevés effectués pour le générateur:

I mA	10	20	35	43	50	60	75	82	96	120	138	160	200
U V	4,09	3,99	3,81	3,73	3,65	3,54	3,37	3,3	3,14	2,88	2,68	2,44	1,99

Représentation graphique:



Approximation affine de ce nuage de points

Partageons ce nuage en deux sous nuages d'effectif respectif 6 et 7 et cherchons les coordonnées du point moyen de chacun de ces sous nuages: (les coordonnées du point moyen sont : en abscisse la moyenne des abscisses et en ordonnée la moyenne des ordonnées)

Pour le premier point:

$$\overline{I_1} = \frac{1+2+35+43+50+60}{6} \times 10^{-3} \qquad \overline{U_1} = \frac{4,09+3,99+3,81+3,73+3,65+3,54}{6}$$

on trouve:

$$\overline{I_1} = \frac{218}{6} \times 10^{-3} \qquad \overline{U_1} = \frac{22,87}{6}$$

Pour le deuxième point , on trouve:

$$\overline{I_2} = \frac{871}{7} \times 10^{-3}$$

$$\overline{U_2} = \frac{19,805}{7}$$

Equation de la droite passant par ces deux points moyens:

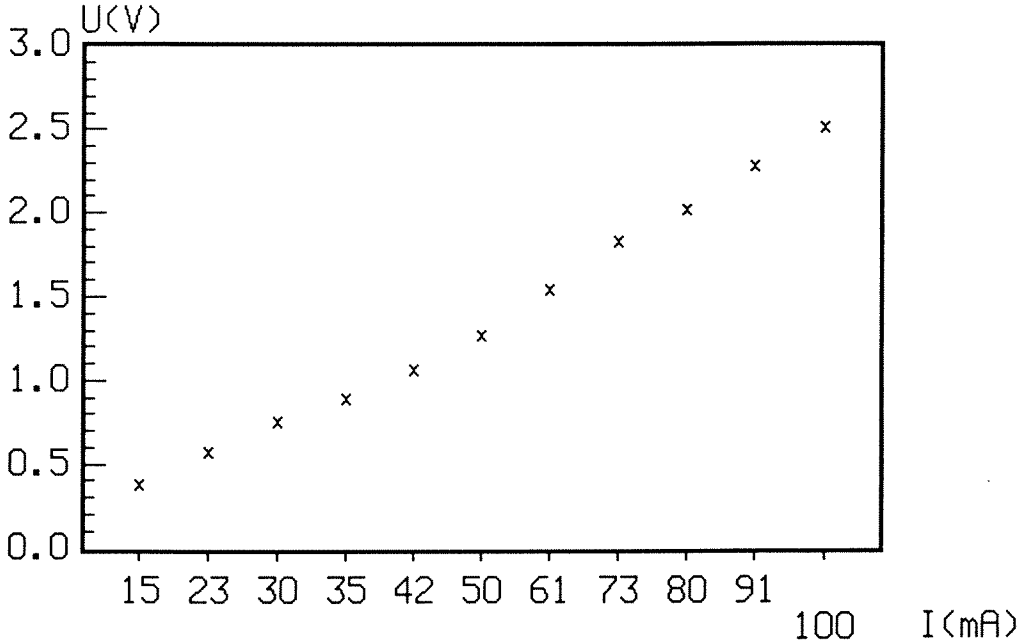
Elle est du type U =aI + b avec $\boldsymbol{a} = \dfrac{19,805 \times 6 - 22,81 \times 7}{871 \times 6 - 218 \times 7} \times 10^3 \approx -11$ et $\boldsymbol{b} \approx 4,2$

Conclusion : $\boldsymbol{r} = 11\Omega$ et $\boldsymbol{E} = 4,2V$

Pour le resistor, les relevés faits sont les suivants:

I(mA)	15	23	30	35	42	50	61	73	80	91	100
U(V)	0,37	0,57	0,75	0,88	1,05	1,255	1,53	1,825	2,01	2,28	2,5

Représentation graphique



Comme précédemment cherchons les points moyens des deux sous nuages:

$$\overline{I_1} = \frac{15+23+30+35+42}{5} = 29\times10^{-3}$$

$$\overline{U_1} = \frac{37+57+75+88+105}{5} = 724\times10^{-3}$$

$$\overline{I_2} = \frac{50+61+73+80+91+100}{6}\times10^{-3} = \frac{455}{6}\times10^{-3}$$

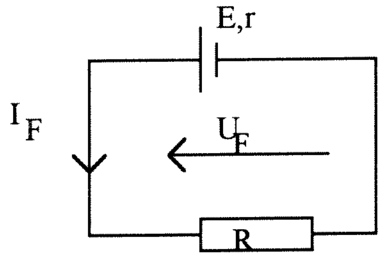
$$\overline{U_2} = \frac{1255+1530+1825+2010+2280+2500}{6}\times10^{-3} = \frac{11400}{6}\times10^{-3}$$

L'équation de la droite est du type: $U = aI + b$
avec: $a \approx 25{,}11$ et $b \approx 0{,}004 \approx 0$

Conclusion

U = R I avec R = 25ohms

Point de fonctionnement
On branche la pile au résistor. Calculer U_F, tension de fonctionnement et I_F l'intensité de fonctionnement.

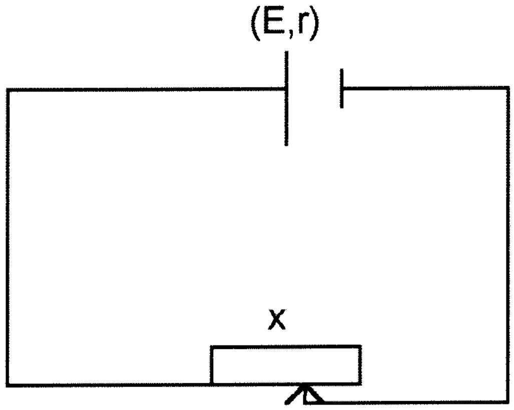


Il s'agit donc ici de résoudre le système: $\begin{cases} \boldsymbol{U_F = 25 I_F} \\ \boldsymbol{U_F = -11 I_F + 4,2} \end{cases}$

On trouve: $\boldsymbol{I_F \approx 0,117A}$ **et** $\boldsymbol{U_F \approx 2,9V}$

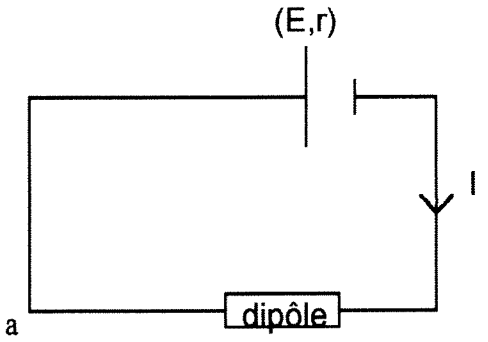
17. PROBLEMES D'EXTREMUM EN ELECTRICITE

Enoncé 1



I) Un circuit électrique comprend un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r ainsi qu'un résistor de résistance variable x.
Etablir l'expression de P puissance dissipée dans le résistor puis tracer la courbe représentative de P(x) dans le cas où E = 4,5 volt et r = 1ohm
Quelle est la valeur maximale de P(x) dans ce cas? Que se passe-t-il pour x très grand? En retournant à l'expression générale (E et r quelconques) justifier que la puissance dissipée dans le résistor est maximale pour une valeur de x que l'on déterminera.

Enoncé 2



II) Un circuit électrique comprend un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r ainsi qu'un dipôle.
. Exprimer la puissance P fournie au dipôle.
..Tracer la courbe représentative de P, fonction de l'intensité du courant I dans le cas où
E = 12volt et r = 4ohm
Quelle est dans ce cas la puissance maximum fournie au dipôle?
Pour quelles intensités a-t-on une puissance fournie égale à 7watt?
... En revenant au cas général, justifier que la puissance fournie est maximale pour une valeur de I que l'on déterminera.

Notions en mathématiques:	**Notions en physique:**
étude de fonctions.	loi d'Ohm.
recherche d'extremum.	puissance électrique dissipée

Solution

$$E = (r + x)i$$

$$P = x\,i^2 = \frac{x\,E^2}{(r+x)^2}$$

Application numérique

$$P(x) = \frac{20{,}25x}{(x+1)^2}$$

Etude de P, P est définie sur R_+^* calculons la fonction dérivée de P

$$P'(x) = \frac{20{,}25(1-x)}{(x+1)^4}$$

D'où le tableau de variations:

x	0		1		30
P(x)		+	0	—	
P(x)	0	↗	5,0625	↘	0

On remarque que le maximum est atteint pour x=1

Cas général

x	0		r		+oo
P'(x)		+	0	-	
P(x)	0	↗	P(r)	↘	0

$$P'(x) = \frac{E^2\left[(r+x)^2 - 2x(x+r)\right]}{(r+x)^4} = \frac{E^2(r-x)}{(r+x)^3}$$

$P(r) = P_{max} = E^2/r$ atteint pour $x = r$

Solution du II):

$U = E - rI$

$P = UI = EI - rI^2$

Application numérique

$P(I) = 12I - 4rI^2$

il est aisé de construire cette parabole et on trouve $P_{max} = 9$ pour $I = 3/2$

La résolution de l'équation du second degré est laissée à l'intention du lecteur

TABLE DES MATIERES

Titre: Mathématiques et Physique-Chimie.

Auteurs: Groupe Maths-Physique de l'IREM de Strasbourg.

Mots clés: interdisciplinarité / Maths-Physique-Chimie.

Résumé: Cette brochure présente le fruit de deux année de travail commun entre Mathématiciens et Physiciens. On y trouvera des activités pour les classes de lycée de la seconde à la terminale tenant compte des nouveaux programmes en vigueur suite à la rénovation pédagogique des lycées:

→ En Mathématiques: programmes applicables à la rentrée 1992 en seconde.

→ En Physique-Chimie: programmes applicables à la rentrée 1993 en seconde.

Chaque activité est suivie d'une solution détaillée et commentée en fonction des connexions interdisciplinaires.

Public concerné: Professeurs de Mathématiques et de Physique-Chimie de lycée.

Editeur: IREM de Strasbourg (brochure S.158).