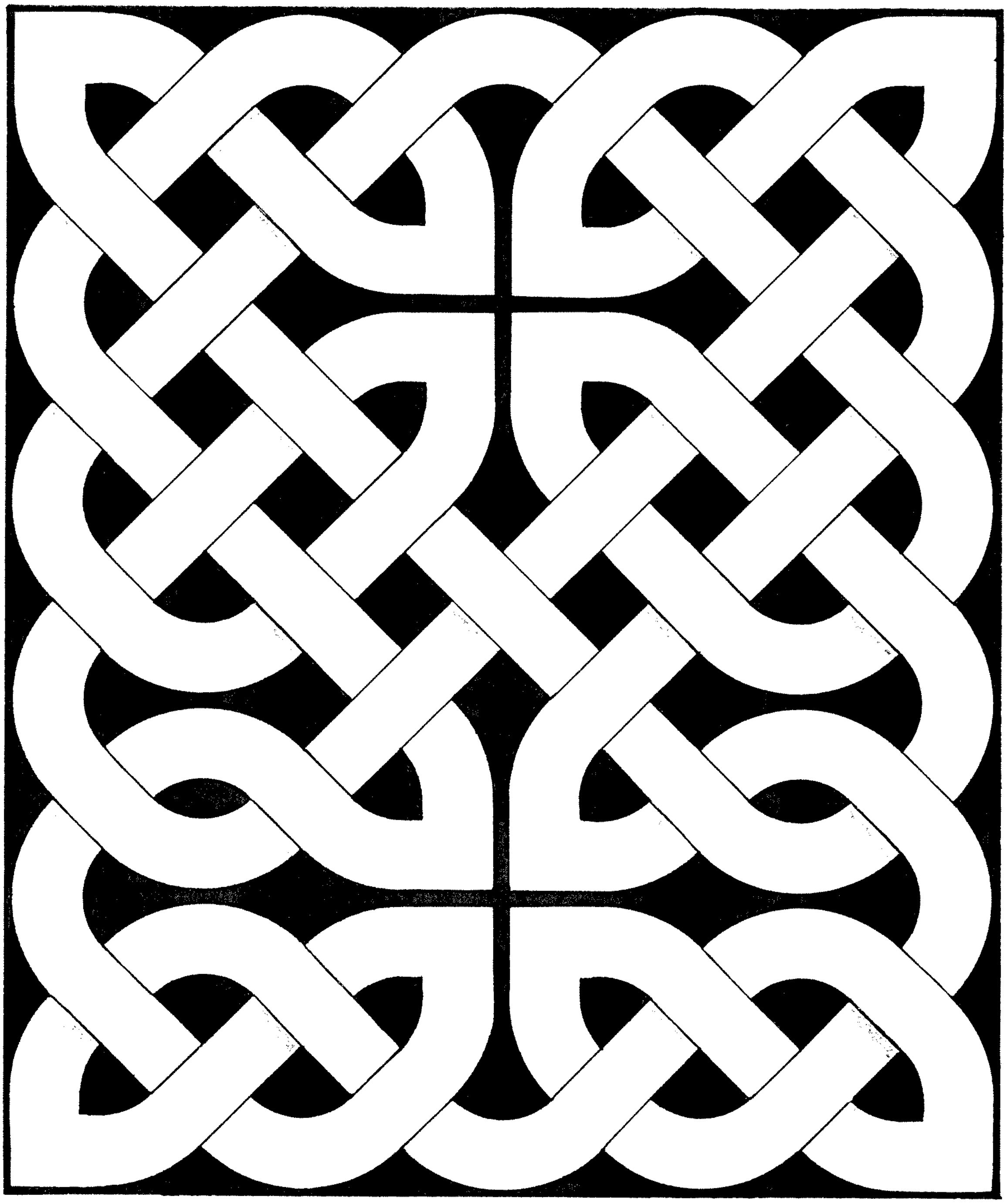
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 84 – SEPTEMBRE 1996 I.S.S.N. 0290 - 0068



ego sum

NOTRE COUVERTURE :

Notre couverture illustre le texte de Christian Mercat "Théorie des nœuds et enluminure celte ". Elle reproduit une enluminure créée par Francis Dufourcq-Lagelouse, élève du **Centre National de Calligraphie** (3, rue Calmette, 37540 SAINT CYR SUR LOIRE, Tél. : 47 41 75 21) de Tours. Cette école forme des amateurs et des professionnels artisans calligraphes au cours de nombreux stages, séminaires et scriptoria hebdomadaires. La formation aborde la gestique, les calligraphies latines (anglaise, caroline, gothique ou chancellère), mais aussi les calligraphies chinoise et arabe, ainsi que l'enluminure et sa grammaire graphique. N'hésitez pas à les contacter pour participer à des stages ou leur demander des adresses de professionnels pour vos travaux d'écriture (faire-parts, cartes de vœux, etc...).

L'enluminure celte n'est pas une création artistique autonome, comme son nom l'indique, elle est sensée *enluminer* un texte calligraphié et plus qu'*enjoliver*, ce terme veut dire *mettre en lumière*. Il y avait donc toujours, au Moyen-Age, une relation entre le contenu du texte et le tracé de l'entrelacs. Les thèmes qui se prêtent le plus aisément à un traitement graphique immédiatement lisible sont *l'unité dans la trinité*, la lutte incessante et indémélable *du bien et du mal*, et bien sûr, les voies impénétrables du Seigneur qui tissent *le parcours tortueux* de nos vies.

Pour cette couverture, l'artiste a illustré le texte "Ego sum initium et finis", ce qui veut dire "Je suis le début et la fin" ; le moine en lecture aura loisir de méditer en suivant du regard le trajet du nœud, s'apercevant qu'il n'y a ni début ni fin mais que tout point peut pêtre pris comme un début ou une fin, le mystère de la création et de l'annihilation étant présent à tout moment sur notre parcours.

initium
et finis

EDITORIAL

Aujourd'hui, '*L'Ouvert*' a pour sous-titre JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG...
A ses débuts, la "bande aux Jean(s)" (Lefort et Samson) pour ne pas les nommer...) avait mis comme sous-titre ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE DE LA REGIONALE A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG... et '*L'Ouvert*' était alors envoyé gratuitement aux membres de notre régionale.

Mais au fait, peut-être faut-il rappeler que le sigle A.P.M.E.P. signifie Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public? Que cette dernière a largement contribué à la création des I.R.E.M. (les "soixantes-huitards" s'en souviennent certainement...)? Que par voie de conséquence adhérer à l'A.P.M.E.P. est un bon moyen pour défendre et assurer l'existence de ceux-ci... et qu'une association n'a d'existence que par le dynamisme dont elle fait preuve et notamment par le nombre d'adhérents qu'elle représente!
L'A.P.M.E.P. est en effet une association et comme toute association, elle a un président élu (le plus souvent pour un ou deux ans)... et c'est en tant que président nouvellement élu que je me permets de m'adresser en premier lieu à ceux d'entre vous qui n'êtes pas encore, ou n'êtes plus, adhérents : l'A.P.M.E.P. a besoin de vous aujourd'hui plus que jamais pour défendre les mathématiques et notre enseignement. Aux autres, qu'ils "n'oublient" pas de réadhérer... et qu'ils motivent leurs collègues à nous rejoindre.

Je voudrais aussi réaffirmer la vocation première de '*L'Ouvert*', à savoir : être un organe d'information et d'échange. Ne péchez pas par excès de modestie, n'hésitez pas à envoyer des articles ou toute autre production à l''*L'Ouvert*'.

A tous j'aimerais communiquer un peu du *ki* (du japonais : *énergie interne, force vitale*) qui habite chacun de nous. Venez renforcer les équipes régionales et nationales, desquelles tout devrait émerger : il y va de la vitalité de l'A.P.M.E.P. et de '*L'Ouvert*' !

Enfin et surtout je voudrais dire combien je suis redevable aux collègues que j'ai eu la chance de rencontrer à l'I.R.E.M. de Strasbourg et à l'A.P.M.E.P., véritables lieux d'échanges et d'informations, mais aussi de formation.

En espérant pouvoir compter sur le soutien et le dynamisme de tous tant au niveau national qu'au sein de notre régionale, je vous souhaite une excellente rentrée 96!

Jean-Pierre RICHETON.
Président de l'A.P.M.E.P.

SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 84 – SEPTEMBRE 1996

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
◇ Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 35.– F

Théorie des nœuds et enluminure celte

Christian Mercat

Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Paris

Allocataire Moniteur Normalien à l'Université Louis Pasteur

Cet article est dédié à mon directeur de thèse, Daniel Bennequin qui m'a initié au monde fabuleux des mathématiques et continue à m'y guider.

1. Introduction

La théorie des nœuds a connu un grand essor à la fin des années 80, les polynômes de Kaufmann et de Jones ont été largement décrits dans la presse grand public et ont initié une période très féconde en mathématique. Nous avons l'honneur de compter parmi les professeurs strasbourgeois une des sommités de ce domaine, Vladimir Turaev (voir son article dans *l'Ouvert* n°66, mars 1992) dont j'ai eu le plaisir de suivre l'enseignement lors d'un cours qu'il donnait conjointement avec Christian Kassel en 1993.

Ce dont je vais vous parler, bien qu'ayant trait aux nœuds et entrelacs remonte à bien plus longtemps que cette théorie, à la civilisation celte qui, déjà au IVème siècle avant Jésus-Christ, dressait des menhirs sculptés de motifs d'entrelacs. Vers le VIème siècle, les moines irlandais qui copient inlassablement la Bible, christiannisent ces motifs et les incorporent en tant qu'enluminures dans leurs pages de calligraphie. Les motifs torturés et savants des casques saxons et des fibules celtes cèdent la place à de grandes frises sévères et serrées. Cette technique aura ses chefs d'œuvres, en particulier les Bibles enluminées de Kells (XIIème), de Durrow ou de Lindisfarne. C'est à Dublin, dans la magnifique bibliothèque de Trinity College que j'ai eu le plaisir de contempler les deux premiers, mais là où le profane ne voit que des formes très compliquées et très belles, l'initié que j'étais, ajoutant à leur splendeur graphique une beauté d'un autre ordre, perçut le schéma directeur de leur organisation.

Je suis tombé sous le charme de ces motifs, et me suis mis à traquer la bibliographie les concernant, dessiner des motifs originaux, créer des bijoux et des objets à partir de cette technique. Assez prosélyte dans ma passion, j'ai donné deux séries de cours d'enluminure dans l'école internationale de calligraphie de St Cyr sur Loire, en 1994 et 1996. Je remercie Richard Forestier, Chantale Facchinetti et Agnès Forestier d'avoir eu la gentillesse et la patience de m'y acceuillir.

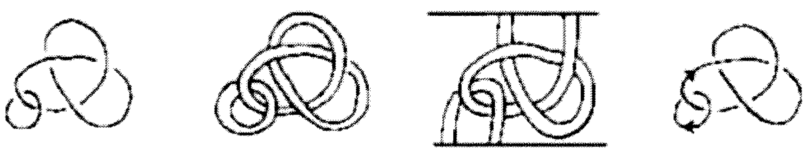
Mon intérêt artistique s'est doublé d'un travail théorique et le cœur de ma thèse de mathématiques repose sur cette technique, qui si elle n'est pas nouvelle mathématiquement, me semble sous-exploitée ; j'espère par cet article vous y initier et en tout cas vous communiquer mon plaisir à dessiner ces motifs captivants.

2. Un peu de théorie

Les entrelacs

Les objets

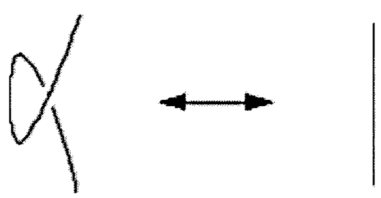
Un nœud est ce qu'on peut réaliser avec une corde qu'on emmêle et dont on soude les deux bouts à la fin, puis qu'on s'autorise à déformer à loisir, c'est à dire un plongement d'un cercle dans l'espace. Un entrelacs est ce qu'on obtient quand on laisse plusieurs personnes jouer à ce jeu dans un endroit exigu. Un nœud est donc un entrelacs à une seule composante. Si vous voulez représenter un entrelacs, vous étalez les cordes par terre en n'autorisant que des croisements de deux cordes pas plus et vous dessinez le tout en notant soigneusement à chaque croisement qui est "au dessus" et qui est "en dessous". C'est à dire qu'on réalise une projection régulière sur le plan de l'entrelacs; le dessin est un graphe sur le plan avec quatre arêtes à chaque sommet (un graphe planaire tétravalent) où on indique l'information des dessus-dessous en arrêtant le trait qui passe en dessous just'avant d'arriver au sommet. On peut enrichir la structure, épaissir un peu le dessin et considérer des entrelacs rubannés où les cordes sont remplacées par des rubans, orienter chaque nœud, ne pas les fermer tous et maintenir leur extrémité fixe, on parle alors d'enchevètrement, ou bien encore attacher une étiquette ou une couleur à chaque nœud ou à chaque croisement...



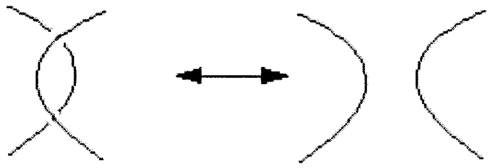
Les mouvements de Reidemeister

Il existe plusieurs projections régulières d'un même entrelacs mais on peut toujours passer de l'une à l'autre par une série de mouvements, visiblement nécessaires mais qui sont aussi suffisants, les mouvements de Reidemeister :

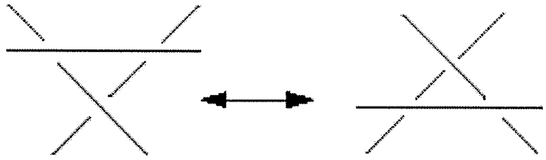
I :



II :



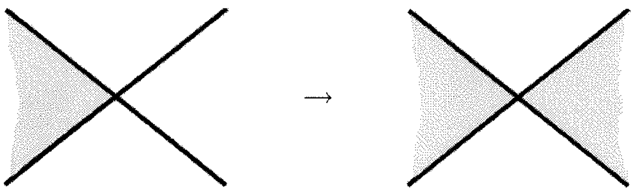
III :



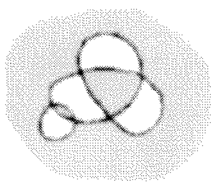
Cependant, il est difficile pratiquement de déterminer si deux projections se rapportent au même entrelacs.

Les graphes

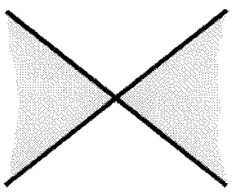
Quand on considère un dessin en un seul morceau, c'est à dire une projection régulière connexe, il partitionne le plan en plusieurs zones, les croisements, les arêtes reliant les sommets (sauf pour un bête cercle, c'est à dire le nœud trivial) et des zones qui ressemblent à des disques, des cellules de dimension deux. Une seule zone ne ressemble pas à un disque, la grande zone qui va jusqu'à l'infini. Colorions cette grande zone en noir. Décidons à chaque sommet qui est sur le bord d'une cellule noire, d'étendre la couleur noire à la cellule opposée et ainsi de suite.



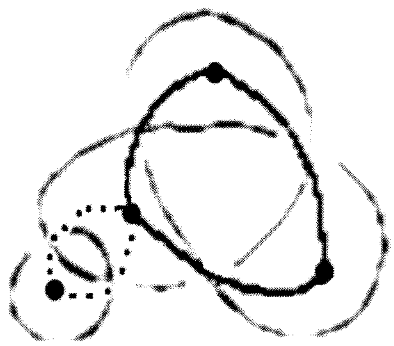
On obtient ainsi une partition en zones blanches et noires :



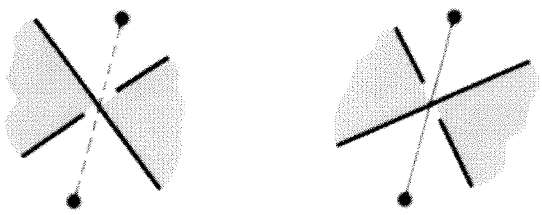
Les cellules de dimension deux se répartissent alors en blanches et noires et il est facile de voir que cela fait un damier où chaque croisement a l'allure suivante :



On code cette décomposition dans un graphe planaire à arêtes signées en attribuant un sommet à chaque cellule blanche et en tirant une arête entre deux cellules au dessus de chaque croisement qui les fait intervenir.



On signe ensuite cette arête en fonction de la situation des dessus-dessous : un signe $+$ si le brin qui passe au-dessus vient de la gauche quand on se place dans une cellule blanche, un signe $-$ sinon. On peut représenter graphiquement le signe d'une arête en tiretant si le signe est $-$ et en laissant le trait plein sinon.



Cette donnée code parfaitement la projection régulière de l'entrelacs et il y a bijection entre les projections planes des entrelacs et ces graphes planaires à arêtes signées.

Par contre, si on se place dans la sphère de dimension trois (on rajoute un point à l'infini à notre espace habituel) et qu'on projette sur la sphère (la "vraie", celle de dimension deux), la correspondance n'est pas biunivoque : deux graphes planaires à arêtes signées codent la même projection, quel est le deuxième? C'est le graphe dual qu'on aurait obtenu en plaçant les sommets non pas au centre des cellules blanches, mais des cellules noires. Ils sont duaux dans le sens que des notions de dimension k sont remplacées par des notions de dimension $2-k$, à chaque arête de l'un correspond une arête de l'autre, qui la coupe en un seul point et son signe est opposé, à chaque sommet de l'un correspond une face de l'autre et réciproquement. La situation est plus symétrique que dans le cas du plan, la zone contenant l'infini n'existe plus et aucune zone n'est distinguée des autres,la dualité apparait.

3. Dessiner

Introduction

Les celtes ne connaissaient pas les mouvements de Reidemeister, ni les graphes planaires à arêtes signées, pourtant ils se débrouillaient très bien. En fait, en regardant de près des originaux du moyen-âge, on reconnait des traits de construction qui mettent en place une structure un peu similaire, les points qui semblent avoir guidé les moines irlandais sont ceux que je considère comme les sommets du graphe et de son graphe dual. Mais les motifs qu'ils réussissaient à construire ainsi sont relativement pauvres vis à vis des motifs plus anciens gravés sur les menhirs. Il existait sûrement des méthodes aussi efficaces que celle que je décris mais leur secret appartient au passé.

Après les moines irlandais, la technique a l'air de se perdre car les quelques rares motifs européens qu'on retrouve semblent être des copies et des juxtapositions de créations irlandaises. A la renaissance, Léonard de Vinci et Dürer font quelques dessins d'entrelacs mais les appellent humblement concaténation, prouvant qu'aucun schéma général ne les a conduit. Peu de livres traitent du sujet et tous ceux qui tentent de décrire des méthodes de construction échouent à unifier tous les aspects, certains traitant des entrelacs sur un réseau carré, d'autres triangulaires, d'autres sur un cercle... Pourtant, hors de la sphère occidentale, les Arabes maîtrisent depuis toujours semble-t'il la construction des entrelacs les plus sophistiqués, qu'ils traitent en pavages de céramique ou en enluminure de textes sacrés, certaines étant de même allure que les enluminures celtes mais la plupart étant beaucoup plus compliquées. Cependant, j'ai cherché vainement une traduction de traités décrivant leurs méthodes.

Je ne veux pas mésestimer le travail admirable de J. Romilly Allen ou de George Bain, qui a passé sa vie à répertorier les entrelacs celtes, compilant ses résultats dans un très beau livre, ou bien les manuels de dessins d'Aidan Meehan, Andy Sloss ou Iain Bain (le fils du premier), mais leurs techniques ne décrivent que certains types de nœuds seulement, les frises carrées en particulier. Cependant, vous y trouverez d'autres motifs celtes que les entrelacs, ils prennent trois autres formes, les labyrinthes, les spirales et les animaux, et je ne connais pas les méthodes pour les construire.

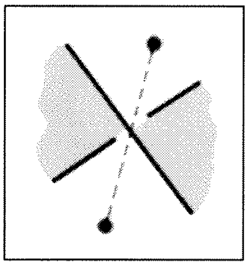
La méthode

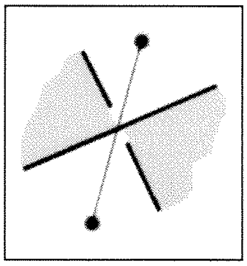
Un entrelacs a l'air très compliqué alors qu'un graphe planaire est un objet combinatoire assez simple, facile à reproduire et à créer. La méthode reprend donc en sens inverse la construction qui associe à un entrelacs un graphe planaire à arêtes signées.

Nous allons d'abord expliquer, étant donné un graphe, comment retrouver l'entrelacs associé, l'étape de la reproduction, puis nous verrons comment composer un graphe qui donne un bel entrelacs, ce sera l'étape de la création.

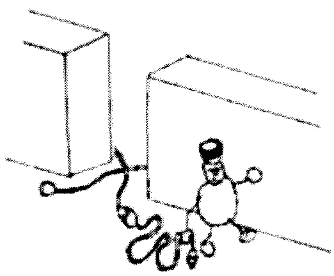
Il suffit, pour construire un entrelacs associé à un graphe, de placer sur chaque arête signée le dessin qui lui correspond, un croisement de deux brins, bien au milieu de l'arête, avec les dessus-dessous qui correspondent à son signe.

Je vous conseille pour cela de faire sur un petit carré de papier découpé le dessin correspondant à une arête + et le dessin correspondant à une arête −, et d'aligner ce petit dessin parrallèlement à l'arête sur laquelle vous travaillez et de recopier le dessin trait pour trait. Cela peut paraître enfantin à première vue mais réussir à dessiner l'image d'un croisement par une rotation n'est pas une chose aisée.



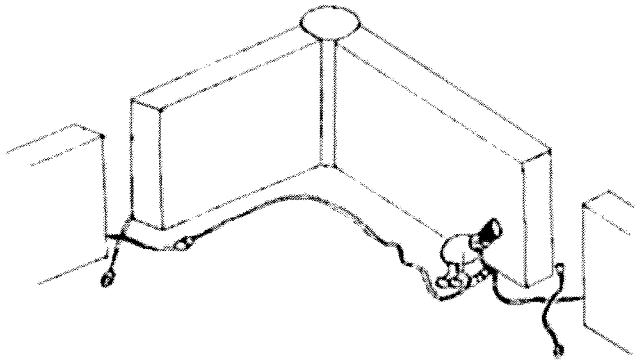


Ensuite il s'agit de relier entre eux les bouts des brins. Imaginez vous chaque arête comme un mur, percé d'une porte au beau milieu de l'arête et placez vous par la pensée sur la feuille de papier, le long d'une arête, au niveau de la porte et regardant vers un des deux bouts du mur, disons par exemple que vous touchez le mur avec votre main gauche, la droite tenant le bout du brin qui a participé au croisement au milieu de l'arête.



Marchez le long du mur, comme dans un labyrinthe, en gardant la main gauche sur le mur. A un moment, vous tournez un coin, c'est le bout de l'arête, vous reprenez le long d'un autre mur, toujours à votre main gauche.

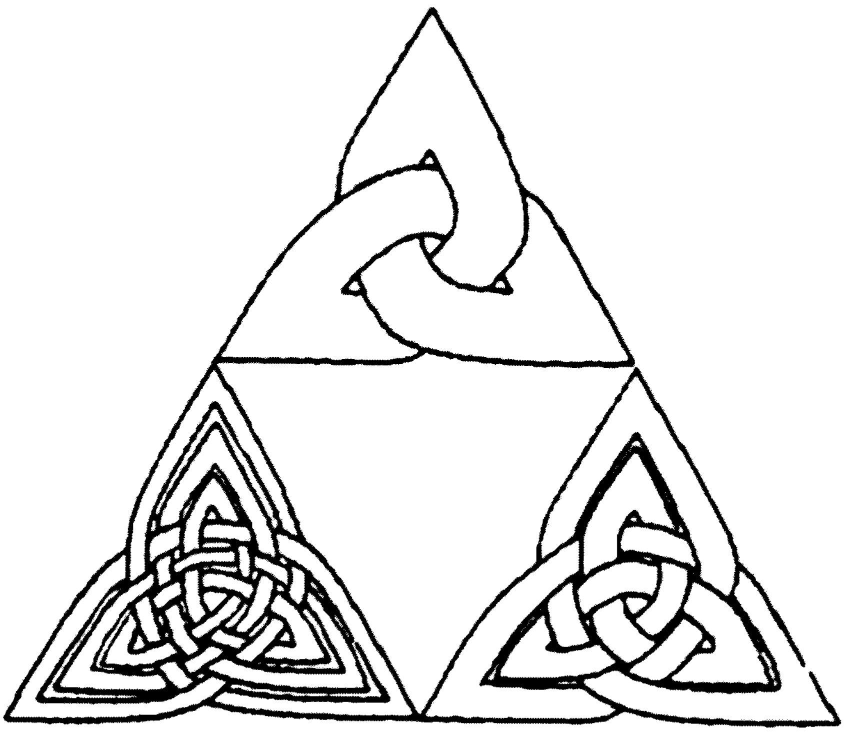
Vous continuez et vous arrivez finalement au milieu de cette arête, là où un autre croisement a eu lieu. Par terre gisent quatre bouts de brins, raccordez le vôtre à celui des quatre qui est dirigé vers vous.



Passez la porte, tournez à droite, prenez l'autre bout du brin dans votre main gauche, gardez le mur à votre main droite et c'est reparti! Continuez pour tous les brins jusqu'à ce que tous soient raccordés.

Cosmétique

Si vous êtes parti d'un beau graphe tout propre, celà doit normalement vous donner un dessin hésitant, très sale, plein de ratures, de traits mal gommés, biffés et tous de la même couleur, très loin du dessin suivant.

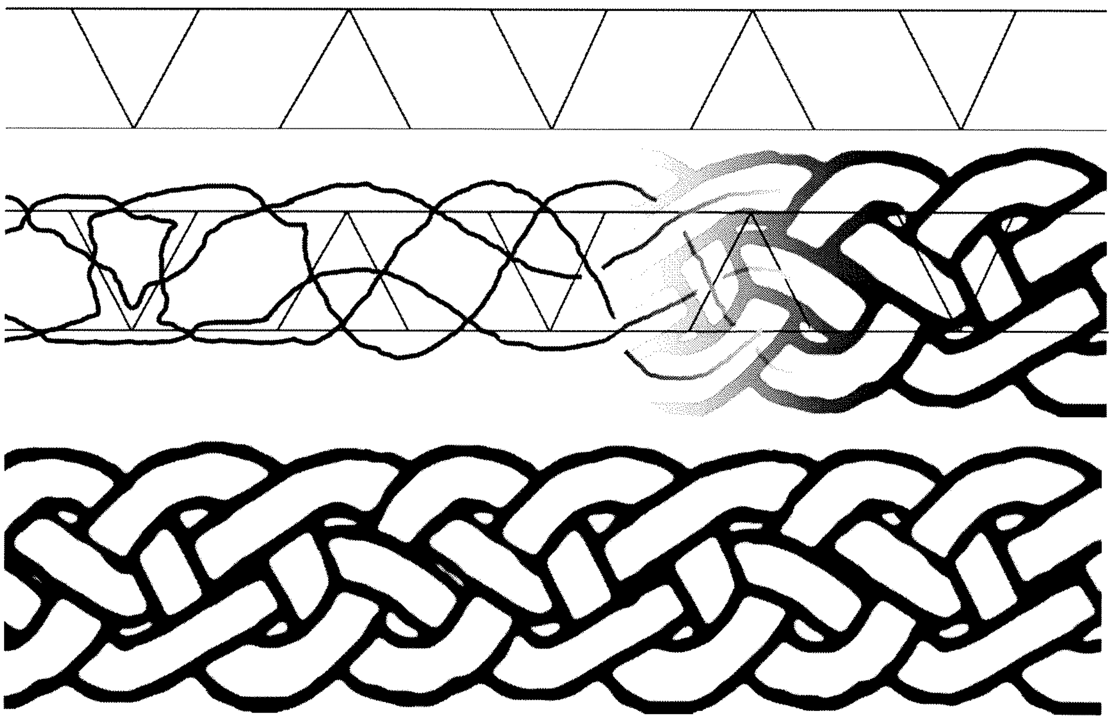


En premier lieu, adoptez des mines différentes pour le tracé du graphe et le tracé de l'entrelacs proprement dit.

Faites d'abord une ébauche de l'entrelacs en tirant la langue et en appliquant la méthode rigoureusement sans tricher. Puis prenez de la distance et rectifiez le trajet cahotique de chaque brin en une belle courbe sinueuse en tenant compte de la direction générale du brin. Vous pouvez très bien ne pas vous soucier des dessus-dessous pour l'instant, mais plutôt du trajet de chaque brin.

Après avoir repris chaque croisement pour bien décider des dessus-dessous, prenez chaque brin et considérez son nœud non plus comme une corde mais comme un pneu et gonflez le, laissez chacun prendre plus de place.

A ce stade, je vous propose de vous faire la main sur une frise simple qui s'appuie sur un réseau triangulaire dont on a effacé une arète tous les pas et demi : recopiez le graphe sur une feuille et suivez les quatre étapes suggérées sur la deuxième ligne.

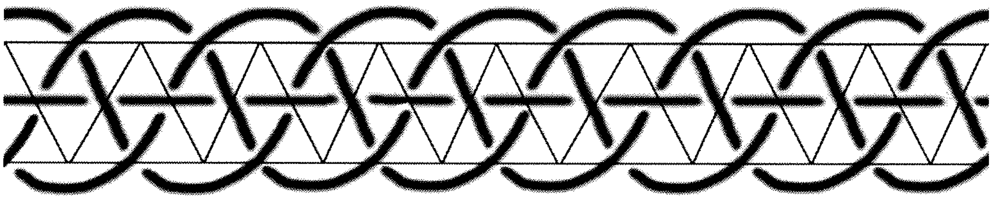


Sur la deuxième ligne, j'ai commencé par appliquer la méthode à la lettre, sans souci de l'aspect esthétique, celà donne plein de coins, de traits hésitants, et les dessus-dessous ne sont pas indiqués; puis les traits sont peu à peu épurés et leur trajectoire est rectifiée; puis les dessus-dessous sont représentés et finalement les brins sont épaissis.

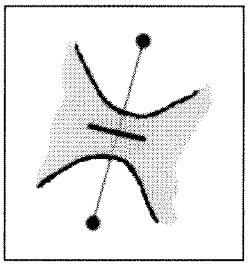
Il est clair que ces étapes, présentées juxtaposées, se passent en réalité successivement, au même endroit, à grand renfort de gomme et de jurons. Un des problèmes principaux est que, quand on gomme le tracé d'un brin, on gomme le graphe qu'il y a dessous, pourtant, celui-ci est un guide jusqu'à la fin et c'est une erreur de croire qu'on peut s'en passer dès que la vision de la trajectoire de l'entrelacs est claire. Il faut donc, soit retracer le graphe après chaque coup de gomme, soit, pour une étude préparatoire, dessiner sur une face d'un papier calque et faire les traits de construction sur l'autre face.

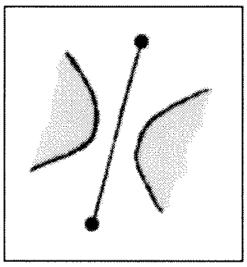
Les murs

Comparez cette tresse à celle obtenue sur la frise triangulaire ou aucune arête ne manque :

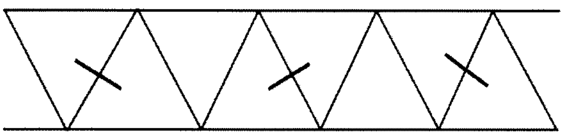


Vous voyez que l'omission d'une arête change assez radicalement le résultat. Vous pouvez aussi observer qu'omettre une arête sur un graphe revient à souder deux sommets dans son graphe dual. Mais si effacer une arête est facile à représenter graphiquement, souder deux sommets l'est un peu moins. Nous prendrons la convention, quand on perturbe un graphe en omettant une arête ou, dualement, en soudant deux sommets, de dessiner le graphe inchangé, mais de mettre un trait gras en travers si on efface l'arête et de dessiner l'arête elle-même en gras si on identifie ses extrémités.

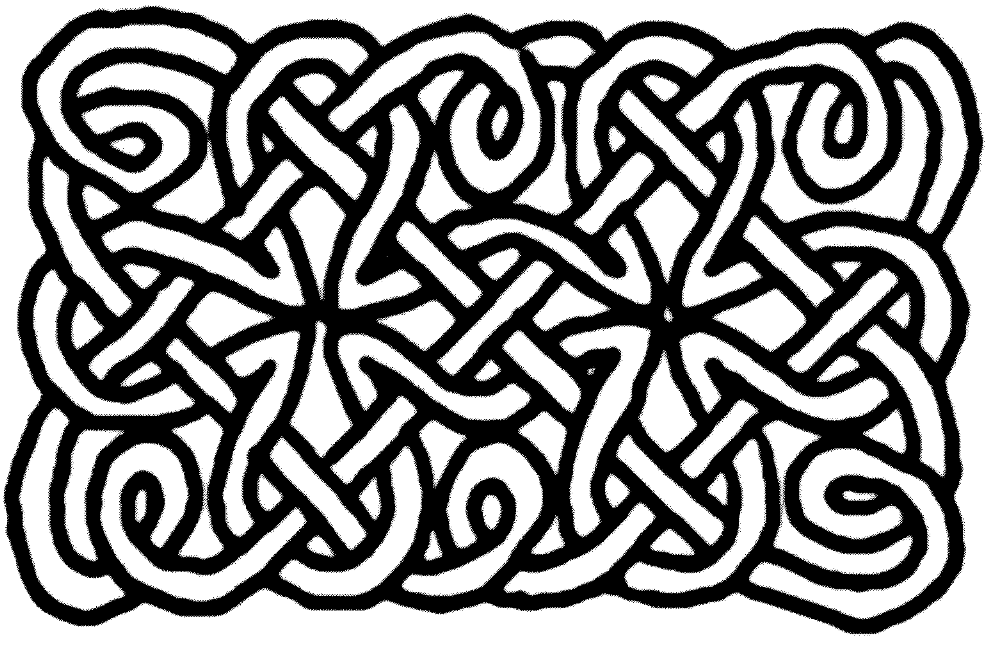




La tresse triangulaire proposée en exercice est ainsi associée au graphe triangulaire avec un mur transversal toutes les trois arêtes :



Cette manière de dessiner permet de simplifier la représentation graphique du graphe sous-jacent mais aide aussi à la construction de l'entrelacs : le trait en gras, qu'il soit longitudinal ou transverse doit être compris comme un **mur** sur lequel **rebondissent** les brins des nœuds au lieu de se croiser au milieu de l'arête. Il y a maintenant quatre types d'arêtes, les +, les −, les défauts longitudinaux et les défauts transverses. Pour reprendre l'expérience de pensée, un mur longitudinal revient à fermer la porte du milieu de l'arête, un mur transverse revient à casser cette arête. Vous êtes capables de faire la plupart des exercices proposés en Annexe.



Création

Introduction

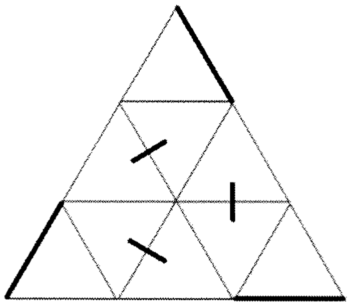
Construisez un graphe planaire à arêtes signées quelconque, avec relativement peu, disons six ou huit sommets et une dizaine à une quinzaine d'arêtes, saupoudrez de signes (les mêmes signes partout, c'est souvent le plus joli), de murs longitudinaux et de murs transverses (pas trop), affutez votre crayon et allez-y.

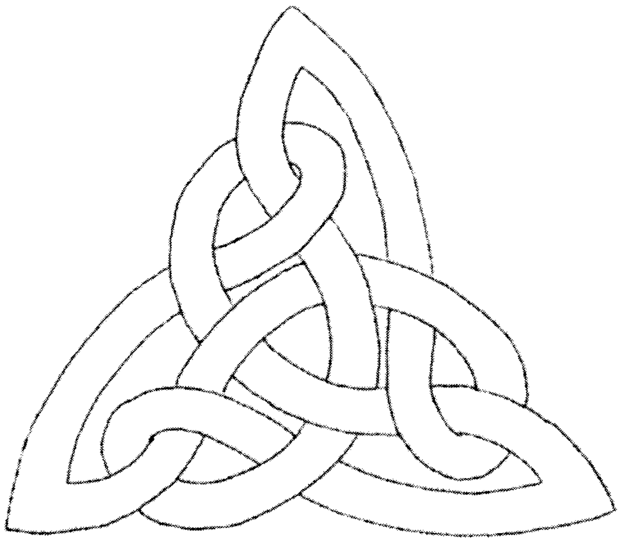
Vous pouvez parfois trouver le résultat, quoique relativement satisfaisant, peu harmonieux, en particulier si le graphe sous-jacent contient des arêtes d'échelles de longueur trop différentes, il y a de grandes zones toutes vides et des endroits surchargés et confus où les rubans sont lamentablement tassés les uns contre les autres. Et plus que tout, vous n'avez aucun contrôle sur le produit fini, vous êtes même très étonné que ça ait cette allure (n'est-ce pas?).

Il existe en fait quelques règles simples et des guides qui donnent à coup sûr un bel entrelacs, la première est de partir d'un réseau qu'on perturbe, la deuxième, quand on est déjà confiant consiste à créer un graphe de plus en plus grand autour d'un centre, la troisième, pour les spécialistes que vous allez bientôt être est nécessaire pour construire de grandes réalisations et repose sur la "mise en boîte" des motifs.

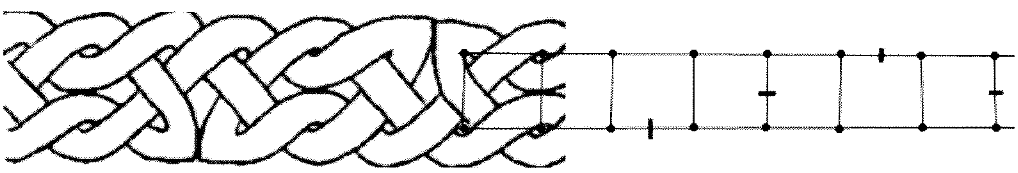
Sur réseau

Le plus simple pour avoir un graphe équilibré est de partir d'un bout d'un réseau standard, et de n'agir qu'en saupoudrant de manière "appropriée" des défauts. Les réseaux simples sont le réseau carré, le réseau triangulaire et son dual le réseau hexagonal (on l'obtient à partir d'un réseau triangulaire dont on enlève les arêtes participant à certains sommets). "Appropriée" veut souvent dire assez symétrique et souvent périodique.



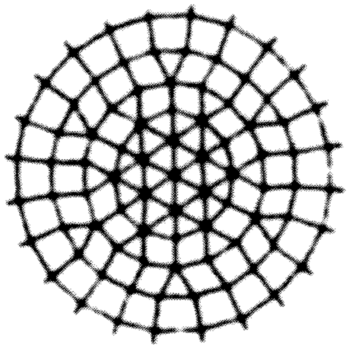


Le plus payant pour débuter est de s'attaquer aux frises, et les plus simples sont les carrées. Dessinez une quinzaine de carrés alignés, comme une échelle ou une ligne de chemin de fer. Distribuez deux ou trois murs et répétez les comme vous voulez, en faisant une série de réflexions, de translations ou de symétries centrales. Ça ne peut pas rater, c'est superbe.



Essayez ensuite avec une série de deux carrés superposés, ou une frise à base de triangles ou d'hexagones...

Vous pouvez ensuite déformer vos frises pour les mettre sur un cercle, si son rayon n'est pas trop petit, le motif n'est pas trop déformé. Par contre, pour des cercles allant du centre jusqu'à des rayons de vingt fois la maille, il se pose un problème, comment réduire? On ne peut pas bêtement garder autant de secteurs quand on diminue le rayon, il faut en oublier quelques uns. On peut soit séparer assez nettement les différentes zones dans lesquels le rayon ne varie pas trop, en mettant des murs qui font presque toute une circonférence, soit fusionner des arêtes comme dans cet exemple :



C'est peu ou prou la technique des moines irlandais. Celà permet déjà une très grande diversité. Mais il ne faut pas en rester là! Essentiellement deux manières de construire un graphe apparraissent à mon sens, une ou l'on fait croître un graphe à partir d'un centre, sans trop contrôler l'espace que le motif va occuper, ce que j'appelle **vers l'extérieur** et une autre où l'on fixe **d'abord** la zone que va occuper le motif puis en construisant le graphe **à l'intérieur** de celle-ci.

Vers l'extérieur

Cette méthode est faite pour créer de petits motifs à main levée, très libres, sans la contrainte d'un réseau; elle est plus rapide et moins contraignante que la troisième méthode qui permet un résultat soigné et une grande cohérence de l'ensemble. Mais nous verrons qu'elles fonctionnent en synergie.

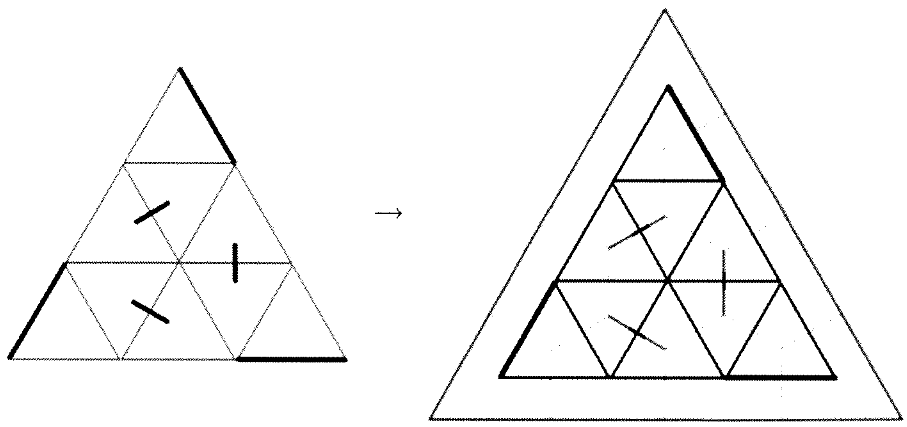
Pour commencer, il faut faire un petit graphe vraiment quelconque, avec relativement peu d'éléments, disons six ou sept sommets et une dizaine d'arêtes, de longueurs semblables (que la plus grande ne soit pas le double de la plus petite). Tâchez de répartir équitablement les sommets, par exemple en vous imaginant que les arêtes sont des ressorts de même raideur et de même longeur à vide. Tirez la langue et appliquez vous à faire émerger votre entrelacs de cette structure. Ça n'ira pas du premier coup, il faudra réajuster la position des différents sommets, la longueur des arêtes, une subtile alchimie dont je ne connais pas le menu. Quand les courbures des brins sont bien réparties, jugez votre création. Si elle vous déplait, jetez la ou modifiez la localement, sinon, notez soigneusement le motif quelque part, il vous resservira pour une création de plus grande ampleur.

Quand vous avez plusieurs motifs qui vous plaisent, il est vraiment très simple de les assembler pour en faire un plus grand, il suffit de dessiner les deux graphes à la même échelle, assez proches l'un de l'autre, à une distance égale à la longueur moyenne des arêtes, et de rajouter quelques arêtes allant d'un sommet d'un graphe à un sommet de l'autre. N'ajoutez qu'une, deux ou trois arêtes, sinon les motifs de départ ne seront plus reconnaissables, il faut les fusionner juste assez pour qu'ils s'unissent sans perdre leur individualité.

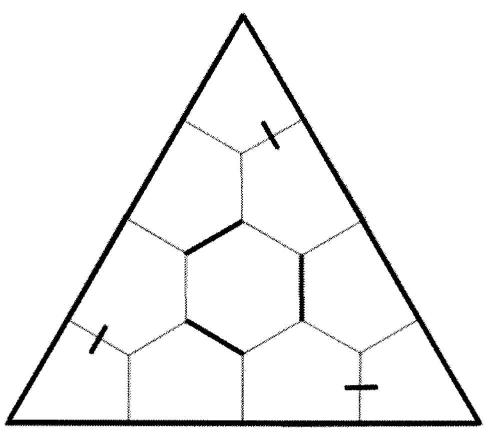
Encapsulation

Pour rendre assez automatique ce processus, il est pratique de "mettre en boîte", d'encapsuler votre motif, c'est à dire de tracer un polygône autour de l'entrelacs. Les plus futés auront déjà compris qu'il est alors plus naturel de considérer le graphe dual de celui à partir duquel vous avez construit votre entrelacs : prenez un crayon d'une autre couleur, placez vous sur le polygône près d'un croisement, dessinez un point et tracez une arête au-dessus du croisement, coupant transversalement l'arête de votre graphe primitif et faites la atterir au centre de la face de l'autre côté de celle-ci. Placez-y un sommet. Continuez de proche en proche, placez de nouveaux points sur le polygône, jusqu'à ce qu'à chaque croisement de l'entrelacs corresponde une nouvelle arête. Vous avez construit le graphe dual de votre graphe de départ. N'hésitez pas à mettre plusieurs sommets dans la même face si elle est étendue, vous les fusionnerez en un seul en les rejoignant par un mur longitudinal. De même, si votre graphe de départ contenait des arêtes avec des défauts, faites figurer l'arête duale, si c'était un défaut longitudinal, la nouvelle porte un défaut transverse et vice-versa.

L'encapsulation du motif précédent, bâti sur un réseau triangulaire, donne par exemple un graphe porté par un réseau hexagonal :

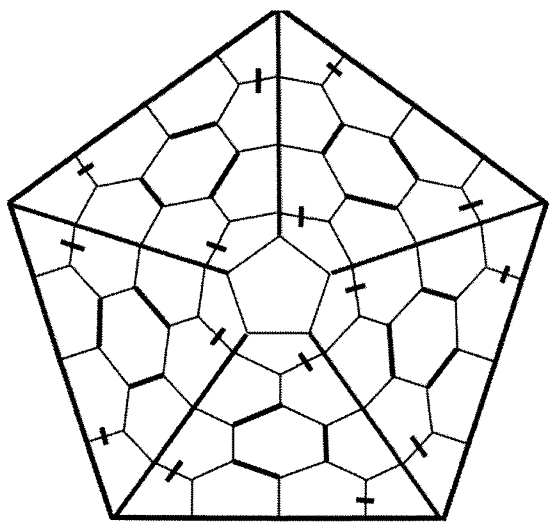


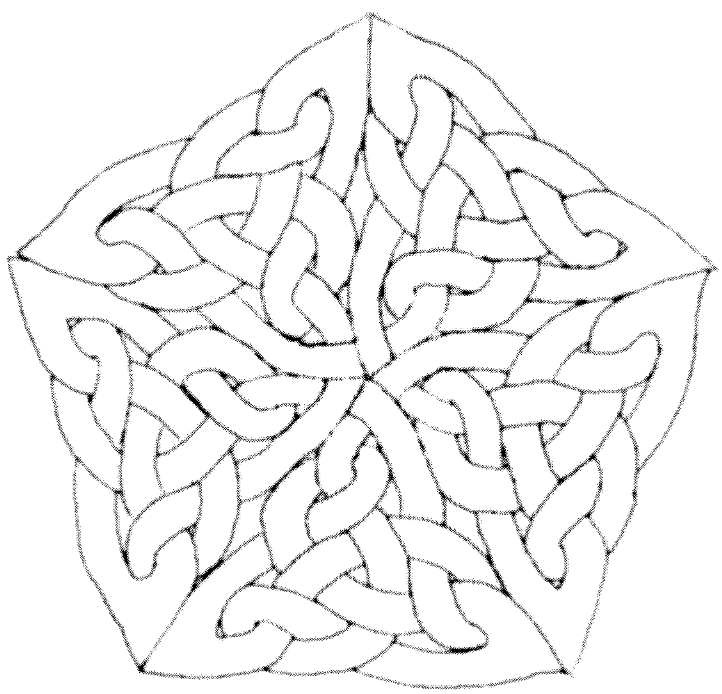
Le graphe dual est donc :



Il est important de savoir jongler entre un graphe et son graphe dual; l'un des deux est souvent vraiment plus simple que l'autre, alors avant d'apprendre par cœur le graphe de votre motif favori, regardez son dual pour voir...

La clef de l'encapsulation d'un entrelacs est donc de construire le graphe dual qui est associé à celui (plus naturel *a priori*) qui a servi à le concevoir. On a maintenant un graphe dont toutes les arêtes externes sont des murs longitudinaux, il est enfermé dans un rempart polygonal. Et c'est justement ce qui permet facilement d'élaborer des motifs plus complexes par concaténation, juxtaposition de motifs plus simples encapsulés : il suffit de considérer les deux polygones mis à la même échelle, d'aligner quelques arêtes externes et de les rapprocher jusqu'à faire coïncider quelques murs des deux remparts. On peut alors ouvrir une ou deux portes dans les remparts et les deux entrelacs se mélangent. Et plus besoin de rechercher le graphe dual, celui-ci est déjà tout encapsulé. Notre motif triangulaire peut ainsi servir tel quel à construire une étoile à cinq branches, il suffit de déformer un peu le triangle et le graphe qu'il contient puis d'ouvrir une porte pour que les nœuds se mélangent :





Le nombre d'arêtes externes qu'on soude n'a pas à être forcément le même de part et d'autre du rempart, les sommets externes des deux capsules n'ont pas à coïncider si on n'a pas l'intention d'ouvrir une porte à cet endroit.

Retenez que pour faire une belle enluminure, il ne faut pas mettre la charrue avant les bœufs, mieux vaut prendre le temps de construire à main levée un motif original dont on soit vraiment content et construire une bonne partie de l'enluminure totale en répétant à loisir ce motif. Pour cela, il faut l'encapsuler et paver l'espace de travail avec la forme de sa boîte. Puis on recopie le graphe du motif à l'intérieur de chacune des boîtes, on complète à l'extérieur par un graphe sans fioriture et on ouvre des coins des boîtes pour que le motif s'échappe et se mélange à la masse tout en étant reconnaissable. Vous êtes parés pour l'élaboration d'une grande fresque.

Vers l'intérieur

Quand vous voulez faire une vraie enluminure, sensée illustrer un texte ou encadrer un objet, définissez soigneusement la zone où vous voulez que vos entrelacs s'inscrivent, par exemple un disque, un rectangle, une croix, une bande *etc.*.. Partagez votre espace intérieur en sous-zones suivant votre goût et suivant la forme du ou des motifs que vous voulez y voir figurer; dans chacune, un motif trouvera sa place propre. Il faut bien sûr aussi avoir choisi l'échelle du dessin, c'est à dire la largeur des rubans que vous voulez utiliser, cela détermine la longueur moyenne des arêtes, qui doit valoir à peu près une fois et demie la largeur des rubans. Les différents motifs que vous comptez faire figurer doivent donc être à des échelles compatibles.

Le contour de ces zones formera les murailles principales de l'enluminure, ce sera le squelette du graphe qui servira à construire l'entrelacs. Ces murailles seront donc des arêtes du graphe que nous sommes en train de construire, portant un défaut longitudinal, un "mur" (il est naturel qu'une muraille soit une suite de murs).

Recopiez alors à l'intérieur des zones où vous voulez dessiner votre motif favori, son graphe encapsulé associé. Il reste cependant beaucoup d'espace encore vide entre les boîtes si vous ne les avez pas organisées en pavage (ce qui est souvent impossible, voir pire, inesthétique). Il faut donc, votre étalon de longueur à la main, semer périodiquement des points sur la muraille aux endroits où aucun graphe n'occupe encore l'espace. Ce sont en fait des demi-points posés d'un côté seulement du rempart, on ne leur impose pas de s'étendre de part et d'autre du trait. A l'approche d'un coin plus aigu que $90°$, augmentez le pas, jusqu'à deux fois le pas normal si l'angle est très aigu. Vous vous apercevez qu'il doit y avoir un équilibre entre la longueur des arêtes et la forme de vos zones. Ce tracé doit être fait en gras puisque ce sont des murs. En vous appuyant sur ces sommets, faites pousser un graphe harmonieusement, ses arêtes étant approximativement de la taille décidée, les sommets bien éloignés les uns des autres, jusqu'à ce qu'il remplisse tout l'espace intérieur. Pour bien placer les sommets et évaluer la longueur des arêtes, considérez celles-ci comme des ressorts, les points intérieurs comme des points mobiles et relaxez le tout en maintenant certains points du bord fixes.

Tout l'espace est maintenant quadrillé par des graphes, les zones de départ et l'espace résiduel. Il faut alors ouvrir quelques portes pour faire communiquer les zones entr'elles en rendant normales quelques arêtes de la muraille.

Voilà, votre œuvre est là qui n'attend plus que vous l'exprimiez, armez vous de patience et de persévérance et déroulez tous les brins de votre entrelacs. Une fois que vous avez déterminé le parcours de chaque brin (soit une bonne heure après), il faut les gonfler jusqu'à ce qu'ils s'applatissent contre les murs et se serrent les uns contre les autres. N'hésitez pas dans cette dernière phase (et dans cette dernière phase seulement!) à oublier le graphe et à laisser s'exprimer votre crayon sans contrainte.

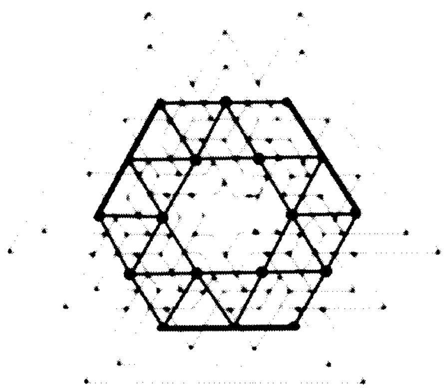
Animaux, personnages, les enchevêtrements

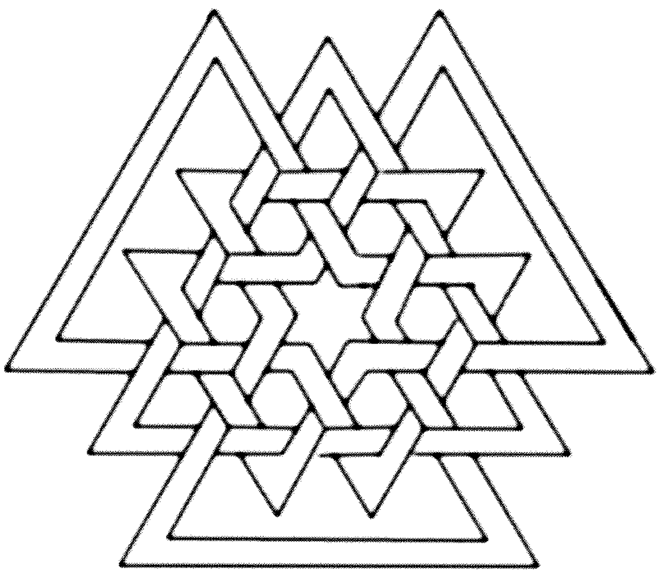
Si vous êtes contaminés, vous griffonez en ce moment tous les coins de table encore vierges et vous voulez aller plus loin, retrouver le lyrisme héroïque fantaisie des Vikings, entrelacer les barbes de Freyr et de Thor... Mais vous ne savez pas dessiner des brins qui s'arrètent ou qui se fondent à une masse.

Semi-encapsulation

Comment faire non plus un entrelacs sans début ni fin, mais ce que nous appellons un enchevêtrement, où certains brins s'arriment à une masse ou à un point fixe. Déjà, il faut remarquer que les bouts viennent toujours par paire, impossible de faire un enchevêtrement n'ayant qu'une extrémité...

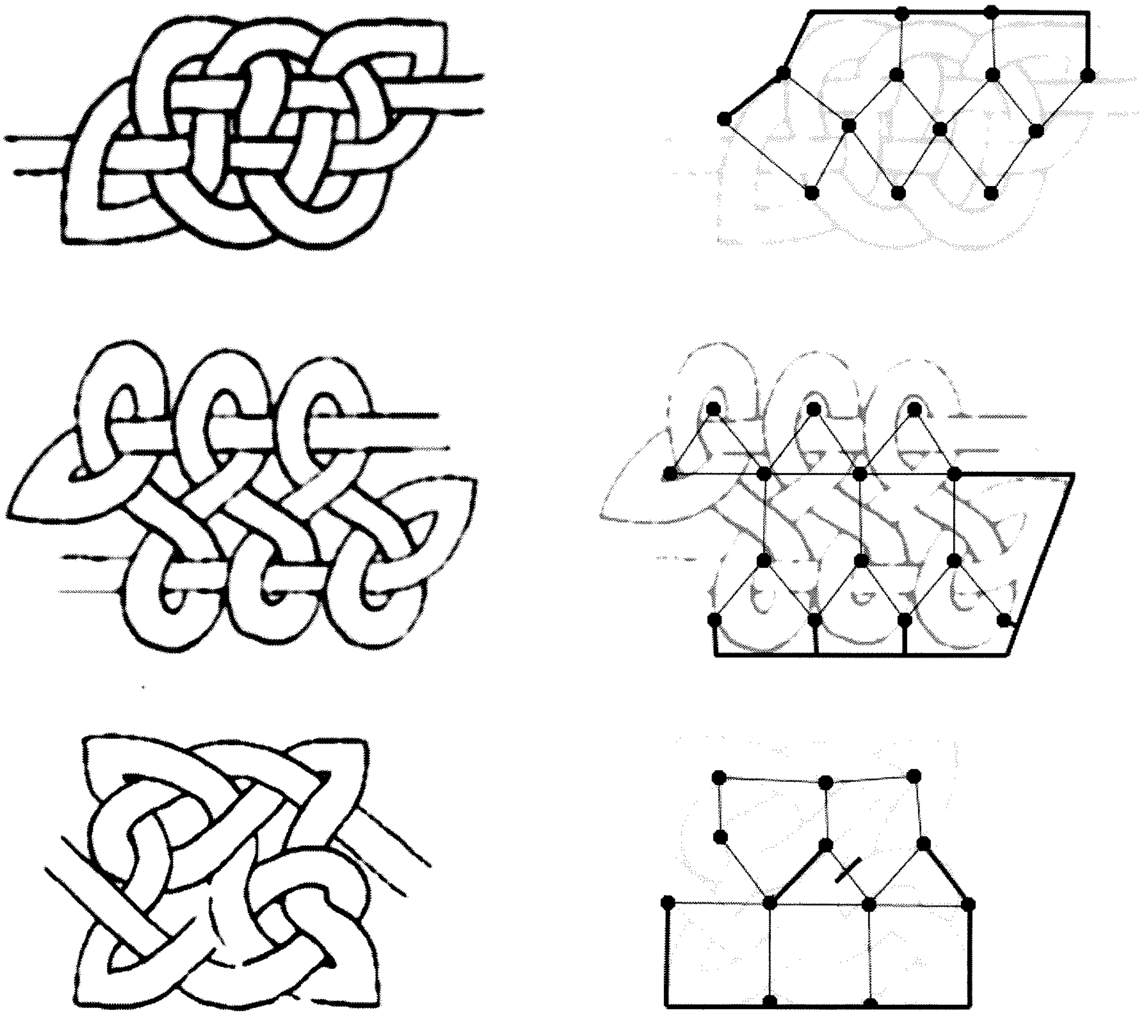
Si vous maîtrisez bien le passage d'un graphe à son dual, vous êtes habitués à des graphes ceints d'une muraille, duaux d'un graphe libre comme l'air. Essayez donc de faire des graphes mixtes, dont le bord est composé de bouts de murailles, et de bouts libres. Vous voyez que chaque bout de muraille fait apparaitre de longs brins tous seuls, longeant la muraille extérieure tout du long. Voici un exemple simple traité à la manière arabe (un réseau plutôt triangulaire et un traçage à la règle) :





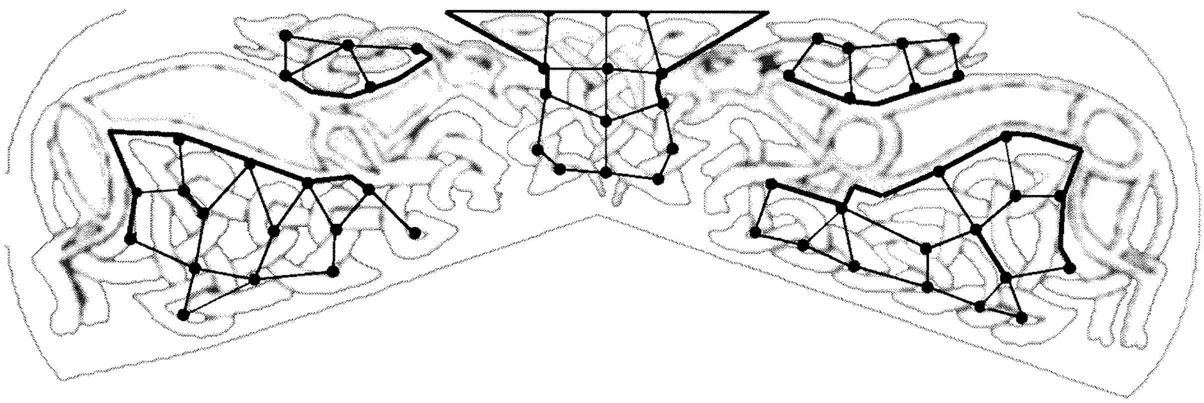
Observez les trois grands brins qui contournent de loin le motif.

Il suffit donc de couper ces brins extérieurs et vous vous retrouvez avec des bouts de brins émergeant de l'entrelacs central, une paire aux extrémités de chaque muraille. C'est celà la semi-encapsulation. Ce sont des motifs beaucoup plus souples à manipuler, à assembler, et qui permettent surtout d'être mélés à des personnages ou des animaux dont les extrémités (cheveux, barbe, queue, langue ou bras) s'entremèlent.



Ce qui vous permettra de faire de jolies compositions, surtout si, comme moi, vous tirez des modèles d'animaux des livres d'Aidan Meehan :

Pour cela, repérez les endroits où vous voulez faire sortir un brin, à la naissance d'une queue ou d'une oreille, placez un sommet d'un côté de ce brin et tracez une muraille qui part de là pour aller jusqu'au sommet que vous placerez près du bout du brin suivant, une deuxième oreille, une autre queue ou le bout libre de celle-ci. Recommencez pour chaque paire de bout de brins. Vous obtenez une succession de bouts de murailles; faites pousser un graphe qui s'appuie sur cette muraille et reste dans l'espace que vous lui avez fixé.

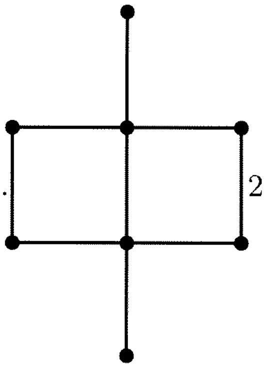


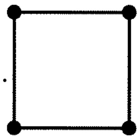
Bibliographie

Vous trouverez tout ce que vous cherchez à la librairie de l'Odet à Quimper, 45, boulevard de l'Amiral de Kerguelen, 29000 Quimper Numéro de téléphone : 98 95 23 61

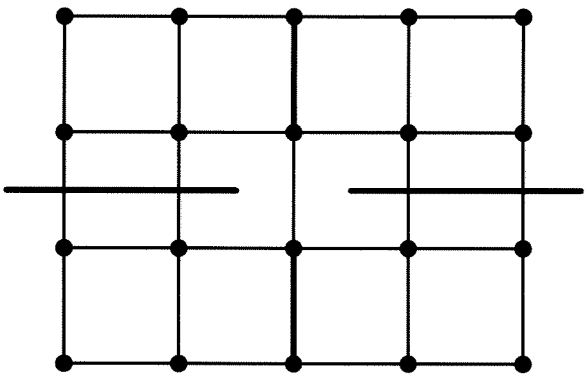
1. Celtic Art – Methods and Construction/ George Bain
2. Celtic knotwork/ Iain Bain
3. Celtic key patterns/ Iain Bain
4. Celtic art : from its beginnings to the Book of Kells/ Ruth Megaw
5. The art of Celtia/ Courtney Davis
6. The Celtic art of Courtney Davis/ Nancy Davis
7. Art of the Celts/ Lloyd and Jennifer Laing
8. Celtic design I : a beginner's manual/ Aidan Meehan
   Celtic design II : illuminated letters
   Celtic design III : animal patterns
   Celtic design IV : knotwork: the secret methods of the scribes
9. Celtic art/ ed. Barry Raftery, Paul-Marie Duval
10. Later Celtic art in Britain and Ireland/ Lloyd Laing

Exercices

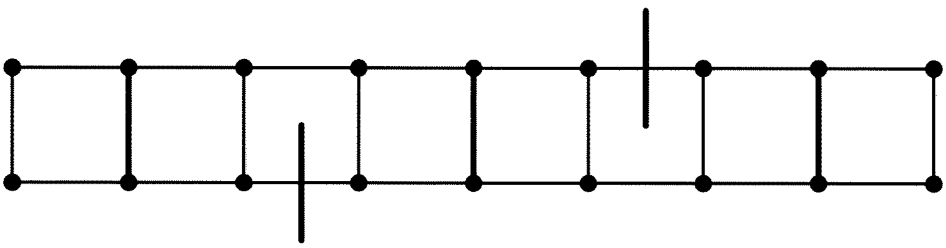
1. 

2. 

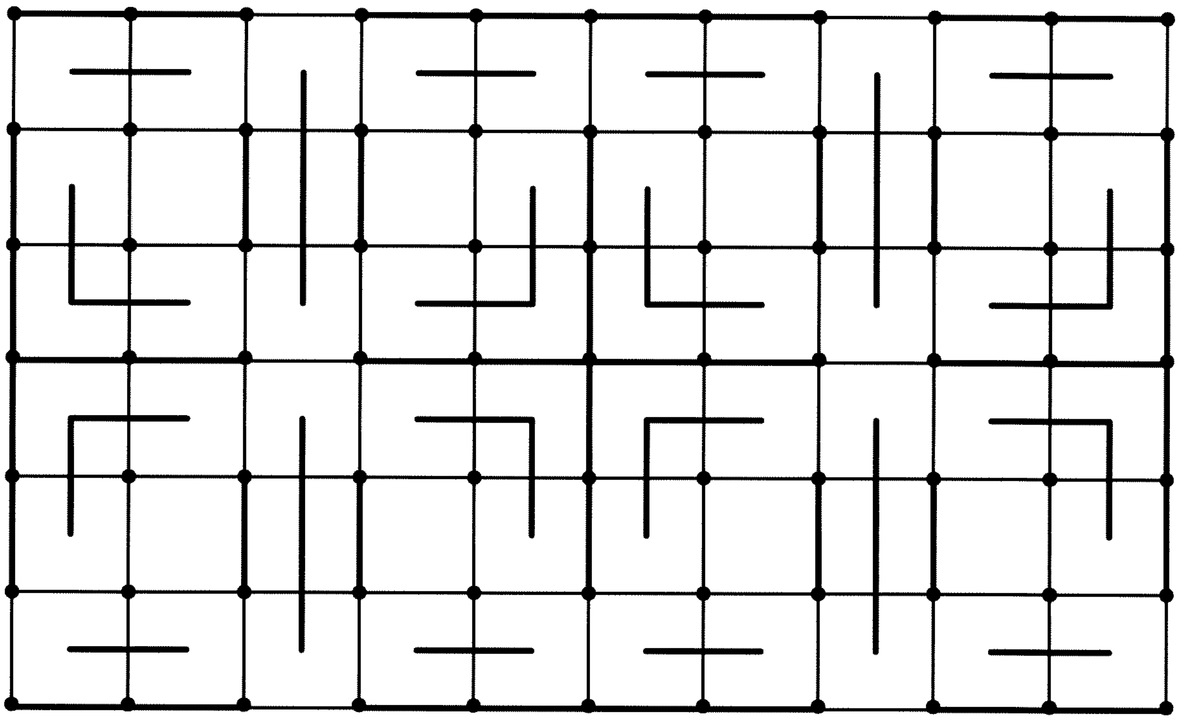
3.



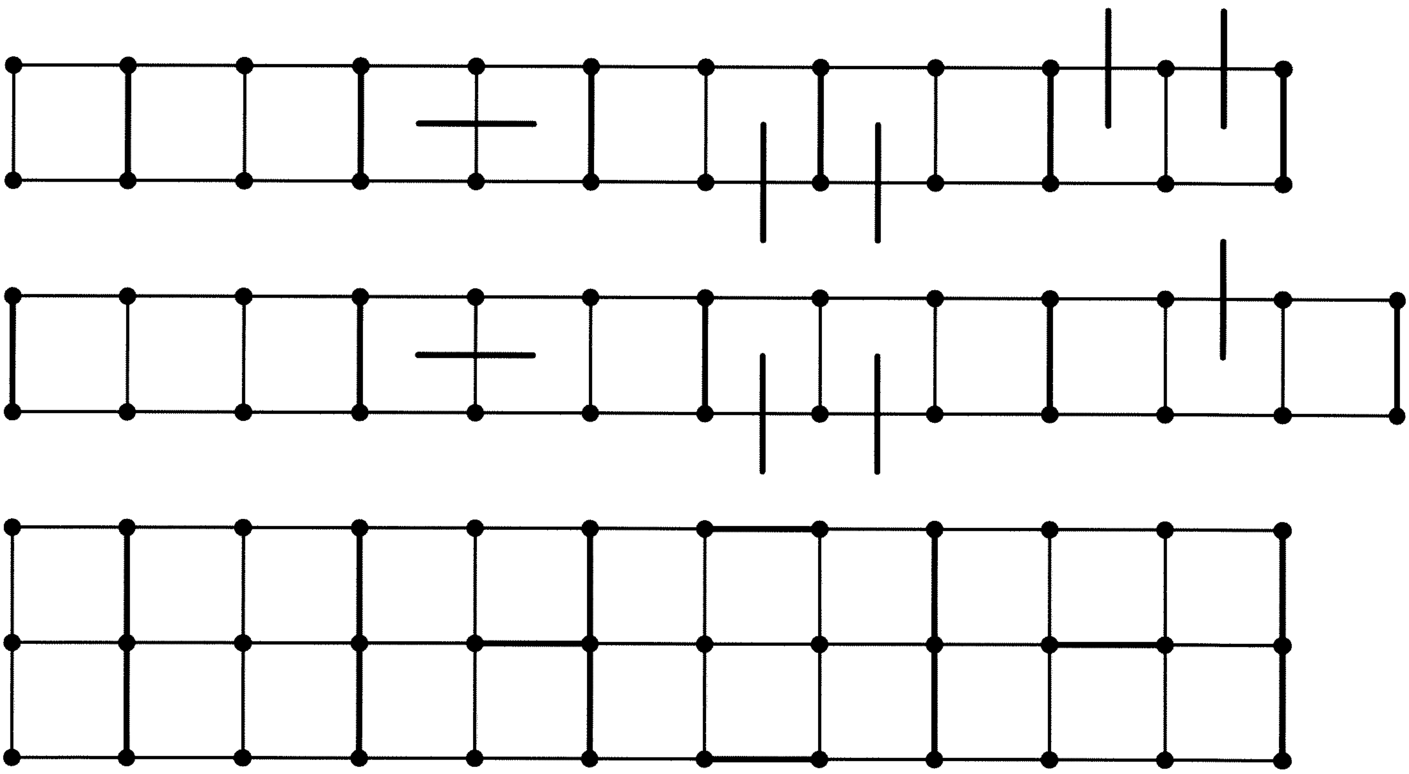
4.



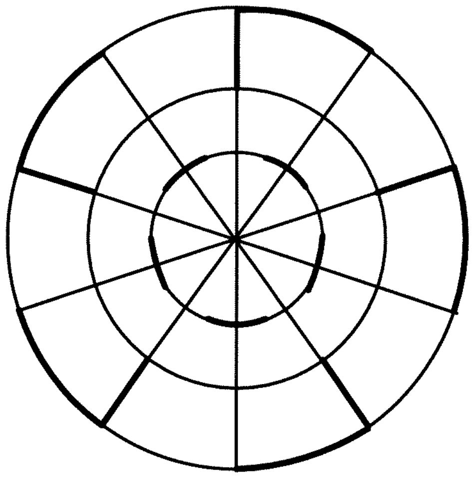
5.



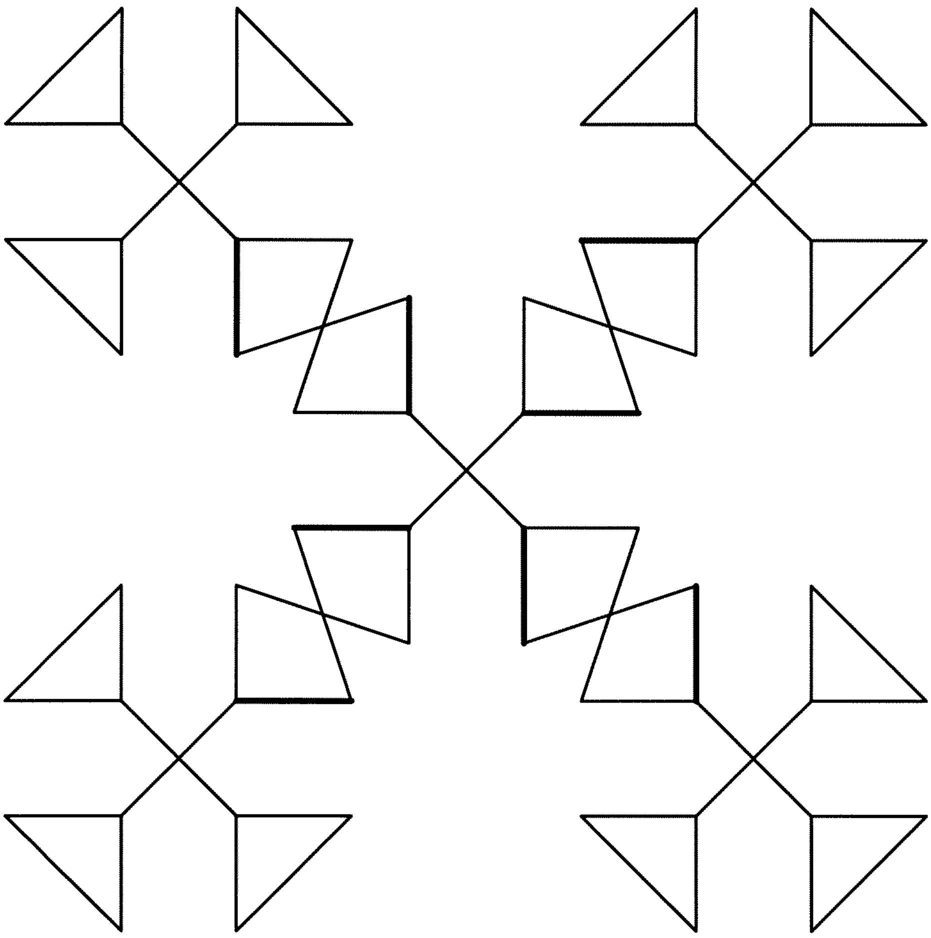
6.



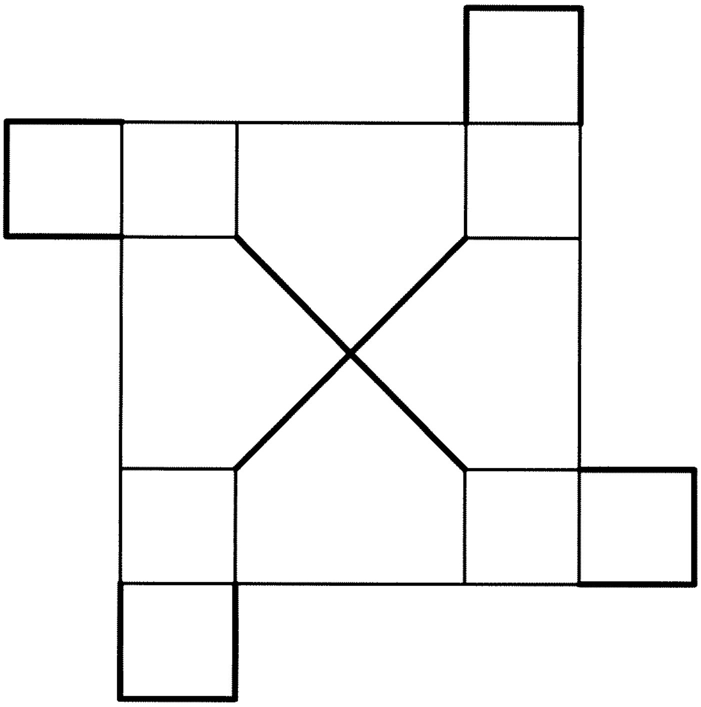
7.



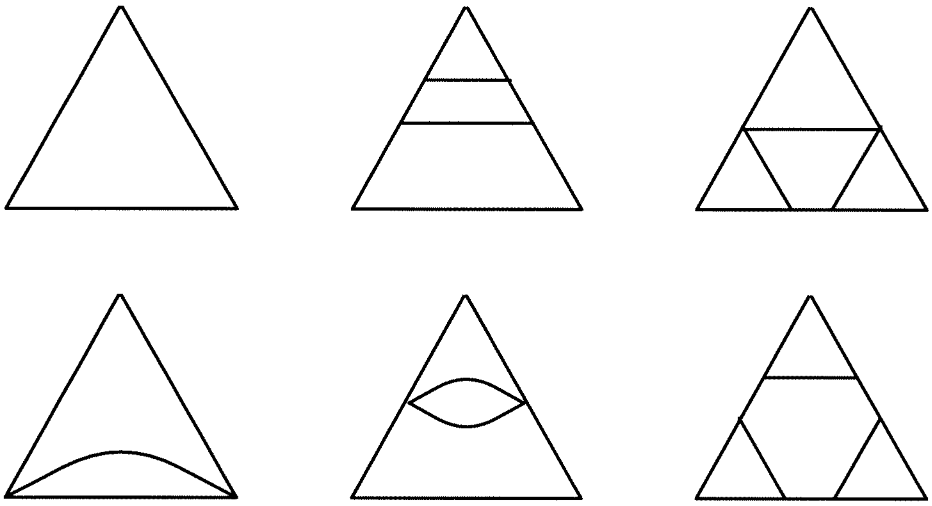
8.



9.



10.



11. Chercher toutes les erreurs faites dans cet article.

[Les entrelacs] ne sont pas des «ornements»,mais possèdent le privilège de discipliner les allusions et le pressentiment des formes.
Gilles Châtelet
Les enjeux du mobile, Des Travaux/ Seuil 1993

ET POURTANT QUELQUES-UNS SONT QUARRABLES - LA QUADRATURE DU CERCLE DANS LA GEOMETRIE HYPERBOLIQUE

par Klaus Volkert, professeur à Heidelberg

Première partie

Le terme "quadrature du cercle" est devenu synonyme de "problème sans solution". C'est dû au fait que F. Lindemann démontrait en 1882 que le nombre π est transcendant; par conséquent il est impossible dans la géométrie euclidienne de construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un cercle constructible. Par contre il est peu connu que J. Bolyai a montré 50 ans auparavant qu'une telle quadrature est possible pour certains cercles dans la géométrie créée par lui et par Lobatchevsky, une géométrie aujourd'hui appelée géométrie hyperbolique. D'un point de vue historique il est intéressant de voir que la solution donnée par Bolyai utilise des résultats trouvés antérieurement par Gauss sur la constructibilité des polygones réguliers et que les constructions de Bolyai sont des constructions théoriques qu'on ne peut pas exécuter sur une feuille de papier à l'aide des instruments usuels. Donc la découverte de Bolyai montre elle aussi la tendance si typique pour le 19e siècle vers une perspective abstraite et algébrique.

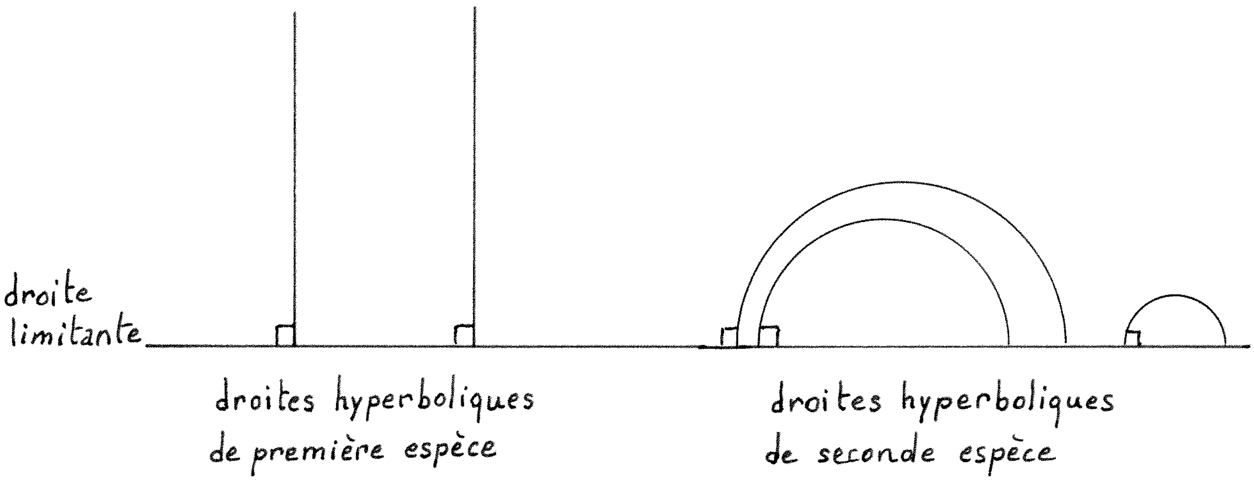
En 1832 János Bolyai publiait son fameux appendice au manuel de géométrie de son père Farkas intitulé *La Science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiome XI* d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori); suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiome XI* (l'original était écrit en latin, J. Bolyai lui-même en a composé une traduction allemande). On sait bien que cet appendice passa tout à fait inaperçu du monde mathématique; il ne fut redécouvert que dans les années 1860. La traduction française par Jean Hoüel que nous allons citer dans le texte qui suit date de 1868[1)].
Par cet appendice Bolyai est devenu le co-fondateur de la géométrie non-euclidienne (ou plus précisément de la géométrie hyperbolique); l'autre fondateur était le mathématicien russe Nikolaus Lobatchevsky qui a été aussi peu lu et reconnu que Bolyai.

1. Construire en géométrie hyperbolique

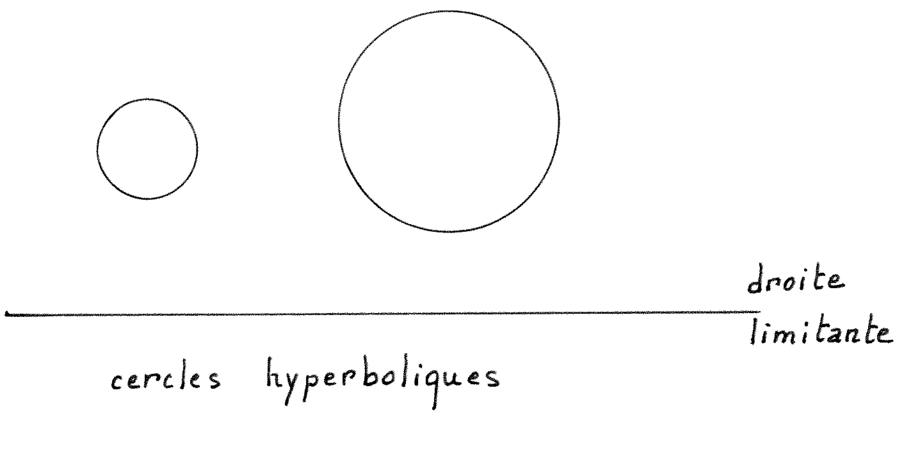
Il y a beaucoup de points communs entre Bolyai et Lobatchevsky mais aussi des différences remarquables. Ce qui nous intéresse ici c'est le fait que Bolyai s'occupe dans son appendice des constructions à la règle et au compas[2)] dans le cadre de la nouvelle géométrie - un thème qui fut ignoré par Lobatchevsky. Que veut dire *construire avec la règle et le compas*? Il faut se persuader du caractère métaphorique de cette phrase; ce qu'on fait en réalité c'est couper des droites avec des droites, des droites avec des cercles ou des cercles avec des cercles.[3)] Rien d'autre - en particulier aucun instrument -

* Cinquième postulat dans les éditions françaises récentes (n.d.l.r).

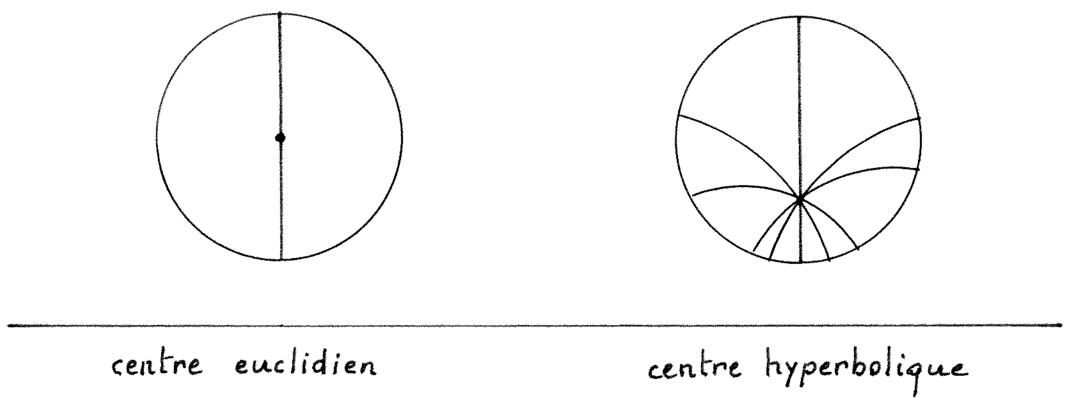
n'intervient. Les termes *droite* et *cercle* gardent leur sens dans la nouvelle géométrie parce que ce sont des termes de la géométrie absolue (c'est à dire indépendante du postulat des parallèles; voir plus loin). Donc on peut continuer à parler des constructions à la règle et au compas, mais il manque une idée intuitive d'un cercle hyperbolique ou d'une droite hyperbolique. C'était vrai sans restriction pour Bolyai; par conséquent ses constructions sont tout à fait théoriques. Une certaine visualisation ne devenait possible qu'avec les modèles qu'on a trouvés à partir de la fin des années 1860: Beltrami 1868, Klein 1871 et Poincaré 1880 (publié un an après). Dans le modèle (bidimensionnel) de Poincaré les droites hyperboliques sont représentées soit par des demi-droites euclidiennes orthogonales à une droite du plan euclidien fixée auparavant - appelée la droite limitante - soit par des demi-cercles euclidiens avec leurs centres sur la droite limitante.



Les cercles hyperboliques sont des cercles euclidiens se trouvant complètement dans un des deux demi-plans définis par la droite limitante (autrement dit, complètement dans le plan hyperbolique).

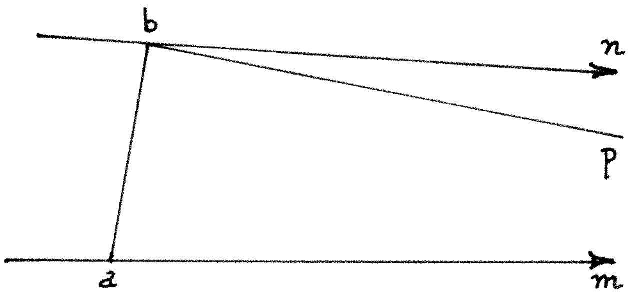


Mais il faut remarquer que les centres hyperboliques de ces cercles diffèrent de leurs centres ordinaires. C'est dû au fait que les distances sont altérées dans le modèle: les distances plus proches de la droite limitante sont agrandies d'un point de vue euclidien, les distances dans l'autre direction sont diminuées:



Autrement dit, dans le modèle de Poincaré on ne peut plus rapporter des segments de la manière habituelle avec le compas ordinaire. Ce modèle de Poincaré est conforme mais il ne conserve pas les distances. Dans la suite il est plus aisé de travailler comme Bolyai exclusivement sur le niveau théorique. C'est tout de même un problème intéressant d'étudier les constructions dans le modèle de Poincaré ou dans un autre modèle.
On peut utiliser sans altérations les constructions de la géométrie absolue données par Euclide dans les propositions 9 à 12 du premier livre des *Eléments*. La géométrie absolue est la partie de la géométrie élémentaire (plane pour simplifier les choses) qui est indépendante du postulat des parallèles appelé souvent l'axiome des parallèles ou l'axiome 11. Bolyai écrivait:
§15. En considérant ce que nous avons établi ... nous désignerons par Σ le système de géométrie qui repose sur l'hypothèse de la vérité de l'axiome XI d'Euclide, et par S le système fondé sur l'hypothèse contraire.
Tous les résultats que nous avons énoncés, sans désigner expressément si c'est dans le système Σ ou dans le système S qu'ils ont lieu, devront être considérés comme énoncés d'une manière absolue, c'est-à-dire qu'ils seront donnés comme vrais, soit qu'on se place dans le système Σ, soit qu'on se place dans le système S.
Ni Bolyai ni quelqu'un d'autre de son époque n'était capable de caractériser exactement cette géométrie. Pour arriver à une telle caractérisation il faut un système complet d'axiomes pour la géométrie - résultat qui ne fut achevé que vers la fin du 19e siècle (par Pasch, Hilbert et d'autres). Mais on connaissait très bien les *Eléments* d'Euclide et on savait que les propositions 1 à 28 du premier livre sont démontrées sans utilisation du postulat en question. Bolyai lui-même a démontré d'autres théorèmes de la géométrie absolue notamment son fameux théorème:
§ 25) Dans tout triangle rectiligne, les circonférences de rayons égaux aux côtés sont entre elles comme les sinus des angles opposés.

En particulier on peut utiliser la construction donnée par Euclide du triangle équilatéral de base donnée (I,1)*, de la médiatrice (I,9), de la bissectrice (I,10) et de la perpendiculaire élevée en un point donné d'une droite (I,11) ou abaissée d'un point sur une droite (I,12). Les théorèmes de congruence* pour le triangle (I,4; I,8 et I,26) sont aussi des énoncés de la géométrie absolue, donc valables dans la géométrie euclidienne et dans la géométrie hyperbolique.
Si nous avançons dans la théorie des parallèles, les différences entre les deux géométries deviennent très claires. La notion principale de la géométrie hyperbolique est l'angle de parallélisme, introduite par Bolyai (qui n'utilise pas ce terme) de la manière suivante:
§1. Si la droite am n'est pas coupée par la droite bn, située dans le même plan, mais qu'elle soit coupée par toute autre droite bp, comprise dans l'angle abn, on dira que bn est parallèle à am, c'est à dire qu'on aura bn /// am.

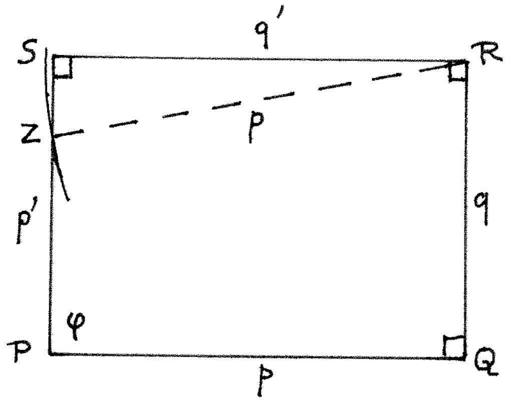


Donc la parallèle est la première droite non-sécante (par symétrie on en a deux: une de chaque côté). Si $\angle$ bam = 1 droit on appelle angle de parallélisme l'angle $\angle$ abn entre la perpendiculaire ba et la parallèle bn. Il est bien connu depuis le temps d'Euclide que l'angle de parallélisme équivaut à un droit dans la géométrie ordinaire (c'est une conséquence par exemple du théorème 29 du premier livre et donc du postulat des parallèles); de plus il découle du théorème 17 du premier livre (un théorème de la géométrie absolue!) que l'angle de parallélisme ne peut jamais excéder un angle droit.
En géométrie hyperbolique cet angle est toujours inférieur à un droit. De plus il dépend de la longueur de la perpendiculaire ba. Lorsque ba tend vers l'infini l'angle de parallélisme, qui est noté aujourd'hui par Π(ba) d'après Lobatchevsky, tend vers zéro; lorsque ba tend vers zéro il tend vers un droit.
Comme la fonction Π: $]0,\infty[\ \to]0,\pi/2[$ décroît strictement, on peut définir sa fonction réciproque. Cette fonction réciproque est désignée par Δ: $]0,\pi/2[\to\ ]0,\infty[$; elle fournit pour une valeur donnée de l'angle de parallélisme la longueur de la perpendiculaire.
On peut se poser les problèmes suivants: étant donné un segment de longueur q, peut-on construire l'angle Π(q) avec la règle et le compas? Et aussi: étant donné un angle α (plus petit qu'un angle droit bien entendu), peut-on construire la perpendiculaire correspondante $\Delta(\alpha)$? Les réponses sont données par les constructions qui suivent.

---

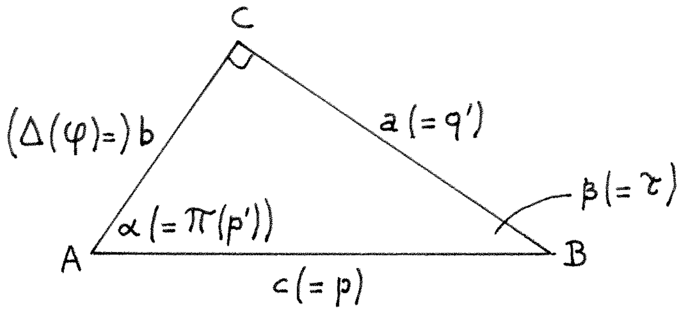
* Le premier chiffre, romain, indique le numéro du livre des *"Eléments"*, le second chiffre, arabe, celui de la proposition. Ainsi (I,9) signifie Proposition 9 du Livre I (n.d.l.r).
* Ce qu'en France on appelait *"les cas d'égalité des triangles"* (n.d.l.r).

Première construction fondamentale (cf. Bolyai § 34):
Soit un segment QR de longueur q. Construire l'angle de parallélisme correspondant $\Pi(q)$.
Nous élevons en Q et en R les perpendiculaires sur QR (du même côté). Sur celle en Q nous marquons en partant de Q une longueur p qui est arbitraire, d'extrémité P. De P nous abaissons la perpendiculaire sur la perpendiculaire élevée en R . Soit S le point d'intersection. Nous arrivons à la situation suivante:



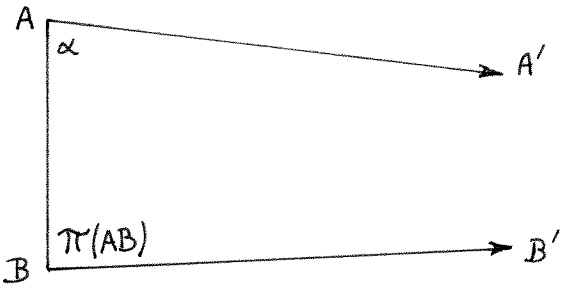
Evidemment le quadrilatère PQRS est un rectangle dans la géométrie euclidienne. Dans la géométrie hyperbolique il n'existe pas de rectangle car la somme des angles internes d'un triangle est toujours plus petite que deux droits (ce fut démontré pour la première fois par Saccheri en 1733 [cf. Stäckel/Engel 1895, 59]). L'angle φ en P est un angle aigu dans cette géométrie. Des quadrilatères avec trois angles droits plus un angle aigu furent considérés déjà par le mathématicien et physicien arabe Ibn al Haytam et plus tard par Johann Heinrich Lambert. Ils jouent un rôle important aussi dans les recherches de Saccheri. Tous les mathématiciens cités voulaient démontrer qu'un tel quadrilatère est impossible en réfutant ce qu'on appelait l'hypothèse de l'angle aigu. Mais ces essais furent vains ; l'hypothèse de l'angle aigu n'entraîne pas de contradiction. Par contre on a trouvé de vraies contradictions dans l'hypothèse de l'angle obtus. Autrement dit les hypothèses de l'angle aigu et de l'angle droit (qui correspondent à la géométrie hyperbolique et à la géométrie euclidienne) sont compatibles avec la géométrie absolue, l'hypothèse de l'angle obtus (qui correspond à la géométrie sphérique) ne l'est pas.
Ainsi dans la géométrie hyperbolique il existe de tels quadrilatères. On peut démontrer de plus qu'on a toujours les relations $q' < p$ et $q < p'$. Si on trace un cercle de centre R avec un rayon de longueur p on obtient un point d'intersection Z du cercle avec l'arête PS du quadrilatère. On joint les points Z et R; l'angle $\angle$ ZRQ est l'angle cherché (c'est-à-dire $\Pi(q)$).
Pour vérifier cette construction on peut utiliser soit la trigonométrie hyperbolique (voir fin de paragraphe) avec la représentation analytique de la fonction $\Pi(q)$, soit la congruence des triangles. Partant d'un quadrilatère PQRS du type indiqué plus haut on peut toujours construire un triangle ABC rectangle en C. Pour cela nous reportons l'angle de parallélisme $\Pi(q)$ en R. Cela nous donne un point d'intersection Z' avec l'arête PS. Nous définissons une correspondance du quadrilatère PQRS et du triangle ABC par

p → c et τ → β où τ = π/2 - ∠ Z'RQ. On peut calculer les autres éléments du triangle et on trouve (cf. Perron 1962, 40) que a = q', b = Δ(φ) et α = Π(p').

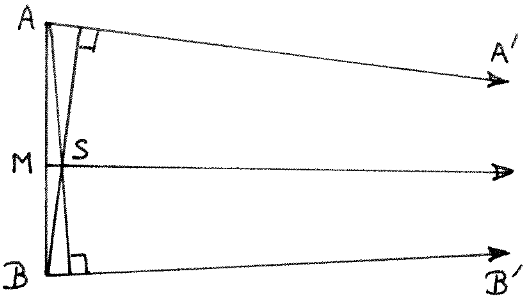


Evidemment les triangles ABC et RSZ sont congruents ce qui montre que l'angle construit ∠ SRZ est congruent à l'angle Π(q). Les correspondances entre un quadrilatère de Haytam - Lambert et des triangles rectangles ont été étudiées systématiquement par H. Liebmann (cf. Liebmann 1901) au début de notre siècle. Elles sont un outil assez utile.

Deuxième construction fondamentale (cf. Bolyai § 35):
Soit α un angle donné (plus petit qu'un droit bien entendu). Construire Δ(α), c'est-à-dire un segment [AM] de longueur AM telle que α=Π(AM) en soit l'angle de parallélisme.

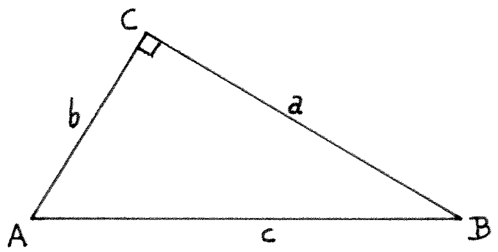


Soit A le sommet de l'angle donné, A' et B deux points sur les deux côtés de l'angle. Selon la première construction fondamentale nous sommes capables de construire en B l'angle de parallélisme du segment AB. Soit BB' l'autre côté de cet angle. De B nous abaissons la perpendiculaire sur AA', de A celle sur BB'. Ces deux perpendiculaires se coupent en un point S. De S nous abaissons la perpendiculaire sur AB et nous obtenons le point M. Le segment [AM] est le segment cherché.



La vérification de cette construction est difficile. Elle repose sur le fait que S peut se concevoir comme le point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle AB∞ qui est un triangle simplement asymptotique ce qui veut dire que son troisième sommet ∞ se trouve à l'infini. Ce point à l'infini est le point d'intersection des deux parallèles AA' et BB'; l'angle sous lequel ces droites se coupent est nul. De plus MS est parallèle à AA' et BB' - c'est-à-dire que MS passe aussi par le même point ∞ que AA' et BB' à l'infini.
Une autre possibilité: on construit d'abord un triangle rectangle quelconque avec l'angle α et une hypoténuse c (par exemple on abaisse la perpendiculaire d'un côté de l'angle α sur l'autre). Par la première construction fondamentale on peut construire l'angle $\Pi(c)$. Et par la construction du triangle rectangle on connaît les autres côtés, par exemple b. Comme $c > b$ alors $\Pi(c) < \Pi(b)$. Donc on peut construire un triangle rectangle avec $\alpha' = \Pi(c)$ et $b' = b$. Dans ce triangle on a l'égalité $c' = \Delta(\alpha)$ (cf. Perron 1962, 43 pour les détails concernant le passage du quadrilatère à un triangle rectangle). Nous terminerons ce paragraphe en donnant quelques formules utiles pour la suite.

Trigonométrie du triangle rectangle hyperbolique



$\cos c = \cosh a \bullet \cosh b$
$\cosh a = \cos \alpha / \sin \beta$
$\cos \alpha = \tanh b / \tanh c$
$\cosh c = \cot \alpha \bullet \cot \beta$
$\sin \alpha = \sinh a / \sinh c$
$\tan \alpha = \tanh a / \sinh b$

Formulaire pour l'angle de parallèlisme

$\tanh x = \cos \Pi(x)$
$\cosh x = \csc \Pi(x)$
$\sinh x = \cot \Pi(x)$
$\exp(-x) = \tan(\Pi(x)/2)$

2. Les aires dans la géométrie hyperbolique

Nous reviendrons sur les constructions plus loin. Pour aboutir à la quadrature du cercle il nous faut des connaissances sur les aires dans la géométrie hyperbolique. On peut démontrer les propriétés suivantes:
Si C(r) est le cercle de rayon r, son aire A(C(r)) est égale à

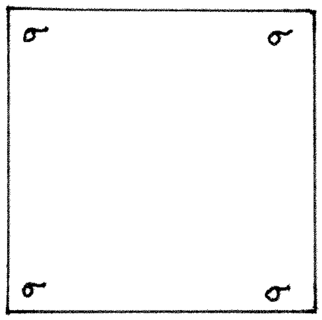
$$2\pi(\cosh r - 1) = 4\pi \sinh^2 r/2.$$

Si $T(\alpha,\beta,\gamma)$ est un triangle d'angles α, β et γ, dont la somme est inférieure à π, on définit l'aire du triangle $A(T(\alpha,\beta,\gamma))$ par

$$A(T(\alpha,\beta,\gamma)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Parce qu'en géométrie hyperbolique tous les triangles ayant les mêmes angles sont congruents, on obtient ainsi la même aire pour ces triangles. La grandeur $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

est appelée le déficit; elle correspond à ce qu'on appelle l'excès dans la géométrie sphérique. La première propriété pour l'aire du cercle est démontrée d'une manière tout à fait analogue à celle de la géométrie euclidienne, c'est à dire par une exhaustion à l'aide des triangles. La deuxième formule est fondée soit sur l'équidécomposabilité (cf. Perron 1962, 90 - 93), soit sur une formule pour l'aire du triangle simplement asymptotique obtenue par une intégration (cf. Bolyai § 42).



Considérons un quadrilatère régulier dans la géométrie hyperbolique c'est à dire un quadrilatère avec quatre côtés et quatre angles congruents (plus petits qu'un droit bien entendu). Un tel quadrilatère est l'analogue d'un carré de la géométrie ordinaire. Par une diagonale on peut le décomposer en deux triangles congruents, comme d'habitude. Il s'ensuit la formule pour l'aire du quadrilatère régulier désigné ici par $Q(\sigma)$, où σ dénote l'angle:

$$A(Q(\sigma)) = 2\pi - 4\sigma.$$

Ce qui est intéressant ici, c'est le fait que la constante π intervient dans les formules pour l'aire du triangle et pour l'aire du quadrilatère régulier. Elle intervient comme la grandeur d'un angle et non pas comme la longueur d'un segment. De plus on comprend que l'aire d'un cercle n'est pas limitée supérieurement; elle peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut. Par contre les aires des triangles et celles des quadrilatères sont majorées (par π ou par 2π). Si nous parlons dans la suite d'une aire de cercle qui est à transformer dans une aire de quadrilatère régulier, il sera toujours supposé que cette aire est plus petite que 2π. Pour réaliser une aire plus grande il faut travailler avec des polygones réguliers. Pour l'aire du n-gone régulier $P_n(\sigma),(n > 2)$, avec l'angle σ on obtient la formule $A(P_n(\sigma)) = (n-2)\pi - n\sigma$.
Mais revenons à la comparaison des aires de cercles et des quadrilatères réguliers. Si nous avons un cercle d'aire π, c'est à dire un cercle avec un rayon r_0 tel que $\sinh^2 r_0/2 = 1/4$, on peut calculer facilement l'angle σ_0 d'un quadrilatère régulier de même aire: $2\pi - 4\sigma_0 = \pi$ ou $\sigma_0 = \pi/4$.
Même dans ce raisonnement heuristique que nous trouvons aussi chez Bolyai au début du paragraphe 43 nous voyons une différence décisive entre les systèmes S (la géométrie hyperbolique) et Σ (la géométrie euclidienne): si on veut construire dans la géométrie ordinaire un carré d'aire π, il faut construire un segment de longueur $\sqrt{\pi}$. C'est une difficulté insurmontable, ce qu'on sait depuis Lindemann (1882). Dans la géométrie

hyperbolique il faut construire par contre un angle de grandeur $\pi/4$, ce qui n'est pas du tout difficile. On peut réaliser un tel angle même avec les moyens de la géométrie absolue: on construit l'angle droit (par exemple en abaissant une perpendiculaire) et sa bissectrice. C'est tout!
Pour aller un peu plus loin il faut d'abord préciser ce que signifie quarrer un cercle.

3. Quelques remarques historiques sur la quadrature du cercle

D'un point de vue historique il faut préciser que nous allons utiliser l'idée moderne de ce qu'on appelle quadrature du cercle. Mais il nous semble utile de donner quelques informations historiques. Les débuts du problème de la quadrature du cercle remontent au 5e siècle av. J. C. mais le rôle de la règle et du compas n'est pas clair à cet époque là. On a découvert plusieurs solutions, par exemple celle de la courbe appelée quadratrice (cette idée revient à un certain Hippias qui vraisemblablement n'est pas le sophiste qu'on rencontre dans quelques dialogues de Platon) et les lunules d'Hippocrate. Mais on ne trouve jamais dans l'Antiquité une critique disant que la quadratrice ne fournit pas une quadrature du cercle parce qu'elle n'est pas constructible par la règle et le compas. Un des premiers qui a parlé explicitement des constructions à la règle et au compas en faisant des différences entre plusieurs sortes de constructions est Pappus (5e siècle ap. J. C.):
Les anciens ont admis que les problèmes appartiennent à trois genres en géométrie: les uns sont appelés plans, d'autres solides et d'autres encore grammiques. On appelle à juste titre plans ceux qui peuvent être résolus au moyen de lignes droites et de circonférences de cercle... (Livre III, début du § VII)
Les constructions solides se font par des coniques (ce sont des objets spatiaux pour Pappus); Pappus cite comme exemples pour des courbes de la troisième sorte *dont l'origine est plus variée et plus complexe* les spirales, les quadratrices (au pluriel!), les conchoïdes et les cissoïdes. Il est vrai qu'Euclide utilise souvent implicitement la règle et le compas (par les postulats I à III), mais il ne donne aucune information sur cette restriction. En particulier il montre dans les livres I et II qu'on peut transformer un polygone arbitraire en un parallélogramme de même aire à l'aide de la règle et du compas (I,45) et un parallélogramme (via un rectangle) en un carré (II,16). Proclus remarque que ce fait a amené les anciens à s'occuper de la quadrature du cercle par la règle et le compas. On peut y ajouter qu'on a eu assez tôt l'idée d'approcher le cercle par des polygones réguliers (Antiphon, Bryson; 4e siècle av. J. C.), une idée qui fournit la base de la démonstration euclidienne que deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres (XII,2). Si on peut quarrer tous ces polygones et si le cercle est dans un sens vague la limite des polygones pourquoi ne pas penser qu'il soit quarrable aussi? Ce qui est vrai pour les termes d'une suite est *vrai aussi pour sa limite*, était un principe (faux bien entendu) qu'on trouve souvent appliqué.
Même au 18e siècle le sens du terme *quadrature du cercle* n'était pas limité aux constructions à la règle et au compas. Dans son *Histoire de la quadrature du cercle* (1754) Montucla écrit:
Quarrer un cercle, n'est donc pas, comme l'imagine le vulgaire ignorant, faire un cercle quarré, ce qui est absurde; ... mais mesurer le cercle, le comparer à une figure

rectiligne, comme un quarré de son diamètre, & connoître son rapport précis avec ce quarré, ou enfin, parce que l'un dépend de l'autre, déterminer le rapport précis de la circonférence avec le diamètre. Lorsqu'on dit un rapport précis, on entend parler de cette exactitude qui est la vérité même; de cette exactitude avec laquelle le triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base & même hauteur, & une parabole à ses deux tiers. (Montucla 1754, VIIf)

On comprend ici que pendant longtemps le problème de la quadrature du cercle n'était pas défini par les moyens avec lesquels on le voulait résoudre (c'est à dire avec la règle et le compas) mais par le but auquel on tendait. Ce but peut se formuler comme suit: démontrer que π est un rapport précis, c'est à dire un nombre rationnel. Cette idée fut réfutée par J. H. Lambert en 1766 (avec quelques lacunes relevées plus tard par A. M. Legendre) en démontrant que π est un nombre irrationnel. Par conséquent l'ancienne définition de la quadrature avait perdu sa raison d'être vers la fin du 18e siècle. D'autre part Gauß et Wantzel (voir plus loin) font des progrès considérables dans l'algébrisation des constructions à la règle et au compas. Leurs travaux réglèrent la solution des trois problèmes classiques (trisection de l'angle, duplication du cube, construction des polygones réguliers) entendus comme des problèmes de construction à la règle et au compas. Il n'est pas étonnant que la quadrature du cercle fut alors interprétée exclusivement comme un problème de construction, un problème qui fut résolu dans le sens négatif en 1882 par Lindemann en démontrant que π est transcendant donc non constructible comme longueur d'un segment dans la géométrie euclidienne.

4. La constructibilité dans la géométrie hyperbolique

Parce qu'en géométrie hyperbolique il n'y a plus de carré, la définition de la quadrature du cercle doit être modifiée.

1. Construire le cercle. Pour y arriver il suffit, par le postulat III d'Euclide (*D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.*) de disposer d'un segment constructible qui va servir comme rayon. Construire un cercle revient donc à construire un segment.

2. Construire un quadrilatère régulier ayant la même aire que le cercle. Pour y arriver il suffit comme nous le verrons ci-dessous (cf. 5.) de disposer d'un segment constructible ou d'un angle constructible.

Dans l'exemple du paragraphe 2. ci-dessus la constructibilité de l'angle σ_0 est claire, mais que peut-on dire du rayon r_0? Ce qui nous manque c'est une théorie de la constructibilité des segments et, dans des cas plus généraux que notre exemple, des angles aussi. Une telle théorie n'est pas explicitement formulée par Bolyai mais il donne quelques remarques intéressantes. Avant de donner ses idées je veux citer les résultats modernes (selon Jagy 1995) où ***P*** est le corps des nombres constructibles dans la géométrie euclidienne.

constructibilité

en Σ	**en S**
segment de longueur q	
q est constructible $\leftrightarrow q \in \boldsymbol{P}$	q est constructible $\leftrightarrow$ $\sinh q \in \boldsymbol{P}$, $\cosh q \in \boldsymbol{P}$, $\tanh q \in \boldsymbol{P}$
angle de grandeur α	
α est constructible $\leftrightarrow$ $\sin\alpha \in \boldsymbol{P}$, $\cos\alpha \in \boldsymbol{P}$, $\tan\alpha \in \boldsymbol{P}$	α est constructible $\leftrightarrow$ $\sin\alpha \in \boldsymbol{P}$, $\cos\alpha \in \boldsymbol{P}$, $\tan\alpha \in \boldsymbol{P}$

P peut se caractériser comme le plus petit sous-corps de $\boldsymbol{R}$ qui est clos pour l'extraction des racines carrées: si $p \in \boldsymbol{P}$ alors $\sqrt{p} \in \boldsymbol{P}$. Evidemment $\boldsymbol{P}$ contient le corps $\boldsymbol{Q}$ des nombres rationnels; il faut y ajouter toutes les combinaisons de racines et des opérations algébriques comme $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, $c\sqrt{a+\sqrt{b}}$ etc.[4] Il semble que Descartes fut le premier à avoir une idée de ce corps en décrivant dans sa *Géométrie* (1637) la construction des segments comme représentants des sommes et des produits de nombres. Le corps $\boldsymbol{P}$ est implicite dans les considérations de Gauß du chapitre VII des *Disquisitiones arithmeticae* (1801) sur la constructibilité des polygones réguliers. Il y démontrait le résultat suivant:
Pour que le polygone régulier à n arêtes soit constructible dans la géométrie euclidienne, il est nécessaire que n soit de la forme

$$2^s \times p_1 \times \ldots \times p_k$$

où $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers de Fermat distincts. Un nombre de Fermat s'écrit 2^t+1 avec $t = 2^u$. Fermat avait en 1640 l'idée que tous les nombres de ce type sont premiers (il connaissait les exemples $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$), mais Euler a montré en 1747 que $F_5 = 4294967297$ est composé (un facteur en est 641). Jusqu'à nos jours on n'a trouvé aucun autre nombre de Fermat premier et on ne sait pas s'il y en a d'autres ou non.
Le chapitre VII des *Disquisitiones arithmeticae* déjà cité fournit la justification de l'annonce célèbre de Gauß (de 1796) que le 17gone est constructible; bien entendu Gauß lui-même n'en a jamais proposé une construction à la règle et au compas. La première construction du 17gone fut donnée en 1802 par Pfleiderer suivi en 1822 par Paucker qui a construit aussi le 257gone (cf. Gauß X,2, p. 36). Le 65537gone fut attaqué par le mathématicien Hermes, qui y a travaillé une dizaine d'années (cf. Hermes 1894). Si on s'intéresse aux questions de constructibilité on peut reformuler le résultat de Gauß de la manière suivante: un angle π/n (ou $2\pi/n$) est constructible si n est de la forme $2^s \times p_1 \times \ldots \times p_k$ avec les conventions données plus haut. Ce fait était connu de Bolyai (cf. la fin du § 43).[5]
Le fait que la condition de Gauß est aussi suffisante fut démontré en 1837 par Pierre Laurent Wantzel dans son mémoire remarquable *Recherches sur les moyens de*

reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas dans lequel il montrait l'impossibilité de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. On peut constater qu'après le mémoire de Wantzel le problème de la constructibilité dans la géométrie euclidienne fut algébrisé avec succès. Il est vrai qu'on utilise aujourd'hui le langage de la théorie de Galois pour formuler les idées de Gauß et de Wantzel avec plus d'élégance. Mais ca ne change pas le fait que Gauß et Wantzel ont fait les pas décisifs.

(à suivre...)

Notes

1) Il est un peu compliqué de dater la parution de cette traduction parce que le tome 5 des Mémoires de Bordeaux contient des textes des années 1867 à 1869.

2) L'idée de ces constructions est certainement implicite dans les postulats 1 à 3 du premier livre des *Eléments* d'Euclide. Mais l'Alexandrin n'en donne aucun commentaire. Pour le rôle de la règle et du compas dans l'Antiquité on peut consulter le livre de Knorr.
Dans le texte qui suit on désignera par un chiffre romain les livres des *Eléments* d'Euclide et par un chiffre arabe les numéros des propositions. Par exemple IV,11 est la onzième proposition du quatrième livre.

3) Les droites sont une notion fondamentale de la géométrie, souvent non définie si on accepte le point de vue moderne. Le cercle est facile à définir. Soient dans un plan le centre M et P un point différent de M. Le cercle de centre M et de rayon MP est l'ensemble des points Q du plan considéré tels que MQ égale MP. Evidemment la définition donnée du cercle est valable dans la géométrie euclidienne et dans la géométrie hyperbolique.

4) Le corps ***P*** est caractérisé par Wantzel de la manière suivante:
... ainsi l'inconnue principale du problème [de construction] *s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré dont les coefficients seront fonctions rationnelles des données de la question et des racines des équations précédentes. D'après cela, pour connaître si la construction d'un problème de Géométrie peut s'effectuer avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre les racines de l'équation à laquelle il conduit de celles d'un système d'équations du second degré composées comme on vient de l'indiquer. Nous traiterons seulement ici les cas où l'équation du problème est algébrique.* (Wantzel 1837, 366)
On comprend bien que la terminologie de l'algèbre moderne n'était pas disponible à cet époque-là; le terme *corps* revient à Dedekind (*X. Supplement* aux *Vorlesungen über Zahlentheorie* par Dirichlet [1871]), Kronecker (1882) a parlé d'un *domaine de rationalité*.

5) En passant je veux noter que la traduction française par Houel n'est pas fidèle à l'originale dans le paragraphe 43: Bolyai parle d' une manière assez exagérée - qui était très typique - du *plus beau résultat des mathématiques contemporaines ou plutôt de tous les temps* ce qui n'est pas traduit par Hoüel.

RENCONTRE REGIONALE DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

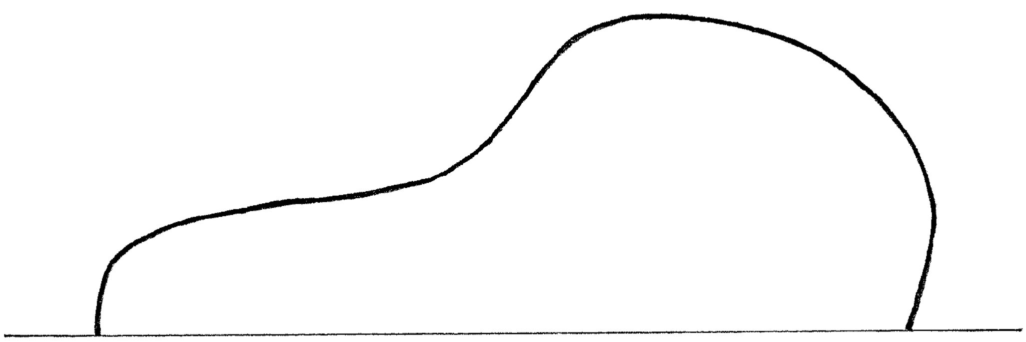
organisée par l'APMEP

Dans l'après-midi du samedi 30 mars 1996, une cinquantaine de professeurs de mathématiques se sont réunis au lycée Jean Monnet de Strasbourg. Une dizaine d'entre-eux avaient démarré cette rencontre par un déjeuner de travail au " Dodo gourmand " de Neudorf : tout un programme ! Les participants ont débuté l'après-midi avec une conférence plénière présentée par Etienne Meyer et intitulée " courbes de Bezier, Bspline et autres NURBS ", avant de se répartir en différents ateliers aux thèmes variés : " l'enseignement des mathématiques en lycée " animé par Jean-Pierre Richeton, " les jeux à utiliser en classe " animé par François Drouin, et " la dimension internationale dans l'enseignement des mathématiques " animé par Richard Cabassut. La dernière activité de cet après-midi, avant l'apéritif, fut l'assemblée générale ponctuée par l'élection d'un nouveau comité de la régionale APMEP d'Alsace. Pendant toute la rencontre, un stand était installé avec des brochures IREM et APMEP pour la consultation ou la vente.

COURBES DE BEZIER, BSPLINE ET AUTRES NURBS

Par Etienne Meyer

Un concepteur (dessinateur, technicien ou autre) aimerait que l'on puisse obtenir la "forme" F représentée sur le dessin n°1 et il lui faudrait des formules pour étudier, modifier, construire, réaliser ... cette forme.



Des formules ? oui, mais sous quelle forme ? La solution que nous allons retenir ici est celle des courbes paramétrées : dans un repère, les coordonnées d'un point courant de la courbe C sont données en fonction d'un paramètre à faire varier entre deux valeurs. Soit :

$M(t)\left|\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right.$ avec $t \in [a;b]$.

Le résultat fondamental sur les courbes paramétrées est le suivant.

Appelons $\overrightarrow{V(t)}$ le vecteur de coordonnées (x '(t); y '(t)). Si ce vecteur n'est pas nul, c'est un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point M(t).

Une interprétation importante des courbes paramétrées est donnée par la cinématique : en interprétant le paramètre t comme étant le temps, la courbe est la trajectoire d'un mobile M(t), la loi horaire est définie par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point $M(t)$, le vecteur dérivé $\overrightarrow{V(t)}$ est le vecteur vitesse, et le vecteur dérivé de $\overrightarrow{V(t)}$ est le vecteur accélération.
Mais quelles formules choisir ? Et à partir de quoi ?

Première idée : l'interpolation

- Choisir des points de la "forme" F en donnant leurs coordonnées dans un repère fixé.
- Chercher des fonctions "simples" définissant une courbe passant **par** ces points : on prendra des polynômes et on parlera d'interpolation polynomiale.

Deuxième idée : l'approximation

- Choisir des points de la "forme" F
- Chercher des fonctions "simples" définissant une courbe passant **près de** ces points.

Nous n'allons pas aborder ce point de vue. C'est toutefois un aspect très important et très utile dans de nombreux domaines.

Troisième idée : interpolation par morceaux

- décomposer la courbe en plusieurs morceaux
- appliquer la première idée avec la contrainte : les courbes ont mêmes tangentes aux points de raccordement.

Une toute autre idée : les courbes à pôles

Il s'agit d'un procédé de définition de courbes qui permet d'en modifier simplement l'allure : ce n'est pas très lumineux pour l'instant, mais vous allez voir, c'est terriblement efficace !
Le premier qui en a eu l'idée et qui l'a appliquée aux problèmes de l'industrie automobile est P. Bézier, ingénieur chez Renault, encore en vie. Depuis, son idée a été exploitée par bien d'autres et a donné naissance à ce qu'on appelle les courbes à pôles, parmi lesquelles il y a les courbes de Bézier, les B-Splines et plus récemment, les NURBS (Non Uniform Rational BSpline).

Nous allons examiner rapidement quelques solutions liées à la première idée et mettre en évidence les inconvénients de cette approche. Nous parlerons de quelques améliorations possibles mais sans trop approfondir.

En illustrant la troisième idée avec des fonctions très simples, nous allons mettre en évidence les points essentiels permettant le développement de la quatrième idée.

Nous montrerons ensuite les qualités essentielles des courbes à pôles et nous parlerons des améliorations apportées sans trop rentrer dans les aspects de technique mathématique.

Courbes d'interpolation polynomiale

Le problème est le suivant :

Etant donnés n points M_0, M_1 ... M_{n-1}, déterminer deux polynômes x(t) et y(t) définissant une courbe C passant par ces n points.

Voici une solution possible : en choisissant n-1 comme degré des polynômes et en traduisant la contrainte par $M(k) = M_k$ pour k de 0 à n-1, le problème possède en général une solution et une seule.

Examinons ceci sur un exemple :
- Choix des points : (0;0), (1;3), (11;5), (17;10), (27;6), (26;0).
- Résultat (Dessin 2.1) : ce n'est pas très fameux !

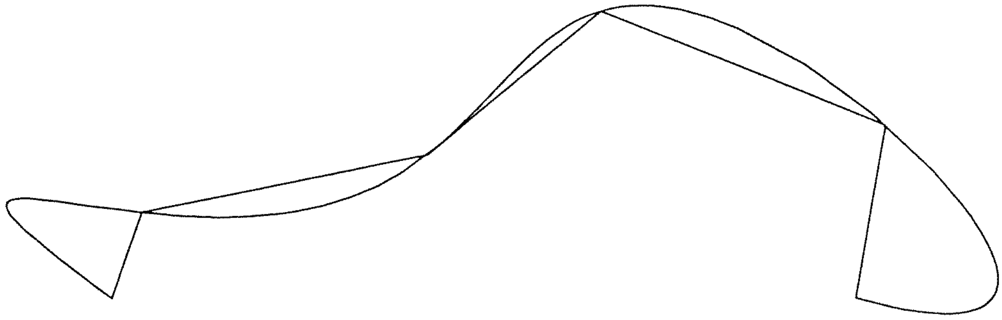
Augmentons le nombre de points :
- Après insertion du point (5;4), on obtient le Dessin 2.2
- Après insertion supplémentaire de (27;2), on obtient le Dessin 2.3 : cela ne s'arrange pas !

Ce phénomène est irrémédiable et bien connu : la solution ne consistera pas à augmenter le nombre de points !

Une amélioration est cependant possible en choisissant "mieux" les "nœuds", c'est à dire les valeurs du paramètre pour lesquelles M(t) est l'un des points donnés.

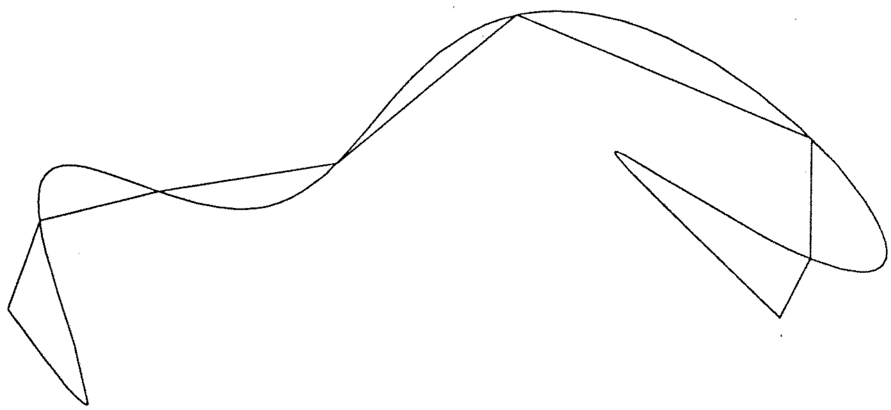
Sans trop approfondir cette question, voici (Dessin 2.4) ce que l'on obtient en prenant comme suite des noeuds, (0,1,5,8,12,14) à la place de (0,1,2,3,4,5) . Sur quoi ce choix est-il basé ? Voici la réponse : les valeurs du paramètre sont proportionnelles à la longueur de la ligne polygonale depuis M_0.

Une question importante se pose à priori : la courbe obtenue par ce procédé d'interpolation polynomiale, est-elle indépendante du repère dans lequel se font les calculs ?



2.1

2.2



2.3

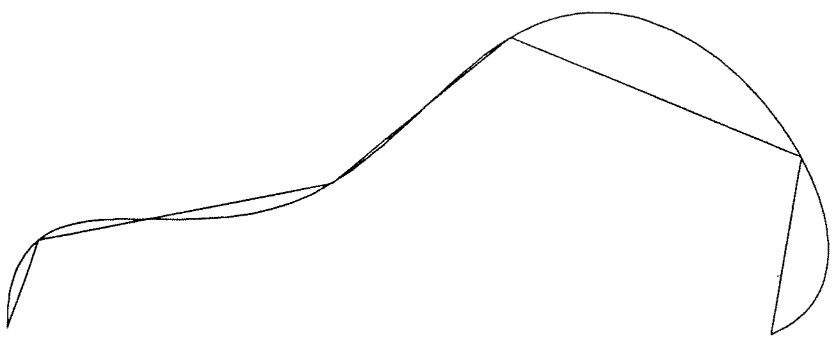


Figure 2

2.4

Interpolation par morceaux

En poussant l'idée à l'extrême voici la manière dont on peut poser et résoudre le problème :

- choisir n points de la courbe à obtenir
- pour chaque couple de points consécutifs, chercher une courbe passant par ces deux points et, sauf pour la première, tangente à la précédente au point de raccord.

On a donc, sauf pour la première courbe, trois conditions à respecter. D'où l'idée toute simple de chercher un paramétrage à l'aide de polynômes du second degré (en faisant varier à chaque fois le paramètre entre 0 et 1). Il restera encore un choix à effectuer pour le départ. La contrainte de tangence sera traduite par $\overrightarrow{V_k}(1) = \overrightarrow{V_{k+1}}(0)$.

Voir le résultat obtenu avec $\overrightarrow{V(0)} = (0;1)$ au dessin 3.1

Voir le résultat obtenu avec $\overrightarrow{V(0)} = (2;3)$ et en inversant la liste des points au dessin 3.2

Ce n'est toujours pas très fameux, mais des améliorations sont possibles :

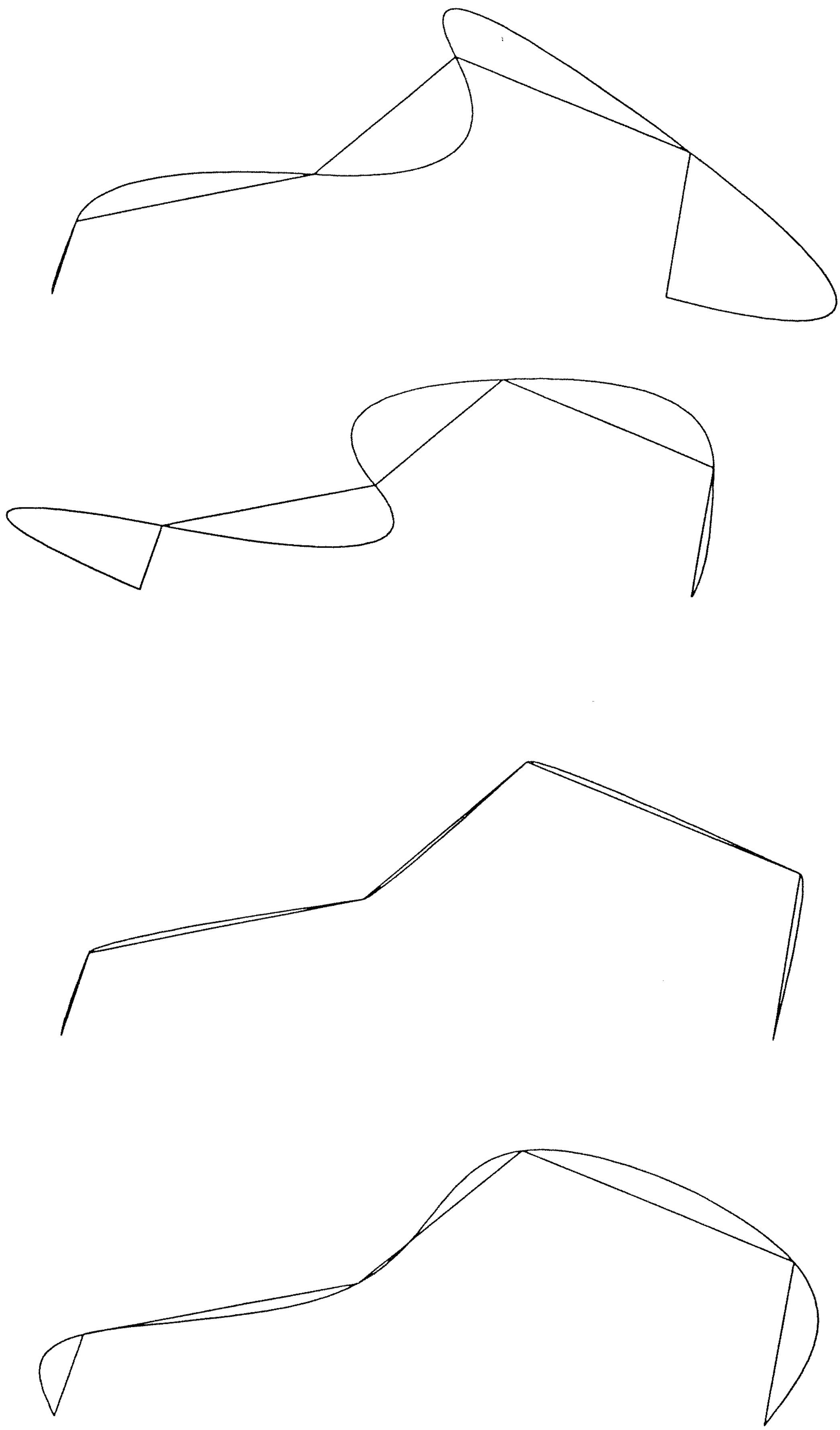
- en remplaçant $\overrightarrow{V_k}(1) = \overrightarrow{V_{k+1}}(0)$ par $\overrightarrow{V_k}(1) = \lambda.\overrightarrow{V_{k+1}}(0)$ (ce qui suffit pour la tangence des courbes). En choisissant λ pour que $\|\overrightarrow{V_k}(0)\| = \|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\|$, voir ce que l'on obtient au dessin 3.3 (avec la liste initiale des points et un vecteur vitesse colinéaire à (0;1) au départ)
- en prenant des polynômes de degré 3 : la liberté supplémentaire de raccord peut se traduire de diverses manières. Une solution consiste à imposer l'égalité des vecteurs vitesse et accélération. La liberté au départ peut se traduire par exemple en imposant des vecteurs accélération nuls au départ et à l'arrivée (voir dessin 3.4). C'est une solution effectivement utilisée, cumulée d'ailleurs avec l'amélioration précédente.

Etude de l'interpolation quadratique entre deux points

Problème :

étant donné deux points M_0 et M_1 et un vecteur $\overrightarrow{V_0}$, déterminer trois vecteurs A, B et C tels que la courbe paramétrée par $\overrightarrow{OM}(t) = t^2.A+t.B+C$ vérifie : $\begin{cases} M(0)=M_0 \\ M(1)=M_1 \\ \overrightarrow{V(0)}=\overrightarrow{V_0} \end{cases}$

Ce problème est facile à résoudre et on obtient : $A = \overrightarrow{M_0M_1} - \overrightarrow{V_0}$; $B = \overrightarrow{V_0}$; $C = \overrightarrow{OM_0}$



3.1

3.2

3.3

Figure 3

3.4

Remarque 1 : la courbe obtenue ne dépend pas du repère comme le montre clairement le résultat : $\overrightarrow{M_0M(t)} = t^2.\overrightarrow{M_0M_1} + t(1\text{-}t).\overrightarrow{V_0}$

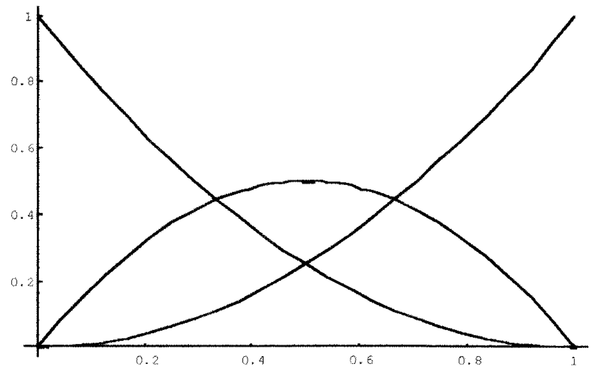
Remarque 2 : en fait, il y a une écriture bien plus belle encore.

Faisons intervenir, par raison de "symétrie", le vecteur $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V(1)}$ et appelons P le point d'intersection des tangentes en M_0 et M_1.
P est le milieu du segment M_0N_0 et du segment M_1N_1, où N_0 et N_1 sont définis par $\overrightarrow{M_0N_0} = \overrightarrow{V_0}$ et $\overrightarrow{M_1N_1} = -\overrightarrow{V_1}$.

On obtient simplement : $\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^2.\overrightarrow{OM_0} + 2t(1-t).\overrightarrow{OP} + t^2.\overrightarrow{OM_1}$.

Ceci s'interpréte de la belle manière suivante : **M(t) est le barycentre des points M_0, P et M_1 affectés des coefficients $(1\text{-}t)^2$, $2t(1\text{-}t)$ et t^2** dont la somme est bien égale à 1.
En effet, il s'agit de la formule du binôme appliquée à $((1\text{-}t) + t)^2$.

Voici comment évolue avec le paramètre t, les poids des points, leur importance, la force avec laquelle ils attirent la courbe vers eux :



Remarque 3 : construction du point courant et de la tangente courante.
$\overrightarrow{V(t)} = 2(1-t).\overrightarrow{OM_0} + 2(1-2t).\overrightarrow{OP} + 2t.\overrightarrow{OM_1}$
Soit P_1 le barycentre de $(M_0, (1\text{-}t))$ et (P, t) ; soit P_2 le barycentre de $(P, (1\text{-}t))$ et (M_1, t)

Eh bien : M(t) est le barycentre de $(P_1, (1\text{-}t))$ et (P_2, t) et $\overrightarrow{V(t)} = 2.\overrightarrow{P_1P_2}$

Dans ce petit exemple, et d'ailleurs dans les résultats que nous allons aborder maintenant, il y a l'essentiel des idées et des résulats des courbes de Bézier et des B-Splines.

Les courbes de Bézier

Définition :

Soit $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n$ n+1 points appelés pôles.
La courbe de Bézier définie par ces pôles est la courbe paramétrée définie par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{k=0}^{k=n} B_{n,k}(t).\overrightarrow{OP_k}\text{ , t variant de 0 à 1 avec } B_{n,k}(t) = C_k^n(1-t)^{n-k}t^k \text{ (Polynômes de Bernstein)}$$

Propriétés :

- $M(t)$ est le barycentre des points P_k affectés des coefficients $B_{n,k}(t)$: la définition ci-dessus est donc indépendante du repère
- $M(0) = P_0$; $M(1) = P_n$
- $\overrightarrow{V(0)}$ est dirigé par $\overrightarrow{P_0P_1}$; $\overrightarrow{V(1)}$ est dirigé par $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$
- Pout tout t, M(t) est à l'intérieur du polygone convexe défini par les pôles
- l'influence de P_k est maximale pour $t = k/n$.
- construction du point courant et de la tangente courante : c'est le même principe que pour l'interpolation quadratique exposée ci-dessus. On les obtient par barycentres successifs (et pour obtenir les points les plus sous influence des pôles, faire ces constructions pour $t = k/n$).
- l'influence d'un pôle : elle est globale, mais essentielle sur la partie de la courbe voisine du point correspondant : voir figure 4 ci-contre.

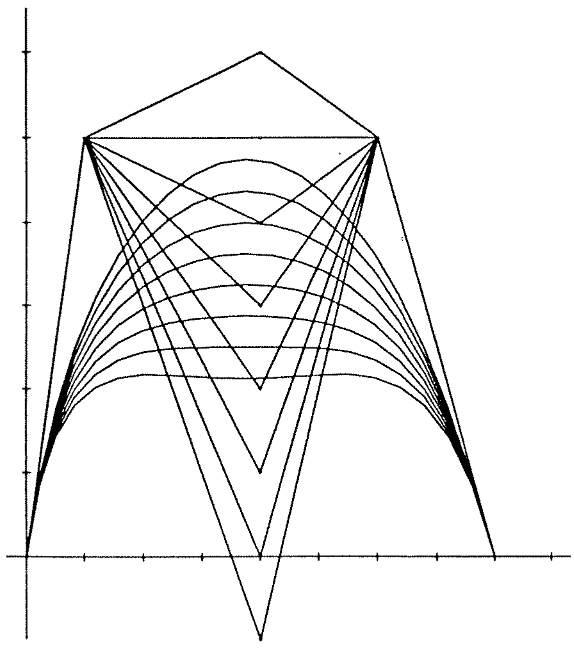


Illustration :

Revenons à notre problème initial : recherche d'une courbe paramétrée, maintenant sous forme de courbe de Bézier, approchant la forme donnée par le dessin n°1. Il s'agit de déterminer les pôles. Un technicien, dans son bureau d'études, le fera par essais-erreurs ou à partir d'exemples précédemment réalisés. Pour les besoins de cet article et l'intérêt mathématique que cela présente, procédons différemment. Cherchons (en résolvant un système linéaire) les pôles $P_0, P_1, \ldots P_5$ définissant une courbe de Bézier, de telle sorte que celle-ci passe par les six premiers points $M_0, M_1, \ldots M_5$ choisis sur la "forme". On aura en particulier $P_0 = M_0 = (0,0)$ et $P_5 = M_5 = (26,0)$. Mais les autres pôles P_i auront des positions bien différentes des points M_i et cette courbe identique à la courbe obtenue pour le dessin 2.1. Le résultat, on le sait, n'est guère satisfaisant pour le problème posé (voir dessin 5.1, sur lequel figure le polygone des points choisis sur la forme, le polygone des pôles calculés et la courbe de Bézier correspondante passant bien par les cinq points choisis). Mais désormais nous disposons des pôles, et grâce à leurs propriétés (et à l'interprétation géométrique de ces propriétés) nous "savons" comment déplacer ces pôles pour que la courbe de Bézier associée donne un résultat satisfaisant notre attente. (l'Ouvert n'étant pas encore une revue électronique, il vous faut imaginer les manipulations faites pour aboutir au dessin 5.2 ; la courbe de Bézier obtenue ne passe plus exactement par les six points choisis mais fournit un résultat global plus satisfaisant).

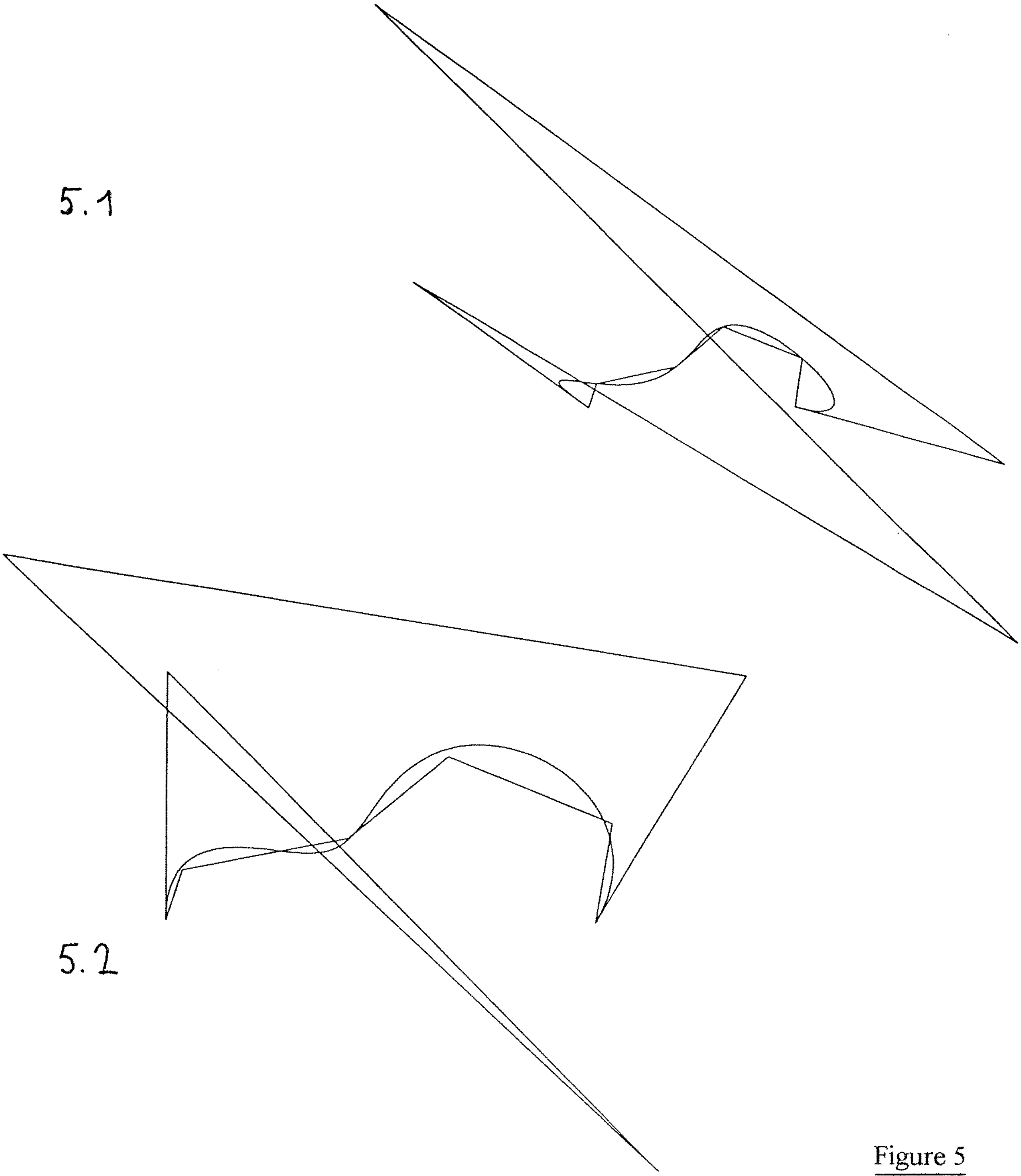


Figure 5

Les B-Splines

Parmi les inconvénients des courbes de Bézier, il y a le fait que la modification d'un pôle entraîne la modification de toute la courbe (avec toutefois une importance de la modification plus grande près du point correspondant au pôle) et surtout le fait que le degré des polynômes qui interviennent (et donc la complexité des calculs) est égal au nombre de pôles (moins 1).

Pour réduire ces inconvénients tout en gardant les avantages des courbes de Bézier, une solution consiste à changer les polynômes de bases qui interviennent pour le calcul de M(t).

On aura toujours $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{k=0}^{k=n} B_k(t).\overrightarrow{OP_k}$ mais avec d'autres fonctions $B_k(t)$. Celles-ci seront définies à partir d'une séquence nodale $(t_0,t_1,\ldots t_p)$, le paramètre t variant de t_0 à t_p, mais garderont les propriétés fondamentales suivantes : pour tout t, $0 \leq B_k(t) \leq 1$ et $\sum_{k=0}^{k=n} B_k(t) = 1$.

Pour assurer une influence uniquement locale, les fonctions B_k seront nulles sur une une bonne partie de l'intervalle $[t_0 ; t_p]$.

Les représentations de ces fonctions dans le cas d'ordre 2 et pour la séquence nodale (0,1,1,3,4,6,6,6) sont données par la figure 6.

Ces fonctions ont des propriétés de calcul analogues aux polynômes de Bernstein (calcul récursif, calcul des dérivées) et procurent une grande souplesse tout en permettant l'usage de polynômes de faible degré.

Les polynômes de Bernstein apparaissent d'ailleurs comme des cas particuliers de Bsplines (avec des séquences nodales uniformes).

Les N.U.R.B.S.

Les possibilités offertes par les Bsplines ne règlent cependant pas le problème de la représentation du cercle comme une courbe à pôles. Or cette représentation serait d'une grande utilité : elle permettrait une uniformisation du type de courbes utilisées, "nécessaire" pour des questions de normalisation et de simplification des définitions de surface.

Un cercle ne peut pas être obtenu comme courbe paramétrée à l'aide de polynômes.
Essayons de nous en convaincre. Le degré 2 devrait suffire si cela était possible.
Or une courbe polynomiale de degré 2 est une parabole.
(Démonstration laissée aux soins du lecteur)

L'idée simple suivante va nous permettre d'obtenir une paramétrisation (non polynomiale) de tout arc de conique et en même temps nous fournir les bases de la généralisation des Bsplines : les NURBS.

Une parabole est une section particulière d'un cône. En faisant une projection conique de cette parabole à partir du sommet du cône et sur un plan orthogonal à l'axe du cône, on obtient bien un cercle (et d'autres coniques , en projetant sur d'autres plans).
D'où l'idée de définir une courbe de Bézier de degré 2 dans l'espace (une parabole) et de la projeter (en projection conique) sur un plan ne passant pas par le sommet. En prenant comme plan le plan d'équation $Z = 1$, cela revient à associer au point de l'espace (X,Y,Z) le point du plan $(x=X/Z, y=Y/Z)$. Cela revient en fait à faire de la géométrie projective !

Ce procédé se généralise aux courbes de Bézier de degré quelconque et même au Bsplines.

Voici ce que cela donne pour les courbes de Bézier.

Point de vue théorique :

Soit $P_k(X_k,Y_k,Z_k)$ des pôles de l'espace.
$M(t)$, point de l'espace, est défini par $\sum B_{n,k}(t).P_k$, c'est-à-dire : $X(t) = \sum B_{n,k}(t).X_k$ et de même pour $Y(t)$ et $Z(t)$.

On définit alors $m(t)$, point du plan, par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sum B_{n,k}(t).X_k}{\sum B_{n,k}(t).Z_k} \\ y(t) = \dfrac{\sum B_{n,k}(t).Y_k}{\sum B_{n,k}(t).Z_k} \end{cases}$

En posant $x_k=X_k/Z_k$ et $y_k=Y_k/Z_k$ on obtient : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sum B_{n,k}(t).Z_k x_k}{\sum B_{n,k}(t).Z_k} \\ y(t) = \dfrac{\sum B_{n,k}(t).Z_k y_k}{\sum B_{n,k}(t).Z_k} \end{cases}$

Ceci fait encore apparaître $m(t)$ comme le barycentre des points p_k (x_k,y_k) et on conserve ainsi une bonne partie de l'interprétation fondamentale des courbes à pôles.

Point de vue pratique : formules des courbes de Bézier rationnelles (cas particulier des NURBS)

Soient P_k (x_k,y_k), $n+1$ pôles (du plan) et $(h_0, h_1, \dots h_n)$ des poids (nombres positifs).

On définit M(t) par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sum B_{n,k}(t).h_k x_k}{\sum B_{n,k}(t).h_k} \\ y(t) = \dfrac{\sum B_{n,k}(t).h_k y_k}{\sum B_{n,k}(t).h_k} \end{cases}$

Les arcs de coniques peuvent être paramétrés de cette manière. En particulier, voici le choix des pôles et des poids pour obtenir l'arc de cercle de centre C, d'extrémités A et B :

$P_0 = A$, $P_2 = B$ et P_1 est le point d'intersection des tangentes en A et B.
$h_0 = h_2 = 1$ et $h_1 = \cos(a)/2$ où a est l'angle intercepté.

Bibliographie : de très nombreux ouvrages existent sur la question.

En voici quelques uns :

A practical guide to splines - Carl de Boor - Springer-Verlag
Curves and surfaces for Computer aided geometric design - G. Farin - Academic Press
Modélisation et construction de surfaces pour la CAO - JC Léon - Hermes

Pour l'enseignement en BTS, on pourra se servir de Courbes de Bézier et B.Splines édité par l'IREM de Paris Nord.

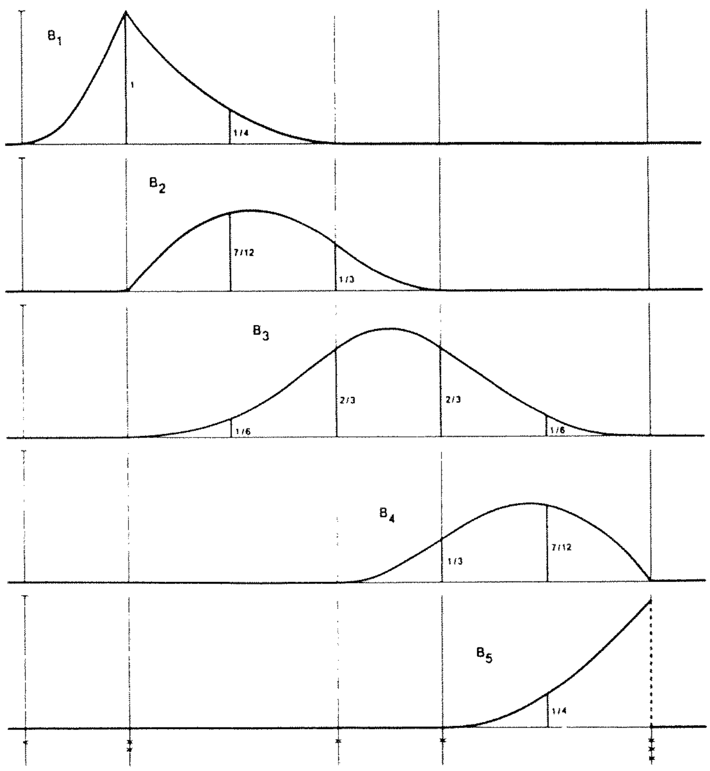


Figure 6

COMPTE-RENDU DE L'ATELIER *"ECHANGES SUR L'ENSEIGNEMENT EN LYCEE"*

Par Jean-Pierre Richeton, à l'époque membre du bureau national de l'A.P.M.E.P, chargé des lycées

"L'épreuve de mathématiques au bac permet-elle d'évaluer l'aptitude à la démarche scientifique?"

"Que signifie la réussite au bac en mathématiques?"...

"Quid des mathématiques du citoyen?"...

Questions déjà maintes fois posées... et qui le restent...

En tout cas elles ont permis, comme lors de la dernière réunion de la commission lycée de l'A.P.M.E.P, d'alimenter cet échange de manière fructueuse, en faisant encore avancer un peu plus notre réflexion, comme vous pourrez en juger par les interventions qui suivent.

- S'il est tout à fait souhaitable, qu'un jour d'examen, les élèves bénéficient d'indications leur permettant de ne pas rester *"bloqués"* ou leur permettant de pallier une erreur éventuelle aux répercussions disproportionnées, comment ne pas regretter cependant la rédaction des sujets actuels où les élèves sont guidés à l'excès, jusqu'à donner les réponses à certaines questions ainsi que **la** (?) méthode à utiliser.
N'est-ce pas en contradiction avec les objectifs du programme qui affirment viser à *"l'acquisition de méthodes"* ou à entraîner les élèves *"à choisir et utiliser les outils pertinents parmi..."*?
Où est la formation à *"la capacité à mettre en œuvre une démarche"*? et est-ce là la formation du citoyen tant prônée?

-Pourtant les élèves aiment ***chercher, inventer***... Il suffit pour s'en persuader de constater le succès du ***Rallye mathématique d'Alsace*** ou de ***Mathématiques sans frontières***...

- En classe aussi, quand on peut donner le temps à nos élèves pour les mettre dans une situation de véritable recherche (en modules par exemple), ceux-ci peuvent alors nous dévoiler toutes leurs qualités : ***initiative, créativité, imagination*** etc...

- D'ailleurs, peut-on admettre encore longtemps que perdure dans l'esprit du public et surtout de nos élèves qu'il y ait deux sortes de mathématiques : l'une, en classe, subie et rébarbative et l'autre ludique et enrichissante...?

- Il y a quelques années, dans le cadre d'un groupe *"heuristique"* de l'IREM de Strasbourg, des collègues avaient entraîné leurs élèves, à raison d'une heure par semaine, à la recherche de problèmes *"ouverts"*. Cette expérience a permis de constater que certains problèmes rédigés de deux façons, l'une à l'énoncé *"ouvert"* et l'autre où l'énoncé était plus *"fermé"* (*"décortiqué"* en étapes...) ont été mieux réussis à partir de l'énoncé *"ouvert"*...

- La commission lycée de l'A.P.M.E.P. propose d'amorcer un véritable *"virage"* en introduisant au bac un exercice de type *"recherche"* ***à condition d'évaluer les candidats sur leurs démarches***, qu'elles soient fructueuses ou non, pourvu qu'elles soient explicitées. La **présence** d'un tel exercice **au bac** semble en effet la condition pour que les pratiques évoluent dans le sens souhaité par les objectifs des programmes cités plus haut.
- Mais, comme cela a déjà été dit, la *"règle doit être claire"* : il nous faut auparavant nous y préparer et préparer nos élèves et on ne se privera sans doute pas de nous objecter que ce type de démarche est coûteuse en temps.
- Autre *"inconvénient"*, les effets de ce type de démarche ne sont pas immédiatement visibles. A l'inverse, par exemple, d'une séance de T.D. suivie d'une interrogation... mais qu'en est-il quelques semaines après? On sait en effet combien les élèves travaillent leur *"mémoire à court terme"* pour le lendemain voire les 5 minutes qui suivent, juste avant une interro...

- Se pose alors le problème de l'évaluation...

Le sentiment d'échec est écrasant pour qui n'est jamais en situation de réussite. Par conséquent il est important de pouvoir encourager un élève surtout s'il ne réussit pas à résoudre complètement un problème. Lors du dernier rallye mathématique d'Alsace, un professeur a eu le bon réflexe de demander aux élèves de rendre leurs brouillons avec leurs copies. Le résultat fut assez éloquent : en effet, autant certaines copies ont pu se révéler plutôt vides, autant certains brouillons se sont révélés riches des démarches essayées mais non dévoilées sur la copie. Ce qui tendrait à prouver qu'effectivement les élèves n'osent pas rendre un travail non *"bouclé"*. D'autre part ces brouillons nous dévoilent combien nos élèves sont capables d'***initiatives*** et d'***imagination*** si l'on en juge par les essais de démonstrations qu'on y trouve.

En cela les exercices style *"narration de recherche"* peuvent, entre autres, permettre ces encouragements en valorisant, par exemple, toute piste essayée par l'élève même si elle n'a pas abouti. Une autre phrase est de l'entraîner à travailler par contre-exemples pour examiner si telle ou telle démarche a des chances d'être correcte ou au contraire pour qu'il se rende compte qu'il a fait *"fausse route"* et d'éviter que par la suite il puisse écrire une chose et son contraire comme c'est encore, hélas, trop souvent le cas aujourd'hui avec nos élèves. De toute évidence notre façon de noter serait à revoir pour ce type d'exercices...

Mais tout en ne perdant pas de vue que le but reste la démonstration, nous pensons qu'il est possible en mathématiques d'évaluer ce type de démarche, à l'instar de nos collègues de philosophie, ou d'histoire-géographie, par exemple.

Cependant cette évolution dans nos pratiques n'est pas sans soulever déjà quelques craintes voire des objections très marquées.

- L'enthousiasme rencontré lors de rallyes ou d'épreuves du même genre restera-t-il le même si cela devient obligatoire?
- Ne risque-t-on pas de voir ce type de démarche abandonné très vite au profit des mathématiques *"classiques"* plus sécurisantes pour le professeur, voire pour l'élève lui-même, sans parler de ses parents...?
- Ne risque-t-on pas de retomber dans une nouvelle forme de *"bachotage"*?...
- Il faudra veiller à éviter que ce type de démarche n'aboutisse à un discours creux (on raconte...) et bel et bien exiger dans une phase ultérieure, une fois passé le *"déblocage"* souhaité, l'apprentissage de la démonstration et de sa rédaction ordonnée avec rigueur.

Suivent alors quelques interrogations sur la façon d'annoter les copies d'examen et en particulier celles du bac. Depuis, l'Inspection Générale a adressé une note aux IPR avec des recommandations répondant à nos préoccupations.

Le problème posé par les derniers modèles de calculatrices est également abordé. Une réflexion de fond est également engagée à l'A.P.M.E.P sur ce sujet.

Cet échange se termine sur un constat en guise de *sonnette d'alarme* : si les mathématiques sont nécessaires, aujourd'hui plus que jamais, à la formation de tout individu, alors comment interpréter les dernières réformes et la perte sèche du nombre d'heures à assurer en mathématiques que cela a entraînée (diminution des horaires + diminution des effectifs...), sans parler de l'appauvrissement des contenus...?

... à suivre... ?

DES JEUX EN CLASSE DE COLLEGE.

POURQUOI? COMMENT?

François Drouin
APMEP Lorraine - Collège Les Avrils - 55300 SAINT-MIHIEL

Le 30 Mars dernier, une vingtaine d'adhérents de la Régionale alsacienne de l'APMEP ont eu quelques éléments de réponse à la question posée en titre, à partir d'une expérience durant depuis plusieurs années en Lorraine (et au collège de Saint Mihiel en particulier). Voici quelques lignes pour les collègues n'ayant pu participer à cette journée.

POURQUOI?

L'introduction du jeu en classe permet de ne pas réserver l'activité ludique à une certaine élite apte à sortir de l'aspect *"Mathématiques calculatoires, utilitaires"* et autorisée à connaître le plaisir de la recherche, du jeu, de la découverte, alors que l'élève moyen se contenterait de *"compétences exigibles"*.

Il est clair que d'autres pistes tendent aux mêmes buts : la pratique du problème ouvert, les rallyes mathématiques en classe entière par exemple.

L'introduction du jeu en classe est une des occasions d'analyser la perception par le geste, le toucher. L'usage du compas, de la règle, de l'équerre offrent des possibilités semblables mais ces objets sont trop souvent considérés comme de vulgaires outils. Les pièces d'un jeu s'utilisent de façon réfléchie et leur manipulation est un des éléments du jeu.

L'introduction du jeu en classe est également une des possibilités de remotivation d'élèves fâchés avec le travail intellectuel et les mathématiques en particulier. Les élèves acceptent d'être en situation de recherche pendant des durées dépassant l'heure de cours. L'élaboration et la construction de jeux en classe offre l'occasion de réintroduire des activités mathématiques dans des familles croyant avoir perdu contact avec cette matière.

Lors du déroulement d'un jeu, TOUT élève est actif, en situation de recherche et progresse vers le but final. En classe, trop d'élèves se contentent d'écouter ou de recopier les mathématiques faites par le professeur ou d'autres élèves.

COMMENT?

L'enseignant peut faire jouer ses élèves seuls ou à plusieurs. Les brochures *"Jeu de l'oie"* et *"Dominos mathématiques"* (IREM de Lorraine) présentent des exemples de jeux pour des groupes de 2, 3 ou 4 élèves. Le gain du jeu nécessite alors d'être meilleur (ou plus chanceux...) que ses adversaires, tandis que dans le cas du jeu en solitaire, ce gain n'est acquis que par la volonté de réussite du joueur.

Pour l'enseignant, la prudence s'impose alors. En cas d'échec, l'élève joueur doit malgré tout s'estimer en réussite partielle et croire en ses possibilités de progrès. Il aura par exemple placé **presque toutes** les pièces du jeu, d'où le succès constaté en classe des *"24 carrés de Mac Mahon"* (Jeux 1, APMEP) et des *"combis"* (Ludi-Math n°1, APMEP de Poitiers).

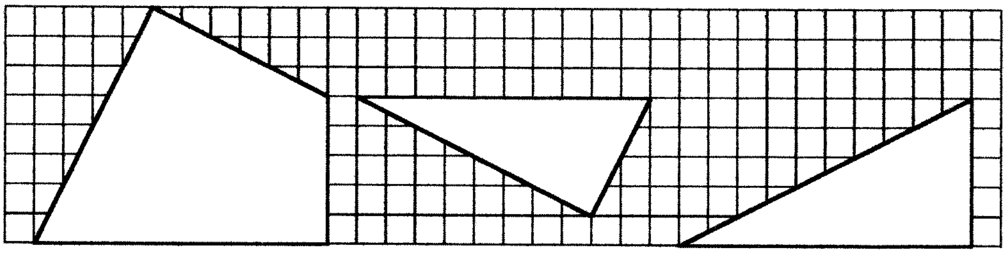
La règle du jeu doit être rapidement assimilée (carrés de Mac Mahon et combis déjà cités, polycubes comme le cube Soma (Jeux 3, APMEP), puzzles de la famille du Tangram (Jeux 1, APMEP).

Ces quelques conditions respectées, il n'est que peu d'élèves refusant ce type d'activités. Reste alors à l'enseignant à créer des prolongements mathématiques ou utiliser les mathématiques présentes à l'intérieur du jeu.

Pour l'observateur ou le joueur, d'autres questions se posent :

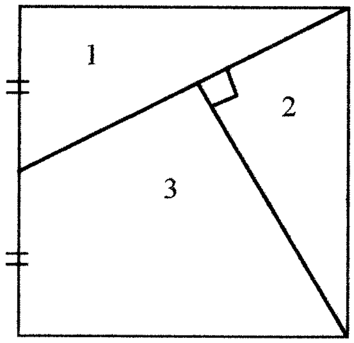
QUEL ASPECT DOMINE : LE JEU OU L'ACTIVITE MATHEMATIQUE?

Mettons-nous un instant à la place de l'élève dans sa classe (ou à la place de l'enseignant lors d'un stage de formation).



Voici trois pièces d'un puzzle.
Utilise ces pièces pour réaliser un parallélogramme non rectangle, un trapèze isocèle, un triangle rectangle, un carré, un rectangle non carré.

Réalisons ces pièces sur du carton, cherchons ce qui est demandé et notons nos réactions, nos stratégies, notre temps de recherche.
Le hasard tient une grande place et l'élève n'est guère tenté de faire une analyse des pièces et des configurations à obtenir.



Réalisons maintenant cette deuxième activité :

Découpe les trois pièces dans un carré de carton de 10 cm de coté.
Avec les trois pièces, réalise un parallélogramme non rectangle, un trapèze isocèle, un triangle rectangle, un rectangle non carré.

COMMENCE LA RECHERCHE DE CHAQUE POLYGONE A PARTIR DU CARRE RECONSTITUE.

Les transformations géométriques apparaissent rapidement : rotations, translation, ... etc...

Des questions viennent :

le rectangle obtenu est-il un *"vrai rectangle"*?
les triangles 1 et 2 ont-ils des angles égaux?

D'autres peuvent être suggérées :

l'aire de la pièce 3 est-elle égale à la somme des aires des pièces 1 et 2?
le périmètre de la pièce 3 est-il égal au périmètre de la pièce 1?
quel est le périmètre des trois pièces du jeu?

La manipulation de ce jeu utilise des compétences mathématiques et est source d'autres prolongements en utilisant les questions que peuvent se poser l'utilisateur ou l'observateur.

En classe, l'activité mathématique devient rapidement prépondérante mais l'élève ne se rend pas toujours compte du moment où celle-ci glisse du jeu vers les mathématiques. Le temps passé à jouer devient temps d'apprentissage.

ET LE PROGRAMME?

Pour répondre à cette question, voici quelques extraits du nouveau programme de la classe de 6^{e}.

> FINALITES ET OBJECTIFS :
> Au collège, on constate qu'une proportion importante d'élèves s'intéresse à la pratique des mathématiques et y trouve du plaisir. Il est possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre. Une telle activité est ainsi accessible au plus grand nombre et a une valeur formatrice évidente.

OU TROUVER DES IDEES?

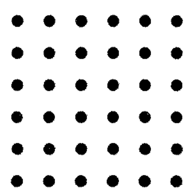
Jeux 1 - Jeux 2 - Jeux 3 (APMEP)
Ludi Maths 1, 2, 3 et 4 (APMEP - Poitiers)
Objets mathématiques (A paraître - APMEP Lorraine)
Jeux de formes et formes de jeux (IREM - CRDP Besançon)
Jeux de l'oie (IREM de Lorraine)
Dominos mathématiques (IREM de Lorraine)
Autour du cube Soma (IREM de Lorraine)
Spiele : Mathematik (J. Lichtenberger - Schwann)
Rechenspiele (J. Lichtenberger - U. Mittrowann - Cornelsen)
Spiele Ritsel Zahlen (J. Lichtenberger - Cornelsen)
... Lege Spiele (K.H. Coch - Dumont Taschenbcher).

ET VOUS, CHERS LECTEURS, SI VOUS JOUIEZ?

Le jeu utilisé dans la *"fiche élèves"* ci-dessous vous donnera, je l'espère, quelques envies. (Le jeu de HIP est présenté dans Ludi Maths 2 - APMEP Poitiers).

JEU DE HIP

Matériel : Un plateau de jeu percé de 36 trous disposés en carrés 6×6 pour 2 joueurs - 18 pions d'une couleur, 18 pions d'une autre couleur.



A défaut de plateau, du papier quadrillé sur lequel sont marqués 36 points disposés en carré et deux stylos de couleurs différentes pour marquer les emplacements des *"pions"*.

1) Jeu à deux joueurs (jouez 3 parties) :

chaque joueur prend 18 pions d'une même couleur.
L'un des joueurs commence. Pour les parties suivantes, honneur au perdant.
Chaque joueur, à son tour, place un pion de sa couleur dans un des trous du plateau, en évitant de faire un carré (attention aux carrés dont les côtés ne sont pas parallèles aux bords du plateau!!!).
Le gagnant est le premier qui dénonce un carré chez l'adversaire.

Remarques : Il faut bien sûr éviter de jouer, si possible, sur les cases qui occasionnent la réalisation d'un carré chez l'adversaire, pour que celui-ci soit obligé le premier, de jouer sur l'une de ces cases. Il existe une stratégie non perdante pour le 2e joueur. Peut être la trouverez-vous?

2) Jeu en solitaire (dans le cas où les membres du groupe sont en nombre impair) :

Sans tenir compte de la couleur des pions, le joueur place des pions dans les trous.
Les pions doivent être placés de telle sorte que 4 quelconques d'entre eux ne forment pas de carrés.
Combien le joueur peut-il, au maximum, placer de pions?

3) Dessins de carrés :

Sur ton cahier, en utilisant les intersections du quadrillage, **dessine 6 carrés** tels que :
a) leurs côtés aient 6 longueurs différentes,
b) les côtés de deux carrés différents ne soient jamais parallèles,
c) les sommets des carrés sont des points d'intersection du quadrillage.

DIMENSION INTERNATIONALE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Par Richard Cabassut

Une rencontre a été proposée dans le cadre de la journée régionale de l'A.P.M.E.P sur le thème de la dimension internationale dans l'enseignement des mathématiques. Trois thèmes ont été abordés par 11 participants : l'enseignerment en sections européennes, l'option internationale de l'IUFM et les échanges internationaux.

1. L'enseignement mathématique en sections européennes.

La circulaire ministérielle du 19 août 1992 a mis en place les sections européennes destinées, à moyen terme, à remplacer les sections appelées jusqu'ici *"bilingues"*. Les services du rectorat expliquent les spécificités des sections européennes : *"Un enseignement renforcé de la langue vivante, la substitution progressive à cet enseignement renforcé de langue, de l'enseignement d'une discipline dans la langue vivante choisie. Le choix de la discipline n'est pas déterminé a priori. Il se fait en* *fonction des ouvertures culturelles qu'il facilite et des compétences des maîtres. Cet enseignement est conduit par des enseignants de l'établissement, avec le concours d'enseignants étrangers affectés aux établissements dans le cadre des échanges de maîtres, ou d'intervenants choisis pour leur compétence. Enfin dans le cadre du projet d'établissement, des activités culturelles et d'échanges avec des établissements étrangers peuvent être organisées en vue de l'acquisition d'une connaissance approfondie de la culture de la langue de la section."*

En 1995 on dénombrait 6 collèges, 3 lycées et 1 L.E.P où des sections européennes impliquaient l'enseignement des mathématiques en langue étrangère, pas nécessairement comme discipline officielle, mais comme discipline associée dans le cadre du projet d'établissement.

Les collègues présents à la rencontre de Strasbourg enseignent en collège ou en lycée, en sections européennes rattachées à l'une des trois langues, Anglais, Allemand, Espagnol.

Un collègue enseigne les mathématiques en allemand au collège. C'est en allemand que le dispositif est le plus avancé. Rappelons qu'en Alsace des élèves ont pu suivre dès la maternelle un enseignement sur site bilingue (13 heures en allemand et 13 heures en français). Pour ces élèves, à l'école primaire, les mathématiques font partie des matières enseignées en allemand, à l'exception de la géométrie. Au collège et au lycée, les mathématiques sont enseignées partiellement en allemand. En sixième et cinquième il y a sensibilisation sur des regroupements d'heures de soutien ou approfondissement. En quatrième et troisième une heure est prise sur la dotation horaire globale pour être consacrée à cet enseignement. Bien entendu il ne faut pas mettre les élèves en échec par rapport aux mathématiques à cause de la pratique d'une langue étrangère.

En anglais, le collègue présent enseigne en lycée et prépare ses élèves au bac mention section européenne langue anglais. Pour obtenir cette mention l'élève reçoit une note de contrôle continu et passe les épreuves d'un bac normal auquelles se rajoute une épreuve de mathématique orale en anglais. L'interrogation est faite par deux professeurs, l'un de mathématique, l'autre d'anglais. En seconde une heure supplémentaire par semaine est réservée à un enseignement de l'anglais. On y aborde des notions qui sont au programme du collège. En première deux heures supplémentaires sont prévues avec un groupe d'élèves regroupant des séries S et L, parmi lesquels des élèves de série L ne suivant pas l'option mathématiques. En Terminale, deux heures supplémentaires sont prévues avec un groupe d'élèves regroupant des séries S et ES. Les élèves font des exposés en anglais. L'enseignement essaie de se détacher des programmes français.

En espagnol, le collègue fait une intervention de 6 heures annuelles dans une classe de troisième pour les mathématiques (et également 6 heures pour les sciences physiques), avec un statut d'intervenant extérieur.

On signale le travail en collaboration avec le professeur de langue : préparation commune de cours, visite de classes, expérience de double correction ou de correction commune.

Pour les collègues d'anglais et d'espagnol, l'isolement très grand dans l'académie et l'éloignement des pays où la langue est pratiquée, souligne le besoin d'un matériel pédagogique adapté et d'une structure d'échange entre collègues partageant la même expérience.

Pour les collègues d'allemand, leur plus grand nombre leur permet d'échanger plus facilement. La proximité avec l'Allemagne permet de mettre en place des partenariats frontaliers qui sont sources de documents et de matériels pédagogiques. Un groupe de recherche formation, dans le cadre des inspections régionales de mathématiques et d'allemand, a été mis en place et produira prochainement une brochure en octobre 1996. Une université d'été sur ce thème a eu lieu l'été 1995.

2. L'option internationale de l'IUFM (Institut Universitaire de Formation des Maîtres).

Parmi les collègues présents, 3 stagiaires en IUFM et 1 ancien stagiaire ont suivi l'option internationale de l'IUFM.
Il existe à l'IUFM d'Alsace une formation de pratique professionnelle au Royaume-Uni (Irlande du Nord) et en Allemagne (Bade - Wurtemberg). Les objectifs sont :

- faire découvrir aux professeurs stagiaires de quelques disciplines le système éducatif du pays, sa culture scolaire, des établissements scolaires, les programmes de leur discipline, la pédagogie et la didactique de leur discipline ;
- participer à une réflexion sur la didactique de leur discipline en section européenne ;
- rencontrer des enseignants du pays, effectuer des visites dans leurs classes, enseigner à des élèves du pays sous leur responsabilité ;
- élaborer un mémoire professionnel à caractère international et soutenu partiellement dans la langue du pays.

La durée du stage de pratique professionnelle à l'étranger est de quarante heures, soit dix jours de suite au Royaume-Uni, et de deux fois vingt heures, soit deux fois cinq jours en Allemagne. Le stagiaire accomplit dans la mesure du possible une partie du stage de pratique accompagnée dans une section européenne.

Cette année à l'IUFM d'Alsace, l'option internationale était suivie en anglais par 7 stagiaires dont deux en mathématiques, et en allemand par 22 stagiaires dont cinq en mathématiques. On peut consulter à la bibliothèque de l'IREM des mémoires professionnels des années précédentes : par exemple l'un d'eux s'intitule *"la note : l'arbre qui cache la forêt"*, comparant l'évaluation entre l'Allemagne et la France ; un autre sur *"La place de la démonstration en France et en Allemagne"*.

Ces formations initiales devraient permettre d'assurer les postes d'enseignants pour les sections européennes à venir.

3. Mathématiques dans les échanges internationaux.

Des collègues ont témoigné sur la pratique d'échanges. Au lycée Jean Monnet des classes de seconde et première, appelées classes Jean Monnet, partent pour 3 semaines dans un pays avec accueil en famille. Il est difficile d'impliquer l'enseignement des mathématiques. Cependant des tentatives demeurent : par exemple des élèves de seconde ont réalisé en allemand une enquête statistique, avec une dimension culturelle, durant leur séjour chez leurs correspondants allemands. Ces échanges nécessitent une reprise en main des élèves sur 10 jours, au retour. Ils posent le problème de l'accueil réciproque des élèves

étrangers, qui restent bien souvent inactifs au fond de la classe, et qu'il est difficile d'intégrer dans le cours à cause des problèmes de langue.
Il est également indiqué le cas d'un échange en immersion entre le lycée Jean Monnet et le lycée allemand Viscardi. Pendant trois semaines la moitié d'une classe de seconde est hébergée par une demi classe 10 allemande (niveau seconde) et suit tous les enseignements et évaluations en Allemagne. Pendant cette période les demi classes restantes font la même chose en France. Après trois semaines, les groupes changent de pays. L'enseignement des mathématiques est beaucoup plus impliqué dans ce type d'échanges, comme le montre le compte-rendu détaillé paru dans le n°82 de la revue *"L'Ouvert"*.
Il est enfin évoqué un échange mathématique à distance, par lettres et fax, entre une classe de première française et une classe danoise, sur une modélisation de pisciculture, avec utilisation de calculatrices programmables et du logiciel Excel.

En conclusion

Le groupe a émis les souhaits suivants :

- constituer des groupes d'étude des programmes et manuels de mathématiques des différents pays ;
- établir des relations entre associations de professeurs de mathématiques et associations de professeurs de langue ;
- établir des relations entre associations de professeurs français de mathématiques et associations de professeurs étrangers de mathématiques ;
- continuer à se voir pour échanger ses expériences ;
- constituer des recueils de compte-rendus d'expériences réalisées.

Quel est le nom de ce mathématicien ?...
Non, ce n'est pas Robert LUTZ !

A VOS STYLOS

PROBLÈME 37

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Deux joueurs A et B retirent à tour de rôle des allumettes sur un tas d'allumettes, avec la règle que le premier joueur ne peut prendre le tas tout entier, et qu'ensuite chaque joueur peut prendre un nombre d'allumettes au plus égal au nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Est considéré comme vainqueur celui qui ramasse la dernière allumette.

a) Trouver la stratégie gagnante pour le joueur qui commence.

b) On suppose qu'on modifie la règle en autorisant de prendre un nombre d'allumettes au plus égal à deux fois le nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Trouver la stratégie gagnante.

Indication : Dans le cas a) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas une puissance de 2.
Dans le cas b) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas un nombre de Fibonacci.

Solution du a), par J. Lefort : Soit un entier $n \geq 1$. Il existe un couple unique (p, k) d'entiers tels que $p \geq 0$, $k \geq 0$, et $n = (2k+1)2^p$.
On suppose d'abord que $k > 1$, n n'est pas une puissance de 2. La stratégie pour le premier joueur A va consister, chaque fois qu'il aura la main, à retirer un nombre d'allumettes égal à la plus grande puissance de 2 qui divise le nombre d'allumettes du tas. Nous allons voir que A pourra faire cela en respectant la règle du jeu, et qu'à un moment donné B lui laissera un nombre d'allumettes égal à une puissance de 2. A ce moment-là, A ramassera la dernière allumette.
Dans le tas de départ, $n = (2k+1)2^p$, le joueur A prend donc 2^p allumettes et laisse à B un tas de $2^{p+1}k$ allumettes. Par suite, deux cas se produisent, selon la manière dont joue B :
- ou bien B prend également 2^p allumettes, et A retrouve un tas de $n' = (2k-1)2^p$, où l'entier n' correspond donc au couple $(p, k-1)$;
- ou bien B prend b allumettes, avec $b < 2^p$, et laisse à A un paquet de $n' = 2^{p+1}k - b = (2k'+1)2^q$, avec $q < p$. L'entier n' correspond alors à un couple (q, k'), avec $q < p$.
Après un certain nombre d'étapes, $k = 0$, alors A prend tout le tas et ramasse la dernière allumette.
En revanche, si $n = 2^p$ au départ, supposons que A prenne a allumettes : ou bien $2^{p-1} \leq a < 2^p$, alors B prend le reste et gagne, ou bien $a < 2^{p-1}$ et B se retrouve dans la situation antérieure, la stratégie étudiée plus haut pour le compte de A permet alors à B de gagner.

Indications pour le b) : Nous n'avons pas encore obtenu de réponse complète, mais J. Lefort sait résoudre le problème pour les petites valeurs de n. Il apparaît que A ne possède de stratégie gagnante que dans le cas où n, nombre d'allumettes au départ, n'est pas un nombre de Fibonacci. On obtient le tableau suivant :

n =	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
A:	P	P	G	P	G	G	P	G	G	G	G	P	G	G	G	G
			1		1	2		1	2	3	1		1	2	3	1,4

Dans ce tableau on a noté G ou P selon qu'il s'agit d'une position initiale gagnante ou perdante, puis, sous chaque position gagnante, le nombre d'allumettes à retirer. Souvent, la stratégie consiste à aller au nombre de Fibonacci immédiatement inférieur. Mais ce n'est pas toujours le cas, dans le cas de 12 il faut retirer 1, dans le cas de 17 on peut retirer 1 ou 4 (deux stratégies gagnantes), dans le cas de 20 il faut retirer 2, etc. Il reste donc à traiter le cas général. On pourra faire usage du théorème de Zeckendorff, selon lequel tout nombre n s'écrit de manière unique comme somme de nombres de Fibonacci strictement décroissants et non consécutifs (dans la somme n'apparaît pas $F_k + F_{k-1}$). Exemple : pour 14 on accepte l'écriture $13 + 1$, mais non $8 + 5 + 1$, car 5 et 8 sont des nombres de Fibonacci consécutifs.

PROBLÈME 38

Énoncé (proposé par G. Kreweras) :

De toute suite S d'entiers positifs on peut déduire une autre suite S' d'entiers positifs qui est celle des différences en valeurs absolues de termes consécutifs de S.

Partant d'une suite S_1 de n entiers, on obtient ainsi des suites S_2, S_3, ..., S_n, dont chacune a un terme de moins que la précédente et qu'il est commode de disposer en un triangle, pointe en bas, la suite S_n se réduisant à un seul terme. Un tel triangle sera appelé "triangle de différences". Il sera dit *injectif* si tous les termes ont des valeurs distinctes, et *parfait* si ces valeurs constituent l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\}$.

Voici deux exemples de triangles parfaits pour $n = 3$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & & 4 \\ & 5 & & 2 & \\ & & 3 & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & 4 \\ & 5 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

Le problème est de trouver d'autres triangles parfaits. En existe-t-il pour toutes les valeurs de n ?

Remarque : Nous n'avons reçu aucune réponse, pas même quelques triangles parfaits pour $n = 4$, voire pour $n = 5$. Rappelons que les problèmes qui n'éveillent pas l'intérêt des lecteurs iront aux oubliettes (d'après notre nouvelle règle de fonctionnement).

PROBLÈME 39

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Soit p un entier tel que $p \geq 2$, et u^0 la suite des entiers naturels > 0 ($u_n^0 = n$).

On construit de proche en proche, pour $0 \leq i \leq p-2$, les suites :
(v^i), obtenue à partir de (u^i) en supprimant les termes qui sont de rangs multiples de $p-i$.
(u^{i+1}), définie par $u_n^{i+1} = \sum_{j=1}^{n} v_j^i$.

Exemple : $p = 4$.

u^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
v^0	1	2	3		5	6	7		9	10	11		13	...
u^1	1	3	6		11	17	24		33	43	54		67	...
v^1	1	3			11	17			33	43			67	...
u^2	1	4			15	32			65	108			175	...
v^2	1				15				65				175	...
u^3	1				16				81				256	...

On remarque qu'on obtient ici la suite des puissances quatrièmes des entiers successifs.
Ce résultat se généralise-t-il à p quelconque?

Indication : On trouve en effet, dans le cas général, la suite (n^p). Pour la démonstration on peut envisager deux approches :
a) par les fonctions génératrices. Etant donnée une série formelle $f(x) = \sum_n a_n x^n$, on peut lui appliquer l'opérateur S, qui est la multiplication par $1/1-x = \sum x^n$, et aussi l'opérateur E_k qui envoie f sur g, avec $g(x) = \sum_n b_n x^n$, où tous les b_n sont nuls sauf ceux de rangs congrus à k modulo m qui sont égaux aux termes de mêmes rangs de (a_n). Avec l'énoncé du problème, Jean Lefort a envoyé une solution complète qui utilise cette méthode.
b) par la Combinatoire. On considère l'ensemble des applications f de $\{1, 2, \dots p\}$ dans $\{1, 2, \dots n\}$, dont on sait qu'il est de cardinal n^p. On s'intéresse au maximum d'une application f, à savoir $max(f) = \max_{1 \leq i \leq p} f(i)$, et aussi au nombre $top(f)$ des points du graphe de f qui sont d'ordonnée n, ou encore (éventuellement) au nombre de points du graphe de f qui sont d'ordonnée $max(f)$, ou encore à d'autres paramètres. Dans l'exemple ci-dessus, où $p = 4$, on constate que pour $n = 3$ le nombre d'applications f telles que $max(f) = 1$, puis $max(f) = 2$, puis $max(f) = 3$, est égal respectivement à 1, 15, 65. On constate aussi que le nombre d'applications f telles que $top(f) = 0$, $top(f) = 1$, $top(f) = 2$, $top(f) = 3$, $top(f) = 4$, est égal respectivement à 16, 32, 24, 8, 1. Or tous ces entiers apparaissent dans le tableau. Contrairement à Jean Lefort, je (D. Dumont) n'ai pas vérifié jusqu'au bout que cette méthode combinatoire conduisait à une solution complète, je me contente de la suggérer aux lecteurs.

PROBLÈME 40

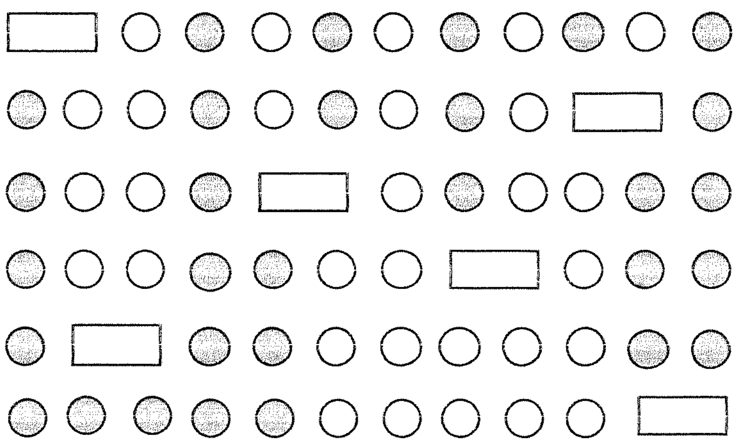
Énoncé (proposé par B. Kordiemsky) :

On place $2n$ jetons d'un jeu de dames, n blancs et n noirs, sur une ligne horizontale (on suppose $n \geq 3$) : d'abord deux espaces vides consécutifs, puis un blanc, un noir, un blanc, un noir, etc.

L'objectif est de parvenir à la disposition suivante : tous les noirs, puis tous les blancs, puis les deux espaces vides.

Pour cela, le seul type de mouvement autorisé est une translation de deux jetons consécutifs vers les deux espaces vides.

Peut-on y parvenir en n mouvements ? La solution est-elle unique ?
Dans le précédent numéro nous avons donné une solution avec $n = 4$. Voici une solution avec $n = 5$. Dans ces deux cas la solution est très probablement unique.



PROBLÈME 41

Énoncé (proposé par J. Zeng) :

Dans ce qui suit, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial autrefois noté C_n^k.

1) Donner une expression de chacune des sommes suivantes à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{1}\binom{n}{1} = \quad ?$$

$$\binom{n}{3} - \binom{n}{1}\binom{n}{2} - \binom{n}{2}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{1}\binom{n}{1} = \quad ?$$

2) On appelle composition de l'entier p en k parts toute suite ordonnée $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ telle que $\forall i \; c_i \geq 1$, et $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = p$.

On note $C(p,k)$ l'ensemble des compositions c de ce type, et on pose

$$S(n,p,k) = \sum_{c\in C(p,k)} \binom{n}{c_1}\binom{n}{c_2}\cdots\binom{n}{c_k}$$

Donner une expression de la somme suivante à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}S(n,p,k).$$

Remarque : L'auteur du problème propose encore une généralisation de ce résultat, qui sera soumise aux lecteurs de notre rubrique en fonction de l'intérêt suscité par ces deux premières questions.

Indication : Nous avons reçu deux solutions complètes du problème, une de P. Renfer et une de M. Wambst. La formule à trouver est

$$S(n,p,k) = (-1)^{p+1}\binom{n+p-1}{p}.$$

En outre, M. Wambst propose une $q-$extension du résultat, avec des coefficients $q-$binomiaux. Son extension est différente de la généralisation que nous avait soumis l'auteur du problème, qui est plutôt de nature "planaire". Nous reviendrons sur tout cela dans le prochain numéro.

PROBLÈME 42

Enoncé (proposé par H.S.M. Coxeter) : Soient x et y deux nombres réels positifs, supposés irrationnels et tels que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1.$$

Montrer que les ensembles

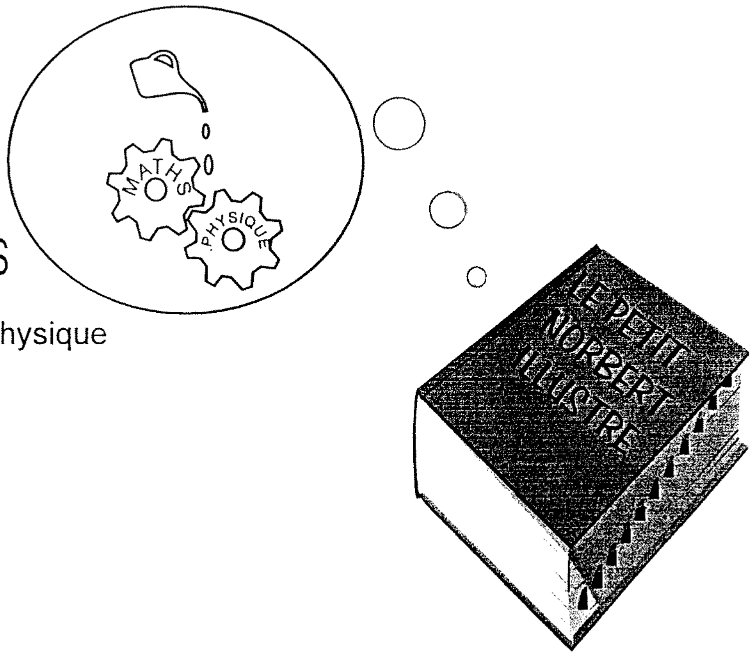
$$X = \{[x],[2x],[3x],[4x],\ldots\} \text{ et } Y = \{[y],[2y],[3y],[4y],\ldots\}$$

forment une partition de l'ensemble des entiers naturels (où $[z]$ désigne ici la partie entière du nombre réel z).

Que se passe-t-il quand x et y sont rationnels?

NOUVELLE BROCHURE :

DICTIONNAIRE DE MATHEMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES



par le Groupe Maths-Physique

Auteurs: Groupe Maths-Physique de l'IREM de Strasbourg composé de:
Mathématiques: François BONOMI, Frédéric DOUE, Jean-Luc GASSER, Suzanne HAEGEL.
Sciences Physiques: Jean-Yves CABEL, Patrick DELOURME, Norbert FLEURY.

Mots clés: - Interdisciplinarité - Mathématiques - Physique - Chimie
- Dictionnaire - Dictionnaire de mathématiques -Dictionnaire de physique

Résumé: Cette brochure présente le fruit de plusieurs années de travail commun entre Mathématiciens et Physiciens. On y trouvera la définition de la plupart des mots utilisés *conjointement* par les enseignants de mathématiques et de sciences physiques. Bien que la terminologie utilisée soit la même, le contenu de ces mots est souvent différent dans chacune des matières, et la compréhension de leur sens dans une matière peut perturber leur perception dans l'autre matière. Les articles sont rédigés de façon à mettre en évidence ces différences, ainsi que les points communs si il y en a. De nombreux exemples, issus de l'enseignement dispensé en lycée, illustrent les concepts développés. L'aspect culturel ou historique a été développé pour certains mots. Le niveau de référence est le lycée, mais certaines incursions dans le supérieur ont été faites.
Les programmes d'enseignement qui ont servi de référence au choix des mots sont:
→ En mathématiques: les programmes applicables à la rentrée 1992 en seconde.
→ En Physique-Chimie: les programmes applicables à la rentrée 1993 en seconde.

Public concerné: Professeurs de mathématiques et de physique-chimie de lycée, de collège et du supérieur.

Prix de vente : 50 F (+ 15 F de frais de port).