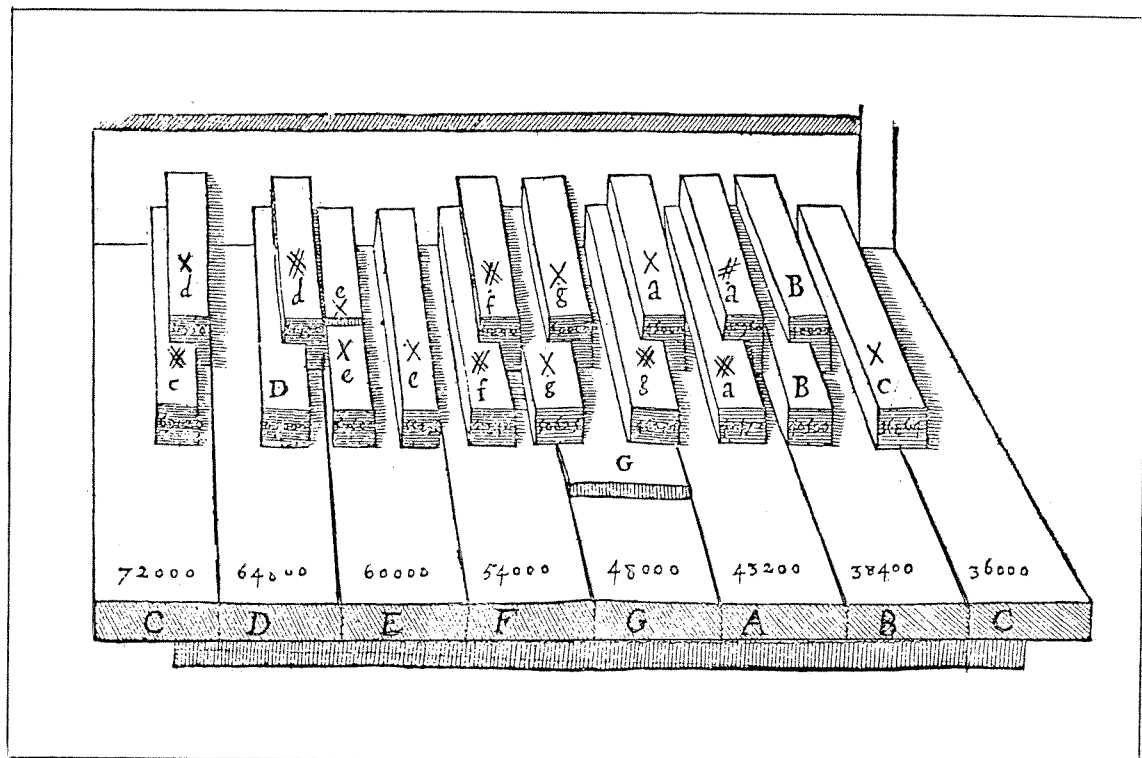


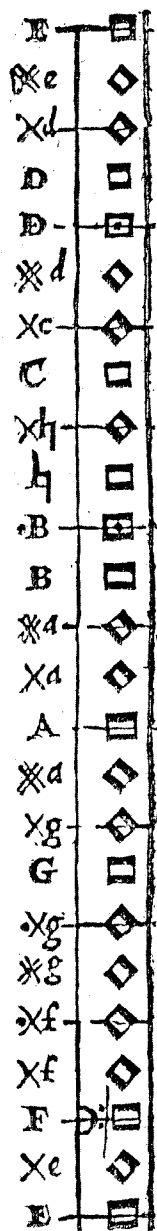
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 83 - JUIN 1996

I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :



La page donnée en couverture est extraite de l'“Harmonie Universelle contenant la théorie et la pratique de la Musique”, publiée par le Père Mersenne en 1636. Elle représente une octave d'un clavier, avec ses sept tons notés

C	D	E	F	G	A	B
ut	ré	mi	fa	sol	la	si

où l'on repère successivement et de manière étagée

- 1) les tons usuels de la gamme **diatonique** octave, dans le rapport 2 à 1 (72000 à 36000)
 quinte G, dans le rapport 3 à 2 (72000 à 48000)
 quarte F, dans le rapport 4 à 3 (72000 à 54000)
 tierce mineure E, dans le rapport 6 à 5 (72000 à 60000)etc. . .
- 2) les tons de la gamme **chromatique** avec les altérations marquées ✕.
- 3) d'autres altérations marquées X, correspondant au genre dit **enharmonique** abandonné dès le XVII^e siècle et remplacé par l'utilisation du bémol *b*.

On trouvera dans l'article de J. Lefort : “Sons, musique et mathématiques” les principales idées à la base de la construction des gammes. Rappelons que le nom employé aujourd'hui pour les notes de musique a son origine dans les changements apportés par Gui d'Arezzo (Toscane, vers 990 - vers 1050), moine bénédictin, qui modifia en 1023 le système des Grecs jusqu'alors en vigueur, en ajoutant un nouveau ton marqué d'un Γ (Gamma) qui donne à son système le nom de **Gamme**.

“Ayant remarqué que la corde *b* étoit seule sujette à variation, & que les six autres avoient leur son fixé, il leur apliqua ces six syllabes, *ut, re, mi, fa, sol, la*, qui étoient tirées de l'Hymne de S. Jean Baptiste.

UT *queant laxis* REsonare *fibris*
 MIra gestorum FA*muli tuorum,*
 SOLve *polluti* LABii *reatum.*

Sancte Joannes.

n appliquant cet *Hexacorde*, ou suite de six cordes aux lettres de sa Gamme, de manière que le C répondoit à l'*ut*, la corde douteuse *b* n'y entroit pas. En transposant l'*ut* trois degrez plus haut, & le mettant vis à vis de l'F, la corde se rencontroit avec *fa*, & étoit ainsi necessairement *b mol*. Mais en transposant l'*ut* trois degrez plus bas jusqu'à Γ, la corde B devenoit *b quarre*.

Il fit ainsi trois rangs d'Hexacordes, qu'il appelloit l'un *de nature*, l'autre de *b mol*, & le troisième de *b quarre*, comme l'on peut voir dans la représentation suivante.

LA GAMME DE GUI.

b mol Nat. b quarre,

cc			la
dd	la		sol
cc	sol		fa
\sharp bb	fa		mi
aa	mi	la	re
g	re	sol	ut
f	ut	fa	
e		mi	la
d	la	re	sol
c	sol	ut	fa
\sharp b	fa		mi
a	mi	la	re
G	re	sol	ut
F	ut	fa	
E		mi	la
D		re	sol
C		ut	fa
B			mi
A			re
G			ut

(D'après le "Dictionnaire mathématique" d'OZANAM (1691) sorti généreusement par Michel de Cointet de sa précieuse bibliothèque personnelle.)

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES CYCLES PROFESSIONNELS.

L'enseignement professionnel a connu une baisse de ses effectifs de 15% en dix ans, à cause du déclin de la filière de préparation au CAP en 3 ans et du recul démographique. Depuis 1993, sous l'effet du développement du bac professionnel, cette tendance est inversée et se retrouve également dans le secteur de l'apprentissage. En 1993, à la fin de la 3^{ième}, 22,1% des élèves choisissaient l'enseignement professionnel, contre 9,8% qui redoublaient et 63,1% qui continuaient en 2^{nde} d'enseignement général ou technologique. En 1995, la répartition des bacs était la suivante : 13,4% professionnels, 27,8% technologiques, 28,5% scientifiques, 15,7% économique et social, 14,6% littéraires. Aux 69521 bacs professionnels de 1995, s'ajoutent les 184219 brevets d'études professionnelles (BEP) et les 248412 certificats d'aptitude professionnelle (CAP).

A la sortie de la classe de 3^{ième} de collège, les élèves qui choisissent l'enseignement professionnel, partagé en 2 branches principales industriel et tertiaire, préparent en 2 ans un BEP prolongé éventuellement par une préparation de 2 ans à un bac professionnel, avec un enseignement général (français, langue, histoire-géographie, mathématiques, sciences), un enseignement pratique, et des stages en entreprise.

Les collègues enseignant les mathématiques en lycées professionnels sont des enseignants bivalents (mathématiques-sciences). L'enseignement des mathématiques est en moyenne de 2 heures de mathématiques par semaine, parmi 4 heures d'enseignement mathématiques-sciences, sur un total de 31 à 35 heures hebdomadaires.

En bac professionnel industriel, le programme propose : activités numériques et graphiques (suites arithmétiques et géométriques, polynômes du second degré,...), fonctions numériques (généralités, dérivation, ln, exp, ...), activités géométriques (symétries, distances, aires, angles, solides,...), calcul différentiel ou intégral (équations différentielles du 1^{er} ordre), trigonométrie, géométrie et vecteurs, mathématiques pour les métiers de l'électricité (fonctions périodiques, représentations de Fresnel, signaux périodiques, formule de Parseval, équation différentielle du 2^{ième} degré,...), initiation aux probabilités.

Les pratiques de l'enseignement des mathématiques présentent des spécificités par rapport à l'enseignement général. Le professeur bivalent peut mieux assurer la liaison entre mathématiques et sciences physiques. Le travail avec le professeur d'atelier, ou en lien avec la formation en entreprise apporte de vraies situations concrètes qui montrent où les outils scientifiques interviennent.

Parmi les 59 bacs, les 54 BEP et les 285 CAP, la pratique de l'évaluation et de la certification est multiple : contrôle en cours de formation ou examen terminal, unités capitalisables, épreuve d'examen en mathématiques-sciences intégrée à l'épreuve professionnelle ou épreuves indépendantes, épreuves avec coefficients et compensation entre matières ou épreuves sans compensation.

Les dispositifs pédagogiques se multiplient pour accompagner l'élève (pédagogie différenciée avec le Gerex, images logicielles pour une vision géométrique du programme en bac pro avec le groupe inter-IREM lycées professionnels,...).

Les lycées professionnels sont donc de véritables laboratoires pour l'enseignement des mathématiques dont les apports pour les collèges et les lycées gagnent à être connus. L'association des professeurs de mathématiques (APMEP) a organisé en mai une rencontre sur ce thème. La commission inter-IREM lycées professionnels devrait publier une brochure en octobre. Il est important que chaque enseignant de mathématiques soit conscient de la richesse de l'enseignement des mathématiques en lycées professionnels. Et « *l'Ouvert* » doit faire écho à cette évidence.

Richard Cabassut

SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 83 – JUIN 1996

◇ Notre couverture	I
◇ Editorial	III
◇ <i>Le paradoxe de Bertrand,</i> par J. HARTHONG	1
◇ <i>Mini-contribution à l'étude de la dépendance probabiliste,</i> par E. KOSMANEK	16
◇ <i>Du hasard et de la chance,</i> par E. EHRHART	19
◇ <i>Sons, musique et mathématiques,</i> par J. LEFORT	23
◇ <i>Cycles et non-linéarité,</i> par M. EMERI	39
◇ <i>Planche à dessins de Fasenachtskuechle feuilletés,</i> par M. AUDIN et P. FOULON	45
◇ <i>Note de lecture : Sémiosis et pensée humaine de R. DUVAL ,</i> par G. KUNTZ	48
◇ <i>Rallye mathématique d'Alsace 1996,</i>	50
◇ <i>A vos stylos, par 'L'Oouvert'</i>	52

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
- ◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
- ◇ Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro* : 30.- F

LE PARADOXE DE BERTRAND

Tirage au hasard d'une corde dans un cercle.

Jacques HARTHONG, professeur de mathématiques à l'ENSPS de Strasbourg

M. Joseph Bertrand est aujourd'hui peu connu des mathématiciens; il n'y a pas un théorème célèbre associé à son nom, comme le théorème de Cauchy, le théorème de Lebesgue, etc. M. Joseph Bertrand a été un mathématicien, mais ses travaux n'ont pas marqué la postérité de cette science. Pourtant cet homme était très bien connu de tous les mathématiciens français de la fin du *XIX*^e siècle; tous les normaliens ont suivi ses cours; Henri Poincaré, Émile Borel, le citent comme un maître; tout ce qui était édité par l'Académie des sciences portait sa signature. Il a été secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences si longtemps qu'on pourrait appeler le *XIX*^e siècle mathématique français "siècle de Joseph Bertrand" comme on dit "siècle de Louis *XIV*".

En 1888 Bertrand publia un livre : *Calcul des probabilités*. Ce livre n'est pas novateur comme l'avait été celui de Laplace sur le même sujet; mais il est très bien écrit et a visiblement servi de référence à une génération. Ce qui est toujours assez surprenant pour un lecteur d'aujourd'hui qui lit ces vieux livres n'est pas seulement la clarté de l'expression et la présence d'idées que l'auteur dégage de l'information scientifique, mais aussi (très souvent) la discussion *critique* de cette information scientifique, à laquelle l'auteur convie son lecteur. Le *Calcul des probabilités* de Joseph Bertrand est très représentatif de cet esprit qui s'est perdu : loin de se contenter d'un tableau récapitulatif de tous les résultats techniques connus (qui seraient en quelque sorte garantis par le simple fait qu'ils soient récents), l'auteur discute et critique tout en les exposant les contributions des auteurs antérieurs. Ainsi on trouvera critiquée entre autres un exemple fameux de Laplace sur la probabilité que le soleil se lève demain, sachant qu'il s'est levé tous les jours depuis cinq mille ans, la proposition de Condorcet d'appliquer le Calcul des probabilités aux décisions de justice, un raisonnement célèbre de J. C. Maxwell sur la distribution gaussienne des vitesses des molécules dans un gaz, et (c'est là ce qui nous fournit le sujet de cet article) les fondements des probabilités dites *continues* ou *géométriques*.

J'ajoute encore que certaines des critiques de Bertrand sont elles-mêmes contestables, mais ce n'est pas le sujet de cet article.

À la base de sa critique, il y a chez Bertrand l'idée que les probabilités ne sont pas correctement définies dans le continu. La formule classique

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre de résultats favorables}}{\text{nombre de résultats possibles}} \quad (1)$$

est claire si les *nombres* qui y figurent sont finis; elle est encore claire comme limite d'une suite convergente lorsque les nombres en question tendent vers l'infini. Mais elle ne l'est plus si dès le départ les nombres sont infinis. Il ne rejette pas en bloc la prise en compte de probabilités géométriques, il met seulement en garde contre les inconsistances qu'on peut y rencontrer.

Parmi les exemples qu'il donne de telles inconsistances, il y a le problème des cordes sur un cercle. Ce problème est entré dans la tradition (on le trouve dans les livres sur les probabilités sous le nom de "paradoxe de Bertrand") depuis que Poincaré l'a repris dans son propre livre *Calcul des probabilités* (1912).

Commençons par exposer le problème puis nous verrons ce qu'en ont dit Joseph Bertrand, puis Henri Poincaré, puis Émile Borel.

Problème : On tire *au hasard* une corde sur un cercle; quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit? (ou, ce qui est équivalent : que la distance de la corde au centre du cercle soit inférieure à $R/2$?)

L'argument (juste) de Joseph Bertrand est que l'ensemble de toutes les cordes possibles forme un continuum; l'ensemble de toutes les cordes favorables, c'est-à-dire de longueur supérieure à $R\sqrt{3}$, est aussi un continuum. On ne peut donc pas appliquer la règle (1). Toutefois, cette critique conduirait à rejeter *tout* problème de probabilités continues, alors que beaucoup d'entre eux (aiguille de Buffon, etc.) ont été résolus avec succès. Bertrand propose donc trois manières, toutes trois conformes aux approches classiques en probabilités géométriques, de résoudre le problème.

1. on tire au hasard deux points sur le cercle (ce qui équivaut à deux nombres compris entre 0 et 2π) : ils définissent une corde, celle qui joint les deux points;
2. on tire au hasard une demi-droite (ce qui équivaut à un nombre θ entre 0 et 2π) et une distance d au centre du cercle (ce qui équivaut à un nombre entre 0 et R); ces deux données définissent univoquement une corde perpendiculaire à la direction donnée et dont la distance au centre est d .
3. on tire au hasard un point à l'intérieur du cercle : ce point définit de manière univoque une corde dont le centre est ce point.

La nouveauté ici, par rapport à l'énoncé initial, est que les ensembles dans lesquels on "choisit au hasard" sont maintenant des ensembles numériques; on choisit à chaque fois un couple de nombres : deux nombres $u_1 \in [0, 2\pi[$ et $u_2 \in [0, 2\pi[$ dans le cas **1**, deux nombres $\theta \in [0, 2\pi[$ et $d \in [0, R]$ dans le cas **2**, et deux nombres x, y (les coordonnées cartésiennes du milieu) dans le cas **3**.

LE PARADOXE DE BERTRAND

L'ensemble de tous les résultats possibles est donc $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ dans le cas **1**, $[0, 2\pi[\times [0, R]$ dans le cas **2**, le disque $x^2 + y^2 < R^2$ dans le cas **3**. Il s'agit toujours d'un continuum, auquel on ne peut appliquer la règle (1). Toutefois, si on ne peut pas définir correctement le *nombre* de cas possibles (qui serait infini), on peut définir l'*aire* des domaines à deux dimensions $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ ou $[0, 2\pi[\times [0, R]$ ou encore le disque $x^2 + y^2 < R^2$. On peut donc remplacer la règle (1) par

$$\text{probabilité} = \frac{\text{aire de l'ensemble des résultats favorables}}{\text{aire de l'ensemble des résultats possibles}} \quad (2)$$

Il est facile de caractériser l'ensemble des résultats favorables dans chacun des trois cas : pour que la corde ait une longueur supérieure à $R\sqrt{3}$ il faut et il suffit que

- dans le cas **1** $\frac{2\pi}{3} < |u_2 - u_1| < \frac{4\pi}{3}$;
- dans le cas **2** $d < R/2$;
- dans le cas **3** $x^2 + y^2 < (R/2)^2$.

La réponse est facile à obtenir; impossible de l'exposer plus clairement que Bertrand :

cas 1. On peut dire : si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

L'une des extrémités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60° . La corde, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble, par définition, égale à $\frac{1}{3}$.

cas 2. On peut dire aussi : si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité. La symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition, égale à $\frac{1}{2}$.

cas 3. On peut dire encore : choisir une corde au hasard, c'est en choisir le point milieu. Pour que la corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centre plus petite que la moitié du rayon, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle quatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface quatre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour que la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côté du triangle équilatéral semble, par définition, égale à $\frac{1}{4}$.

Entre ces trois réponses, quelle est la véritable? Aucune des trois n'est fautive, aucune n'est exacte, la question est mal posée.

En résumé, la réponse n'est pas la même dans les trois cas : dans le cas 1 elle vaut $\frac{1}{3}$, dans le cas 2 elle vaut $\frac{1}{2}$, dans le cas 3 elle vaut $\frac{1}{4}$.

Bertrand donne cet exemple pour montrer que l'expression "au hasard" n'a pas un sens intrinsèque; il écrit en effet à ce propos :

L'infini n'est pas un nombre; on ne doit pas, sans explication, l'introduire dans les raisonnements. La précision illusoire des mots pourrait faire naître des contradictions. Choisir *au hasard*, entre un nombre infini de cas possibles, n'est pas une indication suffisante.

Bertrand montre donc que le problème “on tire une corde *au hasard*, quelle est la probabilité pour que . . .” est mal posé. Quand on dit “on tire une corde *au hasard*”, l’expression *au hasard* devrait signifier que toutes les cordes sont équiprobables, mais on n’a pas une *mesure* sur l’ensemble (continu) de toutes les cordes qui permettrait de connaître le poids de chacune. C’est cette idée de mesure qui va être la clé des deux solutions fournies l’une par Poincaré, l’autre par Borel, au paradoxe. Lorsqu’on réduit (par la modélisation **1**, **2** ou **3**) le problème à des ensembles numériques, ici des domaines du plan, on a une mesure des poids relatifs : si on prend “au hasard” un nombre entre 0 et 2π , la probabilité qu’il soit inférieur à π est $\frac{1}{2}$, etc.

Ainsi la clé du paradoxe est que l’énoncé “on tire une corde *au hasard*, quelle est la probabilité pour que . . .” ne fournit pas l’information sur le poids relatif des cordes ; on doit ajouter cette information en identifiant chaque corde à un couple de nombres réels, et cette opération comporte un certain arbitraire car il y a plusieurs façons d’identifier chaque corde à un couple de nombres réels.

Dans son propre *Calcul des probabilités* paru une quinzaine d’années plus tard, au chapitre **VII** PROBABILITÉ DU CONTINU, Henri Poincaré expose le problème que nous venons de décrire, avec deux solutions différentes (correspondant aux cas **1** et **2** de Bertrand), sous le titre **Paradoxe de J. Bertrand**. Il conclut :

Pourquoi cette contradiction? Nous avons fait des hypothèses différentes dans les deux cas ; nous avons défini la probabilité de deux manières différentes.

D’une manière générale, on demande de définir la probabilité pour qu’un nombre x soit compris entre x_0 et x_1 : en général, nous pouvons dire que nous n’en savons rien du tout.

Cette probabilité doit dépendre de x_0 et x_1 : ce sera donc une fonction telle que $P(x_0, x_1)$.

Ici, Poincaré montre à partir du principe des probabilités totales que cette fonction P sera de la forme

$$P(x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) dx .$$

puis il continue :

Mais *nous ignorons la nature de $\varphi(x)$* qui reste arbitraire : il faut nous la *donner* au début du problème par une convention spéciale pour qu’il ait un sens.

De même, la probabilité pour que le point (x, y) soit à l’intérieur d’une aire donnée est

$$\iint \varphi(x, y) dx dy ,$$

l’intégrale double étant étendue à tous les éléments de l’aire ; mais nous ne connaissons pas $\varphi(x, y)$.

Le mathématicien n’a plus aucune prise sur le choix de cette hypothèse ; mais il doit, une fois qu’elle est choisie, porter son attention à ne pas en faire une autre qui la contredise.

Poincaré explique donc que les deux représentations numériques **1** et **2** de Bertrand pour l’ensemble des cordes correspondent à des choix différents de la fonction φ ; la représentation numérique N° **3** correspondrait évidemment à un choix encore différent des deux premiers.

Nous y reviendrons plus loin, lorsque nous présenterons le calcul détaillé.

LE PARADOXE DE BERTRAND

L'analyse de Poincaré repose sur le constat que le choix de φ est une pure convention, même sur des ensembles numériques. La probabilité ne saurait être définie dans l'absolu par la règle (2), il faut instituer une règle plus générale :

$$\text{probabilité} = \frac{\int\int_{\{\text{favorables}\}} \varphi(x, y) dx dy}{\int\int_{\{\text{possibles}\}} \varphi(x, y) dx dy} \quad (3)$$

Cet aspect de son approche est très caractéristique : l'insistance sur la convention. On a parlé du *conventionnalisme* de Poincaré, surtout à propos de ses réflexions sur le temps et le principe de relativité de Galilée (cf. *La valeur de la science*, chapitre **II La mesure du temps.**), ou sur l'électromagnétisme (cf. *Théorie mathématique de la lumière*). Il est clair que Poincaré exprime ici la version probabiliste de son conventionnalisme; mais l'idée désignée sous ce terme est trop souvent mal comprise. Les commentateurs sont toujours prompts à classer les idées sous des mots en -isme, mais rarement enclins à les respecter suffisamment pour faire l'effort de les comprendre.

Je demande maintenant au lecteur de ne pas reculer devant cet effort, et de faire pour commencer un peu de mathématique. Nous allons analyser en détail les relations entre les modélisations **1**, **2**, et **3**.

Introduisons les coordonnées suivantes :

- u l'angle polaire de la médiatrice de la corde;
- v le demi-angle d'ouverture de la corde;
- d la distance de la corde au centre du cercle et $t = \frac{d}{R}$;
- x, y les coordonnées cartésiennes du milieu de la corde.

On peut dire que dans le modèle 1 on choisit les nombres u et v au hasard, c'est à dire que u est pris au hasard dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ et v au hasard dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, et on cherche la probabilité pour que v soit dans $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ (en présentant ce modèle, Bertrand avait dit qu'on choisissait au hasard les deux extrémités u_1 et u_2 de la corde, et non les paramètres u et v introduits ci-dessus, mais nous verrons que cela est équivalent).

Par contre dans le modèle 2 ce sont les nombres u et t qui sont choisis au hasard dans les intervalles $[0, 2\pi]$ et $[0, 1]$, et on cherche la probabilité pour que t soit dans $[0, \frac{1}{2}]$.

Enfin, dans le modèle 3 ce sont les nombres x, y qui sont choisis au hasard dans le domaine $x^2 + y^2 < R^2$, et on cherche la probabilité pour que $x^2 + y^2 < (R/2)^2$.

L'expression *au hasard* signifie que dans les domaines considérés il n'y a pas de région privilégiée et que par conséquent la règle (2) s'applique. La critique de Bertrand était que sur l'ensemble de toutes les cordes, l'expression "au hasard" ne signifie rien, car il n'y a pas de mesure; pour que cette expression prenne un sens, il faut se ramener à des ensembles numériques (ici, des domaines du plan). Nous suivons donc bien ce précepte.

Ces choix *au hasard* se traduisent mathématiquement par le fait que les probabilités sont les rapports des aires, c'est la règle (2) :

cas 1.

$$P_1 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dv du}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv du}$$

cas 2.

$$P_2 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} dt du}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 dt du}$$

cas 3.

$$P_3 = \frac{\int \int_{x^2+y^2 < R^2/4} dx dy}{\int \int_{x^2+y^2 < R^2} dx dy}$$

Entre les différents paramètres u, v, t, d, x, y , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} d &= R \cos v & (\text{et donc } t &= \cos v) \\ x &= d \cos u \\ y &= d \sin u \end{aligned}$$

de sorte que si on les exprime tous en fonction de u, t cela donne

$$\begin{aligned} v &= \arccos t \\ x &= R t \cos u \\ y &= R t \sin u \end{aligned}$$

Si maintenant on rapporte les cas 1 et 3 aux coordonnées u, t , c'est-à-dire si on fait le changement de variable correspondant dans les intégrales, les probabilités deviennent respectivement :

$$P_1 = \frac{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dv}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt} \quad P_2 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} dt}{\int_0^1 dt} \quad P_3 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} t dt}{\int_0^1 t dt}$$

(Les intégrales en du se factorisent puis se simplifient, ce qui résulte simplement de la symétrie de rotation).

On voit ainsi que le changement de coordonnées a introduit des densités, $1/\sqrt{1-t^2}$ dans le cas **1** et t dans le cas **3**, qui sont plus grandes pour t proche de 1 que pour t proche de 0. Cela signifie que le choix au hasard du nombre v dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ ou le choix au hasard d'un point x, y sur le disque ne correspondent plus à un choix au hasard du nombre t . Si on choisit au hasard v dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, de sorte qu'aucune région de cet intervalle ne soit favorisée, alors, pour les valeurs correspondantes de t , on favorise la région proche de 1 par rapport à la région proche de 0.

Cette différence de répartition est due à la non linéarité du changement de variable. Par contre le passage des coordonnées u_1, u_2 (abscisses angulaires des extrémités) aux coordonnées u, v est linéaire : $u_1 = u - v/2$ et $u_2 = u + v/2$; c'est pourquoi dans le cas **1** il est indifférent de choisir u_1, u_2 au hasard ou u, v .

C'est cette différence de répartition qui explique que les probabilités pour que $t < 1/2$ soient plus petites dans les cas 1 et 3 (resp. $1/3$ et $1/4$) que dans le cas 2 ($1/2$).

Ainsi *il n'est pas équivalent* de choisir au hasard les deux extrémités de la corde (cas 1), ou de choisir au hasard son milieu (x, y) (cas 3), ou encore de choisir au hasard sa direction et sa distance au centre (cas 2).

L'apparition de ces densités non uniformes montre deux choses :

— a) que, comme Bertrand l'avait souligné, il n'y a pas une uniformité objective sur l'ensemble des cordes, comme il y en a sur l'ensemble des 37 chiffres de la roulette, ou même sur l'ensemble des points d'un intervalle;

— b) que, comme Poincaré l'a souligné, on ne peut pas deviner la densité; si on traite le cas **1** avec les coordonnées u, v on a bien une densité uniforme, et on peut dire qu'on "choisit au hasard" les deux nombres u et v . Mais si on traite le cas **1** avec les coordonnées u, t (ou le cas **2** avec les coordonnées u, v), l'expression de la probabilité sera conforme à la règle (3) qui fait intervenir une densité, et non à la règle (2); cette densité, nous devons la calculer à partir des hypothèses qui caractérisent le modèle **1**, nous ne pouvons pas poser a priori qu'elle est uniforme; ou, si nous le faisons, alors c'est dans l'autre modèle que nous ne pourrions pas poser qu'elle est uniforme.

Pour bien comprendre le point de vue de Poincaré (celui qu'on a appelé le *conventionnalisme*), il ne faut donc pas prendre des phrases telles que :

Mais *nous ignorons la nature de $\varphi(x)$* qui reste arbitraire : il faut nous la *donner* au début du problème par une convention spéciale pour qu'il ait un sens.

(voir les citations plus haut) et les interpréter hors contexte : elles signifient qu'il ne peut pas y avoir un axiome de la théorie des probabilités qui affirmerait par exemple que la densité φ est uniforme. Il peut arriver qu'elle le soit, mais cela résultera de conditions spécifiques, ce ne sera pas une propriété générale des probabilités. Une phrase telle que celle ci-dessus ne signifie en aucun cas que le mathématicien peut prendre n'importe quelle fonction pour densité sous prétexte que celle-ci serait arbitraire, ni que toutes les densités sont également "vraies"; elle

signifie qu'une théorie *générale* cohérente des probabilités doit prévoir une densité arbitraire pour pouvoir s'adapter à toutes les situations qu'on rencontrera.

Cette phrase ne signifie pas non plus que l'uniformité (l'équiprobabilité) ne joue aucun rôle en Calcul des probabilités et ne serait qu'un cas particulier fortuit; dans l'exemple étudié il est clair que les densités qui apparaissent lors des changements de coordonnées n'auraient pas pu être calculées si on n'avait pas posé les modèles autres que le **N°2** en termes d'uniformité. C'est bien l'uniformité selon les variables u et v qui conduit à la densité $1/\sqrt{1-t^2}$ selon les variables u et t . *Ce n'est pas la densité elle-même qui peut être choisie par convention, mais les coordonnées dans lesquelles on décide d'analyser le problème.*

Je me permets d'insister sur ce point. L'interprétation vulgaire du conventionnalisme de Poincaré, c'est-à-dire l'interprétation transmise par ceux qui ne l'ont pas lu et qui se sont contentés d'un vernis scolaire et superficiel, est résumée par le slogan "tout est convention, rien n'est objectif, rien n'est réel", et apparentée au positivisme. Dans cette interprétation vulgaire, le choix de la densité φ est arbitraire car les trois versions, comme le disait Bertrand, sont également acceptables. Mais cela n'est vrai que pour les problèmes qu'on donne à l'école : le professeur peut alors choisir entre les trois versions; c'est effectivement vrai, mais trivial, et du même niveau que le slogan attribué à Einstein "tout est relatif". Pour comprendre la véritable *idée* de Poincaré, il faut la mettre dans son contexte, et la rattacher à ses réflexions sur la mesure du temps (cf. *La valeur de la science*) qui sont l'expression la plus célèbre de ce "conventionnalisme". Poincaré dit

Le temps doit être défini de telle façon que les équations de la Mécanique soient aussi simples que possible. La mesure du temps est une convention et aucune n'est plus objective qu'une autre."

Le chapitre "La mesure du temps" dont est extraite cette citation explique comment, de l'astronomie aux vibrations des atomes, les physiciens ont peu à peu fait évoluer la définition du temps pour se rapprocher de l'homogénéité parfaite de son écoulement, dont dérivent la conservation de l'énergie et la notion de repère galiléen. On pourrait prendre à la place du "vrai" temps t n'importe quel paramètre $s = f(t)$ (changement de variable); mais, sauf si f est linéaire, les équations de la Mécanique seraient plus compliquées avec s qu'avec t . On retrouve cela pour les probabilités, comme le montrent les calculs faits plus haut : dans chacun des trois cas étudiés, on a une invariance qui conduit à une équiprobabilité. Si on analyse par exemple le cas **1** dans les coordonnées (u, v) , la densité $\varphi(u, v)$ est uniforme; mais si on analyse le même cas **1** dans les coordonnées (u, t) , alors $\varphi(u, t) = 1/\sqrt{1-t^2}$. La convention dont parle Poincaré n'est donc pas celle du maître d'école qui peut choisir arbitrairement les énoncés d'exercices, mais celle du choix des coordonnées.

Pour résumer : le conventionnalisme de Poincaré en Calcul des probabilités consiste à dire que le choix des coordonnées dans lesquelles on souhaite décrire un problème donné est libre (il en résultera une densité dépendant de ces coordonnées), et non que les conditions de ce problème sont conventionnelles (ces dernières sont, sauf à l'école, données par la réalité). Exactement comme dans un problème de Mécanique où on est libre de choisir le repère : les *lois* de la Mécanique ne dépendent pas

du repère. De même les axiomes d'une théorie des probabilités ne doivent pas dépendre du choix des coordonnées; or, seule la règle (3) est indépendante du choix des coordonnées, et non la règle (2). Ce sont les circonstances pratiques, et non les principes, qui imposent un choix particulier : choisir le repère dans lequel le calcul sera le plus simple possible.

Je regrette de ne pas avoir ici la place pour discuter davantage l'analyse que Poincaré a faite de la mesure du temps en Astronomie et Mécanique, car la similitude est saisissante (cf. *La valeur de la science*).

Pour que les choses soient entièrement clarifiées, je présente encore un problème "concret", dont les conditions ne sont pas conventionnelles mais imposées par la situation. En effet, la raison pour laquelle le point de vue de Poincaré a souvent été mal compris est sans doute que les problèmes scolaires de probabilités sont fabriqués de toutes pièces : si on énonce "on tire une boule au hasard dans une urne" il est sous-entendu par convention que les boules seront équiprobables et on ne se réfère pas à des conditions objectives; d'où le sentiment qu'on peut choisir les hypothèses comme on veut et la confusion de ce sentiment avec le conventionnalisme de Poincaré. Posons le problème des cordes sur un cercle de la manière suivante.

On jette, à partir d'une ouverture pratiquée dans le plafond, des millions de fétus de paille sur le plancher. Afin d'assurer une bonne dispersion des brins, on place un puissant ventilateur près de l'ouverture dans le plafond. Sur le sol, on a tracé un grand cercle à la craie. Pour chaque brin de paille tombé sur le sol, on considère la droite qui le prolonge; dans beaucoup de cas, la droite ne coupera pas le cercle, mais on ne compte pas ces brins. Pour chaque brin dont le prolongement coupe le cercle, on considère la corde que ce prolongement découpe sur le cercle.

Comment se distribuent statistiquement ces cordes?

On a ici affaire à une situation pratique : ce n'est plus *nous* qui décidons d'une manière de choisir les cordes, les cordes se distribuent toutes seules. L'étude des trois cas a montré qu'il y a différentes distributions possibles pour les cordes, mais dans une expérience réelle il y aura forcément une certaine distribution particulière.

Dans cette expérience, c'est le modèle $N^{\circ}2$ qui est le bon. On peut s'en convaincre sans faire l'expérience, et sans calculer le mouvement des brins. Pour cela, il suffit de remarquer que la distribution des brins sur le plancher ne peut pas dépendre de la présence du cercle : il serait absurde que les brins se distribuent différemment selon qu'on a tracé un cercle ou qu'on n'en a pas tracé (sauf si par exemple le cercle n'était pas matérialisé par de la craie, mais par de petits aimants, qui attireraient les brins de paille supposés aimantés, ou tout autre artifice de ce type). De même, les brins seront distribués à peu près de la même façon dans toutes les régions du plancher. Par conséquent, la distribution des cordes que le prolongement des brins découpe sur un cercle sera la même quelle que soit la région où on trace le cercle. Il est donc impossible que se produisent les situations 1 ou 3, dans lesquelles les cordes sont plus denses près du bord du cercle : si tel était le cas pour un cercle

particulier, ce ne pourrait plus l'être pour un autre cercle tracé un mètre plus loin. Il faudrait que les brins "sentent" la présence du cercle et tombent délibérément d'une manière qui favorise le bord du cercle. Seul le modèle $N^{\circ}2$ correspond à une distribution des droites qui soit indépendante de l'existence du cercle. Ainsi, du fait que les conditions du problème sont déterminées par les circonstances (le ventilateur, les lois du mouvement des brins de paille, etc.), on ne peut "choisir par convention" la loi de probabilité; on peut seulement choisir les coordonnées.

Le paradoxe de Bertrand, l'absence d'une mesure sur l'ensemble des cordes, le caractère arbitraire de la densité φ , tout cela ne signifie pas (comme je l'ai parfois entendu) que le problème ci-dessus aurait plusieurs solutions.

Émile Borel, dans son livre *Le hasard* paru en 1914, reprend le problème de Bertrand et le rediscute. Je rappelle encore ici le sentiment qui pourrait résulter d'une lecture superficielle de Bertrand ou Poincaré, à savoir que les trois réponses au problème seraient toutes également bonnes :

Entre ces trois réponses, quelle est la véritable? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée.

(Joseph Bertrand)

Mais nous ignorons la nature de $\varphi(x)$ qui reste arbitraire : il faut nous la donner au début du problème par une convention spéciale pour qu'il ait un sens.

(Henri Poincaré)

Voici ce qu'écrivit Émile Borel immédiatement après avoir exposé les trois solutions :

Doit-on penser que ces trois solutions sont également bonnes et, par suite, également mauvaises? Nullement, il s'agit simplement de préciser le mode d'après lequel se fera la vérification expérimentale, c'est-à-dire comment on s'y prendra pour tracer une corde *au hasard* dans un cercle : si l'on assujettit cette corde à passer par un point fixe du cercle, ou si l'on fixe son milieu *au hasard*, c'est la première⁽¹⁾ ou la troisième solution qui est la bonne; mais il est aisé de voir que la plupart des procédés naturels que l'on peut imaginer conduisent à la seconde.

Après ces mots, Borel donne un exemple équivalent au problème "concret" précédent (où l'on jette du plafond des fétus de paille). Il conclut :

Comme la solution expérimentale du problème n'est pas contestée on est conduit, dans ce cas pratique, à constater que la seconde des solutions de Bertrand est la seule bonne; il ne nous appartient donc pas, en modifiant arbitrairement une définition, de modifier la solution du problème.

Cette dernière phrase ne contredit pas le conventionnalisme de Poincaré si on a bien compris celui-ci (de toute façon, la version *mal comprise* n'est évidemment pas viable).

Borel conclut que "l'attitude de Bertrand est trop sceptique". Il apparaît en effet que dans son analyse Bertrand conteste la validité générale des probabilités continues; il présente son paradoxe comme un avertissement devant les absurdités qui peuvent surgir à cause du continu. Borel lui reproche de ne pas avoir perçu

⁽¹⁾ Ordre modifié pour le rendre compatible avec notre présentation

LE PARADOXE DE BERTRAND

l'idée d'invariance, qui existe sur les ensembles numériques, mais pas sur l'ensemble des cordes : pour Borel, c'est l'existence d'une invariance qui fonde l'expression *au hasard*; c'est donc l'absence d'invariance et non le continu qui crée le paradoxe.

Pour bien montrer cela, Borel reprend un autre exemple de Bertrand :

Problème : *Deux points M et M' sont pris au hasard sur la sphère; quelle est la probabilité pour que le plus petit arc de grand cercle MM' soit inférieur à α ?*

Bertrand trouve deux solutions incompatibles; nous paraphrasons la présentation de Borel :

Premier raisonnement : La probabilité sera la même quelle que soit la position de M ; or, lorsque le point M est fixé, M' doit se trouver sur une calotte sphérique entourant M , correspondant à un demi-angle au centre α . La hauteur de cette calotte est $h = R(1 - \cos \alpha)$, en désignant par R le rayon de la sphère. L'aire de la calotte est proportionnelle à h , donc le rapport de l'aire de la calotte à l'aire de la sphère est

$$\frac{h}{2R} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Telle est la probabilité cherchée; si α est très petit, on peut remplacer le sinus par l'arc et prendre pour valeur approchée $\frac{\alpha^2}{4}$.

Deuxième raisonnement : Lorsqu'on donne deux points M et M' l'arc du grand cercle qui les joint est déterminé (on peut écarter le cas de probabilité nulle où M et M' sont diamétralement opposés); tous les arcs de grand cercle étant analogues sur la sphère, on ne change pas la probabilité en fixant cet arc de grand cercle : or la probabilité pour que deux points M et M' d'un cercle soient tels que l'arc MM' soit inférieur à α est $\frac{\alpha}{\pi}$; ce résultat est très différent du précédent, surtout si α est très petit.

Borel montre que la première solution est conforme aux invariances fondamentales du problème (tous les points de la sphère sont équivalents), mais pas la seconde; en effet, Bertrand dit que, le grand cercle MM' étant fixé, la probabilité que M et M' pris *au hasard* sur *ce* cercle est $\frac{\alpha}{\pi}$. Mais si on garde à l'esprit que la seule invariance *véritable* du problème est l'invariance sphérique, la distribution de probabilité sur un grand cercle donné ne sera pas uniforme le long de ce grand cercle, mais se fera selon une densité φ proportionnelle à la largeur du fuseau formé par deux grands cercles infiniment proches. Comme nous l'avons vu plus haut pour les cordes, cela fait apparaître entre les deux solutions un lien sous la forme d'un changement non linéaire de coordonnées; mais l'argument de Borel est que la première solution est vraiment naturelle, car elle correspond à la "vraie" invariance de la sphère, alors que la seconde ne correspond à rien de naturel :

Doit-on conclure avec Bertrand que le problème proposé ne peut pas être résolu et que la première solution que nous avons donnée est incorrecte? Cette solution est, au contraire, la seule correcte, si l'on admet le postulat relatif à la probabilité élémentaire, c'est-à-dire si on considère toutes les portions égales de la sphère comme équivalentes entre elles, au point de vue de la probabilité qu'à le point M de s'y trouver.

La différence avec les cordes est que sur l'ensemble des cordes, il n'y a pas d'invariance naturelle; il n'y a pas une distribution plus logique qu'une autre. Sur la sphère, si.

On peut dire que Bertrand a certes critiqué des généralisations hâtives et averti son lecteur des absurdités auxquelles on peut être conduit par l'usage irréfléchi de l'expression *au hasard*. Mais il n'a pas cherché à savoir si cette expression avait un sens encore insoupçonné; pour lui, il s'agissait de mots ("la précision illusoire des mots pourrait faire naître des contradictions"). Il réagissait en gardien de la science établie, celle qui a défini ce qui est scientifique et ce qui ne l'est pas, et voulait avertir son lecteur de ce qui n'est pas scientifique.

L'attitude de Borel est toute autre : sa motivation n'était pas de garder ce qui était établi, mais de comprendre ce qu'est le hasard; pour lui l'expression *au hasard* n'était pas un mot illusoire, mais un mystère à percer.

Voyez-vous la différence?

C'est pourquoi Borel a découvert que le hasard est, aussi bien dans le continu que dans le fini, **ce qui choisit entre des possibilités équivalentes**. Et pour cela, il faut qu'il y ait une invariance.

Borel donne dans le même chapitre, après les considérations précédentes, un commentaire sur l'analyse de Poincaré que nous avons vue plus haut (à propos du caractère *arbitraire* de la densité φ), que je conseille très vivement au lecteur; mais je ne la rapporte pas ici, car elle s'écarte de notre sujet (Émile Borel, *Le hasard*, pages 91 – 95)

Reprenons encore le paradoxe des cordes par un autre aspect. La critique de Bertrand était essentiellement fondée sur l'impossibilité de compter l'ensemble de toutes les cordes possibles. Si on prend le terme *ensemble* dans le sens où les mathématiques dites "ensemblistes"⁽¹⁾ l'enseignent, c'est l'ensemble de toutes les cordes distinctes; on peut le mettre en bijection avec l'ensemble des coordonnées u, v ou u, t comme nous l'avons fait, mais (et c'est justement ce qui fait le paradoxe) on ne peut pas définir une mesure sur l'ensemble des cordes par de telles bijections : la mesure dépendrait de la bijection. La critique de Bertrand ne peut évidemment pas concerner des ensembles finis, où tout se passe sans paradoxe ni ambiguïté. Que se passerait-il alors si on discrétisait l'ensemble des cordes? Pour discrétiser un ensemble continu on représente par un seul élément toute une famille continue d'éléments proches de celui qu'on a choisi.

On voit déjà poindre ce qui va se passer : le mot "proche" invoque une métrique, c'est-à-dire une mesure : dira-t-on que la corde C est proche de la corde C_0 si ses extrémités sur le cercle diffèrent de moins de ε de celles de C_0 ? Ou si sa direction et sa distance au centre du cercle diffèrent de moins de ε de celles de C_0 ?

(1) Et je rappelle que Borel a participé à la construction de la théorie des ensembles.

LE PARADOXE DE BERTRAND

Ou si son centre est à une distance inférieure à ε de celui de C_0 ? On retrouvera respectivement les trois modèles.

Il est immédiat que les trois modèles ont l'invariance par rotation; la discrétisation par rapport à la coordonnée u est donc commune aux trois modèles; seule la partie radiale de la discrétisation les distinguera. Sur les figures 1, 2, et 3, on a représenté cette partie radiale de l'ensemble discrétisé; il faut imaginer que l'ensemble discrétisé complet est formé par la superposition de 360 figures radiales, tournées chacune de un degré par rapport à la précédente.

Les trois ensembles de la figure ont le même nombre d'éléments; mais ces éléments ne sont pas distribués de la même façon le long du rayon : ils correspondent aux densités $1/\sqrt{1-t^2}$ (fig 1), 1 (fig 2), et t (fig 3). Le nombre d'éléments situés à moins de $R/2$ du centre est donc plus faible sur les figures 1 et 3 que sur la figure 2.

Il est bien clair que sur chacun de ces ensembles finis, où chaque corde est équiprobable, il n'y a pas d'ambiguïté concernant le calcul de la probabilité; la règle (1) s'applique. L'ambiguïté qui avait fait le paradoxe se reporte sur la discrétisation : il y en a une différente pour chaque modèle. On comprend en quoi le continu masque cela : sur le continuum de cordes, on ne voit pas la densité des cordes; sur les figures la densité est le nombre de cordes par millimètre; mais dans le continu elles sont toutes collées ensemble et on ne peut pas voir si elles sont rares ou denses.

Je finirai par une remarque, qui éclaircira encore le conventionnalisme de Poincaré : il y a une analogie très forte entre l'équiprobabilité des choix du hasard et le principe d'inertie en Mécanique :

— Une transformation linéaire des coordonnées conserve l'équiprobabilité (dans le modèle **1** la densité est uniforme aussi bien dans les coordonnées u, v que dans les coordonnées u_1, u_2) tout comme une transformation galiléenne conserve les mouvements rectilignes uniformes.

— Une transformation non linéaire des coordonnées fait apparaître une densité φ , tout comme un repère non galiléen fait apparaître des mouvements non inertiels.

— Un problème de probabilités peut être analysé avec n'importe quelles coordonnées (chacun des modèles **1**, **2**, **3** peut indifféremment être analysé dans les coordonnées u, v ou u, t ou encore x, y), tout comme un problème de Mécanique peut être analysé dans n'importe quel repère non nécessairement galiléen.

— Enfin, et surtout : quelqu'un qui observe la distribution des cordes sur une figure du type 1, 2, ou 3 peut *en déduire* la manière dont "le hasard" a choisi les cordes (s'il a choisi au hasard les coordonnées u, v dans $[0, 2\pi \times [0, \frac{\pi}{2}]$, ou s'il a choisi au hasard les coordonnées u, t dans $[0, 2\pi \times [0, R]$, ou encore s'il a choisi au hasard les coordonnées x, y dans le disque), tout comme quelqu'un qui observe un champ de pesanteur constant dans une capsule spatiale située loin de toute masse peut en déduire que celle-ci est uniformément accélérée.

Le conventionnalisme de Poincaré consiste à dire qu'il n'y a pas de coordonnées privilégiées dans l'absolu, et qu'il faut choisir celles qui conduisent aux calculs les plus simples possibles.

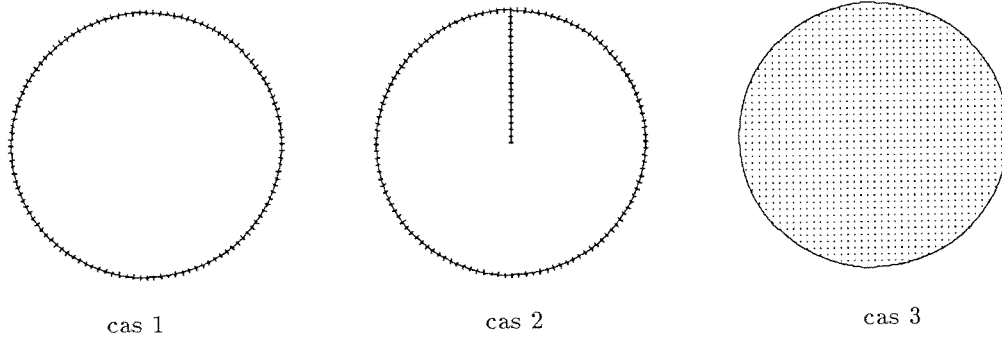


figure 0

On a représenté la discrétisation du problème dans les trois cas. Afin de ne pas surcharger la figure, on n'a représenté la discrétisation que radialement pour les cas 1 et 2. Dans le cas 3, le quadrillage détruit bien sûr la symétrie sphérique, mais celle-ci est conservée statistiquement.

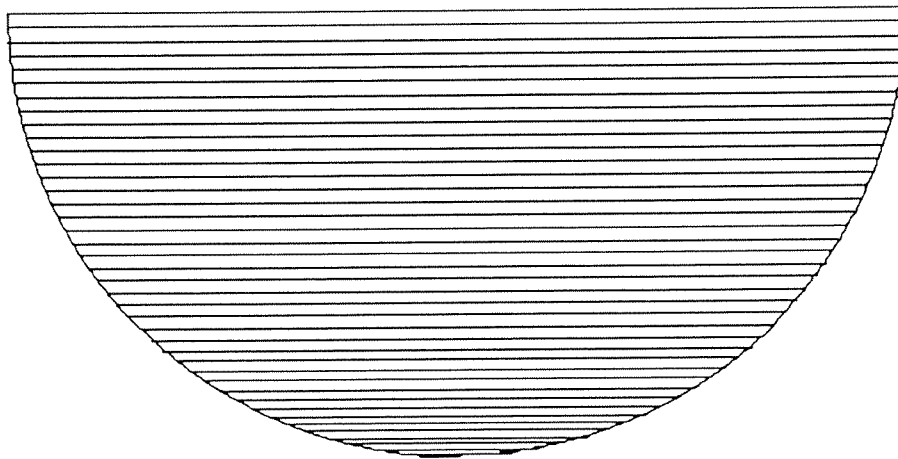


figure 1

LE PARADOXE DE BERTRAND

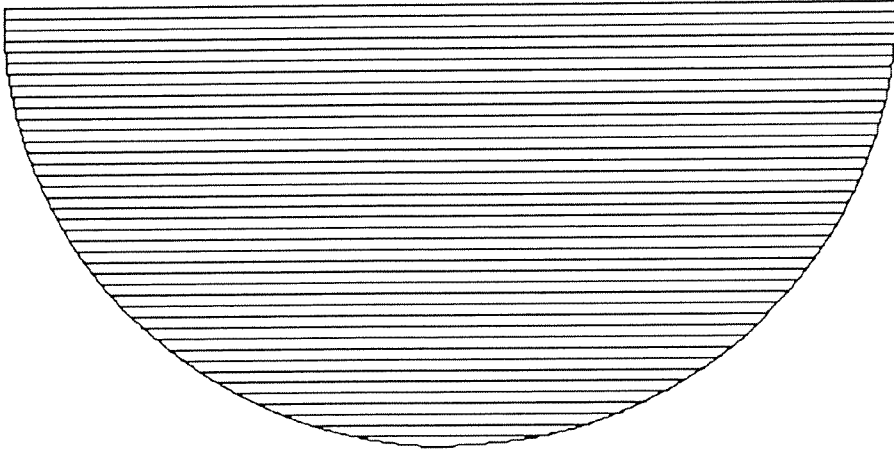


figure 2

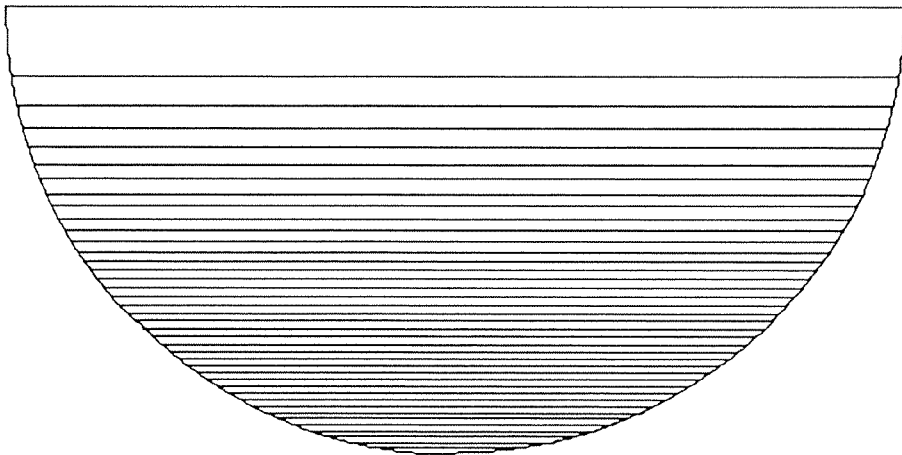


figure 3

MINI-CONTRIBUTION
À L'ÉTUDE DE LA DÉPENDANCE PROBABILISTE

Edith KOSMANEK

Enseignante titulaire à l'Université de Paris 1 – Fax 64 22 81 31

Dédicace : à M. le Professeur Aimé FUCHS - Université L. Pasteur de Strasbourg

Introduction

D'après ma petite enquête auprès de quelques probabilistes strasbourgeois, ils ignoraient l'inégalité élémentaire mais intéressante, qui figure dans la proposition (2). La probabiliste d'opérette que je suis, a néanmoins réussi à la découvrir et à fournir plusieurs démonstrations!

Merci à 'L'Ouvert' de diffuser ce résultat auprès de son lectorat.

Proposition 1.— *Soient un espace probabilisable (Ω, T) et un couple d'événements $(A, B) \in TT$; alors il existe au moins une mesure de probabilité $P_{(A,B)}$ sur (Ω, T) telle que le couple (A, B) soit indépendant.*

Preuve : Considérons les "atomes" \mathcal{A}_i de la partition générée par (A, B) :

$$\mathcal{A}_1 = A \cap B, \mathcal{A}_2 = A \cap \bar{B}, \mathcal{A}_3 = \bar{A} \cap B, \mathcal{A}_4 = \bar{A} \cap \bar{B}$$

et soit une mesure quelconque $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ telle que

$$(1) \quad p_i = P(\mathcal{A}_i); 0 \leq p_i \leq 1; \sum_{i=1}^4 p_i = 1.$$

Calculons "l'écart à l'indépendance" pour (A, B) :

$$\begin{aligned} e(A, B) &= P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\mathcal{A}_1) - [P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2)][P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_3)] \\ &= p_1 - (p_1 + p_2)(p_1 + p_3) = p_1(1 - p_1 - p_2 - p_3) - p_2p_3 \\ e(A, B) &= p_1p_4 - p_2p_3. \end{aligned}$$

L'indépendance du couple (A, B) est équivalente à : $e(A, B) = 0$ (2). Il existe, en général, une infinité de mesures $P_{(A,B)}$ qui réalisent (2) sous les contraintes (1) :

- $p_1 + p_2 \neq 0 \implies P_{(A,B)} = (p_1, p_2, p_3 = \frac{p_1(1-p_1-p_2)}{p_1+p_2}, p_4 = \frac{p_2(1-p_1-p_2)}{p_1+p_2})$; cas particulier équi pondéré : $P_{(A,B)} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$
- $p_1 = p_2 = 0 \implies P_{(A,B)} = (0, 0, p_3, p_4 = 1 - p_3)$.

La mesure $P_{(A,B)}$ est unique si $P(A) = P(B) = 0$; elle vaut alors $P_{(A,B)} = (0, 0, 0, 1)$

Proposition 2.— Pour tout espace probabilisé (Ω, T, P) , pour tout couple d'événements $(A, B) \in TT$, l'écart à l'indépendance $e(A, B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$ est encadré somme suit :

$$0 \leq |e(A, B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Preuve (1) : Optimisons la fonction $e(A, B) = f(P) = f(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_1 p_4 - p_2 p_3$ sous les contraintes **(1)**.

Le maximum $f(P_M) = \frac{1}{4}$ est atteint pour $P_M = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$.

Le couple (A, A) avec $P(A) = \frac{1}{2}$ réalise ce maximum.

Le minimum $f(P_m) = -\frac{1}{4}$ est atteint pour $P_m = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Le couple (A, \bar{A}) avec $P(A) = \frac{1}{2}$ réalise ce minimum.

Preuve (2) : Appliquons l'inégalité de Schwarz aux variables aléatoires indicatrices : $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) &= E(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) = E(\mathbf{1}_{A \cap B}) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(B) = e(A, B) \end{aligned}$$

L'écart à l'indépendance du couple (A, B) s'interprète donc comme la covariance du couple $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

$$\text{var}(\mathbf{1}_A) = \text{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_A) = P(A)[1 - P(A)] = P(A)P(\bar{A})$$

$$\text{var}(\mathbf{1}_B) = P(B)P(\bar{B}).$$

Or, il est immédiat que : $0 \leq p(1-p) \leq \frac{1}{4} \quad \forall p \in [0, 1]$ **(3)**. Donc, d'après l'inégalité de Schwarz : $[\text{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)]^2 \leq [\text{var}(\mathbf{1}_A)][\text{var}(\mathbf{1}_B)] \leq \frac{1}{16} \implies 0 \leq |e(A, B)| \leq \frac{1}{4}$.

Preuve (3) : elle est élémentaire et laissée au lecteur; il suffit d'utiliser la majoration : $P(A \cap B) \leq \text{Min}[P(A), P(B)]$ ainsi que la propriété **(3)**.

Proposition 3.— Pour tout couple d'événements (A, B) tel que $(P(A), P(B)) \in]0, 1[^2$, le nombre

$$\rho(A, B) = \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}}$$

est une mesure de dépendance normalisée : $0 \leq |\rho(A, B)| \leq 1$.

Preuve : C'est la propriété classique du coefficient de corrélation affine appliqué ici aux variables aléatoires $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.

$$\rho(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \frac{\text{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)}{\sigma_{\mathbf{1}_A} \cdot \sigma_{\mathbf{1}_B}} = \frac{e(A, B)}{\sqrt{e(A, A) \cdot e(B, B)}} = \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}} = \rho(A, B)$$

Remarques :

1) Le cas $\rho = 0$ implique la non-corrélation des variables aléatoires dans le cas général; pour le cas particulier des variables indicatrices, les propriétés d'indépendance et de non-corrélation sont équivalentes. On dispose donc bien ainsi d'une mesure de dépendance du couple (A, B) .

2) Le cas $|\rho| = 1$ correspond à une dépendance fonctionnelle affine entre les variables

$$\begin{aligned}\rho = +1 &\iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \iff A = B \\ \rho = -1 &\iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1} - \mathbf{1}_B \iff A = \overline{B}.\end{aligned}$$

3) $\rho(A, B)$ n'est pas une fonction "bi-croissante"; on a le contre-exemple suivant : soit une suite d'événements $(A_i)_{i=1,2,3,4}$ telle que

$$\begin{aligned}A_i &\subset A_{i+1} & \forall i = 1, 2, 3 \\ 0 < P(A_i) &< 1 & \forall i = 1, 2, 3, 4. \\ 0 < P(A_{i+1} \cap \overline{A}_i) &< 1 & \forall i = 1, 2, 3.\end{aligned} \quad (4)$$

Il est immédiat que :

$$\rho(A_i, A_j) = \sqrt{\frac{P(A_i)P(\overline{A}_j)}{P(\overline{A}_i)P(A_j)}}$$

donc, avec (4) : $0 < \rho(A_i, A_j) < 1 \quad \forall (i, j) | 1 \leq i < j \leq 3$.

De plus : $\rho(A_1, A_3) = \rho(A_1, A_2) \cdot \rho(A_2, A_3)$. Donc : $0 < \rho(A_1, A_3) < \rho(A_1, A_2)$ avec $A_3 \supset A_2$.

Conclusion : Je laisse au lecteur le soin de trouver de mirifiques propriétés pour cette mesure de dépendance $\rho(A, B)$, d'imaginer des applications stimulantes et de les diffuser. Merci.

Bibliographie

D. FOATA et A. FUCHS : "Calcul des probabilités", Ed. Masson, 1996.

Du Hasard et de la Chance

Eugène EHRHART

Lauréat de l'Académie des Sciences

Cet article n'a pas été écrit spécialement pour les professeurs de mathématiques. Ils savent sans doute tout cela. Il a paru dans un magazine pour jeunes, dans l'intention de leur donner une notion simple de probabilité et de les mettre en garde contre les superstitions. Si nous reprenons ici textuellement cette note de vulgarisation scientifique, c'est que nous pensons vous distraire un peu, vous et votre famille.

1. Superstition et probabilité

Depuis l'Antiquité deux mentalités partagent les hommes : la mystique et la rationnelle. La première voit partout fatalité, présage, providence, intervention des dieux et autres forces occultes. La seconde cherche partout la loi, la causalité, la corrélation. Les augures romains tiraient des présages du chant et du vol des oiseaux, de l'appétit des poulets sacrés, des éclairs et de la foudre. Certains de nos contemporains se font dire l'avenir par l'astrologie, les cartes, le marc de café ou la boule de cristal. Par contre le scientifique évalue les chances par le calcul de probabilité et prédit les éclipses ou la marche future des planètes à l'aide d'équations. Le mystique cherche à s'attirer la faveur du destin en sacrifiant des animaux et même jadis des hommes. Il y a quelques siècles on brûlait encore des sorcières et de nos jours certaines sectes provoquent des suicides collectifs. L'homme rationnel moderne prépare l'action par l'analyse des données, l'information statistique et l'étude scientifique du hasard.

Ce n'est qu'au XVII^e siècle avec PASCAL et FERMAT qu'est né le calcul de probabilité, la science de l'incertain, qu'on applique à présent dans de nombreux domaines et dont l'importance ne cesse de croître. Présentons d'abord à l'aide de deux exemples simples la notion élémentaire de probabilité. Soit une classe de 30 élèves, qui peut être mixte. Dans la liste des noms on en choisit un au hasard. Quelle chance a-t-on de désigner une fille ? Si on ne connaît pas la composition de la classe, il n'y a pas de réponse. Par contre, si on sait qu'il n'y a aucune, dix ou trente filles, la probabilité en question est respectivement de 0, 1/3 ou 1. La probabilité d'un événement est donc le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas **également** possibles. Elle peut varier de 0 à 1, de l'impossibilité à la certitude. Le second exemple nous permettra de préciser la signification de la probabilité. Un jeune couple voudrait avoir trois enfants. Supposons que son vœu sera exaucé. Quelle est la probabilité que ces trois enfants soient des garçons ? Après quelque réflexion on voit qu'il y a un cas favorable parmi 8 cas également possibles. La probabilité demandée est donc 1/8. Mais ceci appelle quelques commentaires.

D'abord nous avons admis dans notre calcul qu'à chaque fois la naissance d'un garçon ou d'une fille était également possible, hypothèse essentielle. Or ceci n'est pas rigoureusement exact, car depuis plus de cinquante ans en France le rapport des naissances masculines et féminines, constant au centième près, est légèrement supérieur à l'unité.

Ensuite la probabilité de $1/8$ ne permet aucune prévision pour le couple particulier considéré. Par contre, on peut prédire avec une quasi-certitude que l'an prochain, comme dans dix ans, la proportion de familles à trois garçons parmi les familles à trois enfants sera en France, comme en Allemagne, très voisine de $1/8$. Ici joue **la loi des grands nombres**, capitale dans les applications du calcul de probabilité : pratiquement la fréquence réelle d'un événement se confond avec sa probabilité, si le nombre des épreuves est très élevé.

Enfin il convient de combattre le préjugé de la compensation, erreur répandue : les deux premiers nés ayant été des garçons, la probabilité pour que le troisième le soit aussi est quand même encore de un sur deux.

2. Science et probabilité

En génétique, l'étude du hasard fournit des résultats intéressants. On sait que les caractères physiques et psychiques d'un homme sont caractérisés par les 23 paires de chromosomes d'une cellule. Pour former les 23 paires de l'enfant, le hasard choisit un chromosome dans chacune des 46 paires parentales, ce qui fait 2^{46} choix possibles, soit près d'un milliard de milliards. Tel est le nombre vertigineux de **types** d'enfants potentiellement possibles pour un couple donné. Chacun de nous représente donc une rarissime combinaison, chacun de nous doit son existence à un extraordinaire hasard. Autre évidence mal connue : deux frères peuvent avoir tous les couples chromosomiques pareils (c'est le cas de vrais jumeaux), mais aussi théoriquement aucun. Autrement dit leur vraie parenté se trouve quelque part sur une échelle d'une infinité d'échelons entre deux extrêmes : être identiques ou être complètement étrangers.

Le calcul de probabilité permet également d'établir, et donc de comprendre, les fameuses lois de l'hybridation végétale, animale ou humaine que le moine MENDEL trouva expérimentalement vers 1850. On montre par exemple qu'en croisant des souris grises et blanches de race pure, du fait que le caractère gris est dominant, à la première génération toutes les souris seront grises et à la seconde génération, en moyenne, une sur quatre sera blanche. Chez l'homme le caractère yeux bleus, yeux bruns, dont le second est dominant, se comporte de manière analogue.

Un fait qui frappe, trouble et trompe le novice est que l'action du hasard donne souvent l'illusion d'être guidée par une finalité intelligente. Ainsi au Palais de la Découverte à Paris, une machine à hasard fabrique une valeur approchée du classique nombre $\pi = 3,14\dots$ Une autre machine à hasard, constituée par une simple planchette à clous sur lesquels on fait tomber de la grenaille, dessine automatiquement la célèbre courbe en cloche de GAUSS si importante en statistique. Les belles formes géométriques des cristaux de neige sont aussi dues

en dernier ressort au hasard.

Nous touchons ici à des questions profondes et fondamentales. L'étude du hasard a changé radicalement, surtout au cours de ce siècle, notre manière de regarder la nature, on peut même dire notre conception du monde. L'aboutissement extrême de ce courant de pensée est la théorie qu'expose Jacques MONOD, biologiste et prix Nobel, dans son magistral livre "Le hasard et la nécessité". Le sens de ce titre est explicité par une phrase, placée en exergue, de DEMOCRITE, philosophe grec du IV^e siècle avant notre ère : "Tout ce qui existe dans l'univers est le fruit du hasard et de la nécessité". D'après cet ouvrage toute l'évolution du vivant, de la bactérie à l'homme résulte du hasard des mutations chromosomiques et de la pression de sélection exercée sur les foules animales par les contraintes variées du milieu. La mutation, nous apprend l'auteur, est essentiellement un hasard imprévisible, car "elle est un élément microscopique, quantique, auquel par conséquent s'applique le principe d'incertitudes". Et MONOD conclut : "L'homme sait désormais qu'il est seul dans l'immensité indifférente de l'univers d'où il a émergé par hasard".

Mais sans aller aussi loin, il est certain qu'aujourd'hui bien des lois physiques s'expliquent bien par le hasard. Prenons par exemple la loi, mystérieuse dans sa simplicité que MARIOTTE énonça vers 1650 : à température constante, le volume et la pression d'une masse gazeuse ont un produit constant. On démontre à présent qu'elle est un simple effet statistique, en observant que la pression résulte du nombre d'impacts moléculaires sur la paroi du récipient. La loi plus complète, qui tient aussi compte de la température du gaz, donc de la vitesse de ses molécules, peut de même être établie déductivement.

3. Décision et probabilité

Une décision à prendre dans n'importe quel domaine, politique ou militaire, au jeu ou à la bourse, dans l'industrie ou dans le commerce (les économistes parlent de "stratégie commerciale") dépend des renseignements dont on dispose (utilité des statistiques) et des chances qu'on en déduit (rôle du calcul de probabilité). C'est pourquoi, disions-nous, ce calcul a des applications nombreuses, en science fondamentale (physique, chimie, biologie, médecine), mais aussi en pratique. Dans les assurances par exemple, on calcule ainsi les primes, l'information étant fournie par des tables statistiques, de mortalité entre autres. Le calcul des chances intervient quotidiennement dans l'exploitation commerciale, politique, économique ou psychologique des enquêtes d'opinion. Il sert aussi dans les usines à obtenir un seuil de fiabilité de la fabrication par le contrôle d'un nombre convenable d'échantillons. Même en histoire on applique parfois certains résultats sur la probabilité des causes.

Une expérience simple montre pertinemment l'efficacité du calcul des chances. Il suffit de faire deviner aux personnes d'un groupe – élèves d'une classe, membres d'un cercle de bridge – la probabilité d'un événement qu'on a exactement calculée au préalable. Voici par exemple quelques questions-test pour ce jeu amusant et instructif (on suppose chaque fois qu'on opère au hasard et que les bases ne sont

pas truquées) :

1) On jette dix fois de suite une pièce d'argent.

Probabilité de n'obtenir que des faces : voisine de un millième.

2) On retire deux cartes d'un jeu normal de 32 cartes.

Probabilité que ce soit le couple roi et reine de cœur : une sur mille environ.

3) On jette deux dés.

Probabilité de faire 8 points : une chance sur sept à peu près.

4) Dans une urne il y a six boules identiques à la couleur près, 1 bleue, 2 blanches, 3 rouges. On en retire trois boules.

Probabilité que ce triplet soit tricolore : trois chances sur dix.

5) On découpe une carte postale rectangulaire, lisse du côté illustré, en quatre rectangles égaux.

Probabilité pour qu'un aveugle recompose l'image : sensiblement une chance sur deux cents (*).

En calcul de probabilité aussi "le vrai peut quelquefois n'être pas vraisemblable". Ainsi, auriez-vous deviné que, dans un groupe de 50 personnes, deux d'entre elles ont leur anniversaire de naissance le même jour de l'année avec une probabilité voisine de la certitude (97 chances sur 100)? Auriez-vous pensé qu'en relevant les numéros minéralogiques des vingt premières voitures passant devant vous au péage d'une autoroute, il y ait 7 chances sur 8 que deux de ces numéros se terminent par le même nombre de deux chiffres?

Parfois on laisse décider le **hasard impartial**. Le débutant au tennis ou aux échecs, les partenaires aux concours de football, les lots aux loteries ou aux casinos sont choisis "au hasard".

4. Destin et probabilité

Pour finir, indiquons encore un avantage appréciable de l'étude de l'aléatoire : elle développe l'esprit critique. Revenons un instant aux superstitions. Si vous gagnez à la Loterie Nationale, ce n'est pas parce que vous êtes né sous une bonne étoile, mais parce que par hasard votre billet était le bon. Le raisonnement "pourquoi pas toi" des affiches trompeuses est stupide. Si dans un sac il y a un million de petites billes pareilles bien mélangées, dont une seule est rouge, parieriez-vous de la tirer à l'aveuglette?

Il n'y a pas de doute que certaines personnes réussissent dans leurs entreprises plus souvent que d'autres. Leur "chance" n'a rien à voir avec les dieux ni avec les planètes ou les étoiles. C'est simplement qu'elles ont des qualités – héritées ou acquises – physiques, intellectuelles ou morales plus nombreuses et plus vigoureuses. "En sciences la chance ne favorise que les esprits préparés" affirmait PASTEUR (et il donnait à ses étudiants ce conseil : "ayez le culte de l'esprit critique, sans lui tout est caduc"). Et NAPOLÉON disait : "n'employez que des gens heureux".

(*) Pour ceux qui aiment la précision, voici les valeurs exactes des cinq probabilités précédentes : $1/1024$, $1/992$, $5/36$, $3/10$, $1/196$.

SONS , MUSIQUE ET MATHÉMATIQUES ¹

Jean LEFORT
Lycée Blaise Pascal de Colmar

§ 1 - Le bruit

1) Nature du bruit :

Le bruit est provoqué par une succession rapide de surpression et de dépression de l'air ambiant. Le simple fait de monter ou de descendre rapidement d'altitude provoque cette variation de pression, d'où l'impression d'oreille bouchée qui se produit à cette occasion. Le bruit va donc être caractérisé par son intensité et sa fréquence. L'intensité correspond en gros à la différence de pression par rapport à la moyenne. La fréquence ou plutôt l'inverse de la fréquence caractérise la durée entre une surpression et une dépression. Pour réellement entendre un bruit, il faut que l'intensité soit suffisante et la fréquence assez forte. Un bruit devient un son si la variation de surpression et de dépression est périodique (ce qui ne veut pas dire sinusoïdale). La période en question est appelé la fondamentale du son. Un bruit quelconque présentera donc un spectre de fréquence, c'est-à-dire qu'il est la superposition de différents sons périodiques dont l'intensité pour chaque fréquence n'est pas toujours la même. Un bruit blanc est un bruit dont le spectre des fréquences est une fonction continue non nulle. Un son musical sera un son dont le spectre de fréquence sera nul sauf en un certain nombre de points correspondant à des fréquences qui sont toutes multiples d'une même fréquence : la fréquence fondamentale. Tout ceci est une première approche assez théorique. Dans la pratique il y a toujours un petit étalement même pour une fréquence pure et le son d'instruments à percussion comme les cloches ne devrait pas être qualifié de musical au sens précédent et pourtant !

2) Mesure de l'intensité :

Comme une onde qui se propage à la surface de l'eau en cercles concentriques de plus en plus grands, l'onde sonore se propage dans l'espace en sphères concentriques et la puissance sonore se répartit sur toute la surface de la sphère. Or la surface de la sphère vaut $4 \pi R^2$ où R est le rayon (environ $12,6 R^2$). Par suite, quand la distance double, le niveau de bruit est divisé par $2^2 = 4$. Ceci en l'absence de tout obstacle, le principal étant le sol. L'unité de mesure est le Watt par mètre carré ($W m^{-2}$). Cela veut dire qu'on mesure une puissance par mètre carré ; c'est ce qu'on appelle l'intensité sonore.

Chacun réagit différemment, mais pour une personne possédant une ouïe normale moyenne, on trouve que le son le plus faible perceptible est d'environ $10^{-12} W m^{-2}$ et que le son le plus fort supportable vaut à peu près $1 W m^{-2}$.

question : À partir de quelle distance théorique un son initial de $1 W m^{-2}$ devient-il inaudible ? (on trouve une distance supérieure à 500 km).

Au delà de $1 W m^{-2}$ la sensation auditive devient douloureuse et peut même se traduire par des lésions de l'oreille.

¹ Extrait de la conférence donnée le mercredi 17 mai 1995 à 17 heures dans les locaux des ARTISANS DU SON , 44 rue de l'Arsenal à MULHOUSE

3) Adaptation de la mesure à la physiologie de l'oreille :

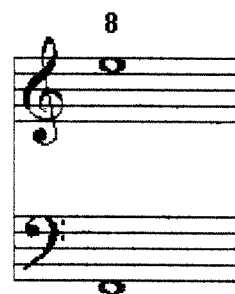
a) L'oreille n'est pas sensible aux différences d'intensité sonore, mais aux rapports. Ainsi on aura l'impression d'un même écart entre un son de 10^{-5} W m^{-2} et un son de 10^{-4} W m^{-2} qu'entre ce dernier et un son de 10^{-3} W m^{-2} . Le rapport, dans les deux cas, est de 10 alors que la différence n'est pas du tout du même ordre.

On notera donc le niveau de bruit selon une échelle dite logarithmique, c'est-à-dire en utilisant non pas le nombre de Watt par mètre carré mais l'exposant de 10 qui apparaît. Pour des raisons pratiques (envie d'attribuer le niveau 0 à un son inaudible) on ajoute 12 à cet exposant. On obtient alors le niveau sonore en Bel (B). Pour avoir le niveau sonore en décibel (dB), on multiplie naturellement le résultat par 10, d'où une échelle s'étageant essentiellement de 0 à 120.

question : Si la distance double, de combien de décibel l'intensité sonore baisse-t-elle ? (On trouve 6 dB car $4 \approx 10^{0,6}$ ou encore $1000 \approx 2^{10}$).

b) La situation est cependant un peu plus compliqué que cela puisque l'oreille ne réagit pas de la même façon aux sons graves et aux sons aigus, c'est-à-dire selon la fréquence du son ou du bruit.

Le maximum de sensibilité se situe dans les aigus au delà du DO 4, soit plus de 1000 Hz et jusque vers 5000 Hz. (Les meilleurs musiciens reconnaissent les sons entre 20 et 20 000 Hz).



Dans les graves, la sensibilité baisse rapidement et est de l'ordre de 40dB pour le LA 1 situé à 110 Hz.

Pour tenir compte de cette différence de sensibilité de l'oreille, les appareils de mesure doivent affecter d'un faible coefficient les sons graves et d'un coefficient important les sons aigus. En faisant alors la moyenne on obtient un niveau sonore exprimé en dB-A (ou encore en phone)

Voici quelques niveaux de bruit en dB-A :

Bruissement des feuilles par une brise légère	10
Studio d'enregistrement vide	20 - 25
Studio de télévision vide	25 - 35
Église vide	30
Maison à la campagne	40
Maison à la ville (en agglomération)	45
Appartement en ville (fenêtre fermée)	45 - 55
Bureaux	50 - 60
Grands magasins	55 - 65
Gare ou aéroport	65
Conversation à un mètre	68
Rue passante	70
Usine ou atelier	75
Piano à 3 mètres en plein air	94

c) Quand on fait des mesures, il faut distinguer les moments de la journée et non pas faire des moyennes sur 24 heures qui n'ont pas beaucoup de sens. Le bruit de fond d'une ville la nuit est d'environ 40 dB-A ce qui est relativement bruyant alors que ce même niveau sonore est celui d'une salle de concert très attentive juste avant que ne démarre l'orchestre. Ceci montre bien que la gêne engendrée par le bruit possède une forte composante psychologique. Dans le même ordre d'idée, quand l'orchestre joue fort, le niveau peut atteindre 100 dB-A dans la salle (beaucoup plus pour les musiciens ce qui peut provoquer des surdités considérés comme des

accidents du travail). Mais ce même niveau de 100 dB-A paraît inacceptable dans d'autres conditions, par exemple lors de l'utilisation de marteaux pneumatiques ou de machines à riveter.

§ 2 - Le son sinusoïdal

1) Cas d'une onde sinusoïdale pure :

Le son sinusoïdal est le degré zéro de la musique. Il est très difficile de l'entendre et a une sonorité assez métallique. C'est à peu près le son du diapason et on sait que ce dernier est très peu intense. Dans la pratique, quand on veut écouter un diapason, on le fait résonner sur une table qui fait office de caisse de résonance ! mais du coup le son n'est plus sinusoïdal.

Un tel son peut être décrit par la formule $y = i_0 \sin(\omega t) = i_0 \sin(2\pi t/T)$. T est la période, ω est la pulsation, $1/T = \omega / 2\pi$ est la fréquence (mesurée en Hertz = s^{-1}), i_0 est l'intensité maximale. Pour le LA 3 la fréquence vaut 440 Hz, donc la période est d'environ 0,0023 s.

Au dessous d'une vingtaine d'Hertz, on entend les variations d'intensité instantanée due à la présence du sinus ; le son ne paraît plus musical. Au dessus de 80 000hz l'oreille n'entend plus le son, les battements étant tellement rapide, l'oreille ne peut s'y adapter.

2) Addition de deux ondes sinusoïdales :

C'est là qu'on fait usage d'une célèbre formule de trigonométrie : $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin[(p+q)/2] \cos[(p-q)/2]$ ce qui prouve que si on additionne deux ondes sinusoïdales très voisines alors on obtient une onde sinusoïdale variant très lentement. L'expérience est saisissante avec deux diapasons l'un à 440 Hz, l'autre à 442 Hz. On obtient ce qu'on appelle des battements. (Ici ils ont une fréquence d'un Hertz). C'est ce phénomène qu'on utilise pour accorder un piano ou un autre instrument de musique. Dans la pratique de l'accordeur, le mécanisme est plus complexe puisqu'il travaille à l'octave ou à la quinte.

$$\sin(x) + \sin(0,9x)$$

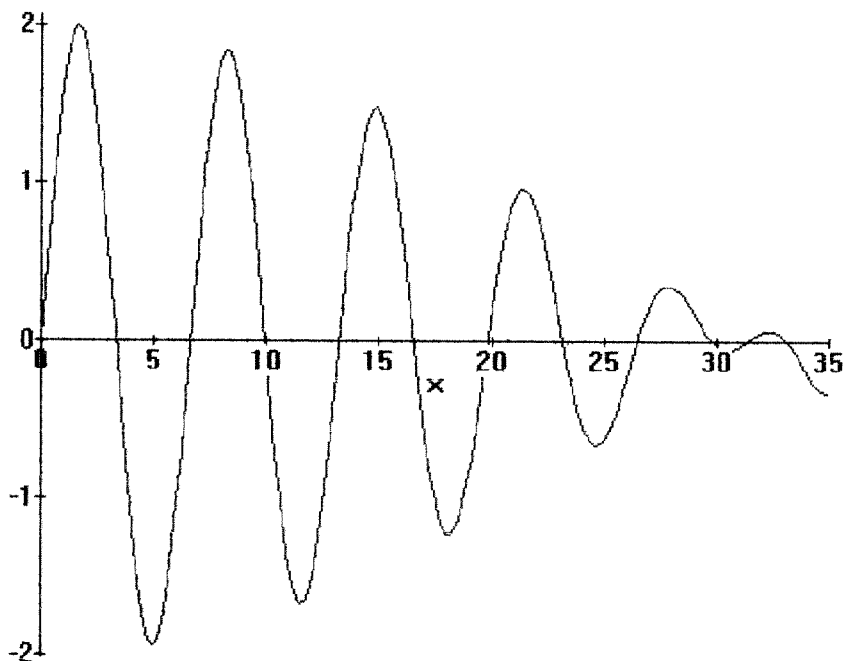


figure 1

$$\sin(x) + 1,2\sin(0,9x + 0,5) = [2,44 + 2,4\cos(0,1x - 0,5)]^{1/2} \sin(0,9x + \phi)$$

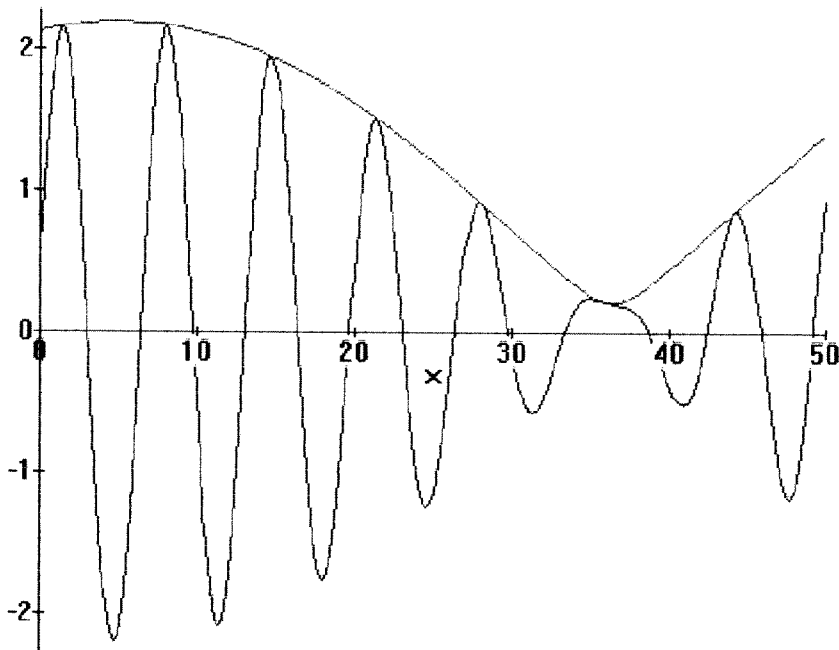


figure 2

En fait il faut étudier, non pas le cas simple donné ci-dessus, mais le cas $a \sin(\omega_1 t + \alpha) + b \sin(\omega_2 t + \beta)$, avec a et b très voisins. On retrouve alors le même phénomène mais il est beaucoup plus difficile à calculer. Nous en donnons un exemple en dessous qui montre bien ce qui se passe ; les battements ont encore lieu mais sans passage par zéro. La courbe des battements a pour équation : $y = \pm \sqrt{2,44 + 2,4 \cos(0,1x - 0,5)}$. La période est deux fois plus petite que quand il y a des battements puisqu'il n'y a pas passage par zéro. L'angle ϕ qui dépend de x est défini par :

$$\begin{cases} \cos(0,1x) + 1,2 \cos(0,5) = \sqrt{2,44 + 2,4 \cos(0,1x - 0,5)} \cos \phi \\ \sin(0,1x) + 1,2 \sin(0,5) = \sqrt{2,44 + 2,4 \cos(0,1x - 0,5)} \sin \phi \end{cases}$$

On peut se demander si l'oreille entend des battements deux fois plus rapides dans un cas que dans l'autre. La réponse est non car nous sommes en dessous du seuil de sensibilité en fréquence de l'oreille qui se contente d'entendre un affaiblissement et une augmentation de l'intensité du son. Nous touchons ici un des premiers paradoxes que nous joue notre appareil auditif (oreille plus cerveau). Si nous envoyons un train d'impulsions positives de fréquence f ou un train d'impulsions alternativement positives et négatives de fréquence $f/2$, si f vaut environ 100 Hz, les deux trains d'impulsion donneront la même note, alors que si f vaut environ 200 Hz nous aurons l'impression d'un écart d'une octave (voir la figure 3). Entre les deux, nous aurons une impression ambiguë. Nous reviendrons sur ce paradoxe dans un autre paragraphe.

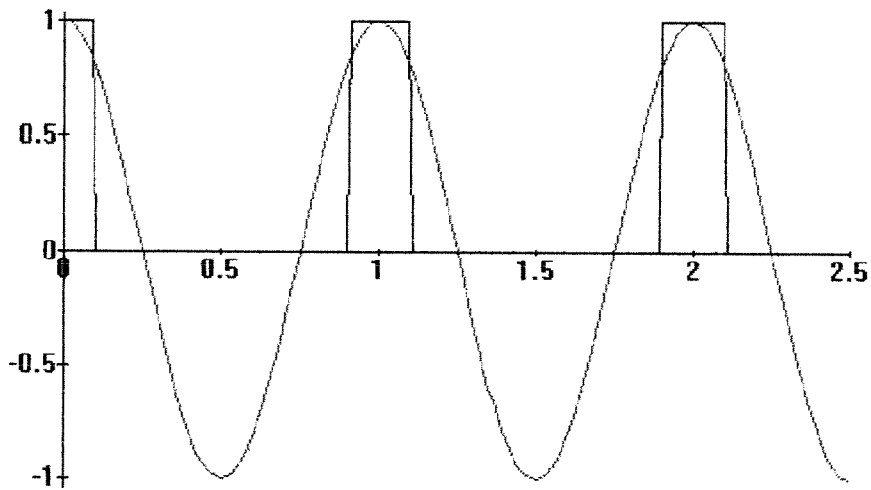


figure 3a

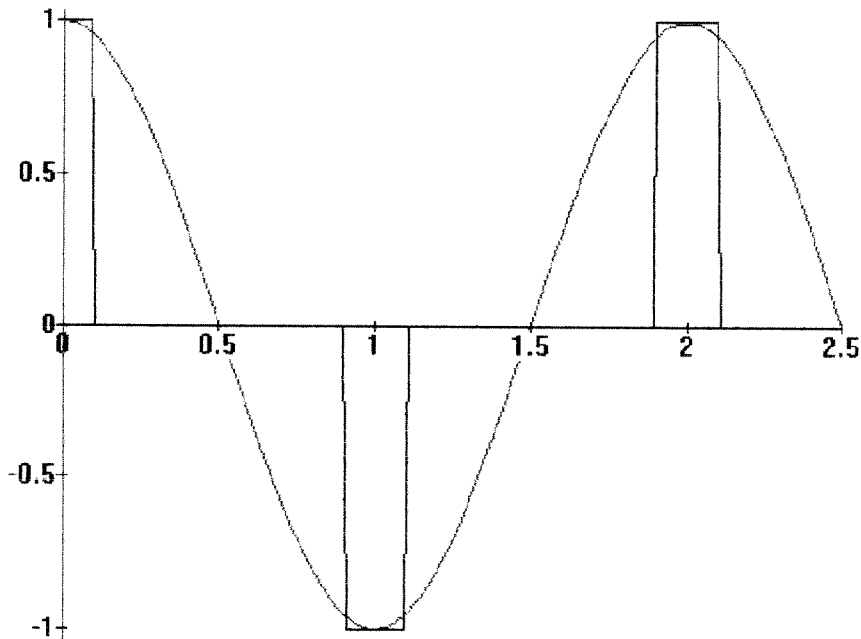


figure 3b

§ 3 - Recherche des harmoniques du son d'un instrument

Depuis Fourier essentiellement, on sait qu'il est possible de décomposer un son périodique de période T en une somme infinie de son sinusoïdaux de période multiple entier de T . Chacun de ces sons sinusoïdaux s'appelle un harmonique, le premier étant baptisé "fondamental". Il est possible de trouver les harmoniques d'un son périodique à l'aide de matériel approprié connaissant la forme de l'onde sonore. On s'aperçoit alors que les divers instruments de musique ne donnent pas la même importance aux différents harmoniques et c'est ce qui caractérise le timbre d'un instrument de musique. Plus il y a d'harmoniques et plus l'instrument paraît musical. La multiplication des harmoniques éloigne la courbe de l'allure sinusoïdale. De ce point de vue,

le diapason et le métalophone sont peu musicaux, la flûte à bec l'est un peu plus. On peut estimer, au vu des diagrammes de la figure 4 que la guitare est plus musicale que l'harmonica.

De plus, s'il est bien évident que les harmoniques ne se répartissent pas de la même façon selon la note jouée, ils ne se répartissent pas non plus de la même façon selon la force de la note (pianissimo à fortissimo). En général les harmoniques d'ordre élevé n'apparaissent qu'au dessus d'une certaine puissance. Mais aussi au bout d'un certain temps. Ainsi la figure 5a montre comment se répartissent l'intensité des différents harmoniques au cours du temps pour un Ré 4 joué par une trompette pendant 0,2 seconde (environ une double croche). Par conséquent au bout de 5/100 de seconde, l'onde sonore n'aura pas du tout la même allure qu'au bout de 1/10 de seconde. (figures 5). Ce sont les problèmes de régime transitoire. Ce problème apparaît lors des attaques ou lors d'une succession très rapide de notes. Il est alors impossible d'attribuer une périodicité aux sons qui restent cependant musicaux dans leur ensemble. Ainsi à un tempo de 120 à la noire (2 noire par seconde) correspond une durée de 1/16 s pour une triple croche ; mais le DO médium est aux environs de 250 Hz soit 16 vibrations pour une triple croche et 4 pour le DO situé 2 octaves au dessous. Les phénomènes transitoires de prise de souffle pour un instrument à vent ou de positionnement des doigts pour un instrument à cordes sont alors prépondérants. Ces phénomènes transitoires apparaissent par contraste quand on fait défiler à l'envers une bande magnétique.

Il faut noter que l'oreille est tout à fait capable de distinguer les différents harmoniques. Mais curieusement, si le son fondamental manque, l'oreille l'entend quand même ! C'est d'une certaine façon le plus grand commun diviseur de tous les harmoniques ! C'est celui qui donne la fréquence fondamentale. À noter aussi que certains instruments ne donnent que des harmoniques d'ordre impair.

Ce rôle très important des harmoniques va imposer une échelle musicale basée sur la fréquence, c'est-à-dire la hauteur des notes. Il n'y aura pas de différence entre la note fondamentale et la note de fréquence double (premier harmonique) et c'est pour cela que ces deux notes recevront le même nom. C'est l'objet du paragraphe suivant.

figure 4

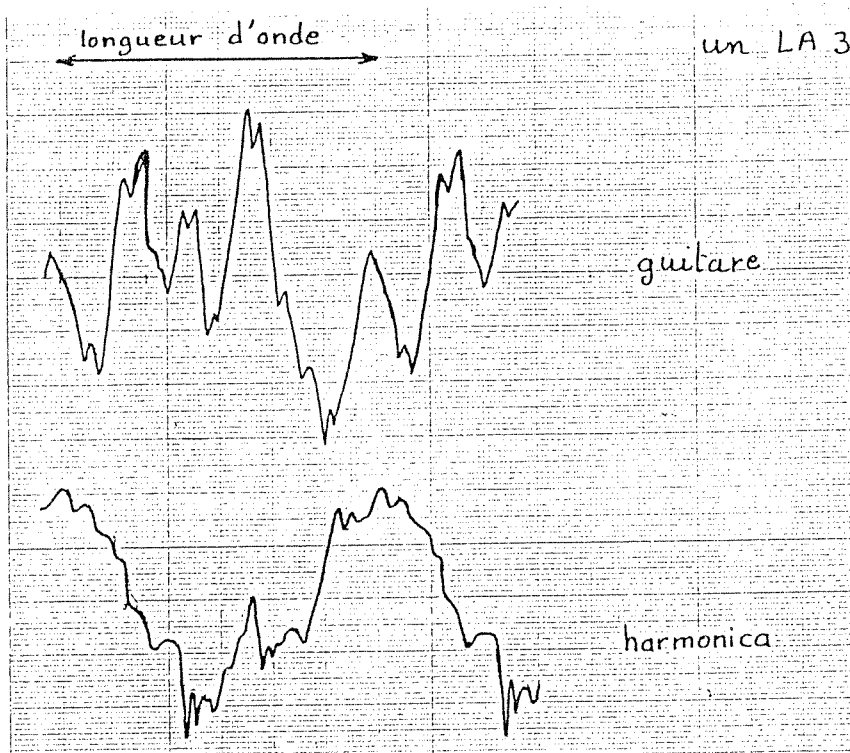
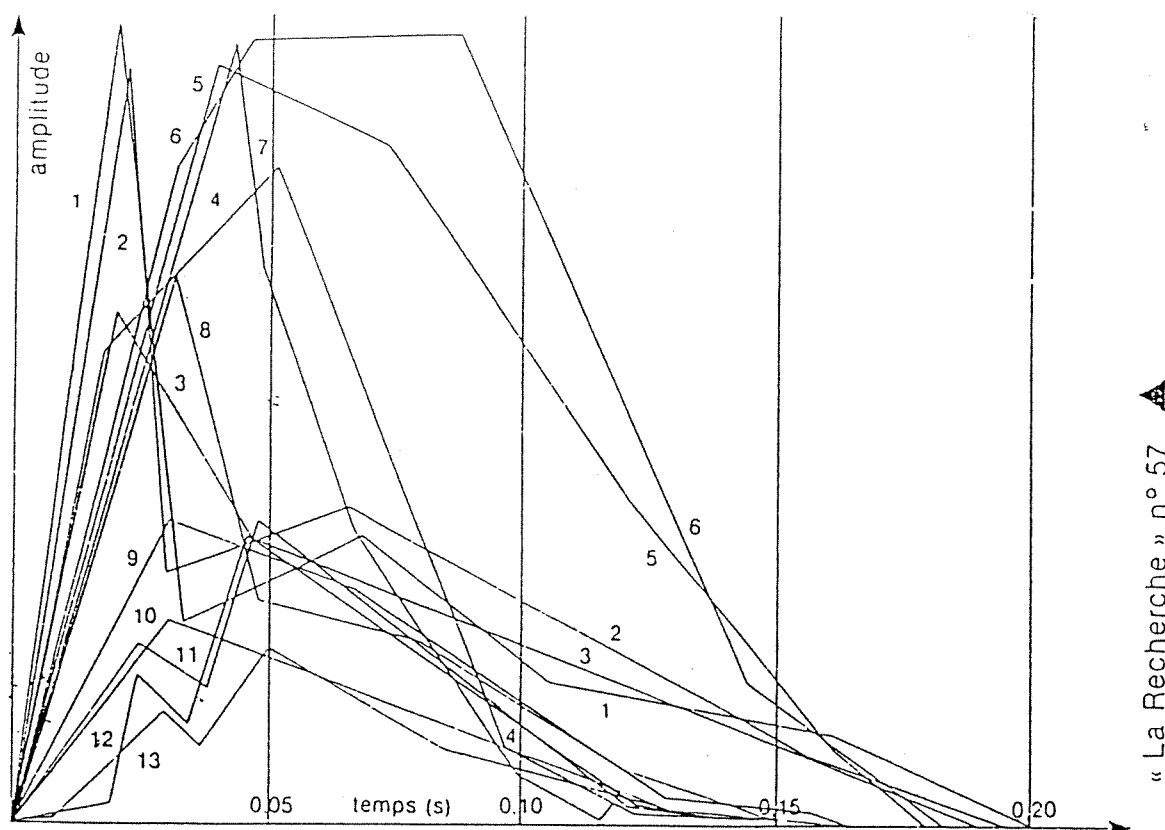
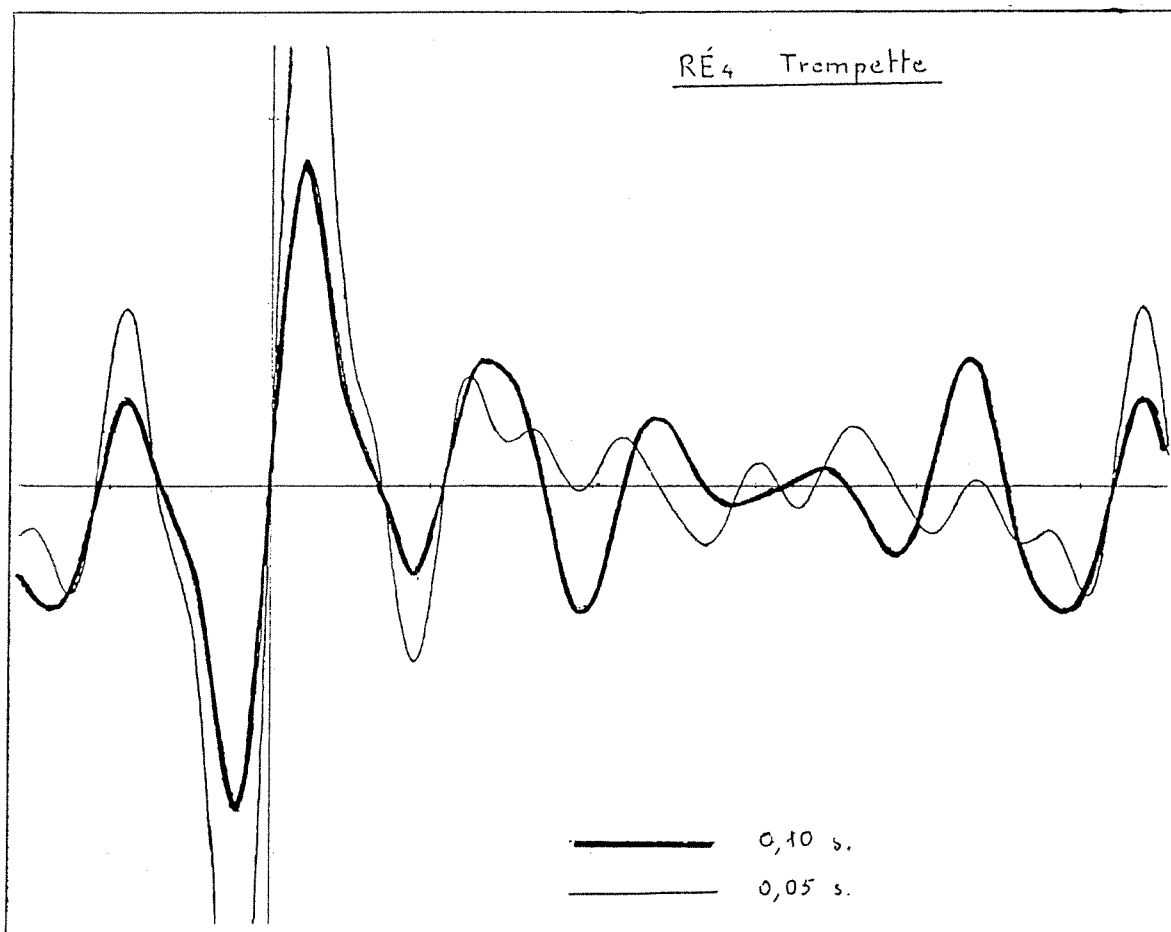


figure 5a



« La Recherche » n° 57 ▲

figure 5b



§ 4 - Les gammes

Considérons un son musical, c'est-à-dire périodique, de fréquence fondamentale f et possédant les harmoniques $2f, 3f, 4f, 5f \dots$. Un musicien exercé entend les harmoniques jusqu'à 7 ou 8 mais la nature même du son fait que les harmoniques les plus élevés sont aussi les plus faibles. Les harmoniques 2, 3, 4 et 5 vont donc être primordiaux. Le deuxième harmonique est tellement important pour l'oreille qu'il reçoit, comme nous l'avons déjà dit, le même nom que le fondamental. Mais comme pour les intensités, l'oreille (ou plus exactement l'appareil auditif qui va de l'oreille externe au cerveau) n'est sensible qu'au rapport des fréquences. Par suite, le quatrième harmonique recevra aussi le même nom puisque $2/1 = 4/2$, de même le huitième. Restent à "distance" raisonnable les harmoniques 3, 5 et 7 (6 n'entre pas en ligne puisque $6/4 = 3/2$, donc 3 et 6 recevront le même nom). On voit donc que pour l'oreille, il suffit de donner un nom aux fréquences comprises entre f et $2f$. Si une fréquence est en dehors de cet intervalle, on s'y ramène en la multipliant ou la divisant par 2 autant de fois que nécessaire.

Dans la musique occidentale si f correspond à l'UT alors $2f$ correspond à l'UT à l'octave. On dit que le rapport $2/1$ est une octave. Avec la même correspondance, $3f$ correspond au SOL à l'octave. On dit que le rapport $3/2$ est une quinte. La quinte donne naissance à la première note nouvelle parmi les harmoniques, d'où son importance. Il est donc assez naturel de jouer un son musical de fréquence fondamentale $f' = 3/2 f$ c'est-à-dire donnant un SOL et de chercher à savoir ce que donnera la quinte. On obtient $f'' = 9/4 f$ qu'on ramène dans l'intervalle $[f, 2f]$ soit $9/8 f$. Cela correspond au RÉ. On peut imaginer poursuivre indéfiniment cette procédure et l'on obtiendrait ainsi une infinité de notes car les puissances successives de 3 ne seront jamais égales à une puissance de 2. Heureusement l'oreille n'a pas une sensibilité infinie et on peut espérer obtenir une bonne approximation au bout d'un nombre limité d'étapes.

La théorie des fractions continues permet de trouver les meilleures approximations. Ici encore nous avons recours aux logarithmes puisqu'il s'agit de rapports. On cherche p et q tels que 3^p et 2^q soient voisins : $3^p \approx 2^q$ soit $p \ln(3) \approx q \ln(2)$ ou encore $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx \frac{q}{p}$. Or le premier

membre n'est autre que $\log_2(3)$ et vaut environ 1,58496. Les premières réduites de son développement en fractions continues donnent $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{19}{12}, \frac{65}{41}, \frac{84}{53}$. Laissons tomber les

trois premières dont les approximations sont trop grossières. Nous avons donc une première possibilité avec $8/5$ ce qui correspond à 5 notes dans la gamme : UT, SOL, RÉ, LA, MI (en montant les quintes). C'est ce qu'on appelle la gamme pentatonique qui est utilisée, entre autre, dans la musique traditionnelle extrême orientale. La seconde possibilité donnée par la théorie correspond à $19/12$ soit 12 notes dans la gamme : UT, SOL, RÉ, LA, MI, SI, FA#, UT#, SOL#, RÉ#, LA#, FA. Les autres possibilités ont été étudiées théoriquement. La dernière avec 53 notes dans la gamme permet de noter la différence entre dièses et bémols ce qu'on appelle un coma Où est donc passée notre gamme habituelle avec ses 7 notes ? Il se trouve que le développement en fractions continues est un peu trop puissant et donne des encadrements très fins des nombres réels, mais la théorie permet de récupérer d'autres approximations en utilisant

la notion de barycentre. Ainsi $\frac{11}{7} = \frac{3+8}{2+5}$ ce qui prouve que l'on obtient l'isobarycentre des points de coordonnées (3 ; 2) et (8 ; 5). C'est une très bonne approximation. Elle donne les notes FA, UT, SOL, RÉ, LA, MI, SI. (on remarque qu'on part du FA).

Ce que nous venons d'étudier est ce qu'on appelle la gamme pythagoricienne. Si on attribue une fréquence unité à l'UT on passe à la quinte en multipliant par $3/2$ ou $3/4$ si on veut se ramener dans l'intervalle d'une octave. D'où les fréquences suivantes :

	UT	RÉ	MI	FA	SOL	LA	SI
fréquence exacte	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$
valeur approchée	1	1.125	1.26563	1.33333	1.5	1.6875	1.89844

On peut construire un tableau analogue avec une gamme de douze notes. Nous ne le ferons pas ici. Si on regarde l'intervalle entre deux notes consécutives de la gamme, c'est-à-dire si on fait le rapport des fréquences de deux notes consécutives on trouve deux cas : $9/8$ et $256/243$. Ceci met en évidence le ton et le demi-ton. Mais aussi le fait que les dièses et les bémols ne seront pas à la même place puisque $(256/243)^2 < 9/8$ soit en valeur approchée ($1,10986 < 1,125$). Revenons aux harmoniques. Après la troisième harmonique, celle qui correspond à une nouvelle note est la cinquième. On se trouve alors en présence de deux rapports: $3/2$ déjà vu et $5/4$ (pour se ramener dans l'octave). C'est ce qu'on appelle l'accord parfait et on donne à ces notes les noms de SOL et MI (ce n'est pas le même que précédemment !). Le SOL jouant le rôle important vu précédemment, il est naturel de recommencer l'accord parfait sur le SOL comme note de base. Nous obtenons RÉ et SI. Au contraire, si nous partons en sens inverse à partir de l'UT nous obtiendrons le FA et le LA (c'est-à-dire que FA-LA-UT sonnera comme UT-MI-SOL). Construisons un tableau analogue au précédent utilisant non plus le cycle des quintes mais le cycle des accords parfaits qui font intervenir les rapports $3/2$ et $5/4$:

	UT	RÉ	MI	FA	SOL	LA	SI
fréquence exacte	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$
valeur approchée	1	1.125	1.25	1.33333	1.5	1.66666	1.875

Nous obtenons ainsi la gamme diatonique. Si nous examinons le rapport des fréquences de deux notes consécutives de cette gamme, nous trouvons $9/8$, $10/9$, $16/15$. Cette gamme paraît bien plus compliquée.

Ces deux exemples montrent qu'il ne saurait y avoir une seule gamme. Des traditions culturelles font que telle gamme semble plus juste que telle autre. Dans la musique occidentale nous avons pris l'habitude d'une gamme dite tempérée (essentiellement depuis "le clavier bien tempéré" de J.S. Bach). Il s'agit d'une gamme de douze notes chacune étant séparée de la précédente par un intervalle de même amplitude qui sera donc la racine douzième de 2. Nous obtenons alors la gamme tempérée définie par le tableau suivant :

	UT	RÉ	MI	FA	SOL	LA	SI
valeur approchée	1	1.12246	1.25993	1.33484	1.49831	1.68179	1.88775

L'avantage de la gamme tempérée c'est de permettre de confondre les dièses et les bémols et donc de faciliter la transposition. (Nous verrons cela dans un prochain paragraphe).

Remarque : au lieu de travailler avec les rapports de fréquence, nous aurions pu travailler avec les logarithmes ce qui permet d'additionner des intervalles mais de façon beaucoup plus agréable (et plus mathématique) que ce que font habituellement les musiciens qui annoncent qu'une quinte plus une quarte (ce qui renvoie à $5 + 4$) donne une octave (qui renvoie à 8) ! On peut soit utiliser le logarithme décimal de 2 qui vaut environ 0,301 et diviser la gamme en 300 intervalles égaux, et on définit ainsi le Savart, soit diviser la gamme en 1200 intervalles égaux c'est-à-dire chaque ton en 100 et on obtient ainsi le "cent".

§ 5 - Les instruments à percussion

1) La notion de partiel :

La musique ne se contente pas d'utiliser des instruments à cordes ou à vent qui donnent des sons périodiques. De nombreux instruments à percussion sont présents dans les orchestres : tambours, cymbales, cloches, gongs, triangles,... La plupart de ces instruments ne donnent pas des sons périodiques. Cependant, sauf peut-être pour les tambours, il est possible d'attribuer une hauteur aux sons émis par ces instruments. En fait l'analyse de Fourier permet de décomposer le son d'un de ces instruments en une superposition de sons périodiques sinusoïdaux mais qui ne sont pas les multiples d'une même fréquence. Cela conduit à la notion de "partiels" jouant le rôle des harmoniques mais ne produisant pas les effets habituels de consonance et de dissonance. Voici par exemple les partiels d'une cloche-tube :

	1 ^{er}	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e	6 ^e	7 ^e
fréquence	f	$2,76f$	$5,40f$	$8,93f$	$13,34f$	$18,64f$	$31,87f$
approximation		$(4,5f)$		$2 \times 4,47$	$3 \times 4,45$	$4 \times 4,66$	$7 \times 4,55$

Nous voyons que les partiels 4 à 7 sont sensiblement les multiples d'une même fréquence sensiblement égale à $4,5f$, fréquence qui apparaîtra comme la hauteur de la cloche. Les partiels 1, 2 et 3 seront ignorés par l'oreille, tout au moins en ce qui concerne la hauteur perçue, mais non en ce qui concerne le timbre.

La théorie des cloches-tubes est assez facile à faire et fait appel à la mécanique des vibrations (une fusée comme la fusée Ariane vibre de façon fort analogue à celui d'un tube). Supposons maintenant qu'on ovalise légèrement les tubes cylindriques d'une cloche-tube. Il va apparaître deux ensembles de partiels aux fréquences très voisines ce qui entraînera des battements. En général cela est souvent déplaisant dans des cloches, mais c'est ce qui caractérise les gongs.

Les cloches habituelles utilisées dans les églises ou les carillons sont, depuis le XVII^e siècle et les fondeurs hollandais, travaillées pour avoir des partiels bien particuliers qui correspondent à des intervalles harmoniques comme le montre le tableau ci-dessous :

	1 ^{er}	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e	6 ^e	7 ^e
fréquence	$0,5f$	f	$1,2f$	$1,5f$	$2f$	$2,5f$	$3f$
nom	Fondamental	Principal	Troisième	Cinquième	Octave	Tierce supérieure	Quinte supérieure
position par rapport à f	octave inférieure		terce mineure	quinte	octave	octave plus tierce majeure	octave plus quinte

La hauteur d'une telle cloche est celle du partiel principal (c'est-à-dire le deuxième).

Il est certain que dans tous ces instruments à percussion, l'intensité de chaque partiel joue un rôle important dans la détermination de la hauteur.

Il est remarquable que l'on puisse fabriquer des tambours dont la peau n'a pas une épaisseur uniforme et qui vibrent avec des partiels qui sont presque des harmoniques.

2) Cloches et permutations :

Un carillon est formé d'un ensemble de cloches de hauteurs différentes que l'on sonne toutes à tour de rôle mais à chaque fois dans un ordre différent. Par exemple avec 8 cloches, on sonnera d'abord l'ordre [1,2,3,4,5,6,7,8] puis [2,1,3,5,4,6,8,7] puis [1,2,5,3,6,4,7,8], etc. Avec n cloches, il est possible d'obtenir $n!$ permutations. Quand n est grand, il est impensable de sonner toutes les permutations. De plus un bon carillon respecte un certain nombre de règles :

a) Obtenir la plus grande diversité possible (donc ne jamais répéter deux fois le même ordre) ;

b) Le passage d'une permutation à une autre doit se faire en ne déplaçant aucune cloche de plus d'une place ;

c) Une cloche ne restera pas à la même position plus de deux séries de coups consécutives ;

d) Chaque cloche effectue le même travail, c'est-à-dire qu'elle passe par les mêmes positions selon la même progression (cette règle est moins impérative que les trois autres).

Si on applique ces règles à un carillon de trois cloches on n'obtient que deux rythmes différents. Il n'existe donc pas de carillon à trois cloches. Les carillons vont de 4 à 12 cloches et prennent les noms suivants :

4 : Minimus 5 : Doubles 6 : Mineur 7 : Triples 8 : Majeur 9 : Caters
10 : Royal 11 : Cinques 12 : Maximus.

Le tableau suivant étudie un exemple avec 4 cloches :

ligne	transformation depuis la ligne précédente	positions				remarques
1		1	2	3	4	Sous-groupe à 8 éléments du groupe des permutations S_4 Ce sous-groupe H est engendré par les permutations α et β
2	α	2	1	4	3	
3	β	2	4	1	3	
4	α	4	2	3	1	
5	β	4	3	2	1	
6	α	3	4	1	2	
7	β	3	1	4	2	
8	α	1	3	2	4	
9	γ	1	3	4	2	On obtient ici $H\delta$ δ est la permutation circulaire sur les trois derniers éléments
10	α	3	1	2	4	
11	β	3	2	1	4	
12	α	2	3	4	1	
13	β	2	4	3	1	
14	α	4	2	1	3	
15	β	4	1	2	3	
16	α	1	4	3	2	
17	γ	1	4	2	3	On obtient ici $H\delta^2$
18	α	4	1	3	2	
19	β	4	3	1	2	
20	α	3	4	2	1	
21	β	3	2	4	1	
22	α	2	3	1	4	
23	β	2	1	3	4	
24	α	1	2	4	3	
1	γ	1	2	3	4	

α est la permutation qui échange les deux premières cloches et qui échange les deux dernières ; β est celle qui échange les cloches en positions centrales et qui conserve la première et la dernière ; γ conserve les deux premières cloches et échange les deux dernières ; quant à δ elle permute circulairement les trois dernières.

Ce tableau respecte les trois premières règles d'un carillon puisque toutes les permutations de S_4 apparaissent, que chaque cloche ne se déplace que d'une position à chaque ligne, qu'une même cloche ne reste pas plus de deux fois de suite à la même place. Par contre la dernière règle n'est qu'en partie respectée puisque seules les cloches 2, 3 et 4 font le même travail, décalé dans le temps (il est indiqué pour la cloche 4), la cloche 1 ayant un déplacement simple (ce qu'on

appelle un chassé simple), elle passe régulièrement de la première à la dernière position pour revenir tout aussi régulièrement à la première (on remarque toutefois que chaque cloche passe 6 fois par chacune des positions). Avec 4 cloches il existe 11 rythmes possibles et aucun ne respecte la dernière condition. Quand il y a beaucoup de cloches, il est impossible de respecter la première condition et on se contente de jouer un sous-groupe du groupe S_n . Le décompte des divers rythmes possibles est un exercice délicat qu'il n'est pas question de détailler dans ce court paragraphe qui n'a pour but que de donner une ouverture sur une discipline méconnue.

§ 6 - Comprendre la construction des instruments de musique

La plupart des instruments de musique sont très difficiles à analyser du point de vue théorique. Pourquoi produit-il telle note plutôt que telle autre ? Le tube d'une flûte, qui n'est pas cylindrique, pose de redoutables problèmes. Les instruments à cordes, les orgues, les flûtes de pan sont beaucoup plus simples. L'air dans un tuyau fermé vibre de façon analogue à celle d'une corde attachée à ses deux bouts, c'est-à-dire qu'il y a un nœud de vibration à chaque extrémité tandis que dans un tuyau ouvert il y a un ventre de vibration du côté de l'ouverture (de même que pour une corde dont une extrémité seule est libre). Ceci explique pourquoi il n'y a que des harmoniques impaires ainsi que le montrent les graphiques ci-dessous.

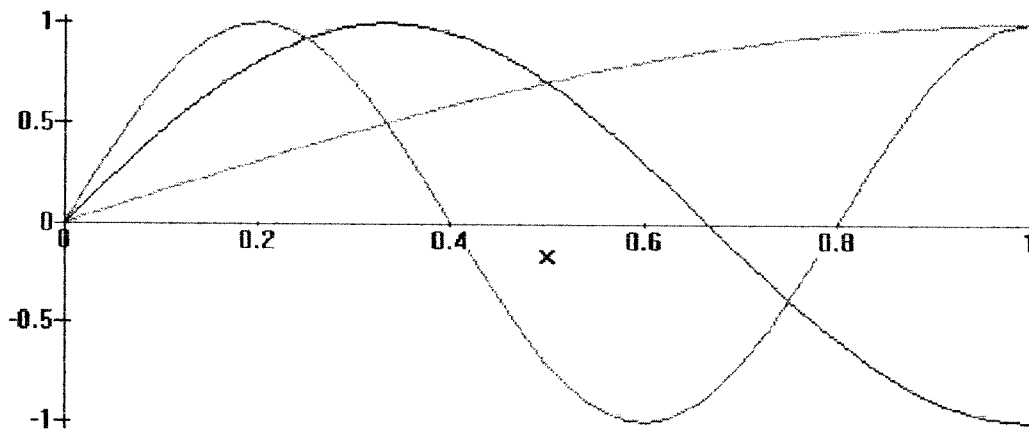


figure 6

Les trois graphiques correspondent aux fonctions : $\sin \frac{\pi x}{2}$, $\sin \frac{3\pi x}{2}$, $\sin \frac{5\pi x}{2}$.

1) La guitare

Sur une guitare, comme sur d'autres instruments à cordes, la note jouée est fonction de la longueur de la corde. Elle est aussi fonction de son matériau, de sa tension, de son épaisseur. C'est pour cela que les différentes cordes ont toute la même longueur mais ne correspondent pas à vide à la même note. L'avantage de la guitare par rapport à d'autres instruments comme le violon, c'est que la position des doigts pour jouer telle ou telle note est indiquée par des "silllets" qui bloquent la corde à la longueur exacte voulue. Schématiquement, une corde fait 64 cm. Supposons qu'elle joue un UT. Alors, si on place le doigt à 32 cm. on obtiendra l'UT à l'octave. Pour obtenir un SOL, il faut prendre les trois quart (gamme de pythagore) soit 48 cm, etc. La mesure de la longueur utile de la corde (du chevalet au silllet qui nous intéresse) est très facile et permet de vérifier la théorie et de retrouver la gamme tempérée et une suite géométrique. Voici ce qui a été obtenu sur une guitare réelle (sur la première ligne les valeurs mesurées, sur la deuxième les valeurs théoriques pour une gamme tempérée) :

mesurée	64	60.4	57	53.8	50.8	48	45.4	42.8	40.5
théorique	64.00	60.41	57.02	53.82	50.80	47.95	45.25	42.71	40.32

38.1	36	34	32	30.2	28.6	27	25.5	24	22.7
38.05	35.92	33.90	32.00	30.20	28.51	26.91	25.40	23.97	22.63

Remarquons que si cette expérience est faite en classe, les élèves ont tendance, a priori pour se faciliter la tâche, à mesurer les intervalles entre deux sillets consécutifs puis à additionner le tout. Ils ne se rendent pas compte de l'accumulation des erreurs d'arrondi et de mesure. C'est une excellente occasion de leur montrer et de leur parler de ce problème. On peut prolonger la manipulation par une étude statistique pour retrouver une valeur approchée de la racine douzième de 2 !

2) L'orgue

Dans une classe de A3 musique, j'avais parlé de ces problèmes de mathématiques et de musique en l'appliquant à la guitare comme ci-dessus. Une élève m'a alors demandé si sur une flûte cela fonctionnait pareil et de sortir une flûte traversière et à mon invite elle a commencé à en jouer. Je suis resté perplexe ! J'ai seulement dit que les flûtes de pan et les tuyaux d'orgue répondaient à ce genre de logique que je venais d'expliquer. Une autre élève s'est alors proposée pour apporter lors de la séance suivante quelques tuyaux d'orgue (j'ignorais qu'elle était en parenté avec un facteur d'orgue). Elle a ainsi apporté 5 tuyaux d'orgue en bois et nous les avons étalonnés puisque la note était marquée sur 3 d'entre eux. Vérification prise auprès du concepteur, notre étalonnage était correct, ce qui n'a pas peu remonté le prestige des mathématiques dans une classe littéraire. Il n'y a malheureusement pas toujours un facteur d'orgue disponible ! Mais on oublie trop souvent que les élèves sont des personnes ressources formidables pour peu que l'on s'intéresse à eux autrement que par leur réussite aux devoirs de maths.

§ 7 - Les paradoxes musicaux

a) Un son dont la hauteur croît indéfiniment :

Au cours des paragraphes précédents nous avons vu que le premier partiel peut être absent sans que cela modifie la perception de hauteur du son. D'une façon plus générale, la hauteur apparente d'un son n'est pas entièrement régie par les partiels qui interviennent. L'intensité de ceux-ci joue un rôle important (nous l'avons vu à propos des cloches). Ceci va permettre de créer l'illusion d'un son éternellement ascendant.

Ce son est composé d'harmoniques particulières qui sont séparées d'un nombre entier d'octaves du fondamental : $2f$, $4f$, ... $2^n f$ (le fondamental n'apparaît pas). f augmente régulièrement, par exemple par demi-tons, mais les intensités de chaque harmonique varient suivant une loi en cloche, formant ce qu'on appelle l'enveloppe des intensités.

Quand f a doublé, on retrouve le son initial mais localement l'oreille suit la montée des partiels et le son donne l'impression de devenir de plus en plus aigu. (Cf figure 7 ci-après où l'abscisse est graduée en octaves).

On peut améliorer cette illusion en déplaçant l'enveloppe des intensités vers le bas au fur et à mesure que f augmente. Le son monte la gamme et il se retrouve pourtant plus bas !

Ce genre d'illusion peut être appliqué à de simples battements qui accélèrent tout en ayant le même rythme.

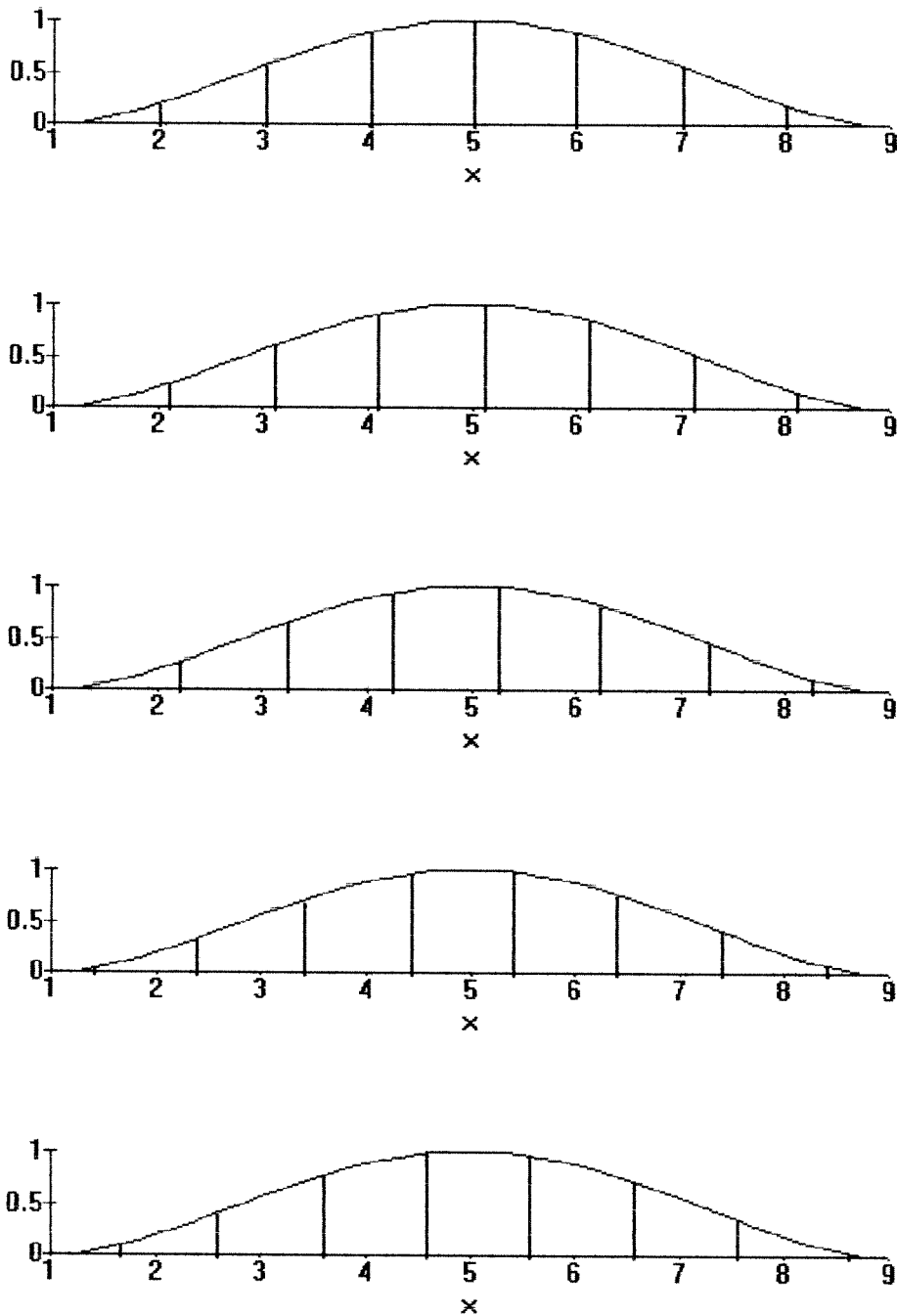


figure 7

b) Inversion de l'effet Doppler :

En utilisant non pas des harmoniques mais des partiels on peut s'arranger pour inverser l'effet Doppler. On sait qu'une source sonore qui approche a un son plus aigu qu'une source sonore qui s'éloigne. On peut remplacer cette différence de vitesse en utilisant un magnétophone qui tourne plus ou moins vite. Considérons un son formé de partiels séparés de 1,1 octave et dont l'enveloppe des intensités forme également une courbe en cloche, comme indiqué sur la première ligne du tableau ci-dessous :

f	$2^{1,1} f$	$2^{2,2} f$	$2^{3,3} f$	$2^{4,4} f$	$2^{5,5} f$	$2^{6,6} f$	
$2 f$	$2^{2,1} f$	$2^{3,2} f$	$2^{4,3} f$	$2^{5,4} f$	$2^{6,5} f$	$2^{7,6} f$	

En doublant la vitesse de rotation du magnétophone, la plupart des partiels sont remplacés par des partiels situés un dixième d'octave en dessous (deuxième ligne du tableau ci-dessus), le dernier (nouveau) est d'intensité faible et l'absence du premier n'a pas d'importance puisque l'oreille le rétablit.

c) La disymétrie des oreilles :

Un autre paradoxe peut être créé en utilisant le fait que le cerveau est disymétrique. Chez la plupart des individus, l'oreille gauche privilégie les graves et l'oreille droite les aigus (cette disymétrie ne recoupe pas exactement droitiers et gauchers).

Deux notes séparées d'une octave sont jouées alternativement selon le même rythme, mais, grâce à un casque, on présente à l'oreille droite d'abord la plus aiguë, tandis qu'à l'oreille gauche on commence par la plus grave. L'individu a l'impression d'un son alternativement aigu et grave qui saute de la droite à la gauche puis revient à droite...

Un paradoxe un peu voisin dont l'explication est difficile est le paradoxe de Wessel. Ce paradoxe fait intervenir les timbres et en cela il repose sans doute sur la disymétrie des oreilles. On joue le rythme suivant :

figure 9a

Si les notes marquées ● et ○ sont jouées avec le même timbre, on entend une suite de trois notes ascendantes. Par contre si elles sont jouées avec des timbres très différents, on entend, comme l'indique la partition ci-dessous, deux voix dont chacune est formée d'un motif répété de trois notes descendantes.

figure 9b

Ce paradoxe traduit aussi le fait que l'oreille a tendance à associer des sons de hauteur voisine et à séparer les sons présentant des écarts importants de hauteur.

§ 8 - Conclusion

Il n'est pas question dans ce texte de traiter tous les points où les mathématiques interviennent. Comme dans chaque activité humaine un tant soit peu complexe, toutes les disciplines se retrouvent. Nous sommes restés bien souvent aux lisières de la physique, nous n'avons pas

parler de la technologie de reproduction du son (disque, magnétophone, CD, ordinateur...), de l'imitation de la voix, de l'architecture antibruit ou au contraire de l'acoustique des salles de spectacles, du principe du codage d'une bande sonore et de bien d'autres points que j'oublie sans doute.

Je souhaite simplement que cet aperçu puisse donner des idées d'activités pluridisciplinaires à tous les niveaux, du collège à l'université. Ayant moi-même expérimenté plusieurs de ces points, je sais que c'est là une source d'enthousiasme pour les élèves et l'occasion de voir que les mathématiques ne sont pas une construction abstraite loin de tout usage mais au contraire une partie des outils que s'est forgé l'esprit humain pour agir sur son environnement.

Bibliographie :

- 1) Le son musical, John R. Pierce, Pour la science (Belin), 1983 (édition française 1984).
Un panorama très complet sur les sons, la musique, l'acoustique, l'architecture musicale, etc. Contient un disque présentant différents effets.
- 2) La fascination des groupes, F. J. Budden, OCDL, 1972 (édition française 1976).
Deux chapitres sur la musique : l'un à propos de l'arithmétique modulo n appliquée à la composition musicale, l'autre sur l'application des permutations à la science des carillons.
- 3) Musique classique et mathématique moderne, B. Parzysz, APMEP, 1972 (?).
Description très rigoureuse de l'aspect mathématique du solfège et de la composition musicale.
- 4) Abrégé d'histoire des mathématiques, Dieudonné (Hermann 1978)
On trouve page 330 et suivantes du tirage de 1992 l'essentiel sur la naissance de l'analyse de Fourier et les problèmes de convergence.

CYCLES ET NON-LINÉARITÉ

Michel ÉMERY¹

(C.N.R.S. et Université de Strasbourg)

La célèbre *Loi de l'Emm... Maximal* est un principe universel, s'appliquant non seulement dans toutes les sciences (humaines, inhumaines et autres) mais aussi et surtout dans la vie quotidienne. Comme tout principe, elle est indémontrable et se vérifie par ses conséquences. Celles-ci sont innombrables²; certaines d'entre elles, ressortissant aux sciences exactes, peuvent être démontrées; c'est le cas par exemple du fameux *théorème de la tartine de beurre*³. Notre propos est d'énoncer et de démontrer une autre conséquence, peut-être moins connue, de cette loi, le *théorème du vent en face*.

Vous partez à vélo pour un pique-nique dans les Vosges. En pédalant le matin contre le vent d'ouest, vous êtes en droit d'espérer, au retour, un vent favorable. Eh bien non! Vous aurez l'après-midi à peiner contre un vent d'est. Vous en tirez la leçon : ce doit être une particularité du régime éolien en plaine rhénane. Mais si la fois suivante vous tentez de mettre cette observation à profit en allant pique-niquer en Forêt-Noire, vous serez le matin face à un vent d'est et lutterez au retour contre le vent d'ouest.

Bien sûr, ceci est un peu caricatural, et il vous est déjà arrivé de savourer un bon vent dans le dos (par exemple, lors des tourbillonnements qui précèdent l'orage; mais ceci est un autre domaine d'application de la L. E. M.); cependant, en rassemblant vos souvenirs, vous conviendrez sans doute avoir été plus souvent gêné que porté par le vent. Il y a à cela une raison évidente : aidé par le vent, on roule plus vite, et cela dure donc moins longtemps (pour la même raison, on passe bien plus de temps dans les montées que dans les descentes). Mais cela n'explique pas tout, par exemple les nombreuses fois où l'on a le vent dans le nez aussi bien à l'aller qu'au retour.

THÉORÈME. — *Un cycliste donné trouvera gênants plus de la moitié des vents possibles. Dualement, un vent donné gêne plus de la moitié des cyclistes.*

-
1. Je remercie H. Rubenthaler pour ses commentaires et sa participation aux travaux pratiques.
 2. Voir par exemple *Murphy's Law and other reasons why things go wrong*, par Arthur Bloch, édité par Price/Stern/Sloan, Los Angeles 1977, et *Murphy's Law Book Two, more reasons why things go wrong*, même auteur, même éditeur, 1980.
 3. Une démonstration de ce théorème, due à R. Matthiews, est expliquée par I. Stewart dans *The Anthropomorphic Principle*, Scientific American, décembre 1995 (traduction française : *Le principe anthropomorphique*, Pour la Science, janvier 1996).

© L'OUVERT 83 (1996)

Pour démontrer ceci, il faut modéliser la situation considérée; nous allons la simplifier à l'aide de deux hypothèses.

a) Le cycliste sera assimilé à une sphère. Cette hypothèse n'est guère réaliste mais elle simplifie énormément le travail, en évitant entre autres les effets d'aile ou de voile, par lesquels on pourrait par exemple prendre appui sur un vent non portant (et sur le sol) pour se propulser comme un voilier serrant le vent.⁴

b) Cette sphère placée dans un courant d'air uniforme de vitesse \vec{u} subit une force $\vec{f}(\vec{u})$ de même direction et de même sens que \vec{u} , de module $f(|\vec{u}|)$ où f est une fonction convexe strictement croissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ vérifiant $f(0) = 0$. Cette hypothèse dit deux choses. D'abord, la force est constante dans le temps : nous négligeons, par exemple, les irrégularités liées aux tourbillons qui pourraient apparaître dans le sillage. Ensuite, la convexité de f : elle est inspirée par les modèles aérodynamiques les plus élémentaires, qui admettent une résistance f linéaire en deçà d'un certain seuil, puis quadratique au-delà. Nous supposons aussi que la fonction convexe f n'est pas linéaire; plus précisément, le *seuil de non-linéarité* (le plus grand nombre r , éventuellement nul, tel que f soit linéaire sur $[0, r]$) devra être suffisamment petit pour que la non-linéarité se manifeste déjà dans le domaine de vitesses que nous considérerons.

La force subie est donnée par $\vec{f}(\vec{u}) = f(|\vec{u}|) \vec{u} / |\vec{u}|$; pour simplifier cette formule, nous poserons $g(s) = f(s)/s$, de sorte que $\vec{f}(\vec{u}) = g(|\vec{u}|) \vec{u}$; la fonction g est positive, continue et croissante sur \mathbb{R}_+ , constante sur $[0, r]$, strictement croissante sur $[r, \infty[$ et strictement positive sur $]0, \infty[$. (Les hypothèses sur f ne seront plus employées dans la suite; seules seront utilisées ces propriétés de g , qui sont un peu plus faibles, puisqu'elles n'entraînent pas la convexité de f .)

C'est la non-linéarité de la résistance qui sera la clé du théorème. Supposons par exemple un vent \vec{v} parfaitement latéral, perpendiculaire à la vitesse \vec{c} du cycliste. Le vent apparent (vitesse de l'air par rapport au cycliste) est $\vec{u} = \vec{v} - \vec{c}$. En régime linéaire, c'est-à-dire si $f(s) = ks$, la résistance $\vec{f}(\vec{u})$ est $k\vec{u} = k\vec{v} - k\vec{c}$; sa composante normale $k\vec{v}$ est compensée par la résistance du sol (inclinaison latérale du cycliste) et le cycliste lutte contre la même force $-k\vec{c}$ que s'il n'y avait pas de vent. Mais en régime non-linéaire, le coefficient constant k est remplacé par $g(|\vec{u}|)$ qui est fonction croissante de $|\vec{u}|$, donc de $|\vec{v}|$ (car $|\vec{u}| = \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{c}|^2}$ varie dans le même sens que $|\vec{v}|$ à \vec{c} fixé), et la résistance $-g(|\vec{u}|)\vec{c}$ éprouvée par le cycliste est supérieure à $-g(|\vec{c}|)\vec{c}$, résistance éprouvée par le même cycliste, à la même vitesse, mais en l'absence de vent latéral. Plus généralement, que \vec{v} soit ou non perpendiculaire à \vec{c} , la *non-linéarité interdit de décomposer fictivement le vent en composantes parallèle et perpendiculaire au cycliste, car la force exercée par une somme (vectorielle) de vents n'est plus la somme (vectorielle) des forces exercées séparément par ces vents fictifs*. La composante latérale du vent a donc un effet sur la résistance longitudinale à l'avancement; c'est cet effet qu'il s'agit d'étudier.

4. De toutes façons, la recherche d'un tel effet de voile ne semble guère compatible avec l'équilibre du cycliste. (Expériences personnelles, non publiées.)

Dans toute la suite, la Fonction f (Force Freinante) sera Fixée; la Célérité \vec{c} du Cycliste sera Constante (et non nulle); nous prendrons comme Variable le Vecteur Vitesse \vec{v} du Vent (par rapport au sol). La projection orthogonale des vecteurs sur la direction du déplacement, direction donnée par \vec{c} , sera notée π .

La vitesse de l'air par rapport au cycliste (vent apparent) est $\vec{u} = \vec{v} - \vec{c}$; le cycliste subit la force $\vec{f}(\vec{u})$ et doit pédaler contre (ou avec) la force $\pi\vec{f}(\vec{u}) = \pi\vec{f}(\vec{v} - \vec{c})$, projection orthogonale de $\vec{f}(\vec{u})$ sur la direction du déplacement.

DÉFINITIONS. — Deux vents \vec{v}_1 et \vec{v}_2 seront dits équivalents s'ils gênent (ou aident) autant le cycliste, c'est-à-dire si

$$\pi\vec{f}(\vec{v}_1 - \vec{c}) = \pi\vec{f}(\vec{v}_2 - \vec{c}) .$$

Un vent \vec{v} sera dit neutre s'il est équivalent au vent nul, c'est-à-dire si

$$\pi\vec{f}(\vec{v} - \vec{c}) = \pi\vec{f}(-\vec{c}) ;$$

il sera dit favorable (respectivement gênant) s'il est équivalent à un vent de la forme $\lambda\vec{c}$ où λ est un scalaire strictement positif (respectivement strictement négatif).

Lorsque λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la force $\vec{f}((\lambda-1)\vec{c})$ due à un vent $\lambda\vec{c}$ varie de façon continue et strictement monotone de $-\infty\vec{c}$ à $+\infty\vec{c}$ (cela résulte des hypothèses sur f); elle passe donc une fois et une seule par chaque multiple de \vec{c} et il en résulte que chaque vent est équivalent à un vent parallèle à \vec{c} et un seul. En particulier, chaque vent est soit gênant, soit neutre, soit favorable.

Ces définitions permettent de remplacer la formulation floue du théorème par un énoncé précis.

PROPOSITION. — Si un vent \vec{v} est neutre, son opposé $-\vec{v}$ est soit neutre, soit gênant; il existe un vent neutre d'opposé gênant. Si \vec{v} est favorable, $-\vec{v}$ est toujours gênant; il existe un vent gênant d'opposé gênant.

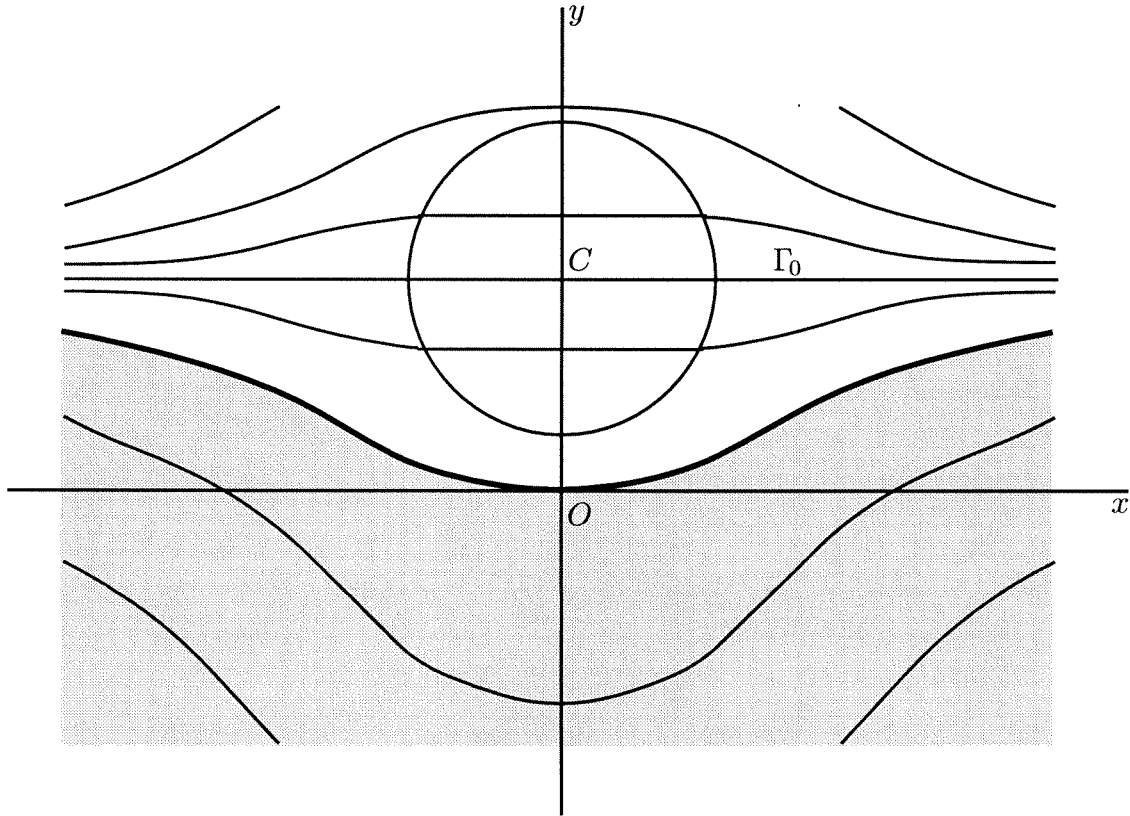
REMARQUES. — a) Cet énoncé décrit l'effet de deux vents opposés sur le même cycliste; par symétrie, il renseigne aussi sur l'action du même vent sur deux cyclistes aux célérités opposées : la dernière phrase dit qu'un vent qui m'aide lors de l'aller me gênera nécessairement au retour, mais qu'il m'arrive de l'avoir en face et à l'aller et au retour.

b) La notion de vents équivalents, dans laquelle la célérité \vec{c} a été fixée, ne correspond pas à la pratique : en cas de vent j'adapte ma vitesse pour pédaler à puissance constante plutôt que de pédaler plus ou moins fort pour maintenir ma vitesse. Mais la proposition s'intéresse seulement à la trichotomie vent gênant/neutre/favorable, et ces notions sont aussi pertinentes dans les deux situations (vitesse fixée ou puissance fixée); c'est évident pour les vents neutres, sous lesquels la vitesse et la composante longitudinale de la résistance sont les mêmes qu'en l'absence de vent, c'est vrai aussi pour les vents gênants ou favorables : il va de soi que le même vent qui m'obligerait à dépenser plus d'énergie pour conserver ma vitesse me ralentit si je choisis de ne pas pousser plus fort sur les pédales.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. — Choisissons un repère orthonormé dans lequel les deux⁵ composantes de \vec{c} sont $(0, c)$ où $c > 0$; soient (x, y) celles du vent \vec{v} . La force due au vent est $\vec{f}(\vec{v}-\vec{c}) = g(|\vec{v}-\vec{c}|) (\vec{v}-\vec{c})$; sa composante longitudinale $\pi \vec{f}(\vec{v}-\vec{c})$ est donc donnée par $(y-c)g(\sqrt{x^2 + (y-c)^2})$ et les vents équivalents entre eux dessinent dans l'espace vectoriel des vents les courbes Γ_a d'équations

$$(y-c)g(\sqrt{x^2 + (y-c)^2}) = a.$$

La figure ci-dessous (justifiée plus loin) correspond au cas où le seuil de non-linéarité r est non nul et où g est non bornée. On y voit les deux axes, la famille des courbes Γ_a , le point $C = (0, c)$ qui représente la vitesse $\vec{v} = \vec{c}$, et le cercle de rayon r centré en C . La courbe des vents neutres est tracée en gras (c'est celle des Γ_a qui passe par l'origine) et la région des vents gênants apparaît en grisé.



À l'intérieur du cercle, les courbes sont rectilignes et horizontales. Pour $a = 0$, la courbe Γ_0 est la droite d'équation $y = c$; elle représente les vents équivalents à \vec{c} , qui sont aussi les vents \vec{v} tels que $\pi \vec{v} = \vec{c}$. Chaque Γ_a est symétrique par rapport à l'axe des y ; la symétrique de Γ_a par rapport à la droite Γ_0 (et aussi au point C) est Γ_{-a} . Chaque courbe Γ_a a une asymptote horizontale, qui est la droite Γ_0 si g n'est pas bornée, et la droite d'équation $y = c + (a/\sup g)$ si g est bornée. Toutes ces propriétés se lisent facilement sur l'équation de ces courbes.

5. Même si le vent n'est pas horizontal (avez-vous déjà roulé sur les bouches d'aération du parking de la place Kléber à Strasbourg?), on peut toujours travailler dans un plan contenant \vec{v} et \vec{c} .

Pour x fixé, lorsque y croît de c à $+\infty$, la fonction $(y-c)g(\sqrt{x^2+(y-c)^2})$ varie continûment de 0 à $+\infty$ en croissant strictement (c'est le produit de deux fonctions continues, croissantes et strictement positives, dont l'une est strictement croissante); de même, lorsque y croît de $-\infty$ à c , $(y-c)g(\sqrt{x^2+(y-c)^2})$ varie continûment de $-\infty$ à 0 en croissant strictement. Il en résulte que, pour a et x fixés, il existe un y et un seul tel que $(x, y) \in \Gamma_a$, et l'équation de Γ_a peut être réécrite sous la forme $y = \phi_a(x)$, pour une fonction ϕ_a qui est évidemment paire. Il en résulte aussi que les courbes des vents favorables (respectivement gênants) sont au-dessus (respectivement au-dessous) de la courbe des vents neutres.

Enfin, pour $a < 0$, c'est-à-dire pour les courbes au-dessous de la droite Γ_0 , la fonction ϕ_a est strictement décroissante sur \mathbf{R}_- et strictement croissante sur \mathbf{R}_+ , la seule exception étant le cas où r est non nul et où $a \in]-rg(r), 0[=]-f(r), 0[$: ϕ_a est alors constante dans un intervalle autour de zéro, qui correspond au passage de la courbe Γ_a à l'intérieur du cercle. (Bien entendu, par symétrie, ces propriétés s'inversent pour $a > 0$.) En effet, si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points de Γ_a tels que $0 \leq x_1 < x_2$ et $y_1 \geq y_2$, on doit avoir d'une part

$$(y_1-c)g(\sqrt{x_1^2+(y_1-c)^2}) = (y_2-c)g(\sqrt{x_2^2+(y_2-c)^2})$$

car les deux points sont sur une même Γ_a , d'autre part $0 > (y_1-c) \geq (y_2-c)$ car Γ_a est au-dessous de Γ_0 , et enfin $0 < g(\sqrt{x_1^2+(y_1-c)^2}) \leq g(\sqrt{x_2^2+(y_2-c)^2})$ car g est croissante et $0 < |y_1-c| \leq |y_2-c|$ et $0 \leq x_1 < x_2$; mais ces trois conditions ne peuvent être simultanément réalisées que si l'on a à la fois $y_1 = y_2$ et $g(\sqrt{x_1^2+(y_1-c)^2}) = g(\sqrt{x_2^2+(y_2-c)^2})$. Les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont donc tous deux sur une même horizontale et, g étant strictement croissante sur $]r, \infty[$, tous deux dans le cercle.

Finalement, la courbe des vents neutres, obtenue pour $a = -cg(c) = -f(c)$, est entièrement contenue dans le demi-plan des $y \geq 0$ et ne rencontre l'axe des x qu'à l'origine ou, dans le cas où $r > c$, le long du segment $[-\sqrt{r^2-c^2}, +\sqrt{r^2-c^2}]$. La proposition en découle puisque les vents favorables (respectivement gênants) sont ceux situés au-dessus (respectivement au-dessous) de cette courbe. ■

EXERCICE. — Soit \vec{v} un vent gênant vérifiant $y > 0$ (on a vu qu'il en existe). Montrer que pour tout $\lambda > 0$ assez petit (respectivement assez grand), le vent $\lambda\vec{v}$ est favorable. (Indication : la quantité $g(\sqrt{x^2+(y-c)^2})$ va croissant lorsque l'on parcourt une Γ_a en partant d'un point de l'axe des x ; il en résulte que ϕ_a est dérivable en 0, avec $\phi'_a(0) = 0$.) Ainsi, pour des vents soufflant d'une direction donnée, l'effet sur le cycliste n'est pas une fonction monotone de la vitesse du vent. Expliquer pourquoi ceci n'est pas contradictoire avec la fin de la remarque b) deux pages plus haut.

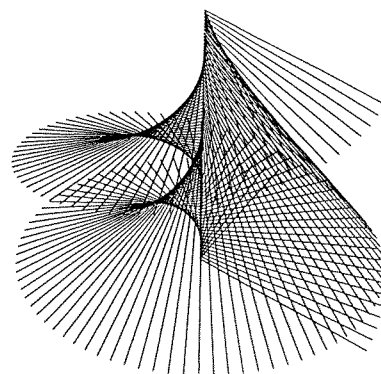
On remarquera que la non-linéarité ne se manifeste qu'à l'extérieur du cercle : si le seuil de non-linéarité r est assez grand pour que les vitesses des vents rencontrés en pratique soient toutes dans le cercle, le phénomène n'a pas lieu.

On voit aussi sur ces courbes que le phénomène est d'autant plus marqué que la composante latérale du vent est plus importante; en fin de compte, si l'on a le vent dans le nez aussi bien en allant vers les Vosges que vers la Forêt-Noire, c'est parce que, dans le couloir rhénan, il souffle souvent du nord ou du sud.

NOUVELLE BROCHURE :

FAIRE DES MATHÉMATIQUES AVEC UN LOGICIEL DE CALCUL FORMEL

Partie I : Initiation à Mathematica	11
1. Un survol de Mathematica <i>par A. Makhlouf</i>	12
2. Les fonctions <i>par A. Makhlouf</i>	26
3. Définition d'une fonction : application à la définition de la fonction dérivée <i>par E. Meyer</i>	33
4. Les listes <i>par M. Gilg</i>	39
5. Les représentations graphiques <i>par L. Darie</i>	51
Partie II : Des exemples pour l'enseignement	70
1. Des exemples d'applications pour CPGE et le DEUG <i>par L. Darie</i>	71
2. Valeurs propres et vecteurs propres <i>par A. Makhlouf</i>	80
3. La jordanisation des matrices <i>par A. Makhlouf</i>	86
4. Des travaux pratiques sur les polynômes orthogonaux <i>par J. Lefort</i>	91
5. Derive - Maple : 1 à 0 <i>par J. Lefort</i>	101
6. Les équations différentielles <i>par A. Makhlouf</i>	104
6. Une introduction au calcul des limites <i>par J. Perrin</i>	112
7. Une session mathematica pour calculer des limites de fractions rationnelles à l'aide des ordres de grandeur <i>par A. Makhlouf</i>	115
Partie III : Algorithmes	125
1. La factorisation sans carré <i>par E. Meyer</i>	126
2. Le théorème de Sturm <i>par E. Meyer</i>	129
3. Utilisation des règles : Application à la détermination de l'ordre de grandeur d'une expression <i>par E. Meyer</i>	134
Partie IV :	
Des applications du calcul formel dans la recherche mathématique	139
1. Les caractères des groupes de permutations <i>par M. Gilg, A. Makhlouf et J. Perrin</i>	140
2. Mathematica et loi d'algèbres <i>par M. Goze</i>	146
3. Etude des algèbres associatives à l'aide du calcul formel <i>par A. Makhlouf</i>	150
4. Désingularisation et paramétrisation des courbes algébriques <i>par A. Makhlouf</i>	168



Prix de vente : 65 F (+ 20 F de frais de port).

PLANCHE À DESSINS DE FASENACHTSKUECHLE FEUILLETÉS

Nous avons été désolés de constater que certains dessins de l'article de Michèle Audin et Patrick Foulon dans 'L'Ouvert' n°82 étaient mal passés à la reproduction. Nous republions ici les figures peu lisibles pour vous permettre de les recomposer sans incertitudes dans le numéro précédent. Une occasion aussi de relire cet article fort intéressant.

Les responsables vous prient de les excuser.

O. SCHLADENHAUFEN.

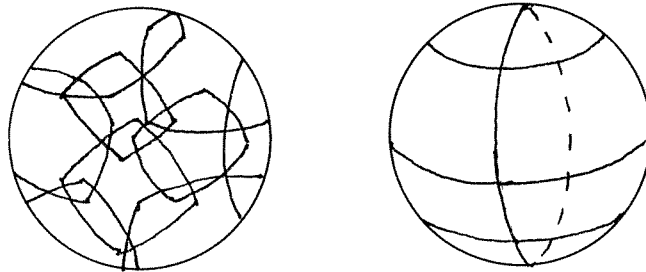


Figure 3 : atlas

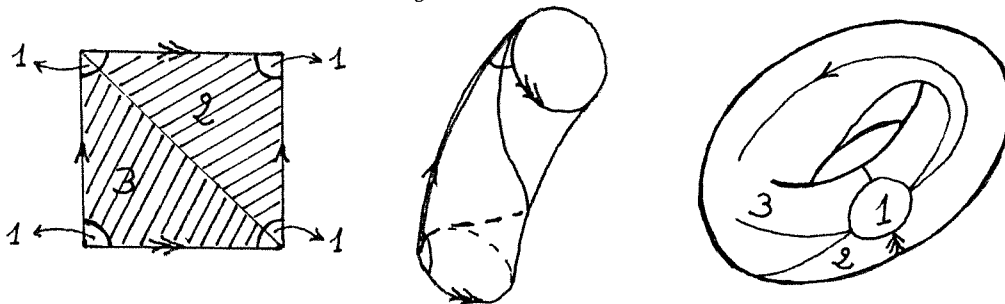


Figure 4 : un tore avec trois cartes

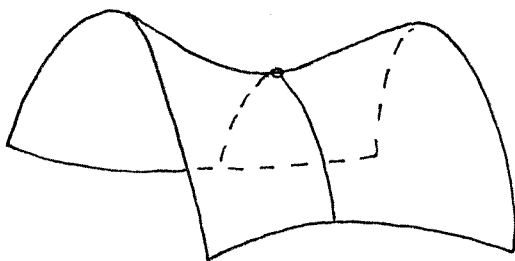


Figure 5 : un col

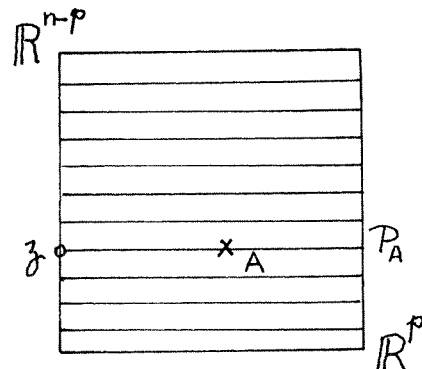


Figure 6

PLANCHE À DESSINS DE FASENACHTSKUECHLE FEUILLETÉS



Figure 7

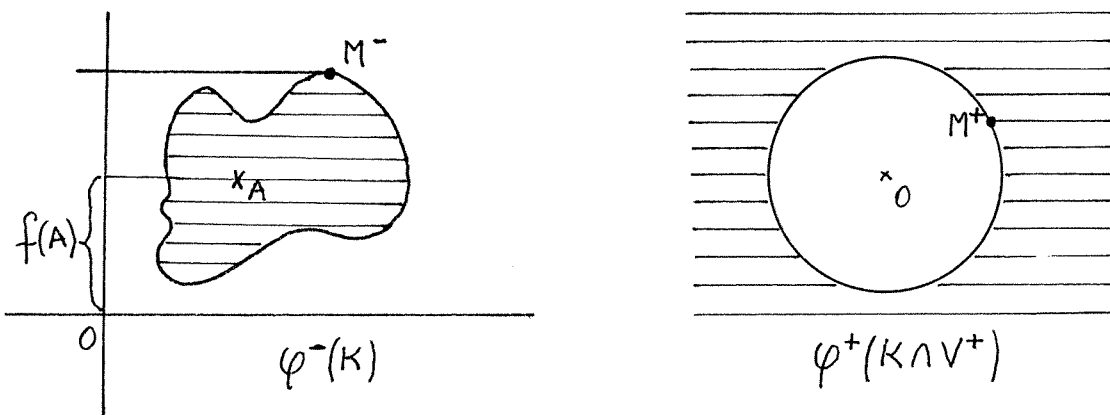


Figure 9

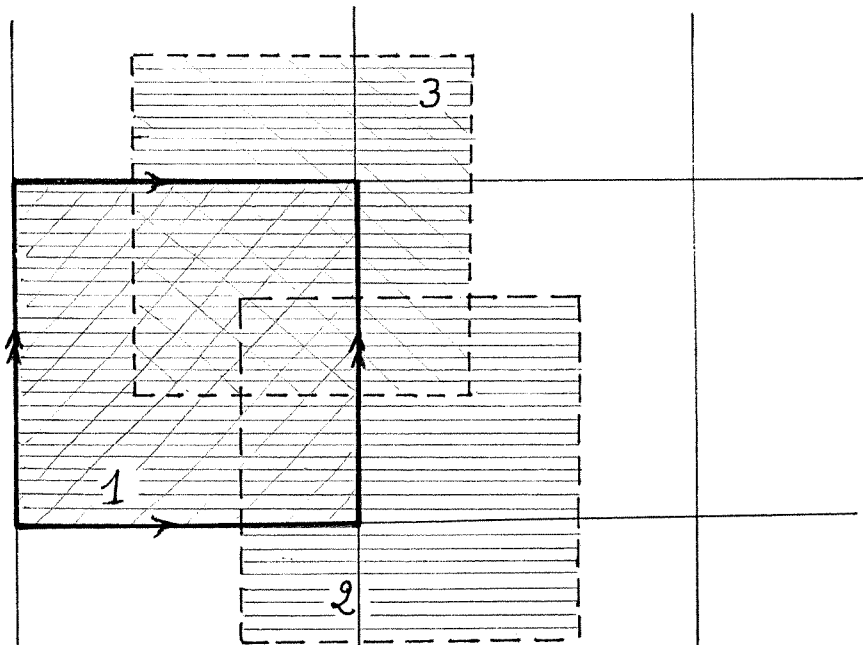


Figure 10

NOTE DE LECTURE :

SÉMIOSIS ET PENSÉE HUMAINE
Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels

Par Raymond DUVAL, aux éditions Peter Lang

Cet ouvrage est le fruit de 25 ans de travail à l'I.R.E.M. de Strasbourg. Raymond Duval y a animé des recherches, des enquêtes, des expériences dans des classes de Collège et de Lycée. Il a publié de nombreux articles sur la compréhension des textes, l'apprentissage du raisonnement, l'interprétation des représentations graphiques et des figures géométriques et les changements de registres de représentation. Tout au long de ces années, il a apporté ses compétences, son regard original et son sens de la contestation aux divers groupes de recherche de l'I.R.E.M. et aux étudiants préparant une thèse. S'il a beaucoup donné à l'I.R.E.M. de Strasbourg, celui-ci le lui a bien rendu : le livre est nourri des innombrables débats, souvent passionnés, avec les animateurs de l'I.R.E.M. et les chercheurs en didactique.

Publiée chez Peter Lang, cette synthèse, riche et ambitieuse, des travaux passés, sera incontestablement un ouvrage de référence en formation initiale (I.U.F.M.) et continue des enseignants. Son mérite consiste à établir des liens, étroits et indispensables, entre l'apprentissage des mathématiques et celui de la langue naturelle.

La particularité de l'apprentissage des mathématiques tient à ce que ces activités cognitives requièrent l'utilisation de systèmes d'expression et de représentations autres que le langage naturel ou que les images : systèmes variés d'écriture pour les nombres, notations symboliques pour les objets, écritures algébrique et logique (qui prennent le statut de langues parallèles au langage naturel pour exprimer les relations et les opérations), figures géométriques, représentations en perspective, graphes cartésiens, réseaux, diagrammes, schémas, etc... Pour Raymond Duval, l'utilisation de multiples systèmes sémiotiques de représentation et d'expression est indispensable au développement de l'activité mathématique. Le progrès des connaissances s'accompagne toujours de la création et du développement de systèmes sémiotiques nouveaux et spécifiques qui coexistent plus ou moins avec le premier d'entre eux, la langue naturelle.

L'élève qui sait coordonner les représentations relevant de systèmes sémiotiques variés, qui passe harmonieusement des unes aux autres se distingue (l'expérimentation le prouve) par une modification profonde de ses initiatives, de ses démarches et par un saut qualitatif de ses productions.

© L'OUVERT 83 (1996)

La sémiotique (acte d'appréhender des représentations sémiotiques imaginées par d'autres et d'en produire soi-même, mentalement ou matériellement) est intimement liée à la qualité de la néosis, l'acte de concevoir par la pensée (appréhension conceptuelle d'un objet, discrimination d'une différence ou compréhension d'une inférence). **Pour R. Duval, il n'y a pas de néosis sans sémiotique.** La capacité de coordonner des registres sémiotiques n'est pas une conséquence de la conceptualisation. Au contraire, le degré de maîtrise de la sémiotique (impliquant pluralité et coordination de registres sémiotiques) détermine l'étendue et la profondeur du champ de conceptualisation d'un individu. La sémiotique est intrinsèque au fonctionnement de la pensée humaine.

Le premier chapitre examine les conséquences de ce postulat, en particulier la non-congruence de certaines représentations sémiotiques, source de nombreux échecs en mathématiques.

Les fonctions discursives d'une langue font l'objet du second chapitre. Au nombre de quatre, **elles sont inséparables des fonctions cognitives.** La fonction référentielle, hypertrophiée en mathématiques, sert à désigner les objets. La fonction apophantique permet la constitution d'un énoncé complet au sujet des objets désignés. La fonction d'expansion discursive conduit à l'articulation d'énoncés complets en une unité cohérente. Enfin, la fonction de réflexivité discursive attribue des jugements de valeur (doute, conviction, etc...) à ces énoncés complets (l'objectivation consiste pour l'individu, à s'expliquer à lui-même les conflits, les potentialités, les questions nées de l'apprentissage, sans souci de communiquer avec autrui. Dans cette phase, toute intervention extérieure serait néfaste). Ces quatre fonctions discursives sont à l'œuvre, avec des accentuations diverses dans toutes les formes de discours : récit, description, explication, raisonnement (avec sa composante rhétorique d'argumentation et sa composante logique de déduction). Elles doivent être clairement distinguées des trois fonctions méta-discursives de communication, de traitement des fonctions cognitives et d'objectivation des représentations virtuelles (contrôle qu'un individu peut avoir sur ses activités, ses vécus et sur les potentialités d'un monde imaginaire ou personnel).

R. Duval applique le modèle précédent au passage du langage naturel aux langages formels. La traduction d'un énoncé en langage naturel dans celui, par exemple, des prédicats du premier ordre (avec ses fonctions propositionnelles, ses quantificateurs, ses variables et ses fonctions de vérité) soulève des difficultés considérables de non-congruence qui ont conduit à opposer langues naturelle et formelle. Au contraire, l'analyse fonctionnelle met en évidence leur articulation.

Le cas des figures géométriques est abordé dans le quatrième chapitre. Voici un cas original de système de représentations sémiotiques, qui ne remplit aucune fonction discursive et dont l'interprétation perceptive semble devenir prépondérante sinon suffisante! La compréhension du fonctionnement heuristique d'une figure dans la démarche géométrique (cf. '*Repères-IREM*' n° 17 de 1994) permet de renouveler l'enseignement de la géométrie au Collège.

NOTE DE LECTURE

Le raisonnement fait l'objet du cinquième chapitre. Activité multiforme, il recouvre des démarches aussi éloignées que la démonstration et l'argumentation et comprend des aspects psychologiques, logiques et épistémologiques que l'on a tendance à opposer, donc à isoler. R. Duval en propose une analyse fonctionnelle et structurale. Pour chaque proposition, il distingue valeur épistémique et valeur de vérité d'une part, statut et contenu d'autre part. Cette double distinction lui permet de montrer en quoi le raisonnement diffère de toute autre activité discursive (récit, description, explication...). Elle conduit à séparer le raisonnement déductif de l'argumentation (malgré un emploi des mêmes expressions linguistiques et d'organisations discursives très voisines). Enfin elle conduit à la découverte de la validité d'un raisonnement, donc à la certitude de la vérité.

La compréhension de textes occupe le dernier chapitre. Là encore, le recours à plusieurs registres sémiotiques se révèle fécond pour l'acquisition des différents modes de segmentation et de recontextualisation. Il s'agit de déterminer les registres utiles dans chaque situation et de proposer des règles de conversion entre eux. Cette approche, riche pour comprendre des textes mathématiques en fin d'Enseignement primaire et au Collège, s'étend avec succès à l'analyse et à la compréhension de presque tous les genres de textes.

Avec ce livre, Raymond Duval apporte une pierre importante à l'édifice, un peu ébranlé, de l'enseignement des mathématiques. Il le replace dans le cadre plus vaste des activités cognitives humaines. Dans cet éclairage, leur spécificité se manifeste à l'évidence, ainsi que les parentés et les dépendances avec d'autres domaines de la connaissance.

Ce livre va soulever des débats passionnés parmi les spécialistes des mathématiques, de la linguistique, des sciences de l'éducation et de la psychologie. Cette perspective n'est pas pour déplaire à Raymond Duval : ils prolongeront simplement ceux, si féconds, des séminaires, des groupes de recherches et des rencontres dans les couloirs de l'I.R.E.M. de Strasbourg où, par delà la connaissance, se sont nouées de solides amitiés.

Gérard KUNTZ.

Pour commander cet ouvrage, adressez-vous directement à l'éditeur :
Editions Peter Lang
Chaussée romaine 2
CH - Colombier-Neuchâtel
(400 pages, \simeq 280 F).

RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 1996

Voici les sujets proposés au vingt-troisième Rallye Mathématique d'Alsace.

CLASSE DE PREMIÈRE

Exercice n° 1

On se donne trois réels a , b , et c compris entre 0 et 1.
Montrer l'inégalité :

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$$

Exercice n° 2

Danielle et Anne cultivent chacune leur jardin rectangulaire. Celui de Danielle a la plus grande longueur et la plus grande surface. Qu'en est-il du périmètre ?

Si Danielle avait celui de plus grande longueur et de plus grand périmètre, serait-elle sûre d'avoir celui de plus grande surface ?

Exercice n° 3

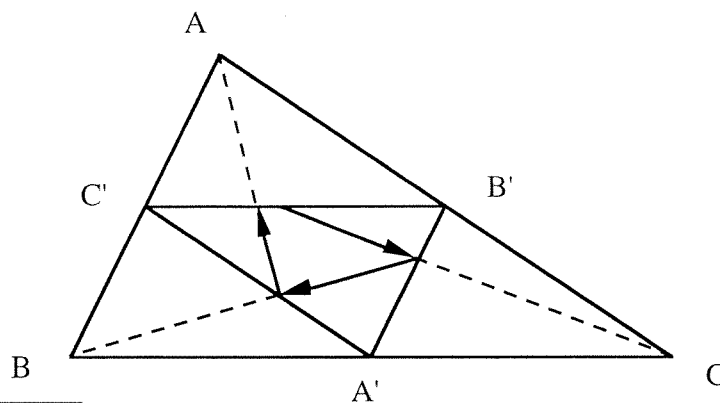
Le professeur Spidermath a découvert que l'espèce d'araignée "Araneida Dreiecka" tisse sa toile de la manière suivante :

-elle place 3 fils formant un triangle noté $A B C$

-elle relie par 3 autres fils les milieux des côtés de ce triangle, formant un deuxième triangle noté $A'B'C'$ (voir figure)

-elle part du fil $B'C'$ et se dirige vers C jusqu'à rencontrer le fil $A'B'$; là, elle change brusquement de direction et se dirige vers B en allant jusqu'au fil $C'A'$ où elle change encore de direction se dirigeant désormais vers A jusqu'au fil $B'C'$.

Peut-elle retomber sur son point de départ ?



CLASSE DE TERMINALE

Exercice n° 1

Proposer une méthode et l'appliquer pour déterminer, sans l'aide d'une calculatrice, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 97^{1996} .

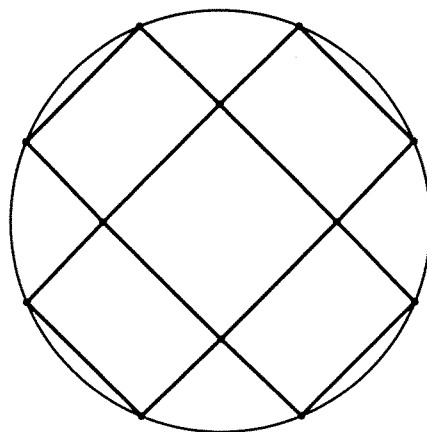
Exercice n° 2

On fixe deux réels strictement positifs a et b . Montrer que si a et b sont inférieurs ou égaux à 2, alors $a^a + b^b > ab$. Qu'en est-il dans les autres cas ?

Exercice n° 3

On désire placer 4 sets rectangulaires identiques sur une table ronde de rayon R . Ils ne peuvent ni se chevaucher, ni dépasser de la table. Ils sont disposés comme indiqué sur la figure.

On veut que ces sets soient d'aire maximale. Quelles doivent être leurs dimensions ?



A VOS STYLOS

PROBLÈME 35 (proposé par D. Dumont)

Énoncé (proposé par D. Dumont, d'Antananarivo)

Pour $n \geq 1$, on définit des polynômes S_n de degré $n-1$ et F_n de degré n par

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1 & S_{n+1}(x) &= nS_n(x) + F_n(x) \\ F_1(x) &= x & F_{n+1}(x) &= nS_n(x) + xF_n(x); \end{aligned}$$

ils vérifient $S_n(1) = F_n(1) = n!$. Appelons $s_{n,k}$ et $f_{n,k}$ leurs coefficients, qui sont les entiers tels que

$$S_n(x) = s_{n,0} + s_{n,1}x + \dots + s_{n,n-1}x^{n-1} \quad \text{et} \quad F_n(x) = f_{n,0} + f_{n,1}x + \dots + f_{n,n}x^n.$$

Étant donné une permutation σ de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ et un élément p de $[n]$, on dira que p est un point fixe de σ si $\sigma(p) = p$; que p est une succession de σ si $p < n$ et $\sigma(p+1) = \sigma(p) + 1$; que le maximum est en position p si $\sigma(p) = n$.

Par exemple, la permutation $\begin{pmatrix} 123456789 \\ 325649781 \end{pmatrix}$ possède 2 successions, 3 points fixes, et le maximum est en position 6.

Démontrer les cinq propositions suivantes :

PROPOSITION 1. — *Le nombre de permutations de $[n]$ possédant k successions est égal à $s_{n,k}$.*

PROPOSITION 2. — *Le nombre de permutations de $[n]$ possédant k points fixes est égal à $f_{n,k}$.*

PROPOSITION 3. — *Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Le nombre de permutations de $[n+1]$ où le maximum est en position p et qui possèdent k successions est égal à $s_{n,k}$.*

PROPOSITION 4. — *Le nombre de permutations de $[n+1]$ où le maximum est en dernière position et qui possèdent k successions est égal à $f_{n,k}$.*

PROPOSITION 5. — *Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Le nombre de permutations de $[n+1]$ où le maximum est en position p et qui possèdent k points fixes est égal à $s_{n,k}$.*

Solution (proposée par P. Renfer)

1) Par identification des coefficients des polynômes, on obtient les relations :

Relations de récurrence :

$$\begin{aligned}
 s_{n+1,k} &= ns_{n,k} + f_{n,k} && \text{pour } n \geq 1 \text{ et } 0 \leq k \leq n-1 \\
 f_{n+1,k} &= ns_{n,k} + f_{n,k-1} && \text{pour } n \geq 1 \text{ et } 1 \leq k \leq n-1 \\
 f_{n+1,0} &= ns_{n,0} && \text{pour } n \geq 1
 \end{aligned}$$

Conditions aux bords :

$$s_{n,n-1} = f_{n,n} = 1 \quad \text{et} \quad f_{n,n-1} = 0 \quad \text{pour } n \geq 1$$

2) Énonçons une sixième proposition. On dira qu'une permutation σ possède une succession en position q si : $\sigma(q+1) = \sigma(q) + 1$.

Proposition 6 Soit q un entier de $[n+1]$.
Le nombre de permutations de $[n+2]$, ayant le maximum en dernière position et possédant $k+1$ successions dont une en position q , est égal à $f_{n,k}$.

3) Vérifions les conditions aux bords pour les nombres définis dans les six propositions

Proposition 1 Pour $k=n-1$, la seule permutation possible est l'identité.

Proposition 2 Pour $k=n$, la seule permutation possible est l'identité.
Pour $k=n-1$, aucune permutation n'est possible.

Proposition 3 Pour $k=n-1$, la seule permutation possible est σ^p , où σ est la permutation circulaire $(1, 2, 3, \dots, n+1)$.

Proposition 4 Pour $k=n$, la seule permutation possible est l'identité.
Pour $k=n-1$, aucune permutation n'est possible.

Proposition 5 Pour $k=n-1$, la transposition $(p, n+1)$ est la seule permutation possible.

Proposition 6 Pour $k=n$, la seule permutation possible est l'identité.
Pour $k=n-1$, aucune permutation n'est possible.

4) Démontrons les six propositions par récurrence sur n , premier indice de $s_{n,k}$ ou $f_{n,k}$.
 Supposons les vraies jusqu'au rang n et examinons les au rang $n+1$.
 Appelons $H_1(n), H_2(n), H_3(n), H_4(n), H_5(n), H_6(n)$ les hypothèses de récurrence relatives aux six propositions, au rang n .

Proposition 1 Soit k un entier de $[n-1]$
 Parmi les permutations de $[n+1]$, ayant k successions, figurent celles dont le maximum est en dernière position : Elles sont au nombre de $f_{n,k}$, d'après $H_4(n)$.
 Pour les autres, il y a n façons de choisir la position du maximum .et pour chacun de ces choix, il y a $s_{n,k}$ permutations, d'après $H_3(n)$.
 Le nombre total est donc :
$$ns_{n,k} + f_{n,k} = s_{n+1,k}$$

Proposition 2 Soit k un entier de $[n-1]$
 Parmi les permutations de $[n+1]$, ayant k points fixes, figurent celles dont le maximum est en dernière position : En plus du point fixe $n+1$, elles possèdent $k-1$ points fixes dans $[n]$ et sont donc au nombre de $f_{n,k-1}$, d'après $H_2(n)$.
 Pour les autres, il y a n façons de choisir la position du maximum .et pour chacun de ces choix, il y a $s_{n,k}$ permutations, d'après $H_5(n)$.
 Le nombre total est donc :
$$ns_{n,k} + f_{n,k-1} = f_{n+1,k}$$

Proposition 4 Soit k un entier de $[n-1]$.
 Parmi les permutations de $[n+2]$, ayant le maximum en dernière position et possédant k successions, figurent celles qui laissent $n+1$ fixe : Elles possèdent une succession en $n+1$ et $k-1$ autres successions et sont donc au nombre de $f_{n,k-1}$, d'après $H_4(n)$, si l'on considère leur restriction à $[n+1]$.
 Pour les autres, il y a n façons de choisir l'antécédent p de $n+1$ dans $[n]$ et pour chacun de ces choix, il y a $s_{n,k}$ permutations, d'après $H_3(n)$, si l'on considère leur restriction à $[n+1]$.
 Le nombre total est donc :
$$ns_{n,k} + f_{n,k-1} = f_{n+1,k}$$

Proposition 3 Soient k un entier de $[n]$.et p un entier de $[n+1]$.
 Soit ρ la permutation circulaire $(1, 2, 3, \dots, n+2)$.
 A toute permutation σ de $[n+2]$ ayant le maximum en position p , on associe la permutation $\tau = \sigma \circ \rho^p$, qui a le maximum en dernière position.
 Si $\sigma(1) = \sigma(n+2) + 1$, τ possède une succession de plus que σ , dont une en position $q = n+2 - p$. Le nombre de telles permutations τ avec $k+1$ successions est égal à $f_{n,k}$, d'après $H_6(n)$.

Si $\sigma(1) = \sigma(n+2) + 1$, τ a autant de successions que σ et n'en a pas en position q .
 Le nombre de telles permutations τ avec k successions est égal à $f_{n+1,k} - f_{n,k-1}$,
 d'après $H_4(n+1)$ et $H_6(n)$. ($H_4(n+1)$ est déjà démontré ci-dessus !).
 Le nombre total de permutations σ avec k successions est donc :

$$f_{n,k} + f_{n+1,k} - f_{n,k-1} = f_{n,k} + ns_{n,k} = s_{n+1,k}$$

Proposition 5 Soient k un entier de $[n-1]$ et p un entier de $[n+1]$
 Pour une permutation σ de $[n+2]$, possédant k points fixes et ayant le maximum en p , appelons x l'image de $n+2$.

Si $x=p$, il y a $f_{n,k}$ possibilités pour la restriction de σ à $[n+1]-\{p\}$, d'après $H_2(n)$.

Sinon il y a n façons de choisir x et dans chaque cas on supprime dans la représentation de σ , la colonne $\begin{pmatrix} p \\ n+2 \end{pmatrix}$ et l'on remplace, dans la deuxième ligne, p par $n+2$.

On obtient alors une permutation de $[n+2]-\{p\}$, qui possède k points fixes et où un élément donné, $(n+2)$, possède une image donnée, x , distincte : Ces permutations sont au nombre de $s_{n,k}$, d'après $H_5(n)$.

Le nombre total de possibilités pour σ est donc : $ns_{n,k} + f_{n,k} = s_{n+1,k}$

Proposition 6 Soient k un entier de $[n+1]$ et q un entier de $[n+2]$.

Soit σ une permutation, ayant le maximum en dernière position et possédant $k+1$ successions, dont une en position q . Soit x l'image de q par σ .

On peut coder une permutation en ne gardant que la deuxième ligne de la représentation.

On associe à σ la permutation τ de $[n+1]$, en supprimant dans la deuxième ligne $x+1$, (le terme numéro $q+1$), et en remplaçant tous les nombres $y > x$ par $y-1$.

Les permutations τ ont leur maximum en dernière position et possèdent k successions :

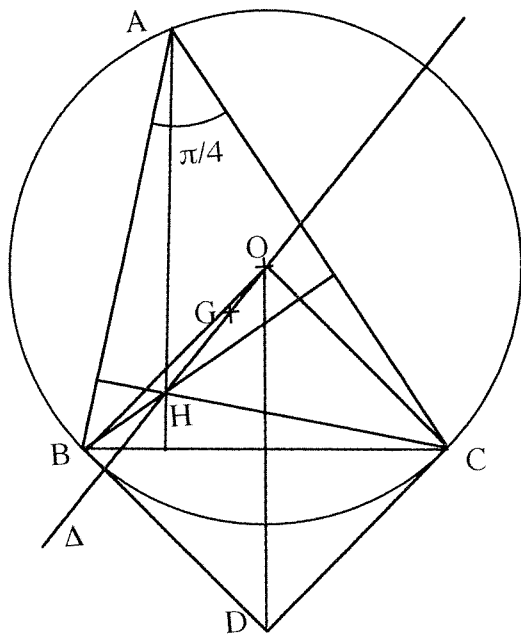
Leur nombre est : $f_{n+1,k}$, d'après $H_4(n+1)$. ($H_4(n+1)$ est déjà démontré ci-dessus !)

PROBLÈME 36

Énoncé (proposé par M. Emery)

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC . A quelle caractérisation angulaire du triangle correspond l'égalité entre longueurs : $AH = BC$?

Solution (proposée par F. Bonomi, professeur stagiaire de mathématiques au Lycée Marie Curie de Strasbourg). D'autres solutions ont également été fournies, entre autres par J. Dautrevaux, E. Kern et J. Lefort.



L'orthocentre H , le centre du cercle circonscrit O et le centre de gravité G du triangle ABC sont alignés sur la droite d'Euler Δ et vérifient la relation :

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

or, par définition du centre de gravité G , on obtient aisément la relation (bien connue) :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

puis

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$$

où D est le quatrième sommet du parallélogramme $COBD$.

Or, on sait que $OB = OC$, donc $COBD$ est un losange.

Par conséquent, si $AH = BC$, c'est-à-dire $OD = BC$, le quadrilatère $COBD$ est un carré. L'angle du centre BOC est alors droit et par suite l'angle inscrit BAC vaut $\pi/4$ ou $3\pi/4$...

PROBLÈME 37

Énoncé (proposé par D. Dumont)

Deux joueurs A et B retirent à tour de rôle des allumettes sur un tas d'allumettes, avec la règle que le premier joueur ne peut prendre le tas tout entier, et qu'ensuite chaque joueur peut prendre un nombre d'allumettes au plus égal au nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Est considéré comme vainqueur celui qui

ramasse la dernière allumette.

- a) Trouver la stratégie gagnante pour le joueur qui commence.
- b) On suppose qu'on modifie la règle en autorisant de prendre un nombre d'allumettes au plus égal à deux fois le nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Trouver la stratégie gagnante.

Indication. Dans le cas a) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas une puissance de 2.

Dans le cas b) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas un nombre de Fibonacci.

PROBLÈME 38

Énoncé (proposé par G. Kreweras)

De toute suite S d'entiers positifs on peut déduire une autre suite S' d'entiers positifs qui est celle des différences en valeurs absolues de termes consécutifs de S .

Partant d'une suite S_1 de n entiers, on obtient ainsi des suites S_2, S_3, \dots, S_n , dont chacune a un terme de moins que la précédente et qu'il est commode de disposer en un triangle, pointe en bas, la suite S_n se réduisant à un seul terme. Un tel triangle sera appelé "triangle de différences". Il sera dit *injectif* si tous les termes ont des valeurs distinctes, et *parfait* si ces valeurs constituent l'ensemble $\{1, 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\}$.

Voici deux exemples de triangles parfaits pour $n = 3$:

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 6 & 4 & & 6 & 1 & 4 \\
 & 5 & 2 & & 5 & 3 & \\
 & & 3 & & & 2 &
 \end{array}$$

Le problème est de trouver d'autres triangles parfaits. En existe-t-il pour toutes les valeurs de n ?

PROBLÈME 39

Énoncé (proposé par J. Lefort)

Soit p un entier tel que $p \geq 2$, et u^0 la suite des entiers naturels > 0 ($u_n^0 = n$).

On construit de proche en proche, pour $0 \leq i \leq p - 2$, les suites :

(v^i) , obtenue à partir de (u^i) en supprimant les termes qui sont de rangs multiples de $p - i$.

(u^{i+1}) , définie par $u_n^{i+1} = \sum_{j=1}^n v_j^i$.

Exemple : $p = 4$.

A VOS STYLOS

u^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
v^0	1	2	3		5	6	7		9	10	11		13	...
u^1	1	3	6		11	17	24		33	43	54		67	...
v^1	1	3			11	17			33	43			67	...
u^2	1	4			15	32			65	108			175	...
v^2	1				15				65				175	...
u^3	1				16				81				256	...

On remarque qu'on obtient ici la suite des puissances quatrièmes des entiers successifs.

Ce résultat se généralise-t-il à p quelconque?

PROBLÈME 40

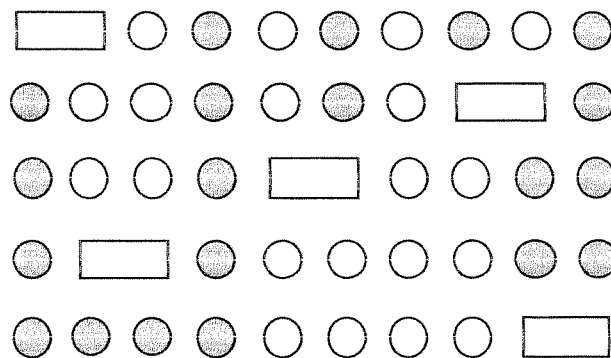
Énoncé (proposé par B. Kordiemsky) :

On place $2n$ jetons d'un jeu de dames, n blancs et n noirs, sur une ligne horizontale (on suppose $n \geq 3$) : d'abord deux espaces vides consécutifs, puis un blanc, un noir, un blanc, un noir, etc.

L'objectif est de parvenir à la disposition suivante : tous les noirs, puis tous les blancs, puis les deux espaces vides.

Pour cela, le seul type de mouvement autorisé est une translation de deux jetons consécutifs vers les deux espaces vides.

Peut-on y parvenir en n mouvements? La solution est-elle unique? Nous avons représenté ici une solution avec $n = 4$ en figurant les deux espaces vides par un rectangle.



PROBLÈME 41

Énoncé (proposé par J. Zeng) :

Dans ce qui suit, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial autrefois noté C_n^k .

1) Donner une expression de chacune des sommes suivantes à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{1} \binom{n}{1} = ?$$

$$\binom{n}{3} - \binom{n}{1} \binom{n}{2} - \binom{n}{2} \binom{n}{1} + \binom{n}{1} \binom{n}{1} \binom{n}{1} = ?$$

2) On appelle composition de l'entier p en k parts toute suite ordonnée $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ telle que $\forall i \ c_i \geq 1$, et $c_1 + c_2 + \dots + c_k = p$.

On note $C(p, k)$ l'ensemble des compositions c de ce type, et on pose

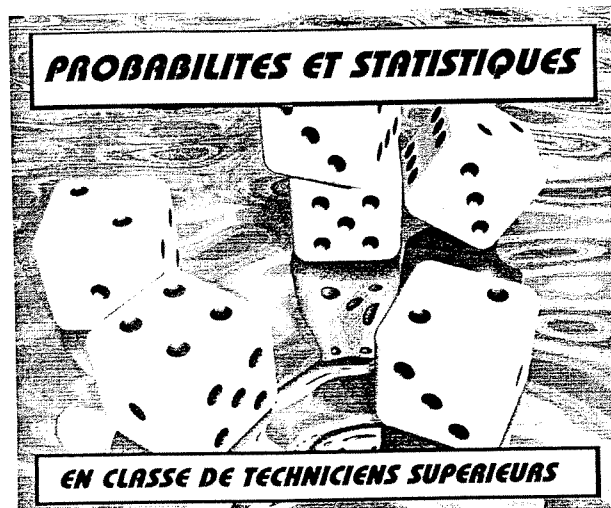
$$S(n, p, k) = \sum_{c \in C(p, k)} \binom{n}{c_1} \binom{n}{c_2} \cdots \binom{n}{c_k}$$

Donner une expression de la somme suivante à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{k-1} S(n, p, k).$$

Remarque.— L'auteur du problème propose encore une généralisation de ce résultat, qui sera soumise aux lecteurs de notre rubrique en fonction de l'intérêt suscité par ces deux premières questions.

NOUVELLE BROCHURE :



Auteurs : Claire DUPUIS, Mohamed ATLAGH, André BASTIAN,
Bernard GOESEL, Christiane HEUSCH, Bernard KOCH,
Dominique PERNOUX, Suzette ROUSSET-BERT.

Editeur : I.R.E.M. de Strasbourg (S. 167)

ISBN : 2-911446-03-8

Résumé : Cette brochure est un recueil de différents documents sur des parties qui nous ont semblé délicates dans l'enseignement des probabilités en classe de techniciens supérieurs, à savoir :

- Opérations sur les variables aléatoires
- Variable aléatoire continue
- Diverses approximations de la loi binomiale
- Processus de Poisson
- Caractère universel de la loi normale, théorie des erreurs, théorème de la limite centrée
- Echantillonnage
- Petit herbier de lois
- Estimation ponctuelle, estimation par intervalle
- Fiabilité

Pour chacun des thèmes abordés, nous avons précisé s'il s'agit d'un document pour l'élève, pour l'enseignant ou pour l'élève avec des compléments pour les enseignants.

Prix de vente : 55 F (+ 20 F de frais de port).