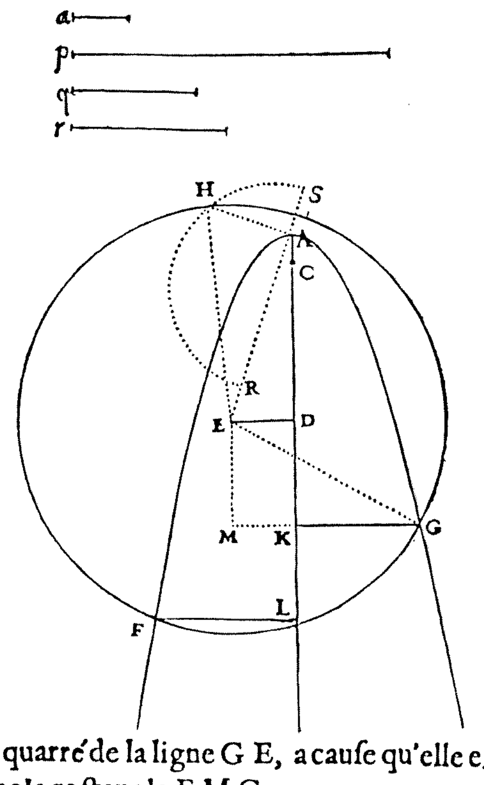
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

n° 82 – MARS 1996 I.S.S.N. 0290 - 0068

394 **LA GEOMETRIE.**



pour le quarré de la ligne G E, a cauſe qu'elle eſt la baze du triangle rectangle E M G.

Mais a cauſe que cete meſme ligne G E eſt le demidiametre du cercle F G, elle ſe peut encore expliquer en d'autres termes, a ſçauoir E D eſtant $\frac{1}{2}q$, & A D eſtant $\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}$, E A eſt $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}}$ a cauſe de l'angle droit A D E, puis H A eſtant moyene proportionelle entre A S qui eſt 1 & A R qui eſt r, elle eſt $\sqrt{r}$. & à cauſe de l'angle droit E A H, le quarré de H E, ou E G eſt $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}+r$: ſibienque il y a Equation entre

NOTRE COUVERTURE :

La page donnée en couverture est extraite de "La Géométrie de Descartes" (*); elle fait partie du "livre troisième" et d'un paragraphe dont voici le début :

> Or quand on eſt aſſuré, que le Problesme propoſé eſt ſolide, ſoit que l'Equation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, ſoit qu elle ne monte que juſques au cube, on peut touſiours en trouuer la racine par l'vne des trois ſections coniques, laquelle que ce ſoit ou meſme par quelque partie de l'vne d'elles, tant petite qu'elle puiſſe eſtre; en ne ſe ſeruāt au reſte que de lignes droites, & de cercles. Mais ie me contenteray icy de donner *Façon generale pour conſtruire tous les problesmes ſolides, reduits à vne Equatiō de trois ou quatre dimenſions.*
>
> Ccc 3
>
> donner vne reigle generale pour les trouuer toutes par le moyen d'vne Parabole, a cauſe qu'elle eſt en quelque façon la plus ſimple.
>
> Premierement il faut oſter le ſecond terme de l'Equation propoſée, s'il n'eſt deſia nul, & ainſi la reduire à telle forme, $z^3 \infty * . apz . aaq$, ſi la quantité inconnuë n'a que trois dimenſions; oubien à telle, $z^4 \infty * . apzz . aaqz . a^3r$, ſi elle en a quatre; oubien en prenant a pour l'vnité, à telle, $z^3 \infty * . pz . q$, & à telle $z^4 \infty * . pzz . qz . r$.

La dernière ligne correspond à l'écriture actuelle $z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm r$. Mais avant d'avoir remplacé a par l'unité, tous les termes de l'égalité sont de degré quatre : $z^4 = \pm apzz \pm aaqz \pm a^3r$ (**). Descartes continue en donnant la manière de trouver géométriquement les solutions de telles équations, mêlant dans ses explications les distinctions à faire dans les tracés selon qu'on a $+p$ ou $-p$, ...etc. Nous allons extraire de son écrit les explications qui concernent la résolution de l'équation $z^4 = pz^2 - qz + r$ en concordance avec la figure géométrique de la couverture et transcrire ses explications avec son langage sans en reproduire cependant l'orthographe.

(*) Nous avons extrait cette page de : "The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition", éd. Dover (1954).
(**) C'est un des apports essentiels de "La Géométrie" de Descartes, expliqué au début du Livre I : le choix d'une unité permet de se débarasser de l'ancienne règle contraignante de la nécessaire homogénéité de tout calcul sur des grandeurs.

Après cela supposant que la parabole FAG est déjà décrite, & que son essieu (axe) est $ACDKL$, & que son côté droit est a, ou 1, dont AC est la moitié, & enfin que A en est le sommet; il faut faire $CD = \frac{1}{2}p$, & la prendre du même côté qu'est le point A en regard du point C s'il y a $+p$ en l'équation, (...). Et du point D, (...), il faut élever une ligne à angles droits jusques à E en sorte qu'elle soit égale à $\frac{1}{2}q$. (...) il faut dans cette ligne AE prolongée, prendre d'un côté AR égale à r, & de l'autre AS égale au côté droit de la parabole qui est 1, & ayant décrit un cercle dont le diamètre fait RS, il faut faire AH perpendiculaire sur AE, laquelle AH rencontre ce cercle RHS au point H qui est celui par où l'autre cercle FGH, de centre E, doit passer (...). Or ce cercle FG peut couper la parabole en 1, ou 2, ou 3, ou 4 points, desquels tirant des perpendiculaires sur l'essieu on a toutes les racines de l'équation tant vraies, que fausses. A savoir si la quantité q est marquée du signe $+$, les vraies racines seront celles de ces perpendiculaires qui se trouveront du même côté de la parabole que E le centre du cercle, comme FL; & les autres, comme GK, seront fausses. Mais au contraire si cette quantité q est marquée du signe $-$ les vraies seront celles de l'autre côté; & les fausses ou moindres que rien seront du côté où est E le centre du cercle (...).

Et la démonstration en est fort aisée. Car si la ligne GK, trouvée par cette construction, se nomme z, AK sera z^2 à cause de la parabole, en laquelle GK doit être moyenne proportionnelle entre AK & le côté droit qui est 1. Puis si de AK j'ôte AC qui est $\frac{1}{2}$, & CD qui est $\frac{1}{2}p$, il reste DK ou EM, qui est $z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$ dont le carré est $z^4 - pz^2 - z^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Et à cause que DE, ou KM, est $\frac{1}{2}q$, la toute GM est $z + \frac{1}{2}q$, dont le carré est $z^2 + qz + \frac{1}{4}q^2$, & assemblant ces deux carrés on a $z^4 - pz^2 + qz + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} \cdots$

La page de couverture est la suite de ces calculs. Ajoutons-y la fin qui se trouve en page 395

entre cete ſomme & la precedente. cequi eſt le meſme que $z^4 \propto * pzz - qz + r$. & par conſequent la ligne trouuee GK qui a eſté nommée z eſt la racine de cete Equation. ainſi qu'il falloit demonſtrer.

L'ÉDUCATION NATIONALE VA-T-ELLE ÊTRE RECONSTRUITE ?

Ce numéro de '*L'Ouvert*' devrait sortir en mars 1996. Or, le 31 de ce mois Descartes aura 400 ans, anniversaire qui ne manquera pas d'être fêté. Nous serons un certain nombre à nous réunir la veille pour une demi-journée APMEP et nous aurons alors l'occasion de lever ensemble un verre (de jus d'orange ou de muscat d'Alsace, au choix) à la mémoire de "La Géométrie" ! Cependant, cette demi-journée sera consacrée à l'enseignement actuel des mathématiques. Le programme figure dans les pages de ce numéro. Il y a été fait un peu plus de place que l'année dernière pour les informations et le bavardage, comme nous l'ont demandé les participants de la demi-journée de l'an passé. Nous aurons, certes, quelques préoccupations à échanger au sujet des transformations ou des chamboulements probables de l'Education Nationale. Mais à cette date, à quel stade de ses discussions en sera la commission Fauroux ? Pour apporter une pierre au moulin – ou jeter un pavé dans la mare, je ne sais – voici quelques passages extraits du Discours de la Méthode de Descartes (ils sont cités dans l'ordre où ils ont été rencontrés dans le texte) :

> "J'ÉTAIS alors en Allemagne où l'occasion des guerres qui n'y sont pas encore finies m'avait appelé, et comme je retournais du couronnement de l'Empereur vers l'armée, le commencement de l'hiver m'arrêta en un quartier (*) où, ne trouvant aucune conversation qui me divertît, et n'ayant d'ailleurs par bonheur aucuns soins ni passions qui me troublassent, je demeurais tout le jour enfermé seul dans un poêle (**), où j'avais tout loisir de m'entretenir de mes pensées. Entre lesquelles l'une des premières fut que je m'avisai de considérer que souvent il n'y a pas tant de perfection dans les ouvrages composés de plusieurs pièces, et faits de la main de divers maîtres, qu'en ceux auxquels un seul a travaillé. Ainsi voit-on que les bâtiments qu'un seul architecte a entrepris et achevés ont coutume d'être plus beaux et mieux ordonnés que ceux que plusieurs ont tâché de racommoder, en faisant servir de vieilles murailles qui avaient été bâties à d'autres fins."
>
> ...
>
> "IL est vrai que nous ne voyons point qu'on jette par terre toutes les maisons d'une ville, pour le seul dessein de les refaire d'autre façon, et d'en rendre les rues plus belles ; mais on voit bien que plusieurs font abattre les leurs pour les rebâtir et que même quelquefois ils y sont contraints, quand elles sont en danger de tomber d'elles-mêmes, et que les fondements n'en sont pas bien fermes."
>
> ...

(*) Une résidence.
(**) Pièce chauffée, à l'allemande, par un poêle.

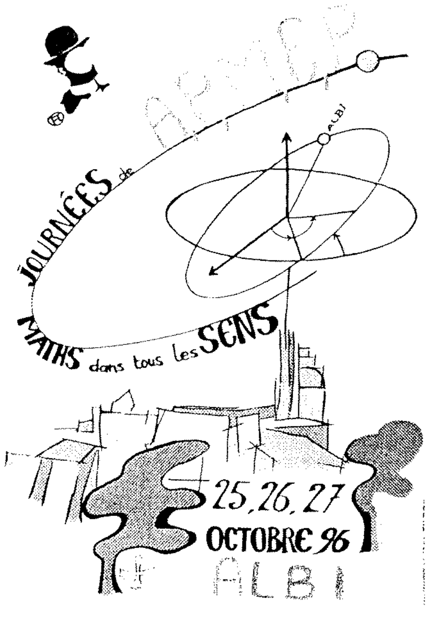
"ET enfin comme ce n'est pas assez, avant de commencer à rebâtir le logis où on demeure, que de l'abattre, et de faire provision de matériaux et d'architecture, et outre cela d'en avoir soigneusement tracé le dessin, mais qu'il faut aussi s'être pourvu de quelque autre où on puisse être logé commodément pendant le temps qu'on y travaillera : ainsi, afin que je ne demeurasse point irrésolu en mes actions pendant que la raison m'obligerait de l'être en mes jugements, et que je ne laissasse pas de vivre dès lors le plus heureusement que je pourrais, je me formai une morale par provision qui ne consistait qu'en trois ou quatre maximes, dont je veux bien vous faire part."

...

"ET comme en abattant un vieux logis on en réserve ordinairement les démolitions pour servir à en bâtir un nouveau ainsi, en détruisant toutes celles de mes opinions que je jugeais être mal fondées, je faisais diverses observations et acquérais plusieurs expériences qui m'ont servi depuis à en établir de plus certaines."

Mais comme Descartes ne se préoccupait pas là de la réforme du système éducatif nous ne pourrons conclure en donnant sa solution. Retenons tout de même une chose qui paraît vraissemblable : de vieilles pierres resserviront.

O. SCHLADENHAUFEN.



Journées Nationales d'Albi

25-26-27 octobre 1996

Ateliers

• Envoyez d'**urgence** vos propositions à
Pierre ETTINGER
Régionale APMEP
IREM - Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31062 TOULOUSE CEDEX

• Nous recherchons, notamment, des animateurs d'ateliers pour l'Ecole élémentaire.
• Vos propositions pourront être affinées en nous retournant la fiche d'acceptation que vous recevrez fin février (dépêchez-vous de proposer !)

SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 82 – MARS 1996

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
◇ N° spécial Georges REEB 66 F.
◇ Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 35 F

FASENACHTSKUECHLE FEUILLETES

Michèle AUDIN et Patrick FOULON

(Professeurs à l'U.F.R. de Mathématiques - Strasbourg)

A l'hommage que *l'Ouvert* a rendu à Georges Reeb [4], nous avons souhaité ajouter davantage de mathématiques : au delà de l'émotion, des souvenirs et des anecdotes, c'est l'héritage du mathématicien Georges Reeb qui nous importe. Ses idées sont encore très fécondes : dans leur lignée, l'un de nous a été capable de démontrer récemment un joli théorème dont la démonstration est assez simple pour que les idées puissent en être présentées aux lecteurs de *l'Ouvert* (il faut connaître un peu de topologie).

1. Cartographie

1.1 Cartes géographiques

Une carte de géographie est une représentation plane d'une partie de la Terre qui ne l'est pas, elle, plane! La question qui nous intéresse dans cet article est la suivante : de combien de cartes un globe-trotter doit-il se munir?
Une façon simple de représenter presque toute la Terre sur une même carte est de faire une projection stéréographique. On imagine un plan P contenant l'équateur et on projette depuis le pôle sud comme sur la figure 1. Précisément, à un point M de la surface de la Terre, on associe le point m où la droite MS coupe le plan P. On obtient ainsi une carte qui ne rate que le pôle sud (il n'y a pas de droite MS pour $M = S$, ou alors, il y en a beaucoup — toutes les tangentes — mais aucune ne rencontre le plan P).

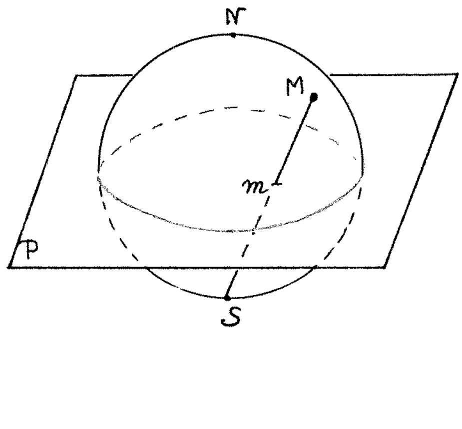


Figure 1 : fabrication d'une carte

Un cartographe australien préfèrerait probablement utiliser le pôle nord comme centre de la projection, obtenant ainsi une carte représentant la Terre sauf le pôle nord.
Avec ces deux cartes, on représente toute la Terre, mais les régions qui apparaissent sur les deux cartes (c'est-à-dire tout sauf les deux pôles) ont des formes bien différentes. Voyons l'Afrique par exemple (figure 2).

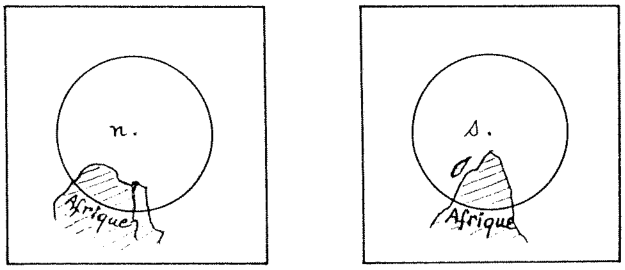


Figure 2 : changement de carte

Si on veut voyager en Afrique avec ces deux cartes, on préfèrera sans doute utiliser celle de gauche en Kabylie et celle de droite au Natal. Près de l'équateur, il faudra "changer de carte", c'est-à-dire effectuer l'opération suivante :
a) passer de la carte utilisée en Kabylie à la Terre par l'inverse de la projection de pôle sud, puis
b) passer de la Terre à la carte utilisée pour le Natal par la projection de pôle nord.
Au point où nous en sommes, commençons à faire des mathématiques : nous sommes en train de considérer une transformation du plan (à vrai dire, pour qu'elle soit bien définie, il faut retirer le point O) :

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} \ : P - (O) \to \text{Sphère} - (N, S) \to P - (O).$$

Bien sûr, cette transformation n'est autre que l'inversion de pôle O et de cercle l'équateur. Retenons
1. que celle-ci échange l'intérieur et l'extérieur du cercle équatorial (il va sans dire qu'on aurait pu utiliser n'importe quel grand cercle à la place de l'équateur, par exemple celui passant par la Schlucht et le Hohneck. Exercice : quel pôle utiliser pour qu'alors l'intérieur soit à l'extérieur? Un point de vue à peu près orthogonal consisterait à utiliser Saverne comme centre (de projection)),
2. que l'on peut reconstituer toute la Terre en connaissant les deux cartes et ce moyen de les "recoller".

1.2. Variétés

Les mathématiciens généralisent cette idée de façon abstraite dans la définition des *variétés*. Expliquons ce qu'est une variété en gardant l'exemple de la surface de la Terre en tête (et entre parenthèses).
C'est un espace topologique V (la surface de la Terre) écrit comme une réunion d'ouverts V_i (la Terre moins le pôle nord, la Terre moins le pôle sud); chaque V_i est muni d'un homéomorphisme φ_i (les projections stéréographiques) avec un espace

vectoriel $\mathbf{R}^n$ (le plan équatorial). Il faut encore expliquer comment on change de carte :

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \ : \ \varphi_j(V_i \cap V_j) \to V_i \cap V_j \to \varphi_i(V_i \cap V_j).$$

La dimension n des espaces $\mathbf{R}^n$ est aussi appelée dimension de la variété V. Par exemple, la dimension de la surface de la Terre est 2, celle du plan P. Il est facile de fabriquer des sphères de dimension n pour tout $n \geq 0$: il suffit de considérer tous les vecteurs unitaires de l'espace euclidien $\mathbf{R}^{n+1}$, c'est la sphère S^n. On a deux projections stéréographiques sur un $\mathbf{R}^n$ équatorial exactement comme dans le cas de dimension 2.
De même qu'il existe beaucoup d'autres façons de cartographier la Terre (figure 3), il existe bien des façons de décrire une variété comme une réunion de cartes.

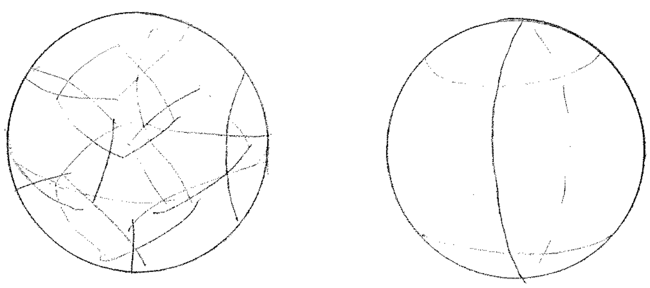


Figure 3 : atlas

Une variété avec une seule carte est un espace $\mathbf{R}^n$. Dans l'exemple de la géographie, c'est-à-dire celui de la sphère, on a vu qu'un atlas formé de deux cartes était suffisant. On démontre réciproquement que si une variété se décrit avec deux cartes, c'est une sphère (plus précisément elle est homéomorphe à une sphère; cette précision a son importance puisque ce résultat a permis à Milnor de montrer qu'il existait des variétés homéomorphes, mais pas difféomorphes, à la sphère de dimension 7, voir les références dans [3]).
La figure 4 montre un tore de dimension 2 avec trois cartes.

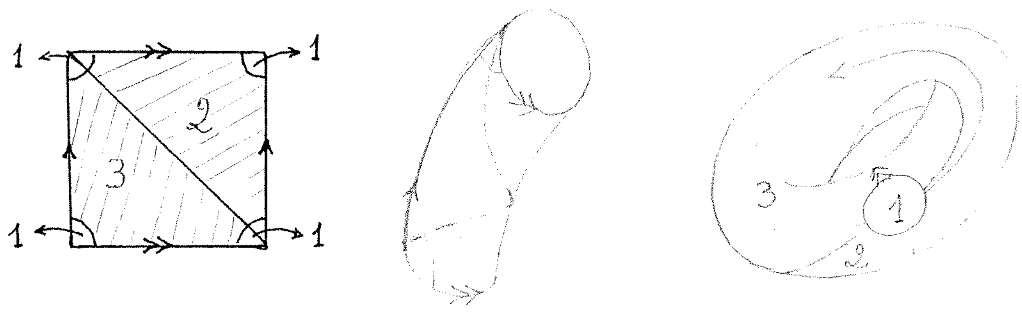


Figure 4 : un tore avec trois cartes

1.3. Des fonctions

Retour sur Terre : on peut considérer la latitude comme une fonction sur la surface de la Terre : elle vaut 90° sud (que nous notons -90) au pôle sud, 0 à l'équateur et 90° nord (notation $+90$) au pôle nord. Ainsi elle a un unique maximum (le pôle nord), un unique minimum (le pôle sud) et pas d'autre point critique, pas de col (figure 5) par exemple.

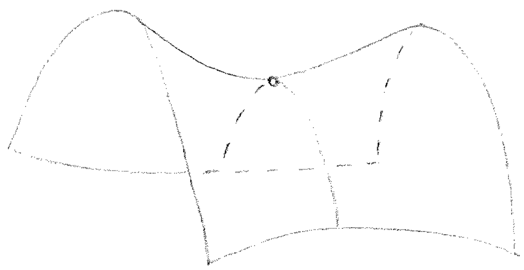


Figure 5 : un col

C'est là que Reeb arrive. Il démontre le théorème suivant :
THÉORÈME. — *Soit V une variété compacte. Supposons qu'il existe sur V une fonction avec seulement deux points critiques. Alors V est homéomorphe à une sphère.*
En réalité dans [5], il y a une hypothèse supplémentaire sur la fonction, qui doit être de Morse, c'est-à-dire avec des *points critiques non-dégénérés*, plus concrètement, pour une surface, des sommets, des creux ou des cols. Mais le théorème est vrai dans la généralité où nous l'avons énoncé (voir [3]).
L'idée de la démonstration est de montrer que V s'écrit comme réunion de deux cartes, chacune fabriquée à partir d'un des points critiques de la fonction.

2. Feuilletages

2.1. Mille-feuilles

Si l'on peut feuilleter un livre en dégustant de la pâte feuilletée, c'est sans doute que livres et mille-feuilles ont une structure commune, le feuilletage.
Les feuilletages, structures chères à Reeb, sont aussi décrits par des cartes. L'espace modèle est toujours l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, seulement, pour traduire le fait qu'un livre est quelque chose de plus fin, de moins grossier, qu'un bloc de bois de dimensions comparables, on considère la décomposition

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$$

(figure 6) dans laquelle on dit que le sous-espace affine $\mathbf{R}^p \times \{z\}$ est la *plaque* ou *feuille P* passant par les points (x_0, z).

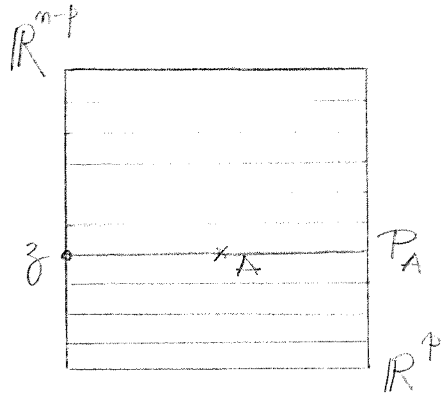


Figure 6

On en déduit la définition d'un feuilletage sur une variété V exactement comme ci-dessus : on demande encore que V soit recouverte par des cartes V_i avec des homéomorphismes $\varphi_i \;:\; V_i \to \mathbf{R}^n$. La nouveauté, c'est que les changements de cartes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ préservent la structure feuilletée de $\mathbf{R}^n$ en appliquant plaques sur plaques.

Bien sûr, pour que cette notion apporte quelque chose par rapport à celle de variété, il faut que $p \neq n$ (dans le cas contraire, il n'y aurait qu'une plaque) et de même que $p \neq 0$ (les plaques sont les points). On ne peut toutefois pas interdire ces possibilités dans la définition; pour montrer leur peu d'intérêt, on qualifie ces feuilletages de *grossiers*.

Prenons deux feuilles de papier ligné et recollons les en faisant coïncider les lignes horizontales. Nous obtenons un cylindre feuilleté (figure 7). Deux tels cylindres recollés ensemble (toujours en faisant attention aux lignes) donnent un tore feuilleté, une variété feuilletée.

Figure 7

Comme la structure de variété, la structure de variété feuilletée est *localement triviale*, au sens où elle est définie localement par un modèle très simple. La surprise a été, il y a une cinquantaine d'années, quand on s'est rendu compte que de tels objets localement triviaux pouvaient être, globalement, très compliqués, et Reeb [6] est l'un de ceux à qui nous devons cette connaissance. Les lecteurs de *l'Ouvert* pourront consulter l'article d'Hector [2].

2.2. Feuilletages à deux cartes

Dans la droite ligne des travaux de Reeb, l'un de nous a démontré le théorème suivant [1] :

THÉORÈME. — *Tout feuilletage à deux cartes est grossier.*

Voilà une idée de la démonstration. On suppose que la variété V est munie d'un feuilletage à deux cartes et on montre par l'absurde que celui-ci est grossier (en supposant qu'il ne l'est pas!). On appelle n la dimension de V, p la dimension des feuilles, et on suppose que $1 \leq p \leq n-1$.

Comme il n'y a que deux cartes, nous savons que la variété V est homéomorphe à une sphère de dimension n. Le feuilletage est décrit par deux cartes

$$\varphi^+ \ : \ V^+ \to \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$$

et

$$\varphi^- \ : \ V^- \to \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}.$$

On joue maintenant au jeu intérieur/extérieur du voyageur équatorial (§1.1). On part de la carte V^+. On considère les points dans cette carte qui ne sont pas dans la carte V^-, soit la partie

$$W = V^+ - V^+ \cap V^-.$$

C'est une partie compacte de V, son image $\varphi^+(W)$ est un compact de $\mathbf{R}^n$ (rappelons qu'un compact de $\mathbf{R}^n$ est une partie fermée qu'on peut inclure dans une grande boule). On peut donc l'enfermer dans une boule :

$$\varphi^+(W) \subset B(0, R)$$

pour R assez grand. On va maintenant dans V^- pour y regarder le complémentaire de cette grosse boule, plus précisément la partie

$$K = V - (\varphi^+)^{-1}(B(0, R)) \subset V^-.$$

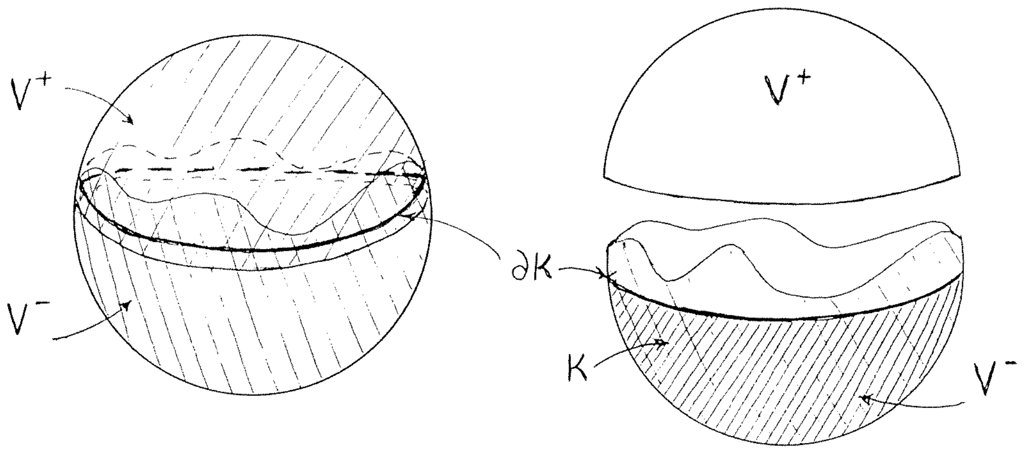


Figure 8

C'est encore une partie compacte. Sa frontière, appelée ∂K, est dans la zône cartographiée deux fois, c'est-à-dire dans $V^+ \cap V^-$ (figure 8), on va donc la regarder de deux façons différentes.

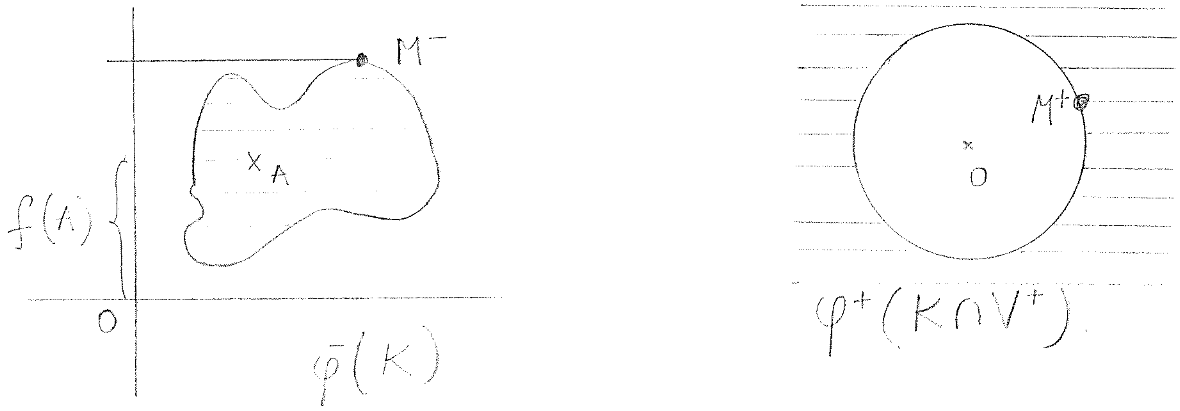


Figure 9

D'abord dans la carte $\varphi^-(V^-)$ ($= \mathbf{R}^n$). La fonction $f(A) = d(P_A, 0)$, distance de la plaque passant par A à l'origine, ou altitude du point A (figure 9), est continue, donc elle doit atteindre son maximum en un point M^- de $\varphi^-(\partial K)$. La plaque P_{M^-} passant par M^- ne rencontre pas l'intérieur de $\varphi^{-1}(K)$ puisqu'on a supposé que $\mathbf{R}^n$ contenait plus d'une plaque (c'est l'hypothèse $n - p \geq 1$).
Passons à l'extérieur, à la carte V^+ (partie droite de la figure 9). Les morceaux de plaques passant par les points des bords de la boule passent dans l'extérieur de cette boule, pourvu que ces plaques ne soient pas réduites à des points (c'est l'hypothèse $p \geq 1$).
C'est le cas en particulier, pour le point $M^+ = \varphi^+((\varphi^-)^{-1}(M^-))$ (c'est-à-dire le point M^- vu dans l'autre carte). Ainsi l'image de la plaque P_{M^-} par le changement de carte devrait se retrouver à l'intérieur de la boule!

2.3. Feuilletages à trois cartes

S'il n'y a pas de variété feuilletée avec seulement deux cartes, il est facile d'en construire à trois cartes. Nous avons vu une représentation du tore (il n'est pas très difficile de se convaincre que c'est la variété la plus simple sur laquelle on a une chance de trouver cette structure) comme une variété avec trois cartes au § 1.2. Nous allons maintenant feuilleter ce même tore. On décrit le feuilletage de la figure 7 grâce à trois cartes sur la figure 10. Chacune des cartes est l'intérieur d'un carré. Pour plus de clarté, nous les avons représentées dans le plan $\mathbf{R}^2$, qu'il faut encore quotienter par l'action du groupe des translations entières.

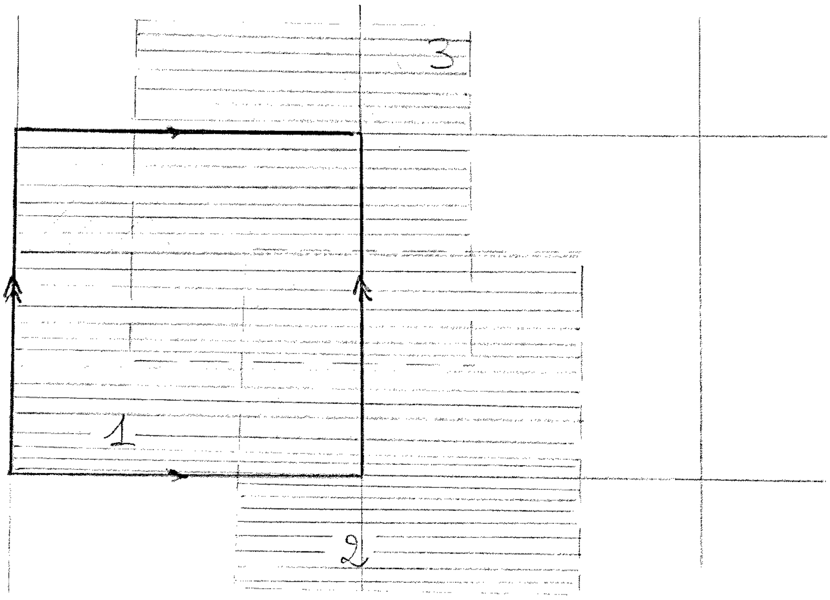


Figure 10

Nous ne savons pas quelles sont les variétés fermées qui tolèrent d'être feuilletées par trois cartes.

Bibliographie

[1] P. FOULON, Feuilletages des sphères et dynamiques Nord-Sud, C. R. Acad. Sc. Paris, 318 (1994), 1041-1042.

[2] G. HECTOR, Les feuilletages de Reeb, in [4].

[3] J. MILNOR, Morse theory, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1963.

[4] '*L'Ouvert*', numéro spécial (*), septembre 1994.

[5] G. REEB, cité dans [3].

[6] G. REEB, Variétés feuilletées, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, 1952.

(*) En vente à la bibliothèque de l'IREM : 66 F port compris.

Excursions et incursions dans l'Analyse Harmonique d'hier et d'aujourd'hui (II)

Olivier GEBUHRER

Nous avions établi plus haut la formule $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(r,\theta)|^2\,d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right|^2 r^{2n}$ pour $r<1$

où $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ ($n\in\mathbf{Z}$) ; c'est le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier ;

et $F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f(t)dt$ avec $P_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$; c'est le *"noyau de Poisson"*.

Maintenant nous savons que $F(r,\theta)\to f(\theta)$ uniformément sur le tore lorsque $r\to 1$. De la sorte on peut passer à la limite dans les deux membres de cette égalité et on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^2\,d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right|^2$$

Théorème :

L'application linéaire $f\mapsto\left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $C(\mathbf{T})$ dans $\ell^2(\mathbf{Z})$ est une isométrie lorsque $C(\mathbf{T})$ est muni de la norme $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^2\,d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\|f\|_2^2$

En particulier, si $f(n)=0$ pour $n\in(\mathbf{Z})$ (f continue) alors $f=0$.

Corollaire :

Soit f une fonction $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{T})$. Alors la série de Fourier de f converge vers f uniformément sur $\mathbf{T}$ et cette propriété s'étend aux dérivées de tout ordre de f.

Démonstration :

Si $f\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{T})$ et si $S_N(f)(\theta) = \sum_{|n|\leq N}\hat{f}(n)e^{in\theta}$ alors $S_N(f)$ converge uniformément ainsi que toutes ses dérivées d'après ce qu'on a vu sur le comportement des coefficients de Fourier de f.

La limite S(f) de $S_N(f)$ est une fonction $\mathbf{C}^\infty$ dont les coefficients de Fourier sont ceux de f.

On peut donc obtenir par cette méthode toute fonction $C^2(\mathbb{T})$. L'avocat général commence maintenant à être sur le grill. Fourier avait–il eu raison?
Le mémoire de Fourier date de 1807. Les études de d'Alembert datent de 1747, celles de Bernoulli datent de 1755. En 1829, Lejeune–Dirichlet décida de mettre un terme aux interrogations multiples sur la convergence de la série de Fourier vers la fonction lorsque celle–ci est continue. Pourquoi son résultat est–il intéressant? Justement pas à cause du résultat, comme on va le voir et il demeure incompréhensible que ce théorème, dont nous allons parler soit exposé SANS COMMENTAIRES comme un achèvement de la théorie jusqu'à la fin du DEUG, et en classes préparatoires!
Le résultat de Dirichlet est TRES DECEVANT. Il produit une réponse pour une situation intermédiaire entre $C^2(\mathbb{T})$ et $C(\mathbb{T})$! Or ce n'est pas le résultat qui est intéressant mais la méthode et la comparaison avec celle qui précède!
Le théorème de Dirichlet est superbement exposé en français dans le Journal de Crelle (Journal für die reine und angewandte Mathematik (4), 1829, p.157–169) et repris in extenso dans un nouveau livre à paraître de Jean–Pierre Kahane et Pierre–Gilles Lemarié traitant à la fois des aspects historiques et de certains développements contemporains fastueux (à paraître chez Gordon and Breach). Nous y renvoyons sans hésiter la lectrice (le lecteur) qui y trouvera bien d'autres éléments de fascination que dans ce petit essai.
Nous nous bornerons à citer deux passages essentiels de cette démonstration. Dirichlet reprend le problème à son début ; il n'y a plus de fonctions analytiques mais la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f)e^{inx}$ où les a_n **sont** les coefficients de Fourier d'une fonction que l'on va préciser.
Dirichlet remarque alors que si $S_N(f;x) = \sum\limits_{n\leq N} a_n(f)e^{inx}$ on peut écrire

$$S_N(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{|n|\leq N} e^{in(x-\theta)}f(\theta)d\theta$$

Il est donc tout naturellement conduit à CALCULER $D_N(x) = \sum\limits_{n\leq N} e^{inx}$

Ce qui donne $D_N(x) = \dfrac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$. De la sorte,

$$S_N(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x-\theta)f(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-\theta)}{\sin\frac{x-\theta}{2}}f(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}f(x-u)du$$

Dirichlet commence par observer que l'un des théorèmes de Cauchy relatif à cette question de la convergence de la série de Fourier vers la fonction repose sur une démonstration fausse :

> *"Un examen attentif du Mémoire cité m'a porté à croire que la démonstration qui y est exposée n'est même pas suffisante pour les cas auxquels l'auteur la croît applicable"* (!)

L'auteur de cette remarque incisive note que pour une fonction "QUELCONQUE", soit φ, le prolongement de cette fonction aux valeurs complexes de la variable est "quelque peu sujet à caution". Ceci indique que Cauchy, sans y parvenir, cherchait une voie vers la convergence de la série de Fourier PAR LES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Ce n'est pas du tout l'esprit de Dirichlet qui ne voit rien d'intéressant dans cette voie (et pour cause!) et il poursuit sa critique par une seconde observation qui RUINE MATHEMATIQUEMENT la "démonstration" de Cauchy.
Voici le passage incriminé :

"Le rapport du terme dont le rang est n, à la quantité $A\dfrac{\sin nx}{n}$ *ne diffère de l'unité prise positivement que d'une quantité qui diminue indéfiniment à mesure que n devient plus grand."*

Or la série $\sum \dfrac{\sin nx}{n}$ étant convergente, Cauchy croit pouvoir en déduire que la série comparée est aussi convergente, ce qui est notoirement faux si les séries comparées n'ont pas des termes de même ordre, de signe identique. Cauchy pense que si $\dfrac{a_n}{b_n}-1$ tend vers 0 et si (a_n) est une série convergente, il en est de même de (b_n).
Dirichlet indique le cas de $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et de $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
C'est donc en analysant une preuve ERRONEE que Dirichlet a construit une ETUDE NOUVELLE ET PLUS PROFONDE; Cela étant, Dirichlet ajoute : *"Je vais commencer par l'examen des cas les plus simples, auxquels tous les autres peuvent être ramenés".* (Il se trompe lourdement lui aussi, comme on le verra).

Tout le conduit à examiner le comportement de $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta$ lorsque $k\to\infty$, où $\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$

Le sagace Dirichlet commence par observer que tout devient plus simple si ON SIMPLIFIE LA VIE de la fonction f. **Il la suppose monotone décroissante de 0 à α et positive**.
On fait cette hypothèse dans ce qui suit.

On peut écrire $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta = \sum_{n=0}^{N(\alpha,k)-1} \int_{\frac{n\pi}{k}}^{(n+1)\frac{\pi}{k}} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta + \int_{\frac{N\pi}{k}}^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta$ où $N(\alpha,k)$ est le plus grand entier n tel que $\dfrac{n\pi}{k}\leq\alpha$

Posons $u_n = \displaystyle\int_{\frac{n\pi}{k}}^{\frac{(n+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta$, observons que $\lim\limits_{k\to\infty} N(\alpha,k) = +\infty$ et que $(N(\alpha,k))_k$ est une suite croissante d'entiers. Dirichlet remarque que u_n est de signe contraire à u_{n+1} (ce qui est aisé à vérifier), que $|u_n|\leq|u_{n-1}|$ ce qui est tout aussi simple compte tenu de l'hypothèse faite sur f et enfin que le terme singulier $\int_{\frac{n\pi}{k}}^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta$ est en valeur absolue plus petit que $|u_N|$: en effet, on peut écrire $u_n=\rho_n R_n$ où $\rho_n \in \left[f\left(\frac{(n+1)\pi}{k}\right), f\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right]$ et $R_n = \int_{\frac{n\pi}{k}}^{\frac{(n+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} d\theta$

Quand au terme singulier il s'écrit $\rho_N = \int_{\frac{N\pi}{k}}^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta$ et il est trivial de comparer $\int_{\frac{N\pi}{k}}^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} d\theta$ à $\int_{\frac{N\pi}{k}}^{\frac{(N+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} d\theta$

De la sorte, $\int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta = \sum_{k=0}^{N(\alpha,k)-1} \rho_n R_n + \rho_N \gamma_N$ où $\gamma_N = \int_{\frac{N\pi}{\kappa}}^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} d\theta$

Enfin, par suite du caractère alterné de la série de droite, pour tout entier m fixé on a $\int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta = \sum_{k=0}^{m} \rho_n R_n + \lambda_{m+1}$ où $|\lambda_{m+1}| \leq \rho_m |R_m|$

Dirichlet justifie ceci par la merveilleuse preuve suivante :

> *"Le principe sur lequel nous nous appuyons peut être formulé de cette manière. Les lettres A, A', A", ... désignant les quantités positives en nombre quelconque et telle que A>A'>A">..., etc, ... la quantité A–A'+A"–A'"+etc... est positive et inférieure à A. Cela résulte immédiatement de ce que la quantité précédente peut être mise sous l'une et l'autre de ces deux formes*
>
> $(A-A')+(A''-A''')+etc...$
>
> $A-(A'-A'')-(A'''-A^{IV})-etc..."$

Nous nous sommes permis des abus de langage ; maintenant il faut être plus précis :

$$R_n(k) = \int_{\frac{n\pi}{k}}^{\frac{(n+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} d\theta = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin\theta}{k\sin\frac{\theta}{k}} d\theta$$

Il est alors "évident" (dixit Dirichlet) que $\lim\limits_{k\to\infty} R_n(k) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta$ pour tout n et il est connu de lui que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{2}$. D'autre part, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_n(k) = f(0)$ pour tout n.

Il ne reste plus qu'à cueillir, ce que fait Dirichlet avec une maestria certaine dans l'esquive d'une difficulté que peu de lecteurs semblent avoir noté. Comme le résultat est correct et que par ailleurs, on peut faire beaucoup mieux, cela n'a pas une grande importance[1]

L'entier m restant fixé, on a donc :

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \rho_n(k) R_n(k) = f(0) \sum_{n=0}^{m} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta = f(0) \int_0^{(m+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta$$

Maintenant

$$\left| \int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta - \frac{\pi}{2} f(0) \right| \le \left| \int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta - \sum_{n=0}^{m} \rho_n(k) R_n(k) \right|$$

$$+ \left| \sum_{n=0}^{m} \rho_n(k) R_n(k) - f(0) \int_0^{(m+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta \right| + f(0) \left| \int_{(m+1)\pi}^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta \right|$$

$$\text{Et } \left| \int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta - \sum_{n=0}^{m} \rho_n(k) R_n(k) \right| \le \left| \lambda_{m+1}(k) \right| \text{ où } \left| \lambda_{m+1}(k) \right| \le \rho_{m+1}(k) \left| R_{m+1}(k) \right|$$

$$\text{D'où } \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \int_0^{\alpha} \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta - \frac{\pi}{2} f(0) \right| \le \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \rho_{m+1}(k) \left| R_{m+1}(k) \right| + \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \sum_{n=0}^{m} \rho_n(k) R_n(k) - f(0) \int_0^{(m+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta \right|$$

$$+ f(0) \left| \int_{(m+1)}^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta \right|$$

(On rappelle que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = \inf\limits_n \sup\limits_{m\ge n} u_n$)

Or le second terme du membre de droite de cette inégalité est NUL d'après ce que nous avons vu plus haut.

[1] Jean-Pierre Kahane, à qui j'ai fait part de cette observation, maintient que la preuve de Dirichlet est correcte de bout en bout. Après test effectué avec d'autres collègues, on peut se ranger à son avis OU MAINTENIR L'OPINION INVERSE. Ce qui me porte à cette deuxième alternative est simple : Dirichlet prend un soin extrême à justifier des passages, que l'on jugerait évidents aujourd'hui (mais qui n'allaient pas de soi à l'époque) ; or ce dernier passage, DELICAT, est curieusement escamoté.

Donc $\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\int_0^{\alpha}\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}f(\theta)d\theta-\frac{\pi}{2}f(0)\right|\leq f(0)\left[\left|\int_{(m+1)\pi}^{(m+2)\pi}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta+\int_{(m+1)\pi}^{\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta\right|\right]$

Maintenant le terme de gauche ne dépend pas de m, et celui de droite ne dépend pas de k.

Par suite, $\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\int_0^{\alpha}\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}f(\theta)d\theta-\frac{\pi}{2}f(0)\right|=0.$

Dirichlet ignore l'utilisation de la $\overline{\lim}$ mais ce n'est pas le point important : son raisonnement utilise comme si cela allait de soi la propriété suivante :

$\lim_{k\to\infty}\int_{m\pi}^{(m+1)\pi}\frac{\sin\theta}{k\sin\frac{\theta}{k}}d\theta=\int_{m\pi}^{(m+1)\pi}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta$ **uniformément par rapport à m!**

Ceci est vrai mais non complètement trivial (la convergence dominée n'est ici d'aucun secours!).

Voyons maintenant brièvement la fin du raisonnement de Dirichlet : rappelons-nous que $S_N(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(x-u)f(u)du.$

Donc, en écrivant, $S_N(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-u)}{2\sin\frac{x-u}{2}}du=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{x}+\int_{x}^{\pi}\right].$

et en faisant le changement de variable $u\to x-2v$ dans la première intégrale $u\mapsto x+2v$ dans la seconde, il vient :

$$P_N(f;x)=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{2}(x+\pi)}\frac{\sin(2N+1)v}{\sin v}f(x-2v)dv+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin(2N+1)v}{\sin v}f(x+2v)dv\right]$$

Considérons la seconde intégrale $\frac{1}{2}(\pi-x)\in[0,\pi]$; supposons d'abord $\frac{1}{2}(\pi-x)\in[0,\frac{\pi}{2}]$; la fonction $v\mapsto f(x+2v)$ peut présenter plusieurs minima et maxima. ON SUPPOSE QUE CEUX-CI SONT EN NOMBRE FINI dans l'intervalle $[0,\frac{1}{2}(\pi-x)]$; ordonnons ces points en une suite croissante $\ell_0=0<\ell_1<\ldots\ell_r\leq\ell_{r+1}=\frac{1}{2}(\pi-x)$. Par découpage on se ramène sur chaque sous-intervalle à une intégrale du type déjà étudié : c'est trivialement vrai pour $\int_0^{\ell_1}\frac{\sin(2N+1)v}{\sin v}f(x+2v)dv$; pour $\int_{\ell_k}^{\ell_{k+1}}\frac{\sin(2N+1)v}{\sin v}f(x+2v)dv$ on remarque que $\ell_{k+1}\leq\frac{\pi}{2}$ et que $\int_{\ell_k}^{\ell_{k+1}}=\int_{\ell_k}^{0}+\int_0^{\ell_{k+1}}$

Par suite toutes les intégrales restantes (en NOMBRE FINI) convergent vers 0 lorsque $N \to \infty$. Finalement, un dernier changement de variable dans la première intégrale nous permet d'énoncer le :

Théorème de Dirichlet
Soit f une fonction continue par morceaux, 2π–périodique et n'admettant qu'un nombre fini de minima et de maxima ; alors $\lim\limits_{n\to\infty} S_N(f;x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$

Nous retrouvons alors nos deux compères :

L'avocat général : quel travail pour si peu! Comment vérifier facilement qu'une fonction $\mathbf{C}^1(\mathbb{T})$ vérifie les hypothèses de Dirichlet?
L'avocat : vous avez marqué un nouveau point. Mais vous ne ferez croire à personne qu'un travail aussi délicat se révèle si futile!
L'avocat général : En tout cas, nous sommes bien loin du résultat annoncé par Fourier, c'est ce qui compte.
L'avocat : Mais patientez! Voici Mr Camille Jordan qui va vous montrer quelque chose d'intéressant.

Camille Jordan (1838–1922) était un mathématicien français qui n'écrivit qu'une seule étude courte d'Analyse : il était spécialiste de théorie des groupes, et de géométrie reliée à l'algèbre. En 1881, cinquante ans APRES DIRICHLET, Jordan observe que si la propriété de Dirichlet est vraie pour les fonctions CONTINUES PERIODIQUES MONOTONES CROISSANTES, ELLE EST VRAI POUR LA DIFFERENCE DE DEUX TELLES FONCTIONS. Quelle idée banale!
Il y a toujours au moins deux façons de regarder la chute d'une pomme. Car ce que Jordan met en lumière c'est la structure d'espace vectoriel des fonctions vérifiant le théorème de Dirichlet.
Jordan observe trivialement que si $f=f_1-f_2$ où f_1 et f_2 sont monotones croissantes alors $\mathrm{Var}(f) = \sup\limits_{\sigma} \sum |f(t_{i+1})-f(t_i)| < +\infty$ où $\sigma=(t_0,t_1,\dots,t_n)$ désigne une suite finie arbitraire de points strictement croissante telle que $t_0=0<t_1\dots<t_n=2\pi$.

Les fonctions à variation bornée viennent de naître. De plus, on peut poser $\|f\|_v=\mathrm{Var}(f)$ et on voit que si on définit $\mathcal{J}=\{f,\ 2\pi\text{–périodique} / \mathrm{Var}(f)<+\infty\}$, alors $\|f\|_v$ définit une semi–norme sur $\mathcal{J}$, dont le noyau est réduit aux fonctions constantes. Evidemment, Jordan ne s'arrête pas en si bon chemin : si $f=f_1-f_2\in\mathcal{J}$, lorsque f_1, f_2 sont monotones croissantes, que dire des éléments de $\mathcal{J}$?

Théorème
Toute fonction à variation bornée est différence de deux fonctions croissantes ; la décomposition est unique et de plus si f est continue à variation bornée, f s'écrit comme différence de deux fonctions CONTINUES MONOTONES CROISSANTES.

Ce théorème est aisé pour la première partie, non trivial pour la seconde. Jordan commence par **prolonger** la notion d'intégrale à l'ESPACE VECTORIEL $\mathcal{J}$! Ce qui se fait sans trop de mal.

Evidemment il observe que si Dirichlet pense que toute fonction continue s'écrit comme différence de deux fonctions monotones croissantes continues, il se trompe lourdement. Ensuite il donne une démonstration nouvelle du théorème précédent, qu'on peut énoncer ainsi :

Théorème :

Soit f une fonction à variation bornée 2π–périodique. Alors $\lim_{N\to\infty} S_N(f;x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ pour tout $x\in[0,2\pi]$.

L'Avocat : Alors? Qu'en dites–vous?
L'Avocat général : Soit, soit. Mais enfin on approche du XX[ème] siècle et on ne sait toujours RIEN dire du cas des fonctions continues. Et de plus pouvez–vous me montrer que le théorème de Jordan étend le théorème à des situations plus générales que $\mathbf{C}^2(\mathbb{T})$?
L'Avocat : Mais évidemment! Mr Jordan nous indique que si $|f(s)-f(t)|\leq M|s-t|$ pour s, $t \in [0,2\pi]$, alors $f\in\mathcal{J}$. Or cela est vrai pour toute fonction $\mathbf{C}^1(\mathbb{T})$! Vous voyez...
L'avocat général : Vous pensez bien que je ne vous ai pas torturé de cette façon par hasard. Voici venir Monsieur du Bois–Reymond qui va clore ce procès définitivement. Nous sommes en 1876, c'est à dire peu de temps avant votre Mr Jordan.

L'argument qui suit est en fait dû à Henri Lebesgue, mais le premier exemple construit est dû à du Bois–Reymond.

Posons $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sin(n_k\theta)\chi_{I_k}(\theta)$, $\theta\in]0,\pi[$; où les α_k tendent vers 0, et où

$$\chi_{I_k}(\theta) = \begin{cases} 0 \text{ si } \theta\notin]\frac{\pi}{n_k},\frac{\pi}{n_{k-1}}] \\ 1 \text{ si } \theta\in]\frac{\pi}{n_k},\frac{\pi}{n_{k-1}}] \end{cases}$$

c'est à dire $\chi_{I_k}(\theta)$ fonction caractéristique de l'intervalle $I_k=]\frac{\pi}{n_k},\frac{\pi}{n_{k-1}}]$

et où les entiers (n_k) forment une suite strictement croissante à définir $(n_0=1)$.
Tout d'abord, f est continue sur $]0,\pi[$ car chaque θ n'appartient qu'à l'un des intervalles $]\frac{\pi}{n_k},\frac{\pi}{n_{k-1}}]$; et $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ car $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=0$.
On choisit $\alpha_1=1$, $n_2=2$, de sorte que $f(\pi)=0$ et on prolonge f par parité en une fonction 2π–périodique continue.
On va maintenant préciser les α_k et les n_k. Supposons choisis $n_1<\ldots<n_{k-1}$; $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}$ et les intervalles I_j associés sont définis $(I_1=]\frac{\pi}{2},\pi])$

Posons $\Phi_k(\theta)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j\sin(n_j\theta)\chi_{I_j}(\theta) \text{ si } \theta\in]\frac{\pi}{n_k},\pi]\end{cases}$ 0 sinon sur $[0,\pi]$ et prolongée par parité à $[-\pi,\pi]$ puis par périodicité à $\mathbb{R}$

Alors $\frac{\Phi k(\theta)}{\theta}$ est continue, prolongée de façon à être 2π–périodique et **par le théorème de Riemann** $\left|\hat{f}(n)\right| \to 0$ quand $|n| \to \infty$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0;\pi]} \frac{\Phi_k(\theta)}{\theta} \sin n\theta d\theta = 0$ (Φ_k est supposée paire!).

On choisit alors $n_k = n_1.n_2 \ldots n_{k-1}.N_k$ où $N_k \geq 2k$ assez grand pour que $\left|\frac{2}{\pi}\int_{[0;\pi]} \frac{\Phi_k(\theta)}{\theta} \sin(n_k\theta) d\theta\right| < 1$

Avec ce choix de n_k, on a $I_k =]\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}]$ et on pose : $f(\theta) = \alpha_k \sin(n_k\theta)$ dans I_k.

On doit encore choisir $\alpha_k < 1$. On va estimer les sommes partielles $S_{n_k}(f;0)$.

$$\frac{2}{\pi}\int_{]0,\pi]} f(\theta)\sin(n_k\theta)\frac{d\theta}{\theta} = \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\int_{]0,\frac{\pi}{n_k}]} + \int_{]\frac{\pi}{n_k},\frac{\pi}{n_{k-1}}]} + \int_{]\frac{\pi}{n_{k-1}},\pi]}\right]$$

$$= A_k + B_k + C_k$$

D'après ce qui précède, $C_k = O(1)$ lorsque $k \to \infty$.

Mais $|f(\theta)| \leq 1$ pour tout θ ; par suite, indépendamment du choix des α_k, on a

$$|A_k| \leq \int_{]0,\frac{\pi}{n_k}]} |\sin(n_k\theta)| \frac{d\theta}{\theta} = \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u} du = O(1) \text{ lorsque } k \to \infty$$

Finalement, reste à voir B_k :

$$B_k = \alpha_k \int_{I_k} (\sin(n_k\theta))^2 \frac{d\theta}{\theta} = \alpha_k \int_{I_k} \frac{1-\cos 2n_k\theta}{2\theta} d\theta = \alpha_k \times \frac{1}{2} \times \int_{I_k} \frac{dt}{t} - \alpha_k \int_{I_k} \cos(2n_k t)\frac{dt}{t} = B'_k - B''_k$$

Choisissons $\alpha_k = (\mathrm{Log} N_k)^{-\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

Alors $\lim \alpha_k = 0$, $B'_k = \frac{1}{2}(\mathrm{Log} N_k)^{1-\varepsilon} \to \infty$ et si on examine B''_k, on trouve :

$$\left[\frac{\sin(2n_k\theta)}{2n_k\theta}\right]_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} + \int_{I_k} \frac{\sin 2n_k\theta}{2n_k}\frac{d\theta}{\theta^2}$$

Le choix des n_k montre que la partie intégrée est nulle. L'intégrale restante est dominée par

$$\frac{1}{2n_k}\int_{[\frac{\pi}{n_k},\infty[} \frac{dt}{t^2} = O(1) \text{ lorsque } k \to \infty.$$

On voit donc que $S_{N_k}(f;0) \sim \frac{1}{2}(\mathrm{Log} N_k)^{1-\varepsilon} + O(1)$ lorsque $k \to \infty$.

Par conséquent, on a trouvé une fonction continue dont la série de Fourier ne converge pas en 0 vers la fonction. Evidemment, elle n'est pas à variation bornée en 0 comme on peut le vérifier trivialement.

Au point où nous en sommes, résumons–nous car à partir de cet instant, nous quittons le *"procès de Fourier"* pour entrer dans la période contemporaine.

1) Si $f\in C(\mathbf{T})$, $\|f\|_2^2 = \sum \left|\hat{f}(n)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$. En particulier, $\lim_{n\to\infty} \left|\hat{f}(n)\right| = 0$ si $|n|\to\infty$

2) Si $f\in C(\mathbf{T})$ il existe une suite de polynômes $(P_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ trigonométriques qui converge uniformément vers f sur $\mathbf{T}$.

3) Si f est continue à variation bornée, $\lim_{N\to\infty} S_N(f;x) = f(x)$ pour tout $x\in\mathbf{T}$

En outre on peut même prouver que dans ce cas, $\lim_{N\to\infty}\|S_N(f)-f\|_\infty = 0$, (ce qui précise 2) lorsque f est à variation bornée.

4) Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas vers la fonction (et même est non bornée en un point!).

Pendant toute la période envisagée, la notion d'intégrale s'est faite plus précise. **On abandonne progressivement l'idée de primitive** et on considère des approximations discrètes dont le point culminant sera donné par B. Riemann dans un unique Mémoire éblouissant où il soulèvera une question promise à une histoire dont nous ne connaissons pas le terme : la conjecture de Riemann associée à la fonction $\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-s}$; $\mathrm{Re}(s)>1$.

Pendant une courte période, certaines recherches conduisent à raffiner encore le travail de Jordan.

Voici deux résultats de ce type ; pour des raisons liées au développement historique nous ne démontrons que le premier.
Commençons d'abord par quelques propriétés de D_N :

$$\tilde{D}_N(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{|n|\le N} e^{inx}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{D}_N dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{D}_N dt = 1 \text{ pour tout N} ; \left|\tilde{D}_N(t)\right| \le N+\frac{1}{2} \text{ pour tout N.}$$

Comme $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \le \frac{\pi}{2t}$ pour $t\in]0,\pi[$, $\left|\tilde{D}_N(t)\right| \le \frac{\pi}{2|t|}$, $|t|\in]0,\pi[$ pour tout N.

Il est utile et essentiel de remplacer $\tilde{D}_N$ par une autre expression :

$$D^*_N(t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{D}_{N-1}(t) + \tilde{D}_N(t)\right) = \frac{\sin Nt}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}\right)}$$

De plus $\widetilde{D}_N(t) - D^*_N(t) = \frac{[D_N(t)-D_{N-1}(t)]}{2} = \cos Nt$. De la sorte,

$$S_N(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\widetilde{D}_N(x-t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D^*_N(x-t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos N(x-t)dt$$

Par le théorème de Riemann, ($\left|\hat{f}(n)\right| \to 0$ quand $n\to\infty$) on voit que

$$S_N(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D^*_N(x-t)dt + o(1) \text{ (où } o(1) \text{ est UNIFORME en x)}$$

Supposons maintenant qu'il existe une constante A telle que pour UN $x\in\mathbb{T}$ on ait

$\int_{[0,\pi]}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right]\frac{dt}{t} < +\infty$; Nous avons $S^*_N(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D^*_N(x-t)dt$ et

$$S^*_N(f,x) - A = \frac{2}{\pi}\int_{[0,\pi]}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right]\frac{\sin Nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt$$

Notre hypothèse sur f équivaut maintenant à dire que $\int_{\mathbb{T}}\left|\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right]\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right| dt < +\infty$

C'est beaucoup moins fort que de demander que la fonction
$F_x(t) = \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right)\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}$ soit continue même si f est continue.

On est donc ramené à la question suivante : si $\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|\,dt < +\infty$ s'ensuit-il que

$$\lim_{|N|\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-iNt}dt = 0 \text{ ?}$$

Il y a une foule de problèmes cachés derrière la question. Enfin, si on accepte de parler de façon un peu vague et que l'on admet la dernière propriété (Extension du théorème de Riemann) on voit que : $\lim_{|N|\to\infty} S^*_N(f,x) - A = \lim_{N\to\infty}(S_N(f,x) - A) = 0$

Théorème (Dini)
Soit f une fonction sur le tore *"intégrable"*. Supposons l'existence d'un nombre A tel que pour un $x \in \mathbf{T}$ $\int_{\pi} \left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A \right] \frac{dt}{t} < +\infty$. Alors $\lim_{N\to\infty} S_N(f,x)=A$

Nous avons signalé plus haut que peu à peu la notion d'intégrale s'était évadée de son sens premier : la primitive d'une fonction.
C'est Henri Lebesgue qui tente le premier d'y voir clair en cherchant à COMPRENDRE LE PROBLEME DE LA DERIVABILITE D'UNE FONCTION.

Définition : On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle si pour tout $\varepsilon>0$, il existe une suite d'intervalles $I_k=]a_k,b_k[$ (le fait qu'ils soient ouverts, fermés ou non n'a aucune importance ici) telle que $\sum_k (b_k-a_k) \leq \varepsilon$ et que $\bigcup_k I_k \supset A$.

Il est immédiat qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure de Lebesgue nulle est encore de mesure de Lebesgue nulle.

Théorème : soit f une fonction monotone sur l'intervalle $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}$. Alors f est dérivable en tout point à l'exception peut-être d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Ce résultat remarquable et profond demande trop de place pour être démontré ici. Il repose sur un lemme remarquablement simple au nom évocateur : le lemme du soleil couchant (ou levant selon l'humeur). On en trouvera un exposé superbe dans le livre *"Leçons d'Analyse Fonctionnelle"* de B. Riesz et S. Nagy.
Autrement dit toute fonction à variation bornée est dérivable presque partout! C'est vraiment le point culminant de la théorie à ce stade. On est donc infiniment loin avec le théorème de Dirichlet, de Jordan, de Dini, d'atteindre l'ensemble des fonctions continues et on a vu par ailleurs (du Bois-Reymond) que la classe des fonctions continues reste mystérieuse pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier.

Le théorème de Lebesgue change le paysage du tout au tout. SI LES ENSEMBLES EXCEPTIONNELS DE LA DERIVATION SONT LES ENSEMBLES DE MESURE NULLE, IL DOIT ETRE POSSIBLE D'INTEGRER DES FONCTIONS QUI NE SONT DEFINIES QUE PRESQUE PARTOUT!
Le changement de point de vue est total ; le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle en verra d'autres ; je ne crains pas d'affirmer que la théorie de l'intégration de Lebesgue représente la même volte conceptuelle que la théorie de la relativité dont elle est contemporaine.

Il ne serait pas juste de ne pas mentionner que le Mémoire déjà cité de Riemann, uniquement préoccupé de légitimer le procédé d'intégration par un passage à la limite trouve, 40 ans avant Lebesgue la même condition pour qu'une fonction soit intégrable (au sens ancien) : la fonction ne doit avoir de points de discontinuité que sur un ensemble négligeable.

Mais Riemann ne fait RIEN de cette condition et C'EST COMPREHENSIBLE. toute la période historique antérieure conduit à chercher des RAFFINEMENTS successifs et à LEGITIMER pour des classes plus vastes de fonctions, les résultats anciens. Il ne pouvait PAS VENIR A L'IDEE DE RIEMANN que la condition ainsi trouvée était fondamentale : il ne sert à rien et on ne peut rien trouver en cherchant à INTEGRER DES FONCTIONS DE PLUS EN PLUS DISCONTINUES.

Par exemple $f(n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\cos 2\pi n!\ x)^m$ est discontinue en tout point et pourtant "provient" de fonctions continues. Elle n'est pas intégrable Riemann. Ce qui évidemment condamne ipso facto cette conception. Que peut on faire d'une intégrale qui n'autorise pas les passages à la limite les plus simples?
Pour Riemann, la condition trouvée était jolie et elle lui PROUVAIT que la classe naturelle des fonctions "les plus générales de l'analyse" était constitué par les fonctions CONTINUES.

Une fois l'intégration de Lesbegue mise au point les choses allèrent très vite : d'abord on s'aperçoit que l'espace vectoriel $\mathbf{C}[a,b]$ des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt^{1/p}\right)$ pour $p\in[1,\infty]$ admet un complété qui est UN NOUVEL ESPACE DE FONCTIONS DEFINIES PRESQUE PARTOUT.

On étendit très vite à l'espace $L^2(\mathbf{T})$ le théorème suivant :

Théorème : Soit $f\in L^2(\mathbf{T})$ et $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbf{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier alors

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|^2 \text{ et } f=\lim_{N\to\infty} S_N(f) \text{ au sens de la norme précédente : } \lim_{N\to\infty} \|f-S_{N(f)}\|_2=0.$$

De là on tire le

Corollaire :
Soit $f\in L^2(\mathbf{T})$; il existe une suite strictement croissante (N_k) d'entiers telle que $S_{N_k}(f)\to f$ presque partout.

N'eût été le résultat de du Bois–Reymond, on aurait pu se demander **si, lorsque** $f\in\mathbf{C}(\mathbf{T})$ il existe une suite (N_k) d'entiers telle que $S_{n_k}(f)\to f$ **partout**. Les choses prirent une autre tournure. Le mathématicien russe Kolmogorov prouva autour des années 40 le résultat suivant.

Théorème : Il existe une fonction $f\in L^1(\mathbf{T})$ telle que $S_N(f)$ diverge en tout point du tore.

Avec ce résultat, le mystère des fonctions continues rebondissait à une hauteur jamais atteinte (continues partout, nulle part dérivables, elles avaient cessé depuis longtemps d'être des monstres pour devenir l'objet GENERIQUE FONCTION CONTINUE : avez vous déjà vu une fonction continue? Voilà un beau thème de méditation! **Prouver** qu'il vous est impossible d'en TRACER UNE AU TABLEAU MÊME SI VOUS VOUS PERSUADEZ QUE VOUS AVEZ UN TRAC MONSTRE...).

Toute fonction continue n'est-elle pas $L^1(\mathbf{T})$? Est-ce que l'exemple de du Bois-Reymond pouvait signifier qu'il existe des fonctions CONTINUES dont la série de Fourier DIVERGE partout? Horresco referens! Evidemment l'exemple de Kolmogorov ne prouvait rien car elle n'était pas voisine d'une fonction continue!
Ce problème tourmenta des générations de mathématiciens tous plus brillants les uns que les autres.
En 1966 paru dans la revue *"Acta Mathematica"* un article du (alors jeune) mathématicien Lennart Carlson qui prouvait le

THEOREME :
Soit $f \in L^2(\mathbf{T})$. Alors $S_N(f) \to f$ presque partout.

Ce théorème, achèvement temporaire d'une série de questions sur le tore, lui valut la médaille Fields. Une démonstration exhibable en Licence est encore attendue à ce jour.
Ce résultat fut vite complété par le

THEOREME : Soit $f \in L^p(\mathbf{T})$, $p \in]1,+\infty]$; alors $S_N(f) \to f$ presque partout.

Ce résultat est dû à Hunt. Le cas $p=+\infty$ est **inclus** dans le théorème de Carlson de façon triviale.
Signalons une conséquence amusante de ce résultat EXTRAORDINAIRE. En 1988-1989, parut dans la RMS un curieux article sur les fonctions analytiques. L'auteur, cherchant sans doute à allécher le lecteur, posa deux questions d'entrée de jeu : les voici.

1) Peut-on trouver une série entière de rayon de convergence 1 prolongeable en une fonction continue au disque fermé dont la série de Fourier associée diverge partout? A défaut, une série uniformément bornée sur le disque fermé admettant la même propriété.

2) Peut-on trouver une série entière **partout** convergente sur le cercle (de rayon de convergence égal à 1) dont la série de Fourier associée ne soit pas la série d'une fonction de $L^1(\mathbf{T})$?

Ces deux questions (l'article abonde de bizarreries) sont étranges. Voici pourquoi. **La réponse à la question 1)** est **NON** et cela résulte immédiatement du THEOREME DE Carlson.
Si j'ai bien compris la question on se donne $\varphi(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence égal à 1 et on suppose que φ se prolonge en une fonction $\tilde{\varphi}$ continue sur le disque unité fermé.

Regardons $\|\varphi_r\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} |a_n| r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta$. Comme φ est bornée dans $\overline{\mathbf{D}}$, un passage à la limite de convergence dominée donne

$\|\tilde{\varphi}\|_2^2 = \sum |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\tilde{\varphi}(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$ où par abus de notations on a noté $\tilde{\varphi}$ la restriction de $\tilde{\varphi}$ au cercle unité. Les coefficients de $\tilde{\varphi}$ sont donc les a_n et par le théorème de Carlson $S_N(\varphi) \to \tilde{\varphi}$ presque partout.

On peut faire de même pour une série uniformément bornée par un raisonnement à peine plus compliqué (il faut utiliser la compacité faible des boules de $L^\infty(\mathbf{T})$ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Comment un élève de Spéciales même génial pourrait–il avoir l'idée d'une pareille propriété?

Quant à la seconde question, il est évident que le problème est aussi peu naturel que possible car la propriété indiquée (convergence PARTOUT) n'est pas un invariant de la classe de la fonction dans $L^1(\mathbf{T})$. Enfin, on peut certainement trouver un exemple (qui n'apporte RIEN à la théorie).

Il est connu que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{Log}(1+n)}$ converge partout et sa somme définit une fonction sur le tore qui n'appartient pas à $L^1(\mathbf{T})$.

Si on pose $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\mathrm{Log}(1+n)}$, φ est une série entière de rayon de convergence égal à 1 et

$\varphi(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{\mathrm{Log}(1+n)}$ converge partout sauf au point 0 ($\equiv 2\pi$).

La série converge donc presque partout pour la mesure de Lebesgue et par suite répond PRESQUE à la question posée. Si on veut éviter le problème en $\theta=0$ ($\equiv 2\pi$) il suffit de prendre

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{in\theta}}{\mathrm{Log}(1+n)}$ dont la partie imaginaire est $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\theta)}{\mathrm{Log}(1+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n(\theta+\pi)}{\mathrm{Log}(1+n)}$ et donc n'appartient pas à $L^1(\mathbf{T})$!

Il n'est donc pas inutile de noter à ce propos qu'il n'est pas SAIN de proposer des thèmes de réflexion à la RMS qui, ou bien dépassent de très loin le NIVEAU éventuel de CONNAISSANCES des élèves, ou sont des problèmes formels dont on ne s'est pas ASSURE DE L'intérêt MATHEMATIQUE!

In fine, je ne peux que prendre la balle au bond à propos d'un très vieux serpent de mer puisque la RMS à réouvert le débat récemment. Doit–on enseigner l'intégrale de Lesbegue dès le premier cycle?

Mon opinion est qu'on y a trop facilement renoncé MÊME SI CELA DEMANDE UN EFFORT PEDAGOGIQUE CONSIDERABLE. En tout cas, rien n'est pire que de construire la $n^{ième}$ (n grand) intégrale intermédiaire entre Riemann et Lebesgue. **Rien n'est pire car cela fausse complètement les idées**. Il ne vient à l'idée de personne de construire une mécanique intermédiaire entre la mécanique galiléene et la théorie de la relativité restreinte même si l'enseignement de celle–ci est loin d'être parfaite.

Au bout de ce périple, il nous reste à signaler au lecteur (à la lectrice) des ouvrages à mes yeux fondamentaux ET TRES LISIBLES (crayon en main).

1) R.E. EDWARDS : Fourier series, a Modern Introduction, 2 tomes (Springer Graduate Texts in Mathematics).
Ce livre où ABONDENT les sujets intéressants y compris en exercices est la version moderne de l'ouvrage immortel de Antoni Zygmund. Le premier tome traite du point de vue classique, le second du point de vue contemporain (dont nous traitons dans la seconde partie).

2) T.W. KÖRNER : Fourier Analysis ; Cambridge University Press
Itinéraire très plaisant et varié, tout en restant élémentaire, avec des notes historiques.

3) J.P. KAHANE et R. SALEM : Ensembles parfaits et séries trigonométriques ; Herman, Nouvelles Editions).
Monographie classique écrite de façon superbe montrant les liens entre l'Analyse Harmonique classique et la théorie des nombres.

4) J.P. KAHANE ; P.G. LEMARIE–RIEUSSET : Fourier series and Wavelets ; à paraître en 1995 chez Gordman and Breach).
Cet ouvrage renouvelle complètement le style des livres de mathématiques ; la première partie est un itinéraire historique très documenté dans l'Analyse de Fourier classique et contemporaine, la seconde rassemble une étude approfondie du dernier sujet découvert qui implique aussi un bouleversement complet de notre conception des séries de Fourier : les Ondelettes.

5) A. TORCHINSKY : Real Harmonic Analysis (Academic Press)
Ce livre, très intéressant, introduit aux questions actuelles des intégrales singulières : il fait le point des résultats les plus importants obtenus récemment, tout en partant d'un niveau raisonnable, de sorte qu'on peut le lire sans trop de peine. Malheureusement, le texte est constellé de fautes de frappe (peut–être pire) et cela oblige à une vigilance constante.

NOMBRES SUPERABONDANTS

Eric KERN

(Maître de Conférences à l'U.F.R. de Mathématiques - Strasbourg)

'*L'Ouvert*' a déjà parlé des nombres parfaits à deux occasions :
– dans le n° 14 (fév. 78), un article de J. Lefort sous le joli titre "Amitié",
– dans le n° 32 (sept. 83), un article de E. Ehrhart intitulé "Une suite remarquable".
Il s'agit de la suite (u_n)

$$u_n = \frac{\sigma_n}{n} \text{ où } \sigma_n \text{ est la somme des diviseurs de l'entier } n.$$

Aujourd'hui, nous vous proposons dans le même ordre d'idée un problème posé et résolu par E. Kern sur les nombres superabondants. Comme les articles évoqués plus haut remontent assez loin dans le temps, il n'est peut-être pas inutile de rappeler quelques définitions et informations historiques concernant les nombres abondants (aussi appelés surabondants), déficients, parfaits.

Nicomaque de Gérase (II^{e} siècle) décrit ainsi ces trois types de nombres dans son "Introduction arithmétique" :

"...*Parmi les nombres simplement pairs, les uns sont surabondants, les autres déficients : ces deux classes sont comme deux extrêmes opposés l'un à l'autre; quant à ceux qui occupent le milieu entre les deux, ils sont dits parfaits. Et ceux que l'on dit opposés les uns aux autres, surabondants et déficients, se répartissent, à l'intérieur de leur condition qui est l'inégalité, entre le trop et le trop peu. En effet, on ne peut concevoir un autre mode de l'inégalité distinct de ces deux-là – ni un vice ou une maladie, ni une disproportion ou un manque de convenance ou toute autre chose de ce genre. Du côté du trop, en effet, se produisent les excès, les superfluités, les exagérations et les abus; du côté du trop peu les manques, les défauts, les privations et les insuffisances; et dans ce qui se trouve entre le trop et le trop peu, c'est-à-dire l'égal, se produisent les vertus, les justes mesures, les convenances et les beautés et les choses du même genre – dont la forme la plus exemplaire est l'espèce de nombre que l'on appelle parfait.*

Donc le nombre surabondant est celui qui, outre les parties qui lui conviennent et qui lui échoient, en a d'autres plus nombreuses, comme si un animal adulte était formé de trop de parties ou de membres, "ayant dix langues", comme le dit le poète, et dix bouches, ou neuf lèvres, et pourvu de trois rangées de dents; ou à cent bras, ou ayant trop de doigts à l'une des deux mains. De même un nombre, si, après qu'on a rencensé toutes les parties qui sont en lui, qu'on les a récapitulées en un seul ensemble, et qu'on l'a confronté à elles, on trouve qu'il a des parties propres qui le surpassent, ce nombre est appelé surabondant; en effet il dépasse *la mesure du parfait à l'égard de ses parties. Tels sont 12, 24 et d'autres; en effet 12 a une moitié, 6, un tiers, 4, un quart, 3, un sixième, 2, un douzième, 1, lesquels récapitulés ensemble font 16, qui est plus que le 12 initial; donc ses parties surpassent le tout. Quant à 24, il a lui aussi une moitié, un tiers, un quart, un sixième, un huitième, un douzième, un vingt-quatrième, qui se trouvent être 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1; or, récapitulés ensemble ils forment 36, qui lorsqu'on le compare au 24 initial, est trouvé plus grand que celui-ci, quoiqu'il soit composé uniquement de ses parties; donc, ici encore, les parties surpassent le tout...*"

Au début du Livre VII des **Eléments** (définition 23) Euclide définit le nombre parfait :
"*Le nombre parfait est égal à ses parties*" et les successeurs d'Euclide précisaient "*parties aliquotes*".

Ainsi 6 est parfait car $6 = 3 + 2 + 1$
28 est parfait car $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$

Dans la dernière proposition du Livre IX des **Eléments**, Euclide énonce et démontre un très beau théorème que l'on formule ainsi aujourd'hui :
Si $2^n - 1$ est premier alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est un nombre parfait ($n \geq 2$). On obtient de cette façon les premiers nombres parfaits suivants :

n	nombre parfait
2	6
3	28
5	496
7	8 128
9	1 130 816
11	2 096 128
13	33 550 336
(15)	...
17	8 589 869 056
19	137 438 691 328
(21)	...
23	35 184 367 894 528

En se référant spécifiquement aux quatre premiers, Nicomaque signalait qu'ils se terminaient alternativement par 6 et 8, et que le premier était compris ente 1 et 10, le second entre 10 et 100, le troisième entre 100 et 1 000, le quatrième entre 1 000 et 10 000. Ces observations furent bientôt extrapolées par Jamblique (III^e – IV^e s.) qui affirma qu'entre chaque puissance de dix et la suivante se trouvait toujours un nombre parfait et que tous ceux-ci se terminaient alternativement par 6 et par 8, affirmations acceptées et répétées durant tout le Moyen Age et la Renaissance en Occident. Mais cette affirmation avait déjà été contredite par Abu Tahir al-Baghdadi (XI^e – XII^{e}s.) qui faisait remarquer qu'il n'y a pas de nombre parfait entre 10 000 et 100 000. Par ailleurs on observera que $n = 15$ ne donne pas un nombre parfait

$$(2^{15} - 1 = 32\ 767 = 7 \times 31 \times 151 \text{ n'est pas premier})$$

et que l'alternance 6 - 8 - 6 - 8 est rompue.

Les nombres parfaits donnés par le théorème d'Euclide sont forcément pairs ce qui pose deux questions :
1) Tous les nombres parfaits pairs sont-ils de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$?
2) Existe-t-il des nombres parfaits impairs?

Euler (1707 - 1783) répondit par l'affirmative à la première question et le démontra. Quant à la seconde elle reste ouverte.

Voici deux références bibliographiques (qui en contiennent beaucoup d'autres) pour ceux qui voudraient approfondir cette question :

Ettore PICCUTTI "*Pour l'histoire des sept premiers nombres parfaits*", Historia Mathematica 16 (1989), pp. 123-136.

Michel CRUBELLIER et Jacky SIP "*A la recherche des nombres parfaits*" dans Histoires de problèmes, histoire des mathématiques, Commission Inter-IREM, éd. Ellipses (1993).

Problème

Soient $2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_r < \ldots$ la suite des premiers rangés par ordre croissant. Si $n \geq 1$ est un entier on pose $\sigma(n) = \Sigma_{d|n} d$. Ainsi, par exemple, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$. On dira que $n \geq 1$ est superabondant (*) si $\frac{\sigma(k)}{k} < \frac{\sigma(n)}{n}$ pour tout $1 \leq k < n$. Montrer que si n est superabondant on a

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \text{ avec } \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_r \geq 1.$$

Montrer qu'il existe une infinité d'entiers superabondants.

Solution

On remarque d'abord que $\sigma(n)$ est multiplicative dans le sens suivant : si pgcd $(n_1, n_2) = 1$ on a $\sigma(n_1 n_2) = \sigma(n_1)\sigma(n_2)$. En effet, on a $d|n_1 n_2$ si et seulement si $d = d_1 d_2$ avec $d_1|n_1$ et $d_2|n_2$ et on a donc bien $\sigma(n_1 n_2) = \Sigma_{d_1|n_1} \Sigma_{d_2|n_2} d_1 d_2 = (\Sigma_{d_1|n_1} d_1) \times (\Sigma_{d_2|n_2} d_2) = \sigma(n_1)\sigma(n_2)$. Posons alors pour simplifier $\omega(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$ qui est donc aussi multiplicative, i.e. pgcd $(n_1, n_2) = 1 \Rightarrow \omega(n_1 n_2) = \omega(n_1)\omega(n_2)$. Soit maintenant $n \geq 2$ un entier superabondant. Soit $n = q_1^{\alpha_1} \ldots q_r^{\alpha_r}, q_1 < \ldots < q_r$ la décomposition en facteurs premiers de n (donc $r \geq 1$ et $\alpha_i \geq 1$ si $1 \leq i \leq r$). Nous allons montrer que l'on a $(q_1, \ldots, q_r) = (p_1, \ldots p_r)$. Supposons que l'égalité n'ait pas lieu. Posons $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ et soit $1 \leq i \leq r$ le plus petit indice t.q. $\alpha_1 \neq \alpha_i$. On aura donc $p_j < q_j$ si $1 \leq i \leq j \leq r$. Posons $m_1 = \Pi_{1 \leq k < i}\, p_k^{\alpha_k}$, avec

(*) La notion de superabondant ne coïncide donc pas avec celle de surabondant. Exemple : 96 est surabondant, mais non pas superabondant.

$m_1 = 1$ si $i = 1$. On a donc $m = m_1 \times \Pi_{i \leq j \leq k}\ p_j^{\alpha_j}$ et $n = m_1 \times \Pi_{i \leq j \leq k}\ q_j^{\alpha_j}$ de sorte que $m < n$.
D'autre part on a

$$\omega(m) = \omega(m_1) \times \Pi_{i \leq j \leq k}\ \omega(p_j^{\alpha_j}) \ ; \ \omega(n) = \omega(m_1) \times \Pi_{i \leq j \leq k} \omega(q_j^{\alpha_j})$$

et on a donc $\omega(m) > \omega(n)$ car si $p < q$ premiers et $\alpha \geq 1$ on a

$$\omega(p^\alpha) = \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} = \frac{1 + p + \ldots + p^\alpha}{p^\alpha} = 1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^\alpha},$$

donc $\omega(q^\alpha) < \omega(p^\alpha)$. Comme $m < n$ et que $\omega(m) > \omega(n)$ ceci contredit le fait que n est superabondant. On a donc bien $(p_1, \ldots, p_r) = (q_1, \ldots, q_r)$. Remarquons que le cas $n = 1$ correspondant simplement à $r = 0$, i.e. pas de facteurs, on a $r = 1, \alpha_1 = 0$ et la conclusion reste trivialement valable dans ce cas. Montrons maintenant que si $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} \geq 2, \alpha_i \geq 1$ pour $1 \leq i \leq r$ est superabondant, alors on a $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_r \geq 1$. S'il n'en est pas ainsi il existe donc un $1 \leq i < j \leq r$ t.p. $\alpha_i < \alpha_j$. Si on pose

$$n_1 = \Pi_{1 \leq k \leq n, k \neq i, k \neq j}\ p_k^{\alpha_k} \text{ et } m = n_1 \times p_i^{\alpha_j} p_j^{\alpha_i}$$

donc $n = n_1 \times p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j}$ tout revient à montrer que l'on a $m < n$ mais que $\omega(m) \geq \omega(n)$ et ceci résultera du lemme suivant :

Lemme : Si $2 \leq p < q$ sont des premiers et si $1 \leq \alpha < \beta$ sont des entiers alors on a

$$p^\beta . q^\alpha < p^\alpha q^\beta \text{ et } \omega(p^\beta . q^\alpha) > \omega(p^\alpha . q^\beta).$$

Tout d'abord la condition $p^\beta . q^\alpha < p^\alpha q^\beta$ s'écrit aussi $p^{\beta - \alpha} < q^{\beta - \alpha}$ qui est vraie car $p < q$ et $\beta - \alpha \geq 1$.
Reste maintenant à vérifier que l'on a bien $\omega(p^\beta q^\alpha) > \omega(p^\alpha q^\beta)$. Or on a

$$\omega(p^\lambda) = 1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^\lambda} = \frac{1 - \frac{1}{p^{\lambda+1}}}{1 - \frac{1}{p}}$$

et tout revient donc à montrer que l'on a

$$(*) \qquad (1 - \frac{1}{p^{\alpha+1}})(1 - \frac{1}{q^{\beta+1}}) < (1 - \frac{1}{p^{\beta+1}})(1 - \frac{1}{q^{\alpha+1}}).$$

Posons pour simplifier $\gamma = \alpha + 1 \geq 2$ et $r = \beta - \alpha \geq 1$. L'inégalité (*) s'écrit alors

$$(1 - \frac{1}{p^\gamma})(1 - \frac{1}{q^{\gamma+r}}) < (1 - \frac{1}{p^{\gamma+r}})(1 - \frac{1}{q^\gamma})$$

i.e.

$$1 - \frac{1}{p^\gamma} - \frac{1}{q^{\gamma+r}} + \frac{1}{p^\gamma q^{\gamma+r}} < 1 - \frac{1}{p^{\gamma+r}} - \frac{1}{q^\gamma} + \frac{1}{p^{\gamma+r} q^\gamma}$$

i.e.

$$\frac{1}{p^{\gamma+r}}+\frac{1}{q^{\gamma}}+\frac{1}{p^{\gamma}q^{\gamma+r}}<\frac{1}{p^{\gamma}}+\frac{1}{q^{\gamma+r}}+\frac{1}{p^{\gamma+r}q^{\gamma}}$$

i.e. en multipliant par $p^{\gamma+r}\times q^{\gamma+r}$

$$q^{\gamma+r}+q^{r}p^{\gamma+r}+p^{r}<p^{r}q^{\gamma+r}+p^{\gamma+r}+q^{r}$$

et comme $p^r<q^r$ il suffit de montrer que l'on a

$$q^{\gamma+r}+q^{p\,\gamma+r}<p^{r}q^{\gamma+r}+p^{\gamma+r}$$

i.e.

$$p^{\gamma+r}(q^r-1)<q^{\gamma+r}(p^r-1)$$

i.e.

$$\frac{q^r-1}{p^r-1}<\frac{q^{\gamma+r}}{p^{\gamma+r}}$$

et comme $\gamma=\alpha+1\geq 2$ et que $\frac{q}{p}>1$ il suffit de montrer que

$$\frac{q^r-1}{p^r-1}<\frac{q^{r+2}}{p^{r+2}}$$

i.e.

$$(q^r-1)p^{r+2}<(p^r-1)p^{r+2}.$$

Considérons alors la fonction de la variable réelle $x\geq p$

$$\begin{aligned}
f(x)&=(p^r-1)x^{r+2}-(x^r-1)p^{r+2}.\text{ On a } f(p)=0.\text{ D'autre part}\\
f'(x)&=(p^r-1(r+2)x^{r+1}-rx^{r-1}p^{r+2}\\
&=x^{r-1}[(p^r-1)(r+2)x^2-rp^{r+2}]\\
&\geq x^{r-1}[(p^r-1)(r+2)p^2-rp^{r+2}]\\
&=x^{r-1}\times p^2[(p^r-1)(r+2)-rp^r]\\
&=x^{r-1}\times p^2[2p^r-(r+2)]\geq x^{r-1}\times p^2[2^{r+1}-(r+2)]
\end{aligned}$$

Donc $f'(x)>0$ dès que $2^{r+1}-(r+2)>0$ ce qui est vrai si $r\geq 1$, car en considérant $\varphi(x)=2^{x+1}-(x+2)$ on a $\varphi(1)=2^2-3=1>0$ et $\varphi'(x)=\ln(2)\times 2^{x+1}-1$, donc $\varphi'(x)\geq 0$ si $2^{x+1}\geq\frac{1}{\ln 2}$ i.e. $(x+1)\ln 2\geq\ln(\frac{1}{\ln 2})$ i.e. $x\geq-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln(2)}-1\simeq-0,47$. Donc $f(x)$ est strictement croissante sur les $x\geq p$ et on a donc bien $f(q)>0$ si $q>p$, ce qui démontre le lemme.

Montrons enfin qu'il existe une infinité d'entiers superabondants. On rappelle que la série $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$ est divergente (résultat classique de la théorie des nombres). On en déduit que $\Pi_{k=1}^{\infty}\omega(p_k)=+\infty$ car

$$\ln\left(\omega(p_k)\right)=\ln(1+\frac{1}{p_k})\sim\frac{1}{p_k}.$$

Si on pose $n_r = p_1 \dots p_r$ on a $\omega(n_r) = \omega(p_1)\dots\omega(p_r) \to +\infty$ quand $r \to +\infty$, donc lim $\sup_{n\to+\infty}\omega(n) = +\infty$.

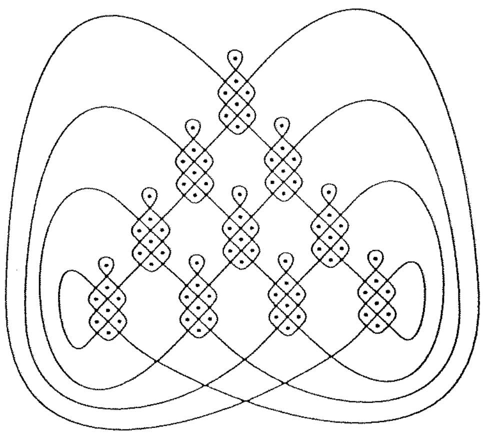
Par conséquent si n est un entier superabondant, il existe un plus petit entier $n < m$ t.q. $\omega(n) < \omega(m)$ et m est alors superabondant, donc l'ensemble des superabondants est infini.

Question subsidiaire

Si $n \geq 1$ est un entier, on dit qu'un diviseur $1 \leq d \leq n$ de n est unitaire si pgcd $(d, \frac{n}{d}) = 1$. On pose alors $\sigma^*(n) = \Sigma_{d/n} d$. On dit que n est unitairement superabondant si $\frac{\sigma^*(k)}{k} < \frac{\sigma^*(n)}{n}$ pour $1 \leq k < n$. Déterminer les entiers unitairement surabondants.

Solution (abrégée)

La fonction $\sigma^*(n)$ est multiplicative i.e. si $n = n_1.n_2$ et pgcd $(n_1, n_2) = 1$ alors $\sigma^*(n) = \sigma^*(n_1).\sigma^*(n_2)$ puisque, comme on le vérifie aisément, si $d = d_1 \times d_2$ avec $d_1|n_1$ et $d_2|n_2$ alors d est un diviseur unitaire de n si et seulement si α_1 est un diviseur unitaire de n_1 et d_2 est un diviseur unitaire de n_2. Il en est donc de même de $\omega^*(n) = \frac{\sigma^*(n)}{n}$. Si p est premier et si $\alpha \geq 1$, on a $\omega(p^\alpha) = \frac{1+p^\alpha}{p^\alpha} = 1 + \frac{1}{p^\alpha}$. Si $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_r^{\alpha_r} \geq 2$, $q_1 < \dots < q_r$, $\alpha_i \geq 1$ pour $1 \leq i \leq r$ est la décomposition en facteurs premiers de n et si on pose $m = p_1 \dots p_r$ et si $(q_1, \dots, q_r) \neq (p_1 \dots p_r)$ ou si l'un des $\alpha_i est \geq 2$ on a $m < n$ et $\omega^*(m) > \omega^*(n)$. Donc si $n \geq 2$ est unitairement superabondant on a $n = p_1 p_2 \dots p_r$. Réciproquement il est facile de voir que si $n = p_1 p_2 \dots p_r$ alors n est unitairement superabondant, en effet, sinon il existerait un $2 \leq m < n$ t.p. $\omega^*(m) \geq \omega^*(n)$. Or on a $m = q_1^{\alpha_1} \dots q_s^{\alpha_s}, q_1 < \dots < q_s, \alpha_i \geq 1$ pour $1 \leq i \leq s$. En posant $t = q_1 \dots q_s$ on a $t \leq m < n$ et $\omega^*(n) < \omega^*(m) < \omega^*(t)$. Comme $\omega^*(n) = (1 + \frac{1}{p_1}) \dots (1 + \frac{1}{p_r})$ et que $\omega^*(t) = (1 + \frac{1}{q_1}) \dots (1 + \frac{1}{q_s})$. On en déduit aisément une contradiction car $q_i \geq p_i$, donc $s < r$ etc... Les unitairement superabondants sont donc les entiers $n = 1$ et $n = p_1 \dots p_r$ $(r \geq 1)$.



Dessin symétrique et 2-linéaire extrait de l'ouvrage
"Une tradition géométrique en Afrique
Les dessins sur le sable"
éd. L'Harmattan (1995)
de Paulus GERDES

- Tome 1 : Analyse et reconstruction.
- Tome 2 : Exploration éducative et mathématique.
- Tome 3 : Analyse comparative.

Table des premiers nombres superabondants

$2 = 2$ déficient

$4 = 2^2$ déficient

$6 = 2 \times 3$ parfait

$12 = 2^2 \times 3$

$24 = 2^3 \times 3$

$36 = 2^2 \times 3^2$

$48 = 2^4 \times 3$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$102 = 2^3 \times 3 \times 5$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

$1\ 260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$1\ 680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$

$2\ 520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$5\ 040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$10\ 080 = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$15\ 120 = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7$

$25\ 200 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

$27\ 720 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$

$55\ 440 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$

$110\ 880 = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$

$116\ 320 = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$

$277\ 200 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$

$332\ 640 = 2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$

$554\ 400 = 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$

$665\ 280 = 2^6 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$

$720\ 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

$1\ 441\ 440 = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

$2\ 162\ 160 = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

$3\ 603\ 600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$

$4\ 324\ 320 = 2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

$7\ 207\ 200 = 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$

$8\ 648\ 640 = 2^6 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

$10\ 810\ 800 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$

$21\ 621\ 600 = 2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$

$36\ 756\ 720 = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17.$

UNE NOUVELLE BROCHURE
PROBLÈMES DE MISE EN ÉQUATION :
ces charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues

AUTEURS :	Groupe math - français de l'IREM de Strasbourg: Isabelle BECK, Nicole CORDIER, Geneviève DIDIERJEAN, Claire DUPUIS, Raymond DUVAL, Marie-Agnès EGRET, Daniel KREMER, Gilles ROBERT, Michèle VAILLANT, Brigitte WENNER, Ghislaine WERGUET, Michèle ZIEGLER.
DATE :	Janvier 1996
EDITEUR :	IREM de Strasbourg (S.165)
MOTS - CLES :	Système d'équations linéaire à deux inconnues, mise en équations, lecture d'énoncés.
RESUME :	Une nouvelle approche d'apprentissage de la mise en équations d'un système à deux inconnues est proposée dans cette brochure. Dans une première partie, nous procédons à un état des lieux dans les manuels scolaires et les brochures sur ce thème. Une autre partie est consacrée à l'analyse de la tâche cognitive que constitue le passage de l'énoncé à l'écriture d'un système. Suite à cette analyse, une méthodologie d'enseignement est proposée.
NOMBRE DE PAGES :	62
ISBN :	2 -911446 - 01- 1

Comprenne qui voudra,
moi mon remords ce fut l'inconnue
qui resta sur le papier
(variante d'un poème d'Eluard,
sur une idée de R. Duval)

Prix sur place : 30 F – Envoi : 40 F.

LA STATISTIQUE PEUT-ELLE SATISFAIRE NOTRE CURIOSITÉ?

Antoine Hebinger

Professeur au Lycée Blaise Pascal de Colmar

Chaque enseignant de classe terminale ressent l'envie de savoir si sa manière de noter est, d'une certaine façon, conforme à la notation du "bac" ! Oh, il y a, comme je le dirai plus loin, de multiples raisons de noter différemment. Mais malgré tout, y a-t-il une certaine relation (une corrélation diraient les statisticiens) entre mes notes et celles obtenues à l'examen par mes élèves ?

Ma curiosité, aidée par les encouragements de "mon proviseur", m'a fait faire un essai d'analyse statistique, bien modeste je le reconnais, des résultats de certaines classes terminales et dans certaines matières seulement, de mon lycée !

Nous avons présenté les résultats aux collègues, et, à ma grande stupéfaction, cet essai a semblé les intéresser.

Mon collègue, Jean Lefort, qui m'a encouragé dans mes "recherches" et qui est toujours à l'affût d'un nouvel article pour '*L'Ouvert*' , m'a demandé de vous communiquer le résultat de mon travail.

Le texte qui suit a été distribué aux collègues en même temps que les résultats. J'ai essayé d'expliquer, autant que faire se peut, les notions de statistiques utilisées en précisant leurs significations de manière simple, même peut-être un peu simpliste, afin que l'ensemble des collègues (ceux aussi pour qui les statistiques restent du domaine mystérieux du monde scientifique), puissent y trouver un intérêt. Pour cette même raison je me suis interdit, volontairement, les notions trop savantes réservées aux spécialistes.

J'ai été tenté de comparer les deux séries de notes à l'aide des tests d'hypothèse... mais le temps ou le courage m'ont manqué pour le faire ! Ce sera peut-être pour une autre année !

Si le fait de publier mes modestes efforts pouvait intéresser certains collègues scientifiques qui auraient d'autres idées, je les remercie par avance de m'en faire part, car pour le moment j'avoue que je me sens un peu "seul" et que, sans les encouragements de Monsieur le Proviseur Antoine Didner et de mon collègue Jean Lefort, mes essais seraient restés tout à fait personnels !

N.B. : Par cette analyse, je ne cherche nullement à culpabiliser d'une manière quelconque, mais seulement à "renseigner" chaque enseignant. Nous savons bien que nous nous mettons en permanence "en question" et que nous avons besoin d'être rassurés sur le fruit de notre travail pour avoir le courage d'essayer de l'améliorer encore et encore...

1.– Comment interpréter l'analyse des résultats du bac

1) Un premier renseignement est donné par la comparaison des notes du bac avec la moyenne des trois trimestres! (fig. 1 : tableau).

2) Un deuxième renseignement est donné par la comparaison de la moyenne de la classe au bac et de celle de l'année (fig. 1 : tableau). Chaque collègue pourra voir si sa notation est trop ou pas assez sévère, étant entendu qu'il peut y avoir toutes sortes de raisons de noter "gentiment" (en cas de classe très faible...) ou d'être plus exigeant (en cas de classe douée...).

3) Le coefficient de corrélation linéaire, bien connu des "scientifiques", mesure s'il y a une corrélation forte entre les deux séries de notes. S'il y a une relation **mathématique** linéaire (du type "**bac**" = a_* "**année**" +b, a et b étant des nombres constants) ce coefficient est égal à 1 (le -1 me semble exclu dans notre cas!). Plus il se rapproche de zéro, plus la corrélation (on pourrait presque dire dépendance) entre les notes "bac" et "année" est faible. En général cette corrélation est basée sur **juste** ou **faux** (les matières scientifiques et ...?); elle risque d'être plus faible dans les autres! Une corrélation est "mauvaise" si elle est voisine de zéro!

4) Le graphique a été fait en représentant par un carré noir le résultat de **chaque élève de la classe** (fig. 2). Pour cela j'ai représenté le carré ayant pour abscisse (lue horizontalement) la note du bac et pour ordonnée (lue verticalement) la note de l'année. De plus j'ai tracé la droite qui contient les carrés correspondants aux candidats ayant la même note au bac que durant l'année. Ainsi un carré qui se trouve en dessous de cette droite correspond à un candidat qui a une meilleure note au bac, celui qui est au-dessus correspond à un candidat qui a une moins bonne note au bac. Ce graphique (ou dessin : on dit bien "Tu veux que je te fasse un dessin?") donne une "vue d'ensemble" qui permet de se faire "rapidement une idée" de la répartition de ces notes. Un nuage de "carrés" permet de voir si la majorité des candidats a une meilleure, ou une moins bonne note au bac. Il me semble que beaucoup de collègues (moi compris) ont tendance a être plus exigeants pour les "bons élèves" et plus "coulants" pour les "élèves faibles" ...et cela se comprend! Il faudrait peut-être aussi comparer les écarts-type...

Voici un exemple de résultats tel qu'il a été distribué à chaque collègue concerné :

TES 94/95 Mr X	matière		Ecrit
	année	bac	résultat
CHRISTELLE	13,3	8	refusée
FATIMA	13,0	7	r
CELINE	13,8	10	oral
LAURENCE	15,8	15	AB
PEGGIE	13,8	5	r
STEPHANIE	12,5	6	o
SEBASTIEN	12,8	14	o
LAURENT	11,3	6	r
SEBASTIEN	13,2	12	AB
CLAUDINE	11,2	5	o
ESTELLE	15,5	6	admise
EVELYNE	13,0	12	o
FRANCINE	12,8	15	o
ANNE	13,0	9	o
SANDRINE	15,2	10	a
CINDY	12,3	9	a
CLAUDIA	12,2	8	o
GUILLAUME	10,8	7	r
AAFAFE	13,5	11	o
STEPHANE	11,5	8	o
ANNABELLE	13,3	15	AB
YANN	13,8	10	o
STEPHANIE	11,0	11	o
STEPHANIE	11,5	11	a
SYLVIA	14,2	13	a
SYLVIE	12,5	10	o
ABDELKADER	12,3	13	a
CELINE	13,3	5	o
CATHERINE	14,0	10	a
BARBARA	15,2	9	AB
NICOLE	11,2	7	o
LAURENT	10,3	10	o
BERTRAND	12,5	9	r
STEPHANIE	15,7	8	a
VALERIE	15,2	12	a
moyenne	13,0	9,6	
coef de corrélation r =	0,206		

Figure 1 : tableau

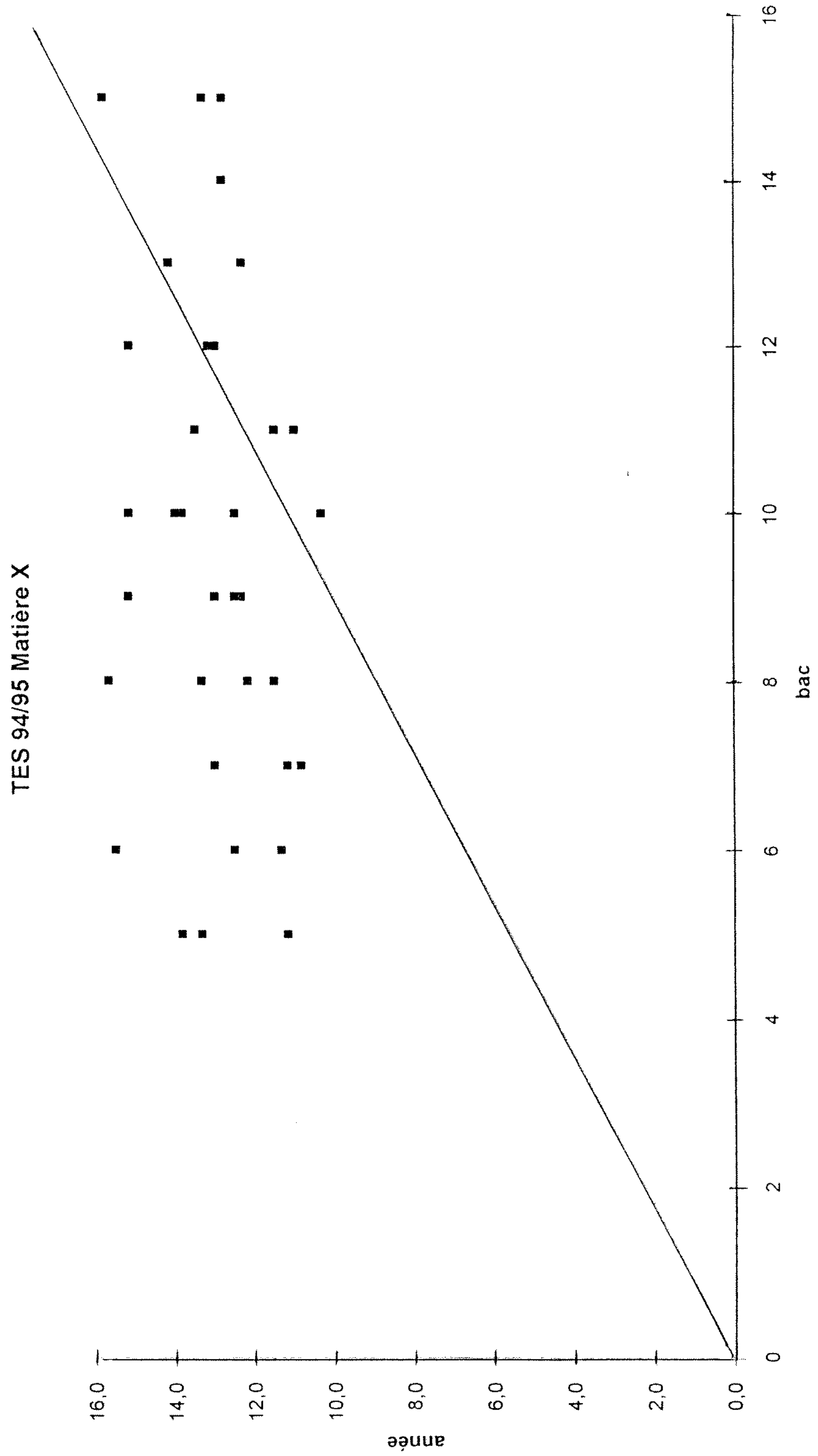

TES 94/95 Matière X
année
bac
16,0
14,0
12,0
10,0
8,0
6,0
4,0
2,0
0,0
0
2
4
6
8
10
12
14
16

Figure 2

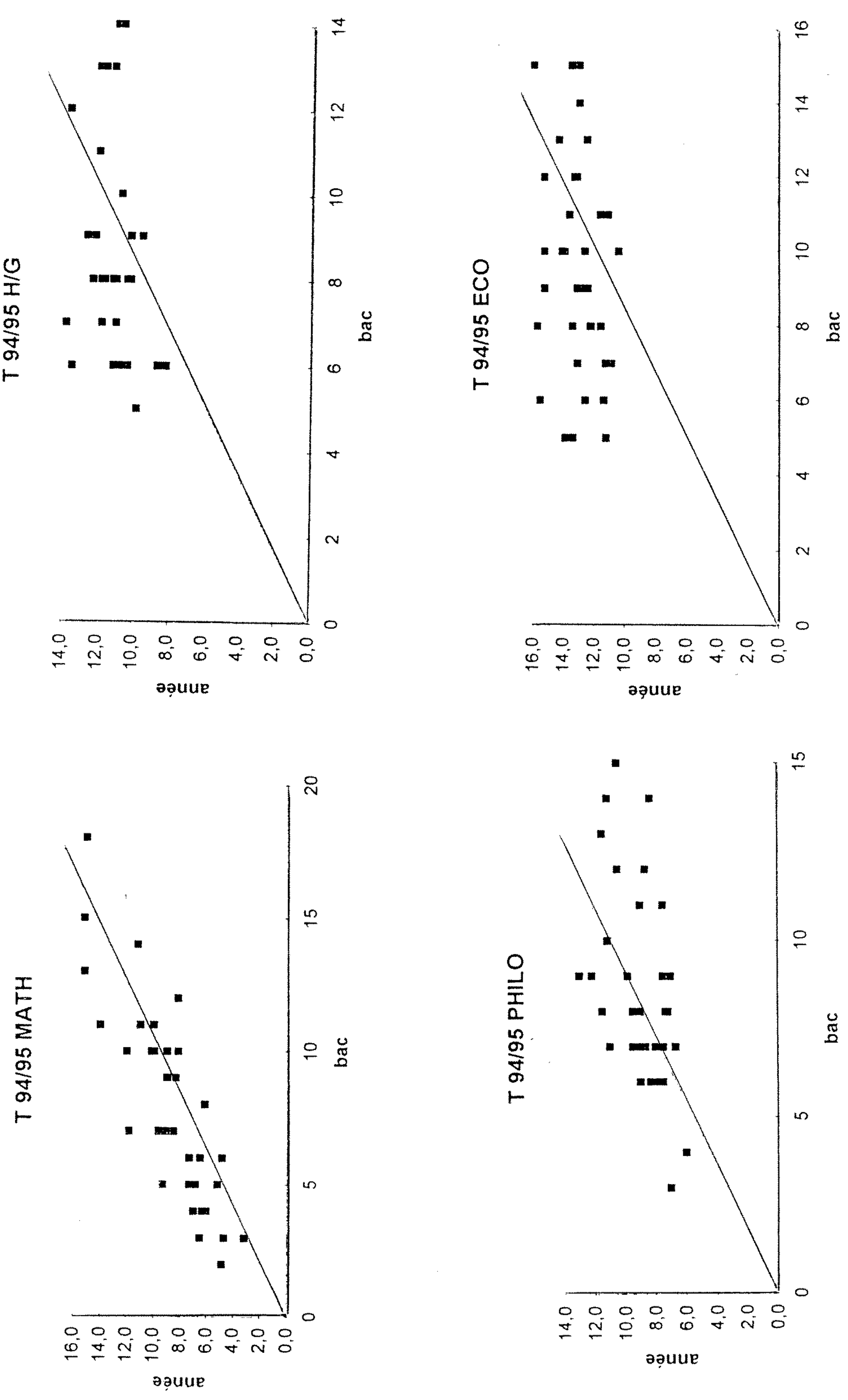


Figure 3

2.– L'accueil des collègues

Donner des explications sur un tableau statistique à des collègues qui n'en ont aucune notion, en 10 minutes et non pas en 3 heures de cours, est une tâche ardue qui demande des simplications que les matheux trouveront osées. Pour éviter toute discussion trop technique, après de longues hésitations, nous avons décidé de ne pas tracer de droites "résumant le nuage (droite des moindres carrés ou axe principal ou ...).

Nous étions un peu inquiets de l'accueil des collègues. Les réactions ont oscillé entre l'indifférence et l'intérêt, mais jamais d'hostilité. L'indifférence peut provenir aussi bien d'un refus de se remettre en cause ou de remettre en cause sa notation que d'une incompréhension des statistiques fournies. L'intérêt s'est manifesté par des questions pertinentes dont voici les principaux thèmes :
– la moyenne annuelle "lisse" les notes des élèves,
– l'épreuve du bac possède un aspect ponctuel que n'a pas l'évaluation trimestrielle,
– une classe peut être plus ou moins bonne,
– l'épreuve du bac peut être plus ou moins difficile,
– la note du bac est attribuée par un collègue; peut-être est-ce lui qui se trompe et pas moi!

Les résultats confirment ce que l'on sait déjà sur la façon de noter des différentes disciplines. Les quatre diagrammes concernant les mathématiques, l'histoire-géographie, la philosophie et l'économie le montrent bien (tableau 3). Mais peut-être est-ce l'occasion de faire prendre conscience de la relativité de la note et de la notation. En tout cas nous espérons avoir soulevé l'intérêt de suffisamment de collègues pour pouvoir généraliser cette étude à toutes les disciplines, en particulier aux langues vivantes qui, outre leur multiplicité, sont, dans notre établissement, enseignées par groupe de niveaux qui ne recoupent pas les groupes classes.

31	10	40	49	62	43	5	20
57	48	2	23	28	13	35	54
14	27	53	36	47	58	24	1
44	61	19	6	9	32	50	39
3	22	60	45	34	55	25	16
37	52	30	11	8	17	63	42
18	7	41	64	51	38	12	29
56	33	15	26	21	4	46	59

31^2	10^2	40^2	49^2	62^2	43^2	5^2	20^2
57^2	48^2	2^2	23^2	28^2	13^2	35^2	54^2
14^2	27^2	53^2	36^2	47^2	58^2	24^2	1^2
44^2	61^2	19^2	6^2	9^2	32^2	50^2	39^2
3^2	22^2	60^2	45^2	34^2	55^2	25^2	16^2
37^2	52^2	30^2	11^2	8^2	17^2	63^2	42^2
18^2	7^2	41^2	64^2	51^2	38^2	12^2	29^2
56^2	33^2	15^2	26^2	21^2	4^2	46^2	59^2

Le plus petit carré bimagique.
Le deuxième carré est magique et ses éléments sont les carrés des éléments du premier carré magique!
Les sommes sont respectivement 260 et $11180 = 43 \times 260$

DANS NOS GROUPES IREM

Richard CABASSUT et Annette MOLARD

Au nom du GROUPE EUROPE

Un nouveau groupe IREM s'est mis en place à Strasbourg pour l'année scolaire 1995-1996, le groupe Europe. Ce groupe travaille sur le thème "autour des mathématiques ; Europe, comparaison des cursus". Ce thème, proposé par l'ADIREM (assemblée des directeurs d'IREM) et retenu par la DLC (direction des lycées et collèges) réunit quatre IREM : Lille, Lyon, Pays de Loire et Strasbourg. Le groupe Europe se propose de mener de front des études comparatives de cursus mathématiques et une réflexion sur leurs applications à des réalisations de terrain. On étudiera les échanges dans l'enseignement des mathématiques entre classes (une française et une étrangère). A l'occasion des études comparatives et des différentes actions il s'agit de mettre en place un réseau de personnes et établissements ressources en France et à l'étranger. Le groupe souhaite étudier la mobilité des élèves dans l'enseignement des mathématiques, soit par la préparation des élèves français à séjourner à l'étranger (exemple de l'enseignement des mathématique en langue étrangère dans certaines sections européennes), soit en étudiant l'accueil des élèves étrangers. On étudiera les différentes expériences réalisées, aussi bien en France qu'à l'étranger. L'étude de l'histoire comparée des enseignements de mathématiques en Europe permet d'expliquer les différences culturelles à l'origine de certaines difficultés des élèves étrangers dans l'enseignement français des mathématiques. Cette action prolonge l'université d'été de Francheville en 1994 "Mathématiques, facteur d'adaptation linguistique et culturelle. A travers l'étude des cursus mathématiques il s'agit d'enrichir l'enseignement mathématiques français (par exemple avec l'étude des manuels : manuel pluridisciplinaire d'enseignement scientifique au Danemark, dimension historique dans les manuels). Cette action continue l'action engagée en 1994 par l'IREM de Strasbourg dans le cadre de la première rencontre franco-allemande sur les questions d'histoire et de didactique des mathématiques. Annette Molard rend compte, dans l'article suivant, d'un exemple d'étude conduite par le groupe sur un échange entre lycées, impliquant l'enseignement des mathématiques.

ECHANGE EN IMMERSION ENTRE UN LYCEE FRANCAIS ET UN LYCEE ALLEMAND

par Annette MOLARD

1) Les principes de l'échange :

L'origine de l'échange :

A la rentrée scolaire de septembre 1992, le principe d'un échange entre une classe de seconde française et une classe de dixième allemande a été organisé entre le lycée Jean Monnet de Strasbourg et le Viscardi Gymnasium de Fürstenfeldbruck, lycée allemand de Bavière. Ce projet d'échange s'est construit à partir d'initiatives individuelles de la part du lycée allemand, en utilisant pour la première année les possibilités de rencontre des professeurs dans le cadre du programme européen LINGUA.

Le choix de la classe et des élèves :

Le lycée Jean Monnet a créé une classe spéciale recrutant des élèves de seconde étudiant l'allemand en langue 1 tandis que le Viscardi Gymnasium créait une classe de 10ième (équivalent de notre seconde) avec des élèves étudiant le français depuis 4 ans en moyenne. Le choix s'est porté sur la classe de seconde ce qui permet d'obtenir des élèves ayant une bonne connaissance de la langue du partenaire et ce qui évite les contraintes de premières ou terminales liées à la préparation des épreuves du baccalauréat. Le recrutement des élèves s'est fait sur la base du volontariat pour un échange d'une durée totale de six semaines, chaque élève français étant associé à un élève allemand. L'appariement des élèves se fait sur des critères d'affinités très approfondis à partir de réponses des élèves à un questionnaire personnel (goûts, pratiques extrascolaires, centres d'intérêts,...), sur propositions des professeurs suivies de discussions avec les élèves.

Le principe de l'échange :

L'échange est réalisé en deux étapes de trois semaines ; pendant chaque étape une demi-classe allemande s'échange avec une demi-classe française, les élèves étant hébergés avec leur correspondant dans la famille de celui-ci. La demi-classe française partie en Allemagne libère ainsi autant de places pour accueillir une demi-classe allemande. Les élèves accueillis vont vivre pendant six semaines consécutives avec leurs correspondants, dont trois semaines dans leur pays et trois semaines dans le pays partenaire. La nouveauté, par rapport aux échanges pratiqués couramment, réside dans le pari qu'un élève peut, en trois semaines d'immersion totale dans une classe et une famille de l'autre pays, s'y intégrer complètement, suivre tous les enseignements et épreuves de la classe d'accueil, puis reprendre, à son retour, son cursus scolaire normal sans interruption ni reprise de la progression de la classe. Ce pari a été gagné et l'expérience reconduite pour la quatrième fois en 1995-96.

Dans la pratique, nous n'avons jamais eu une classe entière de volontaires, ni d'un côté, ni de l'autre, un petit noyau d'indécis demeurant sur place ; il y a en moyenne de part et d'autre une vingtaine de participants. La difficulté, au départ, consistait dans la recherche d'une partie commune à nos programmes d'enseignements français et allemands, et ceci dans toutes les matières. Il s'est avéré que c'est dans les matières scientifiques - mathématiques, physique et biologie - que le programme commun a été le plus facile à déterminer ; on ne parlera ici que de la partie mathématiques.

2) La recherche d'une partie commune aux programmes de mathématiques:

Les progression sont fort différentes à travers les classes de second cycle français et celles du Gymnasium bavarois.

Contenus des programmes des classes 9 et 10 de Bavière.

Classe 9 :

- systèmes d'équations linéaires ;
- groupes ; exemples de groupes finis ou non ; congruences ; classes modulo p ;
- anneaux et corps ;
- équation $x = a$; racines carrées ; nombres irrationnels ; intervalles ; encadrements ;
- le corps des réels ; approximations ;
- fonction réciproques ; fonctions trinôme du second degré ;
- équations du second degré (solution graphique et formule) ;
- inéquation du second degré.

Classe 10 :

- puissances (exposants entiers); foction puissance ;
- groupes isomorphes; anneaux de polynômes; division polynomiale ;
- extension de la notion de puissance; exposants fractionnaires ;
- racine n-ième; fonction racine cubique comme exemple ; exposants irrationnels ; foction exponentielle ;
- logarithmes (fonction, calculs) ;
- suites; suites arithmétiques et géométriques ;

Géométrie classes 9 et 10 :

- mesure de distances et d'aires ; rapport de distances ;
- homothétie (sans introduction de vecteurs); théorème de Thalès et ses applications ;
- composée d'une homothétie et d'une isométrie; figures semblables ;

- théorème de Pythagore ; calculs dans le triangle rectangle ;
- homothéties envoyant un cercle sur un autre ;
- puissance d'un point par rapport à un cercle; faisceau de cercles ;
- notion de vecteurs : application à l'homothétie ;
- géométrie dans l'espace : projections ; étude de la pyramide ; les 5 solides de Platon ;
- calcul de distances, d'aires, de volumes dans l'espace ;
-vecteurs en géométrie analytique ; coordonnées polaires ; coordonnées cartésiennes d'un point ; coordonnées de u+v ; ku ;
- trigonométrie : lignes trigonométriques d'angles aigus, obtus, orientés; relations trigonométriques ; radian ; conversion degrés-radians ;
- fonctions trigonométriques sin et cos ;
- calculs trigonométriques dans le triangle rectangle ;
- tangente et cotangente ; relations ; fonctions ;
- produit scalaire de 2 vecteurs ; relations métriques dans le triangle quelconque ;
- formule cos(a+b), sin(a+b) ;
- généralisation des fonctions trigonométriques, a cos(bx+c) ;
- notion de géométrie descriptive.

Choix d'une partie commune aux programmes de mathématiques :

Après un examen minutieux lors de rencontres entre collègues en moyenne deux à trois par an, nous avions décidé de traiter : calcul vectoriel, angles et trigonométrie. Nous avions échangé nos manuels et mis au point la progression commune de manière très détaillée en faisant des ajustements d'une année à la suivante. La partie commune doit évidemment s'insérer de manière assez naturelle dans les progressions des deux classes. En France, avant le début de l'échange, une révision des configurations du plan ; en Allemagne, les calculs de distances et d'aires permettent d'aborder la trigonométrie dans le triangle rectangle, révision pour les français, nouveauté pour les allemands. Le calcul vectoriel (addition, multiplication par un scalaire, étude de configurations à l'aide de vecteurs puis en géométrie analytique), angle orienté de vecteurs, introduction du radian, lignes trigonométriques d'un angle orienté, relations élémentaires, fonctions trigonométriques, constituent l'essentiel du travail en France comme en Allemagne pour six semaines.

3) La réalisation pratique :

Rappelons que dans le système allemand les cours se déroulent le matin et l'enseignement des mathématiques en classe 10 (équivalent de la seconde) comprend quatre séquences de 45 mn par semaine. En Allemagne les vecteurs ont été abordés en physique (force) et en mathématiques à propos des translations, ce qui a permis l'idée d'addition vectorielle. Le produit par un scalaire a été introduit (légèrement) à propos des homothéties. Dans la pratique les élèves allemands ne maîtrisent pas la notion de vecteur. Il faut reprendre au début - en théorie le "programme commun" commence à "produit k.u", définition, propriétés. Autre difficulté le programme allemand n'insiste pas sur l'utilisation du calcul vectoriel pour réaliser des "démonstrations" en géométrie plane. Il faut remettre cet entraînement avec les élèves français à plus tard ; il en est de même avec les applications de la colinéarité à la géométrie analytique (équations de droites). Pour l'introduction de la trigonométrie, d'un commun accord, on commence par le triangle rectangle (révision pour mes élèves, nouveauté pour les autres). Dans la pratique le rythme est lent durant la première semaine ; pour permettre aux élèves étrangers de suivre, il est souvent nécessaire de traduire certains termes, de fournir des explications dansla langue étrangère, en accord avec les notions que les élèves étrangers ont étudiées auparavant. Ces interventions bilingues se raréfient et le rythme et le déroulement des séances devient habituel la troisième semaine. Les élèves allemands sont interrogés en français, font les devoirs et un contrôle commun, à la fin du séjour. Ils sont notés ; ces notes et une appréciation sur le comportement et le travail fourni par l'élève sont communiquées au collègue allemand qui procède de même. Les notes que nous recevons ainsi sont intégrées dans la moyenne trimestrielle de l'élève.

4) Le bilan:

Quel bilan peut-on établir après ce troisième échange ? Chaque année, de part et d'autre, les élèves complètent un questionnaire (que nous analysons et échangeons). A de rares exceptions près les élèves français sont enthousiastes (en partie à cause des après-midi libres et de la proximité des pistes de ski alpestres !) ; les élèves allemands trouvent nos horaires aberrants pensant qu'ils amputent le temps consacré au travail personnel à la maison et aux activités extrascolaires ; cependant il n'est pas rare de les voir revenir, durant les congés, dans la famille d'accueil française et dans nos classes ! Des liens d'amitié se tissent en six semaines de vie commune ! Du seul de point de vue scolaire, on ne saurait nier la difficulté qu'éprouvent, au début, les élèves à répondre, à expliquer dans "l'autre langue". D'ailleurs on effectue la relecture de l'énoncé en allemand lors des contrôles en France. Des conventions et des notations peuvent différer d'un pays à l'autre. Entre correspondants l'entraide s'établit très vite. Un exemple : une séance de module ayant pour objectif "comment chercher puis rédiger un exercice de géométrie" on entend : "toi tu cherches et moi je rédige !" -"Ja, Ja" et les discussions dans les deux langues vont bon train... Il nous a paru intéressant de comparer sur un sujet commun nos deux types d'enseignement. Peu de différences dans l'activité en classe et le type d'exercices proposés, mais les travaux écrits ne sont pas présentés ni rédigés de la même manière. Vues les difficultés d'expression, on rédige peu dans la langue étrangère. Le "Beweis" allemand est concis ; on exige moins de détails dans la ormulation. Exemple "j'applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC" devient "Pythagoras ==>". D'une manière générale la présentation semble secondaire, sauf pour les figures et les graphiques, qui sont très soignés chez les allemands. Les élèves allemands ont en général une meilleure réussite aux contrôles, sans doute parce qu'ils sont orientés dès le début de la classe 10 dans une section scientifique par opposition à la seconde française, non selectionnée. Entre collègues des deux lycées, ces échanges sont fructueux et agréables car ce travail commun nous a beaucoup rapprochés et nous sommes toujours contents de nous retrouver - souvent autour d'une bonne table - pour comparer, harmoniser, améliorer nos activités. Peut-on espérer, qu'un jour des élèves français ou allemands, s'en iront passer tout un semestre, voire une année scolaire dans un établissement partenaire, puis reviennent dans leur lycée d'origine, sans perte de temps dans leurs études ? Cela supposerait une certaine harmonisation des programmes dans les matières essentielles, mais aurait l'avantage de développer les facultés d'adaptation et une certaine autonomie qui manque souvent à nos élèves. Une telle immersion permettrait une connaissance plus profonde des habitants et du pays partenaire : une meilleure ouverture à l'Europe.

Exemple de sujets de devoir en classe composés par des élèves allemands et français et proposés par un collègue allemand :

Devoir du 28/01/95 :

1) Soient les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$.

b) Soit le vecteur $\overrightarrow{d} = k\overrightarrow{a}, k \in \mathbb{R}$, et $||\overrightarrow{d}|| = \sqrt{5}$. Déterminer $\overrightarrow{d}$.

2)

a) Soit $\phi = 105°$, déterminer la mesure en radian de ϕ.

b) Soit un angle β de mesure en radian $\frac{7\pi}{36}$. Déterminer sa mesure en grade.

3) Soit le triangle non rectangle ABC, tel que $AC = 8$, $CB = 6$ et l'angle du sommet A mesure $34°$. Déterminer CD (où D pied de la hauteur issue de C), $\overline{AD}$ et $\overline{DB}$ et l'aire du triangle ABC.

Voir suite page 47.

DANS NOS CLASSES

AVEC UNE ENVELOPPE

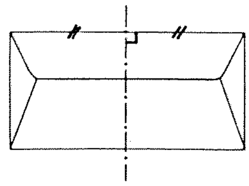
Voici une activité tirée de la brochure "Des solutions pour gérer la classe de seconde 1994-1995 (suite)" (*) :

ACTIVITÉ de REPLI...

Avec une enveloppe!

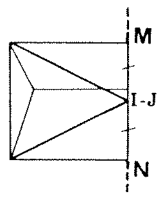
La plupart des sociétés utilisent pour leur correspondance, des enveloppes qui sont deux fois plus longues que larges (format 22 x 11, en cm).

1° Après avoir collé le dos d'une telle enveloppe, la couper en deux comme le montre le dessin ci-contre.



a) Quelle est la forme de chacune des parties obtenues?

Sur une des parties obtenues, marquer les plis comme indiqués ci-contre. Amener M et N en coïncidence en écartant I et J.



b) Quel solide obtient-on ainsi? Le décrire et le représenter en perspective cavalière.

c) Justifier que deux arêtes opposées de ce solide sont orthogonales.

2° On se propose de calculer, en cm^3, le volume de ce solide.

a) Déterminerl'intersection de ce solide avec le plan médiateur de l'une de ses arêtes puis la représenter en vraie grandeur.

b) En déduire la hauteur de ce solide puis son volume en cm^3.

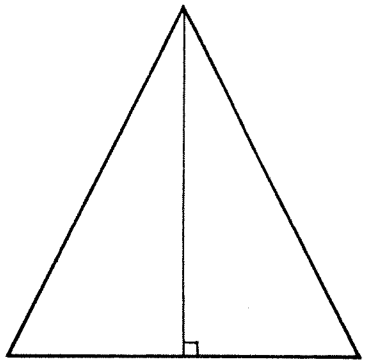
3° **a)** Réaliser un patron de l'un des "demi-solides" obtenus en coupant ce solide avec le plan médiateur de l'une de ses arêtes.

b) Construire deux "demi-solides" et reconstituer le solide de départ.

(*) Ce volume, ainsi que le volume 1, peut être acheté au prix de 55 F à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg, ou 70 F l'un par courrier.

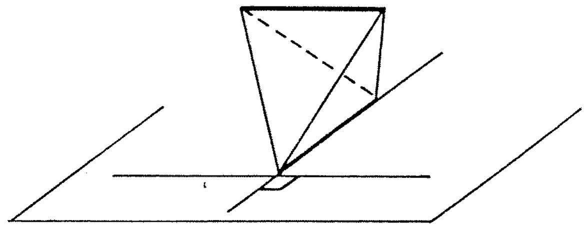
Commentaires

1°b) On obtient un tétraèdre constitué de quatre faces identiques: des triangles isocèles dont la base et la hauteur ont la même longueur 11 cm.



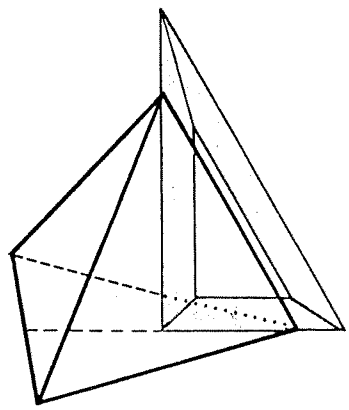
échelle ½

1°c) En faisant "reposer" le tétraèdre sur l'une de ses arêtes de telle façon que l'arête opposée soit dans un plan parallèle au support sur lequel est posé le tétraèdre (le dessus de la table ou du bureau), on peut faire "voir" que ces arêtes ont effectivement des directions orthogonales.



La démonstration est classique.

2° On peut profiter du fait que ce tétraèdre possède une ouverture pour y glisser une équerre (comme indiqué sur le dessin ci-contre), ce qui permet de visualiser la hauteur et de trouver une valeur approchée de celle-ci avant d'effectuer le calcul. De plus, en utilisant comme modèle d'équerre un demi-triangle équilatéral, on peut faire "découvrir" du parallélisme, d'où un angle de 60° etc...



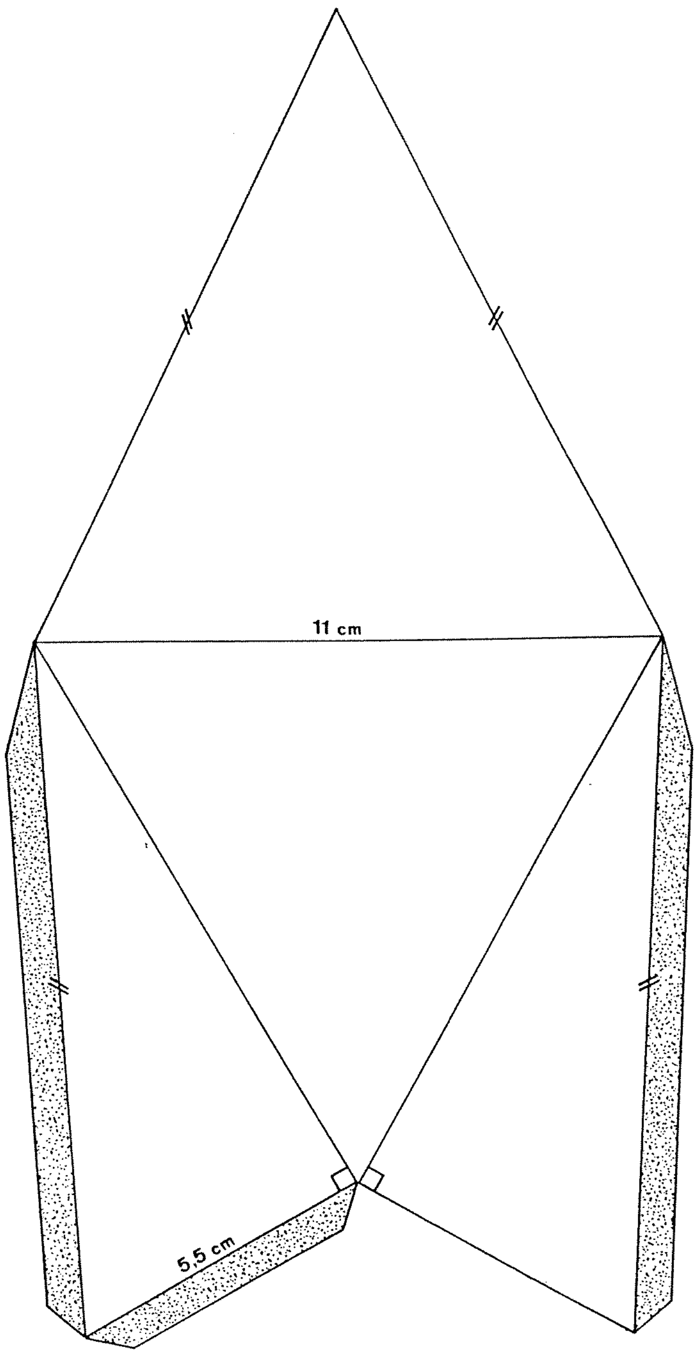
- L'intersection est un triangle équilatéral de côté 11 cm.
  La hauteur du tétraèdre, en cm, est donc égale à $11\sqrt{3}/2$ ($\approx$ 9,5 cm).

- Une fois l'intersection représentée en vraie grandeur, on peut la découper dans du carton rigide et la glisser à l'intérieur du tétraèdre, ce qui permet de bien matérialiser cette intersection (et de vérifier pour les plus septiques...).
  La partie évidée peut alors être utilisée comme dans l'activité précédente pour matérialiser le plan d'intersection...

3°b) Cela permet de visualiser le tétraèdre coupé par un plan et de donner un sens à la notion de *section* ou de *plan de coupe*. En même temps, cela peut aider à comprendre que la section plane d'un solide est toujours une "figure fermée".

Remarque: ceux qui veulent *y voir plus clair* encore pourront se fabriquer une "demi-enveloppe" à partir d'une pochette transparente en plastique souple...

Patron du demi-tétraèdre



Suite de la page 44 :

Devoir du 17/02/95 :
1) Calculer exactement sin(10 000 020°).
2) Pour quel $x \in [0; 2\pi]$ a-t-on : $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$? On illustrera les calculs sur le cercle trigonométrique ci-joint.
3) Pour quel $\alpha \in [0°; 360°]$ a-t-on : $\frac{1-\sqrt{2}\cos\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{6}$?
4) Pour quel angle $\phi \in [0°, 360°]$ a-t-on : $\sin(180° - \phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$?

JOURNÉE DE LA RÉGIONALE A.P.M.E.P.

APMEP Régionale d'Alsace
IREM de Strasbourg,
10, rue du Général Zimmer,
67000 Strasbourg.

Strasbourg le 11 janvier 1996;

Cher Collègue,

La régionale APMEP d'Alsace organise, comme l'année dernière, une rencontre ouverte à tous les professeurs de mathématiques de l'académie, adhérents ou non. Une occasion vous est ainsi offerte d'assister à un conférence, de participer à des ateliers ou des débats, de vous informer et d'émettre vos idées, de consulter quelques brochures APMEP ou IREM parues récemment, de discuter avec des professeurs d'autres établissements. Rendez-vous le

SAMEDI 30 MARS AU LYCEE JEAN MONNET
2 place Albert Schweitzer à Strasbourg
de 14h à 18h30

Programme:
12h15-13h45: possibilité de prendre un repas sur place pour le prix de 60F, à condition de s'inscrire par avance, de signaler si vous risquez d'arriver en retard,de vous décommander en cas d'empêchement;
14h-15h15: exposé d' Etienne Meyer sur quelques problèmes et quelques solutions de modélisation géométrique utilisée en C.A.O. (conception assistée par ordinateur).
15h30-16h45: différents groupes de rencontre:
collège: atelier sur les jeux à utiliser en classe, animé par François DROUIN, de la régionale de Lorraine;
lycée: échanges sur l'enseignement des mathématiques en lycée, avec Jean-Pierre Richeton, membre du bureau national de l'APMEP, chargé des lycées,
dimension internationale: mathématiques en sections européennnes ou au cours d'échanges internationaux,
lycée professionnel, enseignement primaire, sections de techniciens supérieurs: mise en place de 3 groupes d'échanges,
16h45-18h30: mise en commun, pause café, consultation de brochures,
pour les adhérents: assemblée générale avec pour ordre du jour:
bilan de l'année, orientations pour l'année à venir, divers.

Pour pouvoir organiser cette journée le mieux possible, nous vous demandons de renvoyer le coupon-réponse, le plus tôt possible, avant le 4 mars 1996.

Bien cordialement.

PRESENTATION DE LA CONFERENCE ET DES ATELIERS

Présentation de la conférence:
Le dessin d'une courbe étant donné, comment déterminer son équation ou du moins comment déterminer les équations d'une courbe qui lui soit proche? Une méthode récente, les courbes à pôles, répond bien aux possibilités et aux contraintes des bureaux d'études et possède de nombreuses propriétés qui rendent son usage très souple. L'exposé s'attachera plus à illustrer les problèmes et les solutions qu'à démontrer les propriétés et ne rentrera pas trop dans la complexité technique des calculs qui y sont attachés.

Présentation de l'atelier sur les lycées professionnels:
Madeleine Huguel membre de la commission nationale des lycées professionnels pour la région Alsace avec sa collègue Marie-José Baliviéra pour la région Lorraine pourront vous informer sur les premiers résultats obtenus à partir de vos réponses à l'évaluation des nouveaux programmes de B.E.P. Pour vous mettre "l'eau à la bouche", de nombreuses questions rencontrent une meilleure réussite qu'en fin de troisième. Nous pourrons échanger sur les nouveaux programmes de Bac Pro, nous pourrons parler des nouveaux CAP ainsi que du maintien des 4ième et 3ième technologiques en LP. La commission nationale entreprend un travail sur les mathématiques en stage de formation professionnelle en Bac Pro. Nous attendons vos suggestions. Si vous avez un empêchement pour participer à cette demi-journée régionale, vous pouvez contacter ou écrire à Madeleine Huguel, 20 Echery, 68160 Ste Marie-aux-Mines, tel 89585932.

Présentation de l'atelier lycée:
Nous proposons aux collègues de lycée de discuter autour de problèmes d'actualité: conditions d'enseignement, impressions sur la nouvelle organisation des terminales scientifiques et des classes préparatoires, épreuves du baccalauréat et projet d'oral de rattrapage, projets actuellement en cours de réflexion. Participera à l'atelier un membre du bureau national de l'APMEP, chargé des lycées: Jean-Pierre Richeton.

Présentation de l'atelier collège:
La lecture des brochures JEUX 1, JEUX 2, JEUX 3 édités par l'APMEP ne doit-elle profiter qu'à l'enseignant-lecteur? Les élèves par nature, très joueurs, ne pourraient-ils pas en profiter pour faire des mathématiques? Quelques activités pratiquées au collège Saint-Michel, en Lorraine, tenteront de répondre à vos questions.

Présentation de l'atelier dimension internationale:
Les établissements à sections européennes particulièrement, et tous les autres établissements plus généralement, développent les échanges avec des établissements étrangers. Comment impliquer l'enseignement des mathématiques dans ces échanges? On étudiera quelques exemples et on essaiera de proposer des réponses à cette question.

NOUVELLE BROCHURE EN DEUX VOLUMES :

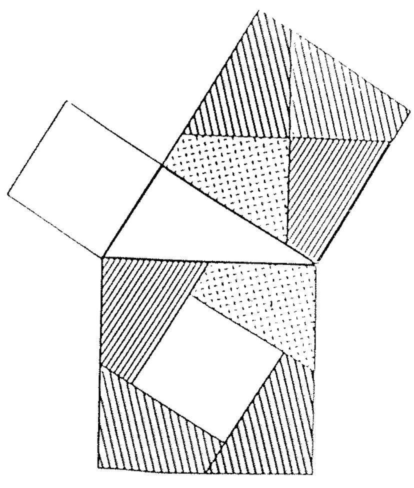
ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES POUR LE COLLÈGE ET LE LYCÉE

présentées dans une perspective historique

Par le Groupe d'Histoire des Mathématiques :
Michel CINUS - Paul-Henri CLAVIER - Agnès CUZIN - Jean-Pierre FRIEDELMEYER - Marcel KRIER - Michel SARROUY - André STOLL - Klaus VOLKERT.

VOLUME 1:

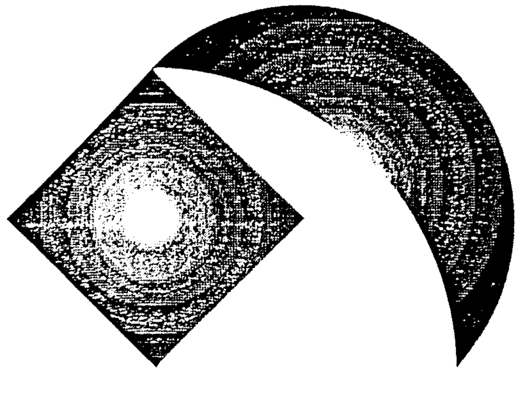
Ce premier volume, centré sur la notion de mesure, développe le thème des grandeurs incommensurables pour retrouver le sens originel de la notion de nombre irrationnel. Il revient aux sources de la démonstration géométrique, développée par Euclide au moyen de la méthode des aires, laquelle permet de contourner les problèmes numériques liés aux irrationnels tout en favorisant un apprentissage de la démonstration au collège.



Aire, comparaison, équidécomposabilité, Euclide, Frege, incommensurabilité, irrationnalité, mesure, multicongruence, quadrature, tangram.

VOLUME 2 :

Quarrer des lunules, étudier la cycloïde et la spirale, trouver la tangente à une courbe grâce aux mouvements sont quelques-uns des thèmes abordés dans ce volume II, qui s'adresse essentiellement aux professeurs de lycée et à leurs élèves.



Lunule - quadrature - rectification - Pi - indivisible - tangente - quadratrice - spirale - cycloïde - conique - Hippocrate de Chio - Archimède - Torricelli - Roberval - Pascal - Hippias - Huygens

Volume 1 :	Prix sur place : 50 F –	Envoi : 65 F.
Volume 2 :	Prix sur place : 30 F –	Envoi : 40 F.
Vol. 1 + 2 :	Prix sur place : 70 F –	Envoi : 90 F.

A VOS STYLOS

De nouvelles règles du jeu pour notre rubrique de problèmes

On m'a demandé de m'occuper dorénavant de cette rubrique. Je vais donc ici exposer rapidement ma "philosophie" :

Certains lecteurs se plaignent parfois que des problèmes soient trop faciles ou trop difficiles. A mes yeux, cela n'a pas beaucoup de sens, étant donné le public hétérogène de la revue. Je pense que la distinction pertinente est celle qui oppose les problèmes "intéressants" à ceux qui n'éveillent pas beaucoup l'intérêt des lecteurs, le critère étant le volume de courrier suscité par tel ou tel problème. Un problème est intéressant quand il est assez original, nouveau ou en tout cas peu connu, trop peu connu aux yeux de celui qui le propose et qui veut faire un peu de publicité à ce problème par le canal de '*L'Ouvert*'.

Indiquer le niveau de difficulté ne présente à mes yeux aucun intérêt, comme si ce niveau était réellement appréciable pour des problèmes peu connus, alors qu'en réalité tout l'intérêt de la recherche mathématique consiste précisément à découvrir la difficulté d'un problème en cherchant à le résoudre. Les problèmes les plus excitants sont des problèmes "frais", comme pouvait l'être par exemple le problème $(3n+1)$ au moment où on l'a découvert et où on ne pouvait pas savoir qu'il allait résister si longtemps aux efforts des mathématiciens.

Je propose donc les aménagements suivants :
- la rédaction proposera davantage de problèmes, de difficultés variables et sans indication de difficulté;
- la rédaction ne s'engage pas à publier la solution d'un problème, surtout si celui-ci n'a suscité aucun écho chez les lecteurs; d'ailleurs la rédaction se considère absolument comme un lecteur parmi d'autres, elle n'a pas la science infuse, elle n'est pas un professeur qui pose des problèmes à ses élèves;
- les lecteurs sont invités à ne pas attendre d'avoir résolu un problème pour faire savoir à la rédaction l'intérêt que ce problème suscite à leurs yeux, ou ne suscite pas... Par ailleurs, les lecteurs sont invités à faire connaître à la rédaction tous les problèmes, faciles ou difficiles, qui leur semblent intéressants mais trop peu connus. En résumé, et toute démagogie mise à part, les lecteurs "sont" la rédaction.

Dominique DUMONT

PROBLÈME 33

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel, de Strasbourg)

Étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}$$

sur l'intervalle $]0,1[$.

Solution de R. Fischer, Lycée René Cassin, plus courte que celle publiée dans notre précédent numéro :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x} = \frac{\ln x}{1-x}\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$$

$$= \frac{\ln x}{1-x}\frac{\ln(\frac{1}{1-x})}{1-\frac{1}{1-x}} = g(x)g(\frac{1}{1-x})$$

Or g est négative croissante, car $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-x)+\ln x}{(1-x)^2} > 0$ sur $]0,1[$,

donc f est décroissante.

PROBLÈME 34

Énoncé (forme équivalente)

Etant donnés quatre points sur une droite, montrer qu'ils sont les projections orthogonales des sommets d'un tétraèdre régulier, dont la longueur des arêtes est déterminée.

Solution (de P. Renfer)

Utilisons le principe des shaddocks : *le plus sûr moyen d'arriver à un point est encore d'en partir.*

Partons donc d'un tétraèdre régulier $ABCD$, en prenant, dans un repère orthonormé, les coordonnées suivantes pour les sommets :

$$A(1,-1,-1) \qquad B(-1,1,-1) \qquad C(-1,-1,1) \qquad D(1,1,1).$$

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire, de coordonnées (α,β,γ). Soient $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ les plans orthogonaux à $\overrightarrow{u}$, passant respectivement par A,B,C,D. Leurs équations respectives sont :

$$\alpha x+\beta y+\gamma z = \alpha-\beta-\gamma$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z = -\alpha+\beta-\gamma$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z = -\alpha-\beta+\gamma$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z = \alpha+\beta+\gamma.$$

Les seconds membres des équations sont les abscisses a, b, c, d des points d'intersection des plans avec la droite, passant par O, dirigée par $\overrightarrow{u}$, rapportée au repère $(O, \overrightarrow{u})$.

La somme $a+b+c+d$ est nulle, puisque O est l'isobarycentre du tétraèdre. D'autre part :

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2 &= (\alpha-\beta-\gamma)^2+(-\alpha+\beta-\gamma)^2+(-\alpha-\beta+\gamma)^2+(\alpha+\beta\gamma)^2 \\ &= 4(a^2+\beta^2+\gamma^2)=4. \end{aligned}$$

Revenons maintenant à la donnée de quatre plans parallèles arbitraires. Une droite d orthogonale aux quatre plans les coupe en quatre points, dont l'isobarycentre sera noté O. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur unitaire de la droite d. Soient a, b, c, d les abscisses des quatre points d'intersection, dans le repère $(O, \overrightarrow{u})$. Alors : $a+b+c+d=0$.

Soit r le réel positif tel que : $a^2+b^2+c^2+d^2=r^2$. Si les quatre plans ne sont pas tous égaux entre eux, alors r est non nul. En transformant les plans par une homothétie h de rapport $2/r$, on est ramené à :

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4.$$

Alors il existe une unique solution (α, β, γ) pour le système :

$$\begin{cases} \alpha-\beta-\gamma=a \\ -\alpha+\beta-\gamma=b \\ -\alpha-\beta+\gamma=c \\ a+\beta+\gamma=d \\ a^2+\beta^2+\gamma^2=1. \end{cases}$$

A savoir :

$$\alpha=\frac{a+d}{2}, \quad \beta=\frac{b+d}{2}, \quad \gamma=\frac{c+d}{2}.$$

On choisit une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ telle que le vecteur $\overrightarrow{u}$ ait pour coordonnées les valeurs α, β, γ ainsi obtenues. Soit $\mathcal{R}$ le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Les quatre points de coordonnées $(1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1), (1,1,1)$ dans $\mathcal{R}$, forment un tétraèdre solution.

La longueur d'arête vaut $2\sqrt{2}$. En revenant à la situation initiale, par l'homothétie h^{-1}, on obtient une longueur d'arête égale à $r\sqrt{2}$.

Remarque (de D. Dumont) : dans le précédent numéro de '*L'Ouvert*' , un intéressant article de Marcel Krier montre le lien entre ce problème et une méthode de résolution de l'équation du 4^e degré.

PROBLÈME 35 (proposé par D. Dumont)

Énoncé (voir l'énoncé détaillé dans notre numéro 80)

L'énoncé demande de démontrer cinq propositions relatives aux dénombrements des points fixes et des successions dans les permutations. Dans la solution qu'il propose, R. Renfer énonce une sixième proposition :

PROPOSITION 6.– *Soit* q *un entier de* $[n+1]$. *Le nombre de permutations de* $[n+2]$ *ayant le maximum en dernière position et possédant* $k+1$ *successions, dont une en position* q, *est égal à* $f_{n,k}$.

PROBLÈME 36

Énoncé (proposé par M. Emery)

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC. A quelle caractérisation angulaire du triangle correspond l'égalité entre longueurs : $AH = BC$?

Indication. Si O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, il est bien connu qu'on a l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

PROBLÈME 37

Énoncé (proposé par D. Dumont)

Deux joueurs A et B retirent à tour de rôle des allumettes sur un tas d'allumettes, avec la règle que le premier joueur ne peut prendre le tas tout entier, et qu'ensuite chaque joueur peut prendre un nombre d'allumettes au plus égal au nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Est considéré comme vainqueur celui qui ramasse la dernière allumette.

a) Trouver la stratégie gagnante pour le joueur qui commence.

b) On suppose qu'on modifie la règle en autorisant de prendre un nombre d'allumettes au plus égal à deux fois le nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Trouver la stratégie gagnante.

Indication. Dans le cas a) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas une puissance de 2.
Dans le cas b) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas... quoi?

PROBLÈME 38

Énoncé (proposé par G. Kreweras)

De toute suite S d'entiers positifs on peut déduire une autre suite S' d'entiers positifs qui est celle des différences en valeurs absolues de termes consécutifs de S.

Partant d'une suite S_1 de n entiers, on obtient ainsi des suites S_2, S_3, ..., S_n, dont chacune a un terme de moins que la précédente et qu'il est commode de disposer en un triangle, pointe en bas, la suite S_n se réduisant à un seul terme. Un tel triangle sera appelé "triangle de différences". Il sera dit *injectif* si tous les termes ont des valeurs distinctes, et ***parfait*** si ces valeurs constituent l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\}$.

Voici deux exemples de triangles parfaits pour $n = 3$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & & 4 \\ & 5 & & 2 & \\ & & 3 & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & 4 \\ & 5 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

Le problème est de trouver d'autres triangles parfaits. En existe-t-il pour toutes les valeurs de n?

PROBLÈME 39

Énoncé (proposé par J. Lefort)

Soit p un entier tel que $p \geq 2$, et u^0 la suite des entiers naturels > 0 ($u_n^0 = n$).

On construit de proche en proche, pour $0 \leq i \leq p-2$, les suites :
(v^i), obtenue à partir de (u^i) en supprimant les termes qui sont de rangs multiples de $p - i$.
(u^{i+1}), définie par $u_n^{i+1} = \sum_{j=1}^{n} v_j^i$.

Exemple : $p = 4$.

u^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	···
v^0	1	2	3		5	6	7		9	10	11		13	···
u^1	1	3	6		11	17	24		33	43	54		67	···
v^1	1	3			11	17			33	43			67	···
u^2	1	4			15	32			65	108			175	···
v^2	1				15				65				175	···
u^3	1				16				81				256	···

On remarque qu'on obtient ici la suite des puissances quatrièmes des entiers successifs.

Ce résultat se généralise-t-il à p quelconque?

UNE ÉCHAPPÉE DANS LE TEMPS
(Extrait du manuel de 2nde publié chez Magnard en 1990)

Pythagore de Samos (VIe av. JC)
Thales de Millet (- 585)
Hippocrate de Chios (- 430)
Platon (- 427 ; - 347)
Eudoxe de Chide (? ; - 360)
Euclide (vers - 300)
Archimède (- 287 ; - 212)
Apollonius de Perga (- 262? ; - 200?)
Heron d'Alexandrie (75 ; 150)
Diophante d'Alexandrie (vers 150)
Pappus (vers 300)
Al Khwarismi (vers 830)
Thabit ibn Qurra (826 ; 901)
Alhazen (965 ; 1039)
Fibonacci (1180 ; 1250)
Bradwardine (1290 ; 1349)
Nicole Oresme (1323 ; 1382)
Nicholas de Cuse (1401 ; 1464)
Nicolas Chuquel (vers 1480)
Nicolo Tartaglia (1500 ; 1557)
Girolamo Cardano (1501 ; 1576)
François Viele (1540 ; 1603)
John Napler (1550 ; 1617)
Johann Kepler (1571 ; 1630)
Galileo Galilei (1564 ; 1642)
Bonaventura Cavalieri (1598 ; 1647)
Girard Desagues (1591 ; 1661)
René Descartes (1596 ; 1650)
Grégoire de St Vincent (1584 ; 1667)
Pierre de Fermat (1601 ; 1665)
Gilles Personne de Roberval (1602 ; 1675)
Evangilista Toriccelli (1608 ; 1647)
Blaise Pascal (1623 ; 1662)
Chirstiaan Huygens (1629 ; 1695)
John Wallis (1616 ; 1703)
James Gregory (1638 ; 1675)
Isaac Barrow (1630 ; 1677)
Isaac Newton (1642 ; 1726)
Gootfried Wilhem Leibniz (1646 ; 1716)
Jacques Bernoulli (1654 ; 1705)
Jean Bernoulli (1667 ; 1748)
Abraham De Moivre (1667 ; 1754)
Colin Mac Laurin (1698 ; 1746)
Brook Taylor (1685 ; 1731)
Leonhard Euler (1707 ; 1783)
Jean Le rond d'Alembert (1717 ; 1783)
Joseph Louis Lagrange (1736 ; 1813)
Gaspard Monge (1746 ; 1818)
Pierre Simon de Laplace (1749 ; 1827)
Adrien Marie Legendre (1752 ; 1833)
Karl Friedrich Gauss (1777 ; 1855)
Louis Augustin Cauchy (1789 ; 1857)
Michel Chasles (1783 ; 1880)
Niels Henrik Abel (1802 ; 1829)
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 ; 1830)
Jean Victor Poncelet (1788 ; 1867)
Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski (1793 ; 1856)
William Rowan Hamilton (1805 ; 1865)
Evariste Galois (1811 ; 1832)
Bernhard Riemann (1826 ; 1866)
Karl W. T. Welerstrass (1815 ; 1897)
Arthur Cayley (1821 ; 1895)
Julius W. R. Dedekind (1831 ; 1916)
Georg F. L. P. Cantor (1845 ; 1918)
Felix Klein (1849 ; 1925)
Giuseppe Peano (1858 ; 1932)
Henri Poincaré (1854 ; 1912)
Henri Lebesgue (1875 ; 1941)
David Hilbert (1862 ; 1943)
Jan Brouwer (1881 ; 1966)
Ernst Zermelo (1871 ; 1953)
Emmy Noether (1882 ; 1935)
Jacques Hadamard (1865 ; 1963)
Elie Cartan (1869 ; 1951)
Bertrand Russel (1872 ; 1970)
Kurt Gödel (1906 ; 1978)
Paul Cohen (1934 ; ...)
Nicolas Bourbaki (collectif)