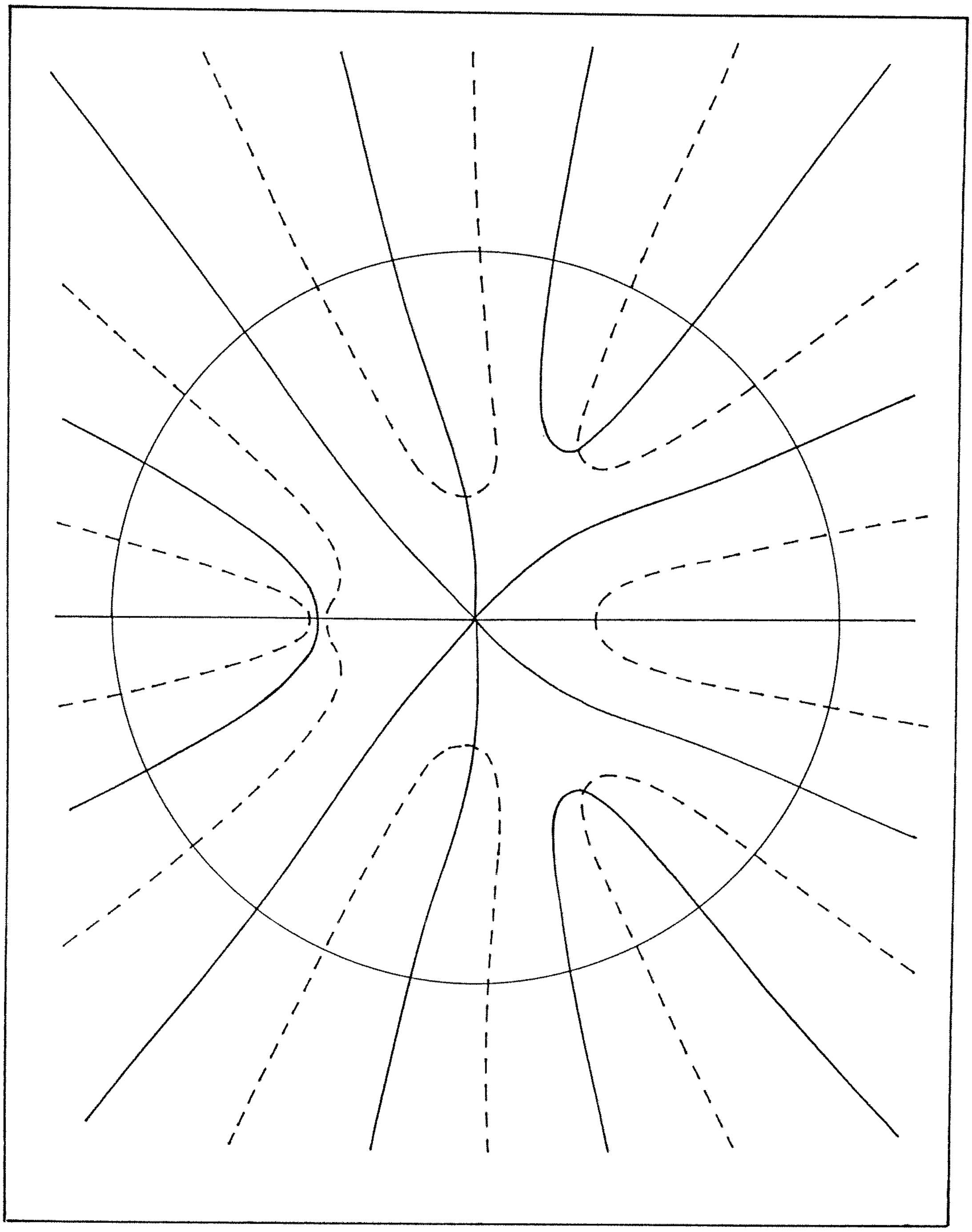
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 81 – DÉCEMBRE 1995 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

réalisée par Odile Schladenhaufen et Jean-Pierre Friedelmeyer.

Les branches en pointillés représentent la courbe d'équation

$$x^7 - 21x^5y^2 + 28x^4 + 35x^3y^4 - 7xy^6 + 28y^4 - 168x^2y^2 - 480 = 0.$$

Les branches en trait plein représentent la courbe d'équation :

$$y^7 - 21x^2y^5 + 35x^4y^3 - 7x^6y + 112x^3y - 112xy^3 = 0.$$

Les intersections de ces deux courbes représentent, dans le plan complexe, les solutions de l'équation $x^7 + 28x^4 - 480 = 0$.

Cette équation est proposée en exemple, par Gauss, pour illustrer une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

Nous renvoyons à l'article suivant de Jean-Pierre Friedelmeyer pour de plus amples informations.

ENSEIGNANTS, CHERCHEURS, UTILISATEURS

"Informer", "Communiquer", "Dialoguer", tels sont quelques-uns des thèmes qui reviennent avec le plus de constance dans les éditoriaux des responsables de publications, et cela quels qu'en soient le sujet et le "public-cible". Pourtant on ne peut nier que notre société connaisse une véritable inflation éditoriale : une simple visite dans un kiosque à journaux témoigne de l'augmentation du nombre de titres en vente. Et encore! Cela ne donne qu'une faible idée de ce qui paraît, l'immense majorité des revues professionnelles et autres bulletins d'associations ont des tirages modestes et n'ont, comme '*L'Ouvert*', accès qu'à la VPC (vente par correspondance). De quoi se plaint-on, alors? Cette inflation éditoriale que l'on observe ne témoigne-t-elle pas d'un accroissement de la communication?

Mais est-ce que ce ne sont pas toujours un peu les mêmes qui écrivent? Où en sont les "prises de paroles" de la base, tant souhaitées au nom de la démocratie dite "participative"? On a un peu l'impression d'avoir affaire d'un côté à de grands medias qui crétinisent, endorment ou manipulent l'opinion publique, et de l'autre à de courageux petits comités de rédaction qui, tout en se faisant plaisir à eux-mêmes, ont bien du mal à réveiller leurs rares lecteurs, à obtenir d'eux une réaction, voire une contribution, à faire surgir d'authentiques dialogues entre les uns et les autres.

Quel rapport, se demandera-t-on, entre ce discours très général et les Mathématiques et avec '*L'Ouvert*'? En fait il me semble que '*L'Ouvert*' aussi, comme d'autres de ces petites revues, est menacé par un certain désintérêt ou une certaine passivité de son lectorat. Les responsables en sont d'ailleurs conscients et tentent de réagir, par exemple en demandant aux uns et aux autres de rédiger l'éditorial. C'est mon tour aujourd'hui... Je dis "aux uns et aux autres", car si tous les lecteurs et lectrices de '*L'Ouvert*' sont des mathématicien(ne)s, nous venons d'horizons divers et n'avons pas tous forcément les mêmes centres d'intérêt. Mais c'est la grande chance d'un bulletin comme '*L'Ouvert*' et d'un organisme comme l'IREM, d'avoir l'ambition de réunir des enseignants du secondaire, des universitaires, des chercheurs et, peut-être aussi, des utilisateurs, autant de gens qui, chacun à leur manière, "font" des Mathématiques.

En fait, cela ne va pas de soi de prétendre réunir les gens dans un milieu social aussi cloisonné que celui des mathématiciens, où l'on peut détacher trois grands groupes :
- **les enseignants**, de loin les plus nombreux; le souci principal de l'enseignant, me semble-t-il, et cela quel que soit le "niveau" auquel il enseigne, c'est de comprendre les règles du jeu, c'est-à-dire non seulement la lettre des programmes, mais aussi l'esprit de ces programmes, ce qui est sans doute plus difficile à cerner; l'enseignant soucieux d'efficacité s'intéresse aussi à tout ce qui relève de la pédagogie, de la

didactique, à tout ce qui de près ou de loin relève de la communication.
- **les chercheurs** au contraire, souvent passionnés, très impliqués dans ce qu'ils font, travaillent individuellement ou par petits groupes sur des sujets savants, très "pointus", compris et appréciés des seuls spécialistes. Seule une minorité de chercheurs se préoccupe d'intéresser le reste du monde à ce qu'elle fait. Mais cette médiatisation n'est pas toujours possible (la plupart des résultats sont "incommunicables" au grand public), et reste de toute manière sans effet retour sur l'orientation des recherches elles-mêmes. D'où l'impression qu'existe une sorte de "ghetto" des mathématiciens-chercheurs. Il faut aussi déplorer l'extrême spécialisation et les difficultés de communication entre les diverses équipes de recherche.
- **les utilisateurs**. On peut considérer comme utilisateurs de Mathématiques beaucoup de gens appartenant à des professions diverses : physiciens, ingénieurs, économistes, statisticiens etc. Une certaine tradition veut qu'on ne les classe pas parmi les mathématiciens. Certes ce sont des praticiens des Mathématiques plutôt que des théoriciens (sauf dans le cas de la Physique Théorique), mais cela ne change rien au fait qu'ils "font" des Mathématiques et que beaucoup sont, dans leurs pratiques, y compris dans les "recettes" qu'ils appliquent, aussi proches des enseignants du secondaire que le sont les universitaires mathématiciens, voire davantage. Aussi doit-on se demander pourquoi ils entretiennent si peu de contacts avec les "professionnels" des Mathématiques.

Car ces différents groupes se fréquentent peu, le cloisonnement est réel. L'universitaire appartient en théorie aux deux premiers groupes puisqu'il porte le titre "d'enseignant-chercheur". Mais n'est-il pas un peu schizophrène, dans la mesure où ces deux activités d'enseignement et de recherche sont souvent, chez un même individu, sans aucune connexion ni interférence l'une sur l'autre!

D'autre part si les mathématiciens forment une grande famille, les utilisateurs, comme je l'expliquais plus haut, ne sont pas considérés comme faisant partie de la famille. Aussi oublie-t-on de leur demander leur avis lorsqu'on envisage une modification des programmes ou des méthodes d'enseignement, comme si les Mathématiques étaient la propriété des seuls mathématiciens, leur chasse gardée, comme si l'enseignement des Mathématiques n'avait pour finalité que de former de nouveaux mathématiciens "en titre". Ou alors peut-être, considère-t-on ces utilisateurs comme capables uniquement d'appliquer des recettes toutes faites, inaptes au raisonnement mathématique en tant que tel et à la conception de nouveaux modèles.

Je ne suis certainement pas le premier à soulever ces questions, et l'existence des groupes IREM témoigne du fait qu'une réflexion est en cours (je pense par exemple à l'existence d'un groupe Maths-Eco). Je proposerais pour ma part que la réflexion s'élargisse, il me semble que l'une des clefs du succès serait le décloisonnement entre tous les groupes sociaux concernés par les Mathématiques. Il faudrait au minimum que les gens se connaissent, que les uns s'informent sur ce que font les autres, que l'on dépasse les questions strictement professionnelles, que l'on aborde aussi des thèmes susceptibles d'intéresser un large public, comme par exemple les diverses manières de faire des Mathématiques, leurs finalités, leur insertion dans la société. Il conviendrait que cette réflexion s'ouvre le plus largement possible, y compris aux étudiants en Mathématiques, cela va sans dire.

Dominique DUMONT.

SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 81 – DÉCEMBRE 1995

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB 66 F.
◇ Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 35 F

LA PREMIÈRE DÉMONSTRATION DE GAUSS DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Professeur au Lycée Couffignal de Strasbourg

Tout étudiant de mathématiques connaît ou est censé connaître le théorème fondamental de l'algèbre, éventuellement sous la dénomination de théorème de d'Alembert-Gauss :

"*Tout polynôme non constant à coefficients réels ou complexes admet au moins une racine dans le corps* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes.*" Cette propriété fait de $\mathbb{C}$ un **corps algébriquement clos**.

Le terme **fondamental** vient de Gauss qui l'utilise dans un texte de 1849 (1) et cette dénomination lui est restée, concurremment avec celle de théorème de d'Alembert en France. Pourquoi fondamental?

1) Sur lui repose une grande partie de l'algèbre classique : résolution des équations algébriques, décomposition des polynômes en facteurs irréductibles, existence de valeurs propres pour des endomorphismes d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, théorie des fonctions algébriques ou rationnelles.

2) Fondamental aussi en ce qu'il représente un sujet permanent de réflexion sur la structure de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ qui fait qu'il a été l'occasion d'une multitude de démonstrations : d'Alembert, Euler, Lagrange, Argand, Cauchy, Laplace et qu'il continue à en susciter. Par exemple en 1979, M. W. Hirsch et St. Smale ont donné une démonstration constructive qui met en place un algorithme, lequel partant d'un $c = z_0$ quelconque, aboutit à une racine d'un polynôme donné $f(z)$ au moyen d'une suite (z_n). Un point central de cette réflexion se trouve dans le fait quasi paradoxal que **ces démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre utilise, en dernier recours, des moyens non algébriques**, c'est-à-dire des moyens liés à l'analyse.

• Ou bien (d'Alembert, Argand, Cauchy ...) l'on diminue le module de $f(z)$ et l'on utilise l'existence d'un minimum nul pour ce module.

• Ou bien (Euler, Lagrange, Laplace ...) l'on ramène le problème à l'existence de racines carrées pour tout nombre complexe, et l'on utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine réelle (2).

(1) "Grundlehrsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen Gauss Werke 3, p. 73.

(2) Jusqu'à Bolzano (1817) ce théorème était considéré comme quasi évident, reposant simplement sur l'argument visuel de l'intersection de la courbe $y = f(x)$ avec l'axe des abscisses.

Aujourd'hui, les démonstrations les plus en faveur dans l'enseignement universitaire sont celles qui utilisent les puissants théorèmes de la théorie des fonctions de variable complexe. Mais ce faisant, elles font peut-être perdre à ce théorème son caractère essentiel, fondamental pour l'algèbre, banalisant un résultat perçu comme évident par les étudiants, alors que le nombre même des démonstrations (plusieurs dizaines) réparties sur deux siècles et demi, montre assez son caractère problématique et stimulant pour le progrès des mathématiques. On en trouvera une énumération descriptive (jusqu'au début du 20^e siècle) dans le Tome I2 de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques, sous la plume de Netto et Le Vavasseur (p. 180 à 205) qui ajoutent ceci :

"*Les démonstrations de ce théorème sont nombreuses. Elles diffèrent d'ailleurs* **essentiellement** *suivant le point de vue auquel on se place, suivant la doctrine que l'on professe sur les fondements de l'Arithmétique. Suivant ce point de vue telle démonstration est rigoureuse ou ne l'est pas ; au point de vue arithmétique de L. Kronecker le théorème tel qu'on vient de l'énoncer n'est même pas exact (...). Au point de vue intuitif au contraire, ou lorsque l'on admet comme évident* **a priori** *qu'à chaque segment de droite correspond nécessairement un nombre déterminé, le théorème fondamental est, au moins relativement, assez facile à démontrer.*

Suivant que l'on suppose connue, ou non, la notion **analytique** *du continu, suivant aussi que l'on estime, ou non, que toute démonstration doit fournir, pour être légitime, un procédé permettant de calculer au moyen des coefficients de $f(z)$ et avec telle approximation que l'on veut les racines (dont l'existence résulte alors, en dernière analyse, de ce procédé même) l'objet même de la démonstration du théorème fondamental sera changé.*"

Je vous propose dans l'article qui suit de revenir aux origines de cette réflexion en étudiant ce théorème à travers l'une de ses premières démonstrations, celle que Gauss a trouvée à l'âge de vingt ans et proposée comme dissertation doctorale à Helmstädt en 1799. Pourquoi celle-ci plutôt qu'une autre? Parce qu'elle est la première à poser le problème de façon claire et précise, explicitant tout ce qui aurapavant était admis de façon plus ou moins implicite, et dissipant le halo de mystère qui entourait et obscurcissait encore passablement les **nombres imaginaires** de cette époque, "*véritables ombres d'une ombre*" comme Gauss les qualifiera. Examinons successivement la figure et la personnalité de Gauss, puis la notion d'imaginaire au 18^e siècle et les enjeux d'une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, avant de passer à l'étude effective de la démonstration de Gauss.

La figure de Gauss

Il est significatif que le premier chapitre des leçons que consacre Félix Klein au développement des mathématiques du 19^e siècle (3) soit entièrement consacré à Gauss, et cela sur plus de soixante pages. Il s'en explique ainsi :

(3) Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Band 1.

"*Gauss se situe à l'entrée du* 19^{e} *siècle, pas seulement selon la chronologie; il représente également le point de départ des multiples développements nouveaux de la science de cette époque. La considération de la grande personnalité de Gauss convient d'autant mieux à l'introduction du présent sujet que s'offre à nous, en cet homme, une remarquable et très heureuse jonction de l'esprit des deux époques au carrefour desquelles il se situe.*" Gauss effectivement peut apparaître comme un homme du 18^{e} siècle dans ses aspects extérieurs, dans l'impression qu'il peut donner à ses contemporains :

– échanges sur des questions scientifiques sous la forme d'une abondante correspondance avec quelques hommes choisis, peu nombreux,
– écriture en latin d'une grande partie de ses œuvres,
– travail aussi bien en mathématiques, en physique, en astronomie, en géodésie.

Mais Gauss est aussi une grande figure du 19^{e} siècle
– par ses thèmes de recherche et ses idées très novatrices,
– par la rigueur et la précision de ses textes scientifiques.

Cela est déjà particulièrement sensible dans la démonstration que nous allons étudier. Cette démonstration a été le sujet de la dissertation doctorale que Gauss a présentée à Helmstädt en 1799 sous la responsabilité de J. F. Pfaff (1765-1825) lequel a porté l'appréciation suivante sur le mémoire de Gauss :

"*Je ne puis juger que très favorablement ce travail car il est une preuve convaincante des aptitudes remarquables et des connaissances approfondies de son auteur, ce qui fait qu'après la publication prochaine de cette étude, le candidat comptera au nombre de ceux dont le grade fera honneur à notre faculté.*"

La notion d'imaginaire au 18^{e} siècle et les enjeux de la démonstration du théorème fondamental.

Pour bien comprendre l'enjeu théorique du théorème fondamental de l'algèbre au 18^{e} siècle, il est important de restituer son **sens primitif** au mot "*imaginaire*", sens à la fois plus large et plus mystérieux que le terme **nombre complexe** d'aujourd'hui (terme d'ailleurs introduit par Gauss). Le terme "*imaginaire*" est utilisé pour la première fois par Descartes en 1637 dans sa "*Géométrie*" :

"*Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine.*"

Et Girard, à qui nous devons la première formulation du théorème fondamental dans "*L'invention nouvelle en l'Algèbre*" (1629) :

"*Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre (...). On pourrait dire : à quoi servent ces solutions qui sont impossibles? Je réponds pour trois choses, pour la certitude de la règle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions et pour son utilité.*"

Le terme *impossible* sera longtemps synonyme d'imaginaire. Ainsi dans le dictionnaire de mathématiques de Klügel (4) (1836) : "*On appelle grandeur impossible ou imaginaire toute expression pour laquelle on ne peut pas trouver une grandeur réelle comme valeur, par exemple Arc cos x pour $x > 1$*".

Pourtant quelques années auparavant en 1830, un jeune mathématicien du nom de Galois donnait une signification beaucoup plus moderne et précise au terme *imaginaire* dans un court texte intitulé "*Sur la théorie des nombres*" (5). Présentons les idées de Galois sur un exemple simplifié, celui des entiers modulo 3 c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ que nous désignerons par E. Dans cet ensemble, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution comme le montre aisément le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2
x^2+1	1	2	2

Introduisons alors avec Galois un nombre imaginaire i tel que $i^2 \equiv 2$ [modulo 3], autrement dit une solution **imaginaire** de l'équation : $x \in E, x^2 + 1 = 0$.

"*Il faut* – explique Galois – *regarder les racines de cette congruence comme des espèces de symboles imaginaires (...) dont l'emploi dans le calcul sera souvent aussi utile que celui de l'imaginaire $\sqrt{-1}$ dans l'analyse ordinaire.*"

L'adjonction de i à notre ensemble E définit un nouvel ensemble $\mathbb{F}$ formé des éléments $a + ib$ où a et b parcourent E, dont la table de multiplication, limitée aux éléments non nuls est la suivante (6) :

$\bullet$	1	2	i	$2i$	$1+i$	$2+i$	$1+2i$	$2+2i$
1	1	2	i	$2i$	$1+i$	$2+i$	$1+2i$	$2+2i$
2	2	1	$2i$	i	$2+2i$	$1+2i$	$2+i$	$1+i$
i	i	$2i$	2	1	$2+i$	$2+2i$	$1+i$	$1+2i$
$2i$	$2i$	i	1	2	$1+2i$	$1+i$	$2+2i$	$2+i$
$1+i$	$1+i$	$2+2i$	$2+i$	$1+2i$	$2i$	1	2	i
$2+i$	$2+i$	$1+2i$	$2+2i$	$1+i$	1	i	$2i$	2
$1+2i$	$1+2i$	$2+i$	$1+i$	$2+2i$	2	$2i$	i	1
$2+2i$	$2+2i$	$1+i$	$1+2i$	$2+i$	i	2	1	$2i$

(4) Mathematisches Wörterbuch V, p. 555.
(5) Galois "Ecrits et Mémoires mathématiques", p. 114.
(6) $\mathbb{F}$ est un corps de Galois à neuf éléments, dont les éléments non nuls forment un groupe cyclique engendré par $1 + i$.

Le lecteur peut s'amuser à démontrer qu'avec cette adjonction de l'élément imaginaire i, l'équation $x \in \mathbb{F}, ax^2 + bx + c = 0$ a **toujours** une solution lorsque a, b, c appartiennent à E. De la même manière que l'équation $x \in \mathbb{C}, ax^2+bx+c = 0$ a **toujours** une solution, lorsque a, b, c appartiennent à $\mathbb{R}$. Mais là où les choses changent totalement c'est dans la comparaison des équations :

$$\begin{array}{cc} x \in \mathbb{F}, ax^2 + bx + c = 0 & \quad x \in \mathbb{C}, ax^2 + bx + c = 0 \\ (a, b, c) \in \mathbb{F}^3 & \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^3. \end{array}$$

L'équation de gauche n'a pas toujours de solution. Par exemple, l'équation $x \in \mathbb{F}$, $x^2 = 1+i$ n'a pas de solution comme le montre l'examen des termes de la diagonale du tableau ci-dessus. On pourrait introduire un nouvel imaginaire I qui définirait une nouvelle extension $\mathbb{G}$ mais dans laquelle nous trouverions encore et toujours des équations du second degré sans racines. Au contraire, l'équation de droite a toujours des solutions. L'adjonction de $\sqrt{-1}$ clôt définitivement la situation en ce qui concerne la résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Ceci nous le savons parce que nous disposons d'une démonstration du théorème fondamental, mais les savants du 18^e siècle, eux, ne le savaient pas. La résolution des équations polynôme de degré au plus quatre avait mis en évidence que toutes les racines éventuelles pouvaient s'écrire sous la forme $A + B\sqrt{-1}$ avec A et B réels. Mais comme on ne savait pas résoudre en général les équations de degré supérieur à quatre par radicaux, on pouvait, on devait se poser la question : les racines de telles équations peuvent-elles aussi toujours s'écrire sous cette forme $A+B\sqrt{-1}$ ou bien fallait-il envisager encore d'autres types d'imaginaires, comme dans l'équation de gauche ci-dessus ?

On le voit, il y a une certaine ambiguïté dans la formulation de la question : s'agissait-il de prouver l'existence d'imaginaires, solutions d'une équation polynôme donnée quelconque, à coefficients réels, ou s'agissait-il simplement de prouver une certaine forme (en l'occurence $A+B\sqrt{-1}$) pour des racines dont l'existence n'est pas mise en doute ? Dans sa dissertation, Gauss commencera d'emblée par critiquer cette ambiguïté :

"*Certains auteurs* – écrit-il – *prennent en quelque sorte comme Axiome que toute équation admet effectivement des racines qui, à défaut d'être possibles, seront* **impossibles**. *Ce qu'ils veulent signifier par grandeurs possibles ou impossibles ils ne l'ont pas suffisamment ni clairement explicité. Si l'expression* "**grandeurs possibles**" *doit signifier la même chose que "réelles", "impossible" la même chose qu'"imaginaires" alors cette proposition ne peut en aucune façon être admise comme Axiome, mais exige nécessairement une démonstration. Cependant ces expressions ne semblent pas être prises dans ce sens; l'axiome doit plutôt être compris dans le sens suivant :* "**Quoique nous ne soyons pas encore sûrs qu'il y a nécessairement m grandeurs réelles ou imaginaires qui satisfont à une quelconque équation donnée de degré m, nous voulons néanmoins admettre cela dans la suite; car s'il devait arriver qu'on ne puisse pas trouver autant de grandeurs réelles ou complexes, l'issue nous reste**

pourtant ouverte de dire que les autres sont impossibles". *Préconise-t-on d'utiliser une telle expression au lieu de dire simplement que l'équation n'a pas dans ce cas là autant de racines, je n'ai rien là contre; mais si l'on en use comme si elles étaient effectives, et si l'on dit par exemple que la somme de toutes les racines de l'équation*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots = 0 \text{ est } = -A$$

bien qu'il s'en trouve parmi elles des "**impossibles**" *(ce qui signifie en fin de compte : quoiqu'il en manque quelques unes) je ne peux approuver cela. Car des racines impossibles acceptées dans ce sens là sont comme des racines, et alors le théorème ne peut en aucune façon être admis sans démonstration; bien plus, on peut à ce propos se demander, s'il ne peut exister des équations qui n'auraient pas même des racines impossibles*".

Un second enjeu, plus pratique, allait stimuler les recherches des mathématiciens et modifier la position d'approche pour la résolution du problème. Le développement du calcul intégral posait en effet la question de l'intégration d'une fraction rationnelle et donc la question de la décomposition de celle-ci en éléments simples du type $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ ou $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ où $x^2 + px + q$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.
D'où la nouvelle formulation du problème : peut-on décomposer tout polynôme réel en facteurs soit réels linéaires $X - a$ et/ou quadratiques $x^2 + px + q$, soit linéaires complexes? Il faut savoir qu'au 18e siècle la réponse à cette question était loin d'être unanime.

Dans un mémoire paru en 1702, Leibniz conjectura que cette factorisation n'était pas toujours possible. Comme argument, il donne l'exemple de la décomposition de

$$\begin{aligned} X^4 + a^4 &= (X^2 - a^2\sqrt{-1})(X^2 + a^2\sqrt{-1}) \\ &= (X + a\sqrt{\sqrt{-1}})(X - a\sqrt{\sqrt{-1}})(X + a\sqrt{-\sqrt{-1}})(X - a\sqrt{-\sqrt{-1}}) \end{aligned}$$

dont le dernier produit ne donnera jamais un facteur réel, quels que soient les deux facteurs que l'on regroupe. Leibniz ne semble pas être parvenu à l'idée que $\sqrt{\sqrt{-1}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{-1}$, car alors on a avec

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{-1}} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + \sqrt{-1}) \text{ et } \sqrt{-\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - \sqrt{-1}) \\ X^4 + a^4 &= (X^2 + a\sqrt{2}X + a^2)(X^2 - a\sqrt{2}X + a^2) \end{aligned}$$

Dans une lettre à Nicolas Bernoulli datée du 1-11-1742, Euler formule un théorème de factorisation des polynômes réels exactement dans la forme que Leibniz tenait pour fausse. Contredisant Bernoulli qui proposait le contre exemple :

$$X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X + 4$$

Euler démontre que ce polynôme se décompose en produit de deux polynômes réels :

$$[X^2 - (2+a)X + 1 + \sqrt{7} + a][X^2 - (2-a)X + 1 + \sqrt{7} - a] \text{ où } a = \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}.$$

Quelques jours plus tard, le 15-12-1742, dans une lettre à Goldbach, Euler renouvelle la formulation de son théorème en ajoutant qu'il n'a pas pu jusqu'à présent le démonter complètement, mais seulement "*à peu près*" comme certains théorèmes de Fermat. Dans cette lettre il mentionne également que l'on peut regrouper les racines imaginaires d'un polynôme réel en paires, de façon qu'en multipliant les facteurs linéaires correspondant on trouve des facteurs réels de second degré. Goldbach reste sceptique face à ces affirmations et propose un nouveau contre exemple : $X^4 + 72X - 20$ qu'Euler factorise aussitôt.

Concluons cette première partie, en faisant le point sur la situation où se trouvait la communauté mathématique au moment où le jeune Gauss commençait ses réflexions. Peu à peu, à force de calculer formellement avec $\sqrt{-1}$, les mathématiciens se sont familiarisés avec les nombres imaginaires au point de les adopter dans la famille des autres nombres : entiers, rationnels, réels. Ne rencontrant jamais dans leurs résolutions d'équations d'autres expressions que celles qui sont réductibles à des composés de réels avec $\sqrt{-1}$ ils en vinrent à la conviction que tous les imaginaires pourraient toujours s'écrire ainsi. Enfin des problèmes théoriques et pratiques comme l'intégration des fractions rationnelles nécessitaient une réponse urgente à la question : peut-on toujours ramener cette intégration à celle de fractions élémentaires par la décomposition du dénominateur en produit de facteurs réels du premier ou du second degré? C'est sous cette forme que Gauss va attaquer le problème, en intitulant sa dissertation :
"*Nouvelle démonstration du théorème : toute fonction algébrique entière d'une variable est décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré.*"

Texte de vingt-cinq pages, les deux tiers sont consacrés à la critique des démonstrations de ses illustres prédessesseurs : Euler, d'Alembert, Lagrange, ce qui manifeste à la fois une connaissance parfaite de la science de son temps et une vision très claire et assurée de ce qu'elle doit être (7). Nous nous limiterons ici à la démonstration propre de Gauss, dont voici les articulations principales.

La démonstration de Gauss

Dans un premier temps, Gauss ramène le problème à la démonstration du théorème suivant :

Théorème : Soit $X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Lx + M$. S'il existe r et φ tels que simultanément

$$\begin{array}{lll} (1) & r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \ldots + Lr\cos\varphi + M & = U = 0 \\ (2) & r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \ldots + Lr\sin\varphi & = T = 0 \end{array}$$

(7) Il n'existe pas de traduction française du texte de Gauss (rappelons qu'il écrivait en latin). Je tiens à la disposition du lecteur curieux ma propre traduction française non publiée, réalisée à partir de la version allemande de E. Netto.

alors on a la propriété (p) : X est divisible par $x^2-2rx\cos\varphi+r^2$ ou par $x-r\cos\varphi$ selon que $r\sin\varphi$ est différent de 0 ou non.

On dira que c'est tout simplement les parties réelles et imaginaires de X qui sont annulées séparément dans les relations (1) et (2). Mais Gauss veut éviter tout recours aux imaginaires et déduit la proposition (p) des égalités (1) et (2) au moyen du lemme suivant dont nous laissons la vérification au lecteur :

Lemme : Pour tout entier naturel m non nul

$$\sin\varphi.x^m - \sin m\varphi.r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi.r^m \text{est divisible par} x^2 - 2\cos\varphi rx + r^2.$$

Pour déduire (p) de (1) et (2), il suffit alors d'appliquer le lemme aux valeurs successives $m, m-1, m-2, \ldots$, en multipliant successivement par les coefficients $A, B, C, \ldots$ du polynôme X de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc}
\sin\varphi.rx^m & -\sin m\varphi.r^m x & +\sin(m-1)\varphi.r^{m+1} \\
A\sin\varphi.rx^{m-1} & -A\sin(m-1)\varphi.r^{m-1}.x & +A\sin(m-2)\varphi.r^m \\
B\sin\varphi.rx^{m-2} & -B\sin(m-2)\varphi.r^{m-2}.x & +B\sin(m-3)\varphi.r^{m-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
K\sin\varphi.rx^2 & -K\sin 2\varphi.r^2x & +K\sin\varphi r^3 \\
L\sin\varphi.rx & -L\sin\varphi.rx & \\
M\sin\varphi.r & & -M\sin\varphi.r
\end{array}$$

dont chaque ligne est divisible par $x^2-2rx\cos\varphi+r^2$.
Additionnons colonnes par colonnes toutes ces expressions, nous obtenons
– pour la première colonne $Xr\sin\varphi$,
– pour la seconde zéro, en vertu de (2),
– pour la troisième zéro par combinaison linéaire de (2) $\times\cos\varphi-$ (1) $\times\sin\varphi$.
En conséquence :
– ou bien $r\sin\varphi\neq 0$ alors X est divisible par $x^2-2rx\cos\varphi+r^2$,
– ou bien $r\sin\varphi=0$ donc soit $r=0$ alors $M=0$ à cause de (1) donc X est divisible par x et par $x-r\cos\varphi$, soit $\sin\varphi=0$ alors $\cos\varphi=\pm1$ et $\cos m\varphi=(\cos\varphi)^m$, donc X s'annule pour la valeur $r.\cos\varphi$ et est divisible par $x-r.\cos\varphi$.

Reste à démontrer l'existence de r et φ tels que l'on ait les égalités (1) et (2). Cette démonstration va se faire en quatre étapes.

1. Les égalités $T=0$ et $U=0$ définissent chacune une courbe algébrique possédant au total, et de façon alternée, $4m$ branches infinies correspondant aux valeurs $\varphi=\frac{p\pi}{2m}$, $0\leq p\leq 4m-1$.

En considérant r et φ comme coordonnées polaires, les premiers membres de (1) et (2) définissent deux surfaces

$$(r,\varphi)\longmapsto z=U(r,\varphi) \text{ et } (r,\varphi)\longmapsto z=T(r,\varphi).$$

Ces surfaces sont coupées par le plan de base $z=0$ selon des courbes $U(r,\varphi)=0$ et $T=(r,\varphi)=0$.

a) Il est facile de vérifier que ces intersections ne sont pas vides. Par exemple pour $U(r,\varphi) = r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \ldots + M$ on peut prendre r suffisamment grand pour que $r^m \cos m\varphi$ dépasse en valeur absolue la somme de tous les autres termes, et alors pour une valeur convenable de φ, ce terme peut être rendu aussi bien positif que négatif. Remarquons que la courbe $T = 0$ contient de toute façon l'axe des abscisses puisque $\sin\varphi$ est en facteur.

b) Ces courbes sont algébriques car en posant $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r^n \cos n\varphi$ et $r^n \sin n\varphi$ sont des polynômes en (x, y).

c) Ces courbes ont des branches infinies définies respectivement par

$$\cos m\varphi = o \text{ ou } \varphi = \frac{\pi}{2m} + \frac{k\pi}{m} \text{ et } \sin m\varphi = o \text{ ou } \varphi = \frac{k\pi}{m}$$

soit au total $4m$ branches pour $\varphi = \frac{p\pi}{2m}$ avec $0 \leq p \leq 4m - 1$.

2. Il existe un cercle (Γ) contenant $2m$ points de $T = 0$ et $2m$ points de $U = 0$; chacun des points de la seconde famille est situé entre deux points de la première.

Soit $S = |A| + |B| + \ldots + |M|$ et (Γ) le cercle de rayon R, $R > \sup(S\sqrt{2}, 1)$. Notons $(2k+1)$ le point de (Γ) correspondant à $\varphi = \frac{2k+1}{m} \times \frac{\pi}{4}$ pour $0 \leq k \leq 4m - 1$ et étudions la valeur de T sur Γ. On a :

$$T = R^{m-1}[R\sin(m\varphi) + A\sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi + \ldots + \frac{L}{R^{m-2}}\sin\varphi].$$

Au point (1) on a $T = R^{m-1}[R\sqrt{\frac{1}{2}} + E]$ avec $|E| < S < R\sqrt{\frac{1}{2}}$. T reste donc positif sur tout l'intervalle [(1) - (3)] car $\sin(m\varphi) > \sqrt{\frac{1}{2}}$. De même T reste négatif sur tout l'intervalle [(5) - (7)] car $\sin(m\varphi) < -\sqrt{\frac{1}{2}}$. T s'annule par conséquent entre (3) et (5), et pour des raisons analogues entre (7) et (9),... entre $(8m-1)$ et (1). On démontrerait de la même manière que U s'annule entre (1) et (3), (5) et (7) ..., $(8m-3)$ et $(8m-1)$. Par ailleurs, l'étude du signe des dérivées $\frac{dU}{d\varphi}$ et $\frac{dT}{d\varphi}$ permet d'affirmer que chaque intervalle ne contient qu'un seul point où U (respectivement T) s'annule.

Numérotons alors les points d'intersection : nombre pair pour (T) , nombre impair pour (U), au total $2 \times 2m$ points notés

$$T_0, U_1, T_2, U_2, \ldots, T_{2m-1}, U_{2m}.$$

3. Tout point pair est relié à un point pair par une branche de (T) et tout point impair est relié à un point impair par une branche de (U), ces branches étant situées à l'intérieur de (Γ).

Les arguments donnés par Gauss sont de nature topologique, mais restent ici purement d'intuition géométrique : "*on sait par la géométrie supérieure que toute* *courbe algébrique (ou toute partie d'une courbe algébrique, s'il arrive que celle-ci soit composée de plusieurs branches mises ensemble) ou bien revient sur elle-même, ou bien s'en va à l'infini des deux côtés et que par conséquent, si une branche d'une courbe algébrique pénètre dans un espace délimité, nécessairement elle doit de nouveau ressortir de cet espace*". Ces arguments ne semblent d'ailleurs pas le satisfaire complètement, car dans une longue note (note 12), il explique que "*si quelqu'un le demande, il entreprendra à une autre occasion de fournir une démonstration qui ne puisse être soumise à aucun doute*" et que "*cette conclusion s'appuie sur les principes de la géométrie de position (8) lesquels ne sont pas moins susceptibles de démonstration que les principes de la géométrie des grandeurs*".

4. Conclusion : la courbe (U) coupe nécessairement la courbe (T), à l'intérieur de (Γ).

Supposons en effet que les deux courbes ne se coupent pas. Or le point O est relié au point $2m$.
Le point 1 sera relié à un point $n < 2m$,
le point 2 à un point $n' < n$
le point 3 à un point $n'' < n'$.
On arrivera nécessairement à la situation où un point h est relié à $(h+2)$.
Alors la courbe issue de $(h+1)$ ne peut que couper l'une des branches déjà utilisées qui relient les couples précédents.

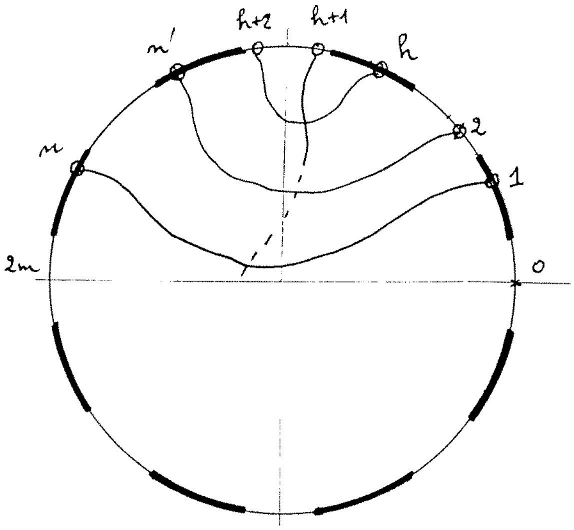


Figure 1

Nous avons illustré la démarche de Gauss par l'exemple de l'équation

$$X^7 + 28X^4 - 480 = 0.$$

Alors

$$U = x^7 - 21x^5y^2 + 28x^4 + 35x^3y^4 - 7xy^6 + 28y^4 - 168x^2y^2 - 480 = 0 \text{ (fig.2)}$$
$$\text{et } T = y^7 - 21x^2y^5 + 35x^4y^3 - 7x^6y + 112x^3y - 112xy^3 = 0 \text{ (fig.3)}$$

L'intersection est matérialisée sur la figure de couverture et visualise les sept racines : trois racines réelles

$$x_1 = 1,9228841 \ ; \ x_2 = -2,4580892 \ ; \ x_3 = -2,5778036$$

et deux couples de racines complexes conjuguées

$$x_4, x_5 = 1,6843159 \pm 2,6637914i \text{ et } x_6, x_7 = -0,1278113 \pm 1,9874234i.$$

(8) ce que nous appelons aujourd'hui topologie (ndlr).

Gauss n'a pas illustré sa démonstration par cette équation. L'exemple est néanmoins de lui, pris dans un autre texte (9) qui correspond à une autre démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Ce sera la quatrième qu'il donnera de ce théorème. C'est dire que le sujet lui tenait à cœur. La seconde partie de ce texte donne alors un algorithme de résolution sur $\mathbb{C}$ des équations de la forme $x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$ avec en particulier la résolution de l'exemple ci-dessus

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0.$$

Mais ceci est une autre histoire. Le problème donné dans la rubrique "Problèmes pour nos élèves" reprend les principales idées de Gauss adaptées à un cas simple et donne une méthode de factorisation du polynôme $x^4 + ax + b$ pour a, b réels quelconques (voir la rubrique "Problèmes pour nos élèves").

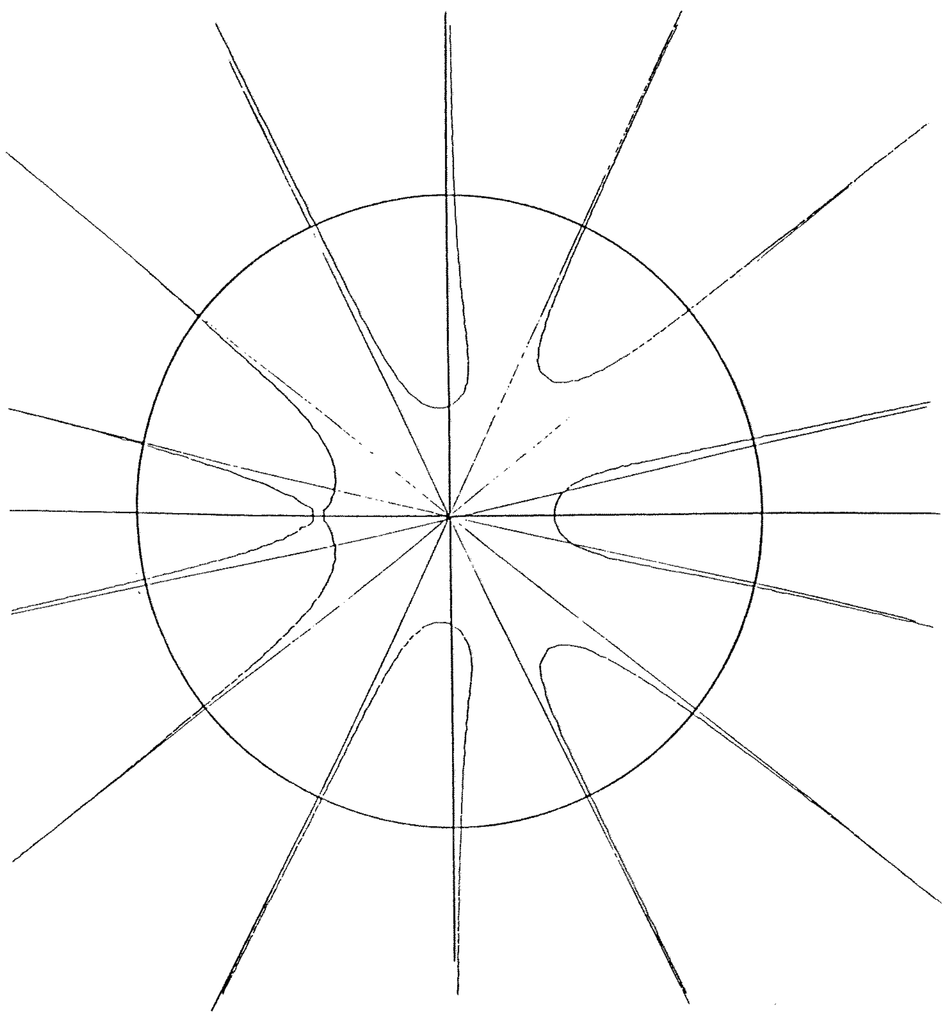


Figure 2

(9) Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen 1649 Gauss Werke Band III, p. 72 à 102.

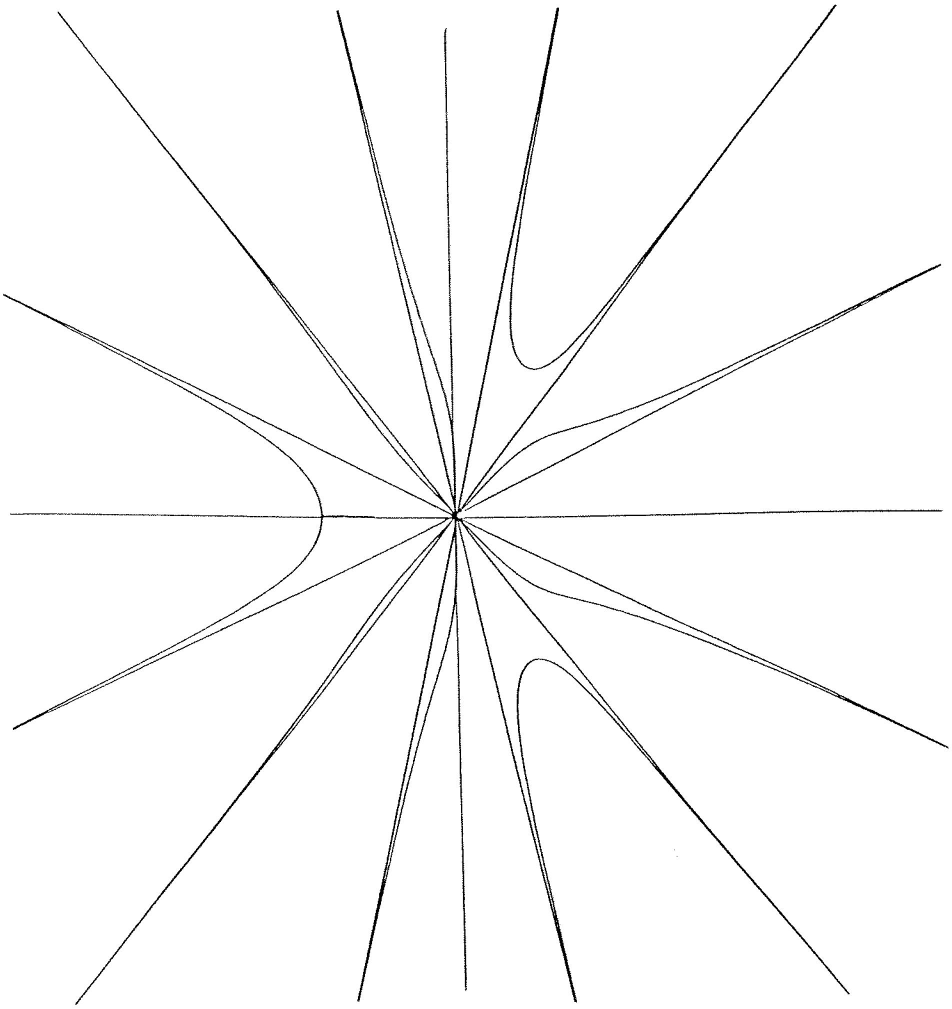


Figure 3

La liste des publications disponibles de l'I.R.E.M. de Strasbourg peut être obtenue sur simple demande à la bibliothèque (adresse au dos de la revue).
N'hésitez pas à la demander!

Excursions et incursions dans l'Analyse Harmonique d'hier et d'aujourd'hui (I)

Olivier GEBUHRER

§ 0. Pour inciter le lecteur à puiser à d'autres sources

Parler aujourd'hui de l'analyse harmonique, de son histoire et de ses prolongements contemporains est évidemment une gageure. La littérature - même la meilleure possible - est si vaste, les bifurcations si nombreuses qu'il est dérisoire a priori de chercher à en donner ne serait-ce qu'un aperçu global, à supposer que l'auteur d'un projet aussi insensé se sente de taille à l'affronter, ce qui n'est pas mon cas.
On trouvera ici quelques itinéraires possibles dans un immense massif en mouvement. Ces itinéraires reflètent le goût de l'auteur et ne prétendent aucunement forcer quelque lecteur que ce soit à s'y cantonner ou même à les suivre.
L'Analyse Harmonique constitue un immense massif en transformation permanente, largement méconnu de nos contemporains, à tel point que le nom même rencontre souvent la stupeur de l'interlocuteur, comme l'auteur l'a souventes fois observé. De cet immense massif, seuls quelques pics ont été explorés en tous sens. Ces explorations ont été si profondes que les mystères laissés en suspens paraissent insondables même avec les moyens d'aujourd'hui. Les promeneurs, peu tentés par les pics inaccessibles, peuvent s'offrir isolément ou en groupe le spectacle de vallées luxuriantes, aux beautés sans limites, sans marche forcée.

§1. De l'analyse de Fourier à la théorie des représentations.

L'affaire commence par un conte de fées. Pour y pénétrer, il faut rappeler les débuts de la théorie de la conduction de la chaleur. J'ai longtemps hésité avant de reproduire le raisonnement heuristique conduisant à l'équation de la chaleur dans une barre cylindrique : ce n'est pas le cœur du propos. Mais pour la complétude toutefois, ce rappel peut être utile.

On considère une barre homogène cylindrique isolée du milieu extérieur. Soit u(x,t) la température à l'instant t de la section droite d'abscisse x de la barre.
L'hypothèse centrale est la suivante : pendant un intervalle de temps infinitésimal, la température des sections droites situées entre deux abscisses voisines ne dépend pas du temps!!
A ce morceau choisi, on ajoute l'inévitable "l'expérience montre " que la quantité de chaleur q passant à travers une barre dont les extrémités sont tenues à deux températures constantes est proportionnelle à la différence des températures, à la surface de la section droite, à l'intervalle de

de temps et inversement proportionnelle à la longueur de la barre qui sépare les sections droites considérées.

Si K désigne la conductivité thermique de la barre ne dépendant que du matériau utilisé, on peut donc écrire :

$q = K\,[u(x + x_o,t_o) - u(x_o,t_o)]\; s\dfrac{t - t_o}{x}$.

De la sorte Q(x), quantité de chaleur passant à travers la section droite d'abscisse x_o pendant le temps $t - t_o$ s'écrit : $Q(x) = K\dfrac{\partial u}{\partial x}\, s\,(t - t_o)$

Entre deux sections droites d'abscisses x_o et $x_o + x$, la quantité de chaleur reçue pendant le temps $t - t_o$ est donc $\Delta Q = Q(x_o + x, t_o) - Q(x_o,t_o)$ (si $t - t_o <<<1$)

d'où $\Delta Q = K\, s\,(t - t_o)\,\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_o + x,t_o) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_o,t_o)\right]$

On peut encore calculer cette quantité de chaleur par une autre "méthode" : si c est la capacité thermique et ρ la densité (par unité de longueur) du matériau constituant la barre,

$\Delta Q = c\,\rho\, s\, x\,\left[u(x_o, t) - u(x_o,t_o)\right]$

Ceci résulte du "fait" que si $t - t_0 <<< 1$, les températures des sections droites situées entre les abscisses x_o et $x_o + x$ <u>peuvent être considérées comme constantes à chaque instant</u> si x est assez petit.

Finalement $K\,(t - t_o)\,\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_o + x,t_o) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_o,t_o)\right] = c\,\rho\, x\,\left[u(x_o,t) - u(x_o,t_o)\right]$ et par passage à la limite $\dfrac{K}{c\,\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_o,t_o) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_o,t_o)$. C'est l'équation de la chaleur.

N'épiloguons pas, pour le moment sur de tels "justificatifs". Il est tout de même à souligner que de telles prémisses permettent de concevoir que d'excellents esprits trouvent la physique, dans ses fondements, quelque peu étrange. Il existe aujourd'hui des présentations plus sérieuses mais elles exigent davantage de mathématiques[1]. Evidemment, le "raisonnement"précédent est si emberlificoté, si peu naturel, qu'il ne peut rien prétendre expliquer. Aussi bien le conte de fées n'est–il point là.

<u>Considérons l'équation</u> : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1) où u est une fonction REELLE de deux variables.

Ne discutons pas pour le moment le sens de cette équation et admettons qu'"elle provient de la physique". Nous allons la "résoudre" en empruntant le chemin de J. Fourier dans un Mémoire

[1] Tant pis pour les collègues qui continuent de proclamer urbi et orbi, même en DEUG que, pour les expérimentalistes, la règle de trois suffit. Je l'ai entendu. Il est inutile de protester.

resté célèbre[2]. Cherchons d'abord les solutions u qui s'écrivent $u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$ où φ et ψ sont deux fonctions réelles d'une variable.

On voit de suite que $\psi'(t)\,\varphi(x) = \varphi''(x)\,\psi(t)$. D'où $\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$.

Avant de poursuivre, il faut observer que nous ne cherchons pas la forme d'une solution "générale" de l'équation (1) mais une solution qui correspond à des données précisées et connues expérimentalement ; pour le coup, cette remarque a un sens concret.

Par exemple on peut imaginer que les deux sections droites extrêmes sont maintenues à température constante égale à 0 et que la température le long de la barre à l'instant 0 est connue en tout point.

D'où $\begin{cases} u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{où } \ell \text{ est la longueur de la barre} \\ u(x,0) = f(x) & \text{où } f \text{ est maintenant une fonction donnée.} \end{cases}$

L'équation $\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$ implique aussitôt que $\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \lambda = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$ où λ est une constante réelle (si φ et ψ sont réelles). Ceci décompose l'équation de la chaleur en deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\ \ \varphi(x) \\ \psi'(t) = \lambda\ \ \psi(t) \end{cases}$$

avec $\varphi(0)\,\psi(t) = \varphi(\ell)\,\psi(t) = 0$ pour tout t et $\varphi(x)\,\psi(0) = f(x)$ pour tout x.

Comme on veut éliminer la solution triviale, on voit que $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$. De sorte qu'en posant $\lambda = -\mu^2$, ce qui n'est possible que si $\lambda < 0$, on trouve $\varphi(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$ et $\varphi(0) = 0$ impose $A = 0$. Donc $\varphi(x) = B\sin\mu x$. Comme $\varphi(\ell) = 0$, $\mu \in \dfrac{\pi}{\ell}\mathbb{Z}$.

Posons $\mu_n = \dfrac{\pi}{\ell}n$. Alors l'équation $\psi_n'(t) = -\dfrac{\pi^2 n^2}{\ell^2}\psi_n(t)$ donne $\psi_n(t) = A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t}$.

Au bout du compte, avec l'<u>hypothèse supplémentaire</u> $\lambda \leq 0$, on trouve des solutions réelles $u_n(t) = A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t} \sin\dfrac{\pi}{\ell}nt$.

Si $\lambda > 0$ on trouve $\varphi(x) = A\,\mathrm{ch}\,\mu x + B\,\mathrm{sh}\,\mu x$ et $\varphi(0) = 0$ impose à nouveau $A = 0$; or $\varphi(\ell) = 0$ impose aussi $B = 0$ et on ne trouve rien d'autre que la solution triviale.

---

[2] "Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides" lu le 21 décembre 1807 devant l'Académie des Sciences de Paris

Cela n'empêche pas la terre de tourner et on ne se pose pas de questions.
Donc on a trouvé sous certaines conditions des solutions particulières de l'équation (1) satisfaisant ce qu'il est convenu d'appeler les conditions initiales (conditions aux limites convient mieux) $u_n(0,t) = u_n(\ell,t) = 0$ à savoir $u_n(x,t) = A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} t}$.
Evidemment la condition $u(x, 0) = f(x)$ n'a pas été réalisée et n'a jamais été utilisée.
Maintenant J.Fourier déclare que si on pose $u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x,t)$ on obtient la solution "générale" de l'équation (1) et que si l'on cherche la solution particulière vérifiant la condition $u(x,0) = f(x)$, on aura $u(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} = f(x)$.

D'où, toujours selon J.Fourier $A_p = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi p x}{\ell} dx$ comme "on le voit" en intégrant terme à terme la série définissant u.

Le continent est découvert. J.Fourier a été précédé par d'Alembert, Bernoulli, Euler mais enfin, à partir du Mémoire de J.Fourier, les choses vont vraiment changer du tout au tout.
L'histoire proprement intellectuelle de l'itinéraire de J.Fourier EN SON TEMPS reste à écrire. Après tout, ce qui précède est une longue suite d'invraisemblances, de hasards forcés et on ne trouve dans aucun livre la moindre remarque critique, même pas dans le remarquable ouvrage de A.Dahan–Dalmédico[3] qui, il est vrai, se propose davantage un tour d'horizon cursif.
Plus grave est le fait qu'à des détails près, jusqu'en Licence, c'est ainsi que l'histoire est racontée aux enfants et on ne voit pas qu'il y ait à s'étonner qu'après cela ils croient qu'"on fait les enfants par l'oreille".

Chercher des solutions particulières de l'équation (1) sous la forme $u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$ se conçoit et s'explique. On y reviendra. Que l'on aboutisse ainsi à fabriquer une SUITE (u_n) de solutions particulières raisonnables, modulo des contorsions variées, soit.

Mais écrire $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x,t)$ est extravagant et ce n'est pas un problème de convergence

[3] A.Dahan-Dalmédico / J.Peiffer *Une histoire des mathématiques - Routes et dédales* Seuil 1986

comme on l'écrit généralement. Ne parlons pas de la formule $A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx$ qui soulève des questions redoutables, et encore moins des doutes sérieux soulevés par l'affirmation selon laquelle toute fonction f se représente sur l'intervalle $[0,\ell]$ par la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}$.

Il faut quand même se rendre compte que la solution u est une fonction de <u>deux</u> variables et qu'il n'y a pas de raison sérieuse a priori **pour qu'on puisse espérer trouver cette solution comme somme de fonctions qui s'écrivent comme produit de deux fonctions d'une variable** !

Il y a encore bien plus sérieux. Si l'on veut que l'équation de la chaleur (1) ait un sens, il faut supposer que u est $\mathcal{C}^1$ en t, $\mathcal{C}^2$ en x, et si l'on veut être de mauvaise foi, disons qu'a priori on va chercher une <u>solution</u> $\mathcal{C}^\infty$ <u>des deux variables</u> (cela ne résoud aucune des difficultés mais au moins c'est raisonnable). Or les solutions particulières u_n sont ANALYTIQUES et prétendre reconstituer toute SOLUTION $\mathcal{C}^\infty$ de deux variables comme somme de fonctions analytiques est faire preuve soit d'une intuition géniale soit d'une ignorance absolue des questions mathématiques considérées.

Evidemment, aucun des contemporains de J.Fourier ne pouvait penser en ces termes et si le Mémoire fameux est devenu célèbre, c'est pour de toutes autres raisons que nous examinerons un peu plus loin. Enfin, notons que la question la plus redoutable de toutes a été seulement évoquée : la fonction u(x,0) = f(x) est <u>donnée</u>. Ecrire que $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}$ pour $x \in [0,\ell]$ soulève d'immenses questions dont certaines furent pressenties par les contemporains et par de grands auteurs antérieurs (voir la polémique Euler, d'Alembert, Bernoulli autour de l'équation des cordes vibrantes). Avant d'aller plus loin et après avoir joué le rôle de l'avocat général intraitable jouons celui de l'avocat.

D'abord, en se reportant à l'excellent livre élémentaire (mais un peu ancien) de G. P.Tolstov (coll. Dover) on peut voir que la méthode invraisemblable précédente fournit des solutions raisonnables à une foule d'autres équations "provenant" de la physique.

Par exemple la vibration d'une membrane rectangulaire est régie par l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = c^2 \Delta u$ où $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Mais , si l'on s'en tient à l'équation de la chaleur, un observateur perspicace ne manquera pas de noter que si $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \sin\frac{\pi nx}{\ell} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t}$, alors non seulement en faisant t = o dans cette équation on trouve $u(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \sin\frac{\pi nx}{\ell}$, mais on voit, au moins formellement qu'EN FAISANT TENDRE t vers 0 on trouve $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = u(x,0)$.

Notons que si on considère $t < 0$, on trouve que le terme $e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t}$ explose lorsque n augmente indéfiniment, ce qui est au moins l'indice d'un problème sérieux. Toutefois, en persévérant dans la mauvaise foi la plus intégrale, on peut considérer qu'il n'y a pas de "sens physique" à faire tourner les aiguilles d'une montre à rebours et que l'histoire n'est pas un phénomène réversible. Autrement dit, "se non è vero, è bene trovato".

Donnons maintenant une idée d'une situation un peu plus générale que nous empruntons encore à Georgi.P.Tolstov (op.cité). Considérons l'équation aux dérivées partielles $P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\frac{\partial u}{\partial x} + Q\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ où P, Q, R sont des fonctions continues de x.

La recherche des solutions de cette équation est sujette à <u>deux</u> types de conditions :

1) Des conditions frontières :

$$\begin{cases} \alpha u(a,t) + \beta\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0 \text{ , pour tout } t \geq 0 \\ \gamma u(b,t) + \delta\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = 0 \end{cases}$$

2) Des conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

où f, g sont des fonctions continues et où les nombres α, β et γ, δ respectivement ne sont pas simultanément nuls ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$) .

Comme dans l'exemple de l'équation de la chaleur on peut chercher des solutions particulières u de la forme $u(x,t) = \Phi(x)\,\Psi(t)$ satisfaisant <u>les conditions frontières</u> (1).

On obtient $P\,\Phi''\,\Psi + R\,\Phi'\,\Psi + Q\,\Phi\,\Psi = \Phi\,\Psi''$

et par suite $\frac{P\,\Phi''+R\Phi' +Q\Phi}{\Phi} = \frac{\Psi''}{\Psi} = \lambda \in \mathbb{R}$

On voit donc que les équations différentielles d'une variable du type $P\,\Phi'' + R\Phi' + Q\Phi = \lambda\Phi$ sont amenées à jouer un rôle essentiel.

On suppose maintenant que la fonction P ne s'annule pas sur l'intervalle où l'on cherche une solution : cette condition est naturelle dans un premier temps ; si P possède des zéros sur l'intervalle en question, en chacun de ces zéros l'équation initiale dégénère en une équation d'ordre 1. (N'évoquons même pas ce qui se passe si P s'annule sur un sous intervalle de l'intervalle de définition).

On peut donc supposer $P > 0$ sur l'intervalle considéré ; résolvons le système $p = rP$, $p' = rR$ où r est une nouvelle fonction inconnue auxiliaire . On voit que $\frac{p'}{p} = \frac{R}{P}$ et $r = \frac{p}{P}$

En multipliant par r, l'équation initiale $P\,\Phi'' + R\Phi' + Q\Phi = \lambda\Phi$ devient

$r\,P\Phi'' + r\,R\Phi' + r\,Q\Phi = \lambda r\Phi$ et en posant $q = rQ$ on a $p\Phi'' + p'\Phi' + q\Phi = \lambda r\Phi$

ce qui s'écrit encore $\frac{d}{dx}(p\Phi') + q\Phi = \lambda r\Phi$

Les opérateurs différentiels du second ordre qui interviennent dans ce type de questions sont donc du type suivant :

$L\Phi = \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\Phi}{dx}\right) + q\Phi\right]$; p et q sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Une classe particulière de tels opérateurs L est la suivante :

$L\Phi = \frac{1}{A}\,\frac{d}{dx}\left(A\,\frac{d\Phi}{dx}\right) + B\Phi$ où A est maintenant une fonction $\mathcal{C}^1$, B une fonction continue.

Les opérateurs différentiels du second ordre <u>linéaires</u> de la première forme ont été étudiés par les mathématiciens français Sturm et Liouville dans une série de Mémoires communs. Avant de poursuivre, observons que tout ceci se passe au début du XIXème siècle! Je ne peux que renvoyer le lecteur (la lectrice) au merveilleux ouvrage "Fourier Analysis" du grand mathématicien britannique actuel T.W.KÖRNER (Cambridge University Press) pour des détails significatifs sur les objections rencontrées par Fourier à ses débuts, ainsi qu'à de bien d'autres excursions que celles qui sont proposées ici.

Toutefois que l'on me permette cette note personnelle qui prétend expliquer comment et pourquoi les idées de Fourier étaient dans l'air à défaut d'être mathématiquement satisfaisantes (on a vu plus haut que ce n'est pas principalement un problème de rigueur!). Le début du XIXème siècle est marqué en France par un essor impétueux des technologies industrielles dans leur phase primitive. L'idée que le monde est à la fois simple et compréhensible <u>est une idée</u>

COMMUNE. On peut à bon droit considérer que cette idée est l'un des legs fondamentaux de la Révolution française.
Les équations différentielles d'une variable avaient fait l'objet de travaux antérieurs, bien connus des physiciens et mathématiciens français de ce temps. La linéarité était aussi familière comme idée que celle du mouvement terrestre autour du soleil. Les spécialistes ne la PENSAIENT PAS mais ils étaient convaincus que ce principe gouvernait le monde sensible. Quoi de plus naturel que de chercher à résoudre une équation de plusieurs variables en cherchant à se ramener à des équations d'une variable ? Quoi de plus naturel que de faire la somme des solutions obtenues ? Depuis longtemps, les spécialistes s'étaient rendus compte qu'un phénomène physique astreint à des conditions extérieures connues possède une loi bien définie, calculable ANALYTIQUEMENT, c'est–à–dire par une formule composée de fonctions simples. En d'autres termes, l'idée de l'existence et de l'UNICITÉ de la solution d'un problème physique concret faisait partie du patrimoine intellectuel collectif. Il ne faut pas s'étonner qu'à peine quelques années plus tard Cauchy démontrera des théorèmes de cette nature.
Ayant perdu le sens d'un monde devenu soudain infiniment complexe, en mouvement violent et chaotique, les idées communes de l'époque nous paraissent aujourd'hui stupéfiantes de simplicité et on s'étonne, parfois à bon droit, qu'elles aient pu conduire à l'embryon de résultats extraordinaires.

Revenons maintenant aux opérateurs de Sturm–Liouville. Ces deux grands mathématiciens ne s'y sont pas intéressés par la vertu d'une intuition aussi géniale que démoniaque. Laguerre, Hermite avaient mis en évidence des suites de polynômes aux propriétés toutes spéciales ; ils étaient définis par des relations de récurrence, de sorte qu'on pouvait les calculer à un ordre arbitraire. Des calculs élémentaires montraient qu'on les obtenait comme solutions particulières d'équations différentielles linéaires d'ordre 2. L'étude de leurs zéros incita Sturm et Liouville à étudier des équations différentielles linéaires du type indiqué.
Il apparaît que résoudre un problème du type suivant :

$$\begin{cases} L\Phi = \dfrac{d}{dx}(p\dfrac{d\phi}{dx}) + q\Phi = \lambda r\Phi \\ \alpha\Phi(a) + \beta\Phi'(a) = 0 \end{cases}$$

conduit à une suite (λ_n) de valeurs réelles pour lesquelles on peut trouver une solution Φ_n non nulle .
Il est maintenant raisonnable de s'attendre à voir s'établir une étonnante similitude entre le problème de la réduction d'un opérateur linéaire en dimension finie et le problème précédent. Cette question sera traitée plus en détail dans la deuxième partie de l'article mais à ce stade faisons deux observations :

Exemple 1 : L'opérateur $L = \frac{d}{dx}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ cherchons les solutions u_λ de l'équation $\begin{cases} Lu = \lambda u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Pour que ce problème ait un sens a priori il faut supposer que les solutions u_λ sont dérivables (on ne suppose pas que u soit $\mathcal{C}^1$). Cette seule hypothèse de dérivabilité des solutions conduit aussitôt à observer que ces solutions sont en fait $\mathcal{C}^1$ car $\frac{d}{dx} u = \lambda u$ et λu est continue.

Par récurrence, il s'ensuit que les solutions cherchées sont $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle où elles existent. L'avocat général qui cherche des arguments frappants pour démolir l'extravagante simplicité de la méthode de J.Fourier est maintenant sur le grill pour l'opérateur L qui est, il est vrai, linéaire du premier ordre.

Or la surprise , comme chacun le sait ne s'arrête pas là. De $Lu = \lambda u$ et $u(0) = 1$ on déduit que $u'(0) = \lambda$ et par récurrence $u^{(n)}(0)$ qui a maintenant un sens vaut : $u^{(n)}(0) = \lambda^n$.

Regardons alors la série de Taylor de u :

son terme général s'écrit $\frac{\lambda^n x^n}{n!}$ et par suite définit une série entière normalement convergente sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Sa somme $E_\lambda(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n x^n}{n!}$ satisfait $E_\lambda(0) = 1$ et $LE_\lambda = \lambda E_\lambda$ et c'est l'unique solution du problème posé, qui est donc non seulement $\mathcal{C}^\infty$ mais analytique sur $\mathbb{R}$. Terrifiante observation pour l'avocat général.

Poussons l'analyse un peu plus loin. Posons $\Phi_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Nous vérifions que $L\Phi_n = \Phi_{n-1}$, $L\Phi_0 = 0$. Les fonctions Φ_n sont donc reliées à L.

Si maintenant nous prenons une fonction f (sur laquelle nous ne précisons pas d'hypothèse) et que nous formons la série de Taylor de f ASSOCIEE à l'opérateur L, nous pouvons écrire $\sum_{n\geq 0} \Phi_n(x) L^n f(y) = A_x f(y)$ où L^n n'est autre que LoLo......oL (n facteurs) et A_x est un opérateur linéaire formel pour le moment.

Réécrivons la formule précédente en explicitant L et Φ_n :

$A_x f(y) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} (\frac{d}{dx})^n f(y) = f(x+y)$. Autrement dit, la connaissance des fonctions Φ_n associées à l'opérateur différentiel L permet de RECONSTITUER l'opération de groupe additif de $\mathbb{R}$. Nous n'en dirons pas plus pour l'instant.

Exemple 2 : Un opérateur intégral.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur [0,1].

On pose $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$.

V est donc un opérateur linéaire de E dans E. Observons immédiatement qu'il n'est pas surjectif puisque Vf est $\mathcal{C}^1(]0,1[)$ si $f \in E$.
Résolvons pour $\lambda \in \mathbb{C}$ l'équation $Vf = \lambda f$.
Nous voyons aussitôt que les solutions f de cette équation sont $\mathcal{C}^\infty(]0,1[)$ et nous avons $\lambda f'(x) = f(x)$ pour $x \in]0,1[$. De la sorte $f(x) = Ke^{\frac{1}{\lambda}x}$ pour $x \in]0,1[$. Or $Vf(0) = 0 = \lambda f(0)$.

Si $\lambda \neq 0$ ceci impose $K = 0$ et il n'y a pas d'autre solution à l'équation $Vf = \lambda f$ que la fonction nulle pour $\lambda \neq 0$.

Pour $\lambda = 0$, la situation est évidemment identique car $\int_0^x f(t)dt = 0$ pour $x \in [0,1]$ implique $f = 0$.

On voit donc sur ce deuxième exemple, qu'il est difficile de simplifier, que les problèmes de Sturm–Liouville obéissent à des règles très profondes ; il n'y a pas d'espoir a priori de généraliser naïvement la théorie de la réduction des opérateurs linéaires en dimension finie à la dimension infinie.
Le lecteur averti reconnaîtra aussitôt que les deux exemples précédents sont voisins.
L'exemple 2 traite de façon camouflée de l'opérateur $L = \frac{d}{dx}$; seule change la condition initiale incorporée dans la définition de V.

Dans l'exemple 2 on résoud le problème $\begin{cases} L = \frac{d}{dx} \\ u(0) = 0 \end{cases}$

alors que dans l'exemple 1 on résoud le problème $\begin{cases} L = \frac{d}{dx} \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Nous quittons dorénavant temporairement cette grande chaîne du massif de l'Analyse Harmonique contemporaine pour nous intéresser à l'analyse de Fourier proprement dite.
Dans l'exemple de la barre cylindrique, nous avons vu l'apparition du développement d'une fonction "arbitraire" en série de sinus. Le lecteur (la lectrice) croira sur parole qu'en changeant les conditions aux limites, les cosinus entrent en scène et la question devient :
peut–on représenter une fonction "arbitraire" comme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n f(x)\, e^{inx}$?

peut–on représenter une fonction "arbitraire" comme $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n f(x)\, e^{inx}$?

Ce problème a occupé les mathématiciens du monde entier pendant un siècle et demi ; comme on va le voir, il y a matière.

Commençons d'abord par faire connaissance avec les fonctions $\chi_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$.

D'abord $\chi_n(x + y) = \chi_n(x)\, \chi_n(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Rappelons que l'on peut munir $\mathbb{R}$ d'une relation d'équivalence en posant $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est encore muni d'une structure de groupe additif par passage au quotient de la loi de groupe sur $\mathbb{R}$. Le nouveau groupe obtenu s'appelle le tore à une dimension et se note $\mathbb{T}$ (ce n'est pas un sous groupe de $\mathbb{R}$!!).

On vient de voir que les fonctions χ_n sont des homomorphismes de $\mathbb{T}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^{\times} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Ce sont évidemment des fonctions continues. Y'en–a–t–il d'autres ? La réponse est négative mais ce n'est pas si trivial à démontrer. C'est trivial si on cherche <u>des fonctions</u> $\mathcal{C}^1$ qui satisfont à l'équation $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$; $\chi(0) = 1$.

Par dérivation par rapport à x (χ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$) on trouve $\chi'(x+y) = \chi'(x)\chi(y)$.

Prenons alors $x = 0$; il vient $\chi'(y) = \chi'(0)\chi(y)$. Si $\chi'(0) = 0$, l'unique solution est la fonction constante **1**. Si $\chi'(0) \neq 0$, on a $\chi(x) = c e^{\chi'(0)x}$ et $c = 1$ car $\chi(0) = 1$.

Donc $\chi(x) = e^{\chi'(0)x}$ et $\chi'(0)$ est nécessairement imaginaire pur si $\chi(x) \in \mathbb{C}^{\times}$.

Puis on termine en observant que $\chi'(0) \in i\mathbb{Z}$ si on veut que χ soit une fonction définie sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. ($\chi(x)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de x dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

Les fonctions $\{\chi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ sont appelées les caractères du groupe $\mathbb{T}$. On voit qu'elles sont indexées par le sous–groupe discret $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$.

§ 2. **Vers la compréhension du problème de la série de Fourier**

Soit $F(x) = \sum\limits_{|n|\leq N} a_n\, \chi_n(x) = \sum\limits_{|n|\leq N} a_n e^{inx}$ où N est un entier positif fixé. F est trivialement continue, même $\mathcal{C}^\infty$, il n' y a pas de problème à la compréhension de $\sum\limits_{|n|\leq N}$.

Les fonctions de ce type s'appellent les <u>polynômes trigonométriques</u>.

Calculons $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\, e^{-ipx}\, dx$ (recette de Fourier).

On trouve aussitôt $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\, e^{-ipx}\, dx = a_p$ pour $|p| \leq N$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\, e^{-ipx}\, dx = 0$ si $|p| > N$.

Par suite, un polynôme trigonométrique est somme de sa série de Fourier. Cette observation triviale conduit à une question dont la réponse ne l'est pas. Toute fonction continue sur $\mathbb{T}$ est–elle limite de polynômes trigonomériques ? Limite? En quel sens ? Après bien des efforts, le milieu du XIXème siècle avec les travaux de Cauchy, de Riemann, de Weierstrass avaient conduit à identifier la convergence uniforme. Mais même cette question est redoutable.
Les polynômes trigonométriques approximent–ils les fonctions continues uniformément sur le tore ? Et si oui, peut–on affirmer la convergence uniforme de la série de Fourier d'une fonction continue vers cette fonction ?
Soit maintenant une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$, c'est–à–dire une fonction 2π–périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculons $\hat{f}^{(p)}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(p)}(x)\, e^{-inx}\, dx$. Par intégration par parties, on voit aussitôt que $\hat{f}^{(p)}(n) = (-in)^p \hat{f}(n)$. Or $|\hat{f}^{(p)}(n)| \leq \sup\limits_{x \in \mathbb{T}} |f^{(p)}(x)| = M_p$. De sorte que $\hat{f}(n) = O(|n|^{-p})$ lorsque $|n| \to \infty$ pour tout entier $p \geq 0$. Il en résulte la proposition suivante.

<u>Proposition</u> :
<u>Soit</u> $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$; alors la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{T}$ vers une fonction S(f) continue sur $\mathbb{T}$, telle que $\widehat{S(f)}(n) = \hat{f}^{(p)}$ pour $n \in \mathbb{Z}$

<u>Démonstration</u>
Posons $S_N(f)(x) = \sum\limits_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{-inx}$; si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$, $\hat{f}(n) = O(|n|^{-2})$ lorsque $|n| \to \infty$ d'après ce qui précède et par suite la série de fonctions $S_N(f)$ converge normalement sur $\mathbb{T}$ vers une fonction continue S(f). On peut alors écrire $S(f)(x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-inx}$ pour $x \in \mathbb{T}$ et calculer $\widehat{S(f)}(p)$ par interversion de limite et d'intégrale. On voit de suite que $\widehat{S(f)}(p) = \hat{f}(p)$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

Avec cette proposition, on est sorti du cadre des polynômes trigonométriques, mais que dire de S(f) ? Peut–on seulement affirmer qu'elle est $\mathcal{C}^2(\mathbb{T})$? Dériver terme à terme ne donne rien. Par contre , si f est $\mathcal{C}^\infty$, alors S(f) est $\mathcal{C}^\infty$ d'après la remarque préliminaire à la proposition

($|\hat{f}(n)| = O(|n|^{-p})$;($|n| \to \infty$ pour TOUT entier $p \geq 0$). On peut encore moins affirmer que $S(f) = f$ même si f est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$. Et s'il s'avère que tel n'est pas le cas, toute la construction de Fourier est réellement une extravagance (un point pour l'avocat général).

L'histoire qui conduit le mathématicien allemand Lejeune–Dirichlet, issu d'une famille vraisemblablement française émigrée, à son célèbre Mémoire reste à écrire et ce qui suit ne prétend nullement en être un substitut.

Remarquons que si f est ANALYTIQUE dans le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ alors $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ où les a_n sont les coefficients de Taylor de f en 0.

Posant $z = \rho e^{i\theta}$, nous avons $f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n \geq 0} a_n \rho^n e^{in\theta}$ et en changeant de notations,

si $F_\rho(\theta) = f(\rho e^{i\theta})$ pour $\rho < 1$, nous avons $F_\rho(\theta) = \sum_{n \geq 0} a_n (\frac{\rho}{r})^n r^n e^{in\theta}$; $\rho < r < 1$ de sorte que

$$F_\rho(\theta) = \sum_{n \geq 0} \hat{F}_r(n) (\frac{\rho}{r})^n e^{in\theta} \text{ où } \hat{F}_r(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

et de plus $F_r(\theta) = \lim_{\rho \to r-} F_\rho(\theta) = \sum_{n \geq 0} \hat{F}_r(n) e^{in\theta}$.

Cette fois , tout est légitime : la fonction $(\rho,\theta) \to f(\rho e^{i\theta})$ est continue sur $[0, r] \times \mathbb{T}$ et le lecteur se convainct aisément à l'aide de la proposition précédente qu'il y a bien convergence normale de la série de Fourier de F_r sur le tore.

Tout est donc limpide pour les FONCTIONS ANALYTIQUES (second point pour l'avocat général).

Nous quittons maintenant l'ordre historique strict. Soit f une fonction CONTINUE sur $\mathbb{T}$.

On définit $\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ $(n \in \mathbb{Z})$, formule de Fourier, et $|\hat{f}(n)| \leq \| f \|_\infty$ pour $n \in \mathbb{Z}$, où $\| f \|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{T}} | f(t) |$.

C'est bien loin de suffire à permettre d'affirmer que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ converge. MAIS ON PEUT TENTER DE S'INSPIRER DE L'EXEMPLE DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Rien n'empêche a priori de considérer la série suivante $F_f(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, r^{|n|}\, e^{in\theta}$ pour $r < 1$;

on observe de suite que cette série se décompose en

$F_f^1(r,\theta) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)\, r^n\, e^{in\theta}$ et $F_f^2(r,\theta) = \sum_{n<0} \hat{f}(n)\, r^{-n}\, e^{in\theta}$

De sorte que F_f^1 représente un prolongement analytique à l'intérieur du disque unité d'un "objet" sur le cercle dont les coefficients de Fourier sont

$$\hat{\gamma}_1(n) = \begin{cases} \hat{f}(n) & \text{si } n \geq o \\ o & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

et F_f^2 représente un prolongement <u>antiholomorphe</u> à l'intérieur du disque unité d'un"objet" sur le cercle dont les coefficients de Fourier sont $\hat{\gamma}_2(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq o \\ \hat{f}(n) & \text{si } n < 0 \end{cases}$

Nous avons apparemment remplacé un problème d'apparence simple en un problème plus compliqué car pour le moment nous ne SAVONS RIEN DES espèces animales <u>vivant</u> sur le cercle représentées par γ_1 et γ_2. RIEN ne permet de dire que γ_1 (resp.γ_2) <u>sont des fonctions</u>.

En tout cas F_f est bien définie et converge normalement dans tout disque fermé de rayon < 1, centré en O. On peut "calculer" F_f autrement .

$F_f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} f(t)dt$. On pose alors $P_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$; $r < 1$

$$P_r(\theta) = \frac{1}{1-r\,e^{i\theta}} + r\,e^{-i\theta}\frac{1}{1-r\,e^{-i\theta}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

De la sorte $F_f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f(t)dt$, où P_r est une fonction continue sur $\mathbb{T}$, POSITIVE et

telle que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)d\theta = \hat{P}_r(0) = 1$!

Les connaisseurs ont bien sûr compris que P_r n'est autre que le "noyau" de Poisson découvert par Poisson (contemporain de Cauchy) qui cherchait à obtenir l'analogue de la formule intégrale de Cauchy pour les parties REELLES des fonctions analytiques dans le disque.

On peut encore écrire $F_f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)f(\theta-t)dt$.

Sur cette écriture on voit que F_f apparaît comme la moyenne pondérée par P_r des translatés de f par les points du tore !

Nous avons donc obtenu la formule suivante : $F_f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)f(\theta-t)dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, r^{|n|}\, e^{in\theta}$

Bien entendu si $r \to 1$ $(r<1)$, le passage à la limite terme à terme permet d'imaginer que $F_f(r,\theta)$ tend à ressembler à $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{in\theta}$

D'un autre côté $\lim P_r(\theta) = \begin{cases} 0 \text{ si } \theta \not\equiv 0\ (2\pi) \\ +\infty \text{ si } \theta \equiv 0\ (2\pi) \end{cases}$

Qu'est–ce que tout cela peut bien signifier ?

Ni Cauchy, ni Poisson n'ont réellement songé à ce qui précède : l'influence des fonctions analytiques étaient encore dominante dans l'esprit du temps et les fonctions continues restaient mystérieuses ; elles venaient tout juste d'être comprises dans une définition mathématique prenant du CHAMP PAR RAPPORT A L'EMPIRISME. Certainement, L.A. Cauchy pensait que la série de Fourier d'une fonction continue converge vers la fonction.

Restons encore pour un instant dans le cadre des fonctions analytiques. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction analytique dans $D(0,1)$.

Il est facile de voir que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n\geq 0} |a_n(f)|^2\, r^{2n}$ pour tout $r<1$.

Maintenant soit f une fonction continue sur le tore ; on peut la "prolonger" dans le disque unité de la façon précédente : $F_f(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|}\, e^{in\theta}$.

Et de plus on peut écrire $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(r,\theta)|^2\, d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2\, r^{2n}$ $(r<1)$. On ne peut rien faire à première vue du terme de gauche mais on peut observer que $|F(r,\theta)| \leq \|f\|_\infty$ car $\int P_r(\theta,t)\, dt = 1$ et $P_r(u) \geq 0$! De la sorte, on obtient $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2\, r^{2n} \leq \|f\|_\infty^2$ pour tout $r < 1$.

Par suite si $P_N^2(r;f) = \sum_{|n|\leq N} |\hat{f}(n)|^2\, r^{2n}$, on a $\sup_{r<1} P_n^2(r;f) = \sum_{|n|\leq N} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_\infty^2$

et par conséquent on vient d'obtenir le théorème suivant :

<u>Théorème</u> (Riemann)
Soit f une fonction continue sur le tore ; si $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ désigne la suite de ses coefficients de Fourier, alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2 < +\infty$ et en particulier, $\lim_{n\to\infty} |\hat{f}(n)| = 0$.

Ce résultat (le comportement de $\hat{f}(n)$ lorsque $|n| \to\infty$) a été historiquement obtenu par B. Riemann par une toute autre méthode.

Evidemment c'est bien meilleur que l'inégalité triviale du début $|\hat{f}(n)| \le \| f \|_\infty$ puisque maintenant $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2\right)^{1/2} \le \| f\|_\infty$.

(Rien n'empêcherait a priori de songer à étendre ce qui précède aux fonctions BORNEES sur le tore ; le lecteur est invité à réfléchir à ce qui empêche cette extension, naturellement fausse).
On ne sait toujours rien sur la série de Fourier et sa convergence éventuelle pour les fonctions continues mais on peut <u>suspecter</u> que $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2$ est liée à $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt$. On peut même conjecturer que $\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2$ pour f continue.
Continuons d'investiguer cette conjecture naturelle.
Regardons l'espace $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2 <+\infty \}$ où les $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des suites à valeurs complexes.
En posant $\| (a_n)\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2\right)^{1/2}$ on définit à peu près trivialement une NORME sur l'espace vectoriel $\ell^2(\mathbb{Z})$ et il est aisé de s'assurer que, pour cette norme, $\ell^2(\mathbb{Z})$ est <u>complet</u>. Mais il n'en est rien pour l'espace vectoriel $C(\mathbb{T})$ muni de la norme $\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$! Pourtant la conjecture précédente nous dit que l'application $f \to (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ de $C(\mathbb{T})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie linéaire ; la seule conséquence à en tirer est que CETTE ISOMETRIE N'EST PAS SURJECTIVE.
Notons enfin que la conjecture en question, aussi naturelle qu'elle puisse paraître (elle est trivialement vraie pour un polynôme trigonométrique), donne beaucoup plus que tout ce qui précède car alors si $\hat{f}(n) = 0$ pour $n\in\mathbb{Z}$, $f = 0$! Or on a vu plus haut que si $f \in C^2(\mathbb{T})$ la série de

Fourier converge uniformément vers une fonction CONTINUE S(f) telle que $\widehat{S(f)}(n) = \hat{f}(n)$; $n \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, S(f) = f !! (Ce n'est pas si mal si on considère que l'examen brutal de la série de Fourier de f ne dit rien a priori sur le caractère différentiable de sa somme !!).
Mais si f est un polynôme trigonométrique, la conjecture est une trivialité et si f est un polynôme trigonométrique alors $F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f(t)\,dt$ converge trivialement vers f lorsque $r \to 1$.

Tout nous pousse donc à étudier plus précisément $F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f(t)\,dt$.

Or $F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)f(\theta-t)\,dt$. De sorte que $F(r,\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)\big[f(\theta-t) - f(\theta)\big]\,dt$ en utilisant le fait que $\int P_r(u)\,du = 1$. Sous cette forme on voit que si $f(\theta - t) - f(\theta)$ est petit en valeur absolue, on pourra conclure des choses.
Nous avons alors

$$|F(r,\theta) - f(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi}\Big\{ \int_{|\theta-t|<\alpha} P_r(t)|f(\theta-t) - f(\theta)|dt + \int_{|\theta-t|\geq\alpha} P_r(t)|f(\theta-t) - f(\theta)|\,dt \Big\}.$$

La seconde intégrale est la plus préoccupante car f ne peut rien nous dire.
On commence par des banalités :

$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|\geq\alpha} P_r(t)\big[f(\theta-t) - f(\theta)\big]\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|\geq\alpha} P_r(t)\,dt \times 2\,\|f\|_\infty$ où $P_r(u) \geq 0$ joue à nouveau un rôle fondamental.

Or $\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|\geq\alpha} P_r(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geq\alpha} P_r(\theta-t)\,dt$.

Or $Pr(\theta-t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t) + r^2} \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos\alpha + r^2}$ si $|\theta - t| \geq \alpha$.

De la sorte $\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|\geq\alpha} P_r(t)\,dt \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos\alpha + r^2}$ pour tout $r < 1$.

Finalement, $\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|\geq\alpha} P_r(t)\,dt = 0$ quelque soit $\alpha > 0$.

Maintenant le lecteur (la lectrice) est convaincu(e) que $\lim\limits_{r\to 1}|F(r,\theta) - f(\theta)| = 0$ pour tout θ si f est continue et cela peut être prouvé et énoncé sous la forme du théorème suivant :

Théorème :

Pour toute fonction continue f sur le tore, il existe une suite de polynômes trigonométriques $(P_N(f))_{n\in \mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{N\to\infty} \| P_N(f) - f\|_{\infty} = 0$

C'est l'analogue du théorème de Weierstrass d'approximation des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par des polynômes.

C'est alors que l'on rencontre l'avocat général et l'avocat du procès Fourier dans une discussion franche et animée.

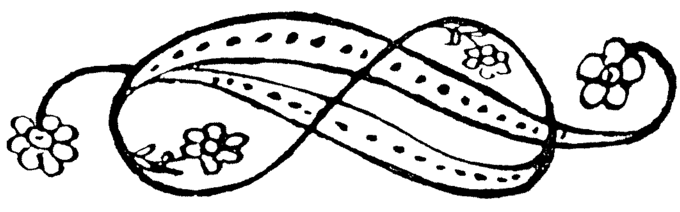
L'avocat général : Vous venez de prouver que toute fonction continue est analytique! Car les polynômes trigonométriques sont des fonctions analytiques!

L'avocat : Il n'en est rien! Vous en êtes resté au théorème de Weierstrass! Nous ne prouvons pas que la suite de fonctions analytiques associées aux polynômes trigonométriques converge uniformément dans le disque unité! mais seulement sur la frontière !

L'avocat général : Soit. De toute façon, vous ne savez toujours rien dire de la convergence de la série de Fourier vers la fonction même si celle–ci est continue !

....

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE



Motif décoratif alsacien

L'ÉQUATION DE DEGRÉ 4 ET LE TÉTRAÈDRE RÉGULIER

Marcel KRIER
Maître de conférences à l'U.F.R. de Mathématique de Strasbourg

Voici une petite particularité géométrique.

1.– Lien entre le triangle équilatéral et l'équation du troisième degré

Considérons une équation du troisième degré à coefficients réels, mise sous forme canonique c'est-à-dire sans termes en x^2 :

$$X^3 + pX + q = O. \tag{1}$$

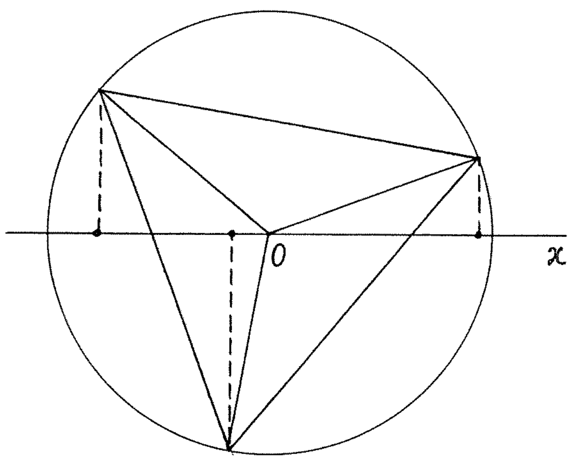
On sait que, quand cette équation a trois racines réelles, p est strictement négatif car le polynôme dérivé a deux racines réelles. Une méthode de résolution numérique consiste alors à se ramener au cas de l'équation

$$4Y^3 - 3Y - \cos a = 0 \text{ (où } \cos a \text{ est connu)} \tag{2}$$

dont les racines sont $Y_k = \cos\frac{a+2k\pi}{3}$, $k = 1, 2, 3$.
On se ramène de (1) à (2) en posant $X = \sqrt{\frac{-4p}{3}}Y$, puis $\cos a = \frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}$.

Question : montrer que la condition $-1 \leq \frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}} \leq 1$ exprime justement que (1) a ses trois racines réelles.

Cette méthode de résolution peut s'interpréter ainsi : considérons dans le plan un axe Ox avec un vecteur unitaire $\vec{i}$. Il existe un triangle équilatéral ABC de centre O tel que les racines de (1) soient les mesures algébriques sur Ox des projections orthogonales des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sur cet axe. Il est facile de voir que ce triangle est unique, à la symétrie près autour de Ox. Un petit calcul montre que $OA^2 = OB^2 = OC^2 = -4p/3$. La dimension du triangle ne dépend que de la valeur de p.



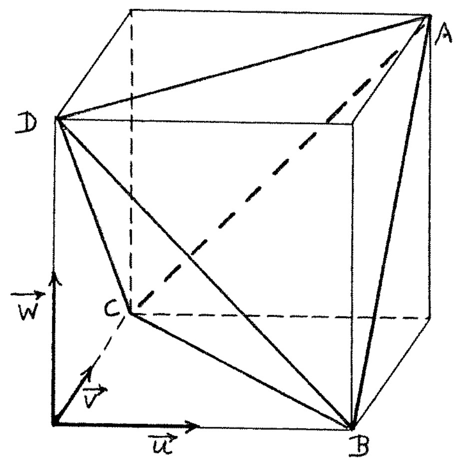
2.– L'équation de degré 4

Peut-on trouver quelque chose d'analogue pour l'équation du quatrième degré? Parmi les diverses généralisations que l'on peut envisager, l'une consiste à se demander si, étant donnée une équation de degré 4 avec toutes ses racines réelles et un axe Ox dans l'espace, sur lequel les quatre racines ont été placées, il existe un tétraèdre régulier tel que les projections orthogonales sur Ox des quatre sommets soient ces quatre racines. Nous allons montrer que c'est effectivement le cas.

3.– Projections des sommets d'un tétraèdre régulier

Considérons dans l'espace euclidien de dimension 3 un axe Ox de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$ et un tétraèdre régulier $ABCD$ de centre O. Soient $a = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{OB}$, $c = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{OC}$, $d = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{OD}$. Comme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O}$ on voit que $a + b + c + d = 0$. Inversement, a, b, c et d étant connus, comment retrouver le tétraèdre? La géométrie peut nous donner une idée (en fait, la théorie des groupes) : étant donné un tétraèdre régulier $ABCD$ de centre O, les quatre sommets et leurs symétriques par rapport à O sont les sommets d'un cube. Or, il semble plus agréable d'aller rechercher un cube qu'un tétraèdre.
Si on désigne par $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs unitaires sur les arêtes du cube et par 2 le côté du cube, on a

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\ ;\ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}\ ;\ \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}\ ;\ \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}.$$



En posant $Y_1 = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{u}$, $Y_2 = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{v}$, $Y_3 = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{w}$, on a

(3) $a = Y_1 + Y_2 + Y_3,\ b = Y_1 - Y_2 - Y_3,\ c = -Y_1 + Y_2 - Y_3,\ d = -Y_1 - Y_2 + Y_3$

d'où Y_1, Y_2 et Y_3 en fonction de a, b, c et d (n'oublions pas que $a + b + c + d = 0$).

(4) $\quad Y_1 = \dfrac{1}{4}(a + b - c - d),\ Y_2 = \dfrac{1}{4}(a - b + c + d),\ Y_3 = \dfrac{1}{4}(a - b - c + d).$

Remarquons que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2). \tag{5}$$

Ces quelques formules suffisent à notre analyse, nous pouvons passer à la synthèse qui s'effectuera en deux étapes 4.– et 5.–

4.– Quadruplets de nombres réels

Considérons quatre nombres réels a, b, c, d tels que

$$a + b + c + d = O \text{ et } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Introduisons les trois nombres Y_j par les formules (4). On a $Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 1$, donc Y_1, Y_2 et Y_3 s'interprètent comme les cosinus directeurs d'un vecteur $\overrightarrow{i}$ dans un repère orthonormé $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. En renversant cette phrase, on peut dire qu'étant donné un vecteur unitaire $\overrightarrow{i}$ dans l'espace, il y a au moins un triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ formant une base orthonormée, de sorte que Y_1, Y_2, Y_3 soient les mesures algébriques des projections orthogonales de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sur $\overrightarrow{i}$. A partir d'un tel triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, considérons les points $ABCD$ définis par

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \ ; \ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \ ; \ \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \ ; \ \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}.$$

Ces points, avec leurs symétriques par rapport à O sont les sommets d'un cube, d'arête 2 et le tétraèdre régulier $ABCD$, de centre O, a les projections de ses sommets sur l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ en les quatre points a, b, c et d respectivement. L'arête du tétraèdre vaut $2\sqrt{2}$.

5.– Énoncé en termes d'équation

Soit une équation de degré 4 ayant quatre racines réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sans terme de degré 3 (par translation sur les racines, on s'y ramène facilement)

$$X^4 + pX^2 + qX + r = 0. \tag{6}$$

On a certainement $p < 0$ puisque le polynôme dérivé a trois racines réelles. Les relations entre coefficients et racines donnent d'ailleurs

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = O, \ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = p,$$
$$\beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta + \alpha\beta\gamma = -q, \text{ et } \alpha\beta\gamma\delta = r$$

d'où $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = -2p$.
En posant $\alpha = a\sqrt{\frac{-p}{2}}$, $\beta = b\sqrt{\frac{-p}{2}}$, $\gamma = c\sqrt{\frac{-p}{2}}$, $\delta = d\sqrt{\frac{-p}{2}}$ on a $a + b + c + d = 0$ et $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ et par argument d'homothétie on peut donc énoncer :
les quatre racines de (6) sont les mesures algébriques des projections orthogonales sur un axe des sommets d'un tétraèdre régulier d'arête $= 2\sqrt{-p}$.
Question subsidiaire : examiner le cas $p = 0$.

6.– La résolution de l'équation de degré 4

Il serait dommage de s'arrêter alors que nous sommes à deux doigts de pouvoir résoudre algébriquement cette équation (5).
Reprenons les formules (4) appliquées à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$Z_1 = \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma - \delta),\ Z_2 = \frac{1}{4}(\alpha - \beta + \gamma - \delta),\ Z_3 = \frac{1}{4}(\alpha - \beta - \gamma + \delta).$$

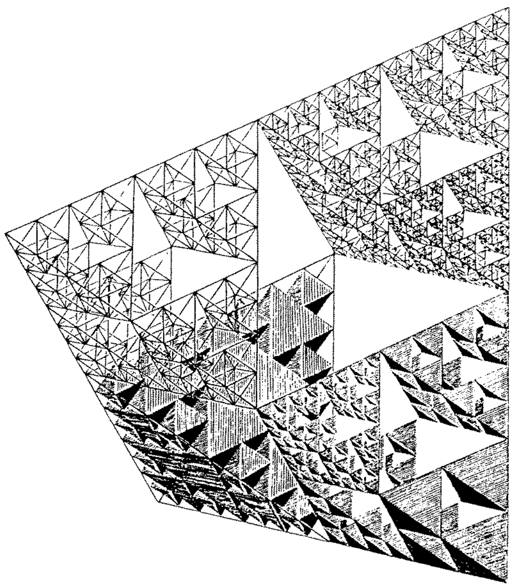
On voit que les Z_j^2 sont les solutions d'une équation de degré 3 assez facile à établir.
Il suffit de voir que

$$\begin{aligned} Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 &= -p/2 \\ Z_1^2 Z_2^2 + Z_2^2 Z_3^2 + Z_3^2 Z_1^2 &= p^2 - 4r \\ Z_1 Z_2 Z_3 &= -\frac{1}{8}q. \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs aboutir à cette même méthode de résolution (ramener la résolution de l'équation (6) à celle d'une équation de degré 3) grâce à l'identité remarquable

$$\begin{aligned} &(X - u - v - w)(X - u + v + w)(X + u - v + w)(X + u + v - w) \\ &= X^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)X^2 - 8uvwX + u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2). \end{aligned}$$

C'est une méthode qui remonte à Euler.



"Tétraèdre fractal 30 × 34,5."
Extrait du livre : *Espaces gravés*
de Patrice Jeener
paru chez Cédic/Nathan en 1986.
Ce graveur est souvent présent aux
"Journées Nationales de l'A.P.M.E.P.".

LE THEOREME DE THALES : COMMENT EST-IL ENSEIGNE EN EUROPE ? (*)

Hélène DERUAZ et Nicole KOGEJ

Le groupe "Europe" travaille à l'IREM de Lyon et réunit des collègues enseignant pour la plupart en collège ou lycée internationaux. Nous accueillons de nombreux élèves étrangers, en particulier européens, c'est pourquoi nous nous intéressons à l'étude comparée de l'enseignement des mathématiques dans différents pays.

Le cas du théorème de Thalès montre une diversité assez grande dans les approches, les énoncés et les types d'exercices, et peut expliquer certaines difficultés d'adaptation spécifiques rencontrées par nos élèves étrangers.

L'analyse qui suit concerne quatre pays d'Europe (Allemagne, Grande-Bretagne, Italie et Espagne) et a été menée à partir de manuels de mathématiques, mais aussi enrichie par des commentaires ou des réflexions de certains de nos élèves.

Nous avons choisi d'y faire figurer des énoncés d'exercices qui nous ont paru assez représentatifs des exercices proposés dans ces manuels, ou qui sont peut-être moints posés en France sous cette forme, ce qui peut nous permettre de faire évoluer nos "stocks" d'exercices traditionnels.

En annexe, un extrait du "Lexique de Mathématiques" de Nicole Kogej, regroupant le vocabulaire relatif à ce chapitre (ce lexique est publié chez Aléas éditeur, 15 quai Lassagne 69001 Lyon au prix de 35.- F, port non compris).

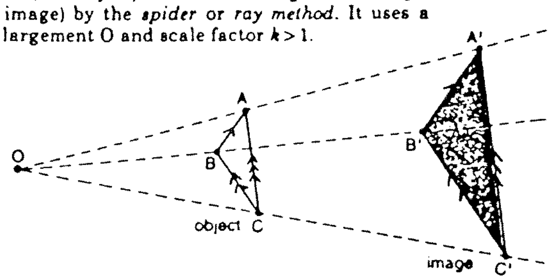
GRANDE-BRETAGNE

L'expression "Théorème de Thalès" est inconnue des élèves anglais, pendant tout le "tronc commun" d'enseignement qui conduit au diplôme du G.C.S.E. (General Curriculum of Secondary Education, présenté vers l'âge de 15 ans, à un niveau équivalent à notre fin de Seconde en France)
On étudie par contre les notions d'homothétie ("enlargement"), et celles de triangles et de figures semblables.

(*) Cet article est extrait de la brochure inter-IREM "Autour de Thalès" (1995), diffusée par l'IREM de Lyon, Université Lyon I, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex.

Enlargement is a *transformation*, i.e. a change. In an enlargement the size of the object usually changes and the scale factor of the enlargement describes the size of the change. The shape of the object is always unchanged in an enlargement. So the object and its image are similar.
Matching angles in the object and image are equal, corresponding lengths are in proportion.

For example, in this diagram triangle ABC (the object) has been enlarged to triangle A'B'C' (the image) by the *spider* or *ray method*. It uses a centre of enlargement O and scale factor $k > 1$.



Matching lengths have been changed in the same way, i.e. by the scale factor k.

Lengths from centre	**Lengths on shape**
$OA' = kOA$	$A'B' = kAB$
$OB' = kOB$	$B'C' = kBC$
$OC' = kOC$	$C'A' = kCA$

Since $k > 1$, all the *image lengths* are greater than the matching *object lengths*.
Matching sides of the image and object are parallel.
A'B' is parallel to AB, B'C' is parallel to BC, C'A' is parallel to CA.

Une homothétie est une transformation, c'est-à-dire un changement. Dans une homothétie, la dimension de l'objet change, en général, et le rapport d'homothétie décrit la dimension du changement. La forme de l'objet est toujours conservée dans une homothétie. Ainsi l'objet et son image sont semblables.
Les angles correspondants sur l'objet et sur l'image sont égaux, les longueurs correspondantes sont proportionnelles.

Par exemple, sur cette figure, le triangle ABC (l'objet) a été agrandi en un triangle A'B'C' par la méthode *de l'araignée ou des rayons*. Le centre d'homothétie est O, et le rapport k>1.

Les longueurs ont toutes été multipliées par le même facteur k.

Longueurs depuis le centre sur les figures

Comme k>1, toutes les longueurs images sont plus grandes que les longueurs de l'objet.
Les côtés correspondants de l'image et de l'objet sont parallèles.

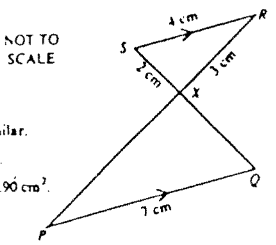
Sont examinés successivement les cas où le rapport k est un entier positif, puis une fraction entre 0 et 1, puis négatif. On apprend à déterminer le centre d'homothétie connaissant 2 points et leurs images, ainsi que le rapport entre les aires et les volumes pour des figures homothétiques de l'espace.
L'étude des "triangles semblables" constitue ensuite un cas particulier important : "Lorsqu'une droite parallèle à l'un des côtés coupe un triangle, alors un triangle semblable apparaît. On peut le vérifier sans connaître les mesures des côtés des triangles (...) en utilisant les propriétés des angles." Les trois cas de similitude des triangles sont énumérés. Aucune allusion n'est faite à la notion de projection, et la réciproque permettant de montrer que deux droites sont parallèles n'est pas mentionnée. Signalons aussi que le "théorème des milieux" dans un triangle n'a pas de statut spécial, il n'est pas cité comme cas particulier.

Exercices :

1 - Exercice d'examen (G.C.S.E., juin 1993)

In the diagram, SR is parallel to PQ.
$SR = 4$ cm, $SX = 2$ cm, $RX = 3$ cm and $PQ = 7$ cm.
(i) Explain why the triangles RSX and PQX are similar.
(ii) Calculate the length of PX and the length of QX.
(iii) It is also given that the area of triangle RSX is $2.90\ cm^2$.
Calculate the area of triangle PQX,
correct to two significant figures

NOT TO SCALE



2 - Reconnaître des triangles semblables parmi une série de figures (dessinées sans respecter les dimensions ni l'échelle), où l'on indique les 3 côtés, ou 2 angles, ou 2 côtés et 1 angle.

3 - Deux figures homothétiques étant données, trouver le centre et/ou le rapport d'homothétie.

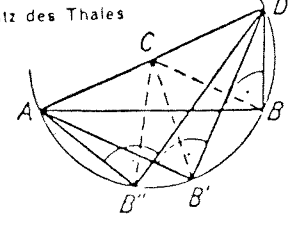
4 - Deux cylindres C et D sont semblables, et de hauteurs 8 cm et 32 cm respectivement.
Le volume de C est 73,5 cm 3. Quel est le volume de D ?

5 - Placer les points A(1,4), B(1,1), et C(3,1) ; puis compléter cette multiplication de matrices :
Placer les 3 nouveaux points obtenus A' , B' , C' . Que dire du triangle A' B' C' ?

ALLEMAGNE

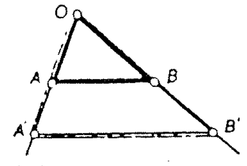
En Allemagne, le "théorème de Thalès" existe, mais c'est un tout autre théorème qu'en France ! Il s'agit du théorème sur les triangles rectangles dont l'hypoténuse est diamètre d'un cercle : "Jeder Winkel im Halbkreis ist ein Rechter".

Satz des Thales

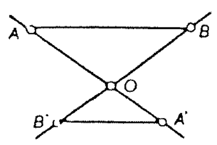


Ce qui correspond à notre "théorème de Thalès" se nomme en allemand "die Strahlensätze" ("théorème des faisceaux de droites concourantes"). Il est étudié en 9ème année (équivalent de notre 3ème), préparé par le théorème des milieux dans un triangle, et par des exercices de partage de segments en n parties égales.

S 1 **Wird ein Geradenbüschel von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte auf einer Gerade wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf irgend einer andern** (Fig. 32.4 und 5).
$\overline{OA}:\overline{OA'} = \overline{OB}:\overline{OB'}$; $\overline{OA}:\overline{AA'} = \overline{OB}:\overline{BB'}$
S 1 gilt auch, wenn man *Geraden* durch *Strahlen* ersetzt.



32.4.

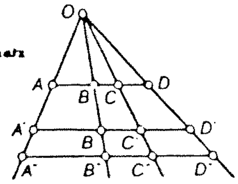


32.5.

S1 Si un faisceau de droites concourantes est coupé par deux parallèles, alors le rapport des longueurs des segments formés sur l'une des droites est égal au rapport des longueurs des segments correspondants sur n'importe quelle autre droite du faisceau : OA:OA' = OB:OB' ; OA:AA' = OB:BB'
S1 s'applique aussi en remplaçant "droites concourantes" par "demi-droites de même origine"

S2 (deuxième théorème) : énoncé analogue, mais concernant les segments parallèles [AB] et [A'B'] :
AB:A'B' = OA:OA' = OB:OB'.

33.4. Zum 3. Strahlensatz



S3 (troisième théorème) : variante avec plus de deux droites ou demi-droites concourantes en O : AB:BC = A'B':B'C'.

La réciproque est indiquée, avec une mise en garde sur les hypothèses nécessaires à bien vérifier.
Sont ensuite développées de très nombreuses applications : théorème dans l'espace, partage de segments et divisions harmoniques, utilisations du théorème en technologie et pour diverses mesures concrètes (compas d'agrandissement/réduction, pantographe, échelles de cartes , etc...), forme vectorielle du théorème, et enfin l'étude des composées d'homothéties, et du groupe des homothéties/translations ; cependant les manuels semblent beaucoup plus ambitieux que ne peuvent l'être les professeurs allemands avec 3 heures par semaine ...!

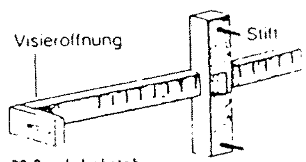
Exercices :

1 - Déterminer x par le calcul, et faire une figure correspondante, pour chacune des équations

2 - On donne 3 segments de longueurs a, b et c. Construire un segment de longueur :

3 - Un petit pois de 6mm de diamètre cache complètement la pleine lune, lorsqu'on le tient à 66 cm des yeux. Quel est le rapport entre le rayon de la Lune et celui de la Terre, sachant que la distance entre la Terre et la Lune vaut 6O fois le rayon terrestre ?

4 - Un vieil instrument, le *bâton de Jacob* (voir figure), était utilisé au Moyen-Age pour mesurer des hauteurs et des distances. Fabriquer un modèle, et expliquer son utilisation. Donner des exemples de mesures et de calculs.

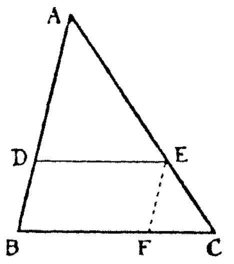


39.2. Jokobstab

5- Montrer <u>vectoriellement</u> que dans un parallélogramme ABCD, si le point E partage le côté AB dans un rapport k:1 (k est un réel positif), alors DE partage la diagonale AC dans le rapport (k+1):1

ESPAGNE

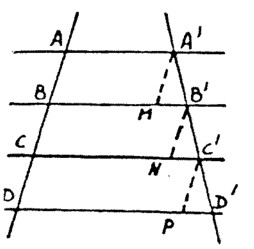
Teorema de Tales.—*Toda recta paralela a un lado de un triángulo* **determina otro triángulo semejante al opuesto.**

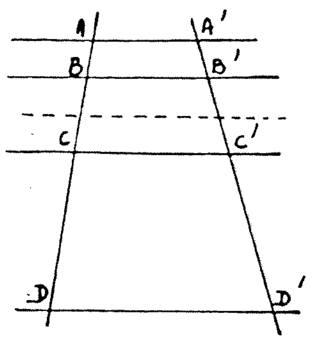


Hipótesis: DE ∥ BC (fig. 158).

Tesis: $\hat{D} = \hat{B}$; $\hat{E} = \hat{C}$. $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$.

Demostración:





<u>Enoncé 1-</u>
<u>Théorème de Thalès :</u>
Toute droite parallèle à un côté d'un triangle détermine un autre triangle semblable à celui-ci .

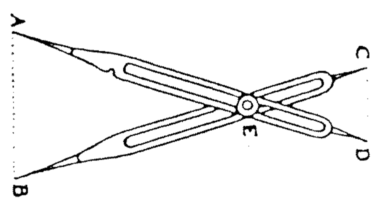
<u>Enoncé 2-</u>
<u>Teorema de Tales :</u>
I-Si dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas de forma tal que determinan en una de ellas segmentos iguales, los segmentos determinados en la otra son también iguales.

II-Si cortamos dos rectas cualesquiera, por varias rectas paralelas, los segmentos correspondientes determinados en ambas, son proporcionales

<u>Théorème de Thalès :</u>
I-Si deux droites quelconques sont coupées par plusieurs droites parallèles de telle sorte qu'elles déterminent sur l'une d'elles des segments de même mesure alors les segments homologues sur l'autre sont aussi égaux .
II-Si deux droites quelconques sont coupées par plusieurs droites parallèles, les segments correspondants déterminés sur chacune d'elles sont proportionnels.

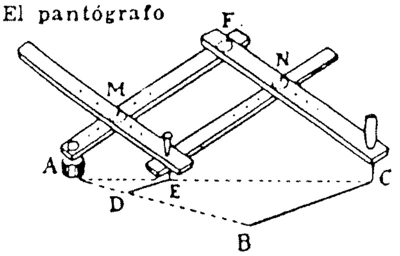
Là aussi, bien que le mot ne soit pas explicitement prononcé, la projection est présente :

- dans le cas du <u>premier énoncé</u>, un travail important sur la notion de segments proportionnels et sur les propriétés des proportions fait suite à :"notre :la projection d'une échelle régulière est une échelle régulière" pour en arriver "à la projection d'une échelle non régulière". Le triangle apparaît alors comme un cas particulier. La réciproque est citée et évoquée comme un nouvel outil pour démontrer que deux droites sont parallèles .("Notre théorème des milieux" est présenté comme un simple exemple du cas particulier triangle cité plus haut). Viennent alors les triangles semblables, l'énoncé du théorème de Thalès et les cas de similitude des triangles (les mêmes que pour l'Italie !) Les triangles semblables conduisent alors à démontrer le théorème suivant et sa réciproque :"si un faisceau de droites concourantes coupe deux droites parallèles alors il détermine sur elles des segments proportionnels". Dans les applications, le compas de réduction et le pantographe sont cités.



El compás de reducción

El pantógrafo



- dans le cas du deuxième énoncé, le théorème est le point de départ, puis sont évoqués les partages de segments en parties égales puis en parties proportionnelles "Notre énoncé du théorème de Thalès, façon 3° ", apparaît alors,après les cas de similitude des triangles, mais sans évoquer de réciproque .

Exercices :

1 - Calculer la mesure des côtés du petit triangle formé en prolongeant les deux côtés non parallèles d'un trapèze dont les bases mesurent b et b' et les côtés non parallèles m et n .

2 - Un point C situé entre A et B divise le segment [AB] de 45 cm dans le rapport AC/CB = 2/3. Calculer CA et CB et la distance de C au milieu O de [AB] .

3 - M est un point de la droite (AB) mais extérieur au segment [AB] et tel que MA/MB =9/5 ,sa distance à O, milieu de [AB], est 35 cm. Trouver AB, MB et MA

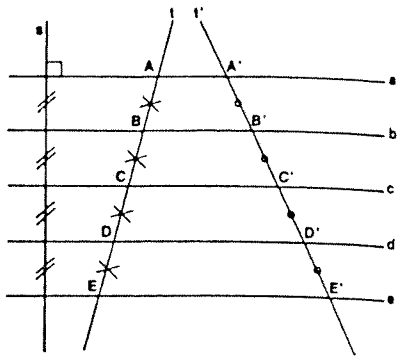
4 - Dans un losange ABCD tracer une parallèle à la diagonale [AC] qui coupe (AB) en E et (BC) en F. Par ces points tracer les parallèles à (BD); celles-ci.coupent (AD) enH et (CD) en G. Démontrer que AH x CD = AD x CG .

5 - Démontrer que les droites menées parallèlement aux côtés d'un triangle à partir du point d'intersection de ses médianes divisent chaque côté en trois parties égales .

ITALIE

Il teorema di Talete : I segmenti staccati da un fascio di rette parallele su due trasversali sono direttamente proporzionali.

Le théorème de Thalès : Les segments déterminés par un réseau de droites parallèles sur deux sécantes à ces droites sont directement proporitionnels.



Le rette a, b, c, d, e sono tra loro parallele ed equidistanti.

$AC = 2AB$ così come pure $A'C' = 2A'B'$;
$AE = 4AB$ così come pure $A'E' = 4A'B'$;
$AD = \frac{3}{2}AC$ così come pure $A'D' = \frac{3}{2}A'C'$;
ecc.

Le relazioni precedentemente scritte possono venir poste sotto la forma di proporzioni:

$AC : AB = A'C' : A'B'$, $AE : AB = A'E' : A'B'$, $AD : AC = A'D' : A'C'$, ecc.

Même si le mot projection n'est pas prononcé, c'est bien l'idée de : "la projection d'une échelle régulière est une échelle régulière" qui l'introduit (avec ses corollaires : "notre réciproque du théorème des milieux " , suivi de "notre théorème des milieux " - seul le mot corollaire est employé -)

L'application au triangle se fait alors aussitôt après le théorème de Thalès énoncé ci-dessus, mais sans évoquer de réciproque.

Suivent les triangles semblables et les cas de similitude:

1 - deux angles respectivement égaux
2 - deux angles égaux compris entre deux côtés respectivement proportionnels
3 - les trois côtés respectivement proportionnels.

Exercices :

1 - Démontrer que dans un triangle quelconque les milieux des trois côtés et le pied de l'une des trois hauteurs sont les sommets d'un trapèze isocèle .

2 - Soient P, Q et R les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et[CA] d'un triangle quelconque. Montrer que les points C et P sont équidistants de la droite (QR) .

3 - Montrer que deux des quatre triangles obtenus à l'intérieur d'un trapèze, après le tracé de ses diagonales, sont semblables .

4 - Démontrer que le point d'intersection P des diagonales d'un trapèze est situé au milieu du segment passant par P, parallèle aux bases et dont les extrémités sont sur les côtés non parallèles du trapèze .

5 - Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D et de grande base [AB] .Soit E le point de [AB] tel que AE = DC, soit M le milieu de [BC]. Montrer que les triangles AMD et EMB sont isocèles .

PERCORSI DI MATEMATICA : ALGEBRA-GEOMETRIA-INFORMATICA, par L.Tonolini et M.Certo chez Minerva Italica, tome 1.

Les articles de Marc Guinot (n° 78 et 79 de '*L'Ouvert*') ont suscité un vif intérêt de la part de nombreux lecteurs. C'est pourquoi nous signalons ses livres parus chez Aléas Editeur, 15 quai Lassagne – 69001 LYON.

Le paradoxe de Banach-Tarski
et une série de trois livres "*arithmétique pour amateur*" :

Pythagore, Euclide et toute la clique.
"Ce livre s'adresse avant tout à des amateurs éclairés (c'est-à-dire ayant fait une ou deux années d'études mathématiques après le baccalauréat). Il ne s'agit que d'une initiation à la théorie des nombres au cours de laquelle nous abordons (mais avec tous les détails souhaitables et sans rien admettre qui ne soit assuré) quelques-unes des grandes questions qui ont agité et qui agitent encore les arithméticiens : les nombres premiers et leur diversité, les divers aspects de la notion de divisibilité, les sommes de carrés, le problème de Fermat et celui de Waring et jusqu'au théorème plus récent de Mordell-Weil."

Les "resveries" de Fermat.
"Ce serait une erreur de réduire l'œuvre arithmétique de Fermat au "grand théorème", et nous axerons nos propos, dans cet ouvrage, autour de trois thèmes : le petit théorème de Fermat, les sommes de deux carrés et la descente infinie."

"Ce diable d'homme" d'Euler.
"Si la théorie des nombres n'occupe qu'une petite partie de l'œuvre gigantesque d'Euler, celui-ci ne cessa jamais de s'y intéresser, de 1730 à sa mort... revenant sans cesse sur ses sujets de prédilection : somme de carrés, divisibilité des nombres entiers, équations diophantiennes, fractions continues, équation de Pell, théorie des partitions, développement eulérien de la "fonction zêta", etc... A l'exception de tout ce qui concerne les intégrales elliptiques (d'un niveau un peu trop élevé...), des fractions continues et de l'équation de Pell, cet ouvrage aborde la plupart des questions précédentes."

Français	Anglais	Allemand	Espagnol	Italien
angles alternes internes	interior alternate angles	Wechselwinkel (m)	ángulosalternos internos	angoli interni alterni
angles correspondants	corresponding angles	Stufenwinkel (m)	ángulos correspondientes	angoli corrispondenti
cas de similitude des triangles	rules for two triangles to be similar	Ähnlichkeitssätze bei Dreiecken	casos de semejanza de los triángulos	criteri di similitudine dei triangoli
centre (m) d'homothétie	centre of enlargement	Streckungszentrum (n)	centro de homotecia	centro di omotecia
concourant	concurrent; converging	zusammenlaufend; schneidend	concurrente ; convergente; secante	convergente
correspondant	corresponding	korrespondierend	correspondiente	corrispondente
couper (se)	to cut; to meet	schneiden (sich)	cortarse; encontrarse	segarsi; incontarsi; intersecarsi
couper au milieu	to bisect	halbieren	bisecar	dimezzare
determiner	to determine	bestimmen	determinar	individuar
égal	equal	gleich	igual	uguale
faisceau (m) de droites concourantes	set of straight lines which meet at the same point	Strahlenbündel	haz de rectas convergentes	fascio di rette convergenti
homologue	corresponding; transformed	korrespondierend	homólogo	omologo
homothétie (f)	enlargement similarity; dilatation	Streckung (f)	homotecia	omotetia (f)
intersection (f)	intersection	Schnittstelle (f); Durchschnitt (m)	intersección	intersezione (f)
joindre	to join; to connect	verbinden	unir; juntar	congiungere
milieu (m)	mid point	Mittelpunkt (m)	punto medio	punto medio
opposé	opposite	gegenüberliegend	opuesto	opposto
pantographe (m)	pantograph	Pantograph (m)	pantógrafo	pantografo (m)
parallèle à	parallel to	parallele zu	paralelo a	paralelo a
rapport (m) d'homothétie	scale factor of an enlargement	Streckungsfaktor	razón de homotecia	rapporto di omotetia
réseau de droites parallèles (m)	set of parallel straight lines	Menge (f) von parallele Gerade	conjunto de rectas paralelas	fascio (m) di rette parallele; fascio impropio
sécante (f)	secant; transversal	Sekante (f); schneidende Gerade (f)	secante; transversal	secante (f); trasversale (f
triangles congruents (égaux)	congruent triangles	kongruente Dreiecke	triángulos congruentes (iguales)	triangoli uguali
triangles semblables	similar triangles	ähnliche Dreiecke (n)	triángulos semejantes	triangoli simili

AFFIRMER - JUSTIFIER - RAISONNER

Claudine KAHN

A l'occasion de la distribution des prix du Rallye Mathématique d'Alsace 1995, Claudine Kahn, qui fait partir de l'équipe d'organisation et de correction, a souligné un défaut qui risque de prendre de l'ampleur. C'est une mise en garde qui peut intéresser tout professeur de mathématiques. Nous reproduisons là toute son intervention orale.

Le Rallye Mathématique est une compétition originale inspirée des Olympiades Internationales. Elle donne l'occasion à des lycéens de chercher et de résoudre pendant quatre heures trois exercices faisant appel tant à leurs facultés inventives qu'à leurs connaissances. Les énoncés sont concis pour laisser aux candidats une grande liberté d'approche.

Nous, organisateurs et correcteurs, sommes souvent fort agréablement surpris par l'imagination des candidats à réinvestir et organiser leurs acquis dans des activités fort éloignées de celles proposées dans le cadre scolaire. Les copies sont évaluées selon plusieurs critères. Je voudrais ici développer celui du raisonnement, en particulier de la démonstration qui est fondamental en mathématiques.

Pour illustrer mon propos je choisis l'exercice 2 des classes de première (voir énoncé en fin de texte). Monsieur Windstein commentera dans un instant le choix des mots et des terminaisons de l'énoncé (*). Les deux derniers paragraphes contiennent les hypothèses de ce problème. Pour simplifier l'écriture, les cinq statues dont les noms sont inspirés par ceux portés par différents directeurs de l'I.R.E.M. de Strasbourg, sont remplacés par leurs initiales. La traduction de ces hypothèses est donnée dans les deux premières lignes de la solution.

Cette transcription n'a pas été une source de difficulté pour les candidats. A partir de là, il s'agit de construire une démonstration pour évaluer la distance GP. Bien entendu il va de soi, que ce qui sera affirmé devra être justifié par un raisonnement déductif, qui peut entraîner des calculs et des applications de théorèmes.

Je n'entrerai pas dans le détail de la solution proposée page 7, que nous avons trouvée dans quelques copies, qui ont bien sûr été sélectionnées. Tandis que certains élèves ont utilisé la même démarche, mais ont procédé par valeurs approchées. Lorsqu'ils ont obtenu l'égalité $\cos\hat{B} = -\frac{1}{4}$, ils ont constaté que cette valeur n'est pas remarquable. S'ils avaient, à ce moment là, poussé leur réflexion un peu plus loin, ils auraient constaté que pour connaître $\cos b$, nécessaire à la poursuite du développement, il suffisait d'utiliser la relation fondamentale de la trigonométrie $\cos^2\hat{B}+\sin^2\hat{B} = 1$. On établit ainsi $\sin\hat{B} = \sqrt{\frac{15}{4}}$. Poussés par l'habitude d'utiliser

(*) Nous présentons un commentaire de cet énoncé en page 44.

la calculatrice, ils ont obtenu une valeur approchée de l'angle $\hat{B}$, puis une valeur approchée de $\sin \hat{B}$ et ont poursuivi leurs calculs avec des valeurs approchées.

Ces deux démarches reposent sur le même raisonnement, parfaitement rigoureux. L'une est exacte, l'autre fournit une valeur approchée, ici satisfaisante. Mais l'utilisation de valeurs approchées peut conduire à une réponse très approximative par cumul d'arrondis. Nous avons privilégié la valeur exacte.

Nous avons dans cet exercice trouvé une grave erreur reposant sur un manque de compréhension de la nature d'un raisonnement déductif. De nombreux élèves ont affirmé que l'angle $\widehat{BDP}$ est droit. Certes, on pouvait émettre cette conjecture, car sur le dessin, il semble bien voisin d'un angle droit. Mais en mathématiques, il ne saurait être question d'affirmer sans démontrer. Pourquoi alors ne pas utiliser la règle graduée pour mesurer GP? Dans les hypothèses qui proviennent de l'énoncé ne figure pas cette donnée. Si un candidat souhaite utiliser ce résultat, il doit l'établir. Dans le cas présent, il ne peut pas y arriver, car cet angle ne vaut pas $90°$. Tout développement qui repose sur le fait que le triangle BDP est rectangle est faux, même si la valeur obtenue est assez voisine de la solution exacte.

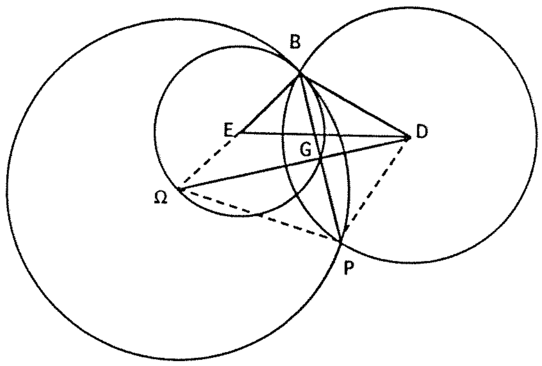
Je voudrais attirer l'attention sur cette attitude d'autant plus choquante que les candidats sont des élèves de première scientifique, dont on pourrait attendre qu'ils aient une réelle compréhension du sens de la démonstration.

Le Rallye est l'occasion, pour nous membres de l'I.R.E.M. d'avoir un autre regard sur les aptitudes des jeunes que nous formons. Les problèmes ne sont pas guidés; aux lycéens de trouver une solution rigoureuse et efficace. La lecture de certaines copies laisse à penser que le sens des mots justifier, argumenter, démontrer, n'est pas toujours bien perçu. Un travail d'enseignants par équipe est donc nécessaire pour permettre une réelle formation intellectuelle des jeunes. C'est là un souci de l'I.R.E.M.

Mais le Rallye est aussi l'occasion, pour les candidats, de faire des mathématiques autrement et je remercie à ce propos, tous ceux, qui par quelques mots sur leurs copies nous encouragent dans cette voie.

Exercice 2

Le Docteur Jones a trouvé dans les caves de l'**I**nstitut de **R**echerche d'**E**thnologie **M**éso-Américaine, les statues de Glesecoatl et de Pluvitepeck.
Furieux, il se rend compte qu'elles ont été ramenées du temple de Tezcatlipoca avant qu'il ne puisse mesurer la distance entre leurs emplacements. Or cette distance doit être connue très précisément car elle permet de déterminer sur un autre site, l'emplacement du trésor de Moctuzema.
Il se rend sur place et constate qu'il reste les statues de Barbisclan, Didiextla et Emilomok. Il mesure les distances et trouve 15 m entre Barbisclan et Didiextla, 10 m entre Barbisclan et Emilomok, 20 m entre Emilomok et Didiextla.
Dans ses recherches précédentes, il a découvert les règles que suivent les emplacements de statues dans les temples mayas : Emilomok doit être équidistant de Barbisclan et de Glesecoatl ; Didiextla doit être équidistante de Barbisclan et de Pluvitepeck ; Glesecoatl doit être aligné avec Barbisclan et Pluvitepek et à égale distance d'eux. Quelle était la distance entre les emplacements de Glesecoatl et de Pluvitepeck ?



HISTOIRE DU PROBLÈME II DU RALLYE (À LA MANIÈRE DE BORGES)

César TRUJILLO

Comme chaque année, le Rallye Mathématique d'Alsace a soumis trois problèmes aux élèves. Un de ceux-ci proposait un exercice de géométrie habillé pour l'occasion d'une histoire de recherche de trésor.

Ce texte subit durant son élaboration par le "Jury du Rallye", des corrections qui n'obéirent qu'au souci de présenter un monde compatible avec celui de l'Institut qui l'héberge. Nous travaillâmes sur une curieuse histoire rapportée par R. Supper au cours de la VII^e séance de travail. Lors de la VIII^e séance, dans la salle Nord-Est, C. Windstein controversa avec P. Genaux qui se moqua de la modestie du projet. A la suite de cette discussion, il nous parut absurde de jouer simplement avec les mots et C. Kahn proposa, vers la fin de la IX^e séance, de rendre compte de la configuration D.I. (Directeurs de l'I.R.E.M.). A cette idée s'ajouta celle de mélanger une langue (presque) morte avec celle, fluctuante et duale, de l'irem. Créer des noms chimériques formés en partie par des verbes ou substantifs usuels de l'I.R.E.M. et par des suffixes nahuatls –le Nahuatl étant comme vous l'ignorez sans doute la langue des Aztèques–. Notre dessein étant fixé, C. Windstein et moi-même lui consacrâmes quarante cinq minutes d'efforts hétérogènes, mais l'heure tardive nous arrêta. Notre texte était insensé et personne ne retrouva le problème de départ.

Pendant la XI^e séance, un débat maintes fois interrompu, éclata. Une partie de l'argent destiné aux prix avait été retrouvée après huit mois de recherches diverses. C. Kahn craignait que malgré cela nos fonds ne soient insuffisants, les nouvelles de la confuse réforme des classes préparatoires et une énigme logique trouaient les dialogues, le pesant capharnaüm comptable attisait la discussion. Dans le froissement de quelques feuilles blanches, encore chaudes (*) le jury lut la première version définitive du problème II.

Au premier paragraphe de notre énoncé on voit un Dr. Jones sévère dans l'une

(*) fraîchement sorties du photocopilleur.

des innombrables caves de l'Institut de Recherche en Ethnologie Masoaméricaine où il constate la présence de deux statues mystérieuses. Jones comprend soudain deux choses, la première banale, la seconde terrible : les données de l'énigme ont changé (la disposition des idoles du temple ravagé de Pézcatlipoca a été modifiée), le problème de mesure s'est transformé en un défi.

Nul n'ignore que Jones a pour patrie les innombrables films d'aventures tintinesques où la formation humaniste ou journalistique des personnages rend ce type de défi presque insurmontable. Il n'est pas exagéré non plus d'affirmer que dans ces landes la disposition des objets de culte (quel que soit celui-ci) respecte un protocole mathématique. Il est raisonnable d'imaginer que Jones s'en servira pour tenter de retrouver la distance. Le candidat est invité à déterminer par un calcul, argumenté et exact, l'emplacement du trésor de Moctezuma (appelé Moctuzema dans le problème).

Ce trésor est dans notre mémoire l'un des inaccessibles Graals de la colonisation américaine. Imaginé par Hernan Cortez, il faisait partie de l'ensemble des ruses avec lesquelles il maintint le moral de ses cinq cents soldats (dire –comme certains– qu'il évita leur fuite serait inexact, elle était impossible, Cortez avait sabordé ses bateaux). Ce trésor lui permit de pactiser avec les ennemis des Aztèques et lui donna le temps de répandre la variole, inconnue des Indiens. Il n'est pas abusif d'affirmer que cette légende fit sa fortune. Des générations de conquistadores s'usèrent vainement à sa recherche et d'innombrables écrivains réinventèrent leur époquée.

Le temple dont le dieu ne reçoit plus les honneurs des hommes nous l'imaginâmes dévoré par une forêt paludéenne et habité par quelques divinités millenaires aux noms étranges.

Glesecoatl mélange de "Glaeser" qui veut dire "fondateur du Rallye" et de "coatl" qui veut dire "serpent", animal qui comme vous le soupçonnez, est à l'origine de nos ennuis (Georges Glaeser).

Pluvitepec (écrit Pluvitepek dans le problème) issu de "Pluvinage" qui veut dire "ancien directeur de l'I.R.E.M. et "Tepec" qui doit se traduire par "colline". Cette divinité joue encore un rôle très actif dans le culte qui nous concerne. Elle est sensée intercéder pour nous dans le royaume secret et souterrain de l'Admini auprès du dieu Rec (François Pluvinage).

Barbistlan (écrit Barbisclan dans le problème) né de "Barbançon", qui veut dire "diriger l'I.R.E.M." et du suffixe "Tlan" se traduisant par "près de" ou "à côté de" (Gérard Barbançon).

Didiextla qui aurait dû s'appeler Didiecihuatl (car il s'agit de la seule femme qui ait été directrice). Le mot "Ixtla" se traduit par blanc ou blanche et "Didierjean" pourrait se traduire par "directrice précédente" (Geneviève Didierjean).

Emilomotecu (on a écrit Emilomoc) dont le nom se décompose en "Emile Urlacher" diminutif du mot "nouveau" et "motecu" qui pourrait se traduire par "seigneur".

Enfin le dieu Tézcatlipoca noir, Seigneur du miroir fumant. Il est celui qui sait. Le langage n'est pour lui que l'un des moyens par lesquels nous construisons notre réalité et par lequel –malheureusement– nous nous y enfermons, piégés par les mots et par notre cohérence raisonnée avec un discours accepté.

Pourquoi le lieu de culte d'une telle divinité sanguinaire et obscure fut choisi pour accueillir nos dieurecteurs?

Nous avons cherché à répondre de façon –certes– très obscure à des critiques et comparaisons trop faciles et trop répétées : le Rallye est élististe, le Rallye touche un public trop restreint, le Rallye développe la concurrence entre les professeurs, il n'intéresse que les élèves motivés et doués, il faut donner une image populaire des mathématiques, il faut mieux défendre la "place" des mathématiques, que devient le "niveau" des mathématiques que nous enseignons? Voilà quelques uns des arguments stéréotypés, des lieux communs usés, que les uns et les autres nous nous lançons à la figure.

Citer cette divinité a été une façon de rappeler que nous oublions souvent d'utiliser cet esprit critique et scientifique (encore des lieux revisités) que, paraît-il, nous enseignons.

Par ailleurs ce texte permet de présenter notre équipe et de raconter sa façon de travailler, à la fois sérieuse et sympathique, tout en mettant un peu à mal la légende de la Conquête par le rappel de quelques faits sans importance.

Bibliographie :
J.-L. Borges : Tlön Uqbar Orbis Tertius - Coll. Folio – Ed. Gallimard.
Encyclopedia Universalis.
Rapport du Rallye Mathématique d'Alsace 1995.
J. Soustelle - La vie quotidienne des Aztèques.

PROBLÈMES POUR NOS ÉLÈVES (...et leurs professeurs)
ACTIVITÉS EN T.S. OU POST-BAC

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Il s'agit, dans cette rubrique, de présenter des problèmes historiques ou classiques, dont la solution ne requiert pas d'autres connaissances que celles enseignées au lycée (voire au collège) et qui par conséquent, peuvent faire l'objet de travaux dans nos classes.

Le but du problème qui suit est de démontrer que le polynôme $X = x^4 + ax + b$ avec a et b **réels**, se factorise en produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels (même dans le cas où X n'a pas de racine réelle). Nous chercherons ensuite à expliciter cette factorisation par une méthode spécifique. L'ensemble du problème est inspiré des idées de Gauss (cf. le premier article de ce n° de '*L'Ouvert*' p. 1).

I. Soit f la fonction numérique réelle qui à x associe

$$X = f(x) = x^4 + ax + b.$$

1. Etudier les variations de f et en déduire que X n'a pas de racine réelle lorsque $b > \frac{3}{4}a\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$.

2. Effectuer le produit

$$(x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2)(x^2\sin\varphi + rx\sin 2\varphi + r^2\sin 3\varphi)$$

et en déduire que le polynôme $P(x)$ défini par :

$$P(x) = x^4\sin\varphi - r^3x\sin 4\varphi + r^4\sin 3\varphi$$

est divisible par $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$.

3. Démontrer que si r et φ sont deux réels vérifiant simultanément

$$(1)\ :\ r^4\cos 4\varphi + ar\cos\varphi + b = 0 \text{ et } (2)\ :\ r^4\sin 4\varphi + ar\sin\varphi = 0$$

alors $X\sin\varphi$ est identique à $P(x)$.

4. En déduire que si l'on prouve l'existence de r et φ tels que (1) et (2) soient vérifiés simultanément, alors :
– ou bien X admet deux racines réelles (éventuellement confondues),
– ou bien X admet le facteur $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$.

II. Relativement à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe U ensemble des points de coordonnées polaires (r, φ) tels que

$$(1) r^4 \cos 4\varphi + ar\cos\varphi + b = 0$$

et la courbe T ensemble des points tels que (2) : $r^4 \sin 4\varphi + ar \sin\varphi = 0$. Soit Γ le cercle de centre O et de rayon R tel que

$$(3)\ R > 1 \text{ et } R > \sqrt{2}(|a| + |b|).$$

Enfin, on désignera par u et t les fonctions de la seule variable réelle φ définies par

$$u(\varphi) = R\cos 4\varphi + \frac{a}{R^2}\cos\varphi + \frac{b}{R^3}$$
$$\text{et } t(\varphi) = R\sin 4\varphi + \frac{a}{R^2}\sin\varphi.$$

1. Etudier les variations de u pour φ appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}\right]$. En déduire, à l'aide des inégalités (3) que $u(\varphi)$ s'annule une et une seule fois sur $\left[\frac{\pi}{16}; \frac{3\pi}{16}\right]$.
Montrer de même que $u(\varphi)$ s'annule une et une seule fois sur chacun des intervalles $\left[\frac{(4k+1)\pi}{16}; \frac{(4k+3)\pi}{16}\right]$ (cf. fig., arcs de cercle épais).
Vérifier que $t(\varphi)$ ne s'annule jamais sur ces intervalles.

2. Etudier de même les variations de t sur chacun des intervalles $\left[\frac{4k}{16}\pi; \frac{4k+2}{16}\pi\right]$ et en déduire que $t(\varphi)$ s'annule une et une seule fois sur chacun de ces intervalles, alors que $u(\varphi)$ n'y est jamais nul.

3. Conclure que les courbes U et T coupent Γ chacune en huit points placés en position alternée sur le cercle Γ. Comme $\varphi = 0$ donne un point commun à T et à Γ, numérotons les seize points d'intersection de 0 à 15, de sorte que les points de T portent un numéro pair et ceux de U un numéro impair (cf. fig.).

4. Dans cette question $X = x^4 - 9x + 18$.
a) Exprimer $\cos 4\varphi$ et $\sin 4\varphi$ en fonction de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. En déduire que les courbes U et T ont pour équation cartésienne respectivement

$$(U)\quad x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 9x + 18 = 0$$
$$(T)\quad y(4x^3 - 4xy^2 - 9) = 0.$$

b) Dessiner les courbes U et T en les ramenant aux représentations graphiques des fonctions

$$y = \pm\sqrt{3x^2 \pm \sqrt{8x^2 + 9x - 18}} \text{ (quatre fonctions, pour } U)$$
$$\text{et } y = 0 \text{ ou } y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{9}{4x}} \text{ (trois fonctions pour } T).$$

5. On revient au cas général $X = x^4 + ax + b$.
En admettant que, comme pour l'exemple ci-dessus, les courbes U et T sont formées de plusieurs branches et que si l'une de celle-ci rentre dans le cercle Γ par l'un des points numérotés, elle en ressort nécessairement par un autre de ces points, démontrer par l'absurde que U et T ont au moins un point d'intersection dans la partie supérieure (respectivement inférieure) du cercle Γ.

III. On se propose de factoriser $X = x^4 + ax + b$ sur $\mathbb{R}$. On supposera $b \neq 0$. D'après la démonstration ci-dessus il s'agit de trouver r et φ tels que simultanément

$$(1)\ : r^4 \cos 4\varphi + ar\cos\varphi + b = 0 \text{ et } (2) : r^4 \sin^4 \varphi + ar \sin\varphi = 0.$$

1. Quelle conséquence entraîne pour X le fait que $\sin\varphi = 0$?
On n'étudiera dans la suite que les situations où $\sin\varphi \neq 0$.

2. Montrer que pour $\varphi \neq \frac{k\pi}{3}(k \in \mathbb{Z})$ on a

$$r^4 = b\frac{\sin\varphi}{\sin 3\varphi} \text{ et } r = -\frac{b}{a}.\frac{\sin 4\varphi}{\sin 3\varphi}.$$

En déduire que φ vérifie l'équation

$$a^4 \sin\varphi(\sin 3\varphi)^3 = b^3(\sin 4\varphi)^4.$$

3. Calculer $\sin 3\varphi$ et $\sin 4\varphi$ en fonction de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.
Soit $y = \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$. Montrer que y vérifie l'équation

$$(3) \quad a^4 y^3 = b^3(y-1)^4(y+1)^2.$$

Pour $y \neq 0$, posons $z = y + \frac{1}{y}$. Montrer que z vérifie l'équation

$$(4) \quad z^3 - 2z^2 - 4z + 8 - \frac{a^4}{b^3} = 0.$$

Nous poserons dans la suite $p = \frac{a^4}{b^3}$.
Montrer que y n'existe que pour z tel que $|z| \geq 2$.

4. Etudier les variations des fonctions θ_1 et θ définies par

$$\theta_1(z) = z^3 - 2z^2 - 4z + 8 \text{ et } \theta(z) = \theta_1(z) - p.$$

En déduire que dans tous les cas, l'équation (4) ne fournit qu'une valeur de z, donc deux valeurs de y solutions de (3).

5. Factoriser sur $\mathbb{R}$ les polynômes

$$X_1 = x^4 - 9x + 18\ ;\ X_2 = x^4 + 5x + 5.$$

Indications pour la solution

I.2. Le produit est égal à

$$x^4\sin\varphi+2rx^3[\sin 2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi]+r^2x^2[\sin\varphi+\sin 3\varphi-2\cos\varphi\sin 2\varphi]$$
$$+r^3x[\sin 2\varphi-2\cos\varphi\sin 3\varphi]+r^4\sin 3\varphi$$

et l'on vérifie que les coefficients de x^3 et x^2 sont nuls, et que :

$$\sin 2\varphi-2\cos\varphi\sin 3\varphi=-\sin 4\varphi.$$

Le produit est donc exactement égal à $P(x)$.
3. $X\sin\varphi=x^4\sin\varphi+ax\sin\varphi+b\sin\varphi$.
Comme $a\sin\varphi=-r^3\sin 4\varphi$ (relation (2))
et $b\sin\varphi=-a\sin\varphi(r\cos\varphi)-r^4\cos 4\varphi\sin\varphi$ (relation (1))
$=r^4\cos\varphi\sin 4\varphi-r^4\cos 4\varphi\sin\varphi=r^4\sin 3\varphi$.
On a bien $X\sin\varphi$ identique à $P(x)$.
4. Conséquence

Ou bien $\sin\varphi=0$
si $r=0; b=0$ alors $X=x^4+ax=x(x^3+a)$
si $r\neq 0$ $\varphi=k\pi; \cos\varphi=\pm 1; \cos 4\varphi=1$
donc X s'annule pour $x=r\cos\varphi=\pm r$.
Ou bien $\sin\varphi\neq 0$ alors $P(x)$, donc aussi X est divisible par $x^2-2rx\cos\varphi+r^2$ en vertu de I.2.

II.1. La dérivée $u'(\varphi)=-4R\sin 4\varphi-\frac{a}{R^2}\sin\varphi$ est négative pour $\varphi\in[\frac{\pi}{16};\frac{3\pi}{16}]$ car $\sin 4\varphi>\sqrt{\frac{1}{2}}; |\frac{a}{R^2}\sin\varphi|<|a|$ car $R>1$ et $4R\sin 4\varphi>4R\sqrt{\frac{1}{2}}>4|a|$ car $R>\sqrt{2}(|a|+|b|)$. Par ailleurs

$$u(\frac{\pi}{16})=R\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{a}{R^2}\cos(\frac{\pi}{16})+\frac{b}{R^3}>0$$
$$u(\frac{3\pi}{16})=-R\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{a}{R^2}\cos(\frac{3\pi}{16})+\frac{b}{R^3}<0$$

toujours en tenant compte des hypothèses sur R. Donc $u(\varphi)$ continue, décroissante d'une valeur positive à une valeur négative, s'annule une et une seule fois sur $[\frac{\pi}{16};\frac{3\pi}{16}]$.
Le même type de raisonnement s'applique pour les autres intervalles et les autres propriétés.

II.5. Supposons que U et T n'aient aucun point commun. Comme le point n° 0 est relié au point n° 8 (tous deux sur l'axe), le n° 1 est relié à un n° n_1 avec $n_1\leq 7$ le n° 2 est relié à un n° n_2 avec $n_2<n_1$ donc $n_2\leq 6$ le n° 3 à un n° $n_3<n_2$ donc $n_3\leq 5$.
Alors le n° 4 est relié à un n° x par une courbe de T qui forcément coupe U.

III.5. Pour $X_1 = x^4 - 9x + 18$ on a $p = \frac{9^4}{18^3} = \frac{9}{8}$.
L'équation (4) : $z^3 - 2z^2 - 4z + \frac{55}{8} = 0$ admet la solution $z = \frac{5}{2}$ donc $y = 2$ ou $y = \frac{1}{2}$ qui donnent la factorisation

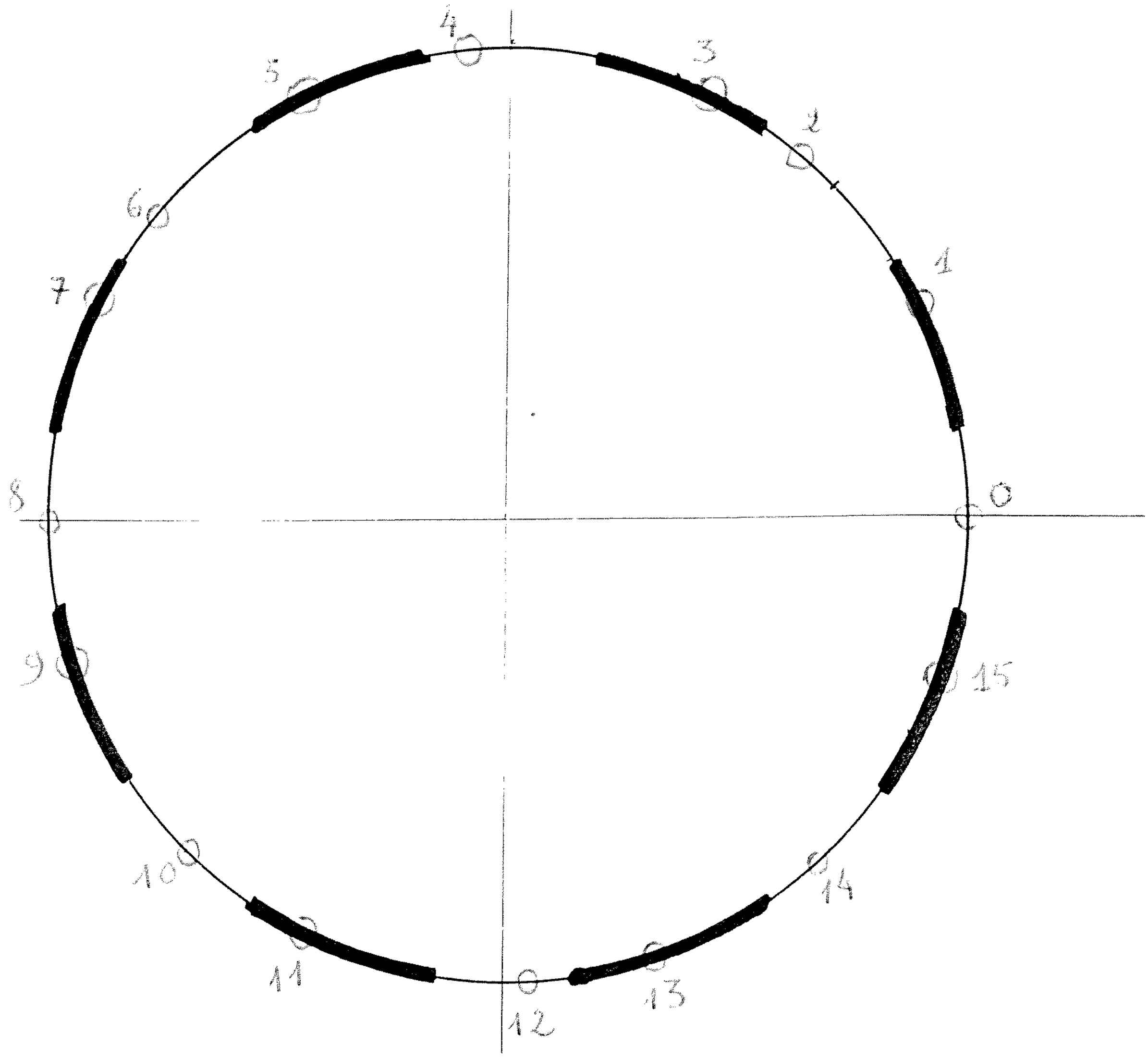
$$X_1 = x^4 - 9x + 18 = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 6).$$

Pour $X_2 = x^4 + 5x + 5$ on a $p = 5$. L'équation (4) : $z^3 - 2z^2 - 4z + 3 = 0$ admet la solution $z = 3$ donc $y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2$ ou $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$

$$X_2 = x^4 + 5x + 5 = (x^2 - \sqrt{5}x + \frac{5+\sqrt{5}}{2})(x^2 - \sqrt{5}x + \frac{5-\sqrt{5}}{2})$$

ou

$$X_2 = (x^2 - 2[\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}]x + 2[1 + \cos\frac{\pi}{5}])(x^2 + 2[\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}]x) + 2[1 + \cos\frac{3\pi}{5}]).$$



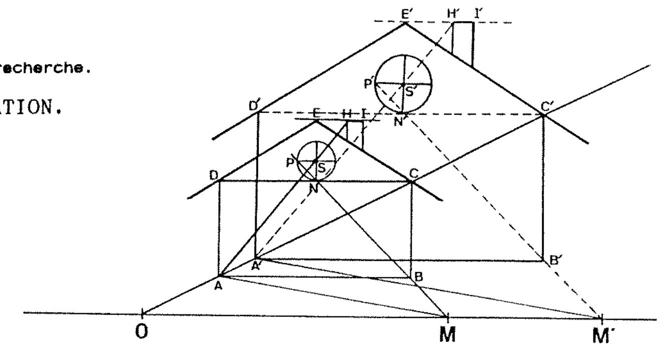
UNE NOUVELLE BROCHURE :

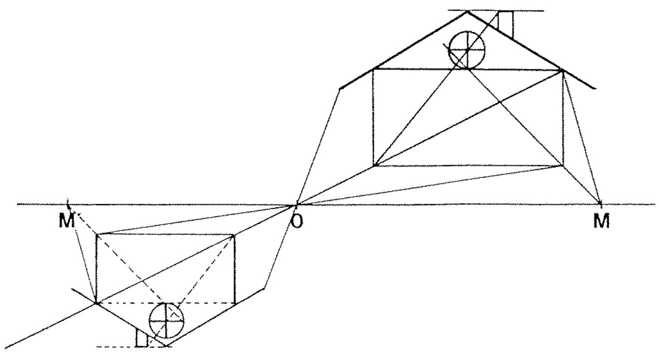
DES SOLUTIONS POUR GÉRER LA CLASSE DE SECONDE (Suite)

Par Jean DREYER, Suzy HAEGEL et Jean-Pierre RICHETON.

Résumé: Nous avons voulu rendre service au professeur de seconde, expérimenté ou débutant, qui souhaite disposer de séquences d'apprentissage, testées depuis quelques années déjà dans nos classes. en prévoyant la place de l'enseignement modulaire pour une meilleure articulation **classe entière** ("cours")/**modules/travaux dirigés.**
Cette deuxième brochure vient compléter celle parue en 1993/94 de façon à couvrir le plus largement possible le programme de seconde.

Sommaire:





Prix sur place 55 F – 70 F en cas d'envoi.
Le tome 1 est toujours disponible aux mêmes conditions que celui-ci.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 33

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel, de Strasbourg)

Étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}$$

sur l'intervalle $]0,1[$.

Solution (P. Renfer d'Ostwald)

$$f'(x) = -\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x^2} \neq \frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{\ln}{x(1-x)}.$$

Soit $\varphi(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$, alors :

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \varphi(x) - (\varphi(x) + \frac{1}{1-x}\ln(x) \quad (1) \\ &= -\frac{\ln x \ln(1-x)}{x} + \varphi(x) - \varphi(1-x) \quad (2). \end{aligned}$$

On va prouver que f' est négative sur l'intervalle $]0,1/2[$, à l'aide de la formule (1), puis qu'elle est négative sur l'intervalle $[1/2,1[$, à l'aide de la formule (2). On saura alors que f est décroissante sur $]0,1[$.

1) La fonction φ est développable en série entière en 0. Pour $x \in [0,1[$, on a :

$$\varphi(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

Sur l'intervalle $[0,1[$, φ décroit donc de -1 à $-\infty$.

$$\varphi(x) + \frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} x^{n+1}.$$

Soit $\psi(x) = -x\ln(x)$, alors $\psi'(x) = -1 + \ln(x))$. La fonction ψ est positive sur $]0,1[$ et admet comme maximum $\psi(1/e) = 1/e$. La formule (1) donne donc, pour x entre 0 et $1/2$:

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \varphi(x) - x\ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n \\ &\leq -1 + \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = -1 + \frac{1}{e(1-x)} \leq -1 + \frac{2}{e} < 0. \end{aligned}$$

2) Soit $\chi(x) = \varphi(x) - \varphi(1-x)$.
La fonction χ, somme de deux fonctions décroissantes, décroît sur $]0,1[$. Elle s'annule en $1/2$ et elle est donc négative sur $]1/2,1[$. La formule (2) indique alors que, pour x entre $1/2$ et 1, $xf(x)$ est négatif.

Conclusion

La fonction f décroit de $+\infty$ à 0.

PROBLÈME 34

Énoncé (forme équivalente)

Etant donnés quatre points sur une droite, montrer qu'ils sont les projections orthogonales des sommets d'un tétraèdre régulier, dont la longueur des arêtes est déterminée.

Indication

Dans sa solution, Pierre Renfer suppose le problème résolu et prend un repère orthonormé dans lequel les sommets du tétraèdre sont $A(1,-1,-1), B(-1,1,-1)$, $C(-1,-1,1), D(1,1,1)$.

PROBLÈME 35 (proposé par D. Dumont)

Énoncé (voir l'énoncé détaillé dans notre précédent numéro)

L'énoncé demande de démontrer cinq propositions relatives aux dénombrements des points fixes et des successions dans les permutations. Dans la solution qu'il propose, R. Renfer énonce une sixième proposition :
PROPOSITION 6.– *Soit q un entier de $[n+1]$. Le nombre de permutations de $[n+2]$ ayant le maximum en dernière position et possédant $k+1$ successions, dont une en position q, est égal à $f_{n,k}$.*

PROBLÈME 36

Énoncé (proposé par M. Emery)

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC. A quelle caractérisation angulaire du triangle correspond l'égalité entre longueurs : $AH = BC$?

PROBLÈME 37

Énoncé (proposé par D. Dumont)

Deux joueurs A et B retirent à tour de rôle des allumettes sur un tas d'allumettes, avec la règle que le premier joueur ne peut prendre le tas tout entier, et qu'ensuite chaque joueur peut prendre un nombre d'allumettes au plus égal au nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Est considéré comme vainqueur celui qui ramasse la dernière allumette.

a) Trouver la stratégie gagnante pour le joueur qui commence.

b) On suppose qu'on modifie la règle en autorisant de prendre un nombre d'allumettes au plus égal à deux fois le nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Trouver la stratégie gagnante.

Vous pouvez constater un changement dans les tarifs d'abonnement. Ceci est dû au fait qu'à partir de janvier 1996 l'université ne bénéficiera plus de la franchise postale.

Par ailleurs, les frais de composition et d'impression ont augmenté et nos tarifs sont restés inchangés depuis septembre 1993.

Université
Louis Pasteur
I.R.E.M.

Régionale
A.P.M.E.P.
de Strasbourg

Merci d'afficher

PROGRAMME PROVISOIRE DES CONFERENCES 1995/1996

6 décembre 1995	**Augustin FRUCHARD** *(Chargé de Recherche à l'U.F.R. de Mathématiques)* La somme d'une fonction
13 décembre 95	**Maurice MIGNOTTE** *(Professeur à l'U.F.R. de Mathématique)* Equations diophantiennes et formes linéaires de logarithme
24 janvier 96	**Michèle AUDIN** *(Professeur à l'U.F.R. de Mathématique)* Matrices hermitiennes et convexité
7 février 96	**Jean-Pierre FRIEDELMEYER** *(Professeur au lycée Couffignal de Strasbourg)* La création des premières revues de mathématiques au début du 19e siècle : contexte, influence et mutations qu'elles révèlent ou suscitent
13 mars 96	**Etienne MEYER et Nacer MAKHLOUF** *(Professeur au lycée Th. Deck de Guebwiller et Maître de conférences à l'Université de Haute Alsace)* Enseignement de l'analyse à l'aide des ordres de grandeur
24 avril 96	**Madeleine BAUER** *(Maître de conférence à l'U.F.R. de Mathématique)* Le modèle PL (linéaire par morceaux) est-il un bon modèle de la réalité ?
22 mai 96	**Jean-Yves MERINDOL** *(Professeur à l'U.F.R. de Mathématique)* Division euclidienne et géométrie plane
2e trimestre 96 (date à définir)	**Les enseignants de licence présentent leurs domaines de recherche**

Salle de conférences du Bâtiment de l'IRMA (mercredi à 17 h)
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 Strasbourg Cedex
Tél. 88 41 63 07 Secrétariat
88 41 64 40 Bibliothèque