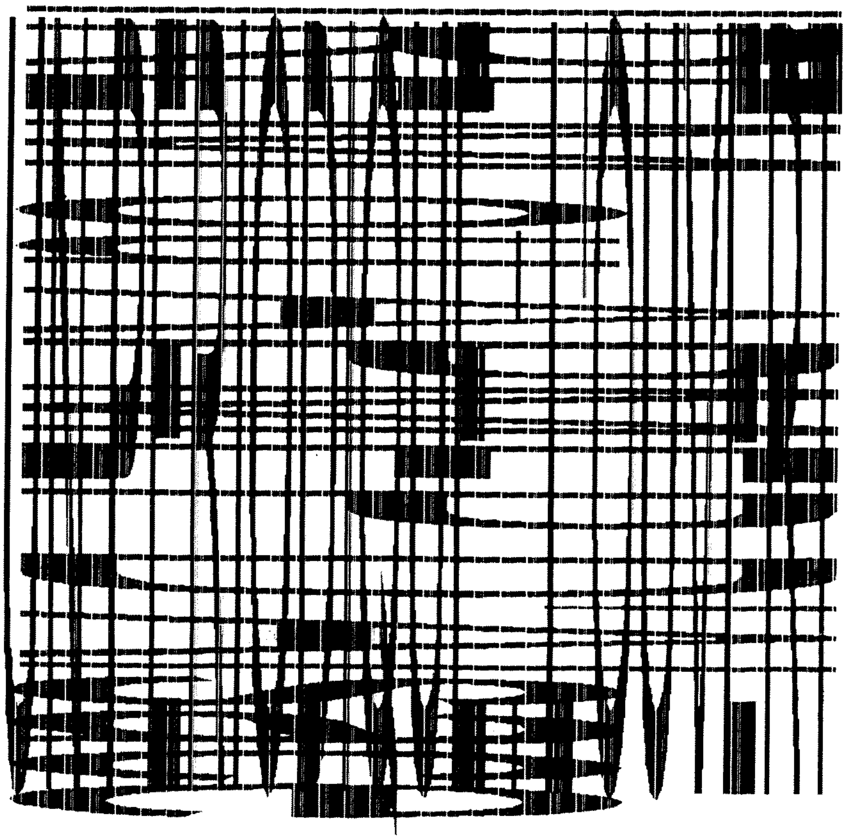
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 79 – JUIN 1995 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE

réalisée par Jean LEFORT

La signalisation routière horizontale (sur la chaussée) utilise des symboles très allongés dans le sens de la circulation (voir par exemple les indications de pistes cyclables, les flèches, les lettres ...). C'est toujours une surprise de remarquer que l'affinité est une transformation bijective et qu'il est possible de revenir au point de départ grâce à une vision oblique.

Peu de gens se rendent compte que les vélos dessinés sur le sol ont des roues elliptiques! Une affinité dont le rapport est très grand donne des images peu lisibles en vision normale.

Le dessin de couverture est encore moins lisible puisqu'on y a superposé deux textes correspondant à des affinités de directions orthogonales, mais il est facile de lire l'information en inclinant convenablement votre revue.

ÉDITORIAL

Le comité de rédaction de *'l'Ouvert'* m'a demandé de rédiger, en tant que nouveau directeur de l'IREM, l'éditorial du présent numéro. J'ai accepté immédiatement car, après quelques mois de fonction, j'éprouve le besoin de faire part d'un certain nombre d'impressions.

J'espère que l'APMEP ne m'en voudra pas de ne parler, cette fois ci que de l'IREM, alors que *'l'Ouvert'* est aussi son journal.

Je croyais connaitre l'IREM, ayant participé, certes il y a bien longtemps, à la rédaction de manuels scolaires. Ma récente collaboration à un 'groupe' et ma nouvelle fonction m'ont fait découvrir un monde dont j'étais totalement ignorant. Je m'aperçois qu'on ne soupçonne pas à l'extérieur l'importance et la richesse du travail effectué au sein de l'IREM.

Je suis impressionné par les qualités humaines et professionnelles de tous ces 'enseignants animateurs' que je suis amené à côtoyer : ouverture d'esprit, dévouemement, sens de la critique et goût de la perfection. Ils mettent toutes ces qualités au service de l'enseignement des mathématiques en manifestant un réel besoin de se former et de partager leur savoir et leur expérience, en étant à l'affût du moindre changement de programme, s'interrogeant sur ses implications futures, s'inquiétant de l'évolution du statut de leur matière dans l'enseignement du premier et second degré. Tout cela est inspiré par le plaisir que leur procure l'activité mathématique.

Ces enseignants ont su donner à l'IREM de Strasbourg une vitalité étonnante; en témoignent la pertinence et l'originalité des thèmes de recherche choisis ainsi que la qualité des travaux effectués. Ceux-ci sont toujours en prise directe sur l'enseignement comme le montrent les stages de formation, brochures et articles qui en résultent. Il aurait été souhaitable que je sois un peu plus précis et concret, mais cela était difficile vu l'importance des activités dont il aurait fallu parler en quelques lignes : pas moins de 14 groupes fonctionnent l'année en cours.

Pour l'avenir il serait utile que les différents 'groupes' fassent mieux connaître et reconnaître la valeur de leurs activités et en rendent compte de manière plus explicite, par exemple dans *'l'Ouvert'*. Et il serait bénéfique pour tout le monde que la communauté mathématique montre plus d'intérêt pour l'IREM et réalise l'importance de cet institut pour les mathématiques.

Émile URLACHER.

SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 79 – JUIN 1995

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
80 F (130 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
120 F (200 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 30.– F

RENCONTRE APMEP DU 25 MARS 1995

Jean-Pierre FRIEDELMEYER et Richard CABASSUT

Dans le dernier numéro de *'L'Ouvert'* (n° 78), nous vous annoncions une demi-journée de rencontre pour les professeurs de mathématiques de lycée et collège, organisée par la Régionale APMEP d'Alsace. Cette rencontre connut un vif succès (environ 60 inscrits) et a donné lieu à deux conférences tout à fait passionnantes et deux débats en parallèle sur des questions au cœur de notre enseignement actuel.

Léonard Clauss, professeur au lycée Bartholdi de Colmar, a commencé en nous parlant de l'astrolabe. Pour qui ne connaît pas le sujet, l'astrolabe pourrait passer pour une de ces vieilleries qui ne passionnent plus que quelques collectionneurs maniaques ou quelques fouineurs d'antiquités. L. Clauss nous a montré avec éloquence et passion qu'il n'en est rien. Bien au contraire, il a trouvé là le sujet que tout professeur de mathématiques rêve de dénicher. L'astrolabe, en effet, concentre les intérêts les plus riches et les plus divers comme cela peut être lu dans l'introduction de la brochure de L. Clauss :

> "*Utile en son temps quand l'homme savait vivre au rythme de l'étoile Soleil, l'astrolabe l'est resté pour qui veut découvrir la mine d'activités conduisant à sa réalisation :*
> *- pour qui est attiré par l'astronomie, la théorie introduira à l'étude passionnante à plus d'un titre des phénomènes célestes dont est tributaire la minuscule planète Terre ;*
> *- pour l'amoureux de science, le "joyau" satisfera pleinement sa curiosité mathématique ;*
> *- le mordu d'informatique y puisera amplement matière à écrire des programmes lui épargnant les calculs et les tracés des épures à la main ;*
> *- pour qui enfin ne désire que sa réalisation, il n'est pas jusqu'au maniement de la règle, du compas et du rapporteur qui ne soit instructif, quand ce n'est pas métaux et outils appropriés s'il ne veut se contenter d'un instrument en bristol*".

L. Clauss nous a ainsi fait partager l'aventure passionnante qu'il a vécue durant deux ans avec ses élèves dans la réalisation de son propre astrolabe et dans l'apprentissage de son maniement pour déterminer : le lever, la culmination ou le coucher du soleil (ou d'une autre étoile), le début et la fin du crépuscule – qu'il soit civil, nautique ou astronomique –, la durée du jour, le signe du zodiaque où se situe le course du soleil, l'heure solaire vraie diurne et même nocturne, donc aussi l'heure légale et l'heure universelle.

A son tour, Michel Guillemot de l'Université de Toulouse, nous a initiés aux mystères des textes mathématiques de l'Egypte ancienne. Actuellement en congé

d'enseignement pour effectuer la traduction du plus ancien texte mathématique connu à ce jour, le papyrus Rhind ($\sim$ 1800 av. J.C.), M. Guillemot nous donna quelques "exemples de calcul pour scruter la nature et connaître tout ce qui existe, chaque mystère, ..., chaque secret". Tout un programme – mais c'est ainsi que le scribe Ahmose, qui a écrit ce papyrus, présente les 87 problèmes qui constituent cet extraordinaire document. Nous apprimes ainsi :
– à écrire les nombres en numération hiéroglyphique ou hiératique,
– à décomposer une fraction en quantièmes,
– à résoudre quelques-uns des problèmes proposés par le scribe Ahmose tel ce problème 31 :
"Une quantité, ses $\frac{2}{3}$, son $\frac{1}{2}$, son $\frac{1}{7}$ ajoutés, cela donne 33." Réponse (en chiffres arabes) : $14\ \frac{1}{4}\frac{1}{97}\frac{1}{56}\frac{1}{679}\frac{1}{776}\frac{1}{194}\frac{1}{388}$, ou le problème 26 ci-contre.

Venons-en aux débats.

Le débat sur l'enseignement au collège s'est déroulé avec Catherine Brunet, du bureau nationale de l'APMEP. Une vingtaine de professeurs ont participé à cette réunion. C. Brunet a de suite annoncé qu'elle était venue pour répondre aux questions des collègues sur la mise en place de l'expérimentation en 6^{e}. Ce fut un moment d'échange entre les professeurs des établissements expérimentaux de l'Académie et les autres; C. Brunet est intervenue pour donner des informations sur ce qui se pratique en dehors de notre Académie. Elle a signalé que les nouveaux programmes de l'école élémentaire venaient de sortir au B.O. Elle a fait une analyse du projet des programmes de 6^{e} qui venait également d'être diffusé, sa nouvelle présentation et son contenu. Elle a annoncé qu'il y aurait 4 heures professeur en 6^{e}.

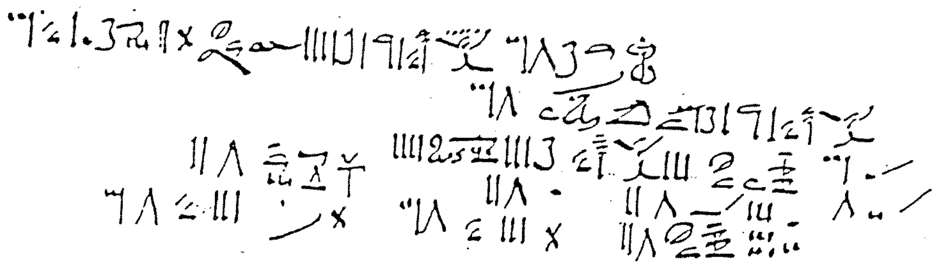
Un autre débat, en parallèle, s'interrogeait sur la liaison apparemment de plus en plus difficile entre le lycée et l'enseignement supérieur (voir le courrier des lecteurs de '*L'Ouvert*' n° 78 et l'article "La dérive des continents"). Richard Cabassut donnait la parole à Daniel Reisz (I.P.R.), Marcel Krier (Université), Bernard Koch (I.U.F.M. et lycée), Patrick Fuhr (Prépa. Math. Sup.), Thierry Dollinger (Prépa. H.E.C.). Voici les questions qui leur ont été posées avec leurs réponses.

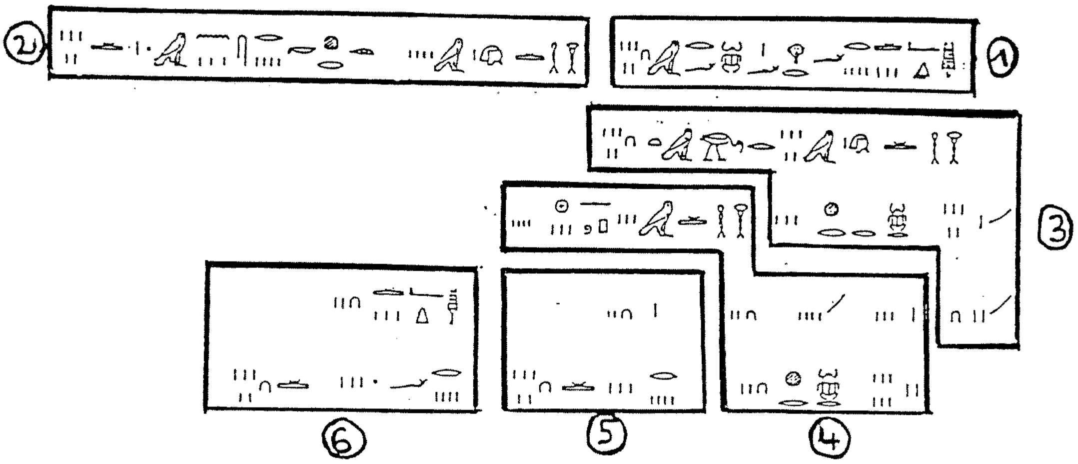
Quelles sont les évolutions dans la formation mathématique de l'enseignement secondaire ? Quel est le profit des bacheliers qui vont accéder à l'enseignement supérieur en termes de connaissances, de formation au raisonnement et à la rigueur, d'habitudes de travail, etc ? En une question : que produit l'enseignement secondaire ?

B.K. : D'après les textes officiels, depuis 81 et surtout 86, l'activité essentielle du cours de mathématiques en lycée repose sur la résolution des problèmes. Le reproche est parfois fait que les élèves ne savent plus raisonner; en fait, on les fait encore raisonner mais sur des problèmes. Et pour résoudre ces problèmes, les élèves vont avoir à utiliser des outils que l'on va progressivement introduire et dont on ne va pas donner entièrement la justification théorique (en général). De grands pans sont admis et l'ensemble ne formera pas une théorie cohérente de la construction de ces outils telle qu'ils la vivront ensuite, peut-être, dans l'enseignement supérieur.

Le problème 26 du papyrus Rhind

Extrait de *The Rhind Mathematical Papyrus*, édité par A. Chace, 2 vol., Oberlin, Ohio, 1927-1929 (planche 49).





Traduction M. Guillemot

1. *Une quantité son* $\overline{4}$ *lui est ajouté.* Elle devient 15.
2. Calcule à partir de 4. Tu feras leur $\overline{4}$, à savoir 1. Le total est 5.
3. Calcule à partir de 5 pour trouver 15.

   / 1   5

   / 2   10

   Il advient 3.
4. Multiplie 3 par 4.

1	3		/ 4	12
2	6	Il advient		12

5\.

1	12		
$\overline{4}$	3	le total est	15

6. *La quantité est 12*

   Son $\overline{4}$ est 3. *Le total est 15.*

A cela s'ajoute en terminale le phénomène du bachotage qui bat quelque peu en brèche ces intentions officielles à cause des exigences du bac et par la nature des épreuves pour lesquelles les compétences au niveau recherche, initiative, imagination, créativité sont très difficiles à évaluer.

D.R. : Il y a d'une part un problème épistémologique : qu'est-ce que "faire des mathématiques" pour un élève de lycée? On doit accepter qu'il y ait des positions idéologiques sur la nature des mathématiques et des modes dominantes des uns ou des autres dans ce questionnement.
Il y a un problème de citoyen vis à vis de l'institution scolaire et des volontés politiques fortes d'évolution du système éducatif : par exemple la massification considérable en lycée, en premier cycle universitaire, la disparition de la terminale C. Ces problèmes pèsent sur l'enseignement des mathématiques bien qu'ils ne soient pas d'ordre mathématique.
Du côté de la démonstration, les élèves "idéaux" démontrent tout autant qu'avant, au cours de la résolution de problèmes, dans des "ilôts déductifs", où l'on est très rigoureux. S'il y a une baisse de compétence des élèves "réels" au niveau de la démonstration, c'est lié à la massification du second degré qui a accru considérablement l'hétérogénéité des élèves dans les classes et a rendu l'enseignement des mathématiques nettement plus difficile et moins efficace, y compris pour les meilleurs élèves. Cette évolution est peut-être même liée à des évolutions de société où l'habitude de lire, d'écrire, de se concentrer est moins fortement installée chez beaucoup de jeunes, y compris dans des milieux socio-culturellement favorisés. Cette évolution est sans doute moins liée à la conception des programmes.

Nous nous tournons maintenant vers nos collègues du supérieur. Est-ce que le profil qu'on a décrit, de l'élève du secondaire, est celui qu'ils perçoivent à l'entrée dans le supérieur ? Est-ce que cela correspond aux besoins que le supérieur a ? Est-ce qu'il faut le nuancer suivant la filière que l'on considère : classes préparatoires, université ?

P.F. : Ce que l'on constate dans les classes préparatoires, c'est que l'on a toujours une proportion importante d'élèves forts. Mais il y a aussi des élèves en queue de classe dont le niveau de raisonnement par rapport à ce qui est demandé est très insuffisant.

M.K. : A l'université, les élèves inscrits forment une population très différente de celle des classes préparatoires : on voit très peu d'élèves bons en math. Il y a aussi une proportion de gens qui ne sont pas capables de réussir; 60% des bacheliers inscrits en Deug scientifique à Strasbourg en 94 ont été arrétés dès le premier partiel de janvier pour niveau insuffisant (moins de 8/20). Une partie des redoublants réussissent par la suite : la proportion d'échec tombe de 60 % à 40%, voir 30 %. La moitié de ces 60 % se sont inscrits en Deug scientifique par mauvaise orientation. S'ils ne s'étaient pas inscrits, cela changerait les statistiques, la composition de la population de première année et les conditions de travail. Les élèves ne comprennent pas pourquoi on fait des démonstrations dans le cours et qu'il faut fournir un travail personnel à l'université, ce qui est en rupture par rapport à ce qu'ils ont fait dans le secondaire. Dans cette rupture avec le secondaire d'autres facteurs jouent, par exemple le fait que certains étudiants ne vivent plus avec leurs parents. Il y a aussi une rupture dans l'organisation horaire de l'enseignement : pas d'enseignement général comme au lycée, plus de travail personnel.

B.K. : C'est une espèce de conquête et de gestion de la liberté qu'il faut apprendre parfois aux dépens de la perte d'une année.

T.D. : En prépa H.E.C. on trouve de bons ou assez-bons littéraires qui essaient de limiter les dégats en mathématiques. A peu près la moitié des élèves que j'ai cette année n'ont pas eu la moyenne en mathématiques au baccalauréat. La plupart des élèves n'y arrivent pas en une année et recommencent. Il se passe alors un phénomène de maturation et les éleves quittés faibles au mois de juin se retrouvent plus dynamiques et agressifs en septembre et progressent parfois de manière spectaculaire au cours de leur deuxième année.

D.R. : Ce qui est choquant c'est que ce sont les meilleurs élèves qui disposent des meilleures conditions en classes préparatoires par rapport à l'université : encadrement, homogénéité, continuité avec le secondaire pour les habitudes de travail. De plus, avec la disparition des terminales C, la majorité des élèves auxquels sera confronté un professeur de mathématiques de terminale scientifique sont des élèves qui ne se destinent pas à des études de mathématiques. Le rôle de ce professeur est donc compliqué par les motivations et les orientations très diverses de ses élèves ce qui rend l'efficacité de l'enseignement secondaire difficile.

Qui décide du profil de l'élève du secondaire ? Qui décide des exigences de l'enseignement supérieur ? Qui décide de l'aménagement des structures, par exemple de la répartition des flux ou des moyens dans le supérieur ?

La question est complexe car peu de gens voient clair à ce propos. Il y a différents groupes de pressions, des mouvements de la Société, des décisions du gouvernement.

La demande sociale explique la massification de la filière générale : les bacs professionnels, les bacs techniques, les B.T.S. se dépeuplent au profit de la filière générale. A l'université, plus autonome, on s'adapte à cette évolution en conservant les têtes de chapitres on simplifie les choses pour que les étudiants arrivent à avoir un programme compréhensible.

En classes préparatoires, un groupe de pression autour d'un physicien bien connu a tiré à boulets rouges sur l'enseignement des mathématiques. Sans doute y avait-il à redire sur cet enseignement en classes préparatoires. Par contre, en prépa H.E.C. avec l'étalement sur deux ans on a une augmentation des connaissances en mathématiques, apparemment à la demande des grandes écoles, autre groupe de pression. Tous ces groupes de pression tirant dans des directions parfois opposées on peut arriver à des décisions casse-cou comme celle d'orientation trop précoce dès la fin du premier trimestre de première année de classe préparatoire scientifique.

Est-ce que dans la préparation du lycée à l'enseignement supérieur la formation à l'écrit est suffisante ?

En classes préparatoires, les mathématiques sont une discipline de la concentration de l'esprit. Chacun apprend les mathématiques à sa façon : certains en privilégient l'écrit, d'autres l'oral. Mais les étudiants ont des difficultés d'expression de la pensée, que cette expression soit écrite ou orale.

A l'université, pour la formation à l'écrit, les étudiants ont un niveau très hétérogène. Commes ils sont d'une génération audio-visuelle, ils ont parfois de bons comportements à l'oral et des difficultés à l'écrit.

Au lycée, la difficulté de maîtrise de la langue est un des facteurs d'échec dans de nombreuses disciplines, qui se ressent quand on lit un devoir de philosophie, d'histoire ou de mathématiques et parfois même une copie de candidat au CAPES. Que s'est-il passé pour qu'ils en soient à une si grande pauvreté d'expression? Là encore il y a une évolution sociale par rapport à ce type d'expression qui est un problème de concentration et aussi un problème de longueur de l'effort. Sur ce point la France semble avoir un niveau d'exigence formelle, notamment dans l'expression écrite, assez élevé en comparaison de ce qui est exigé dans d'autres pays, par exemple au niveau de la prise de notes en cours et de la rédaction des devoirs. Cette exigence est-elle sous-estimée? Les mathématiques sont-elles une discipline visuelle (voir l'importance de la géométrie dans l'histoire des mathématiques) pour laquelle on croit que la meilleure façon de travailler est l'expression écrite, alors qu'il faudrait travailler également l'expression orale, notamment pour les élèves auditifs?

Apparemment les contenus des programmes ne sont pas un problème majeur dans la jonction secondaire-supérieur.

La dernière activité sérieuse de cet après-midi, avant l'apéritif, fut l'élection d'un nouveau comité de la Régionale APMEP d'Alsace. Ce nouveau comité, élu à l'unanimité des membres APMEP présents est composé de : Pierre Adloff, Elisabeth Busser, Richard Cabassut, Jean-Pierre Friedelmeyer, Claudine Kahn, Marie-Anne Keyling, Eliane Legrand, Etienne Meyer, Jean-Pierre Richeton, Gabrielle Roesch, Jean-Claude Sabban et Odile Schladenhaufen.

La satisfaction exprimée par les personnes présentes nous incite à prévoir d'organiser une telle rencontre l'année prochaine.

EVPHKA! num = $\Delta + \Delta + \Delta$

Marc Guinot

(deuxième partie)

Après avoir étudié dans une première partie les classes de formes quadratiques et leur composition, nous allons voir comment la notion de genre introduite par Gauss dans ses *Disquisitiones* permet, moyennant un petit détour par les formes ternaires et les sommes de trois carrés, de démontrer que tout nombre entier naturel est une somme de trois nombres triangulaires. Après les trois paragraphes A/, B/ et C/ de la première partie, voici donc la suite, c'est-à-dire D/, E/ et F/.

D/ Genre d'une forme quadratique.

1. C'est dans les articles 228 et suivants de ses *Disquisitiones Arithmeticae* que Gauss définit le genre d'une forme dans le but de caractériser autant que faire se peut les nombres représentés par cette forme. En se limitant aux formes primitives (ce qu'on peut toujours faire), il a découvert un ensemble de conditions nécessaires remplies par ces nombres. Ces conditions l'ont conduit à définir ce qu'il a appelé les «caractères» d'une forme, puis à ranger dans une même catégorie, appelée «genre», les formes de mêmes caractères, le résultat essentiel étant que deux formes qui ne sont pas rangées dans le même genre ne peuvent pas représenter les mêmes entiers. L'idéal serait que, réciproquement, deux formes rangées dans le même genre représentent les mêmes entiers; cela n'est malheureusement vrai que dans certains cas.
Il n'empêche que la notion de genre permet de résoudre un certain nombre de problèmes qui seraient inaccessibles sans celle–ci. Pour les besoins de notre cause (les nombres triangulaires!) nous pourrons nous contenter de définir le genre d'une forme f dans le cas où le discriminant Δ de cette forme est impair (cas où l'on dit que la forme est impaire). Rappelons que, paradoxalement, Gauss a écarté d'emblée ces formes dans son étude, ce qui l'a obligé à introduire, pour définir certains genres, la notion biscornue de formes «improprement équivalentes» (cf. [GAU], p.228). N'ayant pas les mêmes préjugés que Gauss, notre tâche en sera simplifiée.

2. Dans toute la suite, nous nous limiterons aux formes impaires, supposées en outre primitives.
Considérons d'abord un facteur premier p du discriminant Δ d'une forme f de cette sorte. Puisque Δ est supposé impair, on a $p \neq 2$. Parmi les entiers représentés par f, écartons ceux qui sont divisibles par p. Les entiers qui subsistent (et qui forment un ensemble non vide d'après un résultat vu dans la première partie, §C, n°7) ont alors une propriété commune liée à la notion de résidu quadratique modulo p. Cette notion, familière à Euler, Lagrange et Legendre, s'exprime en disant qu'un entier n, non divisible par p, est *résidu quadratique modulo p* (ou par abus de langage *résidu quadratique de p*) si n est congru à un carré modulo p. Dans le cas contraire, on dit que n est un *résidu non*

quadratique de p ou même parfois un *non résidu*. Si on remplace les entiers n par leurs classes modulo p, donc l'anneau $\mathbb{Z}$ par le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ (corps fini à p éléments), les résidus quadratiques ne sont rien d'autres que les carrés du groupe $\mathbb{F}_p^*$.

3. On comprend mieux les propriétés des résidus quadratiques en introduisant ce qu'on appelle le *symbole de Legendre*, noté $\left(\frac{n}{p}\right)$, qui vaut +1 si n est un résidu quadratique de p, et −1 sinon, le nombre n étant dans tous les cas un entier non divisible par p. On dit parfois que $\left(\frac{n}{p}\right)$ est le *caractère quadratique* de n par rapport à p.

Il est immédiat, en premier lieu que

$$(1) \qquad \left(\frac{n}{p}\right) = +1 \text{ si n est un carré parfait}$$

que

$$(2) \qquad \left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{n'}{p}\right) \text{ si } n \equiv n' \pmod p$$

et facile de voir (à cause des propriétés des carrés dans $\mathbb{F}_p^*$) que

$$(3) \qquad \left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{n'}{p}\right) = \left(\frac{nn'}{p}\right)$$

étant entendu que dans toutes ces relations ni n ni n' ne sont divisibles par p.

Les travaux d'Euler sur les sommes de deux carrés ont conduit ce dernier à démontrer que −1 est résidu quadratique de tout nombre premier p de la forme 4k+1 et non résidu de tout nombre premier p de la forme 4k+3. Avec le symbole de Legendre, on peut exprimer ce résultat par la relation

$$(4) \qquad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

puisque $\frac{p-1}{2} = 2k$ dans le premier cas et $\frac{p-1}{2} = 2k+1$ dans le second.

Plus compliquée est la détermination du caractère quadratique de 2. On a en fait la formule

$$(5) \qquad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

qui signifie, si on regarde bien, que 2 est résidu quadratique des nombres premiers de la forme 8k±1 et non résidu des nombres premiers de la forme 8k±3.

4. Mais la propriété la plus importante, subodorée par Euler et énoncée explicitement par Legendre, est la *loi de réciprocité quadratique* selon laquelle deux nombres premiers distincts p et q ont, l'un par rapport à l'autre, le même caractère quadratique sauf si p et q sont tous deux de la forme 4k+3. En d'autres termes, on a $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ si l'un au moins des nombres p ou q est de la forme 4k+1 et $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$ sinon.

Cette propriété peut s'exprimer aussi par la relation

$$(6) \qquad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Malgré ses efforts, Legendre ne parvint pas à démontrer convenablement cette loi et c'est Gauss qui en donna les deux premières démonstrations dans ses *Disquisitiones* ([GAU], p.136 et p.298). Par la suite, il en imagina plusieurs autres : la troisième (assez élémentaire) et la quatrième (fondée sur les «sommes de Gauss») sont les plus connues.
On trouvera une démonstration de la loi de réciprocité quadratique, assez simple et apparentée à la troisième démonstration de Gauss, dans [ITA], p.76.

5. Le symbole de Legendre a été étendu par Jacobi de manière à laisser inchangées la plupart des relations précédentes, tout en facilitant les calculs. Ce *symbole de Jacobi*, défini pour tout entier impair a>0 et tout entier n non nul premier à a, s'obtient en décomposant a en facteurs premiers, donc en écrivant $a = p_1 \dots p_r$ où tous les nombres p_i sont premiers (impairs) mais non nécessairement distincts, et en faisant le produit des symboles de Legendre correspondants, ce qui donne $\left(\frac{n}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{n}{p_r}\right)$. Si a est réduit à un seul facteur premier, on retrouve ainsi le symbole de Legendre – ce qui fait qu'il n'y a aucun inconvénient à noter $\left(\frac{n}{a}\right)$ le symbole de Jacobi en général.
Comme le symbole de Legendre, le symbole de Jacobi vaut +1 ou −1, mais s'il vaut +1 lorsque n est congru à un carré modulo a, la réciproque n'est pas nécessairement vraie comme on le voit facilement, de sorte que la relation $\left(\frac{n}{a}\right) = +1$ ne caractérise pas les «résidus quadratiques» de a.

6. Cela étant, les relations (1) et (6) se généralisent facilement (mais c'est un peu fastidieux à démontrer) pour donner les relations analogues suivantes :

$$(1') \qquad \left(\frac{n}{a}\right) = +1 \text{ si n (premier avec a) est un carré}$$

$$(2') \qquad \left(\frac{n}{a}\right) = \left(\frac{n'}{a}\right) \text{ si } n \equiv n' \pmod a$$

$$(3') \qquad \left(\frac{n}{a}\right)\left(\frac{n'}{a}\right) = \left(\frac{nn'}{a}\right)$$

$$(4') \qquad \left(\frac{-1}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}$$

$$(5') \qquad \left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}}$$

étant entendu que dans (2') et (3'), n et n' sont premiers avec a. Enfin, la loi de réciprocité quadratique se généralise le plus naturellement du monde :

$$(6') \qquad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}}$$

si a et b sont des entiers impairs positifs premiers entre eux.

7. Il nous sera commode de généraliser encore un tout petit peu cela en posant $\left(\frac{n}{-a}\right)=\left(\frac{n}{a}\right)$.

Avec cette convention, on a $\left(\frac{n}{a}\right)=\left(\frac{n}{|a|}\right)$ si a est un entier impair de signe quelconque et si n est un entier non nul premier avec a. Les formules (1'), (2'), (3') et (5') restent alors valables sans changement, alors que (4') prend la forme

$$(7) \qquad \left(\frac{-1}{a}\right)=(-1)^{\frac{|a|-1}{2}}$$

Quant à la loi de réciprocité quadratique, elle devra s'écrire désormais

$$(8) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}}$$

si l'un au moins des entiers a ou b est >0, et

$$(9) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=-(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}}$$

sinon – étant entendu que a et b sont des entiers impairs premiers entre eux.
Pour établir ces formules, à partir de celles énoncées dans le n°6, le lecteur vérifiera que $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{|b|+1}{2}}$ si a>0 et b<0 et que $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=(-1)^{\frac{|a|-1}{2}\frac{|b|-1}{2}+\frac{|a|-1}{2}+\frac{|b|-1}{2}}$ si a<0 et b<0

8. Revenons aux formes primitives de discriminant impair et aux entiers non divisibles par p représentés par ces formes. La propriété commune de ces entiers est qu'ils ont le même caractère quadratique vis–à–vis de p, ce qui veut dire que si f est une forme donnée (ayant les propriétés indiquées), alors $\left(\frac{n}{p}\right)=\left(\frac{n'}{p}\right)$ pour tout couple (n,n') d'entiers non divisibles par p, représentés par f.
En d'autres termes, ou bien les entiers en question sont tous des résidus quadratique de p, ou bien ce sont tous des non résidus.
La démonstration de ce résultat est facile, en partant de l'hypothèse qu'il existe des entiers α, γ et β, δ tels que $n = f(\alpha,\gamma)$ et $n' = f(\beta,\delta)$. Si on considère, en effet, la transformation linéaire $\tau=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, celle–ci transforme f en une forme g dont le premier coefficient est $f(\alpha,\gamma) = n$ et le dernier $f(\beta,\delta) = n'$. On voit que g est du type (n,ℓ,n'). Mais on sait en outre, en vertu d'une remarque faite à la fin du n°10, §A, que le discriminant de g est égal à Δd^2 où d est le déterminant de τ. On a donc $\ell^2-4nn' = \Delta d^2$, ce qui prouve, entre autres choses, que $\ell^2 \equiv 4nn' \pmod p$. On en déduit que $\left(\frac{4nn'}{p}\right)=+1$. Comme $\left(\frac{4nn'}{p}\right)=\left(\frac{4}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{n'}{p}\right)$ et que $\left(\frac{4}{p}\right)=+1$, on en déduit que $\left(\frac{n}{p}\right)=\left(\frac{n'}{p}\right)$. CQFD.

9. Ainsi, le symbole de Legendre $\left(\frac{n}{p}\right)$ d'un entier n (non divisible par p) représenté par f est un nombre, valant +1 ou −1, qui ne dépend pas de n, mais seulement de la forme f (et

aussi, bien sûr, du facteur premier p de Δ considéré). On le notera $\chi_p(f)$ et on dira que c'est le *caractère de* f *relatif à* p.
On peut calculer ce caractère assez simplement en observant que parmi les nombres n en question, il y a l'un au moins des coefficients extrêmes a ou c de la forme : ces deux entiers sont en effet représentés par p et s'ils étaient tous les deux divisibles par p, b le serait aussi (à cause de la relation $b^2 = 4ac+\Delta$), en contradiction avec le fait que f est une forme primitive par hypothèse.

10. Lorsque p parcourt l'ensemble P des diviseurs premiers de Δ, les nombres $\chi_p(f)$ forment une famille finie (qu'on peut considérer comme une suite en rangeant les nombres $p \in P$ d'une certaine manière), que certains auteurs appellent le *système des caractères* de f, que Gauss nomme le «caractère complet» de la forme, et que nous appellerons plus volontiers la *signature* de f (les valeurs +1 et −1 des différents caractères de f pouvant être symbolisés par les signes + et −). Cela étant, on dira que deux formes primitives f et g, de même discriminant impair Δ, sont *du même genre* si elles ont la même signature, autrement dit, en bref, si elles ont les mêmes caractères.
Considérons à titre d'exemples les formes f = (1,1,16), g = (2,1,8) et h = (4,1,4) toutes primitives et de discriminant −63 (cf. §B, n°10). Comme $-63 = -3^2\times 7$, chacune de ces formes a deux caractères, l'un relatif à 3, l'autre relatif à 7. Comme elles représentent les entiers 1, 2 et 4 respectivement, et que ces nombres ne sont ni divisibles par 3 ni divisibles par 7, on a

$$\chi_3(f) = \left(\frac{1}{3}\right) = +1 \qquad \chi_7(f) = \left(\frac{1}{7}\right) = +1 \qquad \text{à cause de (1)}$$

$$\chi_3(g) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1 \qquad \chi_7(g) = \left(\frac{2}{7}\right) = +1 \qquad \text{à cause de (5)}$$

$$\chi_3(h) = \left(\frac{4}{3}\right) = +1 \qquad \chi_7(h) = \left(\frac{4}{7}\right) = +1 \qquad \text{à cause de (1)}$$

Cela montre que f et h sont du même genre, alors que g est d'un genre différent. Si on remplace f par −f = (−1,−1,−16), on a

$$\chi_3(-f) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1 \qquad \chi_7(-f) = \left(\frac{-1}{7}\right) = -1 \qquad \text{à cause de (4)}$$

ce qui donne un troisième genre, différent des deux autres.

11. Si on revient au cas général, on constate que la définition des différents caractères d'une forme ne fait intervenir que les nombres représentés par cette forme, du moins à un détail près, lié au discriminant, ce qui n'empêche pas de pouvoir affirmer que deux formes de même discriminant qui représentent les mêmes nombres ont la même signature, donc le même genre.
En particulier, deux formes primitives équivalentes (de discriminant impair) sont du même genre.
On peut dire aussi, pour exprimer ce résultat général, que deux formes qui ne sont pas du même genre ne peuvent pas représenter les mêmes entiers.
On notera cependant que les formes f = (1,1,16) et h = (4,1,4) vues ci-dessus (n°10), bien que du même genre, ne représentent pas les mêmes nombres car la seconde

représente 7 (avec $x = 1$ et $y = -1$) alors que si on avait $x^2+xy+16y^2 = 7$, on aurait $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{63}{4}y^2 = 7$, d'où nécessairement $y = 0$ et $x^2 = 7$, ce qui est absurde.
Tout cela est conforme à ce que nous avions dit en introduction (n°1).

12. La relation qui exprime que deux formes primitives impaires de même discriminant Δ sont du même genre est évidemment une relation d'équivalence. On peut donc définir *le genre d'une forme* f donnée comme la classe de f pour cette relation d'équivalence et les *genres* en général comme les classes d'équivalence se rapportant à cette relation. Ces genres forment donc une partition de l'ensemble des formes primitives de discriminant Δ.
D'après ce qu'on a expliqué dans le précédent numéro, la relation d'équivalence en question est «moins fine» que l'équivalence au sens de Gauss. Cela entraîne 1°/ que toute classe de formes primitives de discriminant Δ (au sens de Gauss) est contenue dans un genre et dans un seul : cela permet de parler sans ambiguïté *du genre* d'une classe ou si on préfère, *de la signature* de cette classe, 2°/ que n'importe quel genre de formes (primitives et de discriminant Δ) est la réunion d'un certain nombre de classes, ce nombre étant d'ailleurs nécessairement fini d'après ce qu'on a vu dans le §A, 3°/ que le nombre total de genres relatifs à un discriminant (impair) donné est lui–même fini (ce qui peut se voir aussi directement à partir des définitions).
L'exemple des formes $f = (1,1,16)$ et $h = (4,1,4)$ (qui ne sont pas équivalentes car ce sont des formes réduites distinctes : §B, n°10) montre qu'un genre peut contenir plusieurs classes. Dans certains cas, cependant, il peut n'y en avoir qu'une seule.

13. Considérons maintenant, pour un discriminant Δ impair fixé (donc un entier $\equiv 1 \pmod 4$), la forme principale de discriminant Δ. Cette forme s'écrit, par définition, $f = \left(1,1,\frac{1-\Delta}{4}\right)$, ce qui montre qu'elle est primitive et qu'elle représente 1. Comme 1 n'est divisible par aucun nombre premier p divisant Δ, on peut s'en servir pour déterminer la signature de f. On a en fait $\chi_p(f) = \left(\frac{1}{p}\right) = +1$ en vertu de (1) (n°3). En d'autres termes, la signature de la forme principale de discriminant Δ n'est constituée que de signes +.
On appelle *genre principal* de discriminant Δ le genre de la forme principale. C'est donc aussi l'ensemble des formes de discriminant Δ dont la signature n'est constituée que de signes +. Le genre principal contient la classe principale, mais comme le montre un exemple déjà vu, il peut en contenir d'autres.

14. Si $f = (a,b,c)$ est une forme primitive quelconque (de discriminant Δ impair) il peut être intéressant de comparer le genre de f avec celui de la forme inverse $f^{-1} = (c,b,a)$ (on prendra garde à la notation, particulièrement audacieuse) et celui de la forme opposée $-f = (-a,-b,-c)$. Dans le premier cas, il n'y a rien de bien transcendant : comme f et f^{-1} représentent les mêmes nombres (ce sont des formes équivalentes au sens de Lagrange : cf. §A, n°10), ces formes sont du même genre. Dans le second cas, il s'agit de comparer $\chi_p(f)$ et $\chi_p(-f)$ pour tout nombre premier p divisant Δ. Si n est un entier représenté par f

et non divisible par p, −n est représenté par −f (tout en restant non divisible par p). On a donc $\chi_p(f) = \left(\frac{n}{p}\right)$ et $\chi_p(-f) = \left(\frac{-n}{p}\right)$. Comme $\left(\frac{-n}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right)$, on voit d'après (4), n°3, que $\chi_p(-f) = \chi_p(f)$ si p est de la forme 4k+1 et que $\chi_p(-f) = -\chi_p(f)$ si p est de la forme 4k+3.
En d'autres termes, pour passer de la signature de f à celle de −f, on change les signes correspondant aux caractères relatifs aux facteurs premiers de Δ de la forme 4k+3, mais pas les autres. Bien sûr, il se peut que Δ n'ait pas de facteurs premiers de la forme 4k+3, auquel cas f et −f sont à ranger dans le même genre. Mais le phénomène ne se produit pas si Δ<0 car comme la décomposition en facteurs premiers de Δ s'écrit alors $\Delta = -p_1^{n_1}\ldots p_r^{n_r}$, on a $p_1^{n_1}\ldots p_r^{n_r} = -\Delta \equiv 3 \pmod 4$, ce qui rend impossible l'absence de nombre $p_1, \ldots, p_r$ de la forme 4k+3. Pour Δ<0, les formes f et −f sont donc dans deux genres différents.
On notera que ce résultat n'interdit pas, *a priori*, l'existence dans un même genre de formes positives et de formes négatives. Nous verrons cependant plus loin (cf. n°19) que cela est impossible.

15. Considérons pour finir deux formes impaires primitives composables f et f'. Il est alors normal de chercher à calculer la signature de la forme composée (primitive et de même discriminant) $f*f'$.
Si p est un diviseur premier de Δ et si n (resp. n') est un entier non divisible par p, représenté par f (resp. par f'), on a $\chi_p(f) = \left(\frac{n}{p}\right)$ et $\chi_p(f') = \left(\frac{n'}{p}\right)$ par définition. Mais on sait (cf. §C, n°5) que nn' (qui est un entier également non divisible par p) est représenté par $f*f'$. On a donc, toujours par définition, $\chi_p(f*f') = \left(\frac{nn'}{p}\right)$. Comme $\left(\frac{nn'}{p}\right) = \left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{n'}{p}\right)$, on a alors la remarquable relation $\chi_p(f*f') = \chi_p(f)\chi_p(f')$.
On peut donc dire, en général, que lorsque f et f' sont des formes primitives composables, la signature de $f*f'$ s'obtient à partir des signatures de f et de f' en multipliant celles–ci terme à terme.

16. Il serait criminel de ne pas tirer le maximum de renseignements de ce dernier théorème. Pour cela, rappelons que la notion de signature peut être attachée à une classe de formes au lieu de l'être à une forme seule (cf. n°12) ; observons que si P désigne l'ensemble des diviseurs premiers de Δ, la signature en question, qui se présente sous la forme d'une famille $(\chi_p(f))_{p\in P}$ d'entiers égaux à +1 ou à −1, est un élément de l'ensemble produit $\{-1,+1\}^P$, ensemble que l'on peut identifier à $\{-1,+1\}^r$ où r est le nombre d'éléments de P, et qui est naturellement doté d'une structure de groupe multiplicatif ; souvenons–nous enfin que l'ensemble G = G(Δ) des classes de formes primitives de discriminant Δ est lui–même un groupe, pour une multiplication qui dérive de la composition des formes.
Bref, le lecteur l'aura compris, si on associe à toute classe primitive de discriminant Δ sa signature, on définit de cette manière un homomorphisme u du groupe G dans le groupe $\{-1,+1\}^P$.

On en déduit que
1°/ les classes contenues dans le genre principal constituent un sous-groupe G' de G, noyau de l'homomorphisme précédent : cela résulte de la définition même du genre principal (n°13) ;
2°/ les classes contenues dans un genre donné constituent, au sens de la théorie des groupes, une classe dans G modulo G' : c'est une propriété bien connue selon laquelle si $h:\Gamma\to\Gamma'$ est un homomorphisme de groupes, alors les ensembles non vides de la forme $h^{-1}(x')$ (où $x'\in\Gamma'$) sont les classes modulo Ker h dans Γ ;
3°/ le nombre de classes contenues dans un genre donné (de discriminant Δ) est le même pour tous les genres ; c'est en particulier le nombre de classes du genre principal, autrement dit l'ordre du groupe G' et par conséquent un diviseur $g' = g'(\Delta)$ de l'ordre g de G : on sait en effet que dans un groupe fini, le nombre d'éléments d'une classe modulo un sous-groupe H est égal à l'ordre de H ;
4°/ le nombre $\gamma = \gamma(\Delta)$ de genres relatifs à un discriminant Δ est une puissance de 2. De façon plus précise, si r désigne le nombre d'éléments de P c'est-à-dire le nombre de diviseurs premiers de Δ, γ est un diviseur de 2^r, égal à l'ordre du groupe quotient G/G', donc égal à g/g' : en effet, le nombre γ de tous les genres possibles de discriminant Δ est égal au nombre de signatures distinctes de toutes les formes (ou de toutes les classes) primitives de discriminant Δ ; c'est donc le nombre d'éléments de u(G) = Im u. Comme Imu est un sous-groupe du groupe $\{-1,+1\}^P$ donc l'ordre est 2^r, le nombre en question est bien un diviseur de 2^r, égal à l'ordre g/g' de G/G' puisque G/G' = G/Ker u est isomorphe, comme il est bien connu, à Im u.
Tous ces résultats figurent peu ou prou dans les *Disquisitiones Arithmeticae*, mais évidemment dans un langage qui n'est pas et qui ne pouvait pas être celui de la théorie des groupes. Néanmoins, certains des raisonnements que fait Gauss à cette occasion sont des anticipations assez nettes de raisonnements classiques de cette théorie (voir par exemple [GAU], p.277).

17. La question qui reste pendante est celle du calcul du nombre exact γ de genres. Le mieux serait que celui-ci soit 2^r, mais on va démontrer qu'à cause de la loi de réciprocité quadratique, cela n'est pas toujours vrai.
Quoi qu'il en soit, dire que le nombre de genres est égal à 2^r revient à dire que l'homomorphisme u : $G\to\{-1,+1\}^P$ défini dans le numéro précédent est surjectif, autrement dit que tout système de r "signes" $(\varepsilon_p)_{p\in P}$ (avec $\varepsilon_p = \pm 1$) peut être considéré comme la signature d'une forme de discriminant Δ, donc comme définissant un genre. Nous verrons plus loin (en fait dans le §E) que ce théorème d'existence pour les genres est valables si $\Delta<0$ (et impair).
Auparavant, pour comprendre le rôle joué par la loi de réciprocité quadratique dans cette question, considérons à côté d'un discriminant Δ impair et d'une forme primitive f de discriminant Δ, un entier n, premier avec 2Δ (donc impair), et représenté proprement par f : l'existence d'au moins un entier de ce genre est assuré comme on l'a vu dans le n°7 du §C. Par construction, si $p\in P$, n ne peut être divisible par p. On a donc $\chi_p(f) = \left(\frac{n}{p}\right)$. D'un

autre côté, comme n est représenté proprement par f il existe une forme f' équivalente à f et qu'on peut écrire (n,n',n") où n' et n" sont des entiers dont on ne sait pas grand chose sinon qu'ils vérifient la relation $n'^2-4nn'' = \Delta$. Cela montre cependant que Δ est un carré modulo n. D'après les propriétés du symbole de Jacobi, généralisé à des entiers de signes quelconques, on a $\left(\frac{\Delta}{n}\right) = +1$. Appliquons alors à ce symbole de Jacobi la loi de réciprocité, c'est-à-dire les formules (8) et (9) du n°7 : compte tenu du fait que Δ est congru à 1 modulo 4, on voit que $\left(\frac{\Delta}{n}\right) = \left(\frac{n}{\Delta}\right)$ si l'un au moins des nombres n et Δ est positif et que $\left(\frac{\Delta}{n}\right) = -\left(\frac{n}{\Delta}\right)$ si les deux nombres sont négatifs. On a donc $\left(\frac{n}{\Delta}\right) = -1$ si n et Δ sont tous deux négatifs (ce qui veut dire que f est une forme définie négative) et $\left(\frac{n}{\Delta}\right) = +1$ dans tous les autres cas. Or $\left(\frac{n}{\Delta}\right)$ peut être calculé en décomposant Δ (ou plutôt |Δ| en facteurs premiers). Si on écrit cette décomposition sous la forme $p_1^{n_1}...p_r^{n_r}$, avec les conventions habituelles, on a $\left(\frac{n}{\Delta}\right) = \left(\frac{n}{|\Delta|}\right) = \left(\frac{n}{p_1}\right)^{n_1}...\left(\frac{n}{p_r}\right)^{n_r}$. Lorsque l'exposant n_i est pair, le facteur correspondant $\left(\frac{n}{p_i}\right)^{n_i}$ vaut +1, de sorte qu'on peut le supprimer. Il ne reste alors dans le produit, que les facteurs $\left(\frac{n}{p_i}\right)^{n_i}$ avec n_i impair, facteurs qui se réduisent d'ailleurs eux–mêmes à $\left(\frac{n}{p_i}\right)$. Si on appelle Q l'ensemble des diviseurs premiers p de Δ apparaissant avec un exposant impair dans la décomposition de Δ en facteurs premiers, on voit donc que $\left(\frac{n}{\Delta}\right) = \prod_{p\in Q}\left(\frac{n}{p}\right)$. Cela donne, en définitive, entre les caractères de f une «relation de dépendance» qu'on peut présenter sous la forme

$$(10)\qquad \prod_{p\in Q}\chi_p(f) = \begin{cases} -1 \text{ si f est une forme définie négative} \\ +1 \text{ dans tous les autres cas} \end{cases}$$

18. Cette «relation de dépendance» peut être parfaitement illusoire car il n'est pas interdit que Q soit vide. Cela ne se produit cependant pas si f est une forme définitive négative car un produit vide ne saurait être égal à –1. Plus généralement, cela ne peut se produire si Δ<0 car en prenant pour f la forme $(-1,-1,\frac{\Delta-1}{4})$ (qui est négative), on obtient le premier cas de (10).

En revanche, si on suppose que Δ>0, il n'est pas interdit que Q soit vide. Mais cela n'arrive que si tous les exposants de la décomposition en facteurs premiers de Δ sont pairs, donc seulement si Δ est un carré parfait.

Ainsi, en dehors de ce dernier cas, la relation (10) prend tout son sens.

19. La relation (10) a deux conséquences remarquables.
La première est que comme nous l'avions annoncé, un genre de discriminant impair Δ négatif ne peut renfermer à la fois une forme positive et une forme négative. en effet, si $(\varepsilon_p)_{p\in P}$ est la signature de la forme en question, l'existence des deux types de formes dans le genre impliquerait à la fois $\prod_{p\in Q}\varepsilon_p = -1$ et $\prod_{p\in Q}\varepsilon_p = +1$.
La seconde conséquence que l'on peut tirer de (10) est que si Δ est un discriminant impair positif, sans être un carré parfait, alors le nombre γ des genres relatifs à Δ est inférieur ou égal à 2^{r-1} (r étant comme ci–dessus, le nombre des diviseurs premiers de Δ). En effet, dans ce cas, la relation (10), qui s'écrit ici $\prod_{p\in Q}\chi_p(f) = +1$, et le fait que Q n'est pas vide empêchent d'avoir comme signature n'importe quelle famille $(\varepsilon_p)_{p\in P}$. D'où le résultat puisque γ est un diviseur de 2^r.

20. Dans le cas où Δ est >0, nous ne pourrons pas aller plus loin. Lorsque Δ est <0, par contre, la formule (10) est double, de sorte qu'elle n'entraîne *a priori* aucune obstruction particulière. D'ailleurs comme on l'a annoncé, il y a dans ce cas un théorème d'existence pour les genres tout à fait général. Toutefois, la méthode de Gauss que nous allons utiliser pour établir ce théorème fait un détour par les formes quadratiques ternaires, de sorte que le résultat ne pourra être obtenu qu'après le prochain paragraphe.
Cependant, nous allons voir tout de suite que le problème se réduit à une pure question d'algèbre concernant le groupe G' des classes primitives contenues dans le genre principal (cf. n°16). Rappelons que les classes de ce genre (attention : jeu de mot !) sont caractérisées par le fait que leur signature n'est constituée que de +. Or il y a dans le groupe G de toutes les classes, des classes simples ayant ce type de signature : ce sont les carrés des différents éléments de G car quelle que soit la signature d'une classe Φ, la signature de Φ^2 ne peut être constituée que de signes +. Si on note G^2 pour simplifier l'ensemble de tous ces carrés, on obtient ainsi un sous–groupe de G, qui est en fait un sous–groupe de G'. Bien mieux, si on associe à tout élément $\Phi\in G$ son carré Φ^2, on obtient un homomorphisme v du groupe G dans le groupe G', dont l'image est G^2 et dont le noyau est l'ensemble des classes Φ de G telles que $\Phi^2 = 1$. On reconnaît dans ce dernier cas le groupe A des classes primitives ambiguës (de discriminant Δ) (cf. §C, n°12). On en déduit que G/A est isomorphe à G^2.
Mais il se trouve que dans le cas d'un discriminant Δ impair <0 (juste celui qui nous intéresse!) on connaît exactement le nombre d'éléments de A : c'est 2^r (où r est encore et toujours le nombre de diviseurs premiers de Δ, cf. §B, n°11 et §C, n°12). On voit donc que le nombre d'éléments de G^2 est égal à $\frac{g}{2^r}$ (où g est le nombre d'éléments de G). Par suite, l'inclusion de G^2 dans G' signifie que l'on a $\frac{g}{2^r} \leq g'$ (en appelant, comme on l'a déjà fait, g' le nombre d'éléments de G'). De façon plus précise, on a $\frac{g}{2^r} = g'$ si $G^2 = G'$ et

$\frac{g}{2^r} < g'$ sinon. Cela veut dire aussi, si on préfère, que l'on a $\frac{g}{g'} = 2^r$ si $G^2 = G'$ et $\frac{g}{g'} < 2^r$ sinon. Comme ce quotient $\frac{g}{g'}$ représente le nombre γ de genres de formes de discriminant Δ (n°16) on voit que $\gamma = 2^r$ si et seulement si $G^2 = G'$. il revient au même de dire que l'on a $G' \subset G^2$.
En d'autres termes, pour démontrer (dans le cas d'un discriminant impair négatif) que toute famille $(\varepsilon_p)_{p \in P} \in \{-1,+1\}^P$ peut être considérée comme la signature d'un genre (ou d'une forme primitive), on peut se contenter de démontrer que *toute classe contenue dans le genre principal est le carré d'une classe*. C'est ce qu'on fera §F, n°2 à 11!

E/ Petite théorie des formes quadratiques ternaires.

1. En fait de théorie, on se limitera plutôt à des «pièces détachées» en demandant au lecteur de compléter nos propos d'après le §A.
Comme il se doit, une *forme quadratique ternaire* peut être considérée comme une application f de $\mathbb{Z}^3$ dans $\mathbb{Z}$ pour laquelle il existe des entiers a, b, c, r, s, t tels que l'on ait

$$f(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2+rxy+syz+txz$$

quels que soient les entiers x, y, z.
Les entiers a, b, c et r, s, t sont évidemment uniques, ce qui permet de parler sans ambiguïté des *coefficients* de f et d'identifier f à la suite de ses coefficients, et donc d'écrire f = (a,b,c,r,s,t) ou, comme Gauss, $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ r & s & t \end{pmatrix}$.
Il nous arrivera assez souvent aussi de confondre f avec f(x,y,z) et donc de définir une forme ternaire en se donnant l'expression générale $ax^2+by^2+cz^2+rxy+syz+txz$. Ce sera un abus de notation!

2. A partir d'une forme quadratique ternaire f, on définit de manière évidente les entiers *représentés* par f et en particulier les entiers *représentés proprement* par f. Pour un entier donné, on pourra donc parler des diverses *représentations*, éventuellement *propres*, de cet entier par la forme. Il y a des formes qui ne représentent que des entiers positifs, telles par exemple $x^2+y^2+z^2$: on dira que ce sont des *formes positives* ; il y en a d'autres (comme $-x^2-y^2-z^2$) qui ne représentent que des nombres négatifs : on dira que ce sont des *formes négatives*. Dans les deux cas, les mots "négatif" et "positif" sont à prendre au sens de Bourbaki, c'est-à-dire au sens large.
Lorsqu'une forme n'est ni positive ni négative (donc lorsqu'elle n'a pas de signe défini), on dira que c'est une *forme indéfinie*. Par définition, une forme de ce genre prend au moins une fois une valeur >0 et au moins une valeur <0. En fait, il y a une infinité de cas de chaque sorte à cause de la relation $f(cx,cy,cz) = c^2f(x,y,z)$.

3. Contrairement à ce qui se passe pour les formes binaires, il n'est pas possible de séparer les formes indéfinies des formes positives ou négatives au moyen d'une seule quantité simple analogue au discriminant. Il est cependant possible de considérer une

quantité numérique qui s'en rapproche, mais en définissant d'abord convenablement la «matrice» d'une forme ternaire. Comme dans le cas d'une forme binaire, on y parvient en dédoublant les termes «rectangles». De façon précise, si f = (a,b,c,r,s,t), la *matrice* de f est par définition la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} a & r/2 & t/2 \\ r/2 & b & s/2 \\ t/2 & s/2 & c \end{pmatrix}$$

Si on note a_{ij} le nombre situé à l'intersection de la i–ème ligne et de la j–ème colonne, on a alors $f(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$, ce qui est tout à fait satisfaisant.

Cela étant, le déterminant D de la matrice obtenue peut remplacer dans le cas des formes ternaires le discriminant. On dira que c'est le *déterminant* de la forme quadratique ternaire considérée. Son expression est évidemment assez compliquée car l'application de la règle de Sarrus donne $D = abc + \frac{rst}{4} - a\frac{s^2}{4} - b\frac{t^2}{4} - c\frac{r^2}{4}$. Lorsque $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ on obtient ainsi D = 1 et lorsque $f(x,y,z) = x^2-yz$, $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$

4. Si on revient à une forme binaire $ax^2+bxy+cy^2$, la matrice correspondante $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ donne comme déterminant $d = ac - \frac{b^2}{4}$. On peut appeler cette quantité le *déterminant* de la forme binaire. Par rapport au discriminant Δ, on a évidemment Δ = –4d. Dans le cas d'une forme ternaire, on pourrait sur le même modèle remplacer le déterminant D par –4D, ce qui donnerait un entier analogue à Δ qui pourrait s'appeler le «discriminant» de la forme ternaire. Mais cela ne se fait pas, sans doute parce que cela n'apporte pas grand chose par rapport au déterminant et que dans le cas d'une forme à plus de trois variables, il faudrait utiliser un autre facteur multiplicatif que –4. Bien plus, certains auteurs (et non des moindres) appellent «discriminant» d'une forme ternaire ce qu'on a appelé plus haut le déterminant. On comprend qu'il y en ait qui s'embrouille! Pour notre part, nous nous en tiendrons au point de vue exposé ci–dessus qui consiste à séparer nettement déterminant et discriminant pour les formes binaires et à ne parler que de déterminant dans le cas des formes ternaires.

Reste le problème des fractions qui apparaissent dans la matrice et dans le déterminant. Il n'y a pas de solution sauf à se limiter comme Gauss aux formes ternaires dont tous les termes rectangles sont affectés de coefficients pairs. Nous dirons alors que l'on a affaire à des *formes de Gauss*. Mais cette limitation est pour nous impossible : on a déjà pu le constater dans le cas binaire. Toutefois, pour simplifier les calculs nous n'hésiterons pas à remplacer certaines formes ternaires f par la forme de Gauss 2f – quitte à rediviser par 2 à la fin!

5. Nous allons d'ailleurs tout de suite appliquer ce principe pour introduire une forme binaire dans l'expression générale d'une forme ternaire f. Supposons donc que cette dernière soit une forme de Gauss et écrivons f(x,y,z) sous la forme $ax^2+by^2+cz^2+2uxy+2vyz+2wxz$ où u, v et w sont des entiers. On peut voir alors dans les derniers termes de cette expression une série de doubles produits susceptibles de provenir du développement d'un carré. Si on développe, pour voir, le carré $(ax+uy+wz)^2$, on obtient $a^2x^2+u^2y^2+w^2z^2+2auxy+2uwyz+2awxz$. On en déduit que $af(x,y,z)-(ax+vy+wz)^2 = (ab-u^2)y^2+(2av-2uw)yz+(ac-w^2)z^2$, ce qui définit une forme binaire φ(y,z) dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} ab-u^2 & av-uw \\ av-uw & ac-w^2 \end{pmatrix}$$

et dont le déterminant est $d=(ab-u^2)(ac-w^2)-(av-uw)^2=a(abc+uvw+uvw-bw^2-cu^2-av^2)$. On reconnaît dans la parenthèse le déterminant de la matrice de f, développée selon la règle de Sarrus.

Ainsi, pour toute forme de Gauss $f(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2+2uxy+2vyz+2wyz$, on a l'identité

$$(1) \qquad af(x,y,z) = (ax+uy+wz)^2+\varphi(y,z)$$

où φ est une forme binaire dont les coefficients sont $ab-u^2$, $2av-2uw$, $ac-w^2$ et dont le déterminant d est égal à aD où D est le déterminant de f.

En utilisant des méthodes de calculs analogues, le lecteur démontrera de même les identités

$$(2) \qquad bf(x,y,z) = (ux+by+vz)^2+\psi(x,z)$$

et

$$(3) \qquad cf(x,y,z) = (wx+vy+cz)^2+\theta(x,y)$$

où ψ et θ sont des formes binaires dont les déterminants respectifs sont bD et cD.

6. Nous allons utiliser ces relations pour caractériser convenablement les formes ternaires positives. Il y a en fait plusieurs caractérisations possibles équivalentes. Nous n'en donnerons qu'une seule et nous laisserons de côté le cas des formes de déterminant nul que nous n'aurons pas l'occasion de rencontrer.

Considérons donc une forme ternaire $f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+rxy+syz+txz$, de déterminant D non nul. Nous allons alors démontrer que cette forme est positive si et seulement si on a à la fois

$$a>0 \qquad \begin{vmatrix} a & r/2 \\ r/2 & b \end{vmatrix}>0 \qquad \begin{vmatrix} a & r/2 & t/2 \\ r/2 & b & s/2 \\ t/2 & s/2 & c \end{vmatrix}>0$$

On notera que les trois nombres qui interviennent dans ces relations sont des déterminants extraits de la matrice de la forme f : on les appelle parfois les *mineurs principaux* de cette matrice.

Comme on ne change pas le problème en remplaçant f par 2f (car cela ne change ni le signe de f ni celui des mineurs principaux), on supposera que f est une forme de Gauss, ce qui nous permettra de poser $f(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2+2uxy+2vyz+2wxz$ (donc de remplacer r/2, s/2, t/2 par u, v et w) et d'appliquer les identités (1), (2) et (3) ci–dessus.

7. Prenons d'abord pour hypothèse que f est une forme positive, c'est-à-dire une forme à valeurs positives, et utilisons la condition auxiliaire $D \neq 0$ pour démontrer que l'un au moins des coefficients a, b, c n'est pas nul. Si ce n'était pas le cas, on aurait $f(x,y,z) = 2uxy+2vyz+2wxz$. Comme f ne peut être la forme nulle (sinon on aurait $D = 0$), on peut affirmer que l'un au moins des coefficients u, v, w n'est pas nul.
Sans que cela restreigne la généralité, on peut supposer que c'est u. Mais alors on aurait $f(x,y,0) = uxy \geq 0$ quels que soient x et y, ce qui est manifestement impossible.
Nous allons maintenant démontrer que chacune des relation $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ implique les deux autres.
Supposons d'abord $a \neq 0$. Comme $a = f(1,0,0)$ et que f est positive, on a en fait $a>0$. Remplaçons alors y par ay, z par az et x par $-uy-wz$ dans la relation (1) du n°5. Comme $ax+uy+wz$ est remplacé par $a(-uy-wz)+auy+awz = 0$, on déduit de (1) et des hypothèses que $\varphi(ay,az) = a^2\varphi(y,z)$ est toujours un nombre positif. Il en est donc de même de $\varphi(y,z)$. Comme le déterminant d de φ est égal à aD, c'est un nombre non nul. Il en est de même, par conséquent, de son discriminant $\Delta = -4d$. On en déduit que φ est une forme définie positive au sens du §A. On a donc $\varphi(y,z)>0$ à chaque fois que $(y,z) \neq (0,0)$. Cela montre, en particulier, que

$$(4) \qquad ab = af(0,1,0) = u^2+\varphi(1,0) \geq \varphi(1,0)>0$$

et

$$(5) \qquad ac = af(0,0,1) = w^2+\varphi(0,1) \geq \varphi(1,0)>0$$

en utilisant deux fois la relation (1). D'où le résultat souhaité pour b et c.
Les deux autres cas se démontreraient de même, mais en utilisant systématiquement les identités (2) et (3).
En fait, on a donc toujours $a \neq 0$, c'est-à-dire le premier cas. La relation $a>0$ est donc évidente. Mais les autres relations $\begin{vmatrix} a & u \\ u & b \end{vmatrix} > 0$ et $D>0$ qui restent à établir découlent facilement de ce qui précède. La première se déduit de (4) (qui a toujours lieu) et la seconde vient de ce que si Δ est le discriminant de la forme φ utilisée ci-dessus, alors $D = \frac{d}{a} = \frac{-\Delta}{4a}$ avec $\Delta<0$ et $a>0$. CQFD.

8. La réciproque reprend en partie les arguments ci-dessus. On suppose réalisées les trois conditions du n°6 et il s'agit d'en déduire que l'on a $f(x,y,z) \geq 0$ quels que soient x,y,z. Comme $a>0$, le problème revient à vérifier que $af(x,y,z) \geq 0$. Mais d'après l'identité (1), il suffit de démontrer que $\varphi(y,z) \geq 0$ quels que soient y et z, ou simplement de s'assurer que φ est une forme définie positive au sens du §A. Mais cela découle aisément des hypothèses car le discriminant Δ de φ est $-4aD$, donc un nombre <0, et que l'on a $\varphi(1,0) = ab-u^2 = ab-\frac{r^2}{4} > 0$ puisque $\varphi = (ab-u^2, 2av-uw, ac-w^2)$ (cf. n°5).

9. Reste à expédier en quelques lignes le problème des formes ternaires équivalentes. En premier lieu, nous dirons qu'une forme ternaire est *équivalente* à une forme ternaire f s'il existe des entiers α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', formant une matrice carrée

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

de déterminant +1, tels que $g(x,y,z) = f(\alpha x+\beta y+\gamma z,\alpha'x+\beta'y+\gamma'z,\alpha''x+\beta''y+\gamma''z)$. En un sens évident, il revient au même de dire qu'il existe une «transformation linéaire» τ de $\mathbb{Z}^3$, de déterminant +1 (ayant d'ailleurs pour matrice la matrice ci–dessus) telle que $g = f\circ\tau$.
En s'inspirant de ce qu'il a vu dans le §A, le lecteur n'aura pas de mal à vérifier qu'on définit ainsi une relation d'équivalence entre les formes ternaires, que deux formes ternaires équivalentes représentent les mêmes nombres et qu'elles ont aussi même déterminant. Pour démontrer ce dernier résultat, nous lui conseillons de démontrer la relation matricielle

$$G = {}^tTFT$$

analogue à celle que l'on a vue §A, n°8. Cette même relation devrait le convaincre aussi que toute forme équivalente à une forme de Gauss est encore une forme de Gauss...

10. Nous aurions quelques scrupules cependant à laisser le lecteur se dépatouiller avec un résultat dont nous aurons absolument besoin et selon lequel si une forme ternaire f représente proprement un entier m donné, alors il existe une forme g équivalente à f et dont le tout premier coefficient est m.
L'hypothèse signifie en effet qu'il existe des entiers u, v, w premiers dans leur ensemble tels que $f(u,v,w) = m$. tout repose alors sur le fait qu'il existe des entiers α, β, α', β', α'', β'' tels que

$$\begin{vmatrix} u & \alpha & \beta \\ v & \alpha' & \beta' \\ w & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} = 1$$

car une fois ce résultat acquis il est facile de vérifier que l'on dispose ainsi d'une transformation linéaire τ transformant f en une forme g équivalente et dont le tout premier coefficient (celui de x^2) est $f(u,v,w)$, c'est-à-dire m.
Pour trouver α, β, α', β', α'', β'', utilisons le fait que selon le théorème de Bézout il existe des entiers u_0, v_0 et w_0 tels que $uu_0+vv_0+ww_0 = 1$.
Cette relation implique évidemment que l'un des nombres u_0, v_0, w_0 n'est pas nul. Supposons que ce soit u_0. Alors le PGCD g de u_0 et de v_0 n'est pas nul non plus et les nombres $u_1 = \frac{u_0}{g}$ et $v_1 = \frac{v_0}{g}$ sont premiers entre eux. Par suite, il existe des entiers u_2 et v_2 tels que $u_1u_2+v_1v_2 = 1$, de sorte que si on pose $u' = -u_2w_0$ et $v' = -v_2w_0$, on a $u_1u'+v_1v' = -u_1u_2w_0-v_1v_2w_0 = -w_0$. Avec les nombres ainsi introduits, on a

$$\begin{vmatrix} u & -v_1 & u' \\ v & u_1 & v' \\ w & 0 & g \end{vmatrix} = u\begin{vmatrix} u_1 & v' \\ 0 & g \end{vmatrix} - v\begin{vmatrix} -v_1 & u' \\ 0 & g \end{vmatrix} + w\begin{vmatrix} -v_1 & u' \\ u_1 & v' \end{vmatrix}$$

$$= uu_1g+vv_1g+w(-v_1v'-u_1u') = uu_0+vv_0+ww_0 = 1$$

ce qui correspond au résultat cherché.
On raisonne de manière semblable si $v_0\neq 0$ ou si $w_0\neq 0$.

11. Nous allons appliquer tout cela à la détermination de certaines formes de faible déterminant et en premier lieu pour démontrer que toute forme de Gauss positive de déterminant +1 est équivalente à la forme $x^2+y^2+z^2$. Nous commencerons par deux lemmes relatifs aux formes binaires.

Lemme 1 : Toute forme binaire définie positive de déterminant +1 (donc de discriminant −4) est équivalente à la forme x^2+y^2.

On sait en effet que toute forme définie positive de discriminant Δ est équivalente à une forme (a,b,c) pour laquelle on a $|b|\leq a\leq c$, $b\neq -a$ et $a \leq \sqrt{\frac{-\Delta}{3}}$ (§A, n° et §B, n°). Si $\Delta = -4$, on a donc $a \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$ et par conséquent $a = 1$ et $-1<b\leq 1$. Comme b est nécessairement pair, on a $b = 0$ et par conséquent $c = 1$. CQFD.

Lemme 2 : Toute forme binaire définie positive de discriminant Δ représente au moins un entier n tel que $0<n \leq \sqrt{\frac{|\Delta|}{3}}$.

Appelons en effet n le plus petit entier >0 représenté par la forme considérée φ. Si (a,b,c) est une forme équivalente à φ telle que $a \leq \sqrt{\frac{|\Delta|}{3}}$ (ce qui est possible d'après ce qu'on a rappelé plus haut), on a $n\leq a \leq \sqrt{\frac{|\Delta|}{3}}$ puisque a est un entier >0 représenté par φ. D'où le lemme.

Cela étant, considérons une forme de Gauss ternaire positive f de déterminant +1. Parmi tous les entiers >0 représentés par f, appelons m celui qui est le plus petit. On a donc $m = f(x,y,z)$ pour des entiers x,y,z particuliers. A cause du caractère minimal de m, il est facile de voir que x, y et z sont premiers dans leur ensemble. On peut donc dire que m est représenté proprement par f. D'après le n°10, il existe une forme g équivalente à f dont le terme en x^2 s'écrit en fait mx^2. Comme c'est une forme de Gauss (n°9), on peut écrire d'après (1), n°4

$$(6) \qquad mg(x,y,z) = (mx+py+qz)^2+\varphi(y,z)$$

où p et q sont des entiers et où φ est une forme binaire de déterminant m. Cette dernière propriété veut dire aussi que le discriminant de φ est le nombre strictement négatif $-4m$, donc que φ est une forme définie négative ou définie positive. C'est en fait le second cas qui a lieu car d'après (6), $\varphi(m,0) = mg(-p,m,0)\geq 0$.

D'après le lemme 2 ci-dessus, il existe alors des nombres entiers y_0 et z_0 tels que $0<\varphi(y_0,z_0)<\sqrt{\frac{4m}{3}}$. Ces nombres y_0 et z_0 étant fixés, les nombres $mx+py_0+qz_0$ parcourent toute une classe de congruence modulo m lorsque x varie dans $\mathbb{Z}$. On peut donc choisir un entier x_0 tel que l'on ait $|mx_0+py_0+qz_0| \leq \frac{m}{2}$. Comme d'autre part, on a $g(x_0,y_0,z_0)>0$ (car $mg(x_0,y_0,z_0) = (mx_0+py_0+qz_0)^2+\varphi(y_0,z_0)\geq\varphi(y_0,z_0)>0$), il résulte de la minimalité de m que $g(x_0,y_0,z_0)\geq m$ (on rappelle que f et g représentent les mêmes nombres). On a donc $mg(x_0,y_0,z_0)\geq m^2$.

Si on rassemble toutes les inégalités obtenues, on voit que

$$m^2 \leq mg(x_0,y_0,z_0) = (mx_0+py_0+qz_0)^2+\varphi(y_0,z_0) \leq \frac{m^2}{4}+\sqrt{\frac{4m}{3}}$$

d'où successivement $m^2 \leq \frac{m^2}{4}+\sqrt{\frac{4m}{3}}$, $\frac{3m^2}{4} \leq \sqrt{\frac{4m}{3}}$, $m^2 \leq \frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}m}$, $m^4 \leq \frac{16}{9}\left(\frac{4}{3}m\right) = \frac{64}{27}m$, $m^3 \leq \frac{64}{27}$ et donc $m \leq \frac{4}{3}$.

On en déduit que m = 1 et donc que la relation (6) est en réalité

$$(7) \qquad g(x,y,z) = (x+py+qz)^2+\varphi(y,z)$$

où le discriminant de φ est -4. Cette dernière propriété implique, d'après le lemme 1, que $\varphi(y,z) \sim y^2+z^2$, autrement dit qu'il existe des entiers α, β, γ, δ vérifiant la relation $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$ tels que $\varphi(\alpha y+\beta z, \gamma y+\delta z) = y^2+z^2$. Considérons alors l'application linéaire $\tau : (x,y,z) \to (x, \alpha y+\beta z, \gamma y+\delta z)$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et dont le déterminant est 1.

Si on applique τ aux deux membres de (7), on obtient d'un côté une forme h(x,y,z) équivalente à g(x,y,z) – donc à f(x,y,z) – et de l'autre une expression du type $(x+ry+sz)^2+y^2+z^2$ où r et s sont deux nouveaux entiers. D'où la nouvelle relation

$$(8) \qquad h(x,y,z) = (x+ry+sz)^2+y^2+z^2$$

Si on applique maintenant à cette forme ternaire la transformation $\tau' = \begin{pmatrix} 1 & -r & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant 1, on voit que le premier membre est une forme équivalente à h, donc à f, égale à $x^2+y^2+z^2$. CQFD.

12. Pour le déterminant 2, nous nous intéresserons aux seules formes indéfinies et nous démontrerons de façon précise que toute forme de Gauss indéfinie de déterminant 2 est équivalente soit à la forme $x^2-y^2-2z^2$, soit à la forme $-2x^2+2yz$.

Nous demanderons d'abord au lecteur d'établir le lemme suivant, analogue au lemme 1 du n°11 et dont la démonstration se fait selon les mêmes principes.

Lemme 3 : Toute forme quadratique binaire définie positive de discriminant -8 est équivalente à la forme x^2+2y^2. Toute forme binaire définie positive de discriminant -16 (resp. -24) est équivalente à l'une des deux formes x^2+4y^2, $2x^2+2y^2$ (resp. x^2+6y^2, $2x^2+3y^2$).

Ce lemme étant acquis, la démonstration que l'on va exposer est compliquée par le fait que l'on part d'une forme indéfinie (de Gauss et de déterminant 2). Comme f représente par définition au moins un entier >0 et au moins un entier <0, on peut appeler m le plus petit entier >0 représenté par f. Comme dans le n°11, m est en fait représenté proprement et par suite, il existe une forme g équivalente à f (donc de Gauss, et indéfinie) dont le tout premier terme est mx^2. On peut donc écrire cette fois

$$(9) \qquad mg(x,y,z) = (mx+py+qz)^2+\varphi(y,z)$$

où p et q sont deux entiers et où φ est une forme binaire de déterminant 2m, donc de discriminant $-8m$. Mais ici, puisque g est indéfinie, φ ne peut pas être positive. Comme cependant $-8m<0$, c'est une forme définie négative, qu'on préférera écrire $-\psi(y,z)$ où ψ est une forme définie positive (de discriminant $-8m$). D'où la nouvelle relation, plus claire

$$(9')\qquad mg(x,y,z) = (mx+py+qz)^2-\psi(y,z)$$

D'après le lemme 2 du n°11, il existe des entiers y_0 et z_0 tels que $0<\psi(y_0,z_0)\leq\sqrt{\frac{8m}{3}}$. Ces entiers étant fixés, les nombres $mx+py_0+qz_0$ forment une classe de congruence modulo m, de sorte qu'on peut choisir x de telle façon que $0\leq mx+py_0+qz_0\leq m$. Si $mx+py_0+qz_0$ est dans l'intervalle $\left[\frac{m}{2},m\right]$, on posera $x_0 = x$, sinon on posera $x_0 = x-1$. Ainsi, dans ce dernier cas, on aura $-m\leq mx_0+py_0+qz_0\leq -\frac{m}{2}$. dans tous les cas, on a alors $\frac{m}{2}\leq|mx_0+py_0+qz_0|\leq m$, c'est-à-dire

$$\frac{m^2}{4}\leq (mx_0+py_0+qz_0)^2\leq m^2$$

On a donc en particulier $mg(x_0,y_0,z_0) = (mx_0+py_0+qz_0)^2-\psi(y_0,z_0)<(mx_0+py_0+qz_0)^2\leq m^2$. On en déduit que $g(x_0,y_0,z_0)<m$. Vu le choix de m comme valeur minimum >0 de f (ou de g), on a nécessairement $g(x_0,y_0,z_0)\leq 0$, c'est-à-dire $(mx_0+py_0+qz_0)^2\leq\psi(y_0,z_0)$.

D'où la relation $\frac{m^2}{4}\leq(mx_0+py_0+qz_0)^2\leq\psi(y_0,z_0)\leq\sqrt{\frac{8m}{3}}$, ce qui implique successivement

$$\frac{m^2}{4}\leq\sqrt{\frac{8m}{3}},\quad \frac{m^4}{16}\leq\frac{8m}{3},\quad m^3\leq\sqrt{\frac{128}{3}},\quad \text{donc } m\leq\sqrt[3]{\frac{128}{3}}\leq 3{,}5.$$

Il n'y a donc que trois possibilités pour m (mais trois quand même!) et trois relations qui remplacent (9) ou (9') :

$$(10)\qquad g(x,y,z) = (x+px+qy)^2-\psi(y,z)$$
$$(10')\qquad 2g(x,y,z) = (2x+py+qz)^2-\psi(y,z)$$
$$(10'')\qquad 3g(x,y,z) = (3x+py+qz)^2-\psi(y,z)$$

où ψ est une forme définie positive de discriminant -8 dans la relation (10), -16 dans la relation (10') et -24 dans la relation (10").

Dans le premier cas, on sait, d'après le lemme 3, que $\psi(y,z)\sim y^2+2z^2$, dans le second que $\psi(y,z)\sim y^2+4z^2$ ou $\psi(y,z)\sim 2y^2+2z^2$, dans le troisième que $\psi(y,z)\sim y^2+6z^2$ ou $\psi(y,z)\sim 2y^2+3z^2$. Ainsi, en appliquant aux deux membres des relations (10), (10') et (10") une transformation convenable du type $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha&\beta\\0&\gamma&\delta\end{pmatrix}$ avec $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$, obtient-on une forme ternaire h équivalente à g telle que

$$(11)\qquad mh(x,y,z) = (mx+ry+sz)^2-\chi(y,z)$$

avec $\chi(y,z) = y^2+2z^2$ si $m = 1$, $\chi(y,z) = y^2+4z^2$ ou $\chi(y,z) = 2y^2+2z^2$ si $m = 2$, $\chi(y,z) = y^2+6z^2$ ou $\chi(y,z) = 2y^2+3z^2$ si $m = 3$.

Appliquons enfin à cette nouvelle relation une transformation de matrice $\begin{pmatrix} 1 & k & \ell \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient dans le premier membre de (11) une nouvelle forme équivalente à g (et à f) (qu'on continuera à appeler h) et dans le second membre une expression égale à

$$[mx+(mk+r)y+(m\ell+s)z]^2-\chi(y,z).$$

En choisissant convenablement k et ℓ, il est possible d'avoir $0\leq mk+r\leq m-1$ et $0\leq m\ell+s\leq m-1$ (restes de r et de s modulo m). Bref, sans changer inutilement de notation, on peut supposer que dans la relation (11), on a $0\leq r,\ s\leq m-1$.

Si m = 1, cette dernière condition implique r=s=0 et par conséquent $h(x,y,z)=x^2-y^2-2z^2$, ce qui est une des conclusions souhaitées.

Si m = 2, on a

$$2h(x,y,z) = (2x+ry+sz)^2-y^2-4z^2 \text{ ou } 2h(x,y,z) = (2x+ry+sz)^2-2y^2-2z^2$$

Le premier membre de ces égalités est toujours pair. Il en résulte que dans le premier cas, on ne peut avoir r = 0 (car en faisant x = 0, y = 1, z = 0, il resterait −1 dans le second membre) ni s = 1 (car en faisant x = 0, y = 0, z = 1, on obtiendrait −3). On a donc, en fait, pour cette première égalité, r = 1, s = 0, c'est-à-dire $2h(x,y,z) = (2x+y)^2-y^2-4z^2 = 4x^2+4xy-4z^2$, donc $h(x,y,z) = 2x^2+2xy-2z^2$. Si on remplace x par y, y par z−y et z par x, on définir alors une transformation de $\mathbb{Z}^3$, dont la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc de déterminant +1, qui transforme $2x^2+2xy-2z^2$ en $2y^2+2y(z-y)-2x^2 = 2yz-2x^2$, ce qui est encore conforme à la conclusion cherchée.

Dans le second cas, on ne peut avoir r = 1 (prendre sinon x = 0, y = 1, z = 0) ni s = 1 (prendre x = 0, y = 0, z = 1). On a donc r = s = 0, c'est-à-dire $2h(x,y,z) = (2x)^2-2y^2-2z^2$, donc $h(x,y,z) = 2x^2-y^2-z^2$, mais cette dernière égalité est impossible car on aurait alors $h(1,1,0) = 1$, alors que par hypothèse le minimum des valeurs >0 de h (ou de f) doit être égal à m = 2.

Enfin, si m = 3, on a

$$3h(x,y,z) = (3x+ry+sz)^2-y^2-6z^2 \text{ ou } 3h(x,y,z) = (3x+ry+sz)^2-2y^2-3z^2 \text{ avec } 0\leq r,s\leq 2$$

Cette fois, c'est par 3 que le premier membre est divisible. Il doit donc en être de même du second membre. Or si x = 0, y = 0, z = 1, on obtient dans le premier cas s^2-6 et dans le second s^2-3, de sorte que s doit être divisible par 3, donc nul, et si x = 0, y = 1, z = 0, on obtient r^2-1 dans le premier cas (ce qui suppose r = 1 ou r = 2) et r^2-2 dans le second, ce qui est franchement impossible. On a donc en fait $3h(x,y,z) = (3x+y)^2-y^2-6z^2$ ou $3h(x,y,z) = (3x+2y)^2-y^2-6z^2$, c'est-à-dire, après développement et simplification par 3

$$h(x,y,z) = 3x^2+2xy-2z^2 \text{ ou } h(x,y,z) = 3x^2+4xy+y^2-2z^2$$

Mais ces deux cas sont en réalité impossible car le "minimum" de h serait 1 et non 3 (prendre x = 1, y = −1, z = 0 dans un cas et x = 0, y = 1, z = 0 dans l'autre).

Bref, comme prévu, il ne reste, à équivalence près, que les deux formes $x^2-y^2-2z^2$ et $2yz-2x^2$. On notera que ce sont deux formes indéfinies et de déterminant +2, et qu'elles ne sont pas équivalentes entre elles car l'une représente des nombres impairs et l'autre en est bien incapable.

13. En fait, pour ce que nous voulons faire, nous aurons besoin de savoir que toute forme ternaire indéfinie de déterminant $-\frac{1}{4}$ est équivalente à la forme x^2-yz.
Cela découle de ce qui précède car si on appelle f une forme ternaire indéfinie de déterminant $-\frac{1}{4}$, il est clair que $g = -2f$ est une forme de Gauss indéfinie de déterminant 2. On a donc $g(x,y,z) \sim x^2-y^2-2z^2$ ou $g(x,y,z) \sim 2yz-2x^2$. Mais seul le second cas peut avoir lieu puisque g ne peut pas représenter des nombres impairs. D'où le résultat.

Cela étant, il convient de considérer tout ce qui précède (je parle des paragraphes A, B, C, D et E) comme une série de préliminaires (en fait volontairement limités) nécessaires pour aborder enfin le vif du sujet – le vif du sujet que voici!

F/ Nombres triangulaires et sommes de trois carrés.

1. Pour qu'un entier naturel n soit une somme de trois nombres triangulaires il faut et il suffit que 8n+3 soit une somme de trois carrés.
La démonstration de ce résultat est facile. Supposons d'abord que n soit la somme de trois nombres triangulaires. Cela veut dire qu'il existe des entiers positifs a, b, c tels que $n = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} + \frac{c(c+1)}{2}$.
Alors $8n = 4a^2+4a+4b^2+4b+4c^2+4c$, et donc $8n+3 = (2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$.
Réciproquement, supposons que 8n+3 soit une somme de trois carrés. Alors, ou bien un seul de ces carrés est impair, ou bien tous le sont. En fait, le premier cas ne peut avoir lieu car comme un carré impair est congru à 1 modulo 8 et qu'un carré pair est un multiple de 4, la somme des trois carrés serait, dans ce premier cas, ou congrue à 1 ou congrue à 5 modulo 8, ce qui n'est pas. Il y a donc trois carrés impairs, ce qu'on peut écrire $8n+3=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$. On en déduit aussitôt que $n = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} + \frac{c(c+1)}{2}$.
Bref, le résultat contenu dans l'exclamation qui sert de titre à ce passionnant article sera obtenu en démontrant que tout entier naturel de la forme 8n+3 est une somme de trois carrés.

2. Pour parvenir à ce résultat définitif, il nous faut établir le théorème de l'existence des genres que nous avons laissé en suspens à la fin du §D, donc démontrer que si Δ est un discriminant impair négatif (dont P est l'ensemble des diviseurs premiers) et si $(\varepsilon_p)_{p\in P}$ est un élément quelconque du produit $\{-1,+1\}^P$, alors il existe au moins une forme de discriminant Δ dont la signature est la famille $(\varepsilon_p)_{p\in P}$. Comme nous l'avons dit dans le n°20 du §D, il suffit de prouver que dans le groupe $G(\Delta)$ des classes de formes primitives de discriminant Δ toute classe du genre principal est un carré.

Considérons donc une classe Φ du genre principal et, pour fixer les idées, une forme f de ce genre. Il s'agit donc d'une forme quadratique binaire primitive, de discriminant Δ, dont la signature n'est formée que de signes +. Il s'agit d'en déduire qu'il existe des formes primitives φ et ψ de discriminant Δ, contenues dans une même classe Θ (donc équivalentes), composables entre elles, et telles que $f \sim \varphi * \psi$; on aura alors $\Phi = \Theta^2$.
Comme on le verra au cours de la démonstration, on peut s'arranger pour que l'on ait $\psi = \varphi$, donc pour que φ soi composable avec elle–même et que l'on ait $f \sim \varphi * \varphi$.

3. Cette démonstration consiste à établir un lien entre la forme binaire f – qu'on écrira (a,b,c) – et la forme ternaire x^2-yz introduite à la fin du précédent paragraphe. Ce lien résultera, comme on va le voir de l'étude des congruences simultanées

$$(1) \qquad M^2 \equiv c,\ 2MN \equiv -b,\ N^2 \equiv a \pmod{\Delta}.$$

Nous ne pouvons pas aborder ici, faute de place, les raisons qui expliquent l'intervention plus ou moins inéluctable de ce système de congruences : voir pour cela [GAU], p.326. Il nous suffira de démontrer que ce système est résoluble, autrement dit qu'il admet au moins une solution M et N.

4. Nous aurons besoin du lemme suivant :
Lemme : Si p est un nombre premier impair et si a est un résidu quadratique de p (non divisible par p), alors, pour tout entier $\alpha \geq 1$, la congruence $x^2 \equiv a \pmod{p^\alpha}$ est résoluble.
Le raisonnement se fait par récurrence sur α. Lorsque $\alpha = 1$, l'existence d'un entier x tel que $x^2 \equiv a \pmod{p}$ résulte de la définition même d'un résidu quadratique (cf. §D, n°2).
Supposons que le résultat ait été démontré pour un exposant $\alpha \geq 1$ fixé, donc qu'il existe un entier x tel que $x^2 \equiv a \pmod{p^\alpha}$ et montrons qu'il existe un entier y tel que $y^2 \equiv a \pmod{p^{\alpha+1}}$. Cherchons en fait un nombre y qui soit de la forme $x+kp^\alpha$ où k est un entier à trouver. Comme $y^2 = (x+kp^\alpha)^2 = x^2+2xkp^\alpha+k^2p^{2\alpha}$ et que x^2 est de la forme $a+mp^\alpha$, on a $y^2 = a+(m+2kx)p^\alpha+k^2p^{2\alpha}$. Comme $\alpha+1 \leq 2\alpha$ (puisque $\alpha \geq 1$), le dernier terme de cette somme est divisible par $p^{\alpha+1}$. Tout le problème est donc de voir qu'on peut choisir k de telle sorte que m+2kx soit divisible par p. Il revient au même d'étudier la congruence $2xk \equiv -m \pmod{p}$. Or il est bien connu (ça traîne dans tout traité d'arithmétique digne de ce nom) que cette congruence (d'inconnue k) est résoluble (quel que soit m) si 2x est premier avec p. Mais cette propriété résulte d'une part du fait que p est impair, de l'autre de ce que x, comme a, est premier avec p.

5. Revenons alors aux congruences du système (1). Si on décompose Δ en facteurs premiers, en écrivant $\Delta = -p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, il est normal de commencer par étudier la résolubilité du système

$$(2) \qquad M^2 \equiv c,\ 2MN \equiv -b,\ N^2 \equiv a \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

Observons d'abord que p_i ne peut diviser à la fois a et c à cause du caractère primitif de la forme (cf. §D, n°9).

Si on suppose que p_i ne divise pas a, on peut commencer l'étude de (2) par la congruence $N^2 \equiv a \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Sinon, p_i ne divise pas c et on pourrait procéder dans l'autre sens, en commençant par la congruence $M^2 \equiv c \pmod{p_i^{\alpha_i}}$.

Pour établir que la congruence $N^2 \equiv a \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ admet au moins une solution N_i, il suffit d'après le lemme du n°4 de vérifier que a est un résidu quadratique de p. Mais cela résulte de l'hypothèse faite sur la signature de f qui implique en particulier $\chi_{p_i}(f) = +1$ c'est-à-dire (avec le symbole de Legendre) $\left(\frac{a}{p_i}\right) = +1$.

Avec le nombre N_i ainsi obtenu, on voit ensuite que la congruence

$$2MN_i \equiv -b \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

admet au moins une solution M_i : cela résulte du fait que $2N_i$ est un entier premier avec le module $p_i^{\alpha_i}$, c'est-à-dire non divisible par p_i.

Reste à vérifier que la congruence

$$M^2 \equiv c \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

est assurée lorsqu'on prend $M = M_i$. pour cela, on tire de la congruence $2M_iN_i \equiv -b \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, la relation $4M_i^2N_i^2 \equiv b^2 \equiv 4ac \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, soit $4aM_i^2 \equiv 4ac \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Il n'y a plus qu'à diviser par 4a, ce qui est possible puisque 4a est premier avec le module mod $p_i^{\alpha_i}$.

6. Le système (2) ayant une solution M_i, N_i connue, utilisons le théorème chinois : les nombres mod $p_i^{\alpha_i}$ étant deux à deux premiers, il existe un entier M (resp. un entier N) tel que l'on ait $M \equiv M_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ (resp. $N \equiv N_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$) quel que soit i.

On a alors $M^2 \equiv M_i^2 \equiv c \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ quel que soit i. D'où $M^2 \equiv c \pmod{\Delta}$.

On vérifie de même que $N^2 \equiv a \pmod{\Delta}$ et que $2MN \equiv -b \pmod{\Delta}$.

D'où l'existence d'au moins une solution M, N pour le système (1).

7. On peut donc dire, en explicitant ce que veut dire ce système qu'il existe des entiers A, B et C tels que

$$(3) \qquad M^2+C\Delta = c,\ 2MN-B\Delta = -b \text{ et } N^2+A\Delta = a$$

les signes étant choisis pour rendre les calculs qui vont suivre suffisamment lisibles. On aura en effet besoin de calculer 2aM+bN, 2cN+bM et $\Delta = b^2-4ac$ en utilisant (3). Cela donne

$$2aM+bN = 2(N^2+A\Delta)M+(B\Delta-2MN)N = 2N^2M+2AM\Delta+BN\Delta-2MN^2 = \Delta(2AM+BN)$$

$$2cN+bM = 2(M^2+C\Delta)N+(B\Delta-2MN)M = 2M^2N+2CN\Delta+BM\Delta-2M^2N = \Delta(2CN+BM)$$

$$\Delta = b^2-4ac = (2MN-B\Delta)^2-4(N^2+A\Delta)(M^2+C\Delta) = 4M^2N^2-4MNB\Delta+B^2\Delta^2-4N^2M^2$$
$$-4N^2C\Delta-4AM^2\Delta-4AC\Delta^2 = \Delta^2(B^2-4AC)-4\Delta(BMN+AM^2+CN^2)$$

Le premier calcul permet de définir un entier m (unique) tel que

$$(4) \qquad m = 2AM+BN \text{ et } \Delta m = 2aM+bN$$

le second de définir un entier n tel que

$$(4') \qquad n = 2CN+BM \text{ et } \Delta n = 2cN+bM$$

et le troisième donne, après simplification par Δ

$$\Delta(B^2-4AC)-4(BMN+AM^2+CN^2) = 1$$

Mais $4(BMN+AM^2+CN^2)=2BMN+4AM^2+2BMN+4CN^2=2M(BN+2AM)+2N(BM+2CN) = 2Mm+2Nn$ d'après (4) et (4').

D'où la relation $\Delta(B^2-4AC) = 2Mm+2Nn+1$, qui permet d'affirmer l'existence d'un entier s tel que

$$(4'') \qquad s = B^2-4AC \text{ et } \Delta s = 2Mm+2Nn+1$$

8. Considérons dans ces conditions la matrice symétrique d'ordre 3

$$\begin{pmatrix} a & b/2 & m \\ b/2 & c & n \\ m & n & s \end{pmatrix}$$

Elle définit naturellement une forme quadratique ternaire dont l'expression générale est $ax^2+cy^2+sz^2+bxy+2mxy+2nyz$ et dont le déterminant (développé par rapport à la troisième ligne de la matrice) est égal à $m\left(\frac{bn}{2}-cm\right)-n\left(an-\frac{bm}{2}\right)+s\left(ac-\frac{b^2}{4}\right)$. Si on multiplie ce résultat par 2Δ, on obtient $\Delta m(bn-2cm)+\Delta n(bm-2am)-\frac{\Delta^2 s}{2}$.

D'où, en remplaçant Δm par $2aM+bN$ et Δn par $2cN+bM$:

$$(2aM+bN)(bn-2cm)+(2cN+bM)(bm-2an)-\frac{\Delta^2 s}{2}$$

$$= 2aMbn+4acMm+b^2Nn-2bNcm+2cNbm-4cNan+b^2Mm-2bMan-\frac{\Delta^2 s}{2}$$

Après élimination des quatre termes qui s'annulent, il reste

$$b^2(Mm+Nn)-4ac(Mm+Nn)-\frac{\Delta^2 s}{2} = (Mm+Nn)\Delta-\frac{\Delta^2 s}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta(2Mm+2Nn-\Delta s) = -\frac{1}{2}\Delta$$

puisque $2Mm+2Nn-\Delta s = -1$ d'après (4").

Si on redivise par 2Δ, on en déduit que le déterminant de la matrice (ou de la forme correspondante) est, miraculeusement, égal à $-\frac{1}{4}$. Comme les "mineurs principaux" de la matrice ne sont ni tous >0 ni tous <0 (ce sont a, $ac-\frac{b^2}{4} = -\frac{\Delta}{4}$ qui est >0 et $-\frac{1}{4}$ qui est <0), la forme est indéfinie (§E, n°6). On déduit de tout cela que la forme ternaire considérée est équivalente à la forme x^2-yz (§E, n°13). Cela veut dire qu'il existe des entiers $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ tels que

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = +1$$

et $ax^2+cy^2+sz^2+bxy+2mxz+2nyz = (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2-(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z)$.

En faisant g = 0, on en déduit que

$$(6) \; f(x,y) = ax^2+bxy+cy^2 = (\alpha x+\beta y)^2-(\alpha' x+\beta' y)(\alpha'' x+\beta'' y)$$

ce qu'on exprime en disant que *la forme binaire* f *est représentée par la forme ternaire* x^2-yz.

9. Comme le montre un calcul facile, laissé généreusement au lecteur, la relation (6) signifie aussi que

$$(6') \qquad a = \alpha^2-\alpha'\alpha'' \quad b = 2\alpha\beta-\alpha'\beta''-\alpha''\beta' \quad c = \beta^2-\beta'\beta''$$

Si on pose alors $u = \alpha\beta'-\alpha'\beta$, $v = \alpha'\beta''-\alpha''\beta'$ et $w = \alpha''\beta-\alpha\beta''$, il est possible de démontrer en utilisant la notion gaussienne de «forme adjointe» que $v^2-4uw = b^2-4ac = \Delta$. Comme je ne veux pas me lancer dans ces considérations (cf. [GAU], p.306], je propose une vérification directe, bête mais efficace :

$$\begin{aligned}
v^2-4uw &= (\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2-4(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\alpha''\beta-\alpha\beta'') \\
&= \alpha'^2\beta''^2-2\alpha'\alpha''\beta'\beta''+\alpha''^2\beta'^2-4\alpha\alpha''\beta\beta'+4\alpha^2\beta'\beta''+4\alpha'\alpha''\beta^2-4\alpha\alpha'\beta\beta'' \\
b^2-4ac &= (2\alpha\beta-\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2-4(\alpha^2-\alpha'\alpha'')(\beta^2-\beta'\beta'') \\
&= 4\alpha^2\beta^2+\alpha'^2\beta''^2+\alpha''^2\beta'^2-4\alpha\alpha'\beta\beta''-4\alpha\alpha''\beta\beta'+2\alpha'\alpha''\beta'\beta''-4\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\beta'\beta'' \\
&\qquad +4\alpha'\alpha''\beta^2-4\alpha'\alpha''\beta'\beta''.
\end{aligned}$$

L'égalité cherchée s'obtient alors en remarquant que dans ce dernier résultat il y a deux termes qui s'annulent ($4\alpha^2\beta^2$ et $-4\alpha^2\beta^2$) et deux qui se simplifient ($2\alpha'\alpha''\beta'\beta''$ et $-4\alpha'\alpha''\beta'\beta''$).

On déduit de là que ni u ni w ne sont nuls car s'il en était autrement, on aurait $\Delta = v^2$, ce qui est faux car par hypothèse Δ est <0.

Notons au passage que les nombres u, v et w sont aussi premiers dans leur ensemble, car la relation (5) montre que $\gamma v+\gamma' w+\gamma'' u = +1$.

10. Si on prend alors $x = \beta'$ et $y = -\alpha'$ dans la relation (6) ci-dessus, il vient $f(x,y) = f(\beta',-\alpha') = (\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2 = u^2$. En d'autres termes, f représente un carré non nul. Quitte à diviser par un PGCD convenable (en l'occurence le PGCD de α' et de β' – qui n'est pas nul puisque $u\neq 0$), on peut supposer que cette représentation est propre. Appelons n^2 le carré non nul représenté proprement par f ainsi obtenu.

D'après un résultat bien connu, vu dans le premier paragraphe, il existe alors des entiers ℓ et m tels que $f\sim(n^2,\ell,m)$. On a alors $\ell^2-4mn^2 = \Delta$. Si on pose $\varphi = (n,\ell,mn)$, on obtient une nouvelle forme binaire de discriminant Δ, composable avec elle-même (car $4n^2$ est un entier non nul qui divise $\ell^2-\Delta = 4mn^2$: cf. §C, n°3) et pour laquelle $\varphi*\varphi = (n^2,\ell,m)\sim f$.

Le résultat serait alors à notre portée (que dis-je? dans la poche) si la forme φ avait le bon goût d'être primitive. Mais ce n'est malheureusement pas sûr car ce n'est pas parce que n^2, ℓ et m sont premiers dans leur ensemble (ce qu'on sait) que n, ℓ et mn le sont! En fait, pour que n, ℓ et mn soient premiers dans leur ensemble, il est nécessaire que n et ℓ soient premiers entre eux. Cette condition nécessaire est aussi suffisante et revient à dire que n est premier avec $\Delta = \ell^2-4mn^2$. Mais il est bien difficile de savoir si cette condition est réalisée avec le nombre n défini ci-dessus à partir de la seule matrice

$$S=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{pmatrix}$$

dont on ne sait pas grand chose. Heureusement, comme on va le voir, on a toujours la possibilité de remplacer S par une matrice analogue ayant les mêmes propriétés et pour laquelle le nombre n correspondant soit premier avec Δ.

11. Pour cela, considérons un entier r quelconque et la matrice

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & r\\ 2r & 1 & r^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

de déterminant +1 et qui laisse invariante la forme x^2-yz car on a $(x+rz)^2-(rx+y+r^2z)z = x^2+2rxz+r^2z^2-2rxz-yz-r^2z^2 = x^2-yz$.

Si on pose alors $S_1 = TS = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1'\\ \alpha_1'' & \beta_1'' & \gamma_1''\end{pmatrix}$, on en déduit que S_1, comme S, transforme la forme x^2-yz en $ax^2+cy^2+sz^2+bxy+2mxz+2nyz$.

L'entier u ci-dessus (égal à $\alpha\beta'-\alpha'\beta$) doit être alors remplacé par $u_1 = \alpha_1\beta_1'-\alpha_1'\beta_1$. Comme $\alpha_1 = \alpha+\alpha''r$, $\beta_1 = \beta+\beta''r$, $\alpha_1' = 2\alpha r+\alpha'+\alpha''r^2$ et $\beta_1' = 2\beta r+\beta'+\beta''r^2$, on voit que $u_1 = (\alpha+\alpha''r)(2\beta r+\beta'+\beta''r^2)-(2\alpha r+\alpha'+\alpha''r^2)(\beta+\beta''r)$, ce qui donne, après développement, $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)+(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')r+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')r^2 = u-vr+wr^2$.

Il suffit alors de voir qu'on peut choisir r de façon que $u-vr+wr^2$ soit premier avec Δ. Le lecteur vérifiera qu'il en est bien ainsi si on pose $r = \prod_{p\in R} p$ où R est l'ensemble des diviseurs premiers de Δ.

Cela clôt la démonstration du théorème énoncé ci-dessus dans le n°2.

12. Nous pouvons enfin nous attaquer à la phase finale de notre propos en démontrant que tout entier de la forme 8k+3 est une somme de trois carrés (cf. n°1).

Cette conclusion se déduit en fait de ce qu'il existe une forme positive f = (a,b,c), définie positive, de discriminant $\Delta = -8k-3$ et pour laquelle le système de congruences

$$(7)\qquad M^2 \equiv -2c \qquad MN \equiv b \qquad N^2 \equiv -2a \pmod{2a}$$

est résoluble.

Supposons l'existence de f établie et associons à une solution (M,N) de (7) des entiers A, B et C tels que

$$(8)\ M^2-C\Delta = -2c,\ MN+B\Delta = b \text{ et } N^2-A\Delta = -2a$$

En s'inspirant des calculs faits ci-dessus dans le n°7, le lecteur vérifiera qu'il existe des entiers m, n et s tels que

$$(9)\qquad m = AM+BN \quad \text{et} \quad \Delta m = 2aM+bN$$
$$(9')\qquad n = CN+BM \quad \text{et} \quad \Delta n = 2cN+bM$$
$$(9'')\qquad s = AC-B^2 \quad \text{et} \quad \Delta s = Mm+Nn+1$$

Dans ces conditions, la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} 2a & b & m \\ b & 2c & n \\ m & n & s \end{pmatrix}$$

définit une forme quadratique ternaire (de Gauss) dont l'expression générale est $2ax^2+2cy^2+sz^2+2bxy+2mxz+2nyz$ dont le déterminant, calculé selon la même méthode que le n°8, est égal à +1.

Comme les trois mineurs principaux $2a$, $\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac-b^2 = -\Delta = 8k+3$ et $\begin{vmatrix} 2a & b & m \\ b & 2c & n \\ m & n & s \end{vmatrix} = +1$

sont >0 (on rappelle que $f = (a,b,c)$ est une forme définie positive, ce qui entraîne $a>0$), la forme donné par la matrice ci–dessus est une forme positive (§E, n°6). Elle est donc équivalente à $x^2+y^2+z^2$ (§E, n°11), ce qui veut dire qu'il existe des entiers α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' formant une matrice de déterminant +1, tels que

$$2ax^2+2cy^2+sz^2+2bxy+2mxz+2nyz = (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)^2+(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z)^2$$

D'où en particulier, en faisant $z = 0$,

$$2ax^2+2bxy+2cy^2 = (\alpha x+\beta y)^2+(\alpha' x+\beta' y)^2+(\alpha'' x+\beta'' y)^2$$

relation qui veut dire que

$$2a = \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2,\ b = \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'',\ 2c = \beta^2+\beta'^2+\beta''^2$$

Il est facile d'en déduire, par un calcul direct, que $-\Delta = 8k+3$ est la somme des trois carrés $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\alpha\beta''-\alpha''\beta)^2+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2$ car on a d'une part

$$\begin{aligned}&(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\alpha\beta''-\alpha''\beta)^2+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2\\ &= \alpha^2\beta'^2+\alpha'^2\beta^2+\alpha^2\beta''^2+\alpha''^2\beta^2+\alpha'^2\beta''^2+\alpha''^2\beta'^2-2\alpha\alpha'\beta\beta'-2\alpha\alpha''\beta\beta''-2\alpha'\alpha''\beta'\beta''\end{aligned}$$

alors que de l'autre

$$\begin{aligned}-\Delta &= 4ac-b^2 = (\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)(\beta^2+\beta'^2+\beta''^2)-(\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'')^2\\ &= \alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta'^2+\alpha^2\beta''^2+\alpha'^2\beta^2+\alpha'^2\beta'^2+\alpha'^2\beta''^2+\alpha''^2\beta^2+\alpha''^2\beta'^2+\alpha''^2\beta''^2-\alpha^2\beta^2\\ &\qquad -\alpha'^2\beta'^2-\alpha''^2\beta''^2-2\alpha\alpha'\beta\beta'-2\alpha\alpha''\beta\beta''-2\alpha'\alpha''\beta'\beta''\end{aligned}$$

ce qui est la même chose, après simplification.

13. Reste à prouver l'existence de la forme $f = (a,b,c)$...
Faisons une analyse rapide en supposant, comme on disait autrefois, le problème résolu. Si on décompose $-\Delta = 8k+3$ en facteurs premiers, sous la forme $p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$, on doit avoir pour tout i, $M^2 \equiv -2c$ et $N^2 \equiv -2a \pmod{p_i}$. Comme la forme f est primitive et que p_i divise $\Delta = b^2-4ac$, l'un des deux nombres a ou c est premier avec p_i. Supposons que ce soit a. On a donc, avec le symbole de Legendre, $\left(\frac{-2a}{p_i}\right) = +1$, c'est-à-dire $\left(\frac{a}{p_i}\right) = \left(\frac{-2}{p_i}\right)$. Mais $\left(\frac{a}{p_i}\right)$ est aussi le caractère de f relatif à p_i (§D, n°9), de sorte que la relation trouvée s'écrit $\chi_{p_i}(f) = \left(\frac{-2}{p_i}\right)$. La forme f cherchée doit donc être choisie dans le genre déterminé par le système de signes $\left(\frac{-2}{p_i}\right)$ obtenu lorsque i varie de 1 à r.

Cette analyse étant faite, le théorème de l'existence des genres (n°2 ci–dessus) garantit qu'il existe une forme primitive $f = (a,b,c)$, de discriminant $\Delta = -8k-3$, telle que $\chi_{p_i}(f) = \left(\frac{-2}{p_i}\right)$ pour tout $i = 1, \ldots, r$.

Pour démontrer dans ces conditions la résolubilité du système (7), on procède comme on a fait ci–dessus pour (1) (cf. n°3). Grâce au théorème chinois, on se contente de vérifier que

$$M^2 \equiv -2c,\ MN \equiv b,\ N^2 \equiv -2a \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

est résoluble quel que soit i.

Si a n'est pas divisible par p_i, on commence par $N^2 \equiv -2a \pmod{p_i^{\alpha_i}}$; si c'est c qui a cette propriété, par $M^2 \equiv -2c \pmod{p_i^{\alpha_i}}$.

Limitons–nous au premier cas. L'existence d'au moins une solution N_i à la congruence $N^2 \equiv -2a \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ résulte du lemme vu n°4, compte tenu du fait que $-2a$ est un résidu quadratique modulo p_i puisque $\left(\frac{-2a}{p_i}\right) = \left(\frac{a}{p_i}\right)\left(\frac{-2}{p_i}\right) = \chi_{p_i}(f)\chi_{p_i}(f) = +1$. Il est facile ensuite de voir que la congruence $MN_i \equiv b \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ a une solution M_i. Reste à voir que $M_i \equiv -2c \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Cela vient de la relation $b^2-4ac = \Delta$ qui donne $b^2 \equiv 4ac = (-2a)(-2c) \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, donc $M_i^2N_i^2 \equiv N_i^2(-2c)$, congruence qui peut être simplifiée par N_i^2 puisque N_i est premier avec p_i, tout comme a.

La résolubilité de (7) étant acquise, il convient de s'assurer, pour finir, que f est bien une forme positive. On le voit en utilisant la relation (10) du §D, n°17. Autrement dit, si on appelle Q l'ensemble des diviseurs premiers de Δ ayant un exposant impair dans la décomposition de Δ en facteurs premiers, il s'agit de vérifier que $\prod_{p\in Q}\chi_p(f) = +1$.

On peut supposer, si on veut, que les éléments p de Q sont rangés au début de la suite $p_1, \ldots, p_r$ utilisée plus haut, autrement dit que ces éléments sont $p_1, \ldots, p_s$ avec $s \le r$. Dans ce cas, compte tenu de la parité des exposants (impairs si $i \le s$, pairs si $i > s$), on voit aussitôt que

$$\prod_{p\in Q}\chi_p(f) = \chi_{p_1}(f)\ldots\chi_{p_s}(f) = \left(\frac{-2}{p_1}\right)\ldots\left(\frac{-2}{p_s}\right) = \left(\frac{-2}{p_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{-2}{p_s}\right)^{\alpha_s}$$
$$= \left(\frac{-2}{p_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{-2}{p_r}\right)^{\alpha_r} = \left(\frac{-2}{p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}}\right) = \left(\frac{-2}{|\Delta|}\right) = \left(\frac{-1}{|\Delta|}\right)\left(\frac{2}{|\Delta|}\right)$$

Comme $|\Delta|$ est de la forme $8k+3$, on a $\left(\frac{-1}{|\Delta|}\right) = -1$ et $\left(\frac{2}{|\Delta|}\right) = -1$ d'après (4') et (5'), §D, n°6.

D'où le résultat, qui met un point final à cette interminable démonstration!

Epilogue.

Le premier paragraphe de cette étude est assez élémentaire et ne devrait pas poser de problèmes de compréhension au lecteur. Le second paragraphe ne présente pas non plus

de grandes difficultés dans la mesure où l'on s'est limité aux discriminants impairs négatifs. Lorsque le discriminant Δ est pair, le dénombrement des formes ancipitales élémentaires (a,0,c) et (a,a,c) est plus délicat et il y a de nombreux cas à envisager en fonction de l'exposant α de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de Δ : voir [CAS], p.342. En outre, le passage des formes élémentaires (primitives) aux classes ambiguës (primitives) n'est pas facile lorsque $\Delta>0$; il faut soit connaître la théorie de la réduction des formes indéfinies de Gauss ([GAU], p.161), soit avoir procédé à une étude détaillée du sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ laissant invariant une forme f donnée (groupe des automorphismes de f) (cf. [CAS], p.291).
La composition des formes selon Gauss est difficilement compréhensible (pour le commun des mortels que je suis). Ce qu'en dit Buell dans [BUE] est d'un faible secours. J'ai suivi de près la méthode de Cassels ([CAS], p.333) mais en modifiant son vocabulaire (au mépris de l'histoire de la théorie, il appelle «concordantes» les formes que j'appelle «composables»).
La notion de genre, étendue au cas d'un discriminant de parité quelconque est définie dans [BUE], p.52. Cassels part d'un tout autre point de vue, plus moderne, mais pas forcément plus compréhensible (cf. [CAS], p.139). Dans le cas général il y a une relation de dépendance entre les caractères dont il faut tenir compte pour énoncer le théorème de l'existence des genres.
Le paragraphe sur les formes ternaires a été réduit au strict minimum. Nous n'avons pas jugé utile de démontrer comme l'a fait Gauss, à l'aide d'une théorie de la réduction *ad hoc*, qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de déterminant donné (cf. [GAU], p.318 ou de façon indépendante, [ROS], p.156) – je me suis d'ailleurs inspiré de ce dernier pour établir les résultats des numéros 11 et 12 du §E.
Le dernier paragraphe, tel que je l'ai rédigé, est sans doute le moins satisfaisant, en particulier parce que les congruences (1) et (7) tombent du ciel comme des cheveux sur la soupe! Gauss est en principe plus explicite (surtout si on lit [VEN] en parallèle...), mais j'ai reculé devant la tâche d'exposer la théorie de la représentation des formes binaires par les formes ternaires qui explique pas mal de choses, mais que je n'ai pas entièrement comprise.

Pour tous renseignements complémentaires, voici la bibliographie qui m'a servi :
[BUE] Duncan A. BUELL, *Binary Quadratic Forms, Classical Theory and Modern Computations*, Springer Verlag, 1989.
[CAS] J.W.S. CASSELS, *Rational Quadratic Forms*, Academic Press, 1978.
[DIE] Jean DIEUDONNE (sous la direction de), *Abrégé d'histoire des mathématiques*, 1700–1900, vol.I, Hermann, 1978. Il y a maintenant une nouvelle édition regroupant les deux volumes de 1978.
[GAU] Carl Friedrich GAUSS, *Recherches arithmétiques* (traduction française de *Disquisitiones Arithmeticae*, par A.–C.–M. Poullet – Delisle), réimpression éditions Jacques Gabay, 1989.
[ITA] Jean ITARD, *Les nombres premiers*, P.U.F, Collection «Que sais–je?».
[ROS] H.E. ROSE, *A Course in Number Theory*, Oxford University Press, 1988.

[VEN] B.A. VENKOV, *Elementary number Theory*, Walters – Noordhoff Publishing Groningen, 1970.
[WEI] André WEIL, *Number Theory, An approach through history, From Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, 1984.

Errata

Plusieurs erreurs se sont glissées dans le texte de la première partie de cet article, dont voici les corrections. Que l'auteur et les lecteurs veuillent bien nous en excuser.

p.22, ligne 8 : au lieu de «classes "primitives" en "ambiguës"» lire «classes "primitives" et "ambiguës"».
p.22, ligne 5 (en partant du bas) : supprimer «+2» dans «$ax^2+bxy+cy^2+2$».
p.28, ligne 4 (en partant du bas) : au lieu de «modulo a», lire «modulo 2a».
p.30, il manque le mot «propriété» tout à la fin de la 3ème ligne du n°18.
p.30, n°18 encore, 6ème ligne, le «c'» au milieu de la ligne représente un entier (différent de 0) et non un mot élidé.
p.31, ligne 4, à la fin : lire «montre qu'il n'y a, au plus, qu'une valeur».
p.35, ligne 3, au lieu de «$\Delta_1^{\alpha_1}$» lire «Δ».
p.36, passage sauté : il faut lire à partir de la ligne 4 «Sauf erreur de ma part (cf. [VEN], p.126), cette dernière propriété <u>n'est pas vraie si $\Delta>0$. En revanche, nous allons voir qu'elle</u> est exacte si $\Delta<0$».
p.36, n°9, 1ère ligne, tout à la fin, remplacer «en» par «et».
p.37, 10ème ligne en partant du bas : il s'agit de développer «$a(x+\beta y)^2+b(x+\beta y)y+cy^2$» et non «$a(x+\beta y)^2+b(x+\beta y)+cy^2$».
p.40, 1ère ligne au n°2 : lire «compilation» et non «composition».
p.42, ligne 9, «membre à membre» et non «nombre à nombre»...
p.42, 1ère ligne du n°6, supprimer le préfixe «dé» de «décomposer».
p.43, 3ème ligne avant la fin du n°8, «on aura f~(a,b,c) et f'~(a',b,c')» (pas d'accent à b). Mettre ensuite une majuscule au mot «comme».
p.45, ligne 13, «Comme $B^2-4\alpha\alpha'\Gamma''=\Delta$» (un accent à α).

LES MATHEMATIQUES

DANS LE SYSTEME EDUCATIF ESPAGNOL

Florencio VILLARROYA BULLIDO
Société Aragonaise des Professeurs de Mathématiques
Trésorier de la F.E.S.P.M. (1)

Le système éducatif espagnol dans son état actuel remonte essentiellement, pour les enseignement primaires et secondaires, à la Loi Générale sur l'Éducation (LGE) de 1970.

Dans les années de la Transition politique, puis avec l'arrivée au pouvoir des socialistes lors des élections d'octobre 1982, une reforme a été entreprise qui aboutit dans la **Loi Organique sur le Droit de l'Éducation (LODE)** et dans la **Loi de mise en Ordre Général du Système Educatif (LOGSE)**, approuvée en 1990 et mise en place à partir de l'année scolaire 1991-92. Cette mise en place du nouveau système se fait d'une façon progressive, à partir du primaire (élèves de six ans). L'année scolaire 1994-95, la cinquième du primaire sera généralisée. La plupart des établissement du secondaire continuent avec la LGE.

A. LE SYSTEME DE LA LOI LGE de 1970, AVANT LA REFORME.

1.- L'organisation générale du système éducatif espagnol.

La LGE du Ministre Villar Palasi prétendait adapter le système national traditionnel aux nouvelles conditions sociales, tant nationales qu'internationales du pays.

Cette Loi de 1970 a prévu pour la première fois un **Enseignement Général de Base (EGB),** obligatoire pour tous les jeunes ayant de 6 à 14 ans. Entre 4 et 6 ans l'enfant peut, de façon facultative, avoir eu deux années d'Enseignement "Préscolaire". La EGB se compose de trois cycles : Préparatoire de 6 à 8 ans, Moyen de 8 à 11, et Supérieur de 11 à 14. A la fin de ses études primaires il peut choisir entre la filière technique (**Formation Professionnelle**), subdivisée en deux cycles **FP1**, deux années, **FP2,** trois années, et la filière qui le mènera à l'Université, avec une formation générale assez théorique, **Baccalauréat Unifié et Polyvalent (BUP)**, trois années scolaires, plus un **Cours d'Orientation Universitaire (COU)**. En plus, pour entrer à l'Université il doit réussir un Examen National, appelé populairement **Selectividad**.

2.- Les établissements.

L'enseignement a toujours été fortement influencé, voire dominé par l'Eglise Catholique. De ce fait, dans les grandes villes près de la moitié des élèves fréquente des établissements confessionnels (2).

---

(1) F.E.S.P.M. = Fédération Espagnole des Sociétés de Professeurs de Mathématiques. Il y en a 13, répandues dans les 17 Communautés Autonomes du pays.
(2) Cette proportion varie selon les régions et diminue actuellement.

Ainsi, vu le caractère obligatoire, donc gratuit de l'enseignement de base, l'Etat se trouve obligé de prendre en charge une partie (parfois le tout) des frais de fonctionnement de nombreux établissements d'éducation privés opérant sous contrat (**Enseignement Privé Concerté**). En général, ces établissements permettent qu'un élève rentre à 4 ans et continue là jusqu'à 18 ans, (fin des études Secondaires, pour partir vers l'Université).

Les établissements publics, sont classés en trois types: **Collèges d'Enseignement Général de Base (Colegios de EGB)** pour le primaire, **Lycées (Institutos de Bachillerato)** pour le secondaire direction Université, **Lycées Techniques (Institutos de Formación Profesional)** pour le secondaire professionnel. Il n'y a pas de liaison entre les Collèges de EGB et les lycées Quand on a fini la EGB, on doit demander une nouvelle place dans un lycée, et on doit satisfaire certaines conditions: économiques, de proximité, etc. pour avoir place dans le lycée choisi.

3.- Les personnels :

Les enseignants du secteur public sont sélectionnés par Concours Public. Ils ont le statut de fonctionnaires de l'Etat.
Les maîtres et professeurs de l'éducation primaire doivent posséder un diplôme universitaire, habituellement, trois ans d'École Normale.

Les Professeurs de Secondaire sont titulaires d'une licence universitaire. Ils ont fait cinq années dans une des Facultés. Sauf les Maîtres d'Atelier, ceux-ci n'ont qu'un diplôme universitaire de trois années.

Après le Concours Public, tous les Maîtres ont le même statut professionnel, tandis que dans le Secondaire il y a au moins trois types de statuts :

a) Professeur de Secondaire

b) "Catedrático" (professeur de Secondaire, avec un salaire amélioré)

c) Maîtres d'Atelier (Professeurs Techniques de Lycées Techniques).

Auparavant les "Catedráticos" formaient un corps indépendant accessible sous concours, il n'y en avait qu'un par matière et par établissement. Les Catedráticos sont les directeurs des "Départements Didactiques".

Les maîtres ont un horaire hebdomadaire de 25 heures de cours, plus 5 heures de permanence dans l'établissement. Ils sont groupés en deux types : "Généralistes" qui enseignent toutes les matières jusqu'à 11 ans, et Spécialistes, responsables de diverses matières : sciences (naturelles et mathématiques), langues (propre, étrangère, et sciences sociales), musique, éducation physique.

Les professeurs d'études secondaires, en principe, doivent enseigner dans la matière de leur spécialité, 18 heures de cours par semaine et en plus assurent 12 heures de permanence dans l'établissement. Dans ce temps ils assistent aux réunions du Département Didactique, aux réunions de tous les professeurs de l'établissement, effectuent des tâches de tutorat ou assurent l'accueil des parents d' élèves.

A noter que le Directeur d'un établissement est lui-même professeur, élu comme directeur par le Conseil Scolaire de l'établissement (où participent des parents d' élèves et du personnel non enseignant). Le Directeur est le chef administratif des professeurs. Au-dessus de lui se trouvent les Inspecteurs, avec des fonctions à la fois administratives et pédagogiques.

4.- Les Programmes :

4.1. Enseignement Primaire : Jusqu'à 11 ans, les matières sont enseignées de manière intégrée. C'est dans le Cycle Supérieur (11-14) qu'ont peut distinguer les matières, en particulier, les mathématiques. Pour les élèves il y a chaque semaine 4 heures de maths.

Les programmes sont les suivants : pour le cycle supérieur, avec indication entre parenthèses des semaines qui correspondent à chacun d'eux.

Sixième (11-12 ans) : Nombres rationnels positifs (11 semaines), Divisibilité dans N (3 sem), Segments et angles, Figures planes, Périmètres et aires (15 sem), Statistique : construction et interprétation des graphiques. Indicateurs de position (3 sem).

Septième (12-13 ans) : Nombres entiers (5 sem). Fonction et sa représentation graphique, fonctions de premier degré (11 sem). Applications linéaires, grandeurs proportionnelles, applications à l'arithmétique mercantile (8 sem). Perpendicularité et parallélisme dans l'espace. Aires des corps géométriques (6 sem). Statistique : Indicateurs de dispersion (2 sem).

Huitième (13-14 ans) : Nombres rationnels et décimaux : Q (7 sem). Angles sur le cercle, Applications métriques sur le triangle (5 sem). Équation du deuxième degré, paraboles. Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues (8 sem). Polynômes (4 sem). Proportionnalité géométrique et son rapport avec la mesure (4 sem). Volumes des corps géométriques (4 sem).

4.2 Enseignement Secondaire (BUP).

Cours 1º : (4 h/semaine) - Combinatoire. Probabilité. -Introduction au nombre réel. Approximation décimale. Radicaux. - Variable statistique. Indicateurs de position et de dispersion. - Corps des nombres complexes. - Anneau de polynômes. Binôme de Newton. - Divisibilité de polynômes. Corps des fractions. - Fonctions polynômes à variable réelle. Représentation graphique. - Résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes. - Suites. Progressions. Intérêt composé et annuités.

Cours 2º : (4 h/semaine) - Limite des suites. Le nombre "e". - Calcul des limites - Fonction réelle à variable réelle. Limite. Continuité. - Fonctions exponentielle et logarithmique. Représentation graphique et propriétés. - Fonctions circulaires. Représentation graphique et propriétés. - Dérivée. Fonction dérivée. Primitives d'une fonction. - Vecteurs dans le plan et dans l'espace. Structure d'espace vectoriel. Le plan affine. Introduction à l'espace affine. Géométrie affine plane.

Cours 3º : (4 h./semaine) - Produit scalaire. Le plan euclidien. Le plan métrique. Trigonométrie plane. - Étude du nombre complexe en forme polaire. Opérations. - Géométrie métrique plane. Coniques. - Calcul différentiel. Applications. -Calcul intégral. Applications. - Variable aléatoire. Distributions binomiale et normale. - Distributions bidimensionnelles. Droites de régression. Corrélation.

Cours d'Orientation Universitaire: (4 heures par semaine). (17-18 ans)

Mat I : Filières Scientifiques.

1. Systèmes d'équations. (6 semaines). Espace vectoriel. Base. Rang d'un système. Matrices. Déterminants. Systèmes d'équations. Théorème de Rouché-Frobenius.

2. Espaces affine et euclidien tridimensionnels (8 semaines). Équation d'une droite et d'un plan. Produit scalaire. Angle entre deux droites, entre deux plans. Produit vectoriel. Produit mixte. Volume du tétraèdre.

3. Ampliation du calcul différentiel et intégral. (9 semaines). Limite, continuité, dérivabilité. Théorèmes de Rolle, Cauchy, Lagrange. Règle de L'Hôpital. Formule de Taylor. Problèmes de maximum. Représentation de courbes. Calcul de primitives. Intégrale définie : application au calcul des aires et des volumes.

4. Ampliation du calcul des probabilités (4 semaines).
Axiomes. Règle de Laplace. Probabilités conditionnelles. Probabilité totale. Théorème de Bayes.

Mat II : Sciences Sociales, Littéraires, ...

1. Algèbre Linéaire : Matrices. Déterminants. Systèmes linéaires. Méthode de Gauss. Programmation linéaire. (8 semaines).

2. Fonctions et graphiques. La dérivée. Interpolation linéaire et quadratique. Calcul intégral. (9 semaines).

3. Eléments de probabilité et de statistique : Statistique descriptive unidimensionnelle. Moyenne arithmétique, géométrique, harmonique. Variance. Ecart-type. Coefficient de Pearson. Statistique descriptive bidimensionnelle. Régression et corrélation. Critère des moindres carrés. Équation de la droite de régression. Variance résiduelle. Coefficient de régression. Coefficient de corrélation linéaire. Probabilité. Modèle mathématique. Règle de Laplace. Probabilité conditionnelle. Indépendance stochastique. Distributions binomiale et normale.

4.3 Enseignement Secondaire (FP).

Premier Cycle (14-16 ans) FP1 : Une année de Mathématiques, la première (4h./semaine); (Programmes nouveaux, de 1988) : Calcul numérique et algébrique (13 semaines). - Géométrie et trigonométrie (10 sem.). - Initiation à la statistique (3 sem.). Note : La base du schéma général des contenus, les programmes et la durée recommandée doivent être prises de façon flexible. Ils sont des guides qui ne doivent pas représenter des obstacles pour l'enseignement.

Deuxième Cycle (16-19 ans) FP2 : Trois années scolaires : (Programmes de 1975, actuellement en vigueur)

Cours 1º : (3h/sem) : Expressions algébriques. Division d'un polynôme par x-a. Décomposition factorielle de polynômes. -Résolution de problèmes à travers des équations et des inéquations. Systèmes d'équations. - Combinatoire. - Puissance d'un binôme. - Statistiques. Indicateurs de position et de dispersion. Probabilité. Distribution binomiale et normale - Progressions arithmétiques et géométriques.

Cours 2º : (2 h/sem) : Fractions continues. - Logarithmes. Intérêts composés. Annuités de capitalisation. - Trigonométrie plane. Fonctions circulaires de l'angle somme et différence. Résolution de triangles. - Calcul vectoriel. Produit d'un nombre par un vecteur. Addition et soustraction de vecteurs. Produit scalaire. Produits vectoriel et mixte. - Translations dans le plan. Rotations dans le plan. Symétries centrale et axiale. Homothéties. Similitudes dans le plan. Le groupe des similitudes. - Suites. Limite. Le nombre "e". Fonctions. Limite d'une fonction, Continuité.

Cours 3º : (2 h/sem) : Géométrie analytique de la droite dans le plan. Distance entre deux points, entre droite et point. Bissectrices. - Étude dérivée. Dérivées d'une somme, d'un produit, d'une division et d'une puissance, des fonctions logarithmique, exponentielle et circulaires. Maximum et minimum. Représentation graphique d'une fonction. Différentielle d'une fonction. Dérivée d'une fonction implicite. - Calcul intégral. Règle de Barrow. Calcul de certains volumes.

5.- La réalisation des programmes. Les programmes doivent être traités obligatoirement par les professeurs et les élèves. En 3º B.U.P., les élèves peuvent choisir deux options : scientifique ou non ; dans la première de ces options, les mathématiques sont obligatoires, dans l'autre elles sont facultatives. Les élèves de filière scientifique en 3º BUP suivent en COU, les mathématiques I, les autres les maths. II.

Mais, comme la réalité sociale et mathématique a beaucoup changé depuis 1975, les contenus sont loin d'être atteints, ni dans le Cycle Supérieur de la EGB, ni dans 3e BUP, et en COU. Il en est plus loin encore dans la FP, car dans cette branche de l'enseignement vont les élèves les moins doués, et, en plus, avec un échec accumulé de la scolarité antérieure (surtout, en mathématiques).
De plus les programmes sont très forts, très lourds, très formalistes (bourbakistes, si j'ose dire) et la plupart des professeurs, tant de la EGB, que de BUP, ont arrangé leurs programmations d'une façon qui convient mieux à l'apprentissage des élèves. On peut dire que la réforme était déjà mise en place par plusieurs professeurs, individuellement ou groupés, mais avec une apparence de continuité avec les programmes de 75.

6.- L'épreuve de sélection terminale :

A la fin des études en chaque établissement du Cours d'Orientation Universitaire, les élèves qui veulent entrer à l'Université doivent réussir à une épreuve de sélection pour chaque université, proposée par l'Université elle-même. Cette épreuve se déroule en trois jours, et les examens correspondent à toutes les matières étudiées au COU. Cette épreuve est notée par des jurys composés de professeurs universitaires et aussi de professeurs de l'enseignement public de COU. La note finale est la moyenne entre la moyenne de toutes les notes de BUP+COU, et la moyenne des notes obtenues à l'épreuve à l'Université. Cette note est très importante car elle permet, pour les élèves ayant les meilleures notes, de choisir leurs études, car il y a "numerus clausus" pour la plupart des Écoles et Facultés Universitaires.

Pour la partie concernant les mathématiques, tant I que II, l'examen consiste à répondre en 90 minutes à deux questions (composées d'ailleurs d'autres) choisies parmi quatre questions proposées.

Pour certaines des études universitaires, une partie des places (30%) est réservée aux élèves provenant de FP2.

7.- Méthodes d'enseignement. Horaires :

Les classes commencent en Espagne, pour l'enseignement primaire et pour le secondaire privé, le 15 septembre; pour l'enseignement secondaire public, le 1er octobre.

La fin des classes est le 25 juin pour le primaire, le 15 juin pour le secondaire, le 31 mai pour le COU, (on laisse le mois de juin pour préparer l'épreuve de sélection). Les activités des professeurs finissent le 30 juin. Alors il y a deux mois de vacances pour les professeurs, et au moins deux mois et demi pour les élèves (qui ont réussi en juin, car les quinze premiers jours de septembre sont destinés au déroulement des examens pour les élèves qui ont échoué en juin).

Il y a des vacances à Noël, du 22 décembre au 8 janvier, et à Pâques, une semaine et demie.

Chaque département didactique, dans chaque établissement scolaire, doit au mois de septembre, rédiger sa propre programmation, en suivant les programmes officiels, mais avec les modifications qu'il veut introduire, les temps de chaque item, les activités complémentaires, les méthodes d'enseignement, les contenus minimums pour les examens. A la fin du cours un mémoire doit être rédigé pour rendre compte du développement de la programmation proposée. L'Inspection du Ministère doit approuver les contenus des Programmations et les Mémoires.

Il est obligatoire de proposer un livre (un manuel pour chaque année) avant le mois de juin antérieur, ce livre doit être maintenu comme livre officiel de l'établissement pendant quatre années. Ces sont les élèves (ou leurs parents, bien sûr) qui doivent acheter les manuels scolaires pour chaque matière.

La plupart des enseignants travaillent avec ce manuel ; ils donnent des explications, proposent des exemples, puis des exercices et des problèmes, parfois. D'autres enseignants, plus dynamiques, font leurs cours un peu plus éloignés des manuels, ont un enseignement plus actif. L'emploi des techniques informatiques est peu répandu ; on emploie parfois des vidéos, mais très rarement.

L'évaluation des élèves dépend de chaque enseignant. Le seul contrôle externe du système est l'épreuve de sélection. On parle d'évaluation continue, mais la plupart des enseignants, surtout dans le secondaire, continuent à faire des examens (un pour chaque période d'évaluation). Officiellement, il y a cinq séances d'évaluation chaque année, mais la pratique a baissé ce nombre à trois.

Dans l'enseignement obligatoire (jusqu'à 14 ans) un élève peut redoubler deux fois, si nécessaire, mais à 16 ans, s'il n'a pas acquis les connaissances fixées, il doit quitter l'école avec une simple attestation de scolarité. Mais cette attestation permet de suivre des études par la voie Formation Professionnelle. Dans la FP1, on passe du premier cours au second même sans avoir réussi dans aucune matière! On donne une nouvelle attestation de scolarité, à la fin de la deuxième année de FP1. Pour le BUP c'est autre chose. On peut rester 6 années scolaires pour réussir le BUP, et trois pour le COU. D'une année à l'autre on peut avoir deux matières de l'année antérieure. Comme on l'a déjà dit, au mois de septembre il y a des examens de rattrapage.

8.- La formation des enseignants.

Comme on l'a déjà vu, la formation initiale se fait à l'Université. La formation spécifique pour les candidats aux postes de professeurs de secondaire se fait depuis la LGE aux Instituts des Sciences de l'Éducation (ICE), qui appartiennent à l'Université ; deux années scolaires, voire 300 heures de cours, conduisent au diplôme Certifié d'Aptitude Pédagogique (CAP).

En 1984, le Ministère a créé les Centres de Professeurs (CEP), pour la formation continue (et décentralisée, car il y en a plusieurs dans chaque département administratif) des maîtres et des professeurs du secondaire. Dans ces établissements il y a des cours divers, ils sont classés en trois types : A, B et C, selon leur durée, respectivement 150, 50 et 20 heures. L'inscription à ces cours est gratuite et volontaire.

B. LE NOUVEAU SYSTEME EDUCATIF AVEC LA LOI LOGSE DE 1990:
1.-Les étapes éducatives.

La LOGSE prévoit un enseignement obligatoire pour tous les jeunes de 6 jusqu'à 16 ans, divisé en trois étapes : Enseignement pré-primaire (non-obligatoire) (3-6 ans), Enseignement Primaire (6-12 ans) et Enseignement Secondaire Obligatoire (12-16 ans).

Au delà de cet enseignement les élèves peuvent choisir entre la Formation professionnelle (modules 2 et 3) qui les conduira au monde du travail et le Baccalauréat (16-18 ans), deux cours qui permettront d'accéder par la voie d'une épreuve de sélection, comme toujours, à l'Université.

Le calendrier de la "Réforme" : **trois ministres, trois calendriers** : en 1992-93 ont été mises en place les 1er et 2ème Primaires. Dans le premier calendrier, il était prévu de réformer les classes allant de la 3ème à la 6ème en 1993-94, mais seules la 3ème et la 4ème l'ont été.Le troisième calendrier prévoit en 1994-95 la 5ème de Primaire et chaque année scolaire une autre. Le nouveau Baccalauréat doit commencer en 1998-99.

2.- Les établissements.

Les prévisions parlent d'établissements différenciés pour l'enseignement primaire et le secondaire. Sont prévus alors les **Collèges d'Éducation Primaire et les Lycées d'Enseignement Secondaire.** Mais, peut-être que le premier cycle de l'Enseignement secondaire obligatoire, dans une première phase et dans certaines régions autonomes, avec des compétences sur l'Education se trouvera dans les Anciens Collèges de EGB, renommés d'Education Primaire.

3.- Les personnels :

Pour le nouveau système, il y aura deux types de professeurs :

1) Les maîtres de l'enseignement primaire qui, après le baccalauréat, auront fait 3 années d'un diplôme universitaire;

2) les professeurs de l'Enseignement Secondaire qui auront fait cinq années d'Université spécialisées dans leur matière, seront chargés de l'enseignement secondaire, tant obligatoire, que non obligatoire, baccalauréat et FP (modules 2 et 3). Le système de formation sera à peu près le même que celui décrit plus haut. Avec peut-être une plus grande participation des Centres de Professeurs à la formation continue (car cette formation est nécessaire voire obligatoire pour améliorer le salaire, 100 heures de formation toutes les six années scolaires).

4.- Les programmes :

Un curriculum est ouvert ; c'est l'établissement qui doit le fermer et réorganiser les contenus, procédés et aptitudes. C'est la "mode". L'enseignement est "égal pour tous" jusqu'à 16 ans avec une "spécialisation" en 4ème de Secondaire et une diversification des contenus pour les élèves les plus faibles, pour qu'ils puissent atteindre les objectifs généraux de l'année.

Les "matières" de l'enseignement secondaire obligatoire sont :

1) Sciences de la nature,
2) Sciences sociales, géographie et histoire,
3) Education physique,
4) Education Plastique et Visuelle,
5) Langue Espagnole et Littérature,
6) Langues Etrangères,
7) Mathématiques,
8) Musique,
9) Technologie,

obligatoires pour tous sauf en 4ème où les élèves doivent choisir deux d'entre les quatre suivantes : Sciences de la nature, éducation plastique et visuelle, musique et technologie.

Le curriculum doit montrer le processus constructif des connaissances mathématiques. La formalisation des connaissances mathématiques n'est pas le point de départ, sinon le point d'arrivée d'un long processus. La mathématique doit jouer le rôle fondamental formatif des capacités intellectuelles. Alors les objectifs généraux sont décrits pour développer les capacités suivantes :

- 1. Incorporer au langage les différentes formes d'expression mathématique (numérique, graphique, géométrique, logique, algébrique, probabiliste) afin de pouvoir communiquer de façon précise et rigoureuse.

- 2. Utiliser les formes de pensée logique pour formuler et tester des conjectures, faire des déductions, et organiser des informations diverses relatives à la vie courante et à la résolution des problèmes.

- 3. Quantifier les aspects de la réalité qui permettent d'interpréter, en employant des techniques de collecte des données, des procédés de mesure, des nombres et ce, à travers des calculs appropriés.

- 4. Élaborer des stratégies personnelles pour l'analyse des situations concrètes et pour identifier et résoudre des problèmes.

- 5. Employer des techniques simples de collecte de données pour obtenir des informations sur des phénomènes et des situations diverses et pour représenter cette information graphiquement et numériquement et se former une opinion .

- 6. Reconnaître la réalité comme pluriel et susceptible d'être expliquée à partir de points de vue opposés et complémentaires : déterministe/aléatoire, fini/infini, exact/approché, ...

- 7. Identifier les formes et les relations spatiales qui se présentent dans la réalité, en analysant les propriétés et rapports géométriques impliqués, tout en étant sensible à la beauté qu'ils produisent.

- 8. Identifier les éléments mathématiques (données statistiques, graphiques, plans, calculs, etc.) présents dans les nouvelles, opinions, publicité, ... tout en analysant d'une façon critique les fonctions qu'ils jouent et leurs apports pour une meilleure compréhension des messages.

- 9. Agir, dans les situations courantes et dans la résolution de problèmes, avec les méthodes propres à l'activité mathématique.

- 10. Connaître et valoriser les capacités mathématiques personnelles pour affronter les situations qui exigent leur emploi ou qui permettent de se faire plaisir avec des aspects créatifs, manipulatifs, esthétiques ou utilitaires des mathématiques.

PRIMAIRE (6 à 12 ans) : six années divisées en trois cycles de deux ans chacun. (3 h./sem. de Math. chaque année scolaire).

1. Nombres et opérations.
2. La mesure.
3. Formes géométriques et situation dans l'espace.
4. Organisation de l'information.

SECONDAIRE (12-16 ans) : pour tout le pays, à partir de 1996-1997 (3 h./sem. de math. chaque année scolaire).

1. Nombres et opérations : sens, stratégies et symbolisation.
2. Mesure, estimation et calcul des grandeurs.
3. Représentation et organisation dans l'espace.
4. Interprétation, représentation et traitement de l'information.
   a) Information sur des phénomènes déterministes.
   b) Information sur des phénomènes aléatoires.
5. Traitement du hasard.

A titre d'exemple nous développons ce cinquième titre du Curriculum, avec savoirs, savoirs-faire et aptitudes :

- Concepts : (Savoirs)
  1. Phénomènes aléatoires et terminologie pour les décrire.
  2. Assignation des probabilités à des événements : Fréquence et probabilité d'un événement. Loi de Laplace. Expériences dépendantes et indépendantes.
  3. Assignations des probabilités à des expériences composées : probabilité conditionnelle.

- Procédures (Savoir-faire)

- Utilisation des différents langages :
  1. Utilisation du vocabulaire adéquat pour décrire et quantifier des situations où intervient le hasard.
  2. Réalisation de tables de fréquences et de graphiques pour représenter le comportement des phénomènes aléatoires.

- Algorithmes et adresses :
  3. Obtention de nombres aléatoires avec différentes techniques.
  4. Emploi de techniques variées pour modéliser avec des probabilités.
  5. Utilisation d'informations diverses pour assigner des probabilités à des événements.
  6. Calcul de probabilités dans des cas simples avec la Loi de Laplace.
  7. Utilisation de différents procédés pour le calcul des probabilités dans le cas des événements composés.
  8. Détection des erreurs fréquentes dans l'interprétation du hasard.

- Stratégies générales :
    9. Reconnaissance des phénomènes aléatoires dans la vie courante, et dans la connaissance scientifique.
    10. Formulation et vérification des conjectures sur le comportement des phénomènes aléatoires simples.
    11. Utilisation de la probabilité pour prendre des décisions fondamentales dans des contextes divers.
    12. Planification et réalisation d'expériences simples pour étudier le comportement des phénomènes du hasard.

- Aptitudes :

Relatives à l'appréciation des mathématiques :
    1. Reconnaissance et valorisation des mathématiques pour interpréter, décrire et prédire dans des situations incertaines.
    2. Disposition favorable pour prendre en compte les informations probabilistes dans la prise de décisions sur des phénomènes aléatoires.
    3. Curiosité et intérêt pour la recherche sur des phénomènes liés au hasard.
    4.Valorisation critique des informations probabilistes dans les "médias", en y rejetant les abus et les usages incorrects.
    5.Ruse et sens critique face à des pensées populaires sur les phénomènes aléatoires.

Relatives à l'organisation et aux habitudes de travail :
    6. Sensibilité et précision dans l'observation des expériences relatives aux phénomènes du hasard.

De même pour le déroulement en 4º année (15-16 ans) de deux options qui peuvent être choisies par les élèves, j'explicite les contenus de la statistique et des probabilités : (ici je précise le nombre de semaines car le Ministère a déjà publié une série de matériels didactiques pour "fermer" s'ils ne le sont déjà, les contenus de chaque année).

OPTION B (plus lourde) pour les personnes qui suivront un Bac de Sciences :

1. Statistique.
    a. Phénomènes statistiques : Population et échantillons. Variable statistique continue : tableaux de fréquences, graphiques et paramètres statistiques. (2 semaines
    b. Distributions bidimensionnelles. Lien entre deux variables : nuage de points, droite de régression. Corrélation. (2 semaines).

2. Le hasard.
    a. Espace d'échantillons et événements. Assignation de probabilités (2 semaines).
    b. Probabilité conditionnelle. Expériences composées(2 semaines).

OPTION A (plus légère) pour les personnes qui suivront un Bac des Sciences Sociales :

1. Traitement statistique de l'information. (7 semaines)
    a. A la recherche de rapports. (5 semaines). (fonctions).
2. Les lois du hasard. (7 semaines).

Tant en primaire qu'en Secondaire, les contenus sont suivis des **critères pour l'évaluation**.

BACCALAUREAT : (16-18 ans). Sa finalité est la formation générale des élèves ainsi que leur préparation à des études universitaires. Il y aura quatre modalités :
a) Arts.
b) Sciences de la Nature et de la Santé.
c) Humanités et Sciences Sociales.
d) Technologie.

"Les mathématiques au Baccalauréat jouent un triple rôle : comme outil, comme formation et comme théorie de base. C'est la première fois que l'élève est confronté avec la théorie des mathématiques" (B.O.E.) (4 heures de classe par semaine).

Mathématiques I et II. (Filières scientifiques b et d) :

Premier cours.
1. Statistique et probabilité.
   a. Distributions bidimensionnelles. Corrélation et régression. (2 semaines)
   b. Probabilité. Probabilité composée, conditionnelle, totale et "a posteriori" (3 semaines)
   c. Distributions de probabilité. Distributions binomiale et normale. (3 semaines).

2. Géométrie.
   a. Trigonométrie. Résolution de triangles rectangles. (3 semaines)
   b. Théorèmes du sinus et du cosinus. Résolution de triangles quelconques (3 semaines)
   c. Géométrie plane : Équation d'une droite. Résolution de problèmes de droites, angles et distances. (2 semaines).

3. Fonctions (9 semaines) (traitement intuitif).
   a. Familles de fonctions : polynômes, du type k/x, trigonométriques, exponentielles, logarithmiques.
   b. Interprétation des propriétés globales : domaine, croissance, décroissance, points "remarquables", périodicité.
   c. Traitement intuitif des branches infinies, continuité, dérivabilité et aire en dessous d'une courbe.

4. Arithmétique et algèbre.
   a. Nombres factorielles et combinatoires. Binôme de Newton (2 semaines).
   b. Introduction au nombre réel. Notation scientifique. (2 semaines).
   c. Introduction au nombre complexe. Forme binomique et polaire. Opérations. (2 semaines).

5. Résolution de problèmes.

Second cours :
1. Algèbre linéaire.
   a. Matrices. Opérations sur des matrices.
   b. Application de l'étude des matrices à la résolution de systèmes d'équations linéaires.
   c. Déterminant d'une matrice. Propriétés. Application au calcul des produits vectoriel et mixte.

2. Analyse.
   a. Introduction aux concepts de limite et dérivée d'une fonction en un point.
   b. Calcul de limites et de dérivées. Étude locale des fonctions.
   c. Introduction à l'intégrale définie à partir des aires définies sous une courbe. Techniques élémentaires d'intégration. Application au calcul d'aires.

3. Géométrie.
   a. Vecteurs. Opérations à partir de problèmes de physique concrète.
   b. Application du calcul vectoriel à la résolution de problèmes physiques et géométriques dans le plan et dans l'espace. Produit scalaire, vectoriel, mixte.
   c. Etude de certaines formes géométriques (droites, courbes, plans et surfaces) en mettant en rapport les équations avec leurs caractéristiques géométriques.
   d. Idée de lieu géométrique. Initiation à l'étude des coniques, tant synthétique qu'analytique.

MATHEMATIQUES POUR LES SCIENCES SOCIALES.

Premier Cours :

1. Arithmétique et algèbre.
   a. Etude de systèmes de deux équations avec deux inconnues et d'équations de deuxième degré. (2 semaines).
   b. Introduction au nombre irrationnel. Notation scientifique. (3 semaines).

2. Fonctions. (8 semaines).
   (Traitement intuitif).
   a. Fonctions en forme de tables et graphiques. Interpolation et extrapolation linéaire. Interprétation de phénomènes fonctionnels.
   b. Familles de fonctions : polynômes, du type k/x, trigonométriques, exponentielles, logarithmiques.
   c. Interpretation des propriétés globales : domaine, croissance, décroissance, points "remarquables", périodicité et "tendances".

3. Statistique et probabilité.
   a. Distributions bidimensionnelles. Interprétations de phénomènes sociaux et économiques où interviennent deux variables. (2 semaines).
   b. Etude du degré de relation entre deux variables. Corrélation et régression. (3 semaines).
   c. Distributions de probabilité. Distributions binomiale et normale. (3 semaines).
   d. Normalisation d'une distribution binomiale et ajustement d'un ensemble de données à une distribution binomiale ou normale. (2 semaines).

4. Résolution de problèmes.

Second Cours :

1. Algèbre.
   a. Matrices. Opérations sur des matrices. Application à la résolution de problèmes extraits des Sciences Sociales.
   b. Application de l'étude des matrices à la résolution de systèmes d'équations linéaires.
   c. Initiation à la programmation linéaire bidimensionnelle. Optimisation d'expressions linéaires soumises à des contraintes exprimées par des équations, avec des méthodes graphiques.

2. Analyse.
    a. Introduction aux concepts de limite à partir de l'interprétation des tendances d'une fonction. Branches infinies.
    b. Dérivée d'une fonction en un point.
    c. Application de limites et de dérivées à la détermination des propriétés locales des fonctions. Étude locale des fonctions.
    d. Application du calcul des dérivées élémentaires à des problèmes d'optimisation.
    e. Approche de l'intégrale définie à partir des aires définies sous une courbe.

3. Statistique et probabilité.
    a. Étude approfondie des probabilités composées, conditionnelles, totales et a posteriori. Emploi des techniques élémentaires.
    b. Introduction au concept statistique et usage : comment choisir un échantillon, ...
    c. Etude d'un test d'hypothèse basé sur la distribution normale et appliqué en situations simples.

Tous les programmes sont suivis de critères pour l'évaluation.

Commentaire de l'auteur

Si on compare les titres et les détails décrits par le Ministère, du vieux système (1975) et du nouveau (1992) et même si le Ministère dit que les programmes sont ouverts et que l'établissement doit répartir les contenus, on voit que les contenus de 1992 sont plus détaillés et si j'ose dire plus fermés.

En plus, on exprime l'approche "constructiviste" de l'enseignement, comme obligatoire (et comme toute théorie doit être prise dans un sens critique et que tous les élèves sont différents, on doit peut être employer des approches différentes). En plus, le temps qu'on passe à faire des maths dans le nouveau système est globalement et sensiblement inférieur à l'ancien. Les exigences de l'Université pour l'entrée des élèves ne changent pas.

Les professeurs du B.U.P. actuel, sont majoritairement "contre" la Réforme. Car depuis 1984 il y a eu une expérimentation ; à ce moment là coexistaient pour le Secondaire trois possibilités : B.U.P. (pour les meilleurs), "Reforme" (pour ces élèves doués, mais inquiets, ...), "FP" (pour ceux qui ont eu des problèmes pour réussir a l'E.G.B.). Les parenthèses correspondent non à ma propre vision mais à l'explication que donnent les maîtres de 8ème de E.G.B. aux parents pour "aider" leurs enfants à choisir leurs études.

Une Réforme si vaste d'un système d'enseignement exige un très grand effort humain, économique, politique et social et il faudrait que les gens adhèrent à cette réforme. Mais il me semble qu'en ce moment, on ne trouve pas en Espagne les meilleurs conditions.

LA CYCLOÏDE

André Stoll

L'enseignement des mathématiques en S.T.S.: et si, pour respecter l'esprit du programme, on changeait de méthode ?

L'exposé des objectifs de l'enseignement des mathématiques en section de Technicien Supérieur insiste sur le fait que celui-ci doit "contribuer au développement de la formation scientifique grâce à l'exploitation de toute la richesse de la démarche scientifique: mathématisation d'un problème (modélisation), travail d'expérimentation et de recherche, construction et mise en oeuvre d'outils théoriques pour résoudre ce problème, analyse de la pertinence des résultats obtenus au regard du problème posé."
Dans cette optique, j'ai essayé de repenser ma pédagogie en S.T.S. et d'organiser mes cours en relation avec mes collègues de technologie et de physique. Tout en respectant les impératifs du programme et de l'examen, j'ai été amené à modifier mon enseignement tant dans la forme que dans le contenu, en proposant essentiellement des activités de résolution de problèmes où les élèves mettent en oeuvre les outils théoriques vus les années précédentes. Souvent aussi ces problèmes permettent de découvrir l'insuffisance de ces outils et, dans ce cas, d'introduire des notions nouvelles qui sont ainsi immédiatement mises en oeuvre.

Le problème ci-dessous est un exemple d'une activité proposée en S.T.S. option C.P.I. (Conception de Produits Industriels). Il est inspiré d'une courbe - la cycloïde - en grande vogue au XVII$^{\text{ième}}$ siècle en Europe. De nombreuses parties de ce problème peuvent faire l'objet d'un T.D. ou d'un module en classe de terminale ou même de première.
Les outils utilisés pour résoudre ce problème sont variés:

- Trigonométrie
- Recherche de l'équation d'une courbe en coordonnées paramétriques
- Relation entre les notions de dérivée et de vitesse
- Tangente à une courbe par des procédés géométriques puis à l'aide de la dérivée.
- Dérivation de fonctions composées
- Primitive et application au calcul de la longueur d'une courbe
- Théorème de l'énergie cinétique étudié en physique et en mécanique
- Equation différentielle du second ordre

Le bilan? Comme c'est la première année que je travaille presque exclusivement par problèmes de synthèse, il est évidemment trop tôt pour tirer des conclusions. Toutefois, je noterai les deux points suivants:

- Les élèves ont enfin compris le lien existant entre le cours de mathématiques et d'autres cours, pour lesquels elles représentent un outil indispensable.
- Paradoxalement, ils rechignent moins à CHERCHER des solutions aux problèmes qui ne sont pas liés directement à leur matière principale et, parfois, nous faisons des mathématiques.

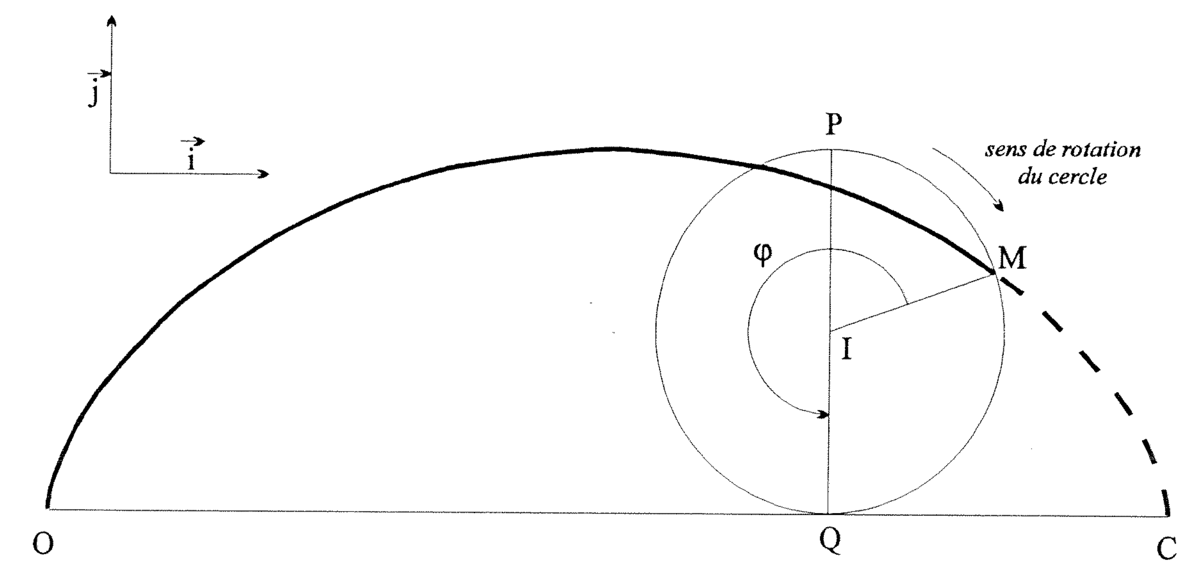
1. Introduction

Dans l'*Histoire de la Roulette* datée du 10 octobre 1658, Blaise Pascal écrit:
La roulette (aussi appelée trochoïde ou cycloïde) *est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente; [...] ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire [...] supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point de sa circonférence, et la terre parfaitement plane.*
Dans ce même texte, Blaise Pascal nous apprend que les plus grands mathématiciens de l'époque ont cherché à "*connaître la nature et les propriétés* " de cette courbe. On y trouve entre autres les noms de Roberval, de Fermat, de Descartes, de Wren, de Huyghens...Chacun trouvant une propriété de la cycloïde ou une autre démonstration d'une propriété déjà connue.
Le problème ci-dessous propose de trouver et de démontrer quelques propriétés de la cycloïde, souvent par des méthodes "modernes" parfois par des méthodes (apparemment) plus anciennes.

2. Définition de la cycloïde.

Soit (C) un cercle de centre I et de rayon r;. La cycloïde est la trajectoire d'un point M du cercle (C) lorsque celui-ci roule sans glisser sur une droite. Cette droite est appelée la base de la cycloïde (cf. figure 1).

figure 1



Le roulement sans glissement se traduit par l'égalité: $OQ = \overset{\frown}{QPM}$

3. Tangente et normale à la cycloïde à un instant t quelconque.

La méthode.

Les méthodes (dérivée d'une certaine fonction,...) vues jusqu'à présent ne s'appliquent pas. Il nous faut donc trouver une autre manière de procéder. La mécanique nous en fournit une.

Pour trouver la tangente à la cycloïde, nous appliquerons le principe énoncé par Gilles Personne de Roberval au XVII^{ième} siècle: La tangente (Roberval écrit *la touchante*) à une courbe en un point M est la direction du mouvement de ce point. (Voir encadré ci-contre).

> DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.
> Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de proprietez spécifiques, qui nous fassent connoitre les mouvemens qui les décrivent.
>
> *Axiome, ou principe d'invention.*
>
> LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.
> Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura consideré avec un peu d'attention,
>
> *Regle generale.*
>
> PAR les proprietez spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.
> La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très-générale, & qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de la répéter.

Pour faciliter le travail de recherche de la direction lorsque le point M est animé de plusieurs mouvements, nous utiliserons l'outil vectoriel et nous représenterons chaque mouvement par un vecteur - appelé « vecteur vitesse » qui a pour direction et sens, la direction et le sens du mouvement et pour norme la vitesse linéaire du point.

Par exemple si le point M se déplace sur une droite (d), le déplacement de ce point sera représenté par le vecteur $\vec{v}$ qui a pour direction la droite (d), pour sens le sens du déplacement et pour norme la vitesse linéaire de M (cf. figure 3).

Lorsque le point M est fixe sur une demi-droite [Ow qui pivote autour du point O avec une vitesse angulaire ω (exprimée en rad/s), le point M décrit un cercle de centre O et de rayon OM. Le déplacement de M sera représenté par un vecteur $\vec{v}$ qui a pour direction la perpendiculaire à (OM), pour sens, le sens de rotation et pour norme la vitesse linéaire de M (cf. figure 2).

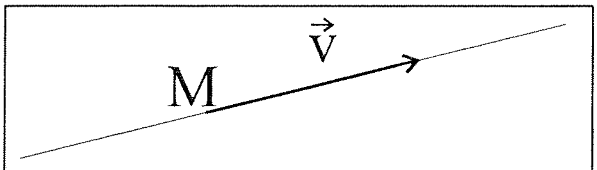


figure 3

Lorsque le déplacement de M résulte de la composition de plusieurs mouvements, celui-ci sera représenté par la somme des vecteurs représentant chaque mouvement.

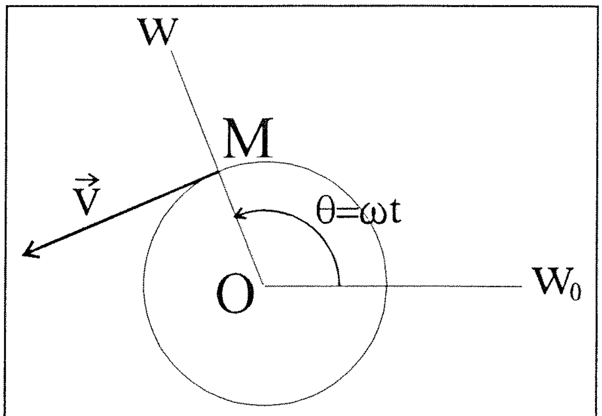
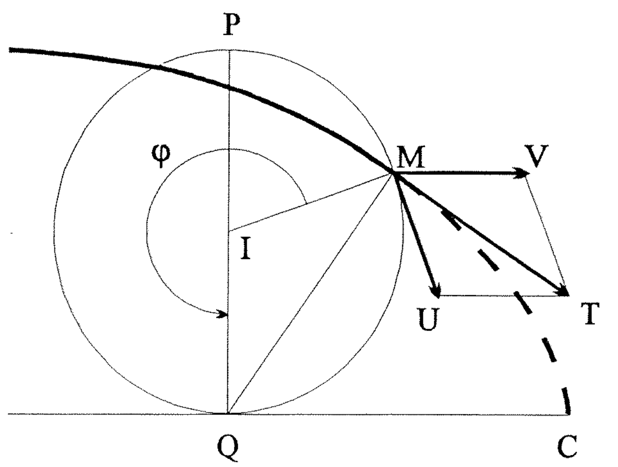


figure 2

Application à la cycloïde.

Le mouvement du point M, le point générique de la cycloïde, peut être décomposé en deux mouvements: un mouvement de translation représenté par le vecteur $\overrightarrow{MV}$ et un mouvement de rotation représenté par le vecteur $\overrightarrow{MU}$. (cf. figure 4)

figure 4



1. Préciser la direction et le sens de ces deux vecteurs et montrer que "le roulement sans glissement" se traduit par l'égalité MU=MV.
2. En déduire un vecteur directeur $\overrightarrow{MT}$ de la tangente à la cycloïde lorsque le point M n'est pas en C.
3. Que peut-on dire de $\overrightarrow{MT}$ lorsque le point M est en C ?
4. Montrez que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{QM},\overrightarrow{QP}\right)$ est la moitié de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IP}\right)$.

   Déduisez-en que les droites (MQ) et (MT) sont orthogonales et que:

   la normale à la cycloïde en M est la droite (MQ).

5. On suppose dans cette question et la suivante, que la vitesse angulaire ω du cercle (C) (en d'autres termes $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$) est constante. Exprimez la norme du vecteur $\overrightarrow{MT}$ et la vitesse du point M en fonction de la variable t.

6. Application: longueur d'un arc de cycloïde.

   Soit la fonction $S: t \longrightarrow S(t) = \overset{\frown}{OM}$; En remarquant que $\dot{S}(t) = v(t)$ (la notation $\dot{f}$ désigne la dérivée de la fonction f par rapport à la variable t c'est à dire le temps), montrez que:

$$\overset{\frown}{OM} = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right) = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8r\left(\sin\frac{\varphi}{4}\right)^2$$

Et en particulier : $\overset{\frown}{OC} = 8r$

4. Equations paramétriques de la cycloïde.

1. Montrez qu'avec les notations de la figure 1, une représentation paramétrique de la cycloïde dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est:

$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y = r(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

2. Calculez les dérivées de x et de y par rapport à la variable φ et déduisez-en que:

$$\overrightarrow{MT}\begin{pmatrix} 2r\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \\ 2r\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

3. Donnez un vecteur unitaire de la tangente et un vecteur unitaire de la normale en M à la cycloïde.
   Déduisez-en la tangente à la cycloïde en O et en C.
4. On appelle u l'angle orienté $u = \left(\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{IP}\right)$; montrez que le rapport $\frac{\sin^2 u}{y}$ est constant.

5. Le pendule cycloïdal de Christian Huygens

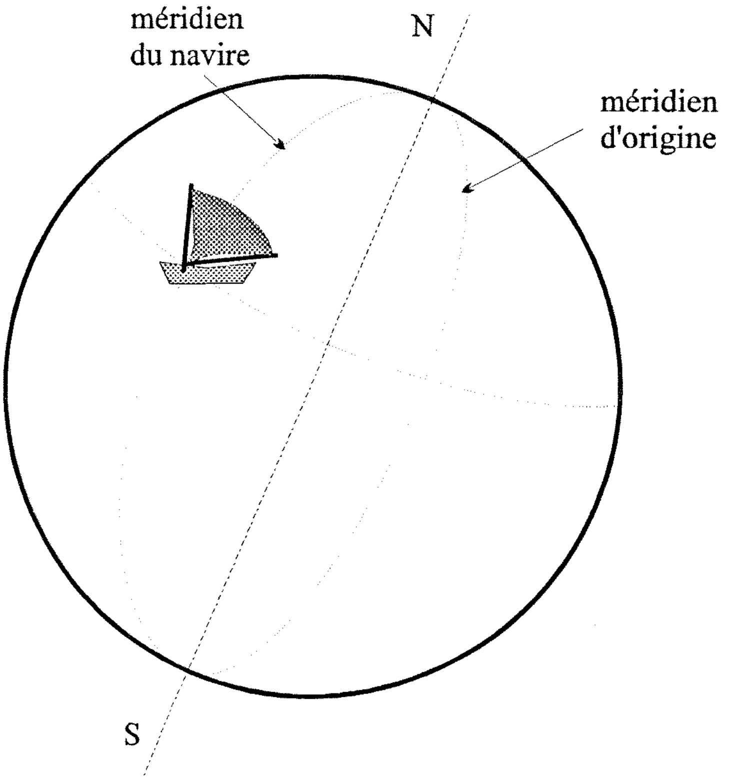
La découverte des Amériques et l'expansion du commerce maritime obligent les marins à changer leurs habitudes. Contrairement à leurs prédecesseurs, les navigateurs du XVII[ième] siècle s'éloignent des côtes et s'aventurent en haute mer. Aussi, leur faut-il apprendre à se repérer convenablement c'est à dire à trouver la latitude et la longitude du bateau. Si la latitude du navire s'obtient assez facilement en mesurant la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon, il n'en est pas de même de la longitude: il n'existe aucun moyen simple de l'évaluer! De nombreuses cargaisons sont perdues et des fortunes gaspillées.

Les pouvoirs prennent rapidement conscience de ce problème et promettent de fortes récompenses à celui qui résoudra le secret des longitudes: le Stathouder de Hollande promet 25000 florins, Charles II d'Angleterre un traitement de 100 livres l'an et le Cardinal de

Richelieu une pension de 2000 francs...Toutes ces récompenses incitent les savants à se mettre au travail.

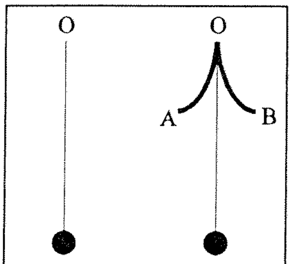
Un des principes pour trouver la longitude est de comparer l'heure locale, celle du bateau, à l'heure du port d'attache ou du méridien d'origine. (Cf.. encadré ci contre). Mais pour cela, il faut transporter l'heure du méridien d'origine sur le navire.

Le pendule de Galilée ou pendule simple permet de régulariser assez correctement les horloges terrestres dont le support est immobile. Malheureusement, l'isochronisme de ce pendule n'est qu'approximatif car la période des oscillations dépend de l'amplitude de ces oscillations. Une horloge de ce type se dérègle trop rapidement sur un navire.



Supposons par exemple que le soleil soit au zénith du bateau et qu'on sache qu'au même instant, il est 15 heures sur le méridien d'origine. Dans ce cas, le navire est à 3 heures à l'ouest c'est à dire à 45 degrés à l'ouest du méridien d'origine.

Pour corriger le défaut du pendule simple, Christian Huygens a l'idée de munir le pendule de deux arcs courbes entre lesquels ont lieu les oscillations. Mais, quelle forme faut-il donner à ces arcs ? Dans ses premières tentatives, Huygens procède par tâtonnements.



le pendule simple | le pendule de Huygens

En 1659, il démontre deux propriétés de la cycloïde qui lui permettront de construire un pendule dont les oscillations sont parfaitement isochrones c'est à dire indépendantes de l'amplitude des oscillations. Une horloge munie d'un tel pendule garde l'heure du méridien d'origine quel que soit les mouvements du navire et, par suite, permet de déterminer la longitude du navire.

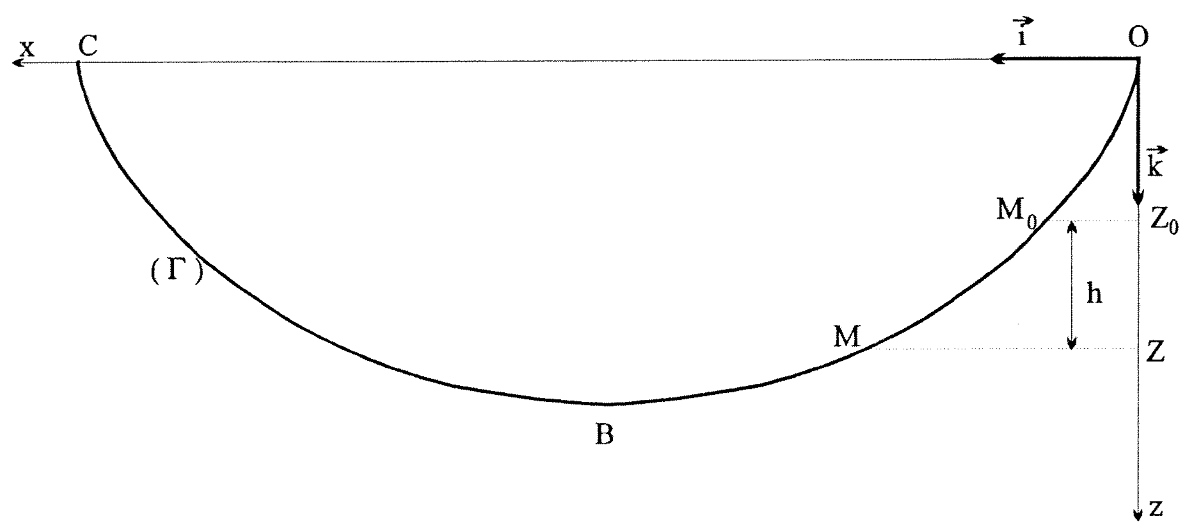
Le but du problème ci-dessous est de présenter les deux propriétés découvertes par Christian Huygens qui sont le fondement du pendule cycloïdal.

<u>Première propriété</u>: la cycloïde est une courbe isochrone.

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement dans un plan vertical sur la cycloïde Γ engendrée par un cercle de rayon r qui roule sans glisser sur l'axe des abscisses (cf. figure 5)

Il s'agit de montrer que le temps mis par le point matériel M pour revenir à sa position initiale est indépendante de la position M_0 d'où on lâche le point matériel avec une vitesse nulle.

figure 5



Notations: soit f une fonction de la variable t (c'est à dire le temps), on note, suivant la coutume, $\dot{f}$ sa dérivée.

1. Montrez qu'une représentation paramétrique de la cycloïde Γ est: $\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y = 0 \\ z = r(1-\cos\varphi) \end{cases}$

   Remarque: dans cette représentation paramétrique, <u>φ est en fait une fonction inconnue</u> de la variable t. La connaissance de cette fonction φ nous donne la solution du problème.

2. Quelle relation peut-on écrire entre l'abscisse curviligne $s(t) = \overset{\frown}{BM}$ et la vitesse v(t) du point M à l'instant t ?

   Exprimez v(t) et s(t) en fonction de $\varphi(t)$et de $\dot{\varphi}(t)$.

   (Rappel: l'abscisse curviligne $s(t) = \overset{\frown}{BM}$ n'est rien d'autre que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BM}$ affectée du signe $-$ lorsque M est entre O et B, et du signe + lorsque M est entre B et C)

3. Montrez en appliquant le théorème de l'énergie cinétique que: $v(t)^2 = 2g(z - z_0)$ (*).

4. Calculez $\dot{z}$ et montrez que $\dot{v} = g\cos\frac{\varphi(t)}{2}$ (indication: dérivez la relation (*))
5. Déduisez de ce qui précède que la fonction s est solution de l'équation différentielle $\ddot{s}+\omega^2 s = 0$ où $\omega = \sqrt{\frac{g}{4r}}$ avec les conditions initiales $\begin{cases} s(0) = \overset{\frown}{BM_0} \\ v(0) = 0 \end{cases}$
6. Résolvez cette équation différentielle.
7. Quelle est la période des oscillations ?

Conclusion 1:

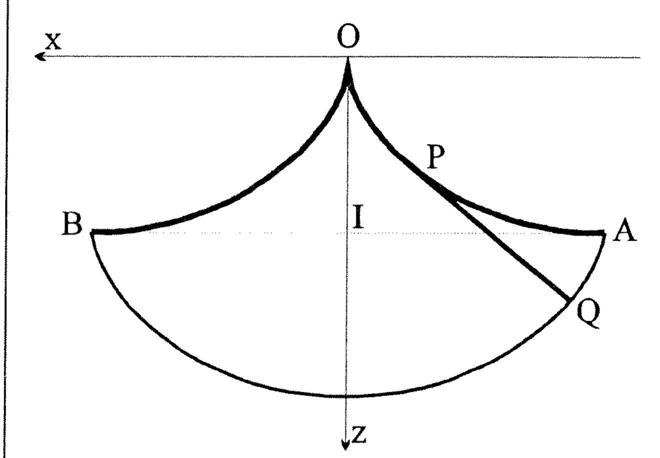
La période des oscillations est indépendante de l'amplitude des oscillations

Deuxième propriété:

Soit $\overset{\frown}{OB}$ et $\overset{\frown}{OA}$ deux demi-cycloïdes identiques. Un fil dont une extrémité est fixée en O s'enroule sur cette courbe. La partie libre [PQ] du fil reste toujours tendue. Il s'agit de montrer que **lorsque la longueur du fil est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{OB}$ alors l'extrémité libre du fil décrit une cycloïde dont la base est la droite (AB)** (cf. figure 6).

8. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $\overset{\frown}{OB} = 4r$.
Déduisez-en la longueur PQ.
Quelle est la direction de la droite (PQ)?
Calculez en fonction de φ les coordonnées du vecteur $\vec{PQ}$ puis du vecteur $\vec{AQ}$.
Déduisez-en que la trajectoire du point Q est une cycloïde.

figure 6

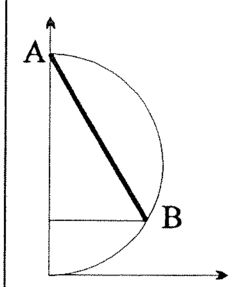


En 1663, pour vérifier l'exactitude des horloges conçues par Huygens, le Capitaine Holmes s'embarque avec deux horloges munies de pendules cycloïdaux. Huygens sait que, même sur la terre ferme, ces horloges ne sont pas parfaitement isochrones car il a négligé la résistance de l'air et les imperfections du fil. Il pense que ces défauts ne sont pas rédhibitoires en ce qui concerne la détermination de la longitude. Sans attendre le retour du navire, Huygens essaie de tirer le maximum de profit de son invention et réclame ses récompenses. Celles-ci lui seront d'ailleurs accordées. En 1666, Huygens sera invité par Colbert à faire partie de l'Académie Royale des Sciences.

6. La cycloïde est "la courbe de plus rapide descente"

1. Avec les notations du § précédent, quel temps faut-il au point matériel M pour aller de O à B le long de la cycloïde (le point matériel étant laché en O sans vitesse initiale)?
2. Quelle temps faudrait-il au point M pour aller de O à B le long de la droite (OB) ?
3. (Cf. figure 7) Montrer que le temps mis par un point matériel pour aller de A vers B le long du segment [AB] est indépendant du point B pris sur le demi-cercle

figure 7



Conclusion:

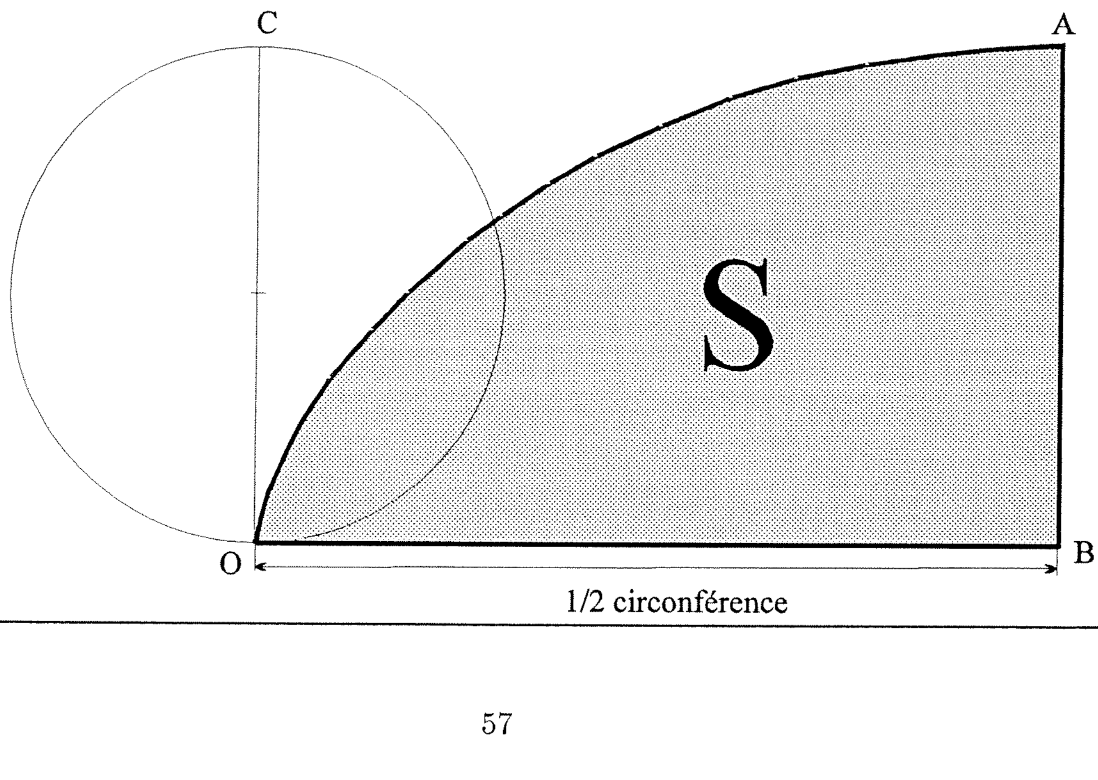
Le chemin le plus court n'est pas toujours le plus rapide !

Commentaire: on peut d'ailleurs démontrer que la cycloïde est la "courbe de plus rapide descente" (aussi appelée la brachistochrone pour la pesanteur) c'est à dire le chemin le plus rapide de O vers B pour un point matériel pesant, abandonné sans vitesse initiale en O et glissant sans frottement le long de cette courbe.

7. Quadrature de la cycloïde.

But de cette partie: trouver l'aire $\mathcal{A}$ de la surface (S)=(OAB) où l'arc $\overset{\frown}{OA}$ est l'arc de cycloïde de base [OB] engendré par le cercle de diamètre [OC] (cf. figure 8).

figure 8



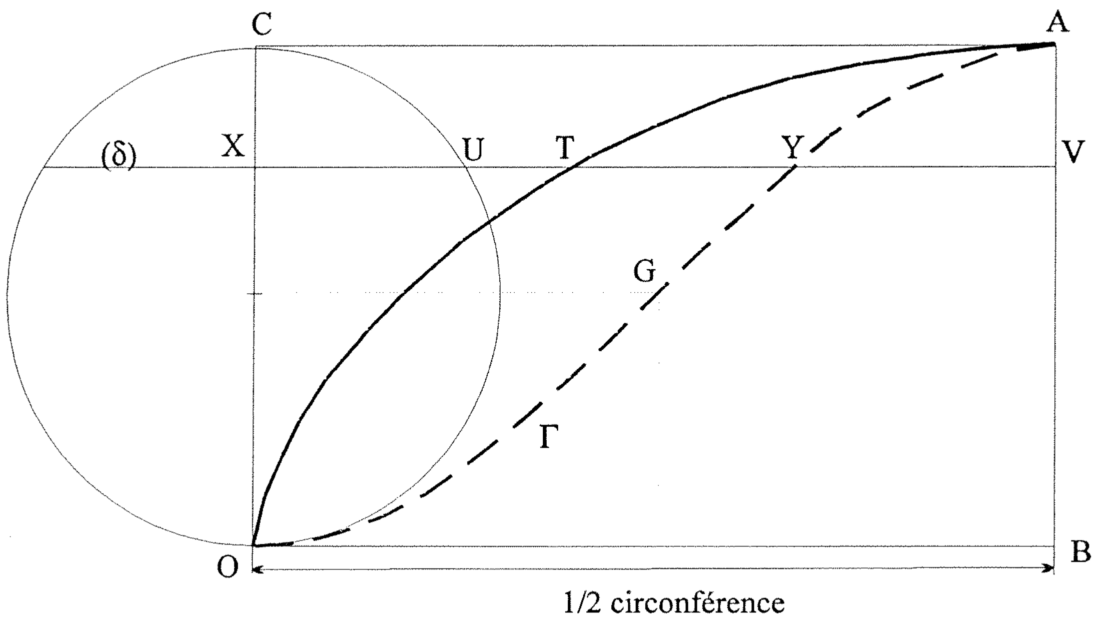
Première méthode: celle-ci est inspirée de la méthode de Roberval

Soit (δ) une droite parallèle à la base de la cycloïde. Cette droite (δ) coupe [OC] en X, le cercle en U et la cycloïde en T (cf. figure 9) . Sur (δ), on prend le point Y tel que $\overrightarrow{XU} = \overrightarrow{TY}$.

1. Donnez une représentation paramétrique de l'arc de cycloïde $\overset{\frown}{OA}$ et de la courbe Γ décrite par le point Y lorsque X décrit [OC]
2. Déduisez-en qu'une équation de Γ est: $y = r\left(1 - \cos\frac{x}{r}\right)$ avec $0 \le x \le \pi r$ et que le point G de la courbe Γ d'abscisse $\pi r/2$ est centre de symétrie de Γ.
3. Montrez que l'aire de la surface délimitée par Γ, [BA] et [OB] est la moitié de l'aire du rectangle (OCAB). Calculez cette aire.
4. Calculez l'aire de la surface délimitée par Γ et l'arc de cycloïde.
5. Conclusion:

l'aire A est égale à trois fois l'aire du demi-cercle générateur de la cycloïde.

figure 9



Deuxième méthode: celle-ci est inspirée de la méthode de Blaise Pascal.

On découpe la surface (S) en "n tranches horizontales" de même épaisseur Δy. En notant $f(y_k)$ la longueur moyenne de la k-ième tranche alors une approximation de l'aire A est $\sum_{k=1}^{k=n} f(y_k)\Delta y$. En faisant tendre n vers l'infini, on a: $A = \int_0^{2r} f(y)dy$ où f(y)=TV (cf. figure 10)

1. On pose g(y)=TW et h(y)=WV.

   Montrez que: $A = \int_0^{2r} g(y)dy + \int_0^{2r} h(y)dy$.

2. Que représente $\int_0^{2r} h(y)dy$?

   Déduisez-en, sans calcul, que $\int_0^{2r} h(y)dy = \frac{\pi r^2}{2}$

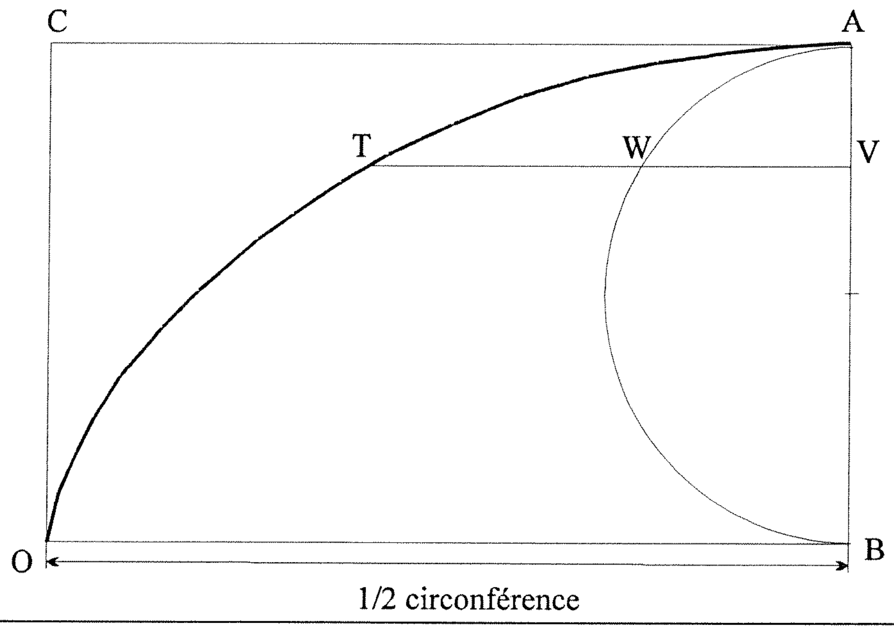
3. Montrez que le roulement sans glissement du cercle (C) se traduit par l'égalité: $TW = \overset{\frown}{AW}$.

   On pose i(y) la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AW}$ et j(y) la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BW}$. Démontrez les égalités suivantes: $\int_0^{2r} g(y)dy = \int_0^{2r} i(y)dy = \int_0^{2r} j(y)dy$.

   Calculez $\int_0^{2r} i(y)dy + \int_0^{2r} j(y)dy$ (remarquez que $i(y)+j(y)=\overset{\frown}{AB}$) et déduisez-en que $\int_0^{2r} g(y)dy = \pi r^2$.

4. Conclusion.

figure 10



PROBLÈMES POUR NOS ÉLÈVES (...et leurs professeurs)

Il s'agit, dans cette rubrique, de présenter des problèmes historiques ou classiques, dont la solution ne requiert pas d'autres connaissances que celles enseignées au lycée (voire au collège) et qui par conséquent, peuvent faire l'objet de travaux dans nos classes.

RAPPEL DE L'ÉNONCÉ DU PROBLÈME 7 :

Le problème 2 (voir '*L'Ouvert*' n° 73) nous avait amené à en formuler un autre, dont la solution peut d'ailleurs servir à celle de ce problème 2. Il s'agit du problème 7 dont nous rappelons l'énoncé : $ABCD$ étant un quadrilatère quelconque inscrit dans un cercle, démontrer que les quatre centres des cercles inscrits dans les triangles ABC, BCD, CDA, ABD, forment un rectangle.

Deux solutions sont proposées ici, l'une de J.-P. Friedelmeyer utilisant la géométrie élémentaire de Terminale, l'autre analytique de P. Renfer, plus calculatoire mais qui donne un résultat supplémentaire.

SOLUTION DE J.-P. FRIEDELMEYER

Quitte à changer la dénomination des sommets, on peut se ramener à la disposition $ABCD$ de la figure 2, avec C et D du même côté par rapport à (AB). Soit O le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$.

1. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC (fig. 1). Alors I est sur l'arc capable d'où l'on voit $[AB]$ sous l'angle $\frac{\pi+\alpha}{2}$ où $\alpha = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. En effet : $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IB}) = \pi + (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}) = \pi + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi+\alpha}{2}$ (modulo 2π)
(car I est du même côté que C par rapport à $[AB]$).

Soit K le milieu de l'arc AB ne contenant pas C. Alors $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}) = \pi + \alpha$. K est donc le centre du cercle portant l'arc capable lieu de I, lorsque C décrit l'arc AB.

2. Posons $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = 2\theta$ avec $O < \theta < \pi$. Alors $(\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KD}) = \theta$. Le triangle IKJ est isocèle si J est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABD (fig. 2). On en déduit : $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CK}) = (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi-\theta}{2}$ (modulo 2π). Soit Ω l'intersection de (AC) et (BD). Ω est entre C et A et entre B et D nécessairement, et $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega A}) = \pi - (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \pi - \theta - \alpha$. La bissectrice **intérieure** (ΩX) de $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega A})$ est définie par $(\overrightarrow{\Omega X}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi-\theta-\alpha}{2}$ et $(\overrightarrow{\Omega X}, \overrightarrow{CK}) = (\overrightarrow{\Omega X}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{CK}) = \frac{\pi-\theta-\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi-\theta}{2}$ (modulo 2π).

(IJ) est donc parallèle à (ΩX). Par permutation des sommets on en déduit que les quatre centres des cercles inscrits dans les triangles ABC, BCD, CDA, DAB, définissent un rectangle dont les côtés sont parallèles respectivement aux bissectrices du couple de droites (AC, BD) (fig. 3).

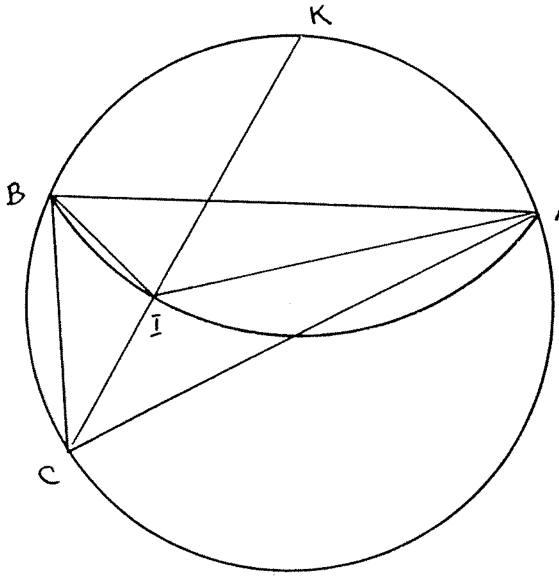


Figure 1

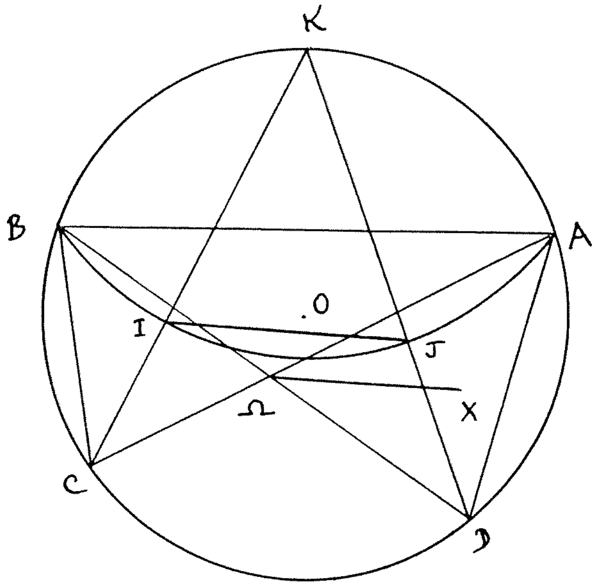


Figure 2

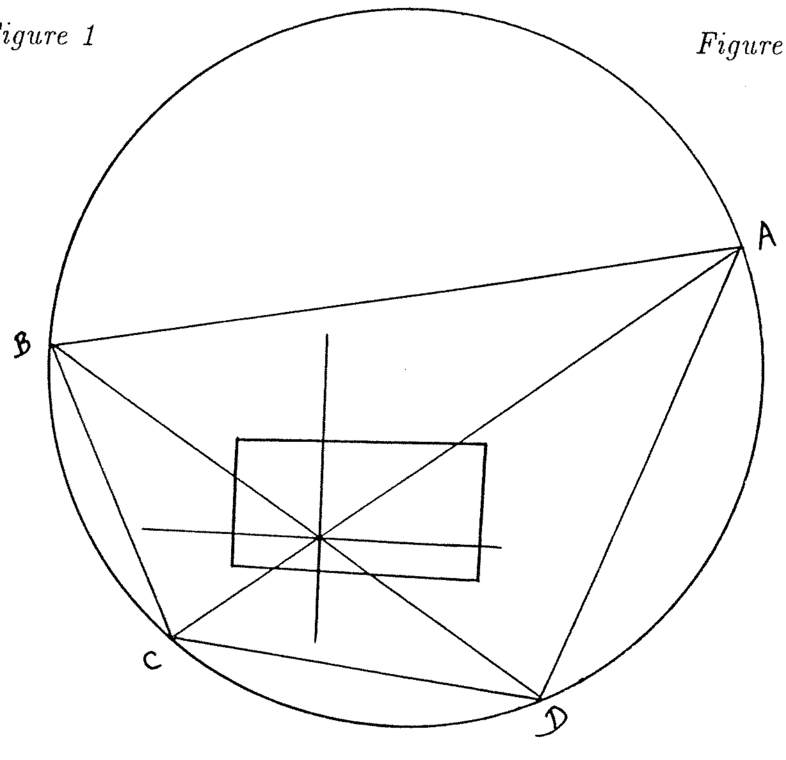


Figure 3

SOLUTION DE P. RENFER

On considère un quadrilatère convexe A_1, A_2, A_3, A_4 inscriptible dans un cercle Γ, de centre O et de rayon 1.
Soient C_1, C_2, C_3, C_4 les centres des cercles tangents aux deux diagonales et tangents intérieurement à Γ.
Soient I_1, I_2, I_3, I_4 les centres des cercles inscrits respectivement aux triangles $A_2A_3A_4, A_3A_4A_1, A_4A_1A_2, A_1A_2A_3$.
Soit $2v$ l'angle géométrique entre les deux diagonales. On se propose de démontrer le résultat suivant :

Le quadrilatère $I_1I_2I_3I_4$ est un rectangle inscrit dans le quadrilatère $C_1C_2C_3C_4$.
Plus précisément :
I_1 est barycentre de $(C_1, \cos^2 v)$ et $(C_2, \sin^2 v)$,
I_2 est barycentre de $(C_3, \cos^2 v)$ et $(C_2, \sin^2 v)$,
I_3 est barycentre de $(C_3, \cos^2 v)$ et $(C_4, \sin^2 v)$,
I_4 est barycentre de $(C_1, \cos^2 v)$ et $(C_4, \sin^2 v)$.

La démonstration est analytique avec un minimum de calculs!
Soit Ω le point d'intersection des diagonales.
Soient δ_1 et δ_2 les bissectrices des diagonales.
Soit $\mathcal{R}_1$ le repère orthonormé d'origine Ω et d'axes δ_1 et δ_2.
Soit $\mathcal{R}_2$ le repère orthonormé d'origine O et d'axes parallèles à δ_1 et δ_2.
Soient (a, b) les coordonnées de Ω dans le repère $\mathcal{R}_2$.

Soit d la distance ΩC_1 et ρ le rayon du cercle de centre C_1.
Alors : $\rho = d \sin v$ et $OC_1 = 1 - \rho$.
En calculant OC_1^2 dans le repère $\mathcal{R}_2$ on obtient :

$$(a+d)^2 + b^2 = (1 - d\sin v)^2$$
$$d^2\cos^2 v + 2(a + \sin v)d + a^2 + b^2 - 1 = 0.$$

Le discriminant réduit de cette équation d'inconnue d est :

$$\begin{aligned}\Delta' &= a^2 + 2a\sin v + \sin^2 v - a^2\cos^2 v - b^2\cos^2 v + \cos^2 v\\ &= a^2\sin^2 v + 2a\sin v + 1 - b^2\cos^2 v\\ &= (1 + a\sin v + b\cos v)(1 + a\sin v - b\cos v).\end{aligned}$$

En posant $A = 1 + a\sin v + b\cos v$ et $B = 1 + a\sin v - b\cos v$, on obtient :

$$d = \frac{1}{\cos^2 v}\Big[-a - \sin v + (AB)^{1/2}\Big].$$

C'est l'abscisse de C_1 dans le repère $\mathcal{R}_1$.
On trouve l'ordonnée d' de C_2 en échangeant a et b et en remplaçant v par $\frac{\pi}{2} - v$.
En posant $C = 1 + b\cos v - a\sin v$, on obtient :

$$d' = \frac{1}{\sin^2 v}\big[-b - \cos v + (AC)^{1/2}\big].$$

Soit I le barycentre de $(C_1, \cos^2 v)$ et $(C_2, \sin^2 v)$.
Les coordonnées de I dans $\mathcal{R}_1$ sont :

$$-a - \sin v + (AB)^{1/2} \text{ et } -b - \cos v + (AC)^{1/2}.$$

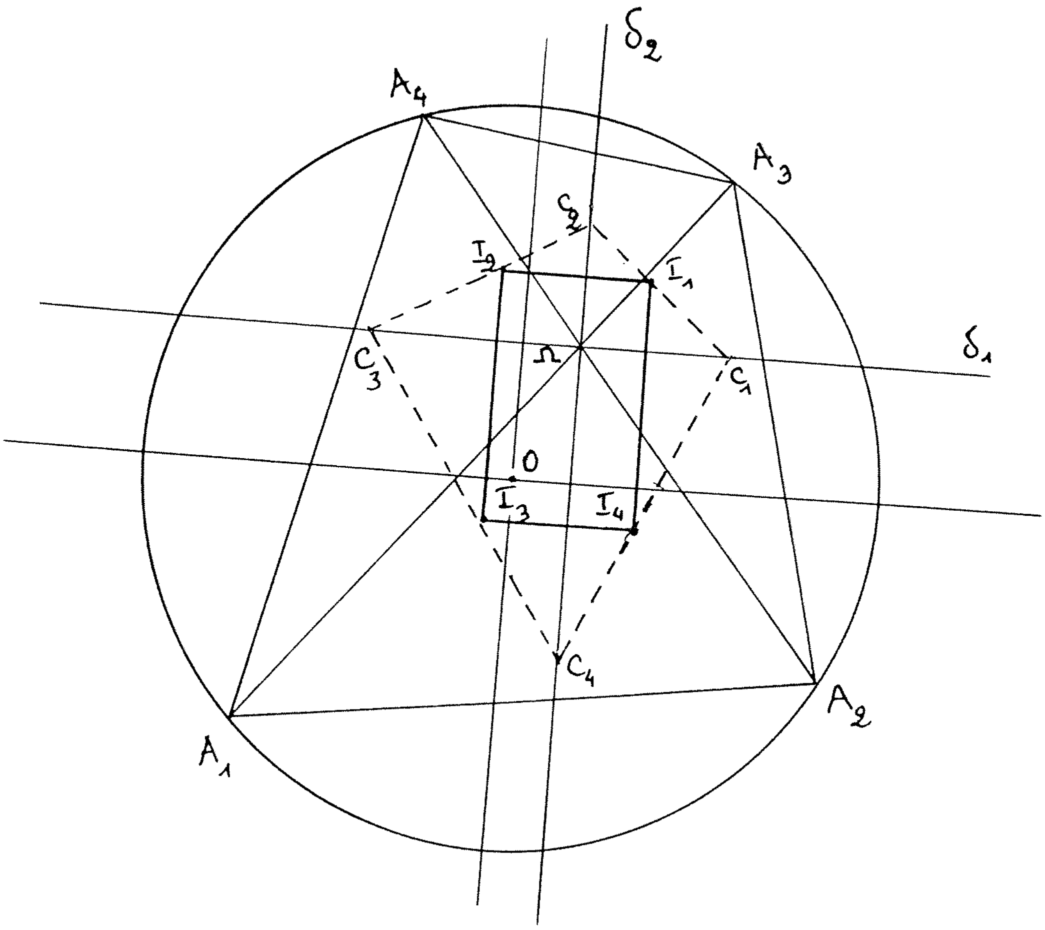
Il reste à prouver que I coïncide avec I_1. Il est facile de calculer la distance r de I à la droite (A_2A_4), qui a pour équation dans $\mathcal{R}_1$: $x \sin v + y \cos v = 0$

$$r = -A + (AB)^{1/2} \sin v + (AC)^{1/2} \cos v.$$

D'après la propriété réciproque de la relation d'Euler, on aura $I = I_1$ si r vérifie : $1 - 2r = OI^2$ (le rayon du cercle circonscrit Γ est 1). Or :

$$\begin{aligned} OI^2 &= (-\sin v + (AB)^{1/2})^2 + (-\cos v + (AC)^{1/2})^2 \\ &= 1 + 2A - 2(AB)^{1/2} \sin v - 2(AC)^{1/2} \cos v \\ &= 1 - 2r. \end{aligned}$$

Le raisonnement est analogue pour les points I_2, I_3, I_4.



RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 1995

Voici les sujets proposés au vingt deuxième Rallye Mathématique d'Alsace.

CLASSE DE PREMIÈRE

Exercice 1

Il est bien connu que les Shaddocks pondent des oeufs. Pour pondre un oeuf, ils doivent compter jusqu'à 4. Ou plutôt, quand un Shaddock compte régulièrement, il pond toujours un oeuf à chaque multiple de 4.
Le Ministre des Pontes a chargé son Conseiller Shaddock de compter tous les oeufs entreposés dans la réserve du Ministère.Le Conseiller, exténué d'avoir tant compté et pondu, note 1995 oeufs sur son registre. Combien y avait-il d'oeufs initialement dans la réserve ?

Exercice 2

Le Docteur Jones a trouvé dans les caves de l'Institut de Recherche d'Ethnologie Méso-Américaine, les statues de Glesecoatl et de Pluvitepeck.
Furieux, il se rend compte qu'elles ont été ramenées du temple de Tezcatlipoca avant qu'il ne puisse mesurer la distance entre leurs emplacements. Or cette distance doit être connue très précisément car elle permet de déterminer sur un autre site, l'emplacement du trésor de Moctuzema.
Il se rend sur place et constate qu'il reste les statues de Barbisclan, Didiextla et Emilomok. Il mesure les distances et trouve 15 m entre Barbisclan et Didiextla, 10 m entre Barbisclan et Emilomok , 20 m entre Emilomok et Didiextla.
Dans ses recherches précédentes, il a découvert les règles que suivent les emplacements de statues dans les temples mayas : Emilomok doit être équidistant de Barbisclan et de Glesecoatl ; Didiextla doit être équidistante de Barbisclan et de Pluvitepeck ; Glesecoatl doit être aligné avec Barbisclan et Pluvitepek et à égale distance d'eux. Quelle était la distance entre les emplacements de Glesecoatl et de Pluvitepeck ?

Exercice 3

On veut empiler des assiettes identiques sur des étagères superposées pouvant supporter chacune au maximum une pile de cinq assiettes. Pour des raisons d'équilibre, le nombre d'assiettes par étagère doit diminuer strictement avec la hauteur. Combien y a-t-il de possibilités de rangement suivant le nombre d'assiettes et le nombre d'étagères ?

CLASSE DE TERMINALE

Exercice 1

Au royaume du Père Ubu, les années ne sont comptées qu'avec les nombres ubuesques. Les nombres ubuesques sont des nombres qui ne sont pas égaux à un nombre multiplié une ou plusieurs fois par lui-même.
La première année s'appelle Ubu 2, la deuxième Ubu 3, la troisième Ubu 5, la quatrième Ubu 6, la cinquième Ubu 7, la sixième Ubu 10, etc ...
Comment s'appellera la 199495$^{\text{ème}}$ année ?

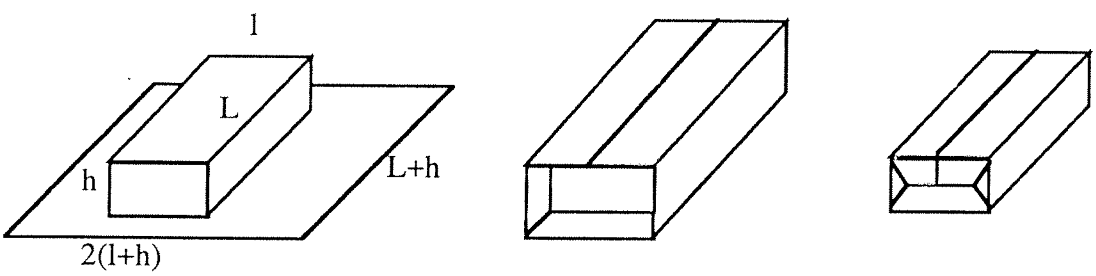
Exercice 2

Le palais de Thram II, fils d'Ottokar IV

En Syldavie, le gouvernement est formé de cinq ministères. Pour travailler efficacement, le roi Thram II décide de faire construire un palais pentagonal. Un concours s'adressant à tous les architectes est ouvert.
Le palais doit être partagé par des cloisons intérieures reliant tous les sommets. Chaque ministère disposera d'une aile triangulaire ayant deux murs extérieurs. La partie commune à deux ministères sera consacrée aux relations interministérielles. Pour éviter les jalousies, Thram II souhaite que chaque ministère dispose d'une aile d'un hectare.
Montrer que tous les projets des architectes auront la même superficie totale.

Exercice 3

Pour le Nouvel An Chinois, la compagnie des **M**archands **A**ssociés de **Thé** a décidé d'offrir à ses plus fidèles clients sa spécialité au jasmin enveloppée dans de la soie. Pour emballer une boîte de dimensions L , l , h, on dispose d'un rectangle de tissu de dimensions (L + h) , 2(l +h).
Calculer pour un volume V fixé du paquet, les dimensions L, l, h, qui leur feront utiliser le moins de soie possible.



A VOS STYLOS

PROBLÈME 31

Énoncé

Dans la matinée, la neige se mit à tomber, régulièrement, uniformément. Pour dégager la route, trois chasse-neige partirent du village vers la ville, le premier à midi, le second à quatre heures, le troisième à six heures. (Les trois engins sont du même modèle et ont une vitesse inversement proportionnelle à la quantité de neige présente sur la route.) Sachant que le troisième a rattrapé le second au moment où le second rattrapait le premier, on demande à quelle heure il a commencé à neiger.

Solution

Nous prendrons le village comme origine des abscisses et le début de la chute de neige comme origine des temps. Soient t_1, t_2 et t_3 les instants de départ des trois chasse-neige. Le mouvement d'un chasse-neige est régi par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\text{constante}}{t - s(x)}$$

où $s(x)$ est l'instant de passage en x du chasse-neige précédent (pour le premier chasse-neige, $s(x) = 0$, début de la chute de neige). Considérant t comme fonction de x, on obtient l'équation linéaire $t'(x) = a\big(t - s(x)\big)$ avec condition initiale $(x = 0, t = t_i)$. La méthode de variation de la constante consiste à simplifier cette équation en remplaçant les fonctions $t(x)$ et $s(x)$ par $T(x) = t(x)\,e^{-ax}$ et $S(x) = s(x)\,e^{-ax}$; ceci donne $T'(x) = -aS(x)$, avec condition initiale $(x = 0, T = t_i)$; la solution est

$$T(x) = t_i - a\int_0^x S(u)\,du\ .$$

Les fonctions T_1, T_2 et T_3 qui correspondent aux trois mouvements sont donc

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= t_1 - a\int_0^x 0\,du = t_1\ ;\\
T_2(x) &= t_2 - a\int_0^x T_1(u)\,du = t_2 - t_1 ax\ ;\\
T_3(x) &= t_3 - a\int_0^x T_2(u)\,du = t_3 - t_2 ax + \tfrac{1}{2}t_1 a^2 x^2\ .
\end{aligned}$$

L'abscisse x du point où les trois engins se rattrapent doit vérifier $T_1(x) = T_2(x) = T_3(x)$. L'égalité $T_1(x) = T_2(x)$ fournit $ax = (t_2 - t_1)/t_1$; reportant cette valeur dans $T_1(x) = T_3(x)$, on obtient la relation $t_1^2 + t_2^2 = 2t_1t_3$, condition de rencontre des trois véhicules.

En appelant h l'heure du début de la chute de neige et h_1, h_2 et h_3 les heures des trois départs, de sorte que $t_i = h_i - h$, cette condition devient

$$h = \frac{2h_1h_3 - h_1^2 - h_2^2}{2(h_3-h_2)} = h_1 - \frac{(h_2-h_1)^2}{2(h_3-h_2)}.$$

Avec les données de l'énoncé ($h_1 = 0$, $h_2 = 4$, $h_3 = 6$) on trouve $h = -4$: la neige a commencé à huit heures.

REMARQUE. — On pouvait savoir a priori que le résultat ne dépendrait que des trois instants de départ : tous les autres paramètres qui auraient pu intervenir se résument en une seule constante, a, homogène à l'inverse d'une longueur; le résultat, $f(a, h_1, h_2, h_3)$, est, lui, homogène à un temps. En changeant l'unité de longueur sans toucher à l'unité de temps, on voit que f ne dépend pas de a.

PROBLÈME 32

Énoncé (proposé par P. Renfer, d'Ostwald)

On désigne par E la droite, le plan ou l'espace. Trouver toutes les applications f de E dans E qui préservent la distance 1, c'est-à-dire telles que, pour tous points x et y de E vérifiant $d(x, y) = 1$, on a aussi $d(f(x), f(y)) = 1$.

Indication

Si E est le plan ou l'espace, f est une isométrie.

PROBLÈME 33

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel, de Strasbourg)

Étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}$$

sur l'intervalle $]0, 1[$.

PROBLÈME 34

Énoncé

Soient quatre plans parallèles. Montrer que l'on peut choisir un point dans chacun d'eux de façon à obtenir les quatre sommets d'un tétraèdre régulier; donner, en fonction des distances deux-à-deux des quatre plans, toutes les valeurs possibles pour la longueur des arêtes du tétraèdre.