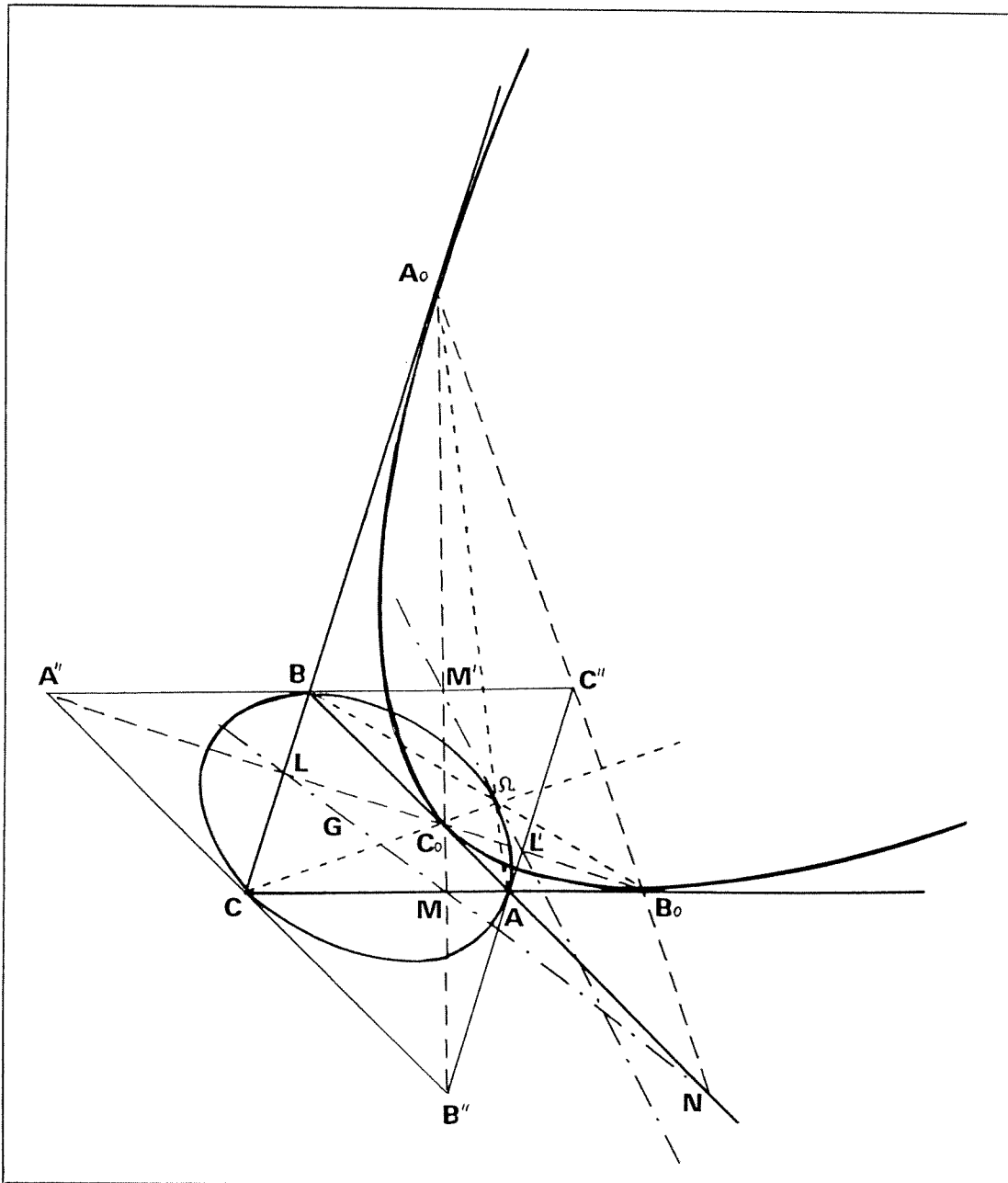


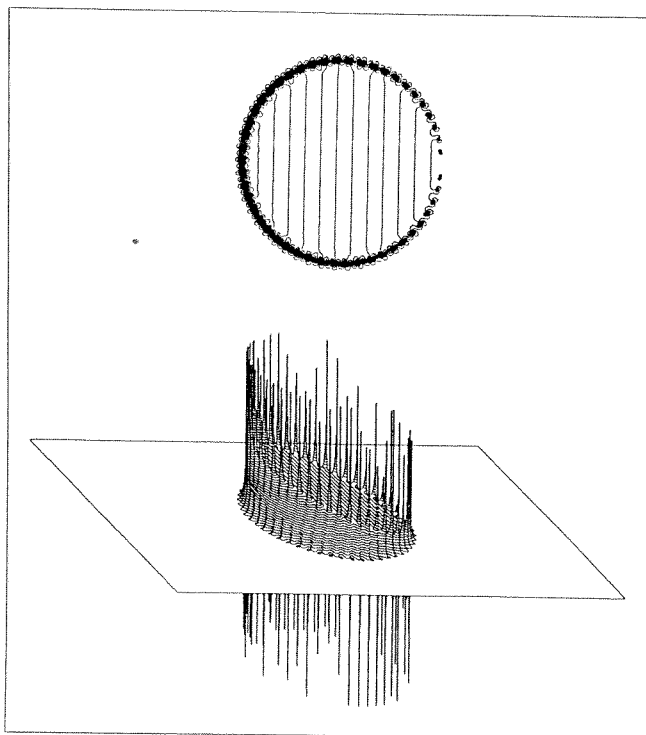
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 78 - MARS 1995
I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE

Elle donne une représentation presque complète des diverses propriétés étudiées dans l'article "sur les paraboles inscrites à un triangle" qui se trouve dans ce numéro de '*L'Ouvert*' page 15.



Ce dessin n'est pas nouveau car il se trouvait en couverture du n° 75 de '*L'Ouvert*'. En fin de commentaire, nous avons oublié de signaler qu'il nous était proposé par Monsieur Augustin Fruchard.

EVALUATION DE LA FORMATION SCIENTIFIQUE AU BACCALAURÉAT

Nous les attendions avec impatience. Elles sont arrivées avant les vacances de Noël. Il y eut quelques oublis dans cette distribution de documents : des élèves parfois, des professeurs souvent ... et même des établissements tout entiers ! Mais de quoi s'agit-il ? Des nouvelles épreuves pour le baccalauréat 1995.

Voilà plus de vingt ans que j'enseigne ; jamais le Ministère ne m'avait offert des "Annales zéro" pour que je puisse entraîner les jeunes. J'avais, comme tout le monde, pris l'habitude d'exploiter les sujets des années antérieures. J'ai assisté à plusieurs changements ou modifications de programmes. Les éditeurs ont proposé de nouveaux manuels et des livres para-scolaires, les enseignants ont fait travailler leur imagination, pour préparer au mieux leurs classes au baccalauréat.

Ce n'était pas la première fois que j'entendais parler de rééquilibrer les filières ; eh bien, la rentrée de septembre 1994 vit l'apparition de l'enseignement scientifique en section littéraire, le tronc commun et les spécialités dans les formations scientifiques et économiques. L'esprit change, on peut penser que la lettre suit.

Depuis quelques mois, les professeurs qui ont la responsabilité des deux heures complémentaires en terminale S, pendant lesquelles ils essayent d'inculquer presque toute la partie "C - D" (lire C moins D) des programmes précédents, courent contre la montre. Pour découvrir dans la brochure du Ministère sous le titre CANDIDATS AYANT CHOISI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ ... l'exercice de géométrie posé dans sept académies en série C en juin 1990. Bien sûr, il est rajeuni : le voilà raccourci, les lettres ont changé de nom et le mot PIVOTE ne figure plus. Mais nous sommes nombreux à nous souvenir qu'il avait fallu jongler avec le barème pour arriver à des moyennes proches de ... 1,5 sur 5. Nicole Vogel a même fait une étude très détaillée sur huit pages dans '*L'Ouvert*' n° 62, reprise dans '*Repères*', pour expliquer ce faible taux de réussite sur un exercice, qui porte exclusivement sur les connaissances acquises avant l'entrée en terminale, celles qui d'après les textes ne doivent pas constituer le ressort principal d'un sujet de baccalauréat ... Quel message l'auteur de ce "nouveau contrat pour l'école" - c'est le titre du fascicule - fait-il passer ? Et à la commission inter-IREM second cycle de se demander : au lieu de courir contre la montre, ne vaudrait-il pas mieux consacrer ces deux heures à revoir les programmes antérieurs ?

L'élève qui n'aura pas su traiter l'ensemble de points de cet exercice, pourra se pencher plus rapidement sur le problème du tronc commun de terminale S. Il ne devrait pas être démuni devant la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, d'autant plus que toutes les indications sont données : la dérivée est du signe de $1 - \ln x$, il faut en étudier le signe pour dresser le tableau de variation, après avoir déterminé les limites (... un délicieux changement de variable est même proposé quand x tend vers 0). Ne peut-on pas attendre d'un élève scientifique qu'il connaisse la marche à suivre? Est-ce vraiment là le niveau à atteindre? Voici pour la partie A, que l'on pourrait facilement introduire en classes littéraires.

La suite réserve des surprises : ils sont de retour, ceux que les instructions avaient rendu indésirables, et ils reviennent en force, les paramètres. "Discuter en fonction de a le nombre de solutions de l'équation $f(x) = f(a)$, graphiquement avant de prouver les résultats." Ceux d'entre nous qui ont testé cette question dans leurs classes ont constaté que souvent elle n'était pas comprise (que dire de la droite d'équation $y = f(a)$ tracée nettement au-dessus du sommet de la courbe?); elle présente un niveau de difficulté bien supérieur à la classique "discuter en fonction de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ ". Il s'agit d'un changement de registres.

Bref, les statistiques sur les élèves testés donnent presque 100 % de réussite à la partie A, mais moins de 10 % pour la B. Qu'a-t-on alors évalué? Comment faire la différence entre celui qui s'est contenté d'assister au cours et celui qui a travaillé mais ne maîtrise pas les notions de bijections, de découpage en intervalles, de discussions en fonction de a ? Quel est l'objectif de l'examen? Quelles sont les compétences requises en fin de lycée?

Ces deux dernières questions se posent également pour les sujets proposés en L et en E.S. En enseignement scientifique L, les professeurs éprouvent déjà un malaise à gérer ces 0,75 heure hebdomadaire – moins que la musique en collège! – et celui-ci est accru par le niveau de "l'annale zéro". Que répondre à un jeune L qui dit "ce n'est pas parce que nous sommes des littéraires, qu'il faut nous prendre pour des débiles". La culture scientifique peut-elle se limiter à un calcul de pourcentages et une simple lecture graphique? Quant aux sujets pour E.S., où intervient l'information chiffrée qui doit réaliser la spécificité de la filière économique?

Des réunions régionales et nationales ont mis en évidence que bon nombre de professeurs se demandent en quoi cette brochure peut servir de modèle aux épreuves définitives. Faut-il retenir la parole de l'un d'eux : "dans les sections L, E.S. et S les élèves doivent résoudre deux exercices sur trois proposés; ce fascicule donne le moule, il ne faut pas regarder le contenu. Il est là pour les entraîner à lire les préambules et les titres". C'est vrai, le Ministre a dit qu'il fallait avant tout développer l'apprentissage de la lecture; je l'oubliais.

C. KAHN.

SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 78 – MARS 1995

◇ <i>Notre couverture</i>	I
◇ <i>Editorial : Evaluation de la formation scientifique au baccalauréat</i>	II
◇ <i>Un épisode de la “bataille” pour le triomphe du calcul différentiel,</i> par P. SERGESCU	1
◇ <i>Sur les paraboles inscrites à un triangle,</i> par J.-C. SIDLER	15
◇ <i>Ευρηκα! $num = \Delta + \Delta + \Delta$,</i> par M. GUINOT	21
◇ <i>Courrier des lecteurs,</i>	48
◇ <i>La dérive des continents,</i>	50
◇ <i>A vos stylos, par ‘L’Ouvert’</i>	59
◇ <i>Annonces</i>	62

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
- ◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
80 F (130 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
120 F (200 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro* : 30.- F

**UN EPISODE DE LA "BATAILLE" POUR LE TRIOMPHE DU
CALCUL DIFFERENTIEL :
LA POLEMIQUE ROLLE-SAURIN 1702 - 1705**

Petre SERGESCU

Membre correspondant de l'Académie de Roumanie

La bibliothèque du département de mathématiques de Strasbourg est réputée pour sa richesse. On y trouve aussi quelquefois des ouvrages surprenants, tel ce recueil d'"*Essais scientifiques*" de l'historien des Sciences Petre Sergescu publié en 1944 à Timisoara et censuré sous l'occupation allemande (Etude dédiée à la mémoire de la personnalité de Nicolae Iorga ; Monitorul Oficial et les imprimeries de l'Etat ; Imprimerie Nationale - Bucuresti 1942).

P. Sergescu écrivait parfois en français, ayant beaucoup travaillé en France avant la dernière guerre. L'article qui suit, écrit lui en roumain, nous a paru particulièrement éclairant sur les débuts du Calcul différentiel en France.

Rodica Bratoiu-Stonescu, professeur de mathématiques installée depuis quelques années à Strasbourg, et membre du groupe d'histoire des mathématiques de l'Irem, a bien voulu nous en faire la traduction suivante.

La méthode *De Maximis et Minimis* de P. de Fermat et la *Géométrie* de R. Descartes ont été parmi les découvertes du début du XVII^e siècle, celles qui ont le plus révolutionné la pensée scientifique en créant les disciplines et les méthodes modernes des mathématiques. En fondant la géométrie analytique, Descartes a remplacé les efforts classiques de démonstration directe par l'appareil analytique des calculs. Mais, les mathématiques analytiques (ou "calculatoires") n'étant pas encore suffisamment avancées au moment de la naissance de la géométrie analytique (1637), Descartes fut obligé de classer les courbes en deux catégories essentiellement distinctes pour lui, mais qui, aujourd'hui, forment la sphère de la même notion générale de courbe. Or, toutes les mathématiques du XVII^e siècle ont vécu avec la différence entre les courbes géométriques (dont l'équation est un polynôme) et les courbes mécaniques (dont l'équation est transcendante). A l'époque, les recherches se sont dirigées presque exclusivement vers les courbes géométriques.

Fermat avait fait une découverte fondamentale en ce qui concerne les extrémas des courbes géométriques. Son résultat était le suivant : si le point d'abscisse a est un extrêmu sur la courbe $y = f(x)$, alors le coefficient de h dans $f(a+h)$ doit s'annuler. Ce coefficient est ce qu'on va nommer plus tard le nombre dérivé de $f(x)$ au point a . Donc Fermat est un précurseur dans l'utilisation de la dérivée. Mais le calcul indiqué par Fermat ne pouvait être utilisé que pour le cas où $f(x)$ est un polynôme, c'est à dire pour les courbes géométriques.

© L'OUVERT 78 (1995)

Ces deux idées fondamentales (la classification des courbes d'après Descartes et la dérivée des polynômes d'après Fermat) ont été des leviers importants pour l'étude des propriétés des courbes, en France au XVII^e siècle.

Parallèlement, la "*méthode des indivisibles*" de Cavalieri, perfectionnée par Blaise Pascal (1633-1662), "*la doctrine de l'infini*" de Roberval (1602-1675), les recherches de Barrow (1630-1677) ont préparé la découverte capitale du Calcul Infinitésimal, faite par Leibniz et Newton vers la fin du XVII^e siècle. Au début, les idées de Newton sont restées isolées en Angleterre, sans être diffusées ailleurs, donc elles n'ont pas contribué effectivement aux premiers pas du développement du calcul infinitésimal sur le continent.

Leibniz (1646-1716) a dévoilé les principes de "*son calcul*" dans un article bref et très difficile à comprendre, édité aux *Acta Eruditorum* en 1684. La plupart des géomètres français, pénétrés par les méthodes de Descartes et Fermat, n'ont fait aucun effort pour déchiffrer les quelques pages pleines de nouvelles idées de l'article de Leibniz. Pourtant, quelques mathématiciens en avaient deviné l'importance capitale et ils étaient devenus immédiatement les admirateurs enthousiastes et les pionniers du nouveau calcul différentiel. Ceux-ci ont été les frères Jacob (1654-1705) et Jean Bernoulli (1667-1748), ainsi que le marquis Guillaume de l'Hospital (1661-1704). C'est ce dernier qui a publié, en 1696, le premier traité de calcul différentiel apparu dans le monde : "*Analyse des infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbes*". La méthode différentielle résolut du même coup le problème de la tangente pour les courbes géométriques et pour celles mécaniques, qui étaient à l'ordre du jour.

Or, pour les courbes "géométriques", le problème des tangentes était résoluble même avec les principes de Descartes et Fermat. Pour la tangente au point (a,b) à la courbe "géométrique" $f(x,y) = 0$, on considérait l'équation $f(x-h,y-k) = 0$ et on annulait l'ensemble des termes de premier degré en h et k. Le rapport k/h ainsi obtenu était le coefficient angulaire de la tangente cherchée. Ce beau résultat, obtenu après beaucoup d'efforts, était très important pour ses découvreurs. C'est pour cette raison qu'ils s'y sont limités et ont refusé de voir dans la méthode différentielle quelque chose de nouveau. Certains ont prétendu qu'au fond, la méthode différentielle était inspirée par les principes de Fermat et par les calculs déjà cités ci-dessus en ce qui concerne la tangente, et que ces personnes ont adapté ces résultats pour les courbes mécaniques. Ensuite une lutte orageuse a éclaté entre les adeptes de la nouvelle méthode et ceux des procédés classiques.

En face de tous les combattants contre le calcul différentiel se trouvaient Leibniz, Jacob et Jean Bernoulli, de l'Hospital. Ils écrivaient des articles d'explications, proposaient des problèmes impossibles à résoudre par les anciennes méthodes, lançaient des défis, appréciaient les solutions obtenues par le nouveau calcul. En France, de l'Hospital a inspiré plusieurs mathématiciens. Mais personnellement, il n'a pas participé à des polémiques aussi violentes que celle qui s'est élevée entre les frères Bernoulli (dans le *Journal des Savants*, 1697/98). La seule polémique violente de l'Hospital, dans le domaine de l'Analyse Mathématique, est anonyme, dans le *Journal des Savants*, 1692. De l'Hospital (qui signe G***) attaque en trois articles l'abbé de Catelan - l'auteur du livre "*Principes de la Science Générale des lignes courbes*" - qui prétendait que les principes de Descartes et Fermat étaient suffisants pour élucider les problèmes de tangentes, points d'inflexion, etc... De Catelan non plus ne signe pas les deux articles de réponse.

Au contraire, par son prestige et surtout par son livre, de l'Hospital gagne des adeptes pour le nouveau calcul. Parmi eux, il faut considérer le célèbre mécanicien P. Varignon (1654-1722) qui, sans écrire des articles d'analyse, a compris son importance et a soutenu le nouveau courant à l'Académie des Sciences de Paris et dans le groupe de ses amis. Voici d'autres disciples de l'Hospital :

LA POLEMIQUE ROLLE-SAURIN

- J. Saurin (1655-1737), académicien depuis 1707,
- Pierre Rémond de Montmort (1678-1719); académicien depuis 1716,
- François Nicole (1683-1758), académicien depuis 1707.

Les deux derniers ont commencé à écrire quand le calcul différentiel avait déjà gagné la victoire. Mais J. Saurin a participé avec beaucoup d'enthousiasme au combat entre les deux courants. Il y eut une polémique très violente (instructive pour nous) et que je veux vous présenter en détail dans la suite de l'article.

Le plus important mathématicien qui ait défendu les méthodes classiques contre l'analyse mathématique, a été M. Rolle (1652-1719), académicien "élève astronome" depuis 1685 et académicien pleinement "pensionnaire" depuis 1699. La polémique citée ci-dessus s'est élevée entre Saurin et Rolle qui l'a commencée d'ailleurs. D'autres mathématiciens adeptes des anciennes méthodes étaient moins importants :

- l'abbé Bignon (1662-1743) président pendant plusieurs années de l'Académie des Sciences, membre de l'académie française et de celle des Inscriptions,
- l'abbé de Catelan, réduit au silence par de l'Hospital,
- de la Hire (1640-1718),
- l'abbé Gouye (1650-1725) etc...

Au début Rolle ne signait pas ses articles. Dans le *Journal des Savants*, (1693-1700), nous trouvons une série d'articles, surtout d'algèbre, signés Rémi Lochell de Bertam, qui n'est autre que l'anagramme de Michel Rolle (né à Ambert). Ce sont les articles de Rolle.

Rolle était un algébriste de grande valeur. M. Cantor ⁽¹⁾ considère ses contributions en algèbre "*hervorragende Leistungen*" (de belles performances) et "*bahnbrechend*" (innovatrices). Son livre le plus important, "*Traité de l'Algèbre*" est apparu en 1690, donc avant l'Analyse de l'Hospital. En appliquant les principes de Fermat, Rolle ordonne le polynôme $f(x+h)$ d'après les puissances de h (c'est à dire les dérivées successives du polynôme). Avec leur aide, il réussit à séparer les racines des équations algébriques. C'est un succès incontestable. Ce succès l'a poussé sans doute à une grande fidélité envers les méthodes classiques et a nier la nouveauté du calcul différentiel.

En 1695 apparaît dans le *Journal des Savants* pages 244-249, une attaque de Rolle, qu'ils signe R. L. (Rémi Lochell) contre le calcul différentiel. L'auteur veut prouver que l'origine du nouveau calcul se trouve dans l'algèbre élémentaire (ce qui n'est pas exact) et qu'on peut faire de grands progrès dans ce domaine sans utiliser de *nouveaux mots*. Rolle n'a pas raison, car il ne s'agit pas de *nouveaux mots*, mais de la *nouvelle notion* d'infiniment petit (différentielle). Cet article n'a pas eu de réponse. En profitant de la réorganisation de 1702 du *Journal des Savants*, Rolle occupe tout le numéro extraordinaire du jeudi 13 avril 1702, pages 239-254. Il prétend que le problème des tangentes peut être complètement résolu avec les méthodes de "l'analyse élémentaire" (=l'algèbre) par une suite d'équations qui se déduisent algébriquement de l'équation de la courbe (évidemment il ne s'agit que des courbes "géométriques"). Comme Fermat avait déjà défini les calculs qui donnaient les dérivées des polynômes, Rolle avait le matériel nécessaire pour résoudre le problème qu'il se proposait ; et il réussit. Il s'occupe non seulement des points simples, mais également des points doubles, en donnant différents exemples. Il prétend que la méthode différentielle donne les tangentes aux points simples car elle a copié l'algorithme de Fermat, mais qu'elle n'est pas capable de résoudre le nouveau problème des tangentes aux points multiples.

Le principal exemple de Rolle est le point (2,2) sur la courbe :

⁽¹⁾ Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (ndlr).

$$f(x,y) = y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 48xy + 4x^2 + 16y^2 - 64x = 0$$

Rolle calcule $f(x+nv, y+nz)$ et il met en ordre croissant les puissances de n , en s'arrêtant à la puissance la plus petite dont le coefficient est non nul, ici n^2 . En annulant ce coefficient, il a une relation entre v et z qui donne les coefficients directeurs z/v des tangentes au point double (2).

L'algorithme de Rolle revient évidemment à la méthode différentielle, mais il a son origine dans les idées de Fermat et il est antérieur à l'élucidation du problème des tangentes aux points multiples par la méthode différentielle. Mais les calculs ne peuvent s'effectuer que pour les courbes "géométriques".

Rolle introduit encore faussement et sans justification, la notion de "tangente relative" aux points doubles, qui est la perpendiculaire issue de ce point à l'axe Ox . Puis il considère le cas où la tangente au point double est perpendiculaire à Ox . Il montre comment trouver les asymptotes des courbes "géométriques" avec certains changements d'axes. Le procédé qu'il indique pour trouver les points doubles de $f(x,y) = 0$ (f - polynôme) est correct et il revient à l'algorithme différentiel d'aujourd'hui.

A la fin, Rolle n'oublie pas d'insister encore une fois :

"Les premières règles qu'on a données ici se fondent sur les principes de l'analyse ordinaire et sur les idées de M. de Fermat" (3).

Le défi jeté par Rolle aux adeptes du calcul différentiel attire une réponse presque immédiate. Le numéro extraordinaire du jeudi 3 août 1702 du *Journal des Savants*, pages 519-534 est occupé en totalité par la réponse donnée par J. Saurin. Il est curieux d'observer que le sommaire de la fin d'année 1702 du journal ne contient ni l'article de Rolle, ni la réponse de Saurin.

La polémique commence avec un ton relativement calme :

*"M. Rolle n'est pas tout à fait content des méthodes que la nouvelle analyse a données pour la résolution des **problèmes généraux** de la géométrie... Il paraît le plus satisfait de celles qui servent à résoudre le problème général des tangentes, mais il trouve encore qu'elles sont défectueuses en certains cas. C'est lorsque les courbes ont quelque point capable de plusieurs tangentes."*

Saurin ajoute qu'il va utiliser les méthodes du calcul différentiel pour les exemples proposés par Rolle, afin de lui prouver que le nouveau calcul s'applique également dans le cas des points multiples. Mais il est évident que Saurin non plus n'entrevoit pas toute la généralité de l'Analyse Mathématique et qu'il n'est pas trop sûr de son habileté pour calculer. Il considère le calcul différentiel plutôt comme une sorte de généralisation de l'algèbre :

"Même quand nous ne lui donnerions pas les tangentes qu'il dit qu'on ne peut pas trouver par notre calcul ce ne serait pas une preuve de

(2) $f(2 + nv, 2 + nz) = n^2[4v^2 - 32z^2] - 12n^3vz^2 + n^4z^4$ d'où les coefficients directeurs des tangentes $\frac{z}{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$ (ndlr).

(3) En français dans le texte de Sergescu, comme toutes les autres citations (ndlr).

l'insuffisance de la méthode en elle-même ; ni du défaut d'adresse à l'appliquer aux cas proposés. On pourrait inventer des difficultés à l'infini."

En revenant aux points doubles, Saurin attire l'attention sur le fait qu'on a déjà traité, par le calcul différentiel, des problèmes de tangentes aux points doubles, par exemple dans le *Journal des Savants*, 1692, page 177, dans *Acta-Eruditorum*, 1694, page 397 (la courbe $x^4+y^4+2x^2y^2-4a^2x^2+a^2y^2=0$ à l'origine). Saurin se propose de déduire, seulement avec la fameuse règle de l'Hospital (art. 163 de "*l'Analyse des infiniments petits*") les tangentes aux points doubles. La méthode de Saurin est ingénieuse et générale de sorte qu'on peut le considérer comme le premier à avoir résolu cette question. Aujourd'hui on n'utilise plus cette méthode, même si elle est instructive. C'est pour cela que je la résume ici.

La sous tangente est donnée par $x \frac{dy}{dx}$. Mais on a $f'_x dx + f'_y dy = 0$ et donc la sous tangente est : $-x \frac{f'_x}{f'_y}$ (par la suite la *sous-tangente* est le segment compris entre l'intersection de la tangente avec Oy et la projection sur Oy du point de la courbe). Aux points doubles nous avons $f'_x = f'_y = 0$ et donc on a un cas indéterminé où l'on doit appliquer la règle de l'Hospital.

Autrement dit :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{f''_{xy}dx + f''_{yy}dy}{f''_{xx}dx + f''_{xy}dy}$$

et donc dx/dy est une des racines u de l'équation :

$$f''_{xx}u^2 + 2f''_{xy}u + f''_{yy} = 0.$$

On observe que ce calcul est exact et donne le résultat commun d'aujourd'hui relatif aux coefficients directeurs des tangentes aux points doubles. Saurin applique ce calcul aux exemples de Rolle et détermine exactement les tangentes demandées. Et comme conclusion :

"M. Rolle doit être fâché d'attaquer, comme il le fait indirectement, un ouvrage (celui de l'Hospital) qu'il ne s'est peut-être pas donné la peine d'approfondir assez. Le pis est que dans le même temps qu'il en combat les méthodes, il en tire celle qu'il propose dans son Ecrit." (Cette accusation n'est pas juste).

Saurin insiste sur cette accusation que les déductions de Rolle ne sont qu'une suite de relations différentielles, où il a remplacé dy et dx respectivement par nz et nv . Mais ici il n'a pas raison, car Rolle avait appliqué conséquemment les principes de Fermat.

"En lisant cet article, on sent un Auteur qui, chagrin de ne pas pouvoir se passer du Calcul Différentiel qu'il n'aime pas, tâche de profiter de ce qu'il peut y avoir de commun entre ce Calcul et la méthode de M. de Fermat pour le confondre entièrement avec cette méthode."

Cet article montre que son auteur est un mathématicien de talent. C'est pour cela que Rolle croit que le nom de Saurin est un pseudonyme et que le vrai auteur de cet article est de l'Hospital lui-même. L'insinuation de Rolle est sans motif, car de l'Hospital

mourut le 2 février 1704, or la polémique de Saurin a continué pendant toute l'année 1705.

Le *Journal des Savants* de 1703 page 41 à 45 et 49 à 52 publie deux articles non signés dans lesquels on construit avec exactitude les courbes des deux premiers exemples laissés non élucidés par Rolle justement pour ne pas suggérer aux opposants d'où venait la difficulté du problème qu'il posait.

Rolle fut très impressionné par l'article de Saurin. C'est pour cela qu'il lui répondit par deux brochures publiées en 1703 et 1704 chez J. Boudot à Paris. La brochure de 1703 est intitulée "**Remarques de M. Rolle de l'Académie des Sciences, touchant le problème général des tangentes. Pour servir de réplique à la réponse qu'on a insérée sous le nom de M. Saurin dans le Journal des Savants du 3 août 1702**". Elle a 47 pages. Rolle critique le traité de l'Hospital et le calcul différentiel prétendant que :

"du nouveau système de l'infini on tire le faux comme le vrai."

Il ajoute de nouveaux exemples qu'il considère insolubles par le calcul différentiel. Par exemple : Trouver les tangentes à la courbe :

$$xy = ab + \sqrt{cxy^2 - abcy} - \sqrt[3]{fx^3 + fy^3 - pfy^2}$$

aux points d'intersection avec la courbe : $y^5 - py^6 - a^3b^3 = 0$.

La brochure éditée par Rolle en 1704, de 20 pages est intitulée "*Mémoires sur l'inverse générale des tangentes, proposés à l'Académie R. des Sciences par M. Rolle*". Elle contient 4 mémoires. Dès que Rolle a considéré qu'il a résolu complètement le problème des tangentes (c'est à dire le problème du calcul différentiel) à l'aide seulement des principes de Fermat, il s'occupe du problème inverse, c'est à dire du calcul intégral qu'il veut réduire toujours à l'algèbre ordinaire.

Il faut insister sur le fait que Rolle reconnaît comme courbe seulement les courbes "géométriques" et par la suite il restreint beaucoup le champ d'application du problème. A vrai dire (pour le cas des polynômes) il utilise une méthode des coefficients indéterminés, qui est liée de loin au problème qui demande de trouver les solutions des équations différentielles à l'aide des séries, méthode utilisée couramment dans l'analyse mathématique d'aujourd'hui.

Rolle avait déjà écrit, en 1699, un livre nommé "*Méthodes pour résoudre les questions indéterminées d'algèbre*" où il utilisait les coefficients indéterminés. Il est important de souligner que Rolle, qui se rend compte que sa méthode ne s'applique pas aux courbes générales mécaniques, ne veut pourtant pas admettre que la méthode de Leibniz doit avoir une nouvelle base car elle s'applique à toute courbe ; pour Rolle, ces applications étaient une pure fantaisie.

Dans cette brochure on suppose qu'on donne l'expression générale de la tangente à une courbe "géométrique" (on dit aujourd'hui qu'on connaît la dérivée y' d'une fonction y liée à x par une équation polynomiale) et qu'on demande de trouver cette liaison algébrique entre y et x . Dans le premier mémoire Rolle étudie la limite du degré et du nombre de termes que "l'équation génératrice" peut avoir. En connaissant cette limite, Rolle cherche, dans son deuxième mémoire, par la méthode des coefficients indéterminés, à déterminer cette équation génératrice. Son troisième mémoire s'occupe des cas de non homogénéité et le quatrième mémoire indique les observations que l'on peut faire dans la résolution de certains problèmes particuliers.

Le *Journal des Savants* de 1704, pages 540 à 543 offre une analyse de cet ouvrage de Rolle. Les dernières phrases du journal sont caractéristiques de la mentalité de Rolle.

LA POLEMIQUE ROLLE-SAURIN

"C'est un préjugé de la nouvelle géométrie que toutes les égalités (équations) entre x, y produisent des courbes... On croyait qu'une égalité différentielle ne pouvait avoir que deux intégrales, mais il est facile de s'en désabuser par la méthode de M. Rolle."

Rolle n'acceptait donc pas que toute équation entre x et y détermine une courbe ayant ainsi un point de vue très restrictif. Pourtant il se peut que justement le calcul infinitésimal ait été le facteur qui a changé la mentalité des mathématiciens sur ce problème, unifiant ainsi la théorie générale des courbes.

Dans le *Journal des Savants* 1704, pages 634 à 639, Rolle applique sa méthode à l'équation différentielle de la courbe de Beaune :

$$y' = \frac{a}{y-x}$$

en trouvant, après des calculs très longs, la solution $x-y+a=0$. Mais, en réalité, l'intégrale générale de l'équation de Rolle est la courbe transcendante :

$$\begin{cases} x = C - \frac{a}{p} + a \log\left(\frac{p}{p-1}\right) \\ y = C + a \log\left(\frac{p}{p-1}\right) \end{cases} \quad \text{ou } (x-y+a) = ae^{\frac{c-y}{a}}$$

Elle se réduit à l'intégrale particulière trouvée par Rolle pour $C = -\infty$. Cet exemple est éloquent pour prouver combien restrictives étaient les hypothèses de Rolle, qui supposait que la solution est une courbe "géométrique".

Dans le *Journal des Savants* 1705, pages 170 à 174, Rolle revient avec un nouvel article sur l'intégration. Enfin, il accepte la nouvelle notation dx, dy, mais il prouve qu'il ne l'a pas comprise.

Ainsi, de l'équation :

$$(A) \quad 8\sqrt{a}dy^2 = 15\sqrt{x}dx^2$$

il déduit par sa méthode, l'intégrale $64ay^4 = 81x^5$ tandis que, dit-il, si on applique la méthode du calcul différentiel on obtiendra :

$$(G) \quad \sqrt{a}y^2 = x^{5/2}.$$

La démonstration donnée par Rolle à ce problème est : *"Ce qui (G) se voit clairement quand on différencie deux fois cette égalité G selon la réforme qu'on a voulu faire du calcul différentiel dans le Journal du 3 août 1702, alors on trouve la formule proposée A. Ce qui ferait croire que cette égalité est la génératrice de cette formule."*

A vrai dire, ignorant la constante d'intégration, le résultat exact de l'intégration est :

$$64ay^4 = 144x^5.$$

Par conséquent Rolle a fait une faute de calcul quand il a appliqué sa méthode algébrique. Et l'utilisation du calcul intégral n'est pas exacte. Je crois que l'erreur de Rolle est de différencier dans les deux membres de G par rapport à des variables différentes. Ainsi si on différencie dans le premier membre, deux fois par rapport à y et le deuxième membre deux fois par rapport à x, on a, après la première différentiation :

et après la deuxième :

$$\sqrt{a} \cdot 2 y dy = \frac{5}{2} \cdot x^{3/2} dx$$

$$\sqrt{a} \cdot 2 dy^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} dx^2$$

qui est justement A. Evidemment, Rolle n'avait pas le droit de dériver par rapport aux variables différentes dans les deux membres, mais il fallait choisir une variable indépendante, par exemple x (et alors il y aurait eu dans le premier membre également d^2y).

Saurin n'avait rien répondu depuis le 3 août 1702. Mais même quand il répondra, il ne relèvera pas cette erreur de Rolle.

Entre temps, Rolle a publié aussi, dans le *Journal des Savants* de 1703, pages 523 à 528, sous la signature M^{***}, un article d'explication de la méthode qu'il avait donnée le 13 avril 1702 pour trouver les asymptotes. Il applique la méthode à la cubique $y^3 - 3pxy + x^3 = 0$.

Il effectue d'abord une rotation des axes, donnée par les formules :

$$x = \frac{av+bz}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad y = \frac{az-bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

et il cherche les valeurs de a, b pour lesquelles le coefficient de la plus haute puissance de v s'annule. Cela veut dire qu'une racine v devient infinie, le nouvel axe $z=0$ est une direction asymptotique. Après cela, il déplace l'origine du système d'axes le long de Ox, jusqu'au moment où il y a encore une deuxième racine infinie. La méthode est ingénieuse, mais elle n'est applicable qu'aux courbes "géométriques", car pour les autres il n'y a pas moyen de résoudre les équations transformées. Ces moyens seront fournis par le calcul infinitésimal (par le développement de Taylor).

Tout le numéro du jeudi 23 avril 1705 du *Journal des Savants* pages 241 à 256 est écrit, enfin, par J. Saurin. L'article laisse l'impression que Saurin lui-même ne maîtrisait pas le calcul infinitésimal. Il percevait l'importance de la nouvelle discipline, mais il n'osait pas relever sa fausse application par Rolle, ni résoudre tous les nouveaux problèmes soulevés par Rolle. Par contre, le ton de la polémique devient de plus en plus violent. En voici quelques preuves :

"Je m'arrêterai ici au premier exemple (du 18 avril 1702) ; résolu de ne pas passer aux deux autres qu'après que M. Rolle m'aura fermé la bouche sur celui-ci."

"Il (Rolle) embarrasse quelques-uns de ces exemples de difficultés étrangères à la question et qui sont du ressort de l'algèbre ordinaire ; c'est sur ces exemples qu'il insiste davantage et qu'il nous défie avec plus de hauteur."

"Rolle appelle les infinis l'expression dy/dx pour effrayer l'imagination des ignorants"

"Il est tout à fait honteux à M. Rolle de n'avoir pas vu."

"(Rolle) cherchait à se faire un illustre adversaire et ne voulait point de cet inconnu M. Saurin, qui est venu mal à propos se jeter à la traverse. J'entre dans la peine de notre savant Algébriste. Il est mortifiant pour lui de n'avoir à faire qu'à moi, et plus mortifiant encore de tomber sous les coups d'une si faible main. Au reste s'il me croit ignorant il ne se trompe pas, mais

LA POLEMIQUE ROLLE-SAURIN

quelque ignorant que je sois s'il me croit homme à prêter mon nom aux ouvrages d'un autre, je puis l'assurer que c'est encore là une de ses erreurs."

Cette réponse de Saurin est plus faible du point de vue mathématique que celle du 2 août 1702. Il est possible donc que Rolle ait eu raison, partiellement, quand il vient affirmer que le premier article ne fut pas écrit par Saurin. De l'Hospital avait l'habitude d'inspirer divers auteurs, en leur offrant des exemples, des problèmes, des démonstrations, etc... J'ai constaté ce phénomène dans certaines études de A. Parent, dans *"Traité des sections et du cône"* de **Le Poivre** (1704, chez Barth. Goin à Paris). Donc, il est possible que certaines idées de l'article du 2 août 1702 soient inspirées par l'Hospital. Mais l'article nommé ci-dessus fut écrit par Saurin.

Rolle répond dans le *Journal des Savants* du 17 mai 1705, pages 311 à 318, puis tout le numéro du jeudi 11 juin 1705, pages 367 à 382 sera occupé par la réplique de Saurin qui invite Rolle à répondre sur deux colonnes.

Rolle recule. Il reconnaît dans *"l'Analyse des infiniments petits"* une *"quantité de choses très bonnes et ingénieuses"*, mais *"les méthodes de l'analyse des infiniments petits sont insuffisantes quant aux principes et fausses quant aux effets."*

Dans cet article, l'idée de Rolle fut d'appliquer le calcul différentiel à quelques exemples qu'il avait déjà étudiés algébriquement et de prouver qu'il fut conduit à des faux résultats. En réalité, Rolle n'avait pas compris la méthode différentielle et donc il l'appliquait de manière erronée, ce qui allait, évidemment, le conduire à de faux résultats.

Mais, en constatant que les résultats sont faux, il n'a aucun doute sur son calcul et il en déduit que la méthode est fautive. C'est ainsi qu'il avait fait, par exemple, avec le problème traité par Saurin le 3 août 1702, ou avec la courbe $y = \sqrt{ax} + \sqrt{by}$. D'ailleurs il ajoute tout le temps de nouveaux exemples où il prétend qu'il n'est pas possible d'appliquer la méthode différentielle et demande à Saurin de prouver le contraire. Il procède pareillement dans l'exemple déjà illustré où il met l'équation sous la forme irrationnelle,

$$y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4+2x}$$

ou en considérant le point triple de la courbe

$$x^4 - ayx^2 + ay^3 = 0$$

Rolle ne comprend pas que l'application de la règle de l'Hospital à l'exemple traité par Saurin en 1702 était légitime et accuse injustement :

"Il (Saurin) a été obligé d'y faire plusieurs suppléments et plusieurs réformes."

Etant guidé par le fait que son procédé ne s'applique qu'aux courbes écrites sous forme rationnelle, Rolle reprend l'exemple traité par Saurin en 1702 ⁽⁴⁾ et il l'écrit sous la forme :

$$y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4+2x}$$

⁽⁴⁾ En effet, si l'on élimine les radicaux dans cette équation par des élévations au carré, on retrouve l'équation

$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 48xy + 4x^2 + 16y^2 - 64x = 0$,
exemple donné au début de cet article (ndlr).

en demandant à Saurin d'appliquer aux radicaux, s'il le peut encore, les règles du calcul différentiel. Saurin ne répond pas à cette attaque, même s'il était simple d'observer au préalable que le point (2,2) ne se trouve pas sur la branche pour laquelle on considère le signe + devant les radicaux, mais il fallait considérer chaque radical comme ici :

$$y = 2 \pm \sqrt{4x} \mp \sqrt{4+2x}$$

forme où les signes se correspondent.

Mais Saurin a raison quand il accuse Rolle de se tromper en appliquant la règle de l'Hospital. Ainsi, dans $\frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x}$ Rolle met d'abord $x = 2$ et puis il applique la règle seulement pour y variable. Or sur la courbe x et y varient en même temps, donc on ne peut pas laisser x fixe et seulement y variable. De là provient la faute de Rolle que Saurin exploite joyeusement :

"La substitution de 2 à la place de x détermine la valeur de y dans l'égalité et fait que cette égalité n'est plus l'expression générale des sous-tangentes à la courbe de M. Rolle, mais l'expression des sous-tangentes d'un point déterminé de cette courbe ; par conséquent cette égalité ne peut plus être considérée comme un lieu et par conséquent aussi on ne peut plus lui appliquer l'article 163... Ce serait ici le cas de lui (à Rolle) rendre le nom qu'il m'a donné de pitoyable géomètre ; ce nom me convient assez ; mais il ne convenait pas à M. Rolle de me le donner. Il me sera du moins permis de lui dire que, s'il a beaucoup étudié la Géométrie, comme il nous l'assure, il ne paraît ici qu'il y ait fait un grand progrès."

Par contre, Saurin n'essaye pas de trouver les tangentes au point triple de la courbe $x^4 - ax^2 + by^3 = 0$, car *"conformément à mon dessein et en vertu de ma déclaration, je renvoie celui qu'il me marque pour être résolu à son rang"*.

Evidemment, si Saurin avait maîtrisé le calcul différentiel, il était plus simple de résoudre les exercices proposés que de remplir des pages entières avec des injures. Il est vrai que nous sommes à la fin du siècle où on utilisait des mots extrêmement forts, conséquence des guerres religieuses, de l'esprit cazon de l'époque de Henry IV, etc...

En ce qui concerne l'exemple $y = \sqrt{ax} + \sqrt{by}$ Saurin montre que Rolle a appliqué d'une manière erronée la règle de l'Hospital pour l'origine en trouvant que la sous-tangente se réduit identiquement à 0. Or l'expression de la sous-tangente est :

$$\frac{ax\sqrt{by}}{-b\sqrt{ax} + 2\sqrt{abxy}}$$

et on simplifie par \sqrt{ax}

Après cela, on peut appliquer l'article 163 de l'Hospital, qui donne le résultat exact. D'ailleurs, Rolle confondait la différentiation d'une équation avec la règle de l'Hospital; à la fin, Saurin écrit :

"Voici un échantillon des discours vagues de cet auteur ; on ne saurait les réfuter. C'est d'ordinaire un entortillement de grandes paroles qui ne signifient rien, ou qui n'ont aucun sens déterminé... Je défie le lecteur le plus sérieux de ne pas rire aux premières paroles qu'il lira... J'attendrai encore trois semaines pour le jugement de l'Académie. Si elle se tait, je considère qu'elle me donne raison et je continuerai ma dispute sur d'autres points."

SECTION IX.

Solution de quelques Problèmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

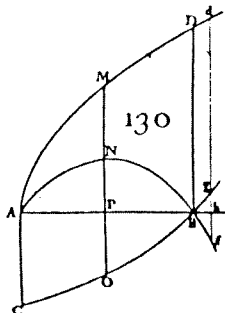
PROPOSITION I.

Problème.

163. SOIT une ligne courbe AMD ($AP = x$, $PM = y$, FIG. 130. $AB = a$) telle que la valeur de l'appliquée y soit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorsque $x = a$, c'est à dire lorsque le point P tombe sur le point donné B . On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée BD .

Soient entendues deux lignes courbes ANB , COB , qui aient pour axe commun la ligne AB , & qui soient telles que l'appliquée PN exprime le numérateur, & l'appliquée PO le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les PM : de sorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il est clair que ces deux courbes se rencontreront au point B ; puisque par la supposition PN & PO deviennent chacune zero lorsque le point P tombe en B . Cela posé, si l'on imagine une appliquée bd infiniment proche de BD , & qui rencontre les lignes courbes ANB , COB aux points f , g ; on aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle * ne diffère pas de BD . * Art. 1.

Il n'est donc question que de trouver le rapport de bg à bf . Or il est visible que la coupée AP devenant AB , les appliquées PN , PO deviennent nulles, & que AP devenant Ab , elles deviennent bf , bg . D'où il suit que ces appliquées, elles-mêmes bf , bg , sont la différence des appliquées en B & b par rapport aux courbes ANB , COB ; & partant que si l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la divise par la différence du dénominateur, après avoir fait $x = a = Ab$ ou AB , l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée bd ou BD . Ce qu'il falloit trouver.



Le dernier acte de la polémique que j'ai trouvé est formé par la réponse de Rolle qui occupe tout le numéro de jeudi le 30 juillet 1705, pages 495 à 510 du *Journal des Savants*. Il est écrit dans un style très digne, mais l'article n'apporte pas de corrections du point de vue mathématique à son article précédent. Il insinue de nouveau que Saurin a arrangé ses calculs différentiels pour arriver aux mêmes résultats obtenus par Rolle avec les outils algébriques :

"Il faut du moins faire appliquer (la méthode différentielle) à des problèmes qui n'ont point été résolus, si l'on veut faire croire qu'elle est générale... Il voyait dans le Journal la manière de résoudre (le problème) et même le détail du calcul et il a arrangé ses calculs pour donner le même résultat."

Il revient de nouveau à la forme $y=2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4+2x}$ mais il n'observe pas que les radicaux ont double signe et voilà pourquoi il accuse injustement la méthode différentielle de ne donner qu'une seule tangente au point double (même s'il y en a deux) dans le cas où l'équation est écrite sous une forme irrationnelle. Il applique encore une fois faussement la règle de l'Hospital, ce qui est évidemment un abus de la part de Rolle. D'ailleurs, Saurin avait prétendu que la tangente à l'origine est perpendiculaire à Oy , car la sous-tangente est nulle. Rolle montre que ceci n'est pas exact, et donc que la méthode différentielle est insuffisante.

En réalité, Saurin avait fait une faute de raisonnement. A l'origine $x=0$ et donc la sous-tangente $x \frac{dy}{dx}$ est nulle sans que $\frac{dy}{dx}$ soit nulle, c'est à dire qu'il n'est pas nécessaire que la tangente soit perpendiculaire à Oy . Comme l'origine appartient à la courbe, la sous-tangente est nulle quelle que soit la direction de la tangente, car la sous-tangente en tout point de l'axe Oy de n'importe quelle courbe est évidemment nulle. C'est ici la faute de Saurin. Mais Rolle, convaincu de l'insuffisance de la méthode différentielle ne pouvait pas trouver cette explication, pourtant tellement simple.

Je n'ai plus rien trouvé de cette polémique aux dates ultérieures dans le *Journal des Savants*. J'ajoute que tout le n°30 du 20 juillet 1705 manque à la collection de la Bibliothèque Nationale de Paris ainsi je ne sais pas ce qu'il contient. D'ailleurs, je n'ai eu la possibilité de rechercher dans le *Journal des Savants* que jusqu'à la page 350 de 1706. Les circonstances actuelles m'ont empêché de continuer à travailler à Paris, à partir de 1939, pour les études du Journal, commencées en 1935.

Cependant une autre source nous montre la fin de la lutte de Rolle contre le calcul différentiel. Il s'agit de l'œuvre fondamentale de M. Cantor. J'ai l'impression que M. Cantor n'a pas consulté le *Journal des Savants* et les articles que je viens d'analyser. Mais il recueille des informations précieuses d'autres sources et surtout de la correspondance des mathématiciens de l'époque. Or dans l'œuvre de Cantor, Bd. 3 page 265, nous trouvons :

"Erst im Jahre 1707 erklärte Rolle selbst seinen Widerstand als gebrochen und gab zu, er habe ihn nur deshalb so lange aufrecht gehalten, weil ihn gewisse Persönlichkeiten dazu veranlasst hätten. Briefe zwischen Johann Bernoulli und Leibniz aus der entsprechenden Zeit (Leibniz III, 810, 811, 814, 836) geben über diese letzte Wendung alle wünschenswerthe Klarheit."(5).

(5) "ce n'est qu'en 1707 que Rolle annonça que sa résistance était tombée et avoua qu'il ne l'avait soutenue si longtemps que parce que certaines personnalités l'y avaient poussé. Les lettres entre Jean Bernoulli et Leibniz datées de cette période donnent toute la clarté souhaitable sur cette dernière volte face" (ndlr).

LA POLEMIQUE ROLLE-SAURIN

C'est ainsi qu'en 1707 se termine l'une des dernières résistances, très acharnée et entourée par le prestige de l'algébriste, contre le calcul infinitésimal. A partir de ce moment là l'analyse mathématique va se répandre très vite et avec beaucoup de succès.

La célèbre polémique entre Newton et Leibniz en ce qui concerne la priorité sur le calcul infinitésimal ne va pas piéger les principes. Certains des adversaires du calcul promu par Leibniz, comme l'abbé Bignon, vont avoir le même comportement, en répandant en France les attaques sur le problème de la priorité disant que c'est la Royal Society of Sciences de Londres qui les a édités.

Timisoara, décembre 1941.

CENSURE ET MATHEMATIQUES

QUELQUES DATES
REMARQUABLES
DANS L'ÉVOLUTION
DES MATHÉMATIQUES
EN FRANCE

PAR

P. SERGESCU

Professeur à l'Université de Cluj
Membre Correspondant de l'Académie Roumaine
Lauréat de l'Académie des Sciences de Paris



Timisoara
„TIPOGRAFIA ROMÂNEASCĂ“
14. VII. 1941.

Sous l'occupation et la Censure allemande.

Cenzurat

TABLEAU DE QUELQUES DATES REMARQUABLES
DANS L'ÉVOLUTION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
EN FRANCE.

MOYEN AGE, XV^e et XVI^e SIÈCLES.

XI-e -XII-e s.		Les Ecoles de Chartres et de Paris préparent des traducteurs des textes mathématiques de l'antiquité, de l'Arabe et de l'Hébreu en Latin.
X-e s.	GERBERT (938-1003). (Le Pape Sylvestre II)	Modifie le Calcul des Abaques, en préparant l'introduction des chiffres.
vers 1220	Création de l'UNIVERSITÉ DE PARIS.	
XIV-e s.	J. BURIDAN (1300-1361).	Reconnait l'identité des corps célestes et terrestres. Reprend la théorie de l'impetus, ancêtre de la force vive.

Ce texte est extrait du livre "Essais scientifiques" de P. Sergescu qui rassemble différents articles couvrant la période 1941-1943. On y trouve notamment une monographie de 1941 sur "quelques dates remarquables dans l'évolution des mathématiques en France". Cette monographie a été censurée sous l'occupation allemande. Le texte censuré est le suivant :

vers 1120	Adelard de Bath	Premier traducteur en latin
	Professeur à Compiègne	des éléments d'Euclide

D'après l'encyclopédie des mathématiciens de Gottwald, Ilguds et Schlote, "Adelard de Bath est né en 1116 à Bath, en Angleterre, et est mort en 1142. C'est un traducteur, un mathématicien et un philosophe de la nature. Il a étudié à Tours, donné des cours à Laon, appris éventuellement l'arabe en Sicile et visité l'Anatolie (actuelle Turquie d'Asie), la Syrie, l'Espagne et probablement la Palestine. A partir de 1130 il vécut à nouveau à Bath où il fut en rapport avec la cour d'Angleterre. Adelard de Bath est un des plus célèbres traducteur du Moyen-Age et a mis en valeur en latin les travaux de savants arabes et islamistes ainsi que des traductions arabes d'écrits antiques, notamment "les Eléments" d'Euclide."

On comprend difficilement pourquoi le passage concernant Adelard de Bath a été censuré. Si des lecteurs de "L'Ouvert" ont une explication qu'ils nous la communiquent. On peut avancer l'hypothèse suivante : à l'époque, l'Allemagne était en guerre contre l'Angleterre ; Adelard de Bath était anglais. Il est probable que le censeur ait voulu faire disparaître toute référence à l'Angleterre, y compris dans l'histoire des mathématiques. Cette volonté de réécrire l'Histoire n'est pas sans nous rappeler les thèses révisionnistes ou de purification ethnique actuelle ; les mathématiques sont bien présentes dans l'Histoire et la Culture.

SUR LES PARABOLES INSCRITES À UN TRIANGLE

Jean-Claude SIDLER

A la suite d'un article de Jacques Dautrevaux "sur les coniques à centre tangentes aux trois côtés d'un triangle", Jean-Claude Sidler nous proposa d'écrire une autre solution utilisant la géométrie projective. Entre-temps, nous reçûmes de J. Dautrevaux d'autres pages sur les paraboles inscrites à un triangle (qui venaient assez naturellement après l'étude précédente), nous donnant les propriétés que vous allez trouver dans les pages qui suivent, démontrées grâce aux équations tangentielles d'une part, à la géométrie élémentaire d'autre part. Nous avons trouvé là l'occasion de publier une résolution en géométrie projective, mais nous tenons à votre disposition l'écrit de J. Dautrevaux ⁽¹⁾.

"L'Ouvert", par la plume de Paul Girault, m'a fait l'honneur d'un bel article pour la sortie de mon livre "Géométrie projective". En guise de remerciement, j'aimerais présenter ici les théorèmes de Brianchon et de Chasles-Steiner, et les appliquer à un problème proposé par J. Dautrevaux dans le prolongement de son dernier article, à savoir l'étude de quelques propriétés des paraboles tangentes aux côtés d'un triangle.

DES THEOREMES QUI SERVIRONT ENSUITE

1• Le théorème de Brianchon

Ce théorème est le dual du célèbre théorème de Pascal (voir un article de Jean Martinet dans le n° 54 de l'Ouvert) ; on peut l'énoncer ainsi :

Six droites ordonnées, formant un hexagone, sont les tangentes à une même conique si et seulement si les diagonales de cet hexagone sont concourantes.

Les figures 1 et 2 illustrent deux situations générales et les figures 3 et 4 illustrent deux situations particulières où des droites consécutives de l'hexagone sont confondues ; dans ce cas leur intersection est le point de contact

⁽¹⁾ Vous pouvez retirer une photocopie de ces pages à la Bibliothèque de l'I.R.E.M. de Strasbourg ou nous faire parvenir une enveloppe libellée à vos nom et adresse et affranchie au tarif en vigueur (4,40 F).

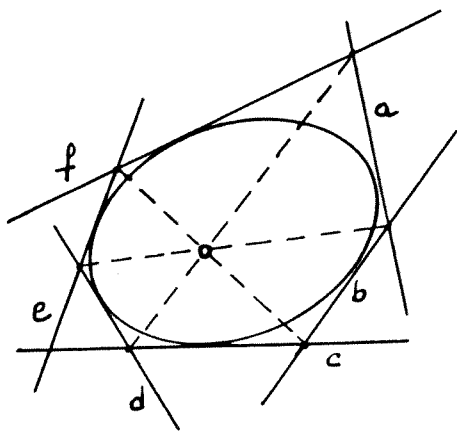


Figure 1

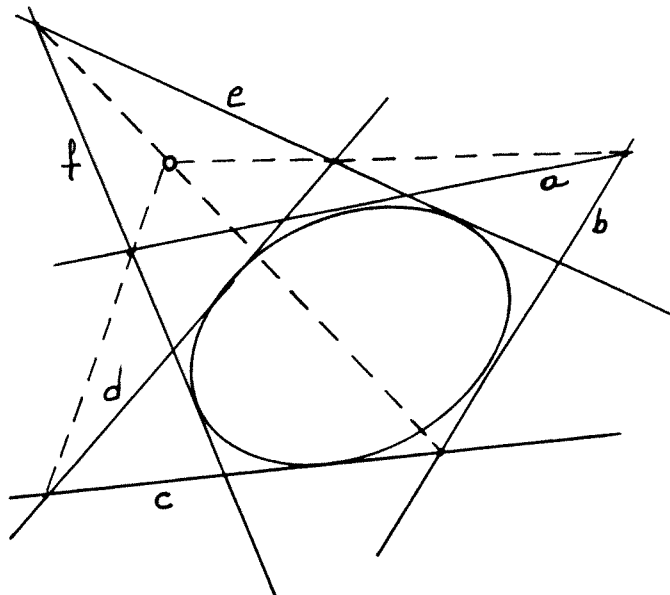


Figure 2

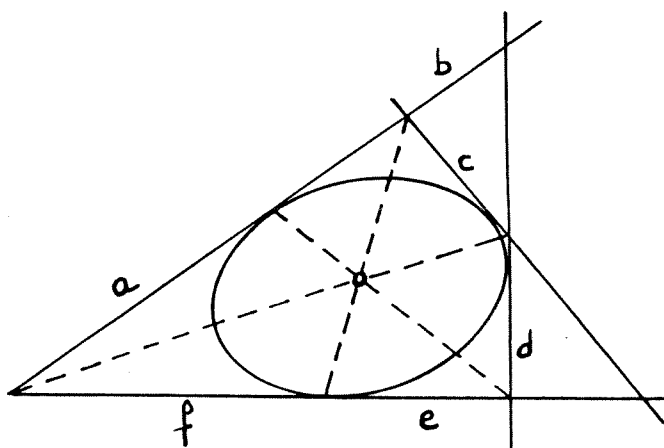


Figure 3

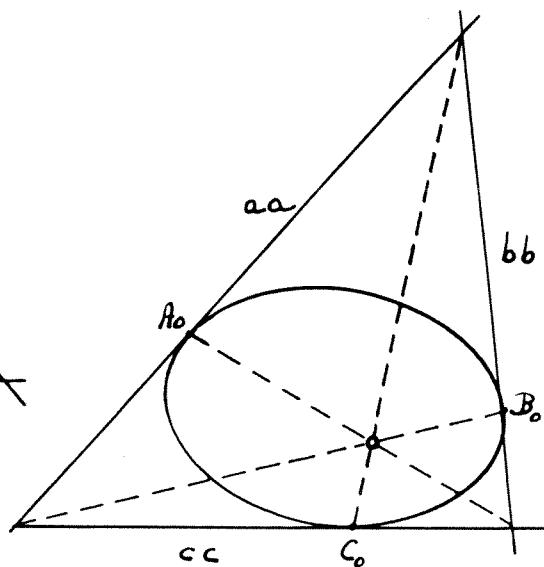


Figure 4

2 • Le théorème de Chasles-Steiner

Dans une homographie (bijection qui conserve le birapport) entre deux droites projectives, toutes les droites joignant un point à son image sont tangentes à une même conique.

Si l'homographie conserve l'intersection des deux droites, les droites joignant un point à son image passent par un point fixe (fig. 6).

La figure 5 ci-après précise les points de contact : on a $(T, K, M, \phi(M)) = -1$

SUR LES PARABOLES INSCRITES A UN TRIANGLE

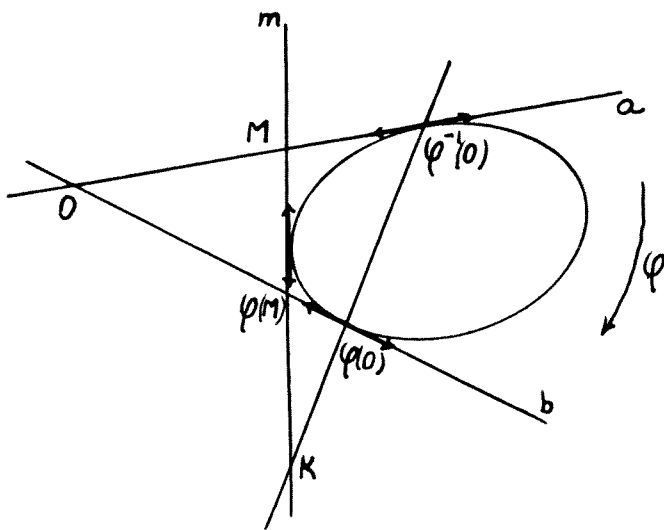


Figure 5

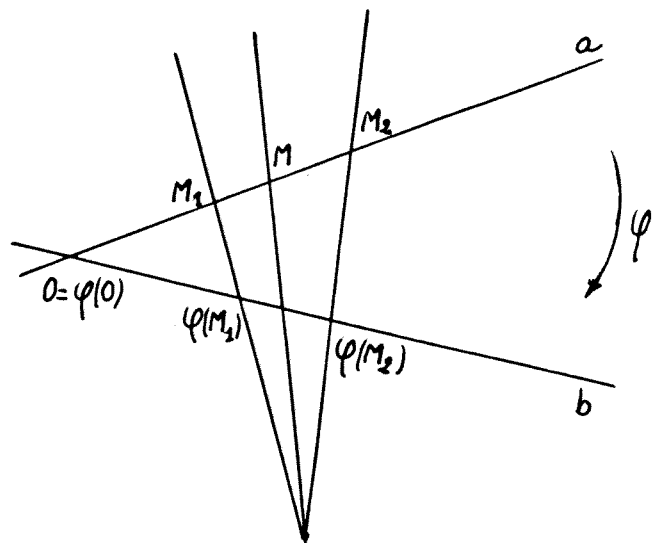


Figure 6

Dans le plan projectif, la figure duale d'une droite est un faisceau de droites, c'est à dire l'ensemble des droites passant par un point P, que l'on note P*.

3 • Théorème dual

Dans une homographie entre deux faisceaux de droites, le point d'intersection d'une droite du premier faisceau et de son image décrit une conique.

Si la droite AB est transformée en elle-même, la conique est dégénérée (fig. 8)

La figure 7 ci-dessous précise les tangentes : on a $(t, MS, MA, MB) = -1$

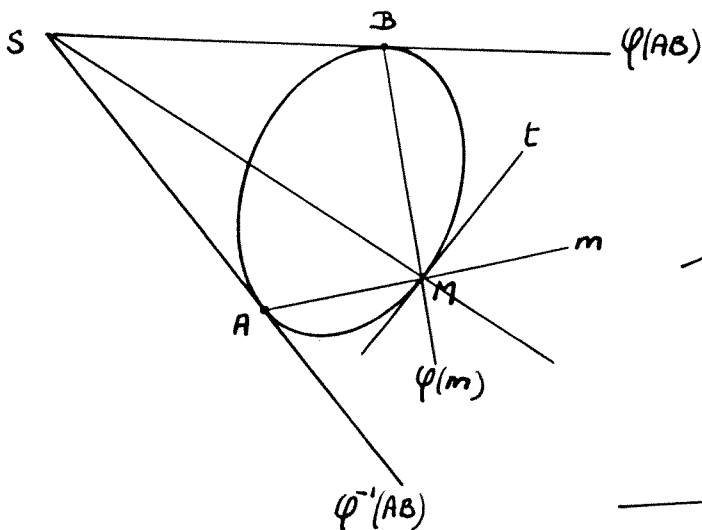


Figure 7

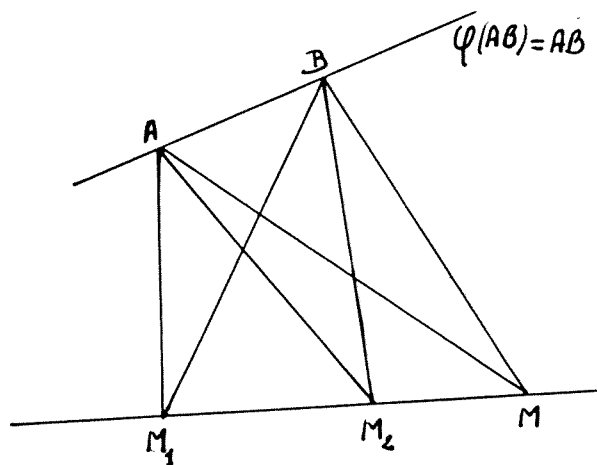


Figure 8

PARABOLES TANGENTES AUX COTES D'UN TRIANGLE

Pour bien maîtriser la situation, nous nous placerons dans une carte affine du plan projectif où la parabole se définit comme une conique tangente à la droite de l'infini.

Soit Π une parabole inscrite dans le triangle ABC ; on notera A_o, B_o, C_o , les points de contact de la parabole avec les côtés BC, CA, AB et $A^\infty, B^\infty, C^\infty$, les points à l'infini de ces mêmes côtés.

Nous allons établir les résultats suivants :

1. Les droites AA_o, BB_o, CC_o sont concourantes en un point Ω .
2. Les droites A_oB_o, B_oC_o, C_oA_o , passent chacune par un point fixe qui est sommet du triangle $A''B''C''$ obtenu en menant par les sommets du triangle ABC des parallèles aux côtés opposés.
3. Les points $L = B_oC_o \cap BC, M = C_oA_o \cap AC, N = A_oB_o \cap AB$ et G , le centre de gravité du triangle ABC , sont alignés sur une droite qui est la polaire de Ω par rapport à Π .
4. Les points $L' = B_oC_o \cap B''C'', M' = C_oA_o \cap C''A'', N' = A_oB_o \cap A''B''$ et Ω sont alignés sur la polaire de G par rapport à la parabole Π .
5. Le lieu de Ω est l'ellipse \mathcal{E} de centre G passant par A, B, C ; la tangente à \mathcal{E} en Ω est la polaire de G par rapport à Π .

Démonstrations

1. On applique le théorème de Brianchon à l'hexagone AB, AB, BC, BC, CA, CA ; c'est le cas de figure n° 4.
2. Le théorème de Brianchon appliqué à l'hexagone $BC, BA, BA, B^\infty C^\infty, CA, CA$ (cas de figure n° 3 où $B^\infty C^\infty$ est la droite de l'infini) montre que la droite B_oC_o , la parallèle à AC passant par B (droite BB^∞) et la parallèle à BA passant par C (droite CC^∞) sont concourantes en A'' (voir figure 9).

On démontre de même que A_oC_o passe par B'' et que A_oB_o passe par C'' (2).

(2) Remarques :

1. Les paraboles inscrites dans un triangle forment un faisceau tangentiel de coniques ; si l'on sait que le triangle $A''B''C''$ est le triangle diagonal de ce faisceau et qu'il est autopolaire pour toutes les coniques de ce faisceau, il est évident que des points tels que A'', B_o, C_o sont alignés puisque leurs polaires sont respectivement les droites $B''C'', AB$, et AC , concourantes en A .
2. On démontre, toujours à l'aide du théorème de Brianchon, que les droites A_oA'', B_oB'' et C_oC'' sont parallèles à l'axe de la parabole.

SUR LES PARABOLES INSCRITES A UN TRIANGLE

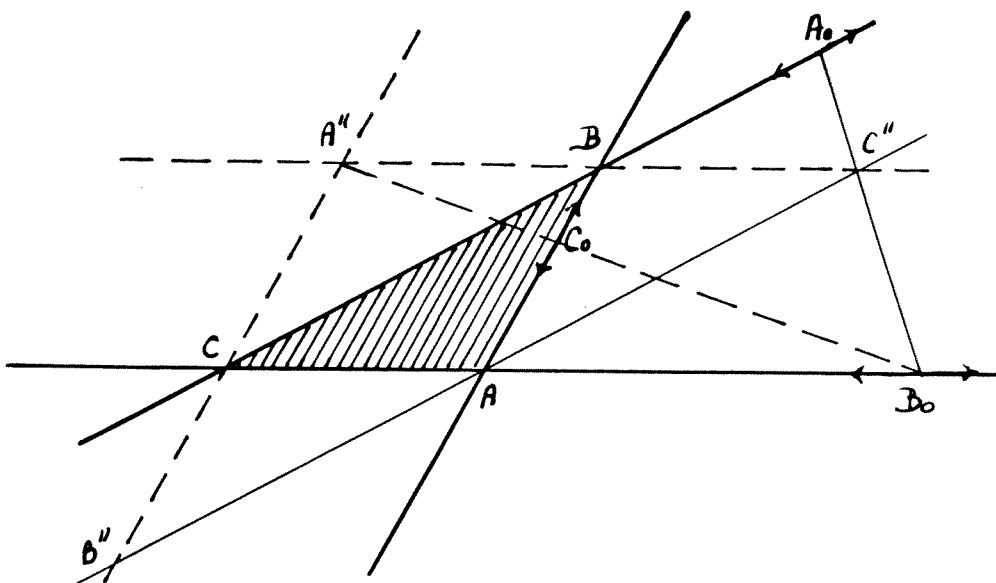


Figure 9

3. Les droites AA_0 , BB_0 , CC_0 étant concourantes, les points L , M , N sont alignés d'après le théorème de Desargues. On peut aussi invoquer la polarité, les points L , M , N , étant les pôles des droites AA_0 , BB_0 , CC_0 .

Montrons alors que G appartient à la droite LM ; on passe de L à M en appliquant le schéma suivant :

$$L \mapsto A_0 \mapsto B_0 \mapsto M$$

où l'on compose l'involution des points fixes C et B , la projection de centre C'' et l'involution des points fixes A et C . On obtient une homographie qui laisse invariant le point C ; d'après le théorème de Chasles-Steiner, les droites LM passent par un point fixe. On détermine ce point en prenant deux positions particulières de L : le point B et le milieu A' de BC ; on obtient ainsi les médianes issues de B et de A , donc le point G .

4. Corollaire : comme la droite LM qui contient G est la polaire de Ω , la polaire de G par rapport à toute parabole Π inscrite dans ABC passe par Ω .

Cette polaire de G contient les points L' , M' , N' , qui sont les pôles des droites AA'' , BB'' , CC'' , c'est à dire des médianes du triangle ABC .

5. On a ici une application très simple du théorème de Chasles-Steiner. En effet, la correspondance $AA_0 \rightarrow BB_0$ est homographique car $A_0 \rightarrow B_0$, qui est une projection, l'est. On vérifie facilement que la conique passe par A, B, C , est tangente en ces points aux côtés du triangle A'', B'', C'' et que G est son centre. (voir figure 10).

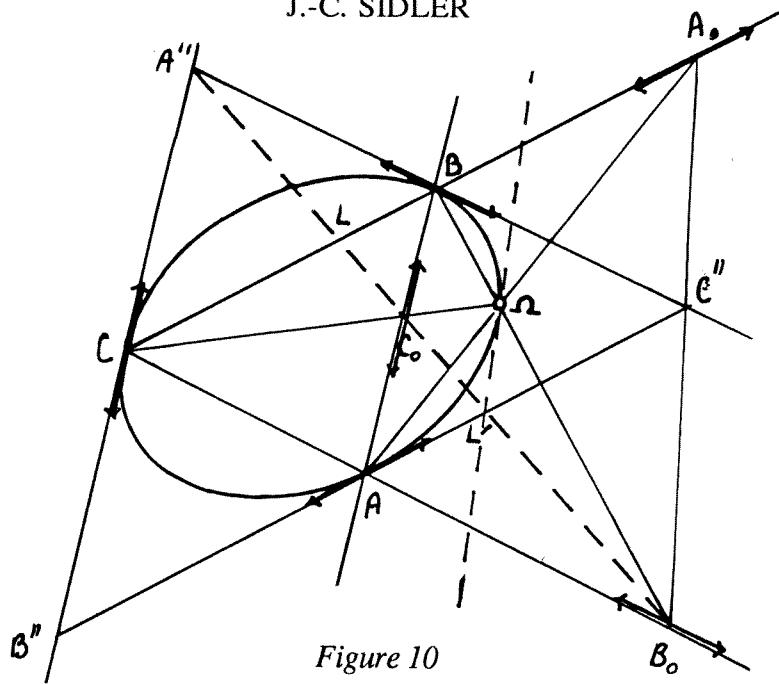


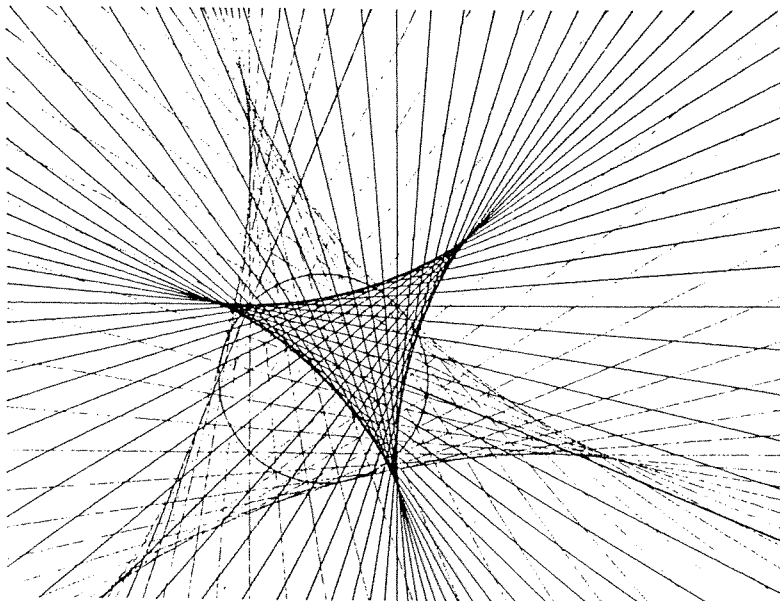
Figure 10

Montrons que $\Omega L'$ est la tangente en Ω à \mathcal{E} et pour cela montrons que $\Omega L'$ est conjuguée de $\Omega C''$ par rapport aux droites ΩA et ΩB , en composant la projection de Ω^* sur $B''C''$ et la projection de $B''C''$ sur BC à partir de B_0 et en tenant compte des alignements vus précédemment, on a l'égalité des bi-rapports suivants :

$$(\Omega L', \Omega C'', \Omega A, \Omega B) = (L, A_0, C, B) = -1$$

ce qui prouve la proposition.

Pour terminer, je voudrais donner, sans le démontrer, un remarquable résultat concernant les paraboles inscrites dans un triangle : leurs tangentes au sommet sont droites de Simson du triangle ABC et elles enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements ; merveilleuse apparition de la symétrie dans une situation qui n'en comportait pas ! Les axes des mêmes paraboles enveloppent une autre hypocycloïde à trois rebroussements.



Enveloppe des axes des paraboles inscrites dans un triangle

EVPHKA! num = $\Delta + \Delta + \Delta$

Marc Guinot

(première partie)

C'est par cette exclamation passablement énigmatique que Gauss exprima dans son Journal, à la date du 10 juillet 1796, sa satisfaction d'être parvenu à démontrer rigoureusement que, comme l'avait prétendu Fermat quelques 158 ans plus tôt, tout entier naturel est une somme de trois nombres triangulaires, c'est à dire de trois nombres de la forme $\frac{k(k+1)}{2}$. A cette date, Gauss n'avait que dix-neuf ans.

En fait, le problème posé par Fermat était plus général : dans sa correspondance, il affirmait en effet que tout entier est non seulement une somme de trois "triangles", mais aussi une somme de quatre carrés, une somme de cinq nombres "pentagonaux", et ainsi de suite.

On sait que le problème relatif aux quatre carrés fut résolu par Lagrange en 1772, mais qu'il fut puissamment aidé en cela par Euler qui avait découvert, dès 1748, l'identité qui porte son nom et selon laquelle le produit de deux sommes de quatre carrés est une somme du même genre. Pour plus de détails sur toute cette histoire, on pourra consulter le livre d'André Weil (cité [WEI] dans toute la suite), *Number Theory, An approach through history*, Birkhäuser, 1984 et dont on ne verra sans doute jamais de traduction française. Il est à noter, à ce propos, que les Allemands, se jugeant sans doute trop nuls en anglais, ont traduit le livre de Weil dans leur dialecte. Mais, c'est bien connu, les Français ont le don des langues!

Comme on le verra à la fin de cette étude, l'assertion de Fermat concernant les nombres triangulaires peut être tirée du fait que tout nombre entier naturel de la forme $8n+3$ est une somme de trois carrés. On attribue généralement à Legendre le mérite d'avoir le premier caractérisé les entiers susceptibles de se décomposer en trois carrés, mais dans ses raisonnements Legendre n'hésitait pas à mélanger allègrement les résultats dûment démontrés et ceux qu'il avait obtenus par "induction", c'est à dire pas de simples vérifications numériques et c'est à juste titre, semble-t-il (cf [WEI, p.331, 332]), que Gauss dénonça les prétentions de Legendre à avoir donné une démonstration satisfaisante.

Gauss exposa le résultat de ses travaux dans ses célèbres *Disquisitiones Arithmeticae* (Recherches arithmétiques), publiées en 1801, mais il faut beaucoup de bonne volonté pour comprendre entièrement sa démarche, même en se référant à la traduction française (citée [GAU] dans toute la suite) de son ouvrage, écrit et publié en latin.

Ayant travaillé de longues heures sur ce sujet (sacrifiant au passage mes maigres vacances) et aidé en sous-main par quelques auteurs plus modernes, je suis parvenu à la conviction que tant qu'on se limite aux entiers de la forme $8n+3$ (les seuls dont on a réellement besoin pour les nombres triangulaires), on peut exposer aux lecteurs de *l'Ouvert* la démonstration complète du résultat qui nous intéresse ici. Mais pour cela, il nous faudra :

- A/ répartir les "formes quadratiques binaires" en classes d'équivalence.
- B/ définir et dénombrer les classes "primitives" en "ambiguës".
- C/ apprendre à multiplier les classes entre elles, de façon à avoir un groupe.
- D/ regrouper les classes en "genres" en fonction de leurs "caractères".
- E/ donner un minimum d'information sur les formes quadratiques "ternaires".
- F/ appliquer tous ces résultats aux sommes de trois carrés.

Les points A/, B/ et C/ seront traités dans le présent numéro, les points D/ E/ et F/ dans le suivant. En principe, aucune connaissance préalable d'arithmétique supérieure n'est requise pour aborder tous ces points, à l'exception des propriétés "bien connues" des résidus quadratiques sur lesquelles (que le lecteur se rassure!) nous donnerons cependant toutes les précisions utiles. Certains calculs et certaines parties élémentaires du raisonnement ne seront qu'esquissés. Le lecteur en détresse peut toujours nous écrire...

Evidemment, au lieu de se farcir un pareil programme, on peut préférer écouter, en se pâmant, l'ineffable voix de Léopold Simoneau¹. Mais quand on a choisi de lire *l'Ouvert*, on doit s'attendre à tomber sur des mathématiques, non? Ou alors, on s'abonne à *Diapason* ou à *l'Avant Scène Opéra*.

A/ Formes et classes de formes.

1. La théorie des "formes quadratiques binaires" (qui va occuper l'essentiel de cette étude) n'est pas sortie brutalement du cerveau du jeune Gauss dans les dernières années du XVIII^e siècle. Au siècle précédent, les recherches de Fermat sur les sommes de deux carrés, puis sur les nombres de la forme x^2+2y^2 ou x^2+3y^2 , avaient conduit celui-ci à de substantiels résultats qui furent démontrés, non sans mal, par Euler entre 1752 et 1772 (cf [WEI], p.179 et p.212). Ce dernier avait commencé à étendre ses réflexions à des cas plus généraux, comme les nombres de la forme $\lambda x^2+\mu y^2$ ou même, une fois au moins, aux nombres de la forme x^2+xy+y^2 . Mais c'est Lagrange qui a le premier entrepris d'étudier le cas général des expressions de la forme $ax^2+bxy+cy^2+2$, l'idée principale de ses *Recherches arithmétiques* (publiées en 1775) étant qu'on ne change pas les nombres qui sont de la forme $ax^2+bxy+cy^2$ quand on fait un changement de variables du type $x=\alpha x'+\beta y'$, $y=\gamma x'+\delta y'$ avec des entiers α , β , γ , δ soumis à la condition $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$, condition qui garantit la "réversibilité" du changement de variables puisqu'on a alors

¹ Je profite de l'occasion pour dire que le grand spécialiste de ce grand ténor canadien habite Strasbourg. Pour tous renseignements complémentaires, écrire à l'IREM de Strasbourg qui transmettra.

$x'=\pm(\delta x-\beta y)$ et $y'=\pm(-\gamma x+\alpha y)$. C'est cette idée, légèrement modifiée par Gauss, que nous allons exposer ici.

2. Il y a plusieurs façons de définir, formellement parlant, une *forme quadratique binaire* (à coefficients entiers). Pour nous, ce sera simplement une application f de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z} pour laquelle il existe des entiers a, b, c tels que $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ quels que soient $x,y\in\mathbb{Z}$. Les entiers a, b et c sont évidemment entièrement déterminés par f puisqu'on a les relations $a=f(1,0)$, $c=f(0,1)$, $b=f(1,1)-a-c$. On peut donc parler sans ambiguïtés des *coefficients* d'une forme f et même distinguer le *coefficient initial* a , le *coefficient final* c et le *coefficient médian* b .

Se donner une forme quadratique binaire f , à coefficients entiers, revient donc à se donner la suite (a,b,c) de ses coefficients, ce qui nous permettra d'écrire, sans trop de scrupules, à la manière de Gauss d'ailleurs $f=(a,b,c)$.

Comme nous n'avons pas à envisager, sauf exception, d'autres formes que celles que nous venons de définir, nous nous permettrons d'omettre, assez souvent l'un ou l'autre des qualificatifs de "quadratique" ou de "binaire" qui font pourtant tout le charme des formes en question. L'exception est celui des formes ternaires qu'on verra dans le paragraphe D ; il sera bien temps de modifier notre langage à ce moment là.

3. Il résulte de ce qui précède qu'il ne faut pas confondre *a priori* la forme (a,b,c) et la forme (c,b,a) . nous verrons plus loin l'importance de cette distinction et nous dirons dès maintenant que ces formes sont *inverses* l'une de l'autre (Gauss, de façon moins suggestive préférerait parler de formes "associées"). Il ne faut pas confondre non plus, bien sûr, (a,b,c) et $(-a,-b,-c)$. Nous dirons que ce sont des formes *opposées* (alors que Gauss préférerait user de ce qualificatif pour les formes (a,b,c) et ... $(a,-b,c)$).

Puisque nous en sommes à critiquer Gauss, signalons que celui-ci voulait limiter l'étude des formes binaires à celles dont le coefficient médian b est pair. Pour mieux embrouiller ses lecteurs, il va jusqu'à noter (a,b,c) ce qu'on note ici $(a,2b,c)$! Curieusement, pour démontrer le théorème de Gauss sur les nombres triangulaires, nous n'aurons réellement besoin que des formes (a,b,c) où b est impair. Nous qualifierons ces dernières de *formes impaires* et nous parlerons de *formes paires* pour signifier que le coefficient médian b est un entier pair. Pour nous rattraper, il nous arrivera de parler, dans ce dernier cas, de *formes de Gauss*...

Parmi les formes paires, il y a $(1,0,1)$ (qui "représente" les sommes de deux carrés) et la *forme nulle* $(0,0,0)$ qui a surtout le mérite (ou l'inconvénient) d'exister.

On dira enfin qu'une forme quadratique binaire est *primitive* si ses coefficients sont premiers dans leur ensemble. En un sens facile à comprendre, toute forme non nulle "dérive" d'une forme primitive. De façon plus précise, on obtient cette dernière en mettant en facteur le PGCD des coefficients (a,b,c) de la forme initiale, qu'on appellera en abrégé le *PGCD* de la forme.

4. Le problème principal de la théorie est de savoir, pour une forme $f=(a,b,c)$ donnée, quels sont les entiers qui sont "de cette forme", c'est à dire qui peuvent s'écrire $ax^2+bxy+cy^2$ avec des entiers x et y , puis, cela étant, de déterminer de combien de façons une telle écriture est possible. Dans le cas des sommes de deux carrés (c'est à dire dans le

cas de la forme $(1,0,1)$), on peut dire que le problème a été résolu par Fermat, en tenant compte du fait que les premières démonstrations connues sont dues à Euler (cf [WEI], p.178). Si j'ai bien compris ce que j'ai lu, ici et là, (cf par exemple [DIE], p.183) le problème général, c'est à dire le cas d'une forme (a,b,c) quelconque, n'est pas tout à fait réglé. Cela ne doit pas nous empêcher de fixer le vocabulaire avec toute la précision désirable. Nous dirons donc qu'un entier n est *représenté* par une forme $f=(a,b,c)$ donnée (ou que f *représente* n) si n est de la forme $ax^2+bx+cy^2$ (on notera le jeu de mot!) c'est à dire s'il existe deux entiers x et y tels que $n=f(x,y)$. Tout couple (x,y) ayant cette propriété sera appelé une *représentation* de n par f .

Le nombre 0 est naturellement représenté par n'importe quelle forme ; les égalités $x=0$, $y=0$ en fournissent une représentation particulière, dite *triviale*. Certains auteurs excluent, dans le cas de 0, cette représentation là. Comme nous n'aurons pas besoin de faire cette restriction ici, on peut dire qu'en général les entiers représentés par f ne sont rien d'autres que les valeurs de f , f étant conçue, comme on l'a dit, comme une fonction sur \mathbb{Z}^2 , à valeurs dans \mathbb{Z} .

Si la forme est nulle, seul le nombre 0 est représenté. Si f n'est pas nulle, au contraire, il existe une infinité d'entiers représentés par f , à savoir les nombres ax^2 si $a \neq 0$, les nombres cy^2 si $c \neq 0$ et les nombres bxy si a et c sont nuls simultanément.

Il peut être commode de dire enfin qu'une représentation (x,y) d'un entier n par une forme f est *propre* si x et y sont premiers entre eux. Un entier n qui admet au moins une représentation propre sera dit *proprement représenté* par f . Si (x,y) est une représentation quelconque de n par une forme f et si d est le PGCD de x et de y , alors d^2 divise n et le couple $(\frac{x}{d}, \frac{y}{d})$ est une représentation propre de $\frac{n}{d^2}$ par f . Cela résulte immédiatement des définitions.

5. Les questions précédentes sont liées à la valeur de la quantité $\Delta=b^2-4ac$ que l'on peut associer à une forme $f=(a,b,c)$. On dira évidemment que c'est le *discriminant* de la forme quadratique f . A cause des relations $4af(x,y)=(2ax+by)^2-\Delta y^2$ et $4cf(x,y)=(2cy+bx)^2-\Delta x^2$, on a trois grands cas à distinguer.

Si $\Delta=0$, la forme peut être transformée, au moyen d'une multiplication par un entier non nul, en le carré d'une "forme linéaire" $mx+ny$.

Si $\Delta < 0$ (cas où on dira que la forme est *définie*), il est impossible que les coefficients extrêmes a et c soient nuls et ils sont nécessairement de même signe. On voit en outre aussitôt (à cause des relations ci-dessus) que ce signe commun est celui de tous les nombres $f(x,y)$, le cas où $f(x,y)=0$ ne se produisant que si $x=y=0$. Il y a donc deux catégories de formes définies : les formes définies *positives* qui, en dehors de 0, ne représentent que des nombres >0 et les formes définies *négatives* qui ont la propriété contraire.

Enfin si $\Delta > 0$ (cas où l'on dit que la forme est *indéfinie*), la forme représente une infinité d'entiers >0 et une infinité d'entiers <0 . Comme $f(ux,uy)=u^2f(x,y)$, il suffit de démontrer que, dans ce cas, f représente au moins un entier >0 et au moins un entier <0 . Ce résultat est évident si $a=c=0$ car alors $f(x,y)=bxy$ avec $b \neq 0$. Si $a \neq 0$, on a $4af(x,y)=(2ax+by)^2-$

$\Delta y^2=4a^2>0$ si $x=1$ et $y=0$ et $4af(x,y)=(2ax+by)^2-\Delta y^2=-4a^2\Delta<0$ si $x=-b$ et $y=2a$. On raisonne de même si $c\neq 0$.

Notons pour finir que les formes paires (respectivement impaires) dont nous avons parlé dans le n°3 ne sont rien d'autres que les formes de discriminant pair (respectivement impair) : la terminologie est donc on ne peut plus judicieuse!

6. Comme nous l'avons dit plus haut, c'est Lagrange qui a eu l'idée d'introduire les formes quadratiques les plus générales, sans doute en faisant la constatation que si on part d'une forme quadratique $f(x,y)$ même aussi simple que x^2+y^2 ou x^2+2y^2 , le remplacement de x et de y par des expressions du type $\alpha x+\beta y$ et $\gamma x+\delta y$ conduit à une forme $g(x,y)$ a priori arbitraire. Si on part en fait d'une forme $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ quelconque, un calcul direct (laissé au lecteur) montre que les coefficients u, v, w de $g(x,y)=f(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y)$ sont donnés par les relations

$$(1) \quad \begin{cases} u=a\alpha^2+b\alpha\gamma+c\gamma^2=f(\alpha,\gamma) \\ v=2a\alpha\beta+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+2c\gamma\delta \\ w=a\beta^2+b\beta\delta+c\delta^2=f(\beta,\delta) \end{cases}$$

Si on appelle τ l'application de \mathbb{Z}^2 dans lui-même : $(x,y)\rightarrow(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y)$ (où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont supposés entiers), on voit que le "changement de variables" que l'on vient d'effectuer revient à composer $\tau : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ et $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, donc à poser $g=f\circ\tau$. On exprimera cette dernière relation en disant que τ transforme f en g ou que τ fait passer de la forme f à la forme g . Si $f\circ\tau=f$, on dira aussi que f est invariante par τ .

7. Il est facile de voir que d'une manière générale, toute application τ de \mathbb{Z}^2 dans lui-même du type $(x,y)\rightarrow(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y)$ (où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers) se prolonge d'une manière et d'une seule en une application $\overline{\tau}$ de \mathbb{R}^2 dans lui-même, qui est linéaire au sens des espaces vectoriels (ici sur \mathbb{R}).

Pour éviter des circonlocutions pénibles, on dira que l'application τ elle-même est linéaire (de \mathbb{Z}^2 dans lui-même) ou que c'est une transformation linéaire de \mathbb{Z}^2 et on attribuera à τ des propriétés qui, en fait, sont des propriétés de $\overline{\tau}$. C'est ainsi que la

matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ de $\overline{\tau}$ et son déterminant $\alpha\delta-\beta\gamma$ seront appelés respectivement la matrice et le déterminant de τ . Avec ces définitions, il est clair que si τ et τ' sont des transformations linéaires de \mathbb{Z}^2 , il en est de même de la transformation composée $\tau'\circ\tau$, la matrice et le déterminant de cette dernière s'obtenant alors, de façon évidente, par multiplication.

Dans la pratique, il nous arrivera souvent d'identifier une transformation linéaire τ de \mathbb{Z}^2 avec sa matrice (au moins lorsqu'il s'agira de définir τ et donc d'écrire (abusivement)

$$\tau = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

8. Il est possible de donner aux relations (1) ci-dessus une forme plus maniable, en termes de matrices, à condition de dédoubler le terme "rectangle" bxy de $f(x,y)$ et de représenter l'expression générale obtenue $ax^2 + \frac{1}{2} bxy + \frac{1}{2} byx + cy^2$ par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ que l'on appellera la *matrice de la forme quadratique* f .

Si on considère un couple (x,y) d'entiers quelconques comme une matrice colonne et la matrice transposée comme une matrice ligne, on vérifie aussitôt que l'on a

$$(2) \quad ax^2+bxy+cy^2=(x \ y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en assimilant à un nombre pur et simple la matrice (à une ligne et à une colonne) du second membre.

Si on applique alors à f une transformation linéaire $\tau=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on doit remplacer la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} \alpha x+\beta y \\ \gamma x+\delta y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et donc la matrice ligne $(x \ y)$ par $(x \ y)\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$.

On en déduit que l'expression $ux^2+vxy+wy^2$ de la forme $f\circ\tau$ est donnée par le produit matriciel

$$(3) \quad (x \ y)\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Comme le produit des matrices carrées placées au centre est symétrique, c'est donc la matrice de la forme $g=f\circ\tau$. Si on appelle alors F et G les matrices respectives des formes f et g , et T la matrice de la transformation τ , on a finalement

$$(4) \quad G=^tTFT$$

où tT désigne la matrice transposée de T . Il revient au même d'écrire les relations (1) sous la forme

$$(5) \quad \begin{cases} u=(\alpha \ \gamma)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \\ \frac{v}{2}=(\alpha \ \gamma)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}=(\beta \ \delta)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \\ w=(\beta \ \delta)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \end{cases}$$

comme on le vérifie immédiatement.

9. Comme Lagrange, nous allons nous intéresser essentiellement, dans la suite, aux transformations linéaires de déterminant ± 1 . Si $\tau=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est une transformation de ce genre, il est facile de vérifier que c'est une bijection, dont la bijection réciproque est une nouvelle transformation linéaire ayant pour matrice $\pm\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$. Comme le produit (c'est à dire la composée) de deux transformations linéaires de déterminant ± 1 est encore une transformation du même genre, on en déduit que les transformations en question forment un groupe que les spécialistes notent $GL_2(\mathbb{Z})$.

Cela étant, on dira que deux formes quadratiques binaires f et g sont *équivalentes au sens de Lagrange* s'il existe une transformation linéaire $\tau \in GL_2(\mathbb{Z})$, donc de déterminant ± 1 , telle que $g=f\circ\tau$. Comme $GL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe, on définit ainsi, entre les formes quadratiques binaires, une relation d'équivalence au sens habituel du terme.

Mais d'un autre côté, on peut, comme le faisait Gauss, se limiter aux transformations linéaires de déterminant $+1$. elles forment aussi un groupe sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Z})$, que l'on note $SL_2(\mathbb{Z})$. Cela permet alors de dire que deux formes quadratiques binaires f et g sont *équivalentes au sens de Gauss* s'il existe une transformation linéaire $\tau \in SL_2(\mathbb{Z})$, donc de déterminant $+1$, telle que $g=f\circ\tau$. Là encore, on obtient une relation d'équivalence au sens usuel du terme.

10. Deux formes équivalentes au sens de Gauss le sont évidemment au sens de Lagrange, mais la définition de Gauss peut paraître d'un raffinement bien inutile car il est facile de voir que bon nombre de notions attachées à une forme f ne changent pas lorsqu'on remplace f par une forme équivalente au sens de Lagrange. Il en est ainsi du discriminant, du PGCD (ce qui montre au passage que toute forme équivalente à une forme primitive est encore primitive), des entiers représentés par la forme et même des entiers admettant une représentation propre par la forme considérée.

Les démonstrations, faciles à déterminer sont laissées au lecteur. Toutefois, en ce qui concerne l'"invariance" du discriminant, on peut préférer à un calcul direct l'utilisation de la relation $G=TFT$ (cf la relation (4) dans le n°8 ci-dessus). Avec des notations évidentes, le déterminant de la matrice G est donc à la fois $uw - \frac{v^2}{4}$ et le produit $(\det^t T)(\det F)(\det T)$.

Comme $\det^t T = \det T = \pm 1$, il ne reste dans ce produit que $\det F = ac - \frac{b^2}{4}$.

En multipliant tout par -4 , on obtient l'égalité cherchée $v^2 - 4uw = b^2 - 4ac$.

On remarquera que le raisonnement précédent permet de voir que lorsque f est transformée en g par une transformation linéaire τ de déterminant d alors le discriminant de g s'obtient en multipliant celui de f par le carré d^2 .

11. toutes les propriétés précédentes sont valables naturellement pour les formes équivalentes au sens de Gauss. Cela n'a pas empêché Gauss de persister dans son idée de limiter l'équivalence des formes comme on l'a dit dans le n°9. Pour aggraver son cas, il n'a pas craint d'indisposer Lagrange en qualifiant d'impropre l'équivalence de son prédécesseur. De façon précise, on dira (comme Gauss) que deux formes sont *proprement équivalentes*, si on passe de l'une à l'autre par une transformation linéaire de déterminant $+1$ et que ces deux formes sont *improprement équivalentes* si on passe de l'une à l'autre par une transformation de déterminant -1 .

Pour voir la portée de cette distinction, considérons les formes (a,b,c) et (c,b,a) (formes inverses l'une de l'autre : n°3). Comme la seconde s'obtient à partir de la première en échangeant les variables, c'est à dire en appliquant la transformation $\tau : (x,y) \rightarrow (y,x)$, et

que l'on a $\det \tau = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, ces formes sont improprement équivalentes. Mais comme on le verra un peu plus bas, il y a des cas où elles ne sont pas proprement équivalentes. En fait, dire que f est proprement équivalente à sa forme inverse revient à dire que f est improprement équivalente à elle-même. Nous traduirons cette propriété particulière (qui n'est pas toujours vraie) en disant que f est une *forme ambiguë*. S'il en est ainsi, toute forme équivalente à f (proprement ou non) est aussi ambiguë et les deux formes sont équivalentes entre elles tant proprement qu'improprement.

Nous reviendrons dans la prochaine section sur ce vocabulaire qui n'est ni celui de Gauss, ni celui de ses traducteurs (Gauss, rappelons-le, écrivait en latin).

12. Comme toute relation d'équivalence, l'équivalence au sens de Gauss détermine dans l'ensemble des formes quadratiques binaires (à coefficients entiers), des classes d'équivalence qu'on appellera les *classes de Gauss*. Mais il en est de même de l'équivalence au sens de Lagrange, ce qui permet de définir les *classes de Lagrange*.

Toute classe de Gauss est évidemment contenue dans une classe de Lagrange, nécessairement unique, mais l'inclusion réciproque n'a pas toujours lieu. Il est en fait facile de voir que si f est une forme ambiguë (cf n°11), alors la classe de Lagrange de f coïncide avec la classe de Gauss de f , alors que si f n'est pas ambiguë, la classe de Lagrange de f est la réunion de deux classes de Gauss distinctes ; celle de f et celle de la forme inverse.

En fait, l'équivalence de Gauss a sur l'équivalence de Lagrange de nombreux avantages. elle est même indispensable pour définir ce qu'on appellera, dans la section C, la "composition des classes de formes". C'est pourquoi, dans la suite, nous donnerons la préférence à l'équivalence au sens de Gauss. Quand nous parlerons désormais, de formes équivalentes, il sera entendu, sauf précision contraire, qu'il s'agit de formes équivalentes au sens de Gauss et quand il sera question d'une classe de formes, c'est d'une classe de Gauss dont il s'agira. Enfin, pour abrégé, nous écrirons $f \sim g$ l'équivalence de deux formes.

13. Une méthode assez générale pour trouver des formes équivalentes à une forme donnée est d'utiliser la transformation $\tau = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (dont le déterminant est +1) avec un entier n quelconque.

Si $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, $f(\tau(x,y)) = a(x+ny)^2 + b(x+ny)y + cy^2 = ax^2 + (2an+b)xy + (an^2 + bn + c)y^2$.
En d'autres termes, si $f = (a,b,c)$, $f \circ \tau = (a, 2an+b, an^2 + bn + c)$.

Les formes ainsi obtenues, lorsque n parcourt \mathbb{Z} , seront dites *parallèles* à f (cf [VEN], p.125). elles sont toutes équivalentes à f . On notera que le coefficient médian de la nouvelle forme est congru au coefficient médian b de l'ancienne modulo a . Lorsque n parcourt \mathbb{Z} , on obtient même, de cette manière, tous les entiers possibles congrus à b modulo $2a$. Lorsque a n'est pas nul, on peut donc s'arranger pour que l'entier b' obtenu soit le "reste minimal" de b modulo $2a$, autrement dit pour $-|a| \leq b' \leq |a|$.

14. Une autre façon d'avoir des formes équivalentes est d'utiliser les transformations $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$

(dont le déterminant est encore +1) avec un entier n quelconque.

Cette fois, on vérifie que si $f=(a,b,c)$, $f \circ \tau=(c,-b+2cn,a-bn+cn^2)$.

Les formes obtenues lorsque n parcourt \mathbb{Z} sont dites *contiguës* (cf [GAU], p.125) ou *adjacentes* (cf [BUE], p.23) à f. elles sont toutes équivalentes à f.

On notera en particulier, en prenant $n=0$, que $(a,b,c) \sim (c,-b,a)$.

Dans le cas général, lorsque n parcourt \mathbb{Z} , on obtient, pour le coefficient médian b' de la nouvelle forme, tous les entiers congrus à -b modulo 2c.

Lorsque c n'est pas nul, on peut donc s'arranger pour que b' soit le reste minimal de -b modulo 2c, autrement dit pour que $-|c| \leq b' \leq |c|$.

D'une manière générale, lorsque $f=(a,b,c)$ et que $c \neq 0$, il est facile de vérifier si une forme g donnée est adjacente à f : pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que g soit du type (c,d,e) avec $d^2-4ec=b^2-4ac$ et $b+d \equiv 0 \pmod{2c}$.

Grâce à cette méthode, on vérifie aussitôt que

$$(-1,6,-3) \sim (-3,0,2) \sim (2,8,5) \sim (5,12,6) \sim (6,12,5)$$

15. On aura encore une idée de la diversité des formes équivalentes à une forme f donnée en prenant connaissance du résultat suivant : pour qu'un entier n soit proprement représenté par f il faut et il suffit qu'il existe une forme g équivalente à f dont le coefficient initial soit n.

Supposons en effet qu'il existe deux entiers x et y premiers entre eux tels que $n=f(x,y)$.

D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $ux-vy=1$. si on

applique à f la transformation $\begin{pmatrix} x & v \\ y & u \end{pmatrix}$ on obtient une forme g équivalente à f (au sens de Gauss!) dont le premier coefficient est f(x,y) (cf n°6), c'est à dire n.

Réciproquement, si n est le coefficient initial d'une forme g équivalente à f, n est évidemment proprement représenté par g, donc aussi par f comme on l'a vu ci-dessus dans le n°10.

16. De nombreuses propriétés s'appliquant aux formes s'appliquent en fait aux classes. C'est ainsi qu'on peut parler des entiers représentés par une classe, du discriminant d'une classe, d'une classe primitive ou d'une classe ambiguë. On ne se privera pas d'user de ce vocabulaire commode.

En fait, nous nous intéresserons spécialement aux classes de formes (éventuellement primitives ou ambiguës) de discriminant donné.

Commençons par observer que si Δ est un entier arbitraire, ce n'est pas nécessairement le discriminant b^2-4ac d'une forme (donc d'une classe). Comme on a $b^2-4ac \equiv 0 \pmod{4}$ si b est pair, et $b^2-4ac \equiv 1 \pmod{4}$ si b est impair, un entier Δ qui est congru à 2 ou à 3 modulo 4 ne peut pas être un discriminant.

Par contre, si Δ est divisible par 4 (respectivement si $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$), la forme $\left(1, 0, -\frac{\Delta}{4}\right)$ (respectivement la forme $\left(1, 1, \frac{1-\Delta}{4}\right)$) est une forme de discriminant Δ . Cette forme particulière s'appelle la *forme principale* (de discriminant Δ) et sa classe la *classe principale* (de discriminant Δ). Forme et classe principales sont évidemment primitives.

17. Mais le principal résultat qui nous reste à voir est que si Δ est un entier non nul, il n'existe qu'un nombre fini de classes de formes de discriminant Δ . Cet important théorème, démontré en fait par Lagrange, ne s'étend pas aux classes de formes de discriminant 0 car il est facile de voir que si $a \neq a'$, les formes $(a, 0, 0)$ et $(a', 0, 0)$ ne représentent pas les mêmes nombres ; elles ne sont donc pas équivalentes. Pour établir le théorème de Lagrange, on distingue d'ordinaire deux cas selon que Δ est ou non un carré parfait.

18. Si Δ n'est pas un carré parfait, on commence par démontrer que toute forme $f=(a,b,c)$ de discriminant Δ est équivalente à une forme $f'=(a',b',c')$ pour laquelle on a $|b'| \leq |a'| \leq |c'|$. L'hypothèse que Δ n'est pas un carré implique en effet que $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Cette dernière permet de considérer une forme adjacente (a',b',c') (avec donc $a'=c$) telle que $|b'| \leq |c'| = |a'|$ (cf n°14). Si $|a'| \leq |c'|$, on obtient la forme f cherchée. Si cette inégalité est fautive, on a $|a'| > |c'|$, c'est à dire $|c'| > |c'|$; mais comme c est différent de 0 (sinon $\Delta=b^2-4a'c'$ serait un carré), on peut affirmer, comme dans le cas précédent, qu'il existe une forme (a'',b'',c'') , adjacente à (a',b',c') (avec donc, en particulier, $a''=c'$) telle que $|b''| \leq |c''| = |a''|$. Si $|a''| \leq |c''|$, on obtient la forme cherchée (du moins sous la forme $f''=(a'',b'',c'')$). Sinon, on a $|a''| > |c''|$, c'est à dire $|c''| > |c''|$, avec $c'' \neq 0$ et on recommence le processus précédent avec (a'',b'',c'') . Tant qu'on n'obtient pas une forme satisfaisant aux inégalités voulues, on continue.

Comme on a successivement $|c| > |c'| > |c''| > \dots$, le processus ne peut se poursuivre indéfiniment. D'où inmanquablement, au bout d'un nombre fini d'étapes, la forme cherchée.

On reconnaît là un exemple typique du raisonnement *par descente* inventé par Fermat. Cela étant, le théorème complet se déduira du fait que les formes (a,b,c) obtenues à l'issue du processus précédent sont nécessairement en nombre fini.

En effet, si on a $|b| \leq |a| \leq |c|$, on a $|\Delta| = |4ac - b^2| \geq |4ac| - b^2 \geq 4a^2 - a^2 = 3a^2$ d'où la relation $a^2 \leq \frac{|\Delta|}{3}$

ou $|a| \leq \sqrt{\frac{|\Delta|}{3}}$ qui montre déjà qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de a possibles.

Comme $|b| \leq |a| \leq \sqrt{\frac{|\Delta|}{3}}$, il en est de même des valeurs de b.

Enfin, une fois a et b choisis, la relation $\Delta = b^2 - 4ac$ montre qu'il n'y a plus qu'une valeur possible pour c égale à $\frac{b^2 - \Delta}{4a}$ (où, rappelons-le $a \neq 0$). CQFD.

19. Le cas où Δ est un carré parfait non nul (qu'on peut écrire m^2 où $m > 0$) se traite différemment. On commence par démontrer que pour une forme $f=(a,b,c)$ de discriminant Δ , il existe des entiers u et v, premiers entre eux, tels que $au^2 + buv + cv^2 = 0$.

En effet, si $a \neq 0$, le polynôme $at^2 + bt + c$ a deux racines rationnelles $\frac{-b \pm m}{2a}$. Si on écrit l'une d'elles sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{u}{v}$, on a alors le résultat cherché.

Si $c \neq 0$, on raisonne de même, mais avec le polynôme $ct^2 + bt + a$.

Enfin si $a=c=0$, on a la relation cherchée $au^2 + buv + cv^2 = 0$ avec $u=1$ et $v=0$.

Le résultat obtenu signifie que 0 est proprement représenté par f. D'après le n°15, il existe une forme $f'=(a',b',c')$ équivalente à f telle que $a'=0$.

Si on considère ensuite une forme parallèle à f', on obtient une forme $f''=(a'',b'',c'')$, équivalente à f, telle que $a''=a'=0$, $b''=2a'n + b' = b'$ et $c''=a'n^2 + b'n + c' = b'n + c'$ où n est un entier quelconque. Cette dernière relation montre que c'' peut être choisi parmi n'importe quel entier congru à c' modulo b'. comme $|b'| = m$ on peut s'arranger pour que c'' soit le reste de c' modulo m, donc pour que $0 \leq c'' \leq m-1$. Aux notations près, on a ainsi démontré que toute forme de discriminant $m^2 > 0$ est équivalente à une forme du type (a,b,c) avec $a=0$, $b = \pm m$ et $0 \leq c \leq m-1$. Le nombre de classes possibles est donc au maximum 2m.

20. Lorsque Δ est un discriminant non nul, on notera $C(\Delta)$, ou simplement C, l'ensemble des classes de formes de discriminant Δ et $c(\Delta)$, ou simplement c, le nombre de ces classes.

Lorsque $\Delta < 0$, on peut distinguer les classes de formes positives et les classes de formes négatives. On notera $C^+(\Delta)$ et $C^-(\Delta)$ (ou simplement C^+ et C^-) les sous-ensembles de $C(\Delta)$ correspondants. Parallèlement, on pourra noter $c^+(\Delta)$ et $c^-(\Delta)$ (ou c^+ et c^-) les nombres de classes que l'on trouve dans ces ensembles. Pour des raisons évidentes (passage de (a,b,c) à la forme opposée (-a,-b,-c), on a $c^+ = c^- = \frac{1}{2} c$.

En fait, pour un discriminant Δ de signe quelconque donné, on s'intéressera surtout aux classes de formes primitives. On notera $G(\Delta)$, ou simplement G, leur ensemble et $g(\Delta)$, ou simplement g, leur nombre.

On verra plus loin que cet ensemble est en fait un groupe, ce qui justifie, par anticipation, la notation utilisée.

Si $\Delta < 0$, on définit de façon évidente des ensembles $G^+(\Delta)$ et $G^-(\Delta)$ (notées aussi simplement G^+ et G^-) et des nombres $g^+(\Delta)$ et $g^-(\Delta)$ (qu'on écrira aussi g^+ et g^-). On a en fait $g^+ = g^- = \frac{1}{2}g$.

Signalons que lorsque les spécialistes de la théorie des formes binaires parlent du "nombre de classes" relatif à un discriminant donné Δ , ils entendent généralement par là un nombre noté h ou $h(\Delta)$, égal au nombre g si $\Delta > 0$ et égal à $g^+ = \frac{1}{2}g$ si $\Delta < 0$. Pour nous, qui n'avons en vue que les nombres triangulaires, le nombre $g = g(\Delta)$ fera l'affaire. Il serait d'ailleurs odieux de faire de l'ostracisme à l'égard des formes définies négatives!

Indiquons pour finir que $g(\Delta)$ est fini, même lorsque $\Delta = 0$. Il est en effet facile de vérifier que, comme on l'a fait dans le n°19, une forme f de discriminant nul représente proprement 0. Elle est donc équivalente à une forme du type $(a, b, 0)$ où b est nécessairement nul. Si elle est primitive, il n'y a que deux possibilités : $a = 1$ et $a = -1$. D'où $g(\Delta) = g(0) = 2$ si $\Delta = 0$.

B/ Classes ambiguës primitives de discriminant donné.

1. Ce paragraphe sera bien plus court que le précédent, d'autant plus court qu'on ne traitera pas le cas général, mais celui où Δ est un nombre négatif impair.

Rappelons cependant qu'une forme de discriminant quelconque est dite ambiguë si elle est improprement équivalente à elle-même, autrement dit s'il existe une transformation linéaire de \mathbb{Z}^2 , de déterminant -1 , laissant cette forme invariante (cf §A, n°10).

En fait, pour une forme quelconque, les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) f est une forme ambiguë.
- (ii) f est équivalente à une forme du type (a', b', c') où b' est un multiple de a' .
- (iii) f est équivalente à une forme du type $(a', 0, c')$ ou à une forme du type (a', a', c') .

2. Démontrons d'abord l'implication (i) \Rightarrow (ii). Considérons une forme ambiguë (a, b, c) et écartons le cas où f est nulle pour laquelle la conclusion est évidente. Compte tenu des relations (1), §A, n°6 vues plus haut, il existe par hypothèse des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entiers tels que

$$\begin{aligned} a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 &= a \\ (1) \quad 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta &= b \\ a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2 &= c \end{aligned}$$

avec $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$. Cette dernière relation permet de simplifier la seconde des trois égalités données ci-dessus car si on écrit celle-ci sous la forme $2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma - 1) + 2c\gamma\delta = 0$ et si on remplace -1 par $\alpha\delta - \beta\gamma$, on obtient après simplification par 2

$$(2) \quad a\alpha\beta + b\alpha\delta + c\gamma\delta = 0$$

Nous allons déduire de là qu'on a toujours

$$(3) \quad \alpha + \delta = 0$$

De la relation $a=a\alpha^2+b\alpha\gamma+c\gamma^2$ on tire en effet $a\delta=a\alpha^2\delta+b\alpha\gamma\delta+c\gamma^2\delta=a\alpha^2\delta+\gamma(b\alpha\delta+c\gamma\delta)$. Comme $b\alpha\delta+c\gamma\delta=-a\alpha\beta$ d'après (2), on obtient $a\delta=a\alpha^2\delta-a\alpha\beta\gamma=a\alpha(\alpha\delta-\beta\gamma)=-a\alpha$ puisque $\alpha\delta-\beta\gamma=-1$. D'où le résultat annoncé si $a\neq 0$.

De la même façon, de la relation $c=a\beta^2+b\beta\delta+c\delta^2$, on tire $c\alpha=a\alpha\beta^2+b\alpha\beta\delta+c\alpha\delta^2=\beta(a\alpha\beta+b\alpha\delta)+c\alpha\delta^2=\beta(-c\gamma\delta)+c\alpha\delta^2=c\delta(-\beta\gamma+\alpha\delta)=-c\delta$, ce qui conduit à la même conclusion si $c\neq 0$.

Reste le cas où $a=c=0$ (et où donc $b\neq 0$). dans ce cas, les diverses relations ci-dessus se réduisent à $b\alpha\gamma=0$, $b\alpha\delta=0$ et $b\beta\delta=0$, donc à $\alpha\gamma=\alpha\delta=\beta\delta=0$. comme en outre $\alpha\delta-\beta\gamma=-\beta\gamma=-1$, β et γ ne peuvent être nuls. On a donc $\alpha=\delta=0$ et par conséquent $\alpha=-\delta$.

La relation (3) étant établie, supposons d'abord $\gamma=0$. On a alors d'après (2), $a\alpha\beta+b\alpha\delta=0$, c'est à dire, puisque $\alpha\delta=-1$, $b=a\alpha\beta$. Cela démontre l'assertion (ii) cherchée en prenant pour (a',b',c') la forme $f=(a,b,c)$ elle-même.

Supposons maintenant $\gamma\neq 0$ et considérons une transformation $\tau=\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$ arbitraire de déterminant $+1$. Appelons f' la forme $f\circ\tau$: c'est une forme équivalente à f qu'on écrira aussi (a',b',c') . Si on note σ la transformation $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ utilisée ci-dessus, il est facile de voir que f' est invariante par la transformation $\tau^{-1}\sigma\tau$ car $f'\circ(\tau^{-1}\sigma\tau)=f\circ\tau\circ\tau^{-1}\circ\sigma\circ\tau=f\circ\sigma\circ\tau=f\circ\sigma=f'$ (puisque par hypothèse $f\circ\sigma=f$). Mais $\tau^{-1}\sigma\tau$ est évidemment une transformation linéaire de \mathbb{Z}^2 de déterminant -1 , de sorte que si on pose $\tau^{-1}\sigma\tau=\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$, on voit par le raisonnement précédent que $\alpha'+\delta'=0$ (ce qui ne nous servira pas!) et surtout que b' est un multiple de a' si en outre $\gamma'=0$. tout le problème est donc de montrer qu'on peut choisir $\tau=\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$ de façon à avoir $\gamma'=0$.

Comme la matrice de $\tau^{-1}\sigma\tau$ est $\begin{pmatrix} \rho & -\mu \\ -\nu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$, un calcul facile (laissé au lecteur) montre que $\gamma'=\gamma\lambda^2-2\alpha\lambda\nu-\beta\nu^2$. On a donc $\gamma\gamma'=\gamma^2\lambda^2-2\alpha\gamma\lambda\nu-\beta\gamma\nu^2=\gamma^2\lambda^2-2\alpha\gamma\lambda\nu+\alpha^2\nu^2-\alpha^2\nu^2-\beta\gamma\nu^2=(\gamma\lambda-\alpha\nu)^2-\nu^2(\alpha^2+\beta\gamma)=(\gamma\lambda-\alpha\nu)^2-\nu^2$ car $\alpha^2+\beta\gamma=-\alpha\delta+\beta\gamma=+1$.

Par suite, la relation $\gamma'=0$ équivaut à la relation $(\gamma\lambda-\alpha\nu)^2=\nu^2$ (on rappelle que $\gamma\neq 0$). Elle est vérifiée si $\gamma\lambda-\alpha\nu=\nu$, c'est à dire si $\gamma\lambda=(\alpha+1)\nu$. Pour avoir cette relation, il suffit d'écrire $\frac{\alpha+1}{\gamma}$ sous la forme $\frac{\lambda}{\nu}$, ce qui est toujours possible. Mais si on choisit en outre λ et ν premiers entre eux, on peut trouver μ et ρ tels que $\lambda\rho-\mu\nu=1$ (Bézout) et le tour est joué!

3. La fin de la démonstration est beaucoup plus simple : pour démontrer que (ii) implique (iii), il suffit d'utiliser la notion de forme parallèle (§A, n°13) et pour démontrer que (iii) implique (i) il suffit de démontrer que toute forme du type $(a,0,c)$ ou du type (a,a,c) est

ambiguë, ce qui se voit en faisant appel soit à la transformation $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ soit à la transformation $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les détails sont laissés au lecteur.

Gauss n'a pas donné de nom aux formes invariantes par une transformation de déterminant -1 mais il a qualifié d'"anceps" (ce qui paraît-il veut dire "à deux têtes" : cf [BUE], p.7) les formes du type (a,b,c) où b est un multiple de a . Ce terme a été traduit pas "ambigu" dans [GAU], p.132. Vu nos choix terminologiques, cette traduction est inacceptable ; c'est pourquoi nous parlerons plutôt de *formes ancipitales*. Cette notion est très utile à Gauss pour développer sa théorie de la réduction des formes indéfinies. Pour nous, nous aurons surtout besoin des formes ancipitales du type $(a,0,c)$ ou (a,a,c) ; nous les appellerons les *formes élémentaires*.

4. D'après ce qu'on a dit dans le n°1, dire qu'une forme est ambiguë c'est dire qu'elle est équivalente à une forme élémentaire. Par suite, pour déterminer toutes les classes ambiguës possibles, il suffit de déterminer toutes les formes élémentaires. Si l'on fixe le discriminant Δ et si on suppose $\Delta \neq 0$ la méthode est d'autant plus facile à mettre en œuvre que tout revient à avoir les relations $-4ac = \Delta$ et $a^2 - 4ac = \Delta$. Comme a est dans les deux cas un diviseur de Δ , cela ne fait qu'un nombre fini de formes possibles. Si on impose en outre aux formes d'être primitives, on voit que se donner une forme de ce type revient à se donner deux entiers a et c premiers entre eux, vérifiant soit la relation $-4ac = \Delta$, soit la relation $a(a-4c) = \Delta$. Le cas général est un peu délicat du fait de l'existence de deux espèces de formes élémentaires et à cause de subtils problèmes de divisibilité que nous ne pouvons pas détailler ici (cf [CAS], p.342). Mais on peut traiter sans difficultés le cas où Δ est impair - le seul qui, finalement, nous servira. Lorsque Δ est impair, seules apparaissent les formes du type (a,a,c) .

Si a et c sont des entiers premiers entre eux tels que $a^2 - 4ac = \Delta$, a est un diviseur de Δ (donc un nombre impair), premier avec $a-4c$, donc premier avec son "diviseur complémentaire". On traduira cette propriété bien particulière en disant que a est un *diviseur libre* de Δ .

Réciproquement, si a est un diviseur libre de Δ , la relation $a(a-4c) = \Delta$ définit un nombre c et un seul, égal à $\frac{a^2 - \Delta}{4a}$. Ce nombre est en fait un entier car a divise $a^2 - \Delta$, tout en étant premier avec 4, et que 4 divise $a^2 - \Delta$: cette dernière propriété résulte de ce que, avec les hypothèses, on a $a^2 \equiv \Delta \equiv 1 \pmod{4}$. Il est ensuite facile de vérifier que c est premier avec a .

En résumé, lorsque Δ est un discriminant impair, on obtient toutes les formes primitives élémentaires de discriminant Δ en considérant les formes (a,a,c) où a parcourt l'ensemble des diviseurs libres de Δ et où $c = \frac{a^2 - \Delta}{4a}$.

5. D'après ce qu'on vient de dire, le nombre de formes primitives élémentaires de discriminant Δ est égal au nombre de diviseurs libres de Δ . Pour calculer ce dernier nombre, on peut faire appel à la décomposition en facteurs premiers de Δ ou plutôt du

nombre positif $|\Delta|$. Si on écrit celle-ci sous la forme $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ avec des nombres premiers p_1, \dots, p_r deux à deux distincts et des exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ entiers >0 , on sait qu'on obtient tous les diviseurs de $\Delta_1^{\alpha_1}$ en considérant les produits $\pm p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$ où $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq \beta_r \leq \alpha_r$. Pour obtenir alors un diviseur libre de Δ (c'est à dire un diviseur premier avec son diviseur complémentaire) il faut que l'on ait $\beta_i=0$ ou $\beta_i=\alpha_i$ pour tout i car dans le cas contraire le nombre premier p_i diviserait à la fois le diviseur considéré et son diviseur complémentaire. Cette condition nécessaire est aussi suffisante.

Pour i fixé, il y a donc deux façons de choisir β_i . Comme ce choix doit se faire pour $i=1, 2, \dots, r$ et qu'il faut pour finir choisir le signe du diviseur libre cherché, on voit finalement que le nombre de diviseurs libres de Δ est égal à 2^{r+1} où r désigne, en fait, le nombre de diviseurs premiers de Δ .

6. Tout serait parfait si les formes obtenues étaient deux à deux non équivalentes. Ce n'est malheureusement pas le cas car si on applique à une forme (a,a,c) la transformation $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, évidemment de déterminant $+1$, on obtient, en développant $a(-x-y)^2+a(-x-y)(2x+y)+c(2x+y)^2$, la forme $(4c-a,4c-a,c)$. C'est une forme équivalente à (a,a,c) , du même type, et qui s'obtient finalement en remplaçant le diviseur libre a initial par $4c-a=-\frac{\Delta}{a}$, donc par un autre diviseur libre qui n'est autre que l'opposé du diviseur complémentaire de a .

Ces diviseurs libres "associés" jouent des rôles symétriques, sans jamais être égaux car si on avait $a=4c-a$, on aurait $a=2c$ en contradiction avec le fait que a est impair. On pourrait donc supprimer sans grand dommage une forme sur deux et donc réduire le nombre de ces formes à 2^r . Mais on va voir que sauf dans le cas très particulier où $\Delta=1$, un et un seul des deux nombres $a, 4c-a$ appartient à l'intervalle $]-\sqrt{|\Delta|}, \sqrt{|\Delta|}[$. Raisonnons par l'absurde en distinguant deux cas. Si on avait en même temps $|a| < \sqrt{|\Delta|}$ et $|4c-a| < \sqrt{|\Delta|}$, on aurait $|\Delta|=|a||4c-a| < |\Delta|$, ce qui est absurde. Si on avait en même temps $|a| \geq \sqrt{|\Delta|}$ et $|4c-a| \geq \sqrt{|\Delta|}$, l'une de ces inégalités serait stricte car s'il y avait égalité partout on aurait $|a| = \sqrt{|\Delta|} = |4c-a|$, donc soit $|a| = |2c|$, en contradiction avec le fait que a est impair, soit $4c=0$, ce qui impliquerait $a=\pm 1$ (à cause du caractère primitif de la forme (a,a,c)), donc $\Delta=a^2=1$, ce qu'on a exclu. On en déduit que $|a||4c-a| > |\Delta|$, ce qui est encore absurde.

Les résultats ainsi obtenus et ceux du n°1 vus ci-dessus montrent que si Δ est un discriminant impair $\neq 1$, toute forme ambiguë primitive est équivalente à une forme du type (a,a,c) où a est un diviseur libre de Δ tel que $a^2 < |\Delta|$, le nombre des formes de ce type étant égal à 2^r , où r désigne le nombre de diviseurs premiers de Δ .

7. Le résultat précédent implique que le nombre de classes ambiguës primitives de discriminant Δ (Δ impair $\neq 1$) est au plus égal à 2^r et qu'il est égal à 2^r exactement si et seulement si les formes du type (a,a,c) qui nous restent (donc avec $a^2 < |\Delta|$) sont deux à deux non équivalentes. Sauf erreur de ma part (cf [VEN], p.126), cette dernière propriété est exacte si $\Delta < 0$ (hypothèse qui élimine au passage l'exception $\Delta=1$ que nous n'avons pas traitée). Heureusement pour nous nous n'aurons pas besoin d'un autre cas!

8. Pour parvenir à nos fins, nous allons revenir sur un résultat vu plus haut (§A, n°18) selon lequel lorsque Δ n'est pas un carré parfait, toute forme f de discriminant Δ est équivalente à une forme (a,b,c) telle que $|b| \leq |a| \leq |c|$. Si $\Delta < 0$ (ce qui exclut les carrés parfaits) et si la forme f est supposée positive, cette condition s'écrit $|b| \leq a \leq c$ puisque a et c sont alors des nombres > 0 . Il se trouve qu'avec toutes ces conditions, les formes obtenues sont rarement équivalentes. De façon plus précise, si on qualifie de *faiblement réduite* toute forme définie positive $f=(a,b,c)$ pour laquelle $|b| \leq a \leq c$, alors on peut affirmer que deux formes définies positives distinctes et faiblement réduites ne sont jamais équivalentes sauf si l'une s'écrit (a,b,a) et l'autre $(a,-b,a)$ ou si l'une s'écrit (a,a,c) et l'autre $(a,-a,c)$.

9. La démonstration du résultat que l'on vient d'énoncer nous demandera un lemme en quatre cas :

Lemme : Si $f=(a,b,c)$ est une forme définie positive faiblement réduite alors $f(x,y) \geq a(x^2 - |xy| + y^2)$ quels que soient les entiers x et y . On a même une inégalité stricte si $y \neq 0$ et $c > a$ ou si $xy \neq 0$ et $|b| < a$.

Si on écrit $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ sous la forme $a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right)$ on voit que l'on a l'inégalité "large" annoncée si on démontre que $\frac{b}{a}xy \geq -|xy|$ et $\frac{c}{a}y^2 \geq y^2$. Comme on a $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 1$ par hypothèse, on a aussi, $\left|\frac{b}{a}xy\right| \leq |xy|$. cela signifie aussi que $-|xy| \leq \frac{b}{a}xy \leq |xy|$, donc en particulier $\frac{b}{a}xy \geq -|xy|$, d'où la première inégalité cherchée. La seconde est plus immédiate car elle découle de l'hypothèse que $\frac{c}{a} \geq 1$.

Ce raisonnement montre aussi que l'on a l'inégalité stricte $f(x,y) > a(x^2 - |xy| + y^2)$ à chaque fois que $\frac{b}{a}xy > -|xy|$ ou que $\frac{c}{a}y^2 > y^2$. Le premier cas est réalisé si on suppose $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ (c'est à dire $|b| < a$) et $xy \neq 0$; le second si on suppose $\frac{c}{a} > 1$ (c'est à dire $c > a$) et $y \neq 0$. D'où le lemme.

Cela étant, supposons que $f=(a,b,c)$ et $f'=(a',b',c')$ soient deux formes définies positives équivalentes, faiblement réduites, donc pour lesquelles $|b| \leq a \leq c$ et $|b'| \leq a' \leq c'$.

Comme $x^2 - |xy| + y^2$ est >0 si $(x,y) \neq (0,0)$ (cela résulte de ce que $x^2 - |xy| + y^2 = (|x| - |y|)^2 + |xy|$), le lemme ci-dessus permet de dire que $f(x,y) \geq a$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Comme $f(1,0) = a$, on peut dire que a est la plus petite valeur non nulle prise par f .

Le même raisonnement pour f' montre que a' est, de son côté, la plus petite des valeurs non nulles prises par f' . Comme ces valeurs pour f et pour f' sont les mêmes (cela vient de ce que f et f' sont équivalentes), on a ici $a = a'$.

Cela étant, considérons une transformation $\tau = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ de déterminant $+1$ telle que $f' = f \circ \tau$.

Comme $a' = f'(1,0) = f(\tau(1,0)) = f(\alpha, \gamma)$ et que $a' = a$, $a = f(\alpha, \gamma)$. Si on suppose alors que $c > a$, on a nécessairement $\gamma = 0$ (et donc $\alpha\delta = 1$) car si on avait $\gamma \neq 0$, le lemme ci-dessus (appliqué avec $x = \alpha$ et $y = \gamma$) donnerait $a = f(\alpha, \gamma) > a(\alpha^2 - |\alpha\gamma| + \gamma^2) \geq a$, donc $a > a$. Si on suppose que $|b| < a$, le même raisonnement montre que l'on a nécessairement $\alpha\gamma = 0$, c'est à dire $\alpha = 0$ (donc $\beta\gamma = -1$) ou $\gamma = 0$ (donc $\alpha\delta = 1$). On va alors distinguer plusieurs cas.

Premier cas. Supposons $c > a$

D'après ce qui précède, on a $\gamma = 0$ et $\alpha\delta = 1$, de sorte que la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est égale à l'une des matrices $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Quitte à remplacer β par $-\beta$ dans le second cas, on peut dire que la matrice qui nous intéresse est de la forme $\pm \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme l'application composée $f \circ \tau$

(où $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) ne dépend pas du signe en jeu (ainsi qu'on le vérifie immédiatement), on peut se contenter de calculer les coefficients a' , b' , et c' de f' en utilisant la seule relation $f' = f \circ \tau$ avec $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc en développant $a(x+\beta y)^2 + b(x+\beta y) + cy^2$. On voit aussitôt que $a' = a$ (ce qu'on savait déjà) et que $b' = b + 2a\beta$. Cette dernière relation signifie que l'on a $b' \equiv b \pmod{2a}$.

Comme b' et b sont tous deux, par hypothèse, dans l'intervalle $[-a, a]$, cette congruence ne peut avoir lieu que si $b' = b$ ou si $b = \pm a$ et $b' = -b$. Si $b' = b$, on a aussi $c = c'$ (à cause des égalités $a = a'$ et $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c'$), donc $f = f'$. Si $b = \pm a$ et $b' = -b$, l'une des formes considérées est (a, a, c) et l'autre $(a, -a, c)$, conformément à la conclusion souhaitée.

Deuxième cas. Supposons $c = a$ et $|b| < a$. alors, d'après ce qu'on a vu plus haut, on a $\alpha\gamma = 0$. Si $\gamma = 0$, $\alpha\delta = 1$ et on retrouve le cas traité juste ci-dessus, avec la même conclusion car la condition $c > a$ du premier cas n'a pas été utilisée dans le calcul de a', b', c' .

Si $\alpha=0$, on a $\beta\gamma=-1$, de sorte que la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$. En suivant un raisonnement déjà fait dans le premier cas, on peut supposer que la matrice est simplement $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$. Cela permet de calculer a' , b' , c' en développant

$$ay^2+by(-x+\delta y)+c(-x+\delta y)^2.$$

On trouve alors $a'=c$, c'est à dire $a'=a$ comme on le savait déjà, et $b'=-b-2c\delta$. Cette dernière relation permet de dire cette fois que $b'\equiv -b \pmod{2c}$, donc (puisque $c=a$) que $b'\equiv -b \pmod{2a}$. Comme b' et $-b$ sont tous deux compris entre $-a$ et a , la congruence précédente ne peut avoir lieu que si $b'=-b$ ou si $b'=\pm a$ et $-b=-b'$. Dans ce dernier cas, on a $b=b'$, donc $c=c'$ (puisque $b^2-4ac=b'^2-4a'c'$) et par conséquent $f=f'$. Dans l'autre cas, on a encore $c=c'$ (car $b^2=b'^2$ et $b^2-4ac=b'^2-4a'c'$), ce qui fait que les formes considérées sont respectivement (a,b,a) et $(a,-b,a)$, conformément à la conclusion cherchée.

Troisième cas. Supposons $c=a=b$. Alors, comme la relation $a=f(\alpha,\gamma)$ s'écrit $a=a\alpha^2+b\alpha\gamma+c\gamma^2=a(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)$, on a nécessairement $\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2=1$. Cela n'est possible que si $\alpha\gamma=0$ ou $\alpha\gamma=-1$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\alpha\gamma\geq 1$ ou $\alpha\gamma\leq -2$. Cela est absurde car avec la première inégalité, on aurait $\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2=(\alpha-\gamma)^2+3\alpha\gamma\geq 3\alpha\gamma\geq 3$ et avec la seconde, $\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2=(\alpha+\gamma)^2-\alpha\gamma\geq -\alpha\gamma\geq 2$.

Le cas $\alpha\gamma=0$ se traite comme on l'a fait ci-dessus, dans le deuxième cas, en tenant compte du fait que lorsque $\alpha=0$ on a aussi, ici, $a=c$. Le cas $\alpha\gamma=-1$ donne $\alpha=1, \gamma=-1$ ou $\alpha=-1, \gamma=1$. Comme $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, on voit que $\beta+\delta=1$ dans le premier cas et que $\beta+\delta=-1$ dans le second. D'où les deux matrices possibles pour $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, à savoir $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ avec $\beta+\delta=1$ et $\begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$ avec $\beta+\delta=-1$. Quitte à changer de notation, on peut dire que l'on a toujours une matrice de la forme $\pm\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ avec $\beta+\delta=1$, ce qui permet de limiter les calculs à $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$, donc à développer

$a(x+\beta y)^2+b(x+\beta y)(-x+\delta y)+c(-x+\delta y)^2$. D'où $a'=a-b+c=a$ (car $a=b=c$) et $b'=2a\beta+b\delta-b\beta-2c\delta=2a\beta+a\delta-a\beta-2a\delta=a(\beta-\delta)=a(2\beta-1)$. On a donc $b'=2a\beta-a$, soit $b'\equiv -b \pmod{2a}$.

En suivant un raisonnement déjà fait ci-dessus, on voit que $b'=-b$ (donc $c=c'$) ou que $b'=b$, ce qui correspond à la conclusion cherchée.

Quatrième cas. $c=a=-b$. On se ramène au cas précédent en observant que $(a,-a,a)\sim(a,a,a)$.

Compte tenu des conditions initiales $|b|\leq a\leq c$, les quatre cas précédents épuisent toutes les possibilités. Comme les équivalences $(a,b,a)\sim(a,-b,a)$ et $(a,a,c)\sim(a,-a,c)$ sont évidentes ou presque, la démonstration est entièrement achevée.

10. On voit ainsi que, sauf exceptions, des formes définies positives faiblement réduites, définissent des classes deux à deux distinctes. Comme les exceptions sont $(a,b,a)\sim(a,-b,a)$

et $(a,a,c)\sim(a,-a,c)$, on peut éviter les répétitions en choisissant positivement, dans ces deux cas, le coefficient médian, ce qui revient, dans le dernier cas, à éliminer $(a,-a,c)$.

Cela explique la définition précise suivante (cf [BUE], p.17) : on dit qu'une forme définie positive (a,b,c) est *réduite* (on pourrait dire "fortement réduite") si on a la condition générale $|b|\leq a\leq c$, si $b\neq -a$ et si la relation $a=c$ implique $b\geq 0$. On complétera cette définition de la manière la plus naturelle qui soit en disant qu'une forme définie négative f est réduite si $-f$ est réduite au sens précédent.

Avec ces définitions, des formes réduites distinctes sont deux à deux non équivalentes. Cela permet de compléter le résultat du §A, n°18 en notant que toute forme de discriminant $\Delta < 0$ est équivalente à une forme réduite et à une seule. Lorsque $|\Delta|$ n'est pas très grand, la liste complète des formes réduites n'est pas difficile à obtenir, surtout si on

tient compte du fait que $a\leq \sqrt{\frac{|\Delta|}{3}}$ (§A, n°16). dans le cas où $\Delta=-63$, cela donne $a\leq 4$. En essayant tous les cas possibles, on obtient 10 formes réduites dont les cinq positives sont $(1,1,16)$, $(2,1,8)$, $(2,-1,8)$, $(3,3,6)$ et $(4,1,4)$.

On en déduit que le nombre des classes de formes de discriminant -63 est $c=10$, que celui des classes primitives est $g=8$ (il faut éliminer $(3,3,6)$ et la forme opposée) et donc que le "nombre de classes" (cf §A, n°20) est $h=4$.

11. Mais revenons aux classes ambiguës primitives ou plutôt aux formes de discriminant Δ du type (a,a,c) où a est un diviseur libre de Δ tel que $a^2 < |\Delta|$. Comme on l'a expliqué dans le n°7, il s'agit de vérifier que lorsque Δ est un nombre impair négatif, ces formes sont deux à deux non équivalentes. Un tout petit peu de réflexion (lecteur, dévoue-toi) montre qu'il suffit de prouver le résultat en question pour les seules formes positives. Malheureusement, les formes à examiner n'ont aucune raison d'être réduites. Pour nous ramener à celles-ci, nous conviendrons de noter f_a en général la forme (a,a,c) , étant entendu que a est un diviseur libre >0 de Δ tel que $a^2 < |\Delta|$ et que $c = \frac{a^2 - \Delta}{4a}$, puis de poser $f'_a = f_a$ si $a \leq c$ et $f'_a = (c, 2c - a, c)$ si $a > c$. Comme f'_a est adjacente à f_a dans ce dernier cas, on en déduit que f'_a est, quel que soit a , équivalente à f_a . Aussi, pour démontrer que les formes f_a sont deux à deux non équivalentes il suffit de vérifier que les formes f'_a ont la même propriété. Comme ces dernières sont réduites (ainsi qu'on le vérifie facilement), tout revient à démontrer qu'elles sont deux à deux distinctes. La démonstration, très simple, est laissée au lecteur.

Ainsi, si Δ est un discriminant impair et négatif, le nombre de classes ambiguës et primitives que l'on peut définir à partir de Δ est égal à 2^r (où r est le nombre de diviseur premiers de Δ). Bien entendu, si on ne considère que les classes de formes positives, le nombre en question doit être divisé par 2, ce qui donne 2^{r-1} .

On peut illustrer ce qui précède par le cas où $\Delta=-63$. Les diviseurs libres de 63 sont $\pm 1, \pm 9, \pm 7$ et les formes élémentaires correspondantes sont $\pm(1,1,16), \pm(9,9,4), \pm(7,7,4)$. En se limitant aux formes positives (a,a,c) pour lesquelles $a^2 < |\Delta|$, on obtient les deux formes

(1,1,16) et (7,7,4). La première est réduite, donc laissée telle quelle, alors que la seconde doit être remplacée par (4,1,4). Les 4 classes ambiguës primitives de discriminant -63 sont donc les classes des formes (1,1,16), (4,1,4), (-1,-1,-16) et (-4,-1,-4). Nous pouvons maintenant passer au troisième point de notre programme.

C/ Composition des classes de formes et groupes de classes.

1. L'idée de base de ce qu'on appelle, depuis Gauss, la composition des formes est de généraliser autant que faire se peut certaines identités bien connues comme l'identité de Fibonacci

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)=(xx'+yy')^2+(xy'-x'y)^2$$

l'identité de Brahmagoupta

$$(x^2+Ay^2)(x'^2+Ay'^2)=(xx'+Ayy')^2+A(xy'-x'y)^2$$

ou certaines identités moins courantes, ou moins utiles comme l'identité

$$(2x^2+2xy+3y^2)(2x'^2+2x'y'+3y'^2)=(2xx'+xy'+x'y+3yy')^2+5(xy'-x'y)^2$$

qui a permis à Lagrange de résoudre certaines conjectures de Fermat et d'Euler sur les nombres de la forme x^2+5y^2 .

Ce dernier exemple signifie que lorsqu'on multiplie deux nombres de la forme $2x^2+2xy+3y^2$, on obtient un nombre de la forme x^2+5y^2 , ce qu'on exprime aussi, de manière quelque peu abusive en disant que lorsqu'on "compose" la forme $2x^2+2xy+3y^2$ avec elle-même, on obtient la forme x^2+5y^2 .

2. A la fin du XVIII^e siècle, Legendre fit une composition de cas analogues déjà connus, ce qui le conduisit à dresser de véritables tables de composition. Mais c'est Gauss qui s'attaqua au cas général en se proposant, dans ses *Disquisitiones Arithmeticae* (cf [GAU], p.243) de rechercher tous les cas où l'on a, entre des formes quadratiques binaires f, g, et h, une relation du type

$$f(x,y)g(x',y')=h(X,Y)$$

où X et Y sont des fonctions bilinéaires, à coefficients entiers, des éléments x, y, x' et y' :

$$X=axx'+bxy'+cx'y+dyy'$$

$$Y=rxx'+sxy'+tx'y+uyy'$$

Moyennant certaines conditions portant sur les coefficients a, b, c, d, r, s, t, u de ces fonctions bilinéaires, il put montrer qu'en partant de deux formes f et g, il était toujours possible de définir une forme h unique à une équivalence près, ne dépendant en réalité que des classes de f et de g.

"On voit par là" ajoutait-il "comment on peut définir la composition de deux classes". Il convient de noter que les classes en question doivent être prises au sens de Gauss et non au sens de Lagrange : comme le montrent d'ailleurs les tables de Legendre, la considération des seules classes de Lagrange conduit à une certaine ambiguïté due au fait que la "classe composée" n'est pas unique.

3. Malheureusement, si l'idée de Gauss est séduisante et générale, elle donne lieu à des calculs si complexes qu'on lui préfère souvent une méthode due à Dirichlet, qui apparaît déjà chez Legendre (et que Gauss lui-même ne méconnaissait pas) et qui consiste à limiter la composition à des formes qui s'adaptent bien, en quelque sorte, les unes aux

autres, et qu'on qualifie de "concordantes". En fait, pour les seuls besoins de la théorie, il n'est pas nécessaire de reprendre telle quelle la définition de Dirichlet et on peut finalement se borner à un type encore plus restreint de formes qu'on appellera ici des formes composables².

De façon précise, nous dirons que deux formes quadratiques binaires f et f' sont *composables* si elles ont même discriminant Δ , même coefficient central b et si, en appelant a et a' leurs coefficients initiaux, le produit $4aa'$ est un entier non nul divisant $b^2-\Delta$.

Les deux premières conditions signifient que l'on peut poser $f=(a,b,c)$ et $f'=(a',b,c')$ avec $\Delta=b^2-4ac=b'^2-4a'c'$. La dernière condition exprime que a et a' sont des entiers non nuls et que le quotient $\frac{b^2-\Delta}{4aa'}$ est un entier. Si on l'appelle c'' et si on pose $a''=aa'$, cela permet de considérer la forme $f''=(a'',b'',c'')$ qui a non seulement le même coefficient central que f et f' mais aussi le même discriminant Δ .

Cette nouvelle forme s'appelle alors la *composée* de f et de f' ; on l'écrira $f*f'$.

On notera tout de suite que f et f' jouent dans les définitions précédentes des rôles rigoureusement symétriques : si f et f' sont des formes composables, f' et f le sont aussi et on a $f*f'=f'*f$.

4. Deux formes du type (a,b,c) et (a',b',c') de même discriminant sont par exemple composables si a et a' sont des entiers non nuls premiers entre eux. En effet, si on appelle Δ le discriminant commun des deux formes, la relation $b^2-\Delta=4ac=4a'c'$ montre que $\frac{b^2-\Delta}{4}$ (qui est un entier) est divisible par a et par a' . Si on suppose a et a' premiers entre eux, cet entier est divisible par aa' . Cela veut dire aussi que $4aa'$ divise $b^2-\Delta$. CQFD.

Un autre exemple de formes composables est fourni par une forme (a,b,c) pour laquelle $ac \neq 0$, et la forme inverse (c,b,a) . Cela résulte immédiatement des définitions puisque $b^2-\Delta=4ac$. On notera en outre que la composée de (a,b,c) et de (c,b,a) est la forme $(ac,b,1)$.

En revanche, il est assez rare qu'une forme (a,b,c) soit composable avec elle-même car non seulement il faut que a et c soient différents de 0, mais aussi que $4a^2$ divise $4ac$, donc que a divise c , condition qui n'est évidemment pas toujours réalisée.

5. Il est vrai que la définition que nous avons donnée de la composabilité pêche par son caractère artificiel. Pour la rattacher à la conception de Gauss, il est commode de la présenter autrement en démontrant que deux formes f et f' sont composables si et seulement si on peut trouver des entiers a, a', b et c , les deux premiers n'étant pas nuls, tels que $f=(a,b,a'c)$ et $f'=(a',b,ac)$. Dans ces conditions, $f*f'=(aa',b,c)$.

La démonstration n'est pas difficile ; elle est donc laissée au lecteur.

Cela étant, la raison de cette nouvelle version de la composabilité réside dans le fait que si a, a', b et c sont des entiers quelconques, on a l'identité suivante

$$(ax^2+bx'y+acy^2)(a'x'^2+bx'y'+acy'^2)=aa'X^2+bXY+cY^2$$

² Pour voir les différents points de vue possible (et les variations de vocabulaire), on consultera [GAU], *loc. cit.*, [VEN], p.127, [BUE], p.55 et 120 ainsi que [CAS], p.335.

avec $X=xx'-cyy'$ et $Y=axy'+a'x'y+byy'$.

La démonstration de cette identité est facile quoique un peu fastidieuse. On peut me croire sur parole! Pour aller plus vite, au moins dans le cas où $aa' \neq 0$, on peut développer

le produit $\left(ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)\left(a'x' + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y'\right)$.

En menant les calculs intelligemment, cela donne

$$\left(ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)\left(a'x' + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y'\right) = aa'X + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}Y$$

où X et Y ont la signification ci-dessus. On a bien sûr aussi

$$\left(ax + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2}y\right)\left(a'x' + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2}y'\right) = aa'X + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2}Y$$

En multipliant nombre à nombre les deux égalités trouvées, on en déduit sans trop de problèmes l'identité cherchée. Le lecteur se débrouillera!

De toute façon l'identité en tant que telle ne nous sera utile que pour énoncer le résultat selon lequel si f et f' sont deux formes composables, représentant respectivement des entiers n et n' donnés, alors la forme composée f*f' représente le produit nn'. Compte tenu de tout ce qui précède, ce résultat est quasi évident...

6. Comme nous l'avons dit, le problème n'est pas tant de décomposer des formes que de composer des classes. Il s'agit donc de savoir si, étant données deux formes f et f' de même discriminant, il existe deux formes composables φ et φ' qui soient respectivement équivalentes à f et à f'. Notre bonheur sera complet, si on prouve en outre que la classe de la forme $\varphi*\varphi'$ ne dépend que des classes de φ et de φ' (ou de f et de f').

Nous allons voir que toutes ces propriétés sont satisfaites si les formes considérées sont primitives. A cause de cette limitation, il serait souhaitable que le lecteur établisse que si f et f' sont des formes primitives composables, alors f*f' est aussi primitive. Mais non ce n'est pas difficile!

7. En fait, l'essentiel de l'argumentation qui va suivre repose sur le lemme suivant que ni Gauss ni Cassels ne jugent utile de démontrer entièrement (cf [GAU], p.231 et [CAS], p.334) :

Lemme : Si f est une forme primitive et si m est un entier non nul quelconque, alors il existe un entier n non nul, premier avec m, et proprement représenté par f.

Posons $f=(a,b,c)$ et partageons l'ensemble P des diviseurs premiers de m en trois ensembles disjoints : l'ensemble Q des diviseurs premiers de m ne divisant pas a, l'ensemble R des diviseurs premiers de m divisant a mais ne divisant pas c et l'ensemble S des diviseurs premiers de m divisant a et c. Comme $m \neq 0$, tous ces ensembles sont finis.

Posons alors $x = \prod_{p \in R} p$ et $y = \prod_{p \in Q} p$. Comme $Q \cap R = \emptyset$, on obtient ainsi des entiers premiers

entre eux. Mais le plus intéressant est que le nombre $n = ax^2 + bxy + cy^2$ est alors premier avec m. Pour le voir il suffit de démontrer que n est premier avec p (donc non divisible par p) pour tout $p \in P$. Cela se fait très bien en considérant trois cas : $p \in Q$, $p \in R$, $p \in S$. C'est un excellent exercice d'arithmétique.

Après cela, il reste un dernier point à régler. Il n'est pas interdit en effet que n soit nul, mais si on remplace dès le début m par $2m$, l'entier n que l'on obtient est premier avec m et impair, donc non nul. D'où le lemme.

On peut en tirer deux conséquences. La première est que toute forme primitive est équivalente à une forme (a,b,c) dont le coefficient initial a est un entier non nul qu'on peut choisir premier avec n'importe quel entier $m \neq 0$ donné à l'avance. On sait en effet (§A, n°15) que lorsqu'une forme f représente proprement un entier a , elle est équivalente à une forme dont le premier coefficient est a .

La seconde conséquence est que toute forme primitive est équivalente à une forme (a,b,c) pour laquelle a et c sont différents de 0. On peut en effet d'abord choisir $a \neq 0$ d'après ce qui précède. Ensuite, quitte à prendre des formes parallèles, on peut supposer qu'on dispose d'une forme du type $(a,b+2an,an^2+bn+c)$. D'où le résultat puisque le polynôme an^2+bn+c ne peut s'annuler plus de deux fois.

8. Ces préparatifs faits, nous allons voir d'abord que si f et f' sont des formes primitives de même discriminant, il existe des formes φ et φ' respectivement équivalentes à f et f' , et composables entre elles. En outre, on peut s'arranger pour que les coefficients initiaux de ces formes soient des entiers non nuls, premiers entre eux, et premiers avec n'importe quel nombre m non nul donné à l'avance.

En effet, le nombre m étant donné, considérons un entier a non nul premier avec m et représenté proprement par f , puis un entier a' non nul premier avec am et représenté proprement par f' : on applique donc deux fois le lemme du n° précédent. Comme les représentations sont propres, il existe des entiers b, c et b', c' tels que $f \sim (a,b,c)$ et $f' \sim (a',b',c')$ (cf §A n°15). Il n'y a bien sûr aucune raison pour que $b=b'$, mais sans changer les équivalences précédentes (ni a et a'), on peut remplacer b par n'importe quel nombre de la forme $b+2ak$ et b' par n'importe quel nombre de la forme $b'+2a'k'$ (cf §A, n°13 : formes "parallèles"). Nous allons voir qu'on peut choisir k et k' de telle façon que $b+2ak=b'+2a'k'$. Il revient au même de trouver un entier B tel que $B \equiv b \pmod{2a}$ et $B \equiv b' \pmod{2a'}$. Cet énoncé rappelle le théorème chinois sauf que si a et a' sont premiers entre eux, il n'en est pas de même de $2a$ et de $2a'$. Heureusement pour nous, on sait que b et b' ont la même parité. On peut donc poser soit $b=2\beta$ et $b'=2\beta'$, soit $b=2\beta+1$ et $b'=2\beta'+1$, ce qui ramène aussitôt le problème à deux congruences simultanées de modules a et a' , où le théorème chinois proprement dit fait merveille.

Moyennant quoi, en changeant de notation, on aura $f \sim (a,b,c)$ et $f' \sim (a',b',c')$. comme a et a' sont des entiers non nuls premiers entre eux, les formes obtenues sont composables (n°4), tout en ayant les autres propriétés requises. CQFD.

9. Reste à voir que la forme composée $\varphi * \varphi'$ se trouve dans une classe qui ne dépend que de la classe de φ et de la classe de φ' . Il revient au même de prouver que si f et f' sont des formes primitives composables, respectivement équivalentes à des formes (primitives) composables g et g' , alors $f * f'$ est équivalente à $g * g'$.

Nous aurons besoin d'un lemme.

Lemme : Soient (a_1, b, c_1) et (a_2, b, c_2) deux formes équivalentes de même coefficient central et soit d un diviseur commun non nul de c_1 et de c_2 tel que a_1, a_2 et d soient premiers dans leur ensemble. Alors les formes $(da_1, b, \frac{c_1}{d})$ et $(da_2, b, \frac{c_2}{d})$ sont équivalentes.

Les formes (a_1, b, c_1) et (a_2, b, c_2) étant équivalentes, il existe des entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ pour lesquels

$$\begin{pmatrix} a_2 & b/2 \\ b/2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b/2 \\ b/2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

(cf §A, n°8). En multipliant tout par 2 et par $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, on obtient une nouvelle relation matricielle qui équivaut aux quatre égalités

$$(1) \quad \begin{cases} 2a_1\alpha + b\gamma = 2a_2\delta - b\gamma \\ 2a_1\beta + b\delta = b\delta - 2c_2\gamma \\ b\alpha + 2c_1\gamma = -2a_2\beta + b\alpha \\ b\beta + 2c_1\delta = -b\beta + 2c_2\alpha \end{cases}$$

On tire des deux égalités du milieu $a_1\beta = -c_2\gamma$ et $a_2\beta = -c_1\gamma$. Comme d divise c_1 et c_2 , d divise $a_1\beta$ et $a_2\beta$. Par suite, d divise le PGCD de ces deux derniers nombres, c'est à dire le produit de β et du PGCD de a_1 et de a_2 . Comme d est premier avec ce PGCD par hypothèse, d divise β . Cela permet de considérer la matrice à coefficients entiers, et de déterminant +1

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta/d \\ d\gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Le lemme sera établi si on démontre que

$$\begin{pmatrix} da_2 & b/2 \\ b/2 & c_2/d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & d\gamma \\ \beta/d & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da_1 & b/2 \\ b/2 & c_1/d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta/d \\ d\gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Un petit calcul (laissé au lecteur!) montre que cette relation équivaut à (1).

10. Ce lemme étant établi, plaçons-nous dans les hypothèses du résultat à démontrer : f et f' composables, g et g' composables, $f \sim g$ et $f' \sim g'$, ce qui implique que toutes les formes considérées ont le même discriminant Δ .

Posons $f = (a, b, c)$, $f' = (a', b, c')$, $g = (u, v, w)$, $g' = (u', v, w')$.

D'après le n°8 ci-dessus, il existe deux autres formes composables $\varphi = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\varphi' = (\alpha', \beta, \gamma')$, respectivement équivalentes à f et f' (donc aussi à g et g') dont les coefficients initiaux α et α' sont des entiers non nuls, premiers entre eux et premiers avec $aa'uu'$ (il résulte des hypothèses que $aa'uu' \neq 0$).

Nous allons démontrer que $\varphi * \varphi' \sim f * f'$ et $\varphi * \varphi' \sim g * g'$, ce qui établira la conclusion cherchée $f * f' \sim g * g'$.

Comme le problème est symétrique, on peut se contenter de démontrer que $\varphi * \varphi' \sim f * f'$, c'est à dire que

$$\left(\alpha\alpha', \beta, \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha\alpha'} \right) \sim \left(aa', b, \frac{b^2 - \Delta}{4aa'} \right)$$

Comme $\alpha\alpha'$ est premier avec aa' et que b et β ont la même parité, on démontre, comme on l'a fait plus haut (en distinguant deux cas et en appliquant le théorème chinois) qu'il existe un entier B tel que

$$B \equiv \beta \pmod{2\alpha\alpha'} \text{ et } B \equiv b \pmod{2aa'}$$

Comme ces congruences sont aussi valables modulo 2α , $2\alpha'$, $2a$ et $2a'$, on peut affirmer en utilisant la notion de formes parallèles (cf §A, n°12) qu'il existe des entiers Γ , Γ' , Γ'' et C , C' , C'' tels que

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha, B, \Gamma) \quad (\alpha', \beta, \gamma') \sim (\alpha', B, \Gamma') \quad (\alpha\alpha', \beta, \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha\alpha'}) \sim (\alpha\alpha', B, \Gamma'') \\ (a, b, c) \sim (a, B, C) \quad (a', b, c') \sim (a', B, C') \quad (aa', b, \frac{b^2 - \Delta}{4aa'}) \sim (aa', B, C'') \end{aligned}$$

toutes ces formes ayant Δ pour discriminant.

Il résulte des hypothèses que $(\alpha, B, \Gamma) \sim (a, B, C)$ et $(\alpha', B, \Gamma') \sim (a', B, C')$ et tout le problème est de faire voir que $(\alpha\alpha', B, \Gamma'') \sim (aa', B, C'')$.

Comme $B^2 - 4\alpha\alpha'\Gamma'' = \Delta$, on voit que $4\alpha\alpha'$ divise $B^2 - \Delta$, donc en particulier $4\alpha\Gamma'$ et $4a'C'$. On en déduit que α divise $\alpha'\Gamma'$ et $a'C'$. Comme α est premier avec α' et avec a' , α divise Γ' et C' , tout en étant premier avec le PGCD de α' et de a' .

On est donc dans les conditions d'application du lemme du n°9 : puisque

$(\alpha', B, \Gamma') \sim (a', B, C')$, on en déduit que $(\alpha\alpha', B, \frac{\Gamma'}{\alpha}) \sim (\alpha a', B, \frac{C'}{\alpha})$ c'est à dire, puisque $(\alpha\alpha', B, \frac{\Gamma'}{\alpha})$ est nécessairement identique à $(\alpha\alpha', B, \Gamma'')$, que l'on a

$$(2) \quad (\alpha\alpha', B, \Gamma'') \sim (\alpha a', B, \frac{C'}{\alpha})$$

On voit de la même façon (puisque $B^2 - 4aa'C'' = \Delta$) que $4aa'$ divise $B^2 - \Delta$. Si on remarque que

$B^2 - \Delta = 4\alpha\Gamma = 4aC$, on en déduit que a' divise C et $\alpha\Gamma$, donc Γ seul puisque a' est premier avec α . Comme a' est a fortiori premier avec le PGCD de α et de a , on peut appliquer le lemme aux formes (α, B, Γ) et (a, B, C) : on a $(\alpha a', B, \frac{\Gamma'}{a'}) \sim (aa', B, \frac{C}{a'})$.

Comme $(aa', B, \frac{C}{a'}) = (aa', B, C'')$ et $(\alpha a', B, \frac{\Gamma'}{a'}) = (\alpha a', B, \frac{C'}{\alpha})$ puisqu'il y a partout le même discriminant, on voit que

$$(3) \quad (\alpha a', B, \frac{C'}{\alpha}) \sim (aa', B, C'')$$

Le rapprochement de (2) et de (3) donne le résultat cherché. CQFD.

11. Comme on l'a énoncé, les résultats précédents permettent de définir sans ambiguïté le composé de deux classes Φ et Φ' de formes primitives de discriminant Δ , lorsque Δ est un entier $\equiv 0, 1 \pmod{4}$ donné : on choisit une forme f dans Φ et une forme f' dans Φ' de telle sorte que f et f' soient composables (n°8) et on considère la classe de la forme composée $f*f'$. Comme cette classe ne dépend que de Φ et de Φ' , on dira que c'est la classe composée de Φ et de Φ' ; on la notera provisoirement $\Phi*\Phi'$. Comme ce résultat est une classe de formes primitives de discriminant Δ (n°6), cela définit dans l'ensemble

$G(\Delta)$ de ces classes une loi de composition qu'on appellera en abrégé la *composition des classes*.

Le résultat fondamental est, bien sûr, que, pour cette loi très spéciale, $G(\Delta)$ est un groupe commutatif. Dans ce groupe, l'élément neutre est la classe principale (de discriminant Δ) et le symétrique de la classe d'une forme (a,b,c) est la classe de la forme inverse (c,b,a) . La commutativité est évidente.

Pour démontrer l'associativité, considérons comme il se doit trois classes Φ , Φ' et Φ'' appartenant à $G(\Delta)$. Choisissons une première forme $f=(a,b,c)$ dans Φ dont le coefficient initial a n'est pas nul, puis une forme $f'=(a',b',c')$ dans Φ' dont le coefficient initial a' est un entier non nul premier avec a et enfin une forme $f''=(a'',b'',c'')$ dans Φ'' dont le coefficient initial a'' est un entier non nul premier avec aa' . Tout cela est possible en faisant appel aux résultats exposés ci-dessus dans le n°7. En appliquant ensuite un raisonnement fait plus haut (mais ici avec trois congruences), on peut démontrer qu'il existe un entier B tel que $B \equiv b \pmod{2a}$, $B \equiv b' \pmod{2a'}$ et $B \equiv b'' \pmod{2a''}$ (cf n°8).

Sans changer alors les classes Φ , Φ' et Φ'' , on peut donc supposer que les formes f , f' et f'' ont le même coefficient central B qu'on écrira en fait b , de sorte que

$$f=(a,b,c), f'=(a',b,c'), f''=(a'',b,c'')$$

En utilisant alors les résultats du début du n°4, on voit aisément que f et f' sont composables et que $f*f'=(aa',b,\frac{b^2-\Delta}{4aa'})$, puis que $f*f'$ est composable avec f'' et que

$$(f*f')*f''=(aa'a'',b,\frac{b^2-\Delta}{4aa'a''}).$$

Mais un raisonnement semblable conduit à montrer que la composée $f*(f'*f'')$ est définie

$$\text{et que l'on a aussi } f*(f'*f'')=(aa'a'',b,\frac{b^2-\Delta}{4aa'a''})$$

D'où l'égalité $(f*f')*f''=f*(f'*f'')$ et, en passant aux classes, la relation $(\Phi*\Phi')*\Phi''=\Phi*(\Phi'*\Phi'')$ qu'il fallait démontrer.

Le reste de la démonstration n'est pas difficile (donc laissée au lecteur) : on aura simplement à représenter la classe principale par une forme du type $(1,b,\frac{b^2-\Delta}{4})$ et dans le cas des formes inverses (a,b,c) et (c,b,a) à se ramener au cas où $ac \neq 0$ (cf la fin du n°7).

12. Le groupe $G=G(\Delta)$ obtenu est fini, d'ordre $g=g(\Delta)$ (cf §A, n°20). Dans la suite, on notera multiplicativement la composition des classes dans $G(\Delta)$, ce qui permettra de parler du "produit" $\Phi\Phi'$ de deux classes, de la classe "unité" et de la classe "inverse" Φ^{-1} d'une classe Φ donnée.

Il est alors clair qu'une classe ambiguë primitive de discriminant Δ apparaît maintenant comme un élément $\Phi \in G(\Delta)$ tel que $\Phi=\Phi^{-1}$ (cf §A, n°11). Il revient au même de dire que $\Phi^2=1$.

Ces éléments Φ de $G(\Delta)$ forment évidemment un sous-groupe qu'on notera $A(\Delta)$ et dont on a calculé l'ordre, du moins dans le cas où Δ impair et négatif : il est égal à 2^r où r est le nombre de diviseurs premiers de Δ (cf §B, n°11).

Tous ces résultats nous serviront dans l'étude de ce que Gauss a appelé les "genres de formes" - mais cela est une autre histoire qu'on verra dans un prochain numéro!

Pour le lecteur qui voudrait un exemple concret de groupes de classes de formes primitives de discriminant Δ (on dira simplement "groupe de classes"...), nous lui conseillons de reprendre le cas où $\Delta=-63$ (cf §B, n°10 et n°11). Il devrait trouver un groupe d'ordre 8 produit direct d'un groupe d'ordre 2 (engendré par $(-1,-1,-16)$) et d'un groupe cyclique d'ordre 4 (engendré par $(2,1,8)$).

Livres cités dans le texte :

[BUE] Duncan E. BUELL, *Binary Quadratic Forms, Classical Theory and Modern Computations*, Springer Verlag, 1989.

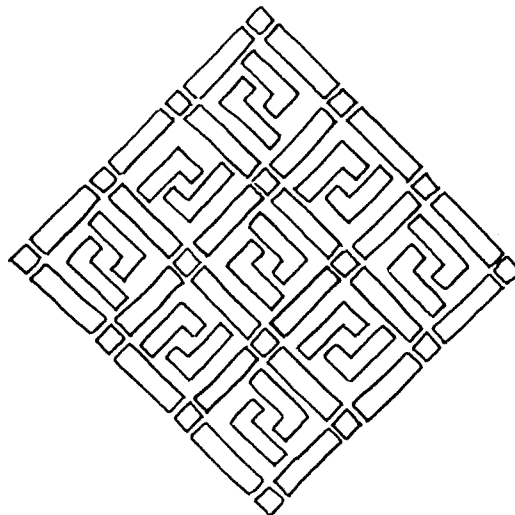
[CAS] J.W.S. CASSELS, *Rational Quadratic Forms*, Academic Press, 1978.

[DIE] Jean DIEUDONNE (sous la direction de), *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, vol.I, Hermann, 1978. Il y a maintenant une nouvelle édition regroupant les deux volumes de 1978.

[GAU] Carl Friedrich GAUSS, *Recherches arithmétiques* (traduction française de *Disquisitiones Arithmeticae*, par A.-C.-M. Poulet - Delisle), réimpression éditions Jacques Gabay, 1989.

[VEN] B.A. VENKOV, *Elementary number Theory*, Walters - Noordhoff Publishing Groningen, 1970.

[WEI] André WEIL, *Number Theory, An approach through history, From Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, 1984.



Motif utilisé dans l'art 'bakuba'
(extrait du livre de Claudia Zaslavsky "Africa counts"
Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1973).

COURRIER DES LECTEURS

L'article de Marcel Krier paru dans "L'Ouvvert" n°75 sous le titre "Nos élèves sortant de classe terminale sont-ils prêts pour l'Université" a suscité diverses réactions, quelquefois vives, quelquefois ironiques, mais toujours très sévères pour l'enseignement supérieur.

Ainsi par exemple S. Haegel, professeur de lycée interpelle vivement les professeurs d'Université :

« Nos élèves, étudiants ne savent plus... Il ne savent plus raisonner et vous, profs de fac, leur apprenez-vous à raisonner ? Ils ont des problèmes de logique, faites vous l'effort de leur enseigner la logique ? Nous avons des programmes à respecter, nous les respectons ! Si vous voulez former des scientifiques, apprenez à combler les lacunes de vos étudiants. »

D. Reisz, I.P.R. de mathématiques à Dijon en profite pour évoquer quelques souvenirs alsaciens, tout en essayant d'analyser en profondeur l'évolution des conditions d'enseignement des mathématiques à tous les niveaux.

« Quand j'ai fait mes études au lycée Kléber, puis à l'Université de Strasbourg nous étions déjà bien nuls, mais je dois quand même dire que j'y ai connu des maîtres remarquables, tant par leurs différences que par leurs complémentarités : Favard, Bronner, Thom, Deny, Malgrange, Koscul, Berger et quelques autres. Depuis, sans aucun doute, la situation s'est bien dégradée. Mes deux collègues IPR, "Amis de trente ans", n'y sont sans doute pas pour rien ! Bref, l'Alsace n'est plus ce qu'elle était !

C'est d'ailleurs pour cela que j'ai choisi de sévir en Bourgogne, d'abord comme professeur, puis comme IPR. Les collègues de lycée que j'y côtoie, l'enseignement que j'y observe, les problèmes qui sont proposés aux élèves, l'attention qui est portée à leur formation mathématique en dehors, à côté d'un nécessaire bachotage me semble dans la très grande majorité des cas de très bonne qualité et répond en tout point aux critiques qui sont sous-jacentes vis à vis des profs alsaciens. Cela dit, jauger cet enseignement à travers les sujets de bac est un peu léger. Le bac s'adresse à des dizaines de milliers de candidats formés par des milliers de professeurs et corrigés par des milliers d'autres professeurs (image des précédents par une permutation). C'est un examen sous haute surveillance médiatique. Il est donc assez normal que les sujets soient fortement aseptisés, sans grandes aspérités. Ils ont pour seul objectif un objectif d'évaluation d'un certain nombre d'acquis de base. Il est vrai aussi que les thèmes mathématiques de ces sujets sont souvent assez intéressants, même si l'énoncé est ultra encadré, guidant pas à pas les élèves vers la solution. Je conseille d'ailleurs souvent à mes collègues de les réutiliser en classe, dans un objectif de formation, en supprimant 3 questions (intermédiaires) sur 4, afin de redonner la main aux élèves.

COURRIER DES LECTEURS

Si j'avais, à ce sujet, un reproche à faire à l'enseignement secondaire en général, sinon à chaque professeur en particulier, c'est d'être trop centré sur une logique d'évaluation. Certes l'évaluation, et plus généralement l'orientation, est une nécessité et une de nos missions essentielles, certes la pression sociale face à l'évaluation est grande tant du côté des parents et des élèves que du côté de l'administration, mais faut-il toujours aller dans le sens de cette demande qui transforme l'enseignement en une perpétuelle préparation et révision du prochain contrôle ? N'oublions jamais que notre mission fondamentale est la formation.

Les problèmes biens réels que rencontrent nos collègues universitaires sont, à mon avis, faciles à analyser. En trouver des solutions simples, acceptables par l'ensemble des acteurs concernés, tenant dans une enveloppe budgétaire donnée, est une toute autre affaire ! Je dirais, pour faire simple, qu'après les collèges, puis les lycées, les Deug et plus généralement l'Enseignement Supérieur se trouvent confrontés avec la vague déferlante d'une massification sans précédent de la scolarisation. Les "bons élèves" existent toujours. Ils étaient sans doute 50 %, voire 80 % de la masse scolarisée il y a trente ans (à Strasbourg, à la fin des années 50, nous étions une trentaine en "Maths géné", une quinzaine en licence, deux en Analyse Supérieure, chez le vieux père Cerf). Cette même quantité de bons élèves, abstraction faite des changements de comportement dans les habitudes vers d'autres filières, noyée dans la masse, représente maintenant sûrement moins de 5 %.

Quand à savoir s'il faut redevenir plus sélectif, instaurer un numerus clausus, s'il faut organiser des filières de "niveau", avec des pédagogies adaptées, s'il faut modifier les finalités de formations des différentes institutions concernées, il s'agit là de questions essentielles mais qui ne peuvent être aux seules mains du système éducatif. Ce sont là des choix de société, des choix culturels, des choix politiques, dont nous ne sommes que des exécutants, au mieux des experts.

A supposer que les orientations actuelles de massification très forte de la population scolarisée aux différents niveaux soient maintenues par la demande sociale et le pouvoir politique, il faudra bien que le système éducatif en assume les conséquences avec les moyens que cette même société, que ce même pouvoir politique, lui accordera. De telles adaptations sont forcément douloureuses, se payent au prix d'abandons d'ambitions jugées "normales" jusqu'alors, au prix d'efforts pédagogiques tâtonnants, au prix d'une usure des professeurs face à une population de plus en plus hétérogène. Les collègues ont vécu cette évolution et s'y sont adaptés, au delà des critiques et des actuelles, et sans doute nécessaires, réformes en préparation. Les lycées ont essuyé la vague déferlante et, avec un léger retard sur l'évènement, essaient d'y faire face tant bien que mal. Et il en est de même dans les DEUGS et les Seconds Cycles du supérieur : les étudiants sont là, l'élimination à outrance dès la fin de la première année n'est socialement pas tenable à moyen terme. Il faut alors repenser les objectifs de chaque enseignement, les moyens pédagogiques à mettre en oeuvre... Mais ne soyons pas dupes : les moyens pédagogiques ne peuvent à eux seuls adapter les étudiants à des objectifs qui resteraient, eux, immuables. Le profil socio-culturel de nos étudiants change, notre culture est de moins en moins une culture de l'écrit, alors que les mathématiques sont, elles, une discipline "écrite".

Il faut donc douloureusement, repenser les objectifs et pas seulement en terme d'allègement des contenus, mais aussi en terme de modification des pratiques, en terme de didactique (ô horreur !). Lorsque je regarde certains contrôles, certains sujets d'examen de DEUG, je n'ai pas toujours l'impression qu'une telle réflexion a eu lieu partout. Un étudiant qui arrive en DEUG a subi plus de 1 000 heures d'enseignement de mathématiques depuis la sixième. Cela l'a forcément façonné et quoiqu'on pense de ce façonnage, c'est sur

COURRIER DES LECTEURS

lui qu'il faudra s'appuyer, même si c'est pour progressivement le faire évoluer, y introduire des ruptures. Or, trop souvent, j'ai l'impression que l'enseignement universitaire, non sans une certaine délectation morbide, prend le contre-pied de cette formation reçue dans l'enseignement secondaire."

La position charnière de "L'Ouvert" lieu d'échange et d'information privilégié entre professeurs du secondaire et professeurs universitaires, ne peut que l'inciter à favoriser une meilleure compréhension des uns et des autres. Pour "repenser les objectifs, modifier les pratiques" il faut d'abord bien connaître les objectifs et les pratiques des autres. C'est pourquoi s'est mis en place durant l'année écoulée, un groupe IREM constitué de trois professeurs d'Université et de trois professeurs de lycée, afin de réfléchir à la jonction "Terminales-Deug". Voici les principaux éléments de leur constat, présentés sous le titre évocateur de "LA DERIVE DES CONTINENTS".

LA DERIVE DES CONTINENTS

Ces quelques réflexions proviennent d'une dizaine de réunions d'un groupe IREM sur le thème de la jonction Terminales-DEUG. Ce groupe IREM est composé de :

BLASCO L. (U.F.R. Math. Info. U.L.P.), DIDIERJEAN A. (U.F.R. Math. Info. U.L.P.), KAHN C. (Lycée Marie Curie), KHARLAMOV S. (U.F.R. Math. Info. U.L.P.), KOCH B. (Legt Haguenau), WEIL D. (Lycée International).

I - QUELQUES CARACTERISTIQUES STRUCTURELLES DE CHACUN DES CONTINENTS

Le second degré, les terminales

Les élèves sont regroupés dans des classes de 30 à 40 élèves pour un enseignement de 9 heures par semaine (dont une heure dédoublée en travaux dirigés) pour les C, ou de 6 heures par semaine pour les D. Un élève de terminale suit de 31 à 40 heures de cours suivant son choix d'options.

On constate ces dernières années un afflux d'élèves vers les sections scientifiques ; les uns s'y rendent par goût, d'autres, nombreux, pensent que cette filière offre le plus de débouchés. Ces éléments conduisent les bons élèves à désertir les filières littéraires A et économique B, d'où le cliché : la filière scientifique est une filière d'élite. Dans cette phrase, on oublie trop souvent qu'au lycée le passage dans la classe supérieure est facilement accordé. On trouve aujourd'hui dans les Terminales scientifiques :

- de bons élèves dans toutes les matières ;
- des élèves ayant du goût pour les sciences ;
- des élèves bons en lettres, mais qui espèrent être plus stimulés au travail dans une filière d'élite ;

COURRIER DES LECTEURS

- de nombreux élèves très moyens que le système scolaire n'a pas arrêté dans leur choix et qui pensent que toutes les possibilités sont offertes à un bachelier scientifique.

Les élèves des trois premières catégories essaient de se diriger vers les classes préparatoires, les écoles d'ingénieurs à préparation intégrée ou vers des études littéraires ou juridiques.

Certains s'orientent par choix vers un DEUG A où ils retrouveront souvent ceux de la dernière catégorie.

On peut imaginer que ce schéma va évoluer si le Ministre arrive, comme il le proclame, à réduire la part des mathématiques dans l'enseignement secondaire et leur poids dans l'orientation. La filière scientifique ne serait plus filière d'élite et l'on retrouverait de bons élèves dans les classes littéraires et économiques.

L'enseignement supérieur, les "DEUG"

L'enseignement en DEUG est constitué de Cours Magistraux en amphis et de T.D. par groupes d'environ 30 étudiants.

Les horaires de cours pour un étudiant du DEUG Sciences, mention Maths Informatique, se répartissent comme suit :

	Cours	T.D.	
1 ^{er} semestre (Mathématiques A)	40 h	50 h	10 semaines
2 ^{ème} semestre (Mathématiques B)	32 h	48 h	16 semaines
2 ^{ème} semestre (Analyse A)	32 h	48 h	16 semaines

L'ensemble est réparti sur 26 semaines de cours, soit une moyenne de 9,5 h de mathématiques par semaine et de 1,4 h de T.D. pour une heure de cours en amphi.

L'horaire total de cours pour un étudiant (toutes matières confondues) est de 490 h soit une moyenne de 19 h par semaine.

Les étudiants sont répartis en amphis pour les cours (150 à 300 étudiants) et en groupes de T.D. pour des séances d'exercices.

Ainsi, par exemple, une unité comme "Mathématiques A" a quatre amphis qui tournent en parallèle pour 20 groupes de travaux dirigés.

Un étudiant peut avoir pour ses 9,5 h de mathématiques par semaine, jusqu'à 4 enseignants différents.

Les problèmes de moyens matériels (salles) et humains (postes d'enseignants) sont au coeur de ces caractéristiques. Le rapport, nombres d'heures de T.D. pour une heure de cours, qui était toujours, en mathématiques, supérieur à 2 il y a quelques années, est passé à une moyenne de 1,5 actuellement. Les groupes de T.D. qui comprenaient en général une vingtaine d'étudiants il y a dix ans sont plus près actuellement de 40 que de 30.

A titre de comparaison, en classes préparatoires, l'horaire de mathématiques est de 15 h par semaine, dont 12 h de cours par classe de 45 étudiants, 2 h de T.D. par groupes de 20 à 25 étudiants, 1 h de colle par groupes de 3 étudiants et ceci sur 35 semaines.

II - METHODES D'ENSEIGNEMENT DE CHAQUE CONTINENT

Dans le second degré, les terminales

Actuellement les élèves sont très encadrés au lycée et cela ne changera probablement pas. Durant leur année de terminale, ils ont un professeur de mathématiques chargé de la totalité de l'enseignement. Les méthodes pédagogiques ont beaucoup évolué ces dernières années et les projets de programme, pour la réforme qui interviendra dès la rentrée de septembre 1994, vont dans le même sens.

Le cours magistral tend à disparaître. Les instructions officielles, qui régissent tout l'enseignement du second degré, préconisent des activités préparatoires pour introduire une notion nouvelle, suivies d'une "synthèse brève". Le cours n'est souvent qu'un résumé fait de définitions, de propriétés et de théorèmes presque tous admis.

1. Les textes officiels

Dans l'exposé des motifs du programme de seconde (BO N° 20 ; 17 mai 1990) on relève les recommandations suivantes que nous ne pensons pas dénaturer en les sortant de leur contexte :

- *on a voulu entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique ;*
- *on a voulu insister sur ... le rôle formateur des activités de résolution de problèmes ;*
- *on cherche une meilleure solidité sur des points essentiels ;*
- *on a voulu s'en tenir à un vocabulaire théorique modeste... ;*
- *la résolution de problèmes constitue, comme au collège, l'objectif essentiel ;*
- *la classe de mathématiques est d'abord un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexion et de débat sur les démarches suivies et les résultats obtenus ;*
- *la résolution de problèmes et l'étude de situations occupent une part importante du temps ;*
- *les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en oeuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique ;*
- *pour les démonstrations, le professeur est laissé juge de l'opportunité de les faire, d'en donner une esquisse, ou d'admettre le résultat tout en maintenant un bon équilibre entre ces différentes possibilités.*

2. Un scénario presque parfait (à partir de ces textes) :

A partir de ces conseils, on peut imaginer un scénario "idéal" pour l'introduction d'une nouvelle notion ou d'un nouvel outil :

- a. Le professeur propose, ou mieux, fait découvrir un problème (ouvert!). Il crée un débat dans sa classe à propos de ce problème.
- b. Les élèves s'approprient le problème qui devient leur problème. Ils sont motivés pour le résoudre (par exemple pour prouver aux autres qu'ils ont raison, par curiosité, par défi...). Les élèves cherchent (sèchent), expérimentent, inventent sans parvenir à une

COURRIER DES LECTEURS

solution totalement satisfaisante, le problème ayant été choisi pour exiger un apport de connaissances nouvelles.

- c. De cette insatisfaction naît la demande d'outils ou de notions plus performants à laquelle le professeur va répondre atteignant ainsi l'objectif visé. Les éléments nouveaux nécessaires à la résolution du problème sont alors construits en dialogue avec les élèves. D'autres problèmes sont proposés qui montrent la généralité de ces nouveaux outils, leur valeur de méthode.
- d. Une synthèse permet de préciser ce qui devra être retenu, de donner l'une ou l'autre démonstration d'un résultat déjà fourni et utilisé, de relier les éléments nouveaux aux connaissances anciennes. C'est ce qui donne le "cours" bref souhaité.
- e. Les élèves "apprennent" ce cours qui a du "sens" pour eux et sont à même de le réinvestir pour résoudre de manière efficace une nouvelle classe de problèmes.

3. Le beau scénario à l'épreuve des faits :

La réalité est souvent bien différente sans que la responsabilité de cette dérive puisse être nettement située.

Les classes sont nombreuses (plus de 30 élèves), hétérogènes, et la marge entre un débat animé et un chahut larvé est parfois mince.

Le professeur n'a pas toujours l'imagination, la créativité, les connaissances lui permettant de mettre ainsi en scène toute séquence d'acquisition. Sa formation entièrement centrée sur les connaissances mathématiques l'a mal préparé à cette "ingénierie didactique". Il trouvera dans les manuels peu de matériel lui facilitant la préparation d'une telle séquence. De plus certaines notions nouvelles se prêtent mal à ce type de présentation.

Le scénario dit "idéal" ci-dessus est gourmand en temps et le professeur jugera souvent que le coût est trop lourd par rapport aux résultats. Les effets bénéfiques secondaires ne sont pas immédiatement visibles.

En terminale où l'envie de faire des mathématiques est, même chez des élèves intéressés, momentanément occultée par l'envie de réussir le BAC, la tentation est alors grande d'atomiser les connaissances et de procéder à un bachotage intensif sur des méthodes de type assez algorithmique ce qui développe des compétences ponctuelles qui sont précisément celles qui seront évaluées par les épreuves de BAC.

4. Quelques conséquences :

La démonstration d'un théorème a presque disparu de l'enseignement du lycée. Elle fait tellement figure d'exception, que les élèves n'en comprennent souvent pas le statut.

Par exemple : en terminale C, la première démonstration de cours peut être celle du résultat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. On retrouve ensuite dans certaines copies cette démonstration complète dès que le résultat est utilisé. Le sens même de la démonstration disparaît.

Avec le cours bref, utilisé comme un mode d'emploi ou une règle de jeu, l'élève est prêt à chercher des exercices et des problèmes, à effectuer des travaux pratiques, à condition qu'ils soient proposés en difficulté croissante, qu'il y ait beaucoup de questions intermédiaires, que l'on retrouve un certain nombre de fois le même schéma.

COURRIER DES LECTEURS

Le problème ouvert (chronophage!) a presque disparu en terminale, la part d'initiative personnelle est très limitée, le temps des recherches de plus en plus réduit. En terminale on apprend moins à "sécher" qu'à reproduire.

On réduit le cours magistral et on offre des activités variées à chercher en groupe. Les élèves "zappeurs" ont moins l'habitude de se concentrer. Le nouveau public d'élèves, plus actif en principe que le précédent, n'est pas du tout prêt à subir une séquence d'une heure et demie de cours magistral ; il n'est pas prêt non plus à le travailler, car il ne "sait pas". Il est coulé dans un autre moule, celui de l'exemple qui précède ou suit la définition : il utilise des mots dont il ne connaît le sens que dans des cas particuliers.

Par exemple, un test a prouvé, dans une classe de terminale C, que tous les élèves "connaissaient" les mots réunion et intersection, pas un n'était capable d'en donner une définition, peu nombreux étaient ceux qui savaient les illustrer sur un diagramme.

Le mot réunion est attaché à l'ensemble de définition d'une fonction et le mot intersection à celle de deux courbes.

Au lycée on s'entend bien, entre élèves et enseignants, avec cet usage. Lorsqu'on pousse la curiosité plus loin et qu'on exige des définitions on arrive à des phrases telles que :

" $A \cap B$ " sert à identifier ce qui appartient à deux ensembles."

"Une union est un ensemble de choses dont certains ne font pas partie."

" $A \cup B$ signifie que les points de A font aussi partie de B et vice-versa."

"Le symbole \cup sert à rassembler les parties différentes pour exprimer plus facilement un nombre de conditions importantes."

"Dans une réunion on associe des éléments."

Dans un problème les questions intermédiaires sont toujours données. Les élèves n'ont pas à faire preuve de beaucoup d'initiative, de créativité (sauf peut-être en géométrie où il est moins rare d'obtenir plusieurs propositions de solution). Le but global du problème (lorsqu'il est explicité) est occulté par les difficultés des élèves sur chaque question.

De l'objectif ambitieux d'"entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique" il ne subsistera trop souvent que "dresser les élèves à bien faire les exercices des annales de BAC".

Dans l'enseignement supérieur, les "DEUG"

Les méthodes pédagogiques sont très différentes dans l'enseignement supérieur de celles décrites précédemment pour le second degré. Un étudiant devrait, en un espace de temps réduit, acquérir et assimiler un grand nombre de notions.

Les cours de mathématiques sont formés de petites théories complètes construites avec rigueur. Un étudiant doit pouvoir prendre des notes de cours, les retravailler et les appliquer dans les différentes situations présentées en TP. Cependant, en place d'évolution des méthodes pédagogiques, c'est le manque progressif de moyens qui a imposé la situation actuelle. En dehors des contraintes structurelles décrites précédemment, cours magistral en amphis et séances d'exercices, le canevas de programme laisse à chaque enseignant une grande latitude dans la façon de le traiter.

Nous nous trouvons actuellement dans une situation contradictoire qui ne fait que de s'aggraver: la nécessité ressentie de maintenir le niveau des Licences et Maîtrises actuelles et l'évolution des terminales nous mettent, en DEUG, dans une situation impossible.

COURRIER DES LECTEURS

Souvent, sur le thème du cours, des listes d'exercices sont distribués aux étudiants. Ces listes servent alors de base pour le travail dans l'ensemble des groupes de T.D. d'une unité.

L'année scolaire se trouve partagée en deux semestres de longueurs inégales (10 et 16 semaines). Au bout du premier semestre, à la suite des partiels, les étudiants sont, soit autorisés à poursuivre dans la filière de leur choix, soit orientés sur une remise à niveau qui leur permettra de reprendre, l'année suivante, le cursus choisi sans qu'une année de redoublement ne leur soit comptabilisée.

Difficultés des étudiants

L'évolution des méthodes d'enseignement en terminale décrites précédemment, conjuguée aux énormes difficultés des deugs ne fait qu'accroître la faille entre ces deux continents. Hormis en préparatoire (du fait de ses moyens matériels) sauter la faille pour un étudiant devient de plus en plus hasardeux.

Au fil des dernières années les étudiants sont de moins en moins préparés à suivre et travailler un cours magistral, alors que la part de celui-ci dans l'enseignement supérieur est devenue de plus en plus importante, de moins en moins habitués à acquérir des notions par eux mêmes (au moyen de notes de cours, d'ouvrages) alors que cela leur est de plus en plus nécessaire à leur arrivée en DEUG. L'augmentation du nombre d'enseignants à laquelle les étudiants ont à faire face rend l'adaptation difficile.

Durant leur scolarité dans le second degré les élèves ont été habitués à une très grande homogénéité, voire une très grande rigidité des notations qui leurs sont proposées. A leur arrivée en DEUG, les élèves devenus étudiants semblent avoir beaucoup de mal à s'adapter à de nouvelles notations. Il semble que souvent, dans leur cursus du second degré, les notations ont fini par occulter les concepts qu'elles recouvrent.

Ainsi, par exemple à propos des fonctions périodiques :
Amenés à étudier la fonction $\tan(x) - x$ sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, des élèves croient utile de préciser que la fonction est de période π .

Dialogue entre un professeur (P) et ses élèves de T.C.(E) :

P : La fonction $f(x) = \cos(x)$ est elle périodique ?

E : Oui de période 2π (pour tous les élèves)

P : Qu'en est - il de la fonction $x(t) = \cos(\omega t)$?

E : C'est pas des maths! (sans doute parce que la variable s'appelle t et la fonction x), si vous posez la question, la période est 2π (sans doute parce qu'il y a cos dans l'écriture)

P : Et en physique, quelle est la période, c'est 2π ?

E : Ah non, en physique c'est $2\pi/\omega$.(logique non !)

Les propriétés $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$, plus généralement $f(x+t) = f(x)$ ne sont pas connues des élèves et très longues à faire émerger. Les élèves ne disposent donc d'aucune définition générale, pire, d'aucun moyen de vérifier si une fonction est ou non périodique. Ils n'ont que des exemples de fonctions périodiques.

Les professeurs évitent de définir dans le cadre général la notion de fonction périodique car une définition rigoureuse n'est pas facile à donner (toutes celles des livres de seconde de 1981 étaient fausses !). Cette exigence de rigueur excessive et prématurée a totalement stérilisé l'étude de la notion.

COURRIER DES LECTEURS

La donnée de deux heures de cours de DEUG correspond à une quantité à assimiler pour un étudiant qui serait répartie en terminale sur plusieurs semaines.

Les étudiants ont une très grande difficulté en mathématiques, à tirer leurs acquisitions de connaissances d'un écrit. Qu'en est-il alors de leurs notes de cours ?

Un étudiant de première année du DEUG peut avoir à passer son temps à essayer de trouver un cours. Plusieurs enseignants ayant quitté les amphis suite à un chahut, il faut que les étudiants complètent leurs cours par les notes d'un autre étudiant qui a eu un cours complet dans un amphi parallèle. Malgré l'autonomie dont a pu faire preuve un élève en terminale, il lui sera très difficile de construire un cours à partir de livres dont le style est très différent de celui des manuels de terminale.

Dans des listes d'exercices de DEUG, souvent, chaque exercice met en oeuvre une idée nouvelle (ils sont tous différents). En terminale, les élèves fonctionnent souvent par analogie (sur des exercices très proches). Ils sauront peut-être démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel après avoir vu la démonstration pour $\sqrt{2}$.

Les élèves de terminale manquent de sens critique dans les calculs. Ils ne savent pas s'arrêter avant de se noyer dans des calculs dont l'échec est prévisible (attitude souvent constatée dans des calculs sur les nombres complexes).

III - PASSAGE DU PROGRAMME DE TERMINALE A CELUI DU DEUG

Dans cette partie nous avons repris en italique le programme de mathématiques du DEUG A première année, option Math. Physique. En regard de ce programme nous mettons les notions correspondantes vues en terminale.

Mathématiques A

Sensibilisation aux problèmes de logique : Ensembles, opérations ensemblistes élémentaires, produit cartésien, égalité

Ces notions sont introduites sur des exemples, sans définitions claires. (Par exemple on parle d'ensemble de nombres réels, complexes...).

Les notions d'intersections, de réunion ne semblent pas devoir être considérées comme opérationnelles au sortir de terminale.

Toutes ces notions restent liées aux exemples qui ont permis leur introduction.

Applications : Image directe, image réciproque, injection, surjection, bijection. Composition, restriction.

Les mots injection, surjection, bijection, restriction ne sont pas introduits dans le second degré.

En analyse la notion de fonction réciproque est rencontrée sur des exemples : e^x , $\ln x$, x^n , $\sqrt[n]{x}$.

La notion de composition de fonction se retrouve dans la formule de dérivée des fonctions composées.

En géométrie les notions de composition et de transformation réciproque sont utilisées.

Nombres réels et fonctions d'une variable réelle : Majorants, minorants, bornes supérieure et inférieure, suites, limites, théorèmes sur les limites, approximation d'un nombre par des rationnels.

La notion de limite est introduite à partir de suites ou de fonctions de références. La notion de borne n'est pas abordée. Les majorants et minorants sont liés à l'étude des variations d'une fonction.

Fonctions d'une variable réelle : Continuité, dérivabilité, méthode de calcul approché des zéros, fonctions inverses, fonctions usuelles.

Une fonction est presque toujours définie par une unique expression de préférence calculable.

Des problèmes apparaissent avec les fonctions définies "par morceaux" par des expressions différentes. Les fonctions de x de la forme $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ sont bannies, ainsi que l'étude des fonctions dépendant d'un paramètre. Ces dernières sont cachées lors de la résolution des équation différentielles.

La continuité sur un intervalle apparaît comme conséquence de la dérivabilité et est utilisée essentiellement pour justifier l'emploi de certains résultats (par exemple dans le calcul des primitives). La continuité en un point, définie avec la notion de limite, intervient dans les problèmes de prolongement par continuité en un point.

La dérivabilité est définie par le développement limité à l'ordre un. En général cette définition n'est pas exploitée et ne semble pas rester dans la mémoire des étudiants. Par contre, les formules de dérivation et les calculs de dérivées sont acquis.

Les changements de variables interviennent dans les calculs de limites (vus comme fonctions composées) ou les équations.

Pour les méthodes de calcul approché des zéros, la méthode par dichotomie et celle de Newton sont vues et utilisées pour des calculs numériques, sans majoration de l'erreur.

Les fonctions usuelles (fonctions puissances, exponentielles, logarithme...) sont longuement étudiées.

Algèbre linéaire : Espaces vectoriels sur les réels et sur les complexes, sous espaces vectoriels, intersection, somme, supplémentaire. Combinaisons linéaires, générateurs, dépendance linéaire, bases, rang d'un système de vecteurs, espaces vectoriels de dimension finie, matrices associées à un système de vecteurs, formules de changements de bases. Applications linéaires, somme, composition, noyau, image, rang, formule du rang, isomorphismes. Matrices associées à une application linéaire.

C'est une partie entièrement nouvelle sauf en ce qui concerne les systèmes linéaires.

Une première approche des nombres complexes a été vue en terminale.

Les vecteurs du plan et le calcul vectoriel sont des outils de géométrie.

Mathématiques B

Algèbre des matrices : Lois de composition. Réduction à la forme canonique. Applications matricielles. Systèmes linéaires. Déterminants. Rang d'une matrice. Matrices inversibles.

Partie nouvelle.

Espaces vectoriels euclidiens : Espaces affines, vocabulaire, applications affines, exemples : équation de la droite et du plan. Isométrie du plan et de l'espace. Barycentres. Produit vectoriel.

Il se pose un problème de vocabulaire, les élèves de terminale ont été habitués à pratiquer la géométrie plane.

Structures algébriques : Groupes anneaux et corps. Arithmétique élémentaire (algorithme d'Euclide, théorème de Bézout). Polynômes à une variable. Division des polynômes. Décomposition sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

Dans le second degré, on n'étudie pas les structures. Aucune notion d'arithmétique n'est vue. Au mieux les élèves savent simplifier une fraction en cherchant des facteurs communs au numérateur et dénominateur, rarement en décomposant en produit de facteurs premier.

La division euclidienne n'est pas maîtrisée et on peut comprendre que la suite (i^n) est périodique de période 4 et ne pas savoir écrire $i^{4n} = 1, i^{4n+1} \dots$

COURRIER DES LECTEURS

La division des polynômes n'est pas au programme. Dans un polynôme qui s'annule en a les élèves savent factoriser par $(x-a)$ par identification.

Analyse A

Calcul intégral : Intégrale de Riemann. Primitives et intégrales. Cas des fractions rationnelles. Calcul numérique d'une intégrale.

Il est vu dans le second degré en tant que calcul des primitives. L'intégration par parties est au programme, mais aucun changement de variables. Les élèves savent lire "à l'envers" les formules de dérivation. Ils ne connaissent rien sur les fonctions réciproques et sur les fractions rationnelles (sauf éventuellement par identification).

Les élèves éprouvent des difficultés à établir des propriétés pour une intégrale qu'ils ne savent pas calculer.

Les sommes de Riemann ne sont pas vues mais il existe des activités sur la méthode des rectangles.

Formule de Taylor, développements limités, résolution des équations algébriques :

Dans le secondaire on évoque les développements limités à l'ordre 0 et 1, on voit l'inégalité des accroissements finis, mais pas le théorème des valeurs intermédiaires.

Courbes : Courbes planes, paramétrées.

Étude des courbes classiques, un peu de paramétrées.

Équations différentielles linéaires : Premier et deuxième ordre, variables séparables, taux, vitesse, modélisation, exemples classiques.

Sont vues celles du premier et du deuxième ordre à coefficients constants réels sans second membre.

Nous ne pouvons évidemment que souhaiter l'arrêt de cette dérive de deux continents dont chacun tire sa richesse et sa raison d'être de l'autre. Puissent ces réactions et ces informations y contribuer.

Plus que jamais "L'Ouvert" mérite son nom pour vous permettre d'apporter votre propre réaction ou réflexion à ce débat...ouvert.

J.P. Friedelmeyer

La liste des publications de l'IREM peut être obtenue sur simple demande.
Merci d'indiquer l'adresse de votre établissement.

La bibliothèque est ouverte du
lundi au jeudi
de 9 à 12 h et de 14 à 17 h
(se munir d'une photo d'identité pour l'inscription).

A VOS STYLOS

PROBLÈME 30

Énoncé

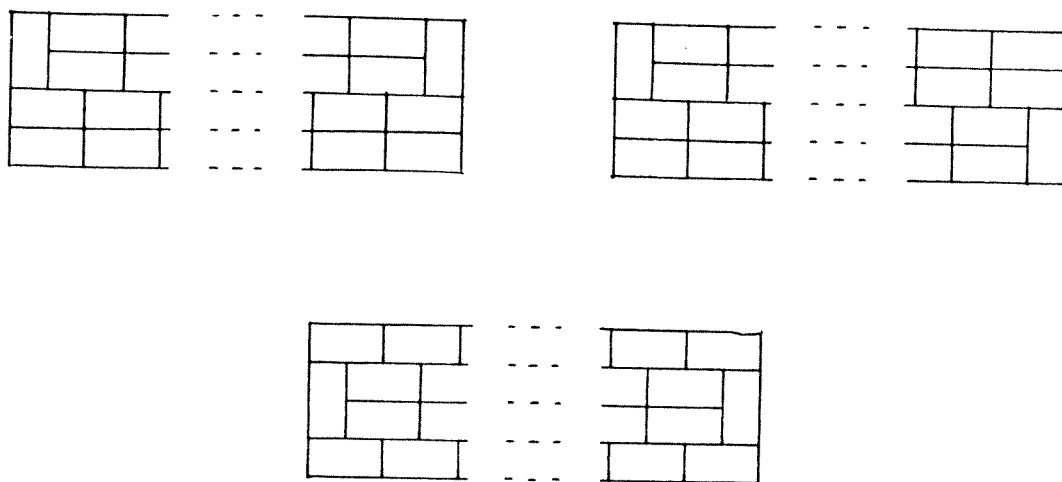
Pour quels entiers $p \geq 2$ et $q \geq 2$ le rectangle de dimensions $p \times q$ peut-il être pavé par des dominos 1×2 de manière que toute droite traversant le rectangle coupe en deux l'un (au moins) des dominos du pavage ?

Solution

Ce problème est posé et résolu dans un article de R. L. Graham paru dans "The Mathematical Gardner" (D. Klarner Ed., Wadsworth 1981). Nous avons reçu de J. Lefort (Colmar) la solution que voici.

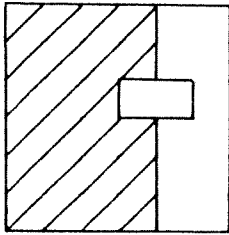
Si un rectangle admet un pavage répondant à la question, ses dimensions p et q vérifient les trois conditions suivantes :

- L'un au moins des nombres p et q est pair. Sinon, l'aire pq du rectangle serait impaire et il ne pourrait être pavé par des dominos.
- Les dimensions p et q valent au moins 5. En effet, si un rectangle de dimensions $p \times 4$ (avec $p > 2$) est pavé de façon qu'aucune droite verticale ne passe entre les dominos, on est dans l'un des trois cas suivants :



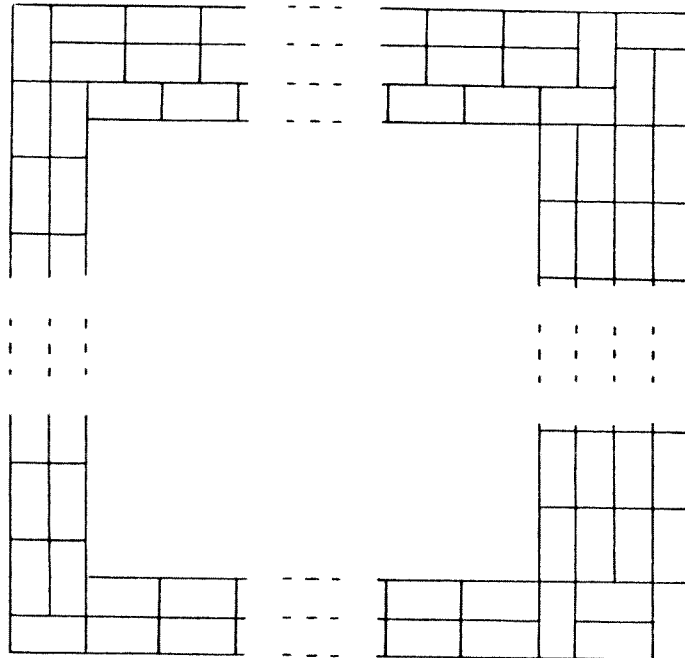
et il existe donc une droite horizontale évitant tous les dominos. Le cas des rectangles $p \times 3$ et $p \times 2$ s'élimine encore plus facilement (nous laissons de côté le cas trivial 1×2 , écarté par l'énoncé).

A VOS STYLOS



c) Le rectangle n'est pas un carré 6×6 . En effet, si un pavage de ce carré répondait à la question, chacune des 10 droites découpant le carré en deux rectangles à dimensions entières devrait couper en deux un domino au moins et même deux dominos au moins (car l'aire hachurée ci-contre est impaire et ne peut donc être pavée par des dominos); la pavage devrait donc comporter au moins 20 dominos, or il n'en a que 18.

Ces trois conditions nécessaires sont aussi suffisantes. En effet, si un rectangle vérifie ces conditions et si l'une des dimensions est impaires, on a affaire à un rectangle $(5 + 2a) \times (6 + 2b)$, avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$, que l'on peut paver ainsi :



(le rectangle central, de dimension $2a \times 2b$, pouvant être pavé n'importe comment). Et si les deux dimensions sont paires, c'est un rectangle $(6 + 2a) \times (8 + 2b)$, que l'on peut paver comme sur la figure page suivante.

PROBLÈME 31

Énoncé

Dans la matinée, la neige se mit à tomber, régulièrement, uniformément. Pour dégager la route, trois chasse-neige partirent du village vers la ville, le premier à midi, le second à quatre heures, le troisième à six heures. (Les trois engins sont du même modèle et ont une vitesse inversement proportionnelle à la quantité de neige présente sur la route.) Sachant que le troisième a rattrapé le second au moment où le second rattrapait le premier, on demande à quelle heure il a commencé à neiger.

Indication

Utiliser comme origine de l'axe des temps l'instant de début de la chute de neige.

PROBLÈME 32

Énoncé (proposé par P. Renfer, d'Ostwald)

On désigne par E la droite, le plan ou l'espace. Trouver toutes les applications f de E dans E qui préservent la distance 1, c'est-à-dire telles que, pour tous points x et y de E vérifiant $d(x, y) = 1$, on a aussi $d(f(x), f(y)) = 1$.

PROBLÈME 33

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel, de Strasbourg)

Etudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}$$

sur l'intervalle $]0, 1[$.

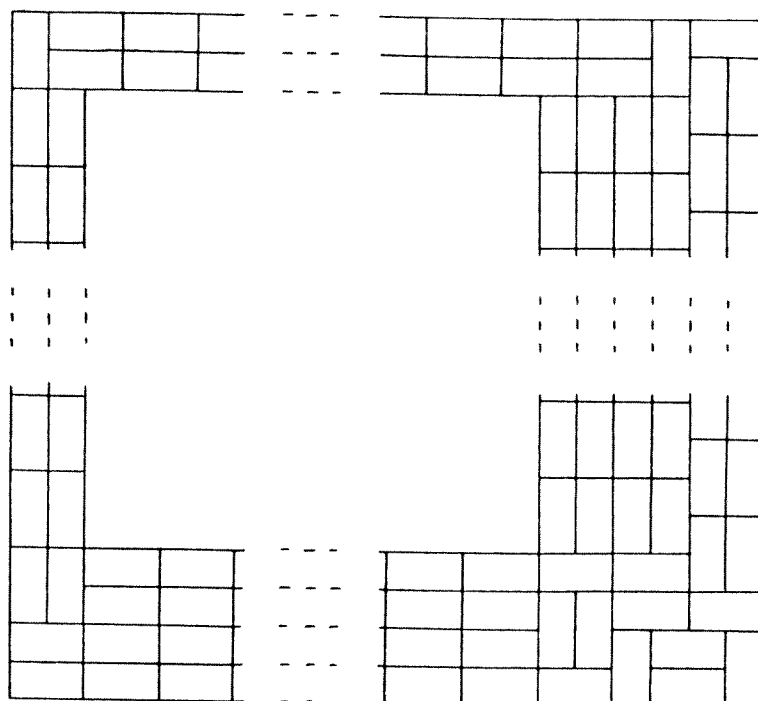


Figure se rapportant à la solution du problème 31

PROGRAMME (provisoire)
CONFERENCES IREM - APMEP
1 9 9 5

- 21 février :** **Jean-Pierre FRIEDELMEYER (*)**
 (Professeur au lycée Couffignal de Strasbourg)
 Une question de l'Académie de SaintPétersbourg pour l'année 1787,
 sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales
 des équations aux différentielles partielles.
- 7 mars :** **Vazgain AVANISSIAN**
 (Professeur à l'UFR de Mathématiques de Strasbourg)
- 21 mars :** **Madeleine BAUER**
 (Maître de Conférences à l'UFR de Mathématiques de Strasbourg)
 Théorème de Mazur Ulam sur les isométries.
 Théorème de Liouville sur les applications uniformes (version
 de Liouville).
- 18 avril :** **M. BRASSELET**
 (Directeur de recherche au CNRS)
 Comment faire passer un T.G.V. en zone urbaine ?
- 16 mai :** **Augustin FRUCHARD**
 (Chargé de Recherche à l'UFR de Mathématiques de Strasbourg)
 La surconvergence des séries de Taylor.

Salle de conférences du Bâtiment de l'IRMA (à 17 h 15)
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

(*) Vous pouvez vous procurer la thèse de doctorat qu'il a soutenue en juin 1993 "Le calcul des dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du XVIIIe siècle" à la bibliothèque de l'IREM (75 F (port compris)).

RENCONTRE A.P.M.E.P.

La Régionale A.P.M.E.P. d'Alsace organise une demi-journée de rencontre pour les professeurs de mathématique de lycées et de collèges

**le samedi 25 mars, de 14 h à 20 h
au Lycée Jean Monnet,
2, place Albert Schweitzer à Strasbourg.**

En voici le programme :

- 14 h : Exposé de Léonard Clauss : "l'Astrolabe".
- 15 h 30 Exposé de Michel Guillemot : "Entre arithmétique et algèbre : les mathématiques égyptiennes".
- 17 h : Pause café ; consultation de brochures.
- 17 h 15 : Assemblée générale pour l'élection du nouveau comité régional de l'APMEP (pour les adhérents APMEP).
- 17 h 45 : En parallèle :
 - débat sur le passage du lycée à l'université ;
 - échange entre professeurs de collèges et l'APMEP.
- 19 h : Apéritif.

Une occasion d'assister à des conférences, de participer à des débats et des échanges, de consulter nos brochures APMEP et IREM et de trouver des informations.

UNIVERSITE D'ETE INTERDISCIPLINAIRE HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Besançon - 8 au 13 juillet 1995

La Commission inter-IREM "Epistémologie et Histoire des Mathématiques" se propose d'organiser la 7ème université d'été sur l'histoire des mathématiques. Cette université d'été est ouverte aux professeurs de collèges, de lycées, aux universitaires, aux formateurs d'enseignants et aux membres de l'inspection des disciplines suivantes : mathématiques, philosophie, sciences physiques et histoire.

Les contenus de la formation sont :

- la construction historique du savoir mathématique dans son contexte scientifique, culturel, philosophique et social ;
- les apports didactiques de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques : obstacles épistémologiques, rôles des problèmes, de la conjecture, de la rigueur, de l'évidence, de la démonstration et de l'erreur ;
- les rapports entre sciences, cultures, techniques et sociétés ;
- l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques.

Parmi les thèmes qui seront abordés lors de l'université d'été, il y aura :

- les mathématiques ;
- les philosophes et les mathématiques ;
- les mathématiques et le hasard, histoire des probabilités et des statistiques.

La tenue de l'université d'été sera annoncée dans un Bulletin Officiel, à paraître au printemps 1995. Les candidatures devront être déposées selon les indications et le calendrier donnés au Bulletin Officiel.

Pour obtenir des renseignements, s'adresser à :

- Evelyne BARBIN, Université Paris 7 - IREM - 2 place Jussieu - CP 7018 - 75251 Paris cedex 05 (tél. : 44 27 53 83 - fax : 44 27 56 08),
- Yces DUCCEL, IREM - UFR des Sciences et des Techniques - 16 route de Gray - La Bouloie - 25030 Besançon cedex (tél. : 81 66 61 92 - fax : 81 66 61 99),
- Jean-Pierre FRIEDELMEYER - IREM - 10 rue du Général Zimmer - 67084 Strasbourg cedex.