L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 85 – DÉCEMBRE 1996 I.S.S.N. 0290 - 0068

J. Steiner.

NOTRE COUVERTURE :

Les nombreuses manifestations pour commémorer le quatre centième anniversaire de Descartes (1596 - 1650) ne doit pas nous empêcher de penser à un autre grand mathématicien dont nous fêtons cette année le deux centième anniversaire : Jacob Steiner (1796 - 1863).

La couverture en reproduit un portrait, déjà évoqué, mais de façon anonyme, dans le dernier n° de '*L'Ouvert*' (n° 84, p. 56). L'article d'Anne Boyé qui lui est consacré dans les premières pages de ce numéro en révèle une figure attachante, dont les idées pédagogiques, en particulier, peuvent peut-être encore inspirer notre vision de l'enseignement des mathématiques.

J.-P. FRIEDELMEYER.

INVITATION A L'ECHANGE.

Le grand mathématicien hongrois Paul Erdös [1] vient de nous quitter. Il était encore venu à Strasbourg, il y a quelques mois, et avait proposé quelques uns de ses fameux problèmes ouverts, accompagnés de primes en dollars pour qui saurait les résoudre. Erdös est réputé comme un mathématicien remarquable et prolifique, notamment en théorie des nombres, en probabilité, en théorie des ensembles et en combinatoire, mais également comme un grand voyageur, qui a noué des contacts avec des mathématiciens du monde entier. Ces collaborations multiples ont conduit à la définition du nombre d'Erdös. Un mathématicien a un pour nombre d'Erdös s'il a écrit un article avec Erdös, deux comme nombre d'Erdös s'il a écrit un article avec quelqu'un qui a écrit un article avec Erdös, ainsi de suite. En plaisantant, Erdös se demandait quel était le nombre d'Erdös de Gauss, même s'il reconnaissait que la réponse est difficile d'une part à cause de la difficulté à rassembler des archives depuis cette époque, et d'autre part parce qu'à cette époque il était rare d'écrire des articles en collaboration. On pourrait prolonger la plaisanterie d'Erdös, en se demandant quel est le nombre d'Erdös de Descartes.

En effet, l'année du 400$^{\text{ème}}$ anniversaire de la naissance de René Descartes, nous redécouvrons qu'il fut un grand voyageur, notamment dans la première partie de sa vie en Hollande, au Danemark, en Allemagne et en Italie, et qu'il mourut, au cours d'un dernier voyage, en Suède. Ces voyages le mirent en contact avec de nombreux savants avec lesquels il entretint une correspondance abondante.

La rencontre entre mathématiciens est souvent une puissante aide au développement de leurs idées. La langue peut être cependant un obstacle à ce développement : Anne Boyé rappelle ainsi dans son article sur Jacob Steiner comment Poncelet a eu des difficultés à lire Steiner par méconnaissance de l'allemand, alors que leurs préoccupations géométriques sont communes. L'environnement culturel peut également être un frein . Par exemple, la diffusion de la géométrie non euclidienne en France a été ralentie par l'académie des sciences et les grandes écoles, notamment l'école Polytechnique, puissants lieux de conservatisme en géométrie. Au contraire en Allemagne, avec les influences de Kant et du romantisme allemand - comme nous le rappelle Anne Boyé , on peut supposer que les Universités, dans lesquelles mathématiciens et philosophes se côtoyaient, étaient plus ouvertes au débat et plus favorables à la diffusion de la géométrie non euclidienne. Rappelons que Félix Klein a publié son fameux « programme d'Erlangen » en 1872 à l'occasion de l'entrée à la Faculté de Philosophie et au Sénat de l'Université d'Erlangen, et s'adressait, dans un texte qui ne comprend aucune figure, aucun calcul et aucune formule, à un public composé en partie par des non mathématiciens. Et Klaus Volkert nous surprend agréablement, en signalant que dès 1890, dans un programme d'un Lycée de Strasbourg[2], le professeur Max Simon rédigeait déjà un exposé sur la géométrie non euclidienne.

---

[1] D. Dumont propose dans la rubrique « à vos stylos » le problème 44 dont Erdös est l'auteur.

[2] Un lecteur saurait-il identifier le lycée Strasbourgeois mentionné ci- contre? Merci pour votre réponse.

L'académie de Strasbourg proposera cette année, pour ses formateurs en mathématiques, un séminaire de formation sur internet [3], auquel sont raccordés de plus en plus d'établissements scolaires. L'association des professeurs de mathématiques (APMEP) proposera elle aussi cette année un séminaire de formation sur ce thème. Les technologies nouvelles modifient la forme des échanges, mais l'échange reste une nécessité permanente pour le développement des mathématiques.

Richard Cabassut.

Lyceum zu Strassburg im Elsass.

PROGRAMM

des

SCHULJAHRS 1890/91.

Als Beilage zwei Abhandlungen:

1) «Die Eisagoge des Bacchius, Erklärung» von Professor Dr. Karl von Jan,

2) «Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie» von Professor Dr. Max Simon.

STRASSBURG
STRASSBURGER DRUCKEREI UND VERLAGSANSTALT,
vormals R. Schultz & Co.
1891.

1891. Programm Nr. 512.

[3] Rappelons que l'IREM de Strasbourg a un serveur sur Internet, dont l'adresse est http://galois.u-strasbg.fr/~irem .

SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 85 – DÉCEMBRE 1996

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
◇ Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 35.– F

JACOB STEINER, UN GÉOMÈTRE ROMANTIQUE ?

Anne BOYE

Centre François Viète, Université de Nantes

Découvrant un jour dans un album sur la peinture romantique allemande un tableau de P.O.Runge, "*La naissance de l'âme de l'homme*", j'éprouvais un sentiment de parfaite correspondance avec ce que je ressentais à la lecture du mathématicien Jacob Steiner, un homme dans son temps, participant pleinement au renouveau de la pensée, voire de l'idéologie et emporté même par ce mouvement romantique.

Je me propose de mettre en lumière ce romantisme tant dans la vie de Jacob Steiner , que dans son éducation, dans ses idées pédagogiques (car ce fut aussi un grand pédagogue), dans son comportement plus ou moins "asocial", et également, dans sa pensée mathématique.

Selon l'idée que l'on se fait du personnage romantique le qualificatif de romantique pourra sûrement être contesté. Ce que ses amis ou collègues écriront de Steiner à sa mort évoque déjà un homme peu ordinaire. Pour Otto Hesse : "*Steiner a la réputation d'être le premier géomètre de son temps*", pour Geiser : "*Si dans le futur un géomètre brille au dessus de ses contemporains et de ses semblables par la plénitude de sa puissance de découverte et la maîtrise de ses descriptions, alors on pourra dire de lui qu'il est la réincarnation de Steiner*". *Geiser* encore à l'exhumation des restes de Steiner : "*Nous avons eu avec lui le plus grand géomètre de notre temps, dont les créations seront poursuivies dans les siècles à venir, dans l'enseignement comme dans la recherche.* Jacobi écrit aussi: "*Il n'a pas seulement fait avancer la synthèse, mais il a aussi mis sur pied pour toutes les branches des mathématiques un modèle de méthode et d'investigation.*"[1]

Steiner apparaît estimé de ses collègues, même s'il leur reprochait sans cesse de ne pas reconnaître suffisamment ses mérites. Lui-même oubliait souvent de citer ses sources.

Il est né dans le canton de Berne le 18 mars 1796 et mort à Berne le 1er avril 1863. Les années décisives, aussi bien pour son œuvre mathématique que pour sa carrière se situent entre 1814 et 1832.

Le contexte historique :

Je ferai commencer mon histoire aux environs du 14 octobre 1806, au lendemain de la bataille de Iéna. Iéna est un lieu important du romantisme allemand. S'y rencontrent Novalis, Gœthe, le linguiste Karl Wilhelm von Humboldt, les philosophes Fichte et Shelling. En particulier Karl Wilhelm von Humboldt et Fichte vont être des acteurs de premier plan dans la réforme de l'éducation prussienne et jouer un rôle décisif dans la carrière de Jacob Steiner. Les réformateurs prussiens rendent le système d'éducation responsable de la cuisante défaite de Iéna, et vont entreprendre une réforme profonde de ce système. "*Il est nécessaire d'apprendre aux citoyens comment penser*".[2]. En 1810, W. von Humboldt devenu directeur des cultes et de l'instruction publique, crée l'université

[1]Pour ces citations et leurs références voir: J-P SYDLER.
[2]H. Brunschwig, *Société et romantisme en Prusse au XVIII° siècle,*

de Berlin, liée à l'Académie royale de Prusse, qui sera dirigée par les plus grands savants allemands. Le premier recteur élu en sera Fichte. Cette université a pour tâche essentielle et avouée d'animer la prise de conscience de la nation allemande. Les réformateurs sont très influencés par les idées du pédagogue suisse Johann Heinrich Pestalozzi. Et de fait, Fichte, dans son discours à la nation allemande de 1808 déclare: " *La doctrine de Pestalozzi a assez de puissance pour aider les peuples et l'espèce humaine à sortir de l'état misérable dans lequel ils croupissent*"[3].

Les idées de Pestalozzi :

Quelle est cette doctrine, mise en avant par Fichte ?

J.Pestalozzi a en quelque sorte popularisé les idées de Rousseau, en les corrigeant. Il veut en particulier améliorer l'éducation des enfants pauvres ; il préconise un enseignement mutuel, et fait de l'intuition le fondement de l'éducation ; par l'intuition l'on peut "*saisir le sens profond caché sous les apparences, l'unité du monde masquée par sa diversité*". En mathématiques, en particulier, la géométrie est privilégiée et enseignée suivant une méthode dite "naturelle", où l'on examine les formes qui sont données, où l'on exerce son esprit à trouver les relations qui les lient, cela, sans préjugés ; la connaissance doit être produite et découverte par l'étudiant lui-même, seulement guidé par le professeur, selon la méthode socratique.

"L'ignorance est meilleure qu'une connaissance qui ne serait que préjugés... Arriver à la connaissance lentement, mais par sa propre expérience, vaut mieux qu'apprendre par coeur, à la hâte, des faits que d'autres personnes savent et, l'esprit encombré de mots, perdre ses facultés individuelles et libres d'observation... Le but supérieur de l'enseignement est de préparer l'individu à utiliser librement et en toute confiance toutes les facultés que le créateur lui a accordées, et de diriger ces facultés afin d'améliorer toute vie humaine"[4].

Grâce à ces principes, Fichte, Humboldt et Stein, un autre réformateur, pensent pouvoir former des citoyens et non pas des sujets, utiles à l'État et à la Nation. Le dressage mécanique doit y faire place à des exercices conduisant à un développement heureux de toutes les facultés. Ces recommandations doivent être prises en compte dès l'enseignement élémentaire. Si l'on amène l'étudiant à utiliser les pouvoirs créateurs de son esprit, il appréciera alors la valeur de la république et la nécessité de combattre pour sa liberté. Certains diront que se rencontrent à Berlin l'esprit des lumières et celui du romantisme.

Où apparaît Jacob Steiner :

Fichte, Humboldt, Stein, envoyèrent donc beaucoup de leurs amis visiter l'institut de Pestalozzi à Yverdon, en Suisse, pour les former à sa méthode. C'est là qu'apparaît le jeune Jacob Steiner.

Cinquième enfant d'une famille de paysans du canton de Berne[5]. son éducation fut très rudimentaire; à 14 ans, il savait à peine lire et écrire. En 1814, malgré les réticences de ses parents, il se rend à Yverdon, à l'institut de Pestalozzi, où il est admis gratuitement. Il

---

[3]*Histoire mondiale de l'éducation*,II

[4]*Ibid.*

[5]Sur la vie de Jacob Steiner consulter par exemple; CARL FRIEDRICH GEISER. C.F. Geiser était le petit neveu de Steiner.

impressionne rapidement ses professeurs, de mathématiques en particulier. Au bout d'un an et demi, il est engagé comme professeur de mathématiques à l'institut. En 1818, il part à l'université de Heidelberg; il y reste cinq semestres, en donnant des cours particuliers pour payer ses études. Sur les conseils d'un ami, peut-être un peu trop précipitamment , il se présente en 1821 au Friedrich Werden Gymnasium de Berlin, postulant sur un poste de professeur. Muni des recommandations de l'université de Heidelberg et de Pestalozzi lui-même, le directeur l'engage pour enseigner la géométrie élémentaire. Cependant, le conseil d'établissement exige qu'il subisse les examens habituels; ceux-ci requéraient la preuve de connaissances générales dans toutes les branches du savoir. Or la formation de Steiner laisse à désirer sur bien des points. En particulier c'est Hegel, professeur à l'Université de Berlin, qui l'interroge en philosophie, et qui déplore son insuffisance. Le sujet proposé était le suivant: "Est ce que l'usage et l'exercice de la mémoire, que l'on entraîne généralement dès les études primaires, gênent ou favorisent le développement de l'intelligence?". Les méthodes de Pestalozzi, que Steiner avaient évidemment faites siennes, ne plurent pas vraiment. On confie cependant à Steiner un poste de maître auxiliaire intérimaire pour les petites classes.

En 1822, il est congédié, sous le prétexte qu'on ne peut lui confier l'enseignement d'une autre discipline. En fait ses méthodes d'enseignement sont peu conventionnelles, nous le verrons dans la suite, et Steiner prétend qu'il est renvoyé pour avoir refusé d'utiliser le manuel écrit par le directeur Zimmermann Il doit alors donner des leçons particulières pour subsister. Il devient un professeur privé, renommé, et compte parmi ses élèves le prince Auguste et le fils de Wilhelm von Humboldt. Ce sont pourtant de dures années, et Steiner se plaint de ne pouvoir consacrer le temps qu'il voudrait à ses propres recherches. Ces années cependant sont très fructueuses pour sa vie mathématique. Il écrit le manuscrit de son premier ouvrage ***Théorie universelle des contacts et intersections de cercles et de sphères***. [6] Le titre original en était: ***L'intersection (incluant le contact) des cercles dans le plan, l'intersection des sphères dans l'espace, et l'intersection des cercles à la surface de la sphère***. Cet ouvrage ne fut publié qu'en 1931 par Gonseth à Berne[7], quand ont été retrouvés ses papiers; il manque le dernier chapitre. La qualité de ses travaux décide, entre autre, Crelle à commencer la publication d'un journal de mathématiques, sachant qu'il pourra compter sur des contributions de Steiner et aussi d' Abel, un autre jeune mathématicien prometteur.

De fait, en 1827, deuxième année du journal, les essais de Steiner représentent le tiers des articles publiés.

Autre circonstance heureuse, est créée en 1826 la Gewerbeschule de Berlin (École des arts et métiers), et le directeur est partisan des méthodes de Pestalozzi. Il engage donc Steiner. Quoique ce dernier ait un caractère assez violent et ne semble pas imposer une discipline exemplaire à ses élèves, il restera en poste grâce au soutien actif de la famille von Humboldt. En 1831, par exemple le directeur menace de le licencier, et doit le prier "*de ne pas employer d'expressions grossières, de ne pas se laisser aller à la colère, car il nuit ainsi à la réputation de l'école*". Quant au maire de la ville, il ajoute (xénophobie ou sarcasme):"*Je dois avouer que c'est un grand avantage d'écarter un tel homme de l'enseignement, et ceci, quand bien même il serait Archimède lui même! Il n'a aucune notion de ce qu'est la subordination et ne peut donc maintenir la moindre discipline avec*

[6]*Allgemeine Theorie über das Berührens und Schneiden des Kreise und der Kugeln*

[7] R. Fueter et Gonseth , eds, Zurich-Leipzig, 1931.

ses élèves. Qu'il retourne donc avec les siens dans les montagnes de son maudit pays, et qu'il cesse de corrompre nos Brandebourgeois!"[8]

Steiner avait cependant obtenu en 1827 une subvention de l'académie de Berlin, et en 1832 il pouvait publier son œuvre: ***Développement systématique de l'interdépendance des conceptions géométriques***[9]. Ce sera sa contribution majeure.

Sa renommée est assurée. Une chaire de géométrie est créée pour lui à l'Université de Berlin. Il formera là une génération de savants allemands, dont B.Riemann. En 1834, il devient membre de l'Académie des sciences de Berlin, en 1853 membre correspondant de l'Academia dei Lincei, l'année suivante il est membre correspondant de l'Académie des sciences de Paris.

Il ne sera toutefois jamais nommé professeur ordinaire et sa santé laisse à désirer. Il revient souvent à Berne, et c'est là qu'il s'éteint en 1863.

Les idées pédagogiques de Steiner, sa conception des mathématiques, ses travaux :

Ces trois aspects sont intimement liés chez Jacob Steiner, et, si l'on pense le savoir romantique comme critique de la science établie, refus d'obéissance à des normes, comme défenseur de l'imagination créatrice, de l'intuition, du sentiment, de l'expérience ressentie, alors, sans doute, nous conclurons que l'œuvre de Jacob Steiner est véritablement romantique.

L'accès au savoir ne peut être obtenu par un enseignement discursif, il présuppose une initiation et un engagement de la personne toute entière. Alors que la pédagogie traditionnelle semble procéder du dehors au dedans, (peut-être pour assurer la bonne intégration de la jeune génération dans la société adulte), la pédagogie de Pestalozzi, dont Steiner est imprégné, demande de procéder du dedans au dehors, pour que chacun puisse conquérir sa propre identité, et découvrir une certaine forme unitaire du savoir.

Voici ce qu'écrit Steiner à l'occasion d'une demande de subventions pour ses recherches en 1826-1827 :

"La méthode employée à l'institut de Pestalozzi, consistant à traiter les vérités mathématiques comme des sujets de libre réflexion, m'a amené, alors que j'étais élève, à chercher si possible, à la place des proposition avancées pendant l'instruction, d'autres propositions qui fussent plus profondes que celles que présentaient les professeurs, et bien souvent, j'y arrivais si bien, que les professeurs préféraient mes démonstrations aux leurs.

En tant qu'élève, après avoir étudié plusieurs manuels de géométrie, je me rendis compte de la nature arbitraire de l'ordre qui, du fait du manque de relation substantielle, émanait des relations entre les différentes propositions. J'ai trouvé de façon un peu arbitraire, un peu empirique, que la nécessité de la science se démontre dans la substance de son contenu et que, d'après un sentiment qui m'enthousiasmait mystérieusement, la

[8] J.P.Sydler, ouvrage cité.

[9] *Systematische Entwicklung des Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*

multiplicité des connaissances doit dériver de son unité générale et doit être abordée ainsi."[10]

Il faut retrouver l'ordre naturel, et c'est l'intuition qui permettra de saisir l'unité des mathématiques masquée par sa diversité.

Et c'est la géométrie synthétique[11] (que Carnot qualifiait de "naturelle", qui fut appelée géométrie "pure" dans le Journal de Crelle, et qui sera "supérieure" avec Poncelet puis Chasles) qui permet seule de libérer en chacun les possibilités en sommeil. C'est aussi le lieu où l'acte créateur s'accomplit. Jacob Steiner l'impose donc contre la géométrie analytique qui n'est qu'un savoir neutre, déductif, coupé de la passion de construire, et qui n'a elle aucun pouvoir créateur. La géométrie analytique ne peut venir qu'après coup, pour vérifier le cas échéant, une fois que la découverte a été effectuée. La géométrie analytique est la géométrie acquise " de l'extérieur", alors que les principes de la géométrie synthétique sont pour ainsi dire dans le sentiment, et permettent à des élèves n'ayant reçu aucune formation spécialisée d'accéder aux conceptions les plus avancées.

La méthode géométrique est une discipline formatrice de l'esprit, une méthode de découverte, alors que l'algèbre ne mène à découvrir que ce que l' on savait déjà implicitement au départ.

Dans la géométrie synthétique, les objets sont considérés pour eux mêmes, dans l'espace; les propriétés sont recherchées en se basant sur une sorte de réalisation, parfois uniquement imaginative, mais qui suppose une certaine vision ou représentation des figures. Cette vision permet ensuite d'appliquer le raisonnement logique aux endroits les plus favorables, ce qui révèle de nouvelles propriétés, une nouvelle vision, etc...

"Steiner n'utilisait pas de figures pendant ses cours. La pensée active de l'auditeur devait engendrer une image si claire dans son imagination qu'il n'avait pas besoin d'une image matérielle." raconte Felix Klein. [12]

Au delà de ce pouvoir visionnaire au service de l'imagination créatrice, ce qui est fondamental, c'est le besoin de synthèse; il faut restituer l'unité organique de la nature, qui est diversifiée à l'infini; J. Steiner souligne le besoin qu'il a d'établir des relations entre des propriétés à première vue indépendantes, toujours dans ce texte de demande de subventions :

"Il me paraissait clair que, tant que l'on recherchait la méthode synthétique dans une relation extérieure arbitraire entre les différentes propositions, on ne faisait que fourvoyer l'élève en lui donnant l'impression que ces diverses propositions étaient l'objet de la science, si bien que pour lui, la perception de l'unité synthétique générale de la science était si obscurcie qu'il n'apprenait à saisir celle-ci que sous la forme de différentes propositions, et jamais dans son originalité substantielle. En tant que professeur, mon problème était donc dans la mesure du possible de traiter chaque discipline sous la forme de quelques concepts et de faire émerger les propositions individuelles du développement de ces quelques concepts.

---

[10] Traduction Xavier Lefort et Anne Boyé.

[11] Le nom de géométrie synthétique, au XIX° siècle , a été créé par opposition à la géométrie analytique, ou géométrie des coordonnées, qui suppose l'analyse. La géométrie analytique peut se développer sans que l'on soit obligé de faire appel à l'examen des figures. La géométrie synthétique s'appuie sur des considérations d'espace et de figures, et des postulats liés à notre perception. Sur ces géométries on pourra consulter l'*Encyclopédie des sciences mathématiques.*

[12] J.P.Sydler, ouvrage cité

Dès lors, la notion de systématisation, telle qu'on la trouve dans les traités de géométrie, est complètement transformée. Je luttais pour cette unité des moyens de construction géométrique, sans qu'on me l'ait montrée, je luttais pour la genèse qui se trouve à la base de la géométrie synthétique et dont dépend toute découverte géométrique.

En revanche, la façon dont on l'avait fait jusque là me semblait n'être qu'un moyen mnémotechnique d'associer les diverses propositions ou de les appliquer, et non une façon de les dériver par une méthode exhaustive.[13]"

Il habituait ainsi ses élèves à penser en forme de relations et non d'objets fixes, et à utiliser pleinement leur imagination.

Tous ceux qui ont lu les oeuvres de Jacob Steiner, que ce soit son premier manuscrit (***Théorie générale des contacts et intersections de cercles et de sphères***), ou le ***Développement systématique de l'interdépendance des concepts géométriques***, ou bien encore les publications qui suivront, ont été frappé par l'impression d'équilibre et d'ordre qui suggère un véritable schéma général d'où tout découle. Voici ce qu'il écrit dans son introduction au "***Développement systématique***":

"Ce traité essaie de découvrir l'organisme dans lequel des phénomènes hétérogènes du monde de l'espace sont liés les uns aux autres. Il produit une poignée de relations fondamentales complètement simples, qui expriment l'ossature de l'organisme et à partir desquelles la masse restante des théorèmes suit et se développe sans difficulté. En assimilant ces quelques relations fondamentales nouvelles, on maîtrise la totalité du sujet; on introduit de l'ordre dans le chaos apparent et l'on voit comment toutes les parties s'articulent les unes les autres en accord avec la nature, s'arrangent dans un bel ordre de succession et se transforment et s'unissent en un corps bien défini. De cette façon, on arrive à la possession des éléments dont procède la Nature, et l'on peut, le plus simplement et avec le maximum d'économie, enseigner les innombrables caractéristiques des figures."[14]

Il s'agit bien là de la Nature Romantique, unité organique diversifiée à l'infini; c'est le postulat unitaire de la Naturphilosophie. La critique de la science établie, le refus d'obéissance aux normes, sont au service de la recherche de cet ordre et de cet équilibre.

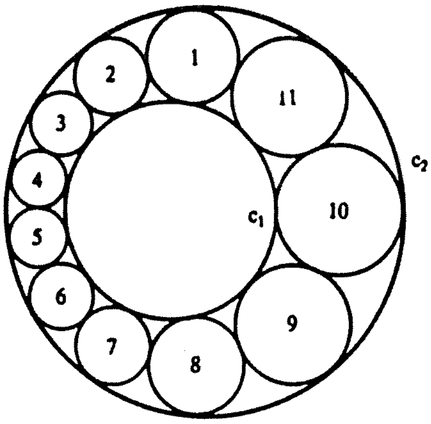
Dans le même temps, une impression de simplicité émane de l'œuvre de Steiner. Dans la deuxième publication qu'il fait dans le Journal de Crelle (1827), il expose des théories élémentaires sur lesquelles repose son ouvrage "***Théorie universelle des contacts***". Il s'y montre brillant par la simplicité avec laquelle il résout différent problèmes, en particulier le problème de **Pappus**[15] qui établit des relations entre les rayons des cercles en chaîne inscrits entre deux cercles, ou le problème de **Malfatti**, où il s'agit de tracer trois cercles tangents deux à deux et dont chacun touche deux côtés d'un triangle donné. Il le généralise même en le transportant dans l'espace.

---

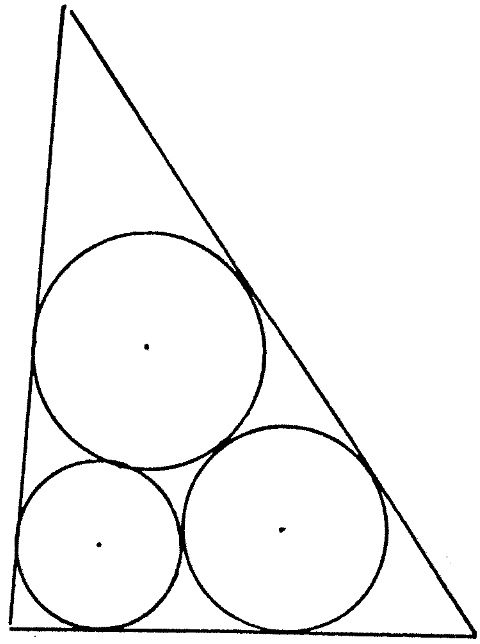
[13] Traduction Xavier Lefort et Anne Boyé

[14] Idem

[15] Si on a pu construire une chaîne de cercles (par exemple 11 cercles sur ma figure), tangents entre eux et tangents aux cercles C_1 et C_2, alors on pourra construire une autre chaîne d'autant de cercles, en partant d'un cercle quelconque tangent à C_1 et C_2.



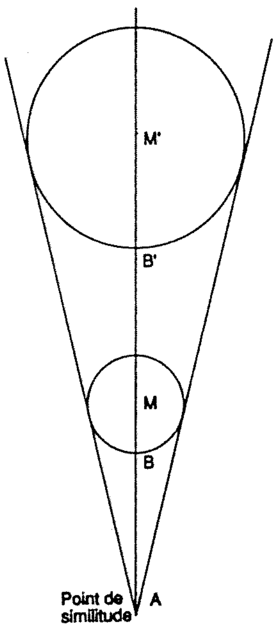
Problème de Pappus



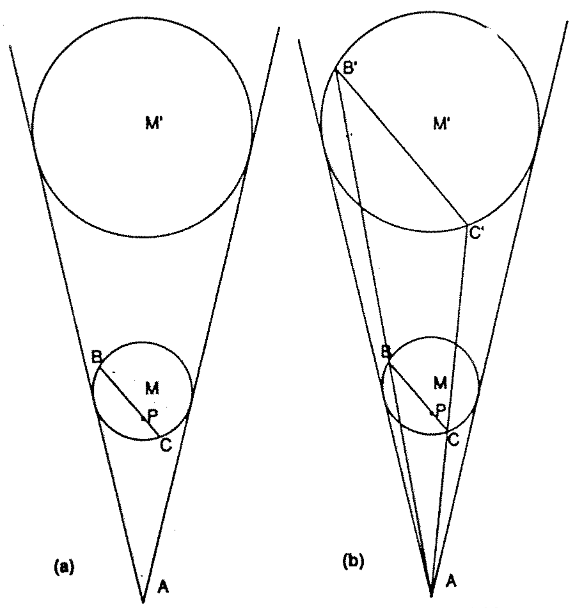
Problème de Malfatti

Pour avoir une meilleure approche de la simplicité des relations fondamentales sur lesquelles repose le ***"Développement général"*** , examinons en quelques principes.

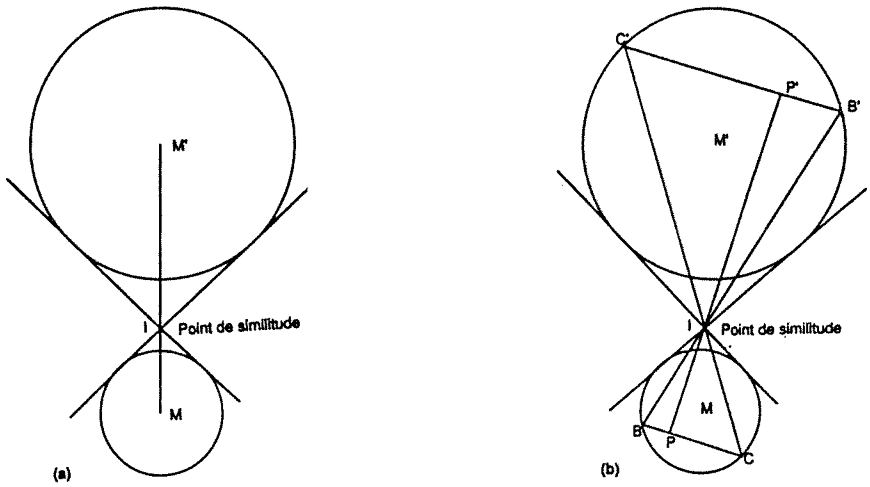
Deux cercles étant donnés, en traçant les tangentes communes, nous trouverons le point extérieur de similitude , ou le point intérieur de similitude (qui sont pour nous les centres d'homothétie). L'on peut alors établir une correspondance (appelée projection) entre les points de deux cercles puis entre tous les points du plan.



Le point extérieur de similitude

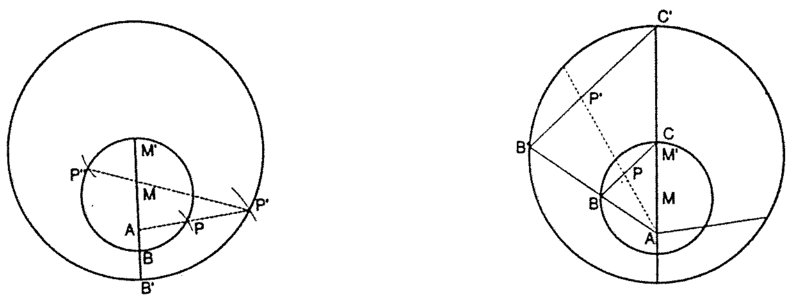


Construction de lignes parallèles et de triangles semblables

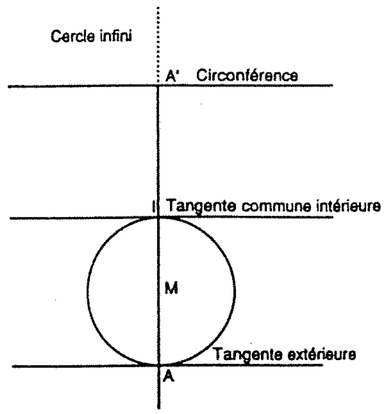


La construction du point intérieur de similitude

Cette correspondance, par continuité, peut s'établir même si l'on part de cercles intérieurs l'un à l'autre. La "ligne de similitude" sera la droite joignant les centres des cercles, et les rayons détermineront des arcs correspondants ; ensuite par le système des parallèles la correspondance pourra être poursuivie.

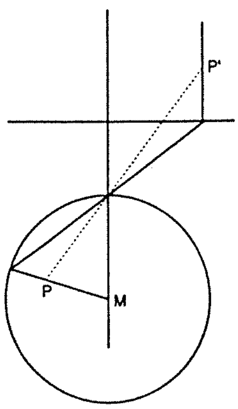


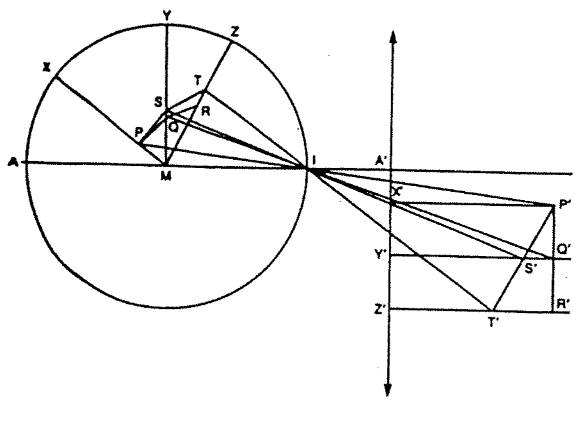
Si l'un des cercles devient infiniment grand, par exemple le cercle M' des figures précédentes, la circonférence devient une droite, mais elle coupe toujours l'axe des centres au point A' fixe. Le centre de M' s'éloigne indéfiniment sur la droite des centres, donc la "droite circonférence" sera perpendiculaire à la droite des centres ; pendant ce temps les tangentes communes intérieures et extérieures feront entre elles un angle de plus en plus grand, et le cercle M sera de plus en plus proche du point d'intersection des tangentes ; en fin de parcours, nous obtenons la figure ci-dessous :



Les points de similitude entre des cercles fini et infini

Les rayons du cercle infini passent par le centre rejeté à l'infini donc ce sont des demi-droites perpendiculaires à la "droite circonférence". Pour faire correspondre les points du cercle fini à ceux du cercle infini nous les utilisons donc. Il est à remarquer que le passage du fini à l'infini a induit cependant un changement notable, une "discontinuité", puisque les images de points non alignés, comme PQR sont des points alignés, P'Q'R'.





Ainsi va naître la géométrie projective de Steiner qui sera mise en place véritablement dans le ***"Développement systématique".*** Pour cette géométrie, il définit des formes fondamentales, telles les faisceaux de droites ou les faisceaux de coniques, entre lesquelles il fait intervenir une correspondance, la perspectivité (que l'on peut tout à fait rapprocher de la perspective des peintres).

Le français Poncelet a déjà consacré une publication à cette géométrie en 1822. Il n'est pas très facile de démêler les influences réciproques de ces deux créateurs ; il est fort probable cependant que Steiner ait eu connaissance du travail de Poncelet, qui se plaindra un peu plus tard de ne pouvoir lire Steiner par méconnaissance de l'allemand. Il reste au demeurant que leurs préoccupations sont communes mais que leur œuvre se développera de façon indépendante et originale.

Pour ces ressemblances cependant, il n'est pas inintéressant de noter ce que Gergonne écrira dans une note de ses annales en 1827[16]:

"Je persiste à penser que M.Poncelet a gravement compromis ses doctrines en mêlant au classique que tout le monde admet, le romantisme que, pour ma part, je suis fort loin de repousser, mais sur lequel on discute encore."

Ce romantisme mis en lumière par Gergonne réside principalement dans le principe de continuité (un peu comme il a été vu plus haut)qui permet d'affirmer que certaines propriétés sont conservées si une figure varie par degrés insensibles, et engendrera des points imaginaires (d'intersections par exemple), et des points à l'infini (tels les intersections de droites parallèles).

Une quantité de propriétés découlent soudain de ces quelques principes simples. De nombreux théorèmes qui semblaient ne posséder aucune relation entre eux viennent s'ordonner dans une vaste structure.

La géométrie projective par le biais de la perspectivité pourrait donc être la science du mouvement, la théorie de la métamorphose des figures ; elle recherche ce qui est "invariant" dans la métamorphose, la réalité sous jacente qui est cachée dans la figure, et en fait un procédé de démonstration.

Le ***"Développement systématique"*** est un ouvrage fondamental, et c'est un peu le couronnement de cette éducation que Steiner a reçue chez Pestalozzi et des idées qu'il essaiera de transmettre au long de sa vie à ses élèves, à travers des méthodes très personnelles comme nous l'avons vu plus haut.

La vision de l'espace, sa représentation, sa correspondance avec le monde intérieur, celui de l'âme de l'homme sont finalement au coeur de la vie et de l'oeuvre de notre mathématicien. Aussi pour terminer je ne peux m'empêcher de rapprocher Gaspard David Friedrich, un autre peintre allemand du début du XIX° siècle, qui écrivait: *"Clos ton œil physique afin de voir d'abord avec l'oeil de ton esprit"*, et le vieux Jacob Steiner se plaignant à son ami Schläfli de sa fatigue qui l'empêchait de travailler car *"lorsqu'il fermait les yeux pour voir , il s'endormait."*

Indications bibliographiques :

BRUNSCHWIG, H., *Société et romantisme en Prusse au XVIII° siècle*, Paris, 1973, Flammarion, p.32-40.
BURCKHARDT, J.J., article Steiner, D.S.B.
GEISER, C.F., *Zur Erinnenrung an Jakob Steiner*, Schaffhausen, 1874.
SYDLER,J.P., *Aperçus sur la vie et l'oeuvre de Jacob Steiner*, Bulletin de la société mathématique de Suisse, juin 1964, in Enseignement mathématique, 2nd ser, 11 (1965), p 240-241.
Annales de mathématiques pures et appliquées, sous la direction de Joseph Diez Gergonne, tome XVII et XVIII.
Encyclopédie de sciences mathématiques, édition française, Gauthier-Villars, 1915, réed. Jacques Gabay, Paris, 1991, tome III, vol.1, p 185-259.
Histoire mondiale de l'éducation, tome II, publié sous la direction de Gaston Mialaret et Jean Vial, Paris, 1974, PUF.

---

[16] Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XVIII, p.135

DES MÉMOIRES PROFESSIONNELS EN I.U.F.M.

Odile SCHLADENHAUFEN

Actuellement, l'enseignant stagiaire doit élaborer un mémoire au cours de son année de formation pédagogique sur un sujet lié à son enseignement (mais pas forcément aux programmes de la matière enseignée). Un bon nombre de ces mémoires sont soutenus un même jour et dans un même lieu de façon que tous les stagiaires présents puissent s'informer sur les sujets travaillés par les autres en assistant à l'une ou l'autre de ces soutenances. Mais, puisque ces mémoires sont déposés à la Bibliothèque de l'I.R.E.M., d'autres professeurs peuvent accéder à cette information et y trouver des sujets de réflexion.

Pour vous en donner un aperçu, j'ai extrait quelques phrases et quelques pages de trois de ces mémoires, distingués des autres uniquement par le fait que je m'y suis trouvée impliquée :
- "La réussite scolaire par l'amélioration du savoir-être" de Yves Bulliot,
- "L'arithmétique nous manque!" d'Aline Sabban et Christophe Marchant,
- "Du matériel pour ouvrir des portes en mathématiques" de François Bonomi.

1. "La réussite scolaire par l'amélioration du savoir-être"

Yves Bulliot, qui a travaillé auparavant dans le département recherche et développement d'une P.M.E., nous dit dans son introduction :

"Cette expérience m'a permis de voir des aspects très divers du monde industriel. C'est ainsi que j'ai pu me rendre compte de l'importance que peut avoir le "savoir-être" aussi bien dans le rapport avec les collègues et la hiérarchie que dans l'efficacité du travail. Ce que j'entends par "savoir-être" c'est l'art d'adopter l'attitude ou comportement adéquat.

D'autre part, dès l'entretien d'embauche, c'est souvent le "savoir-être" qui fait la différence entre les candidats. Il me semble donc intéressant de préparer les élèves à cet aspect de leur future vie professionnelle. De plus, je suis persuadé que ce "savoir-être" a déjà une très grande importance dans la réussite scolaire des élèves. Il peut intervenir dans leurs performances aussi bien en classe qu'à la maison, ou en interrogation. C'est donc à double titre qu'il me paraît important que les élèves acquièrent ce "savoir-être" le plus tôt possible."

Et voici ce qu'on trouve en pages 6 et 7 de ce mémoire :

2 ANALYSE A PRIORI

2.1 Aptitude, attitude, bases

Dans la suite du mémoire je parle d'aptitude à la place de savoir-faire et d'attitude à la place de "savoir-être".

A la suite de nombreux cours particuliers données depuis plusieurs années, j'ai pris l'habitude de classer les performances scolaires d'un élève en trois catégories : bases, aptitudes et attitudes. Voici comment je définis ces 3 termes :
Les **bases** sont constituées par toutes les connaissances accumulées au cours de la scolarité.
Les **aptitudes** sont les capacités, les facultés voire les "dons" à faire quelque chose *(ex.: compréhension, mémoire, concentration, esprit de synthèse, de rigueur...)*.
Les **attitudes** correspondent aux comportements face à une situation.(Ex..: *motivation, persévérance, confiance, optimisme, calme, curiosité...*).
Les performances, à un instant donné, dépendent, d'après moi, directement de ces 3 catégories. Quand un problème de performance arrive, il faut observer laquelle de ces catégories est la plus en défaut, et agir sur elle.
Les problèmes les plus fréquents que j'ai pu rencontrer en cours particuliers sont, il me semble, les bases et la motivation.

-> Qu'en est-il des problèmes les plus fréquemment rencontrés par mes élèves de seconde ?

2.2 Importance de l'attitude dans le trio bases, aptitude, attitude

A mon sens, pour être performant il faut des bases, des aptitudes et de bonnes attitudes.
Pour améliorer ses bases il faut des aptitudes et attitudes.
Pour améliorer ses aptitudes il faut des attitudes.
D'après ce schéma, l'attitude intervient toujours.

-> Il me semble **a priori** que les élèves et leur entourage attachent pourtant peu d'importance à l'attitude, et que c'est l'aptitude qui est la principale cause selon eux de leur échec.

2.3 Les 3 attitudes les plus importantes.

Les 3 attitudes qui m'ont paru les plus importantes à travers mon expérience professionnelle sont:

1) la motivation
2) la confiance en soi
3) la sérénité en cas de surcharge de travail, d'imprévu, de difficultés, de défis apparemment impossibles à relever...

Ce sont également ces 3 là qui m'ont semblé nécessaires à la réussite de mes élèves de cours particulier.

-> Est-ce que ce sont également celles rencontrées par mes élèves de seconde ?

2.4 Est-il facile d'améliorer ses attitudes ?

L'attitude est la catégorie **a priori** la plus facile à améliorer. Il suffit d'un effort de volonté. C'est pour cela qu'il me parait intéressant de s'y attaquer.

Cependant, la volonté peut être inhibée par toutes sortes de raisons : "les maths (ou l'école) ne servent à rien", "je n'aime pas les maths (ou l'école)", "les maths c'est trop dur", ...
Ces raisons peuvent être conscientes et inconscientes et donc difficiles à détecter et à modifier.

2.5 Qu'est-ce qui pousse à améliorer les attitudes ?

Je vois 3 principaux stimulants pour améliorer les attitudes:
- l'exemple de son entourage (camarades, famille, profs...)
- les situations qui appellent à se surpasser (rythme scolaire, devoirs inters, examens, difficultés de la vie sociale à l'école...).
- l'enseignement de méthodes et de connaissances sur le sujet. (Connaissance de soi, mécanisme d'intervention de l'attitude, méthode d'amélioration de ses attitudes)

Celui qui m'intéresse dans ce mémoire est bien sûr le troisième.
Ce n'est à mon avis, pas le plus efficace des 3. Mais, il aide à prendre conscience (les 2 autres stimulants pouvant fonctionner inconsciemment) de l'importance des attitudes et incite à engager une réflexion sur le sujet.

-->Je voudrais savoir ce qu'il est possible de faire avec une classe à ce sujet.

etc...

2. "L'arithmétique nous manque!"

Aline Sabban et Christophe Marchant annoncent en introduction :

"C'est lors d'un week-end de travail réunissant les professeurs stagiaires que des débats ont eu lieu autour de la sempiternelle plainte des professeurs de mathématiques :

"Ils ne savent plus calculer",

ce qui suppose qu'ils savaient calculer! Parmi les nombreuses causes avancées quant à cette évolution, nous avons retenu la suppression de l'arithmétique dans les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire.

Dans ce mémoire, nous avons voulu préciser les conséquences de cette décision. Pour ce faire, nous avons tout d'abord étudié les programmes en jeu, afin de savoir ce qui était vraiment enseigné et pourquoi ça ne l'était plus..."

Voici le début de cette étude (pages 6-7-8 et 9 du mémoire).

Etude des programmes, questionnaire préliminaire.

Dans les programmes actuels des lycées et des collèges, l'arithmétique est totalement absente. Les élèves effectuent tous leurs calculs numériques sans connaître ce que sont un PPCM, un PGCD ou même un nombre premier.

Par exemple, sur la simplification de fractions, on peut lire dans les programmes de cinquième :
« Certaines situations créées par les opérations sur des nombres en écriture fractionnaire conduiront à des simplifications d'écriture reposant sur l'emploi de diviseurs communs à deux entiers mais la notion de PGCD n'est pas au programme. »
Donc face à une simplification de fraction, les élèves agissent au coup par coup. Ils peuvent recourir aux critères de divisibilité vus en sixième, mais ne possèdent ni méthode ni outils pour chaque cas rencontré. Ce qui limite le professeur à des fractions relativement simples et à des simplifications évidentes. Et malgré tout certaines fractions, comme $\frac{17}{51}$, resteront irréductibles pour beaucoup d'élèves.

En quatrième, l'étude de l'écriture fractionnaire se poursuit, mais toujours sans arithmétique :

« L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire ou la recherche d'une simplification d'écriture peut demander dans certaines situations la détermination de multiples ou diviseurs communs à deux nombres entiers, mais les notions de PPCM et de PGCD sont hors programme. »
On se fie donc plus à l'expérimentation et à l'instinct de l'élève qu'à une approche systématique du problème.

De toute manière, si pour effectuer l'addition de deux fractions, l'élève ne voit pas de multiples communs aux dénominateurs, il a toujours le recours de les multiplier entre eux. La méthode est plus longue et plus pénible car elle nécessite des calculs plus importants et souvent une simplification de fraction. Mais qu'importe? C'est le résultat qui compte ! Et après tout, si une fraction n'est pas simplifiée, il y a bien des cas où cela n'a pas de conséquences.

Ainsi, l'arithmétique pourrait être un outil utile pour le calcul fractionnaire au collège. Mais, comme les élèves peuvent se débrouiller sans lui, il n'est pas indispensable.

Cependant, malgré l'importance récurrente du calcul fractionnaire, on ne peut pas éclipser tout ce qui a trait aux puissances et aux racines carrées. Même en classe de seconde, les racines carrées demeurent un objet que les élèves manipulent mal et avec beaucoup de difficultés. En général ils ne savent pas simplifier l'écriture d'une racine carrée.
A ce stade, ils confondent beaucoup de choses, et on est amené à se demander s'ils connaissent ce qu'ils manipulent aussi allègrement : les nombres.

La question de l'enseignement de l'arithmétique est une question qui mérite d'être posée. L'acquisition de ces connaissances est-elle plus lourde que le bénéfice à en retirer? Ou bien au contraire, cela aiderait-il les élèves à éviter des erreurs dues à la méconnaissance des nombres? La réponse à ces questions est loin d'être aisée, vu qu'on ne peut pas comparer des élèves ayant reçu un enseignement d'arithmétique à d'autres n'en ayant pas reçu.

On peut toutefois se reporter aux programmes antérieurs à 1985, puisque c'est à cette date que l'arithmétique a été supprimée des programmes. Elle était auparavant enseignée en classe de cinquième. Voici un extrait des programmes concernant cette notion :

« Ensemble des multiples d'un nombre ; division euclidienne d'un nombre naturel par un nombre naturel. Diviseurs d'un nombre naturel ; nombres premiers. Sur des exemples : pratique de la décomposition en produit de nombres premiers et exercices sur les multiples communs et les diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres naturels. »

La première chose que l'on peut remarquer est que l'énoncé des programmes est plutôt succinct : en effet, c'est tout ce qui est dit sur l'arithmétique. La liberté d'interprétation du professeur est alors très grande. Par exemple, quand il est écrit « nombres premiers » s'agit-il de les définir? De les reconnaître? De les manipuler? De démontrer des propriétés à leur sujet? De les utiliser? Ce n'est pas précisé, on peut donc faire un peu ce qu'on veut ! Ainsi de la même manière que pour les nombres premiers, il n'est pas précisé si l'étude du PGCD et du PPCM est à faire ou non. En pratique, les professeurs la faisaient de façon systématique.

Curieusement, si on se penche plus avant dans ces programmes, on s'aperçoit que les notions d'arithmétique acquises en cinquième ne peuvent être réinvesties qu'en quatrième dans le calcul fractionnaire. En effet, à cette époque, les fractions ne sont introduites que dans cette classe. Mais même à ce niveau, il est précisé dans les instructions particulières aux classes de quatrième et de troisième que :

« On démontrera la formule de simplification et les formules concernant les produits et les additions des fractions ($\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ et $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab'+a'b}{bb'}$)

....Mais on ne proposera pas à des élèves de quatrième des exercices de virtuosité sur les fractions. C'est en troisième seulement qu'on prendra des fractions et de leurs propriétés particulières (simplification, choix d'un dénominateur commun...) une habitude plus habile. »

Ainsi l'arithmétique vue en classe de cinquième n'était pleinement réinvestie qu'en classe de troisième.

Déjà dans ces programmes, l'arithmétique n'était pas rentabilisée au maximum.

etc ...

Nous avons voulu savoir, ce qui avait poussé les concepteurs des programmes à en supprimer l'arithmétique en 1985. Nous avons questionné beaucoup de professeurs de mathématiques et la réponse qui prévalait était que l'arithmétique était enseignée pour elle-même avec beaucoup de technicité au dépend du sens. A la lumière des programmes cette façon d'enseigner est un peu inévitable car au moment de l'apprentissage, il n'y a aucune possibilité de réinvestissement.

Ainsi, les programmes que nous venons de voir sont tellement différents, tant au niveau contenus qu'au niveau pédagogique qu'il est difficile d'imaginer que l'on a pu passer de l'un à l'autre du jour au lendemain. Il est surtout difficile d'affirmer que l'un est meilleur que l'autre et il y a sûrement des bonnes choses à retirer de chacun.

Ajoutons-y l'une des activités qu'ils ont proposées à des élèves de Seconde en séances de modules après avoir introduit les notions de PGCD et de PPCM.

Les nombres: on n'en a pas fait le tour!

<u>Crible d'Eratosthène :</u>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a. Le crible en lui-même:

Barre (proprement) dans le tableau ci-dessus tous les multiples de 2 sauf 2, tous les multiples de 3 sauf 3, etc.
Il y a des nombres pour lesquels on ne barre rien. Lesquels? Pourquoi?

Pour chaque nombre pour lequel on barre quelque chose, quel est le premier nombre barré? Pourquoi?
Explique alors pourquoi on n'a pas besoin d'aller plus loin que 10 pour barrer ce qu'il faut dans la grille....

b. Que se passe-t-il?

Il y a des nombres non barrés dans cette grille! Qu'ont-ils de particulier?
On les appelle des *nombres premiers.*

Partons de 90. Ecris ce nombre comme un produit puis écris chacun des facteurs comme un produit et ainsi de suite. Quand ce processus s'arrête-t-il?

<u>Exercice :</u>

Ecrire la décomposition en produit de facteurs premiers pour des nombres:
24, 32, 59, 564, 23040, 480, 17500, 18900.

<u>Exercice:</u>

A l'aide de leur décomposition en produit de facteurs premiers trouver le plus grand diviseur commun des nombres suivants:
24 et 32; 59 et 564; 480 et 17500.

<u>Exercice:</u>

Pour chacun des couples de nombres de l'exercice précédent diviser leur produit par leur PGCD. Que dire du nombre ainsi trouvé?

<u>Exercice:</u>

Pour chacun des couples suivants trouver leur PPCM à l'aide de leur décomposition en facteurs premiers: 24 et 32, 14 et 35, 132 et 144.

<u>Exercice:</u> Calculer: $\sqrt{576}$; $\sqrt{202500}$; 33^2 ; $\frac{567}{351}$.

<u>Exercice:</u>

Trois cyclistes parcourent, d'une allure régulière, une piste circulaire. Le premier fait un tour en 15 minutes, le second en 18 minutes, et le dernier en 20 minutes. S'il partent ensemble du même point à 14 heures, à quelle heure se retrouveront-ils pour la première fois ensemble a leur point de départ? Combien chacun a-t-il fait de tours?

<u>Exercice</u>

Un club de course de fond veut construire une piste d'entraînement. Ce club prépare à trois distances: 1800 m, 9000 m et 21 km, le semi-marathon.
Quelle longueur choisir pour la piste pour qu'elle soit propice à chaque distance(c'est-à-dire que pour chaque course on part et on arrive à la même ligne, et que l'on parcoure le moins de tours possibles.)?

Exercice :

Des pains de savon sont des pavés de dimensions 48 mm, 54 mm et 72 mm.
On veut les emballer sans perdre de place dans des caisses cubiques.
Quelles doivent être les dimensions de ces caisses pour qu'elles soient en outre les plus petites possibles? Combien de pains de savon contiendra une caisse?

3. "Du matériel pour ouvrir des portes en mathématiques"

Voici un passage relevé dans l'introduction de François Bonomi :

"Mon idée est de montrer ainsi que des élèves qui éprouvent des difficultés face aux méthodes d'approche traditionnelles de notre système scolaire, pourraient en fait les surmonter à travers d'autres approches plus appropriées. Chaque individu privilégie en effet certains modes de pensée et des canaux sensoriels spécifiques lors d'un apprentissage et tout particulièrement dans la phase de réception des informations."

Et voici un autre extrait (pages 10 et 11 du mémoire) :

Apprendre en mathématique dans les lycées et collèges

Dans les établissements scolaires

Pour apprendre il faut être motivé ; il faut ensuite savoir chercher ou recevoir l'information ; enfin l'apprentissage dépend du traitement de cette information, de la façon de l'élaborer et de la compléter, de la structurer en établissant des liens entre les diverses informations. Mis à part le problème de la motivation, on a vu que la phase critique dans l'apprendre est la réception de l'information, c'est-à-dire la phase d'élaboration des représentations. Cette phase primordiale est en effet délicate, car c'est sur ces représentations que repose toute la suite du processus d'apprentissage au cours duquel les exercices, les applications agiront, comme un catalyseur, pour construire le savoir : sans représentations initiales, pas de savoir.

Le "bon élève" ne pose pas de problème particulier. Le bon élève est en fait celui qui apprend pour ainsi dire seul, qui sait fournir un travail efficace quelle que soit l'activité proposée, sa forme ou son contenu. Mais pourquoi l'élève moyen ne parvient-il pas toujours à fournir l'effort nécessaire : pourquoi n'est-il pas motivé ? On a vu en effet que la motivation se mesure à l'effort que l'apprenant est prêt à consentir pour apprendre. Pour tenter de répondre à la question : «Comment motiver les élèves ? Comment leur donner envie d'apprendre ?», il est peut-être plus simple et plus judicieux de se poser la question : «Pourquoi n'apprennent-ils pas ? Pourquoi ne sont-ils pas motivés ?»

Hormis les facteurs externes, non maîtrisables par l'enseignant, comme l'environnement social, familial, affectif ou culturel, examinons ce qui dans le contexte pédagogique est maîtrisable par l'enseignant. Supposons d'abord que les acquis et connaissances des élèves sont suffisants pour aborder les activités proposées. Il reste alors les facteurs liés à l'environnement - conditions matérielles, temporelles, exigences des programmes, etc. - pour lesquels la marge de manœuvre est relativement faible, et, d'autre part, les facteurs propres à l'apprenant : habitude de travail, capacité de concentration, sensibilité, c'est-à-dire en fait l'adéquation apprenant-activité. Or dans l'enseignement en lycée et collège, une activité s'adresse à une classe, à une classe dédoublée, ou, dans le meilleur des cas, à un groupe de niveau. Il n'est par conséquent pas possible d'adapter une activité à chaque élève.

Par contre, dans une activité, ou au cours d'une activité, on peut proposer une diversité d'approches susceptibles d'intéresser un maximum d'élèves, et ce particulièrement en jouant sur la diversité des voies d'accès aux données : canaux sensoriels et pôle physique mis en jeu - voir, entendre, toucher, déplacer -, et niveau de conscience sollicité - raisonnement ou perception globale. La plus grande marge de manœuvre se situe donc au niveau de l'activité elle-même : son objectif, la démarche, les registres et les modes de pensée mis en jeu, les voies sensorielles sollicitées.

C'est précisément l'idée de base de la réflexion que je propose dans ce mémoire pour tenter d'exploiter le plus largement possible ces possibilités et favoriser ainsi l'acquisition de représentations pour tous les élèves.

Dans les programmes

Examinons les textes des programmes des collèges et lycées par rapport au thème de la diversification des approches des notions. En particulier relevons tout ce qui se distingue de l'approche traditionnelle en mathématique, basée sur une communication écrite et magistrale, et sur un mode impliquant la pensée rationnelle consciente.

Il est important de noter qu'il ne s'agit pas de négliger ce mode de fonctionnement - en mathématique ceci est en effet primordial et doit donc constituer un objectif de l'enseignement -, mais de l'adjoindre à d'autres modes de pensée pour enrichir les méthodes d'approche des notions enseignées.

Programmes des collèges[3].

L'introduction des textes officiels des programmes de collège précise que *la liberté des méthodes pédagogiques libère la force de l'esprit et stimule la capacité d'innovation* . [...] *La pédagogie ne permet de parvenir aux objectifs visés et aux connaissances essentielles que si elle favorise l'activité de l'élève, développe ses capacités de création et d'invention* [...] *On n'oubliera jamais que tous les élèves sont appelés à réussir selon des formes et des rythmes divers* . Les programmes vont donc dans le sens d'une prise en compte de la diversité de sensibilités des élèves.

Par nature, un des objectifs de *l'enseignement des mathématiques est d'apprendre à relier des observations du réel à des représentations*[4] *: schémas, tableaux, figures ; il apprend aussi à relier ces représentations à une activité mathématique et à des concepts.* On pourrait résumer cette idée par : donner du sens aux mathématiques en les reliant à la réalité et, inversement, en apprenant à "mathématiser" le réel.

etc ...

Voici une activité expérimentée en classe mais qui demande au professeur d'être lui-même bricoleur. Vous pouvez en trouver d'autres dans le mémoire, inspirées de parutions d'IREM et plus faciles à mettre en œuvre dans les classes.

Homothétie et pantographe(*)

Cette activité prend place dans le chapitre de calcul vectoriel en géométrie plane pour l'étude de l'homothétie. L'objectif de l'activité est l'analyse mathématique du fonctionnement d'un mécanisme simple par la mise en œuvre de l'outil vectoriel. Elle nécessite bien sûr d'avoir traité préalablement le calcul vectoriel et la définition de l'homothétie. Il s'agit, après avoir compris le principe de construction de l'appareil, de montrer que le pantographe réalise bien une homothétie et de calculer son rapport. Je décris en détail cette activité dans l'annexe B2.

L'activité se déroule sur une séance d'une heure. Une première phase consiste à expliquer collectivement le fonctionnement à l'aide de la maquette ; le travail est ensuite poursuivi individuellement. Le pantographe est laissé à la disposition des élèves durant toute la séance. Ils peuvent l'utiliser pour faire des tracés, des mesures, etc.

Le pantographe est réalisé en laiton (tiges Ø4, Ø6mm, tube Ø6-8mm et plat 2x10mm) assemblé par brasage. Si cette réalisation demande un outillage conséquent et un certain savoir-faire, le pantographe peut cependant être réalisé très simplement à l'aide de baguettes de bois assemblées par des vis standard du commerce, même si l'appareil ainsi obtenu est moins précis dans son fonctionnement. Les pointes traçantes sont des mines à bille BIC®.

Il est important de noter qu'en fonction du principe de construction retenu pour le pantographe, la solution est plus ou moins facile à trouver pour les élèves. J'ai choisi ici, pour une classe de seconde, la solution la plus difficile pour laquelle le pantographe est constitué de quatre éléments (figure 1 de l'annexe B2), les autres solutions étant plus appropriées à un travail sur Thalès.

Le fonctionnement est rapidement compris par tous ; l'existence de l'homothétie ne fait aucun doute, de même que l'identification de son centre qui est le point fixe du pantographe. Il est cependant nécessaire d'aider les élèves à analyser les caractéristiques géométriques de l'appareil à travers l'égalités des longueurs. La mathématisation est ensuite aisée pour ceux qui maîtrisent l'outil vectoriel.

Là encore, et peut-être plus que pour l'activité précédente, il est frappant de constater combien certains élèves sont réticents à faire l'effort de manipuler. Ma conseillère pédagogique, présente durant cette séance, m'a fait remarquer que le fait de ne disposer que d'un seul appareil pour cette activité procurait probablement à ces élèves une "excuse" : «Il n'est pas possible de travailler simultanément à 18 avec l'appareil, laissons donc ceux qui s'y intéressent le faire !» Par ailleurs j'ai commis l'erreur d'installer le matériel à l'avant de la salle sur le bureau qui est la plus grande table disponible, conservant ainsi à l'objet le statut de "propriété de l'enseignant", ce qui constitue un obstacle supplémentaire que l'élève doit franchir pour manipuler. Ma conseillère pédagogique m'a proposé de réaliser la même manipulation dans sa classe au moment de traiter l'homothétie. J'ai donc présenté l'activité dans cette classe quelques semaines plus tard.

La classe a un niveau homogène élevé, puisqu'il s'agit d'une classe à profil scientifique . La participation et les débats qui suivent la démonstration du fonctionnement sont plus animés et plus fructueux que dans ma classe. La nécessité de la mathématisation du problème et l'approche théorique ne posent problème pour personne, ou presque. Les remarques de ma conseillère pédagogique sur le comportement de ses élèves me semblent intéressantes : l'activité a bien fonctionné et a motivé les élèves ; elle note aussi qu'un élève qui a été particulièrement intéressé et actif durant la phase de manipulation et de débat en groupe, est habituellement très réservé.

(*) D'après une activité proposée par Michel BARTHELET et Pierre HUBERT, professeurs au collège de Herrlisheim : «Théorème de Thalès : visualisation par ombres, pantographe, mesures impossibles et trois équerres».

ANNEXE B2

PARTIE CONCERNÉE DANS LES PROGRAMMES

Géométrie plane, calcul vectoriel : l'homothétie (définition et relation caractéristique).

PRÉREQUIS

Opérations sur les vecteurs : addition et multiplication par un scalaire.
Configuration de Thalès.

OBJECTIF

Analyse mathématique du fonctionnement d'un mécanisme simple par la mise en œuvre de l'outil vectoriel (la figure géométrique de base permettant d'introduire les vecteurs est le parallèlogramme).

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ

Travail collectif pour la partie manipulatoire (ou en groupe suivant le nombre de pantographes disponibles). Travail individuel ensuite pour la partie théorique.
Durée : 1 séance d'une heure.

Matériel pour le professeur

Un pantographe pour démonstration du fonctionnement aux élèves et manipulation.
Feuilles de papier pour les différents tracés.

Première partie :

Démonstration du fonctionnement du pantographe à l'ensemble de la classe (demi classe). L'enseignant réalise plusieurs dessins qui pourront ensuite servir aux élèves pour faire des constructions géométriques, mesurer, puis effectuer des calculs.

Deuxième partie :

Les élèves manipulent le pantographe et réalisent éventuellement leurs propres dessins.
Le but est de reconnaître l'homothétie existant entre les deux figures réalisées simultanément.

Troisième partie :

À partir de l'observation de la géométrie de l'appareil on demande aux élèves de montrer que le pantographe permet effectivement de réaliser une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Quels rapports d'homothétie peut-on obtenir avec le même appareil en changeant le point fixe parmi les trois points remarquables de l'appareil?

Remarque : Suivant la solution retenue pour construire le pantographe, les parallélogrammes permettant de mettre en évidence l'homothétie sont plus ou moins visibles :

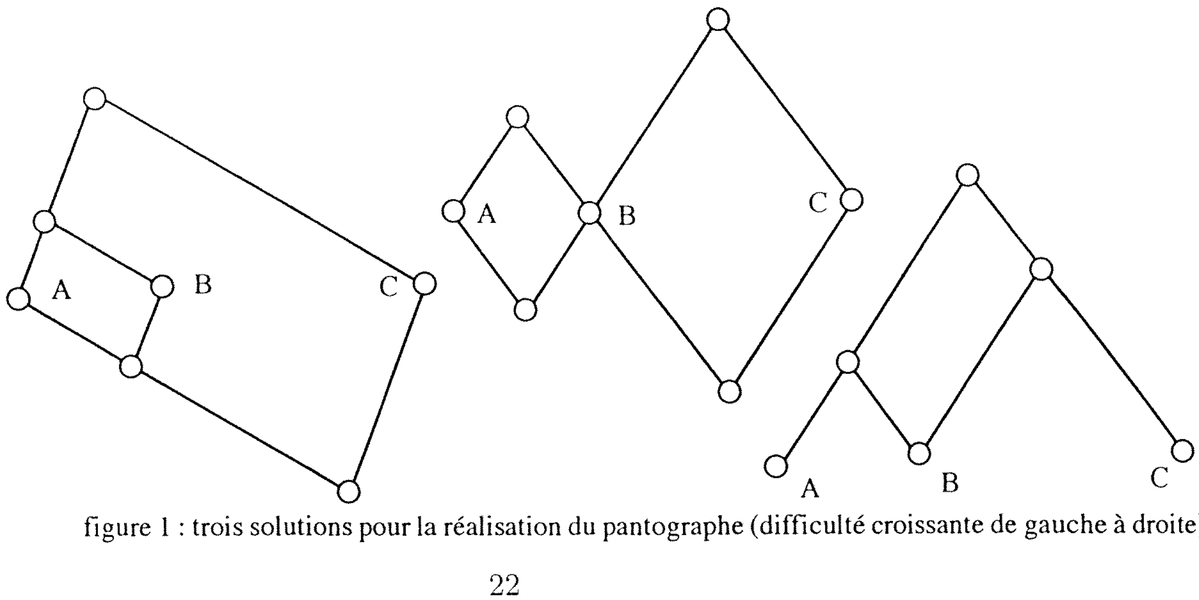


figure 1 : trois solutions pour la réalisation du pantographe (difficulté croissante de gauche à droite)

RECETTE POUR LE TRACÉ POINT PAR POINT DE LA FONCTION SINUS SUR ÉCRAN GRAPHIQUE

Etienne Meyer

1.– Se munir de sa calculatrice graphique ou de son ordinateur muni de son logiciel de tracé de courbes favori.

Dans ce dernier cas, forcer le mode pour que les calculs se fassent pixel par pixel. Il sera peut-être nécessaire d'avoir à calculer le "pas".
Sur une calculatrice graphique ordinarie (comme l'est par exemple la TI 82), pas de problème : elle est faite pour que les calculs se fassent pixel par pixel.
Sur une calculatrice plus évoluée, il peut être nécessaire de fixer quelques paramètres (sur la TI 92, mettre "xres" du menu window à 1).

2.– A l'aide d'un doseur adéquat, déterminer le nombre de pixels sur une ligne horizontale de votre fenêtre graphique.

(Si le constructeur ne vous le fournit pas, voilà un exercice intéressant!)
Soit N ce nombre.
(Pour une TI 82, $N = 94$; pour une TI 92, $N = 238$.)

3.– Mettre $y = \sin(2\pi x)$ dans la casserole à mijoter.

4.– Fixer les paramètres de cuisson de la manière suivante :

$Xmin = 0, Ymin = -1, Ymax = 1$ et $\ldots Xmax = \frac{N+p}{q}$ avec p entier naturel de 0 à ≈ 10 et q entier naturel de 1 à ≈ 6.
Il ne nous reste plus qu'à ajouter un peu de sel et de poivre suivant votre goût et à faire

5.– mijoter doucement le graphe.

Si votre matériel dessine point par point, sans relier les points, vous verrez apparaître (peut-être!) q sinusoïdes représentées sur $\frac{p}{q}$ périodes.
Si votre matériel relie les points calculés par des erzats de segments, vous verrez apparaître (peut-être!) des zones délimitées par q sinusoïdes représentées sur $\frac{p}{q}$ périodes et par bien d'autres sinusoïdes encore (d'amplitude inférieure à 1).

6.– Faire une démonstration de votre talent.

Ce qui va être dessiné, ce sont les points $(x_k; y_k)$ avec :
$x_k = \frac{Xmax.k}{N} = \frac{\frac{N+p}{q}.k}{N} = (1+\frac{p}{N}).\frac{1}{q}.k$ et $y_k = \sin(2\pi x_k) = \sin\left(2\pi(1+\frac{p}{N}).\frac{1}{q}.k\right)$
Pour $k = q.k'+r$ (avec k' et r entiers et $r < q$: **ce qui explique les q sinusoïdes**), on obtient :

$$y_k = \sin(2\pi(1+\frac{p}{N})(k'+\frac{r}{q})) = \sin(2\pi(\frac{p}{N}).k' + \varphi)$$

Soit encore :

$$y_k = \sin(2\pi\frac{p}{N}\frac{k-r}{q} + \varphi) = \sin(2\pi\frac{p}{Nq}\frac{Nqx_k}{(N+p)} + \alpha) = \sin(2\pi\frac{p}{N+p}x_k + \alpha).$$

Il s'agit encore d'une sinusoïde,
mais la courbe de départ a pour période 1 (on devrait donc représenter $Xmax$ périodes de cette sinusoïde)
tandis que celle qu'on vient d'obtenir, a pour période $\frac{N+p}{p}$ (et on va en représenter

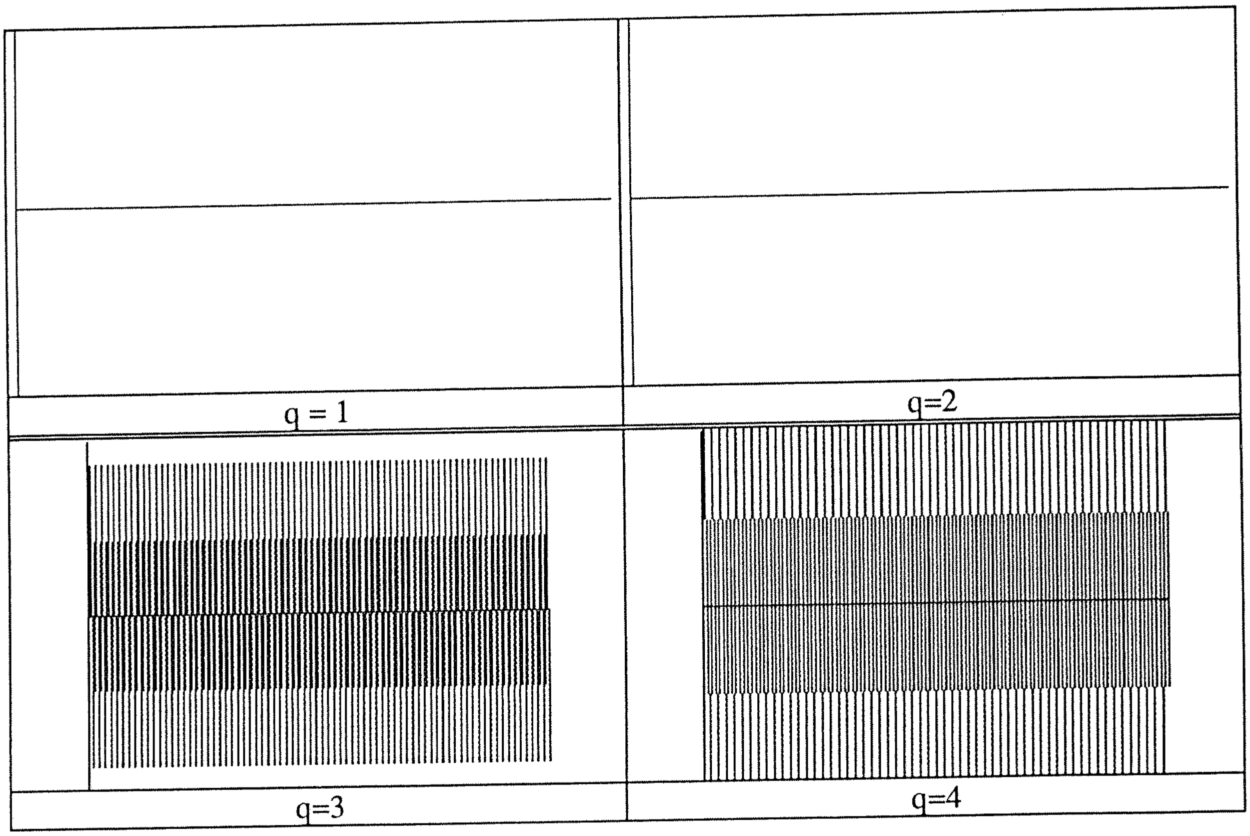
$$\frac{Xmax}{\frac{N+p}{p}} = \frac{\frac{N+p}{q}}{\frac{N+p}{p}}$$

périodes soit p/q périodes).

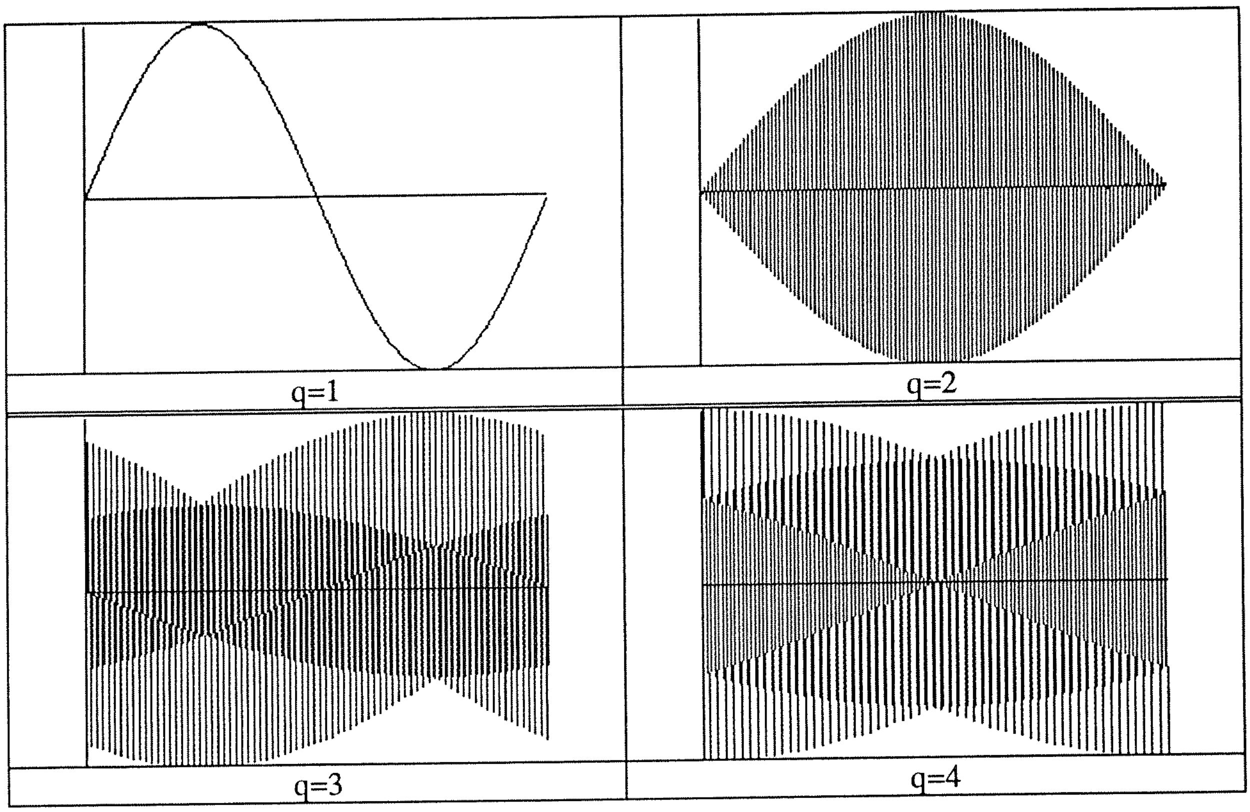
QUELQUES TRACES DE LA FONCTION SINUS AVEC GRAPH'X

La fonction à représenter est $x \mapsto \sin(2\pi x)$ sur $[0; 500]$ (la borne supérieure n'a pas d'importance, pourvu qu'elle soit assez grande).
Une fenêtre graphique étant dimensionnée (voir les résultats ci-dessous), on détermine N. La valeur précise de N n'est pas importante dans un premier temps; elle va cependant déterminer la "qualité" des tracés. Pour les dessins ci-dessous, $N = 231$.
On choisit les deux valeurs déterminantes p et q.
On fixe le pas à $(1+\frac{p}{N}).\frac{1}{q}$; on fait varier y de -1 à 1; on fait varier x de 0 à $Xmax = \frac{N+p}{q}$.
Voici les résultats obtenus, suivant les valeurs de p et q. Le passage de Graph'x à Word puis à l'imprimante ne rend pas fidèlement ce qui apparaît à l'écran sous Graph'x (malgré les nombreuses tentatives réalisées).

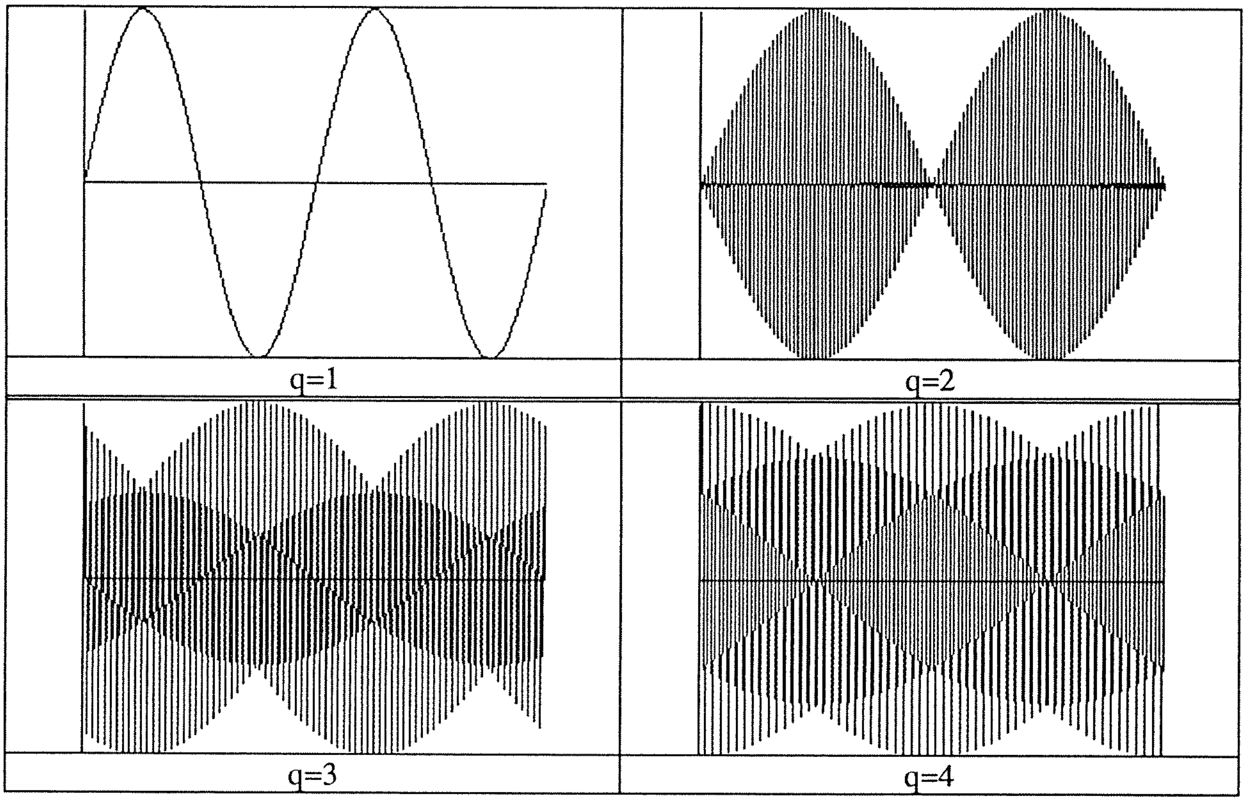
Pour p = 0



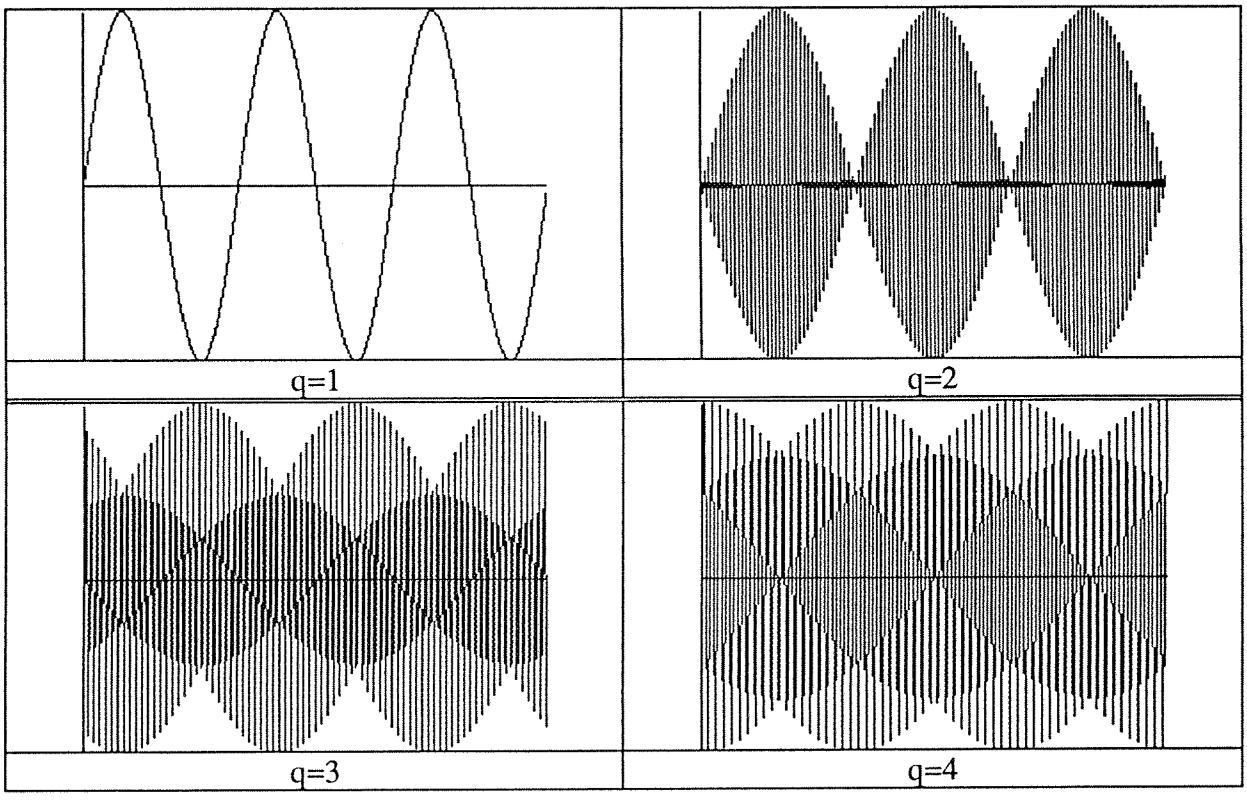
pour p = 1



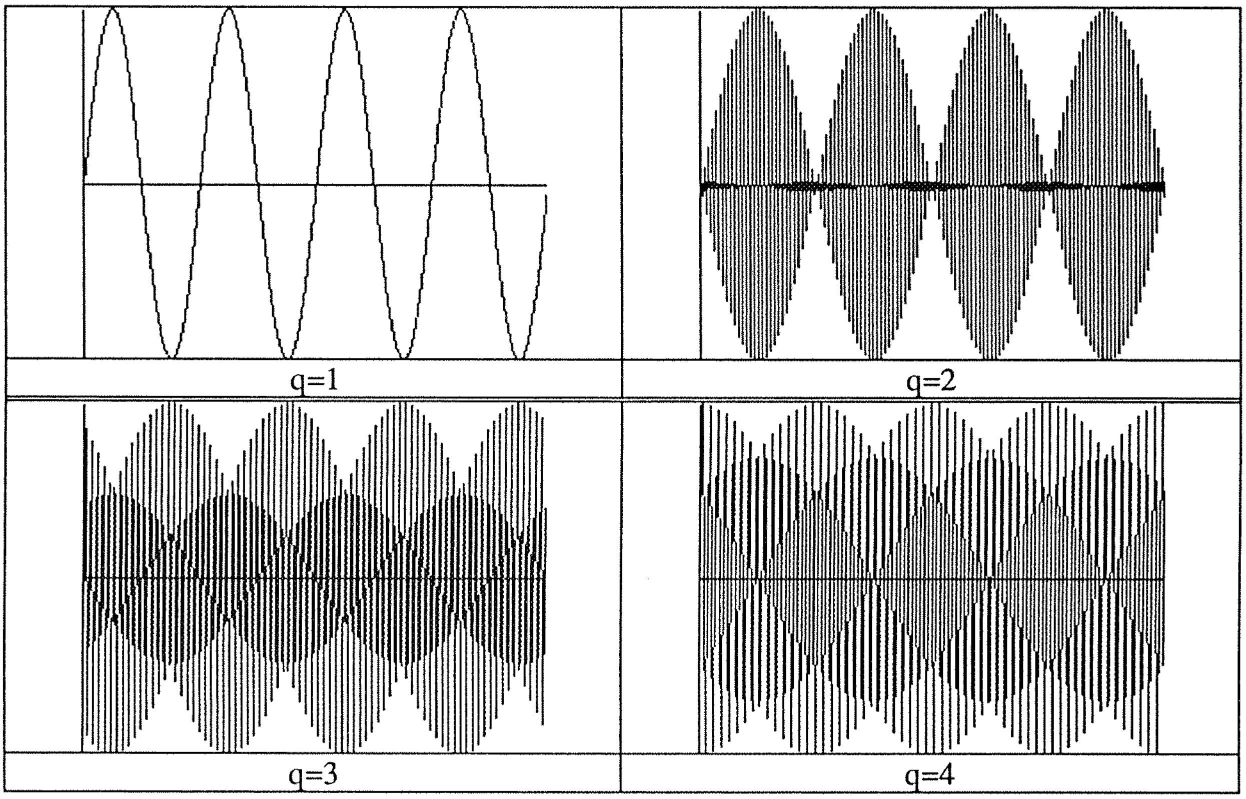
pour p = 2



pour p = 3



pour p = 4



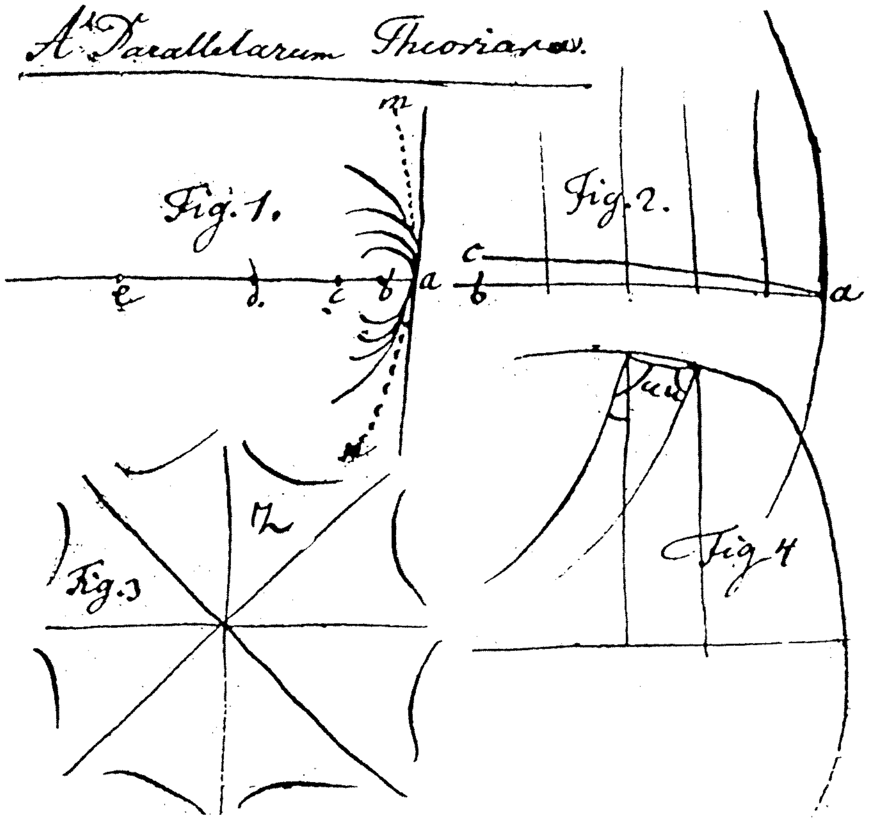
ET POURTANT QUELQUES-UNS SONT QUARRABLES
LA QUADRATURE DU CERCLE DANS LA GEOMETRIE HYPERBOLIQUE

par Klaus Volkert, professeur à Heidelberg

2nde PARTIE

5. Retour à la géométrie hyperbolique

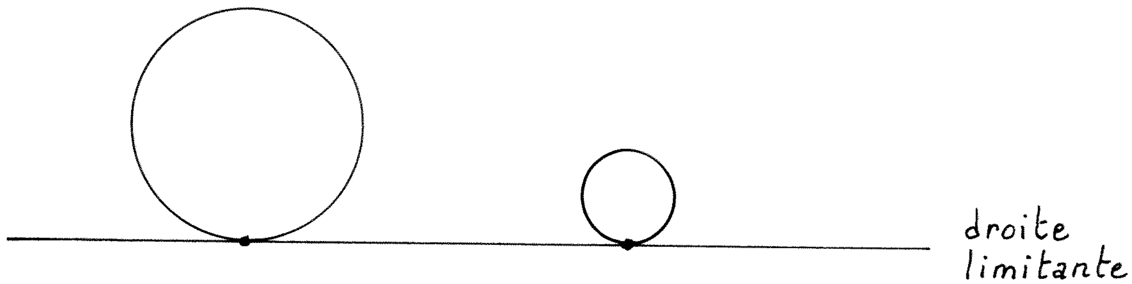
Pour arriver à une caractérisation de la constructibilité dans la géométrie hyperbolique, Bolyai se sert d'une espèce de courbes appelées aujourd'hui cercles-limites (ou horicycles). Bolyai lui-même parle des lignes L. On sait par des esquisses publiées par Stäckel que Bolyai avait l'idée de ces lignes assez tôt.



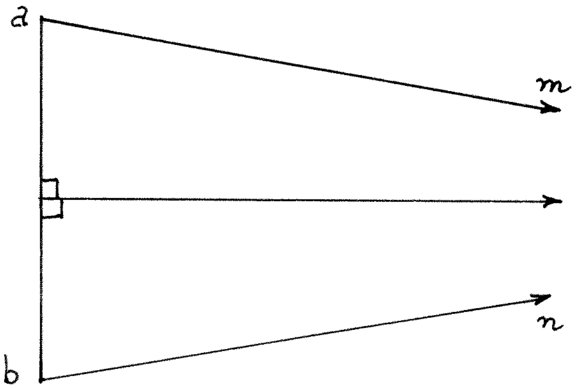
On peut décrire les cercles-limites comme des cercles hyperboliques à rayon infini. Le modèle de Poincaré en fournit une idée intuitive. Dans celui-ci les cercles-limites sont des cercles euclidiens du plan hyperbolique qui touchent la droite limitante du plan. Donc le point de contact n'est pas un point du modèle, il se trouve à l'infini. Ce point est appelé le centre du cercle-limite ; tous les segments qui joignent un point du cercle-limite, autre

© L'OUVERT 85 (1996)

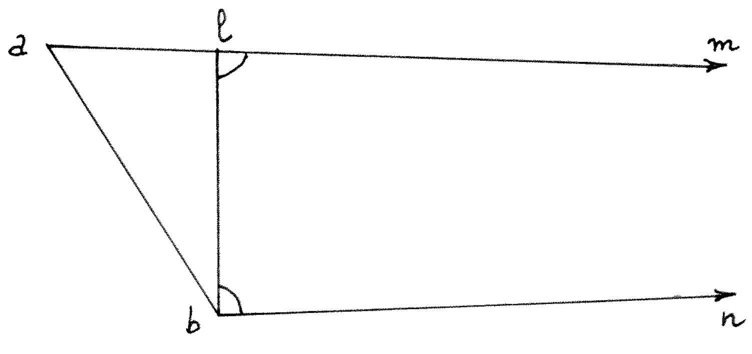
que le centre, avec ce centre sont appelés des rayons (ou des diamètres). Evidemment leur longueur est infinie.



Bolyai donne des cercles-limites une autre définition pour laquelle il faut considérer la situation suivante (§ 5) :

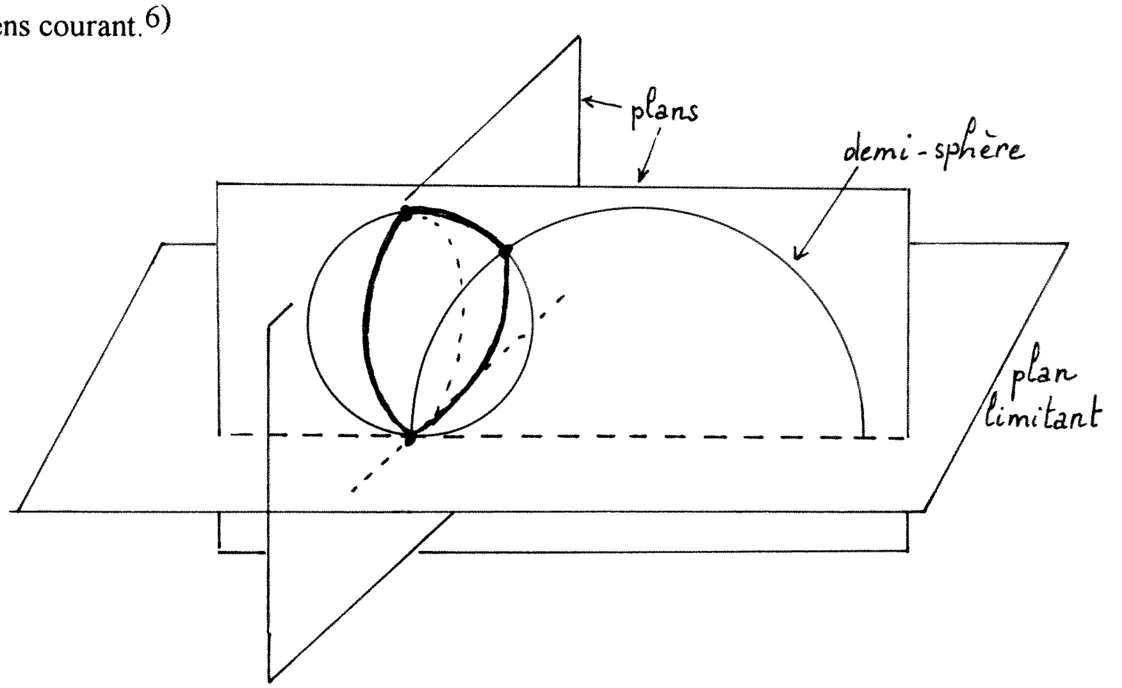


Soit am parallèle à bn et ∠ bam = ∠ abn. Si on a deux parallèles am et bn il démontre dans le paragraphe cité qu'on peut toujours trouver un point f sur am tel que ∠ bfm = ∠ fbn

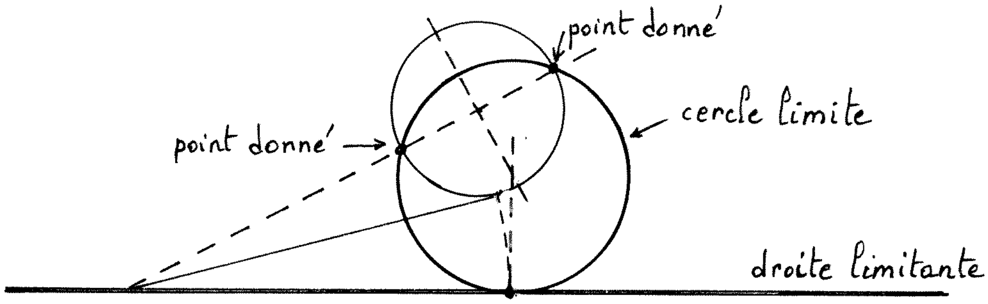


Par conséquent, étant donnés un point a et une demi-droite am , on peut considérer l'ensemble des points b tels qu'on ait ∠ bam = ∠ abn. Cet ensemble est le cercle-limite passant par a et de rayon am (§ 11). Si on quitte le plan on obtient ainsi une surface appelée sphère-limite (ou horisphère ; Bolyai utilise le nom de surface F). On peut faire

de la géométrie sur une sphère-limite : les points de cette géométrie sont les points de la sphère-limite et les droites sont les cercles-limites sur la sphère-limite. Il faut noter que ces cercles-limites proviennent de l'intersection de la sphère-limite et d'un plan hyperbolique. Ainsi peut-on également introduire la notion d'angle dans cette nouvelle géométrie : l'angle entre deux cercles-limites est l'angle entre les deux plans hyperboliques correspondants. En somme l'analogie avec la géométrie sphérique est assez proche. Cependant il y a une différence stupéfiante : la géométrie sur une sphère-limite est euclidienne! Ce fait connu de Gauß et de Lobatchevsky est démontré par Bolyai en calculant la somme des angles internes des triangles sur la sphère-limite (§ 21). Il en conclut : *Il résulte de là que l'axiome XI et toutes les conséquences que l'on en déduit en géométrie et en trigonométrie (plane) sont vraies d'une manière absolue dans F, les lignes L jouant le rôle de lignes droites.* C'est la première fois dans l'histoire de la géométrie qu'on rencontre un modèle qu'on peut nommer non-standard pour la géométrie euclidienne.
Parce que la géométrie d'une sphère-limite est euclidienne on peut y exécuter des constructions à la règle et au compas. Bien entendu ce sont des constructions tout à fait théorique, mais cela ne posait pas de difficultés à Bolyai comme nous l'avons déjà vu.
Si on travaille dans le modèle de Poincaré tridimensionel la géométrie sur une sphère-limite peut s'étudier un peu plus concrètement. Les sphères-limites sont ici des sphères tangentes au plan limitant. Les cercles-limites sur une sphère-limite sont les intersections des plans hyperboliques passant par le point de contact de la sphère-limite avec le plan limitant et la sphère-limite elle-même. Les plans sont des plans ordinaires orthogonaux au plan limitant ou des demi-sphères ayant leurs centres dans ce plan. Si on veut analyser les angles d'un triangle composé d'arcs de cercle-limite on est renvoyé à des angles entre des plans ordinaires. C'est dû au fait que les angles entre des demi-sphères sont définis de cette manière. Ainsi est-on, au moins en principe, revenu à des considérations bien connues de la géométrie sphérique. Si on prend par exemple deux plans ordinaires passant par le point de contact , orthogonaux au plan limitant et coupant la sphère-limite, plus une demi-sphère passant par le point de contact et ayant son centre dans le plan limitant, on obtient un triangle sur la sphère-limite qui est composé de deux grands cercles plus un petit cercle. Notez que ce triangle n'est pas un triangle sphérique dans le sens courant.6)

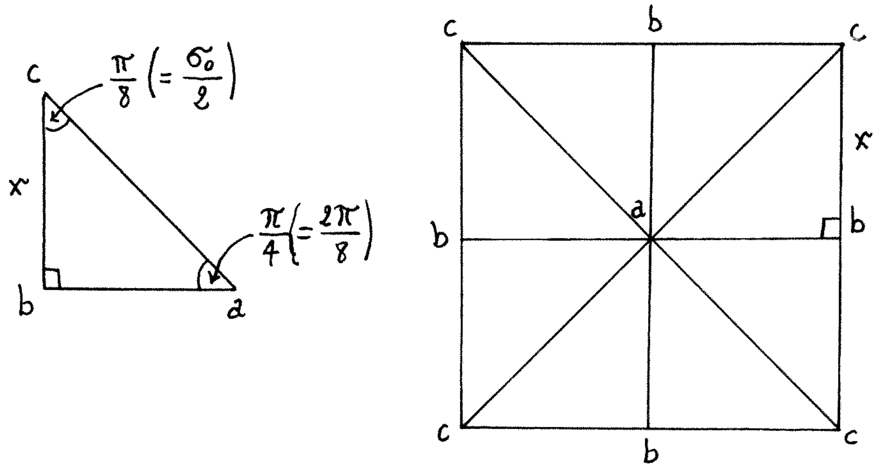


Mais revenons à nos constructions hyperboliques. Le problème de la constructibilité des segments est réduit par Bolyai à celui de la constructibilité des arcs de cercle-limite. Il n'est pas difficile de comprendre que si on se donne deux points du plan hyperbolique et une demi-droite il n'existe qu'un cercle-limite qui passe par les points donnés et admet la demi-droite donnée comme rayon.



Dans le modèle de Poincaré cet énoncé revient au simple fait que deux points plus une tangente fixent un cercle.
Mais les deux points du plan hyperbolique fixent aussi d'une manière univoque un segment. Ce segment peut être considéré comme la corde d'un cercle-limite passant par ses deux extrémités. Donc on peut considérer le segment comme construit si on peut construire l'arc du cercle-limite correspondant! Or la constructibilité de ce dernier est un problème de la géométrie euclidienne.[7)]
Par un passage à la limite Bolyai obtient dans le paragraphe 30 le résultat suivant: si r désigne la longueur d'un segment hyperbolique, la longueur de l'arc de cercle-limite correspondant sera égale à 2sinh(r/2) (en notation moderne; Bolyai lui-même n'utilise jamais des fonctions hyperboliques). Puisque dans le contexte des constructions on peut toujours remplacer r/2 par r (et vice versa), on peut énoncer:
un segment hyperbolique de longueur r est constructible si un segment euclidien de longueur 2sinh r est constructible en géométrie euclidienne.
(D'ailleurs on pourrait aussi citer l'identité sinh(2r) = 2(sinh r)(cosh r) en lien avec le paragraphe 4, pour justifier ce résultat .)
Il s'ensuit qu' étant donné un segment hyperbolique de longueur r on ne peut pas construire, en général, le segment de longueur r/3 en géométrie hyperbolique parce que, pour sinh r $\in \boldsymbol{P}$, on a sinh r/3 $\in \boldsymbol{P}$.[8)] Donc la constructibilité des segments diffère considérablement dans les deux géométries! De plus nous pouvons constater que le cercle de rayon $\sinh^2(r_0/2) = 1/4$, que nous avons utilisé dans notre tentative de quadrature, est constructible, parce que 1/4 est certainement un élément du corps ***P***. Par conséquent nous avons déjà quarré un cercle dans la géométrie hyperbolique. Pour aller un peu plus loin il faut dire quelques mots sur la construction des angles.
Nous ne trouvons pas d'informations explicites sur ce problème chez Bolyai. Mais il est clair qu'il avait l'idée qu'un angle est constructible en géométrie hyperbolique s'il l'est dans la géométrie euclidienne et vice versa. A la fin du § 37 il constate :
Ainsi, par exemple, on pourra diviser géométriquement 4R [c'est à dire 2π] *en un nombre quelconque de parties égales, si l'on sait faire cette division dans le système Σ.*

Avant de donner une application des idées de Gauß sur la constructibilité des angles, nous revenons à la quadrature du cercle cité ci-dessus.Nous sommes partis d'un cercle à rayon r_0 avec $\sinh^2(r_0/2) = 1/4$; ce cercle avait une aire égale àπ. En utilisant le principe de Bolyai (un peu modifié pour être honnête) nous avons vu que le segment de longueur r_0 est constructible. Donc nous sommes capables de construire le cercle considéré. De plus nous avons calculé l'angle σ_0 du quadrilatère régulier de même aire que le cercle ; nous avons trouvé $\sigma_0 = \pi/4$. Cet angle est constructible (selon Gauß ou beaucoup plus simplement par bissection de l'angle droit). Mais comment arriver d'une manière constructive au quadrilatère ? C'est toujours une bonne idée - évoquée aussi par notre héros Bolyai (à la fin du § 43) - de travailler avec des triangles. Considérons le découpage suivant du quadrilatère cherché :



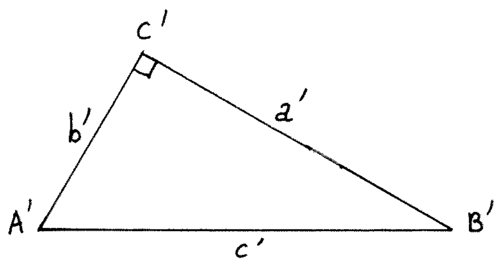
Si on connaît les angles du triangle rectangle abc on peut construire le quadrilatère en utilisant des copies congruentes du triangle abc. Quels sont ses angles ? Evidemment l'angle $\angle$ cab = $2\pi/8 = \pi/4$ parce qu'on utilise huit copies du triangle abc. Le double de l'angle $\angle$ acb doit égaler σ_0 (l'angle calculé) ou $\pi/4$, donc $\angle$ acb = $\pi/8$.

Nous connaissons les trois angles du triangle cherché. Tous ces angles sont constructibles pour des raisons assez simples. Mais comment construire le triangle ? Lisons d'abord Bolyai lui-même (fin du § 43) :

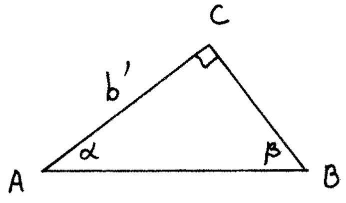
Soit $\angle$ abc = R [l'angle droit] , *$\angle$ bac = 1/2 R, $\angle$ acb = 1/4 R, et bc = x. On pourra exprimer X (§ 31,II) par de simples racines carrées, et le construire (§ 37). Connaissant X, on pourra déterminer x (§38, ou encore § 29 et § 35). L'octuple du Δ abc est évidemment = π, et, par là un cercle plan se trouve carré géométriquement au moyen d'une figure rectiligne et de lignes uniformes de même espèce (c'est-à-dire de lignes équivalentes à des droites quant à leur comparaison entre elles).*

On comprend bien ici comment Bolyai se servait de son principe. Par une sorte de trigonométrie que nous exprimons aujourd'hui par $\cosh x = \cos\alpha / \sin\gamma$ (ce qui donne avec les valeurs de α et de γ : $\cosh x = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$) il arrive à calculer le segment x. On a

cosh x $\in \boldsymbol{P}$ et aussi (par $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$) sinh x $\in \boldsymbol{P}$. En conclusion on peut constater que x est constructible. On comprend ici que Bolyai n'utilise pas le résultat même de Gauß (sur les angles) mais la caractérisation implicite des segments constructibles dans la géométrie euclidienne.
Ensuite il s'agit de construire le triangle cherché : peut-on construire un triangle connaissant ses angles ? Souvenons-nous qu'en géométrie hyperbolique deux triangles sont déjà congruents s'ils possèdent des angles congruents. Par conséquent notre question n'est pas si absurde qu'en géométrie euclidienne.
La question posée n'est pas abordée par Bolyai. Dans les années 1890 on commençait à s'intéresser aux constructions hyperboliques et la question fut étudiée dans le cas particulier du triangle rectangle par Max Simon (1897), professeur d'un lycée de Strasbourg et plus tard , en 1903 , professeur d'histoire des mathématiques à l'université de Strasbourg. Une solution générale ne fut donnée qu'en 1901 par Heinrich Liebmann[9)] qui était aussi l'auteur du premier manuel de géométrie non-euclidienne en allemand (1905)[10)] . Marcel Großmann, mathématicien suisse et ami d'Einstein, a donné un peu plus tard une construction du triangle connaissant ses angles dans le modèle de Klein.
Pour le cas d'un triangle rectangle la construction est la suivante: soient donnés les angles α et β avec $\alpha + \beta < \pi/2$. Nous construisons tout d'abord un triangle auxiliaire. Par la deuxième construction fondamentale nous sommes capables de construire les segments c' = $\Delta(\alpha)$ et a' = $\Delta(\pi/2 - \beta)$ (voir « L'Ouvert » n°84, page 28). Comme $\alpha < \pi/2 - \beta$ on a aussi $\Delta(\alpha) > \Delta(\pi/2 - \beta)$ et par conséquent c' > a'. Nous allons construire un triangle rectangle A'B'C' avec les côtés a' et c' de la manière suivante:

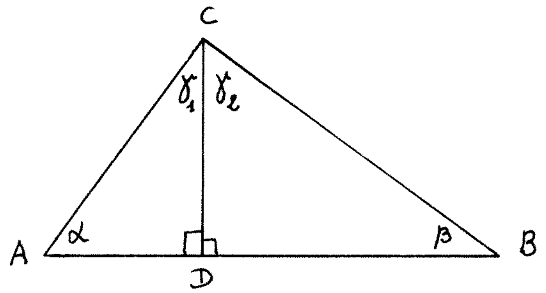


on commence par a'; on élève en C' la perpendiculaire, on trace autour de B' un cercle de rayon c'. Il faut bien noter que cette construction est possible parce que le côté qui se trouve en face du plus grand angle est connu. Le théorème de congruence qui fournit la base de cette construction n'est pas démontré par Euclide.
Avec le côté b' et l'angle donné α on construit le triangle ABC rectangle en C (cf. I, 26 chez Euclide) :



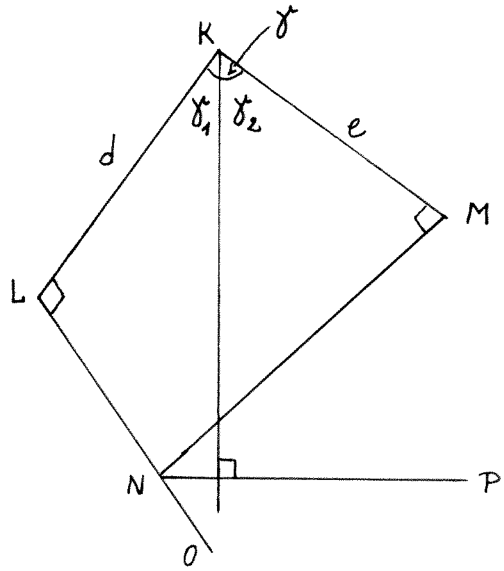
On sait par les principes de correspondance entre un quadrilatère d'Haytam - Lambert et des triangles rectangles que l'angle β du triangle ABC est égal à $\pi/2 - \Pi(a')$. Parce qu'on a $a' = \Delta(\pi/2 - \beta)$ on obtient $\beta = \pi/2 - \Pi(\Delta(\pi/2 - \beta)) = \pi/2 - (\pi/2 - \beta) = \beta$. Donc le triangle ABC possède les angles voulus.

La construction d'un triangle connaissant ses trois angles est plus compliquée. Soient donnés les angles α, β et γ tel que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Il est bien connu qu'on peut trouver dans chaque triangle au moins une hauteur qui passe par l'intérieur de ce triangle. Nous avons donc la situation suivante :



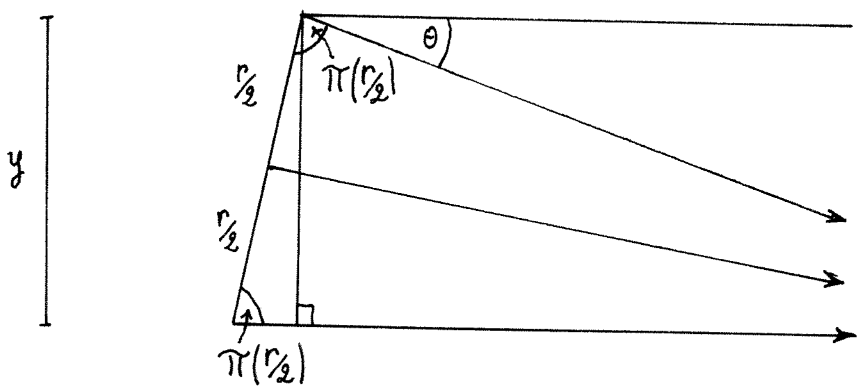
Par conséquent il suffit de construire les triangles rectangles ADC et DBC. Pour y arriver il faut construire d'abord les angles γ_1 et γ_2.

Or, par la deuxième construction fondamentale , nous sommes capables de construire les segments $d = \Delta(\pi/2 - \alpha)$ et $e = \Delta(\pi/2 - \beta)$. Avec ces segments et l'angle γ on peut construire un quadrilatère du type suivant :



La demi-droite NP est la bissectrice de l'angle MNO. De K on abaisse la perpendiculaire sur NP. Elle découpe l'angle γ en deux parties, les angles cherchés. Pour la vérification de cette construction on peut consulter le livre de Perron (Perron 1962, page 47).

En résumé nous pouvons constater que si on a trois angles constructibles α, β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ alors on peut construire le triangle à partir de ses trois angles.
Avec ces considérations on peut s'attaquer encore une fois à la quadrature du cercle, ce que nous ferons plus loin.
Mais revenons d'abord à Bolyai. Pour aller un peu plus loin que le cas particulier discuté ci-dessus Bolyai transforme le problème. Nous avons vu que l'aire d'un cercle de rayon r est donnée par la formule $A(C(r)) = 4\pi\sinh^2(r/2)$. Bolyai construit alors un angle θ tel que $2\sinh(r/2) = \tan\theta$ ou $4\sinh^2(r/2) = \tan^2\theta$, ce qui mène à la formule $A(C(r)) = \pi \tan^2\theta$.
La construction (§ 21) en est la suivante. Soit donné le segment r. On construit r/2 et sa médiatrice. Aux extrémités du segment donné on construit à l'aide de notre première construction fondamentale les angles $\Pi(r/2)$. On obtient ainsi deux parallèles. Puis on abaisse la perpendiculaire d'une extrémité du segment de longueur r à la parallèle opposée et on construit la perpendiculaire au segment par l'extrémité de laquelle on est parti. L'angle entre cette perpendiculaire et la parallèle est l'angle cherché.



Cette construction elle aussi se vérifie par un calcul trigonométrique. On a
$\tan\theta = \cot\Pi(y) = \sinh y = (\sin\Pi(r/2))(\sin 2r)$
$= (\mathrm{sech}\, r/2)\,(2(\sinh r/2)(\cosh r/2)) = 2\sinh(r/2)$ (avec $\mathrm{sech}\, x = 1/\cosh x$).

On comprend bien que les deux extrémités du segment donné sont équidistantes de la médiatrice. Donc elles se trouvent sur un cercle-limite avec cette perpendiculaire comme rayon. Le segment donné est une corde de ce cercle-limite. Et parce que la longueur de l'arc du cercle-limite est donnée par la formule $2\sinh^2(r/2)$, on a transformé cette longueur en $\tan^2\theta$, c'est-à-dire en une longueur qu'on peut interpréter comme une longueur euclidienne.

La construction décrite en haut montre que si r est constructible, θ l'est aussi. Et vice versa. Par conséquent nous pouvons considérer la formule

$$A(C(r)) = \pi \tan^2\theta$$

qui est plus simple que celle de laquelle nous sommes partis.
Nous avons déjà résolu le problème de la quadrature pour le cas particulier où $\tan^2\theta = 1$.
Bolyai continue:

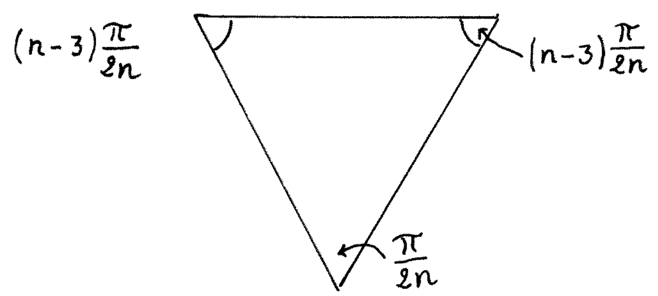
Et pourtant quelques-uns sont quarrables.

Toutes les fois que $\tan^2\theta$ *est un nombre entier, ou un nombre fractionnaire rationnel, dont le dénominateur (après réduction à la plus simple expression) est ou un nombre premier de la forme* 2^m+1 *(dont* $2 = 2^0+1$ *est un cas particulier), ou un produit d'autant de nombres premiers de cette forme que l'on voudra, dont chacun (à l'exception de 2, qui peut seul entrer un nombre quelconque de fois) n'entre qu'une seule fois comme facteur ; on pourra par la théorie des polygones donnée par Gauß (et pour de telles valeurs de* θ *seulement), construire une figure rectiligne =* $\tan^2\theta$ = $A(C(r))$. *Car la division de* π [$=A(Q(\sigma_0)) = A(C(r_0))$] *(...) exige évidemment le partage de 2R* [c'est-à-dire 2 droits], *lequel n' est possible géométriquement que sous la condition précédente. Dans tous les cas pareils, ce qui précède conduit facilement au but ; et toute figure rectiligne peut être transformée géométriquement en un polygone régulier de n côtés, où n est de la forme indiquée par Gauß.* (fin du § 43)

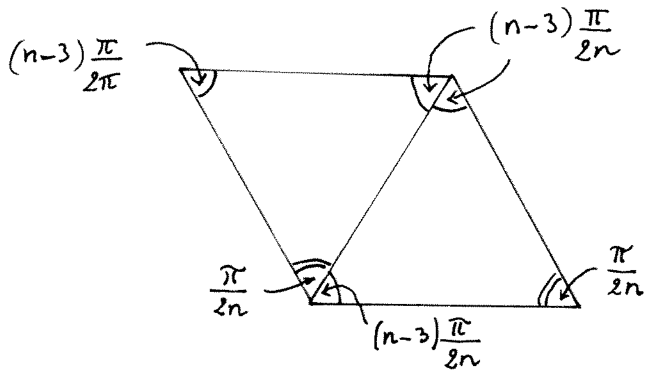
On comprend bien ici que Bolyai change un peu son point de vue en changeant le quadrilatère régulier en un polygone régulier. Pour un polygone régulier P_n, hyperbolique bien entendu, à n côtés ($n \geq 4$) nous obtenons facilement les formules suivantes:

$A(P_n) = (n-2)\pi - n\sigma_n$ et $\sigma_n = (n-3)\pi/n$ où σ_n est l'angle entre deux arêtes consécutives du polygone.

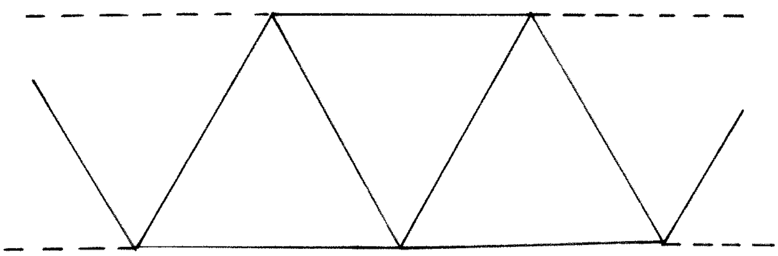
Un tel polygone est composé de n triangles isocèles du type indiqué dans la figure :



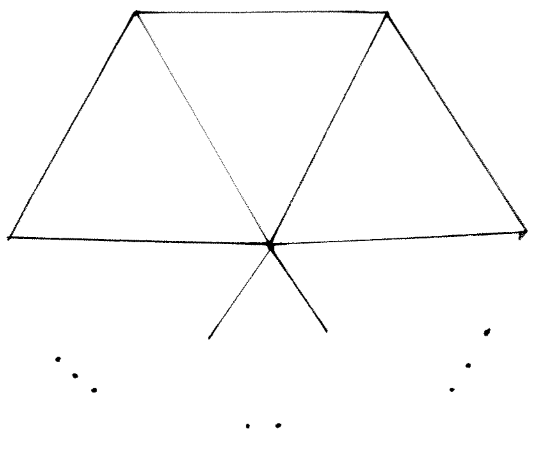
L'aire de ce triangle T_n se calcule selon la formule donnée dans le paragraphe 3. On trouve $A(T_n) = \pi/n$. Donc on a partagé par calcul l'aire π en n parties égales ! Par n pièces de cette sorte on arrive à un polygone régulier. Pour y arriver d'une manière constructive il faut construire les angles du triangle T_n. La constructibilité de $2\pi/n$ était établie par Gauß et Wantzel[11]. Parce que le facteur 2 ne compte pas ici (doubler et bissecter un angle est toujours possible à l'aide de la règle et du compas), le résultat de Gauß-Wantzel revient à demander que n soit de la forme indiquée plus haut. Mais la constructibilité de l'angle $\pi/2n$ suffit pour celle du triangle parce que les autres angles (égaux bien entendu selon Euclide I,5) sont des multiples de $\pi/2n$. Multiplier un angle ne pose aucun problème du point de vue constructif. Donc le triangle T_n avec l'aire π/n et par conséquent le polygone P_n avec une aire égale à π sont constructibles si et seulement si n est de la forme indiquée par Gauß. Mais on peut aller un peu plus loin. En composant deux exemplaires de T_n de la manière indiquée

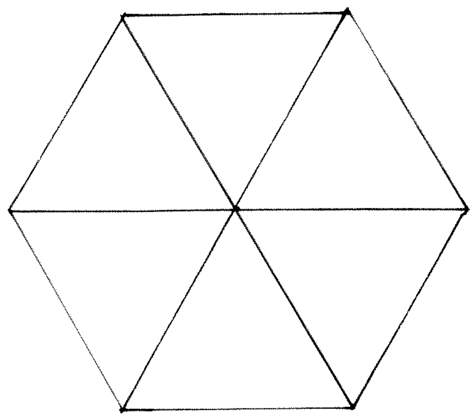


on obtient un quadrilatère d'aire $2\pi/n$. Si on en utilise trois exemplaires on obtient un pentagone d'aire $3\pi/n$. Et ainsi de suite[12) .



En résumé on peut constater : si n est un entier de la forme indiquée par Gauß et m est un entier quelconque on peut construire un polygone (non nécessairement régulier) avec l'aire $m\pi/n$. Si $m \leq n$ on peut aussi choisir une autre manière pour composer les triangles et de cette manière on obtient pour $m = n$ le polygone régulier P_n duquel on est parti.





Donc nous avons résolu le problème de la construction du polygone. Mais que sait-on sur le cercle correspondant ? Commençons par le triangle T_n d'aire π/n. Le cercle correspondant est aussi d'aire π/n ce qui revient à l'égalité suivante :

$$\pi \tan^2\theta = \pi/n \quad \text{ou} \quad \tan^2\theta = 1/n$$

Mais n est de forme Gaußienne, donc $\tan^2\theta \in \boldsymbol{P}$ et par conséquent $\tan\theta \in \boldsymbol{P}$ aussi. Evidemment l'angle θ peut se construire selon les critères donnés au dessus. On ne change rien d'important si on substitue $m\pi/n$ à π/n. Maintenant on comprend bien le rôle de la condition formulée par Gauß : elle garantit la constructibilité du triangle T_n et elle entraîne qu'on peut diviser l'égalité $\pi \tan^2\theta = m\pi/n$ par π. Ce qui reste à droite c'est un nombre rationnel ce qui implique la constructibilité de l'angle θ par $\tan^2\theta \in \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{P}$. Autrement dit nous avons trouvé une condition suffisante pour la constructibilité de l'angle θ: si on a $m\pi/n$ avec n Gaußienne on peut quarrer le cercle d'aire $m\pi/n$ par un polygone à m-2 sommets.

Si nous commencons par l'autre côté de l'équation, c'est à dire par $\pi\tan^2\theta$, la question qui se pose est la suivante: Pour quelles valeurs de $\tan^2\theta$ a-t-on $\pi \tan^2\theta \in \boldsymbol{P}$? En général c'est un problème délicat; pour nous il suffit ici de connaître les valeurs pour θ constructible. La réponse est donnée au dessus: si θ est constructible, $\tan\theta$ est un élément de $\boldsymbol{P}$ et vice versa. Sous la condition indiquée, $\tan^2\theta$ est toujours un nombre de $\boldsymbol{P}$. Donc nous avons trouvé encore une fois une condition suffisante, cette fois-ci pour la constructibilité du polygone. Bien entendu nous ne savons pas s'il y a d'autres valeurs pour θ qui mènent à un polygone constructible.

Notez que nous avons changé un peu le sens du terme quarrer (comme l'a fait Bolyai aussi) en utilisant un polygone au lieu d'un quadrilatère régulier. En géométrie euclidienne on peut toujours transformer un polygone en un carré de même aire (c'est à dire qu'on peut quarrer ici chaque polygone) ce qui est déjà démontré par Euclide (en I,45 plus II,16). En géométrie hyperbolique ce n'est plus vrai par la simple raison que l'aire du quadrilatère est limitée supérieurement par 2π, par contre l'aire du polygone ayant plus que quatre arêtes peut excéder cette limite.
En utilisant des polygones nous gagnons l'avantage que nous pouvons quarrer des cercles d'aire aussi grande qu'on veut. C'est dû au fait que nous pouvons agrandir le nombre m indéfiniment.

6. La solution de Jagy

Le problème général de la quadrature du cercle hyperbolique revient à construire un angle θ (lié au rayon r du cercle par la construction de Bolyai) et un angle σ (celui du quadrilatère régulier) avec

$$\omega = 2\pi - 4\sigma = \pi\tan^2\theta$$

Pour qu'un angle θ soit constructible (en géométrie euclidienne ou en géométrie hyperbolique) il est necessaire et suffisant que $\sin\theta$, $\cos\theta$ ou $\tan\theta$ soient un élément de

P. Par $\tan \theta \in \boldsymbol{P}$ on a aussi $\tan^2 \theta \in \boldsymbol{P}$. D'autre part l'angle ω est constructible si l'angle σ l'est. Par conséquent nous avons à analyser une équation du type $\omega = \pi x$ où ω est un angle constructible et $x \in \boldsymbol{P}$. La longueur x peut se considérer comme la longueur d'un segment constructible dans la géométrie euclidienne. L'idée de Jagy (1995) était d'analyser cette équation par les moyens de la théorie des nombres modernes.
Brièvement il a montré (Jagy 1995, 35s) que la condition trouvée par Bolyai est nécessaire si on se restreint aux quadrilatères réguliers :
Théorème A: Soient a un carré (c'est-à-dire un quadrilatère régulier) d'angle σ, et un cercle de rayon r, dans le plan hyperbolique, ayant tous deux la même aire $\omega \leq 2\pi$. Alors tous deux sont constructibles si et seulement si σ remplit les conditions suivantes: $0 \leq \sigma < \pi/2$ et σ est un entier multiple de $2\pi/n$, où n entier naturel tel que le polygone régulier de n côtés soit constructible à la règle et au compas dans le plan euclidien.
(Jagy 1995, 36)

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème dit de Schneider et Gelfond (1935) qui constate : soient a et b deux nombres algébriques non nuls, $a \neq 1$ et b non rationnel, alors a^b est toujours un nombre transcendant.
L'application en est la suivante: soit $\omega = \pi x$ avec ω constructible. Il s'ensuit que $\sin \omega = \sin \pi x$ et $\cos \omega = \cos \pi x$ sont des éléments de ***P***. Donc $\exp(i\pi x) = \cos \pi x + i \sin \pi x$ est un élément de ***P(i)*** (c'est-à-dire de l'extension de ***P*** à l'aide de i). Pour bien déterminer ces expressions il faut définir $\exp(i\pi x) = x \log(-1)$. Par conséquent $\exp(i\pi x)$ est algébrique.

Mais d'autre part x est une longueur constructible dans la géométrie euclidienne c'est-à-dire que x est un élément de ***P***. A fortiori x est algébrique.
Nous avons $\exp(i\pi x) = (-1)^x$. Selon le théorème de Gelfond et Schneider x doit être un nombre rationnel. On a $x + 2 = \cosh r$ d'où s'ensuit que cosh r est rationnel aussi[13)].
Autrement dit le segment r est constructible dans la géométrie hyperbolique selon le principe de Bolyai.
Parce que x est reconnu comme rationnel , x possède une représentation m/n avec des entiers m et n, n non nul et pgcd(m,n) = 1. Il est bien connu qu'il existe des entiers u et v tels que $um + vn = 1$. En multipliant par π/n on obtient: $um\,\pi/n + v\pi = \pi/n$ ou (on a $x = m/n$, ce qui entraîne l'identité $\omega = \pi x = \pi m/n$) $u\omega + v\pi = \pi/n$. Donc l'angle ω est constructible si et seulement si l'angle π/n l'est. Mais π/n est constructible si et seulement si n est de la forme donnée par Gauß.
Qu'est-ce que ca veut dire pour l'angle σ? Nous avons $\sigma = 2\pi - 4\sigma$ ou $\sigma = (2\pi - \omega)/4$. Parce que ω est un multiple de π, l'angle σ l'est aussi. Mais ω n'est pas un multiple quelconque de π, c'est un multiple de π/n avec un n de la forme Gaußienne. Par conséquent σ est un multiple du même π/n.

C'est en gros la démonstration de Jagy. Il faut bien noter que nous avons résolu le problème de la quadrature par un raisonnement simultané sur le cercle et le quadrilatère.

On peut se poser le problème suivant. On commence avec un cercle constructible, on transforme son rayon r en un angle θ selon la construction de Bolyai et on calcule l'angle σ correspondant du quadrilatère régulier. Cet angle est-il toujours constructible ? La réponse est non, ce qui est prouvé par Jagy à l'aide d'un contre-exemple (on choisit $\theta = \arctan r/s$ avec des entiers r et s où s est un nombre avec un facteur premier impair ; pour l'angle ω on trouve la valeur $\pi r^2/s^2$ ce qui est un angle qui n'a pas la forme donnée par Gauß et qui est par conséquent non constructible). Aussi l'inverse n'est-il pas vrai : si on commence par un angle σ qui est constructible on n'arrive pas toujours à un angle θ qui soit aussi constructible (prenez $\sigma = \arctan q$ où q est un nombre rationnel non nul différent de l'unité; à l'aide du théorème de Gelfond - Schneider et du thèorème d'Olmstedt sur la transcendance des valeurs de tan, on peut alors démontrer que $\tan^2 \theta$ est transcendant et par conséquent θ n'est pas constructible). Cf. Jagy 1995, 36.

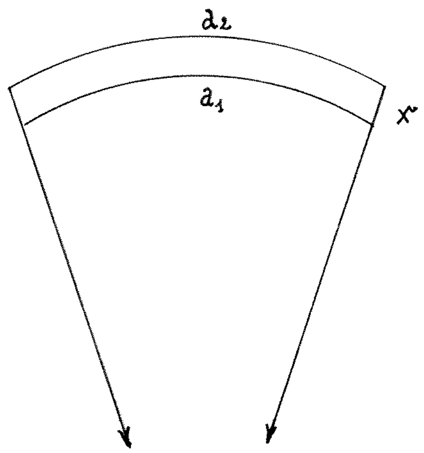
Il est très remarquable qu'on puisse démontrer d'une manière stricte que les idées de Bolyai sont correctes. De plus il est remarquable que la transformation de r en θ et par conséquent de $2\pi(\cosh r - 1)$ en $\pi\tan^2\theta$ donnée par Bolyai y joue un rôle décisif. Cette transformation n'est qu'un résultat dérivé des considérations de Bolyai sur les relations d'un arc de cercle-limite avec sa corde sous-tendante. Evidemment ce qui manquait à Bolyai c'était une connaissance profonde de la théorie des nombres transcendants.[14)] L'intégration de plusieurs domaines antérieurement séparés est souvent un trait typique du progrès mathématique.

Ce qui reste à constater c'est que les réflexions de Bolyai sur la quadrature du cercle dans la géométrie hyperbolique restaient inconnues. Même vers la fin du 19e siècle où on avait pris conscience du travail de Bolyai et trouvé la solution négative de la quadrature euclidienne on ne rencontre jamais un renvoi à la situation différente de la géométrie hyperbolique. Peut-être la solution très satisfaisante du problème euclidien ne laissait plus de place pour des considérations alternatives. Une partie est devenue le tout.

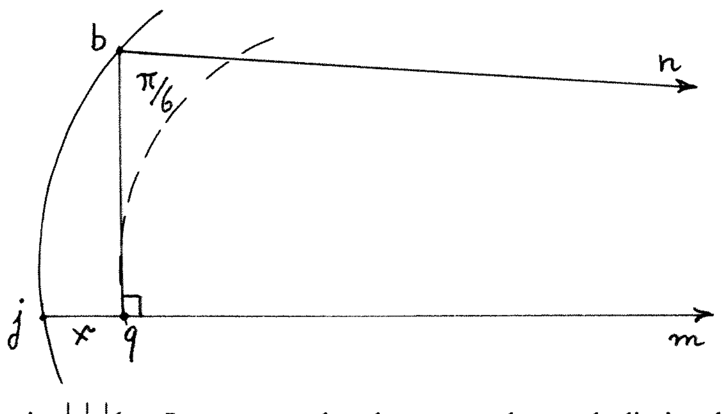
Notes :

6) A l'époque de Bolyai on ne se restreignait pas dans la géométrie sphérique aux grand-cercles. La raison en est que la *sphérique*, comme on appelait la discipline en question, était conçue comme l'étude des cercles (grands ou petits) sur la sphère (le terme géométrie sphérique n'était pas encore courant). Ce n'est que l'analogie avec la géométrie euclidienne exprimée dans les axiomes qui rend les grand-cercles si intéressants!

7) A parler franchement la réduction faite par Bolyai était un peu plus compliquée. Il ne considérait pas la relation entre un arc de cercle-limite et une corde mais celle entre deux arcs de cercle-limites concentriques et les segments des droites hyperboliques parallèles en direction du centre des cercles-limites, coupés par les deux cercles-limites. Cette situation nous rappelle le théorème de Thalès:



Par ces considérations Bolyai était capable de faire intervenir les angles et par conséquent la trigonométrie. Cf. la citation suivante :
§ 37) Il est facile d'en conclure que, des lignes L étant données par leurs seules extrémités, on peut obtenir de cette manière, dans F, une quatrième proportionnelle, ou une moyenne proportionnelle, et exécuter, sans recourir à l'Axiome XI, toutes les constructions géométriques qui se font sur le plan dans le système Σ.
Le paragraphe qui suit donne un exemple :



Soit $\angle$ nbq = π/6 et jm ||| bn. Le rapport des deux arcs de cercle-limite déterminés par le segment de longueur x avec les extrémités j et q est noté X par Bolyai . Il trouve

$$X = \frac{1}{\sin(\pi/6)} = 2$$

Bolyai conclut: ... *et x sera construit géométriquement.*

8) La raison en est la suivante: 2sinh(r/2) est une racine de l'équation $x^3 + 3x - 2 = 0$ par l'identité sinh 3t = $4\sinh^3 t + 3\sinh t$. Mais cette équation est irréductible sur ***P***. Cf. Martin 1986, 483.
Autrement dit cette impossibilité est l'expression du fait qu'on n'a pas de géométrie de similitude dans le cadre de la géométrie hyperbolique. Ce qui manque c'est le théorème de Thalès.

9) En effet il y avait une dispute entre Liebmann et Simon. Liebmann critiquait avec raison l'article de Simon (Simon 1891) pour son argumentation un peu floue. D'autre part Simon réclamait la construction du triangle par ses angles pour lui-même en disant qu'elle était un corollaire assez facile de sa construction donnée en 1897, et qu'il la posait toujours aux étudiants comme problème dans ses cours.

10) Le mathématicien autrichien Johannes Frischauf de Graz avait publié en 1872 et en 1876 deux livres sur la géométrie non-euclidienne. Mais ces livres n'étaient que des éditions commentées de celui de Bolyai. Ils sont d'une grande valeur pour la lecture du texte de Bolyai.

11) Il semble que Bolyai n'ait pas vu le fait que Gauß n'a pas démontré la nécessité de sa condition, ce qui sera établie par Wantzel en 1837.

12) Autrement dit: les déficits s'additionnent si on colle deux polygones le long d'un côté congruent. (Notez bien que par cette construction on n'obtient pas des segments alignés, au-dessus et en-dessous des triangles)

13) On a $\omega = \pi x$ et $\omega = 2\pi(\cosh r - 1)$ donc: $\pi x = 2\pi(\cosh r - 1)$ ou $x + 2 = 2\cosh r$.

14) C. L. Siegel écrivait dans son livre sur les nombres transcendants en 1949: *Man sollte es keine Theorie der transzendenten Zahlen nennen, da unsere Kenntnis über transzendente Zahlen sehr lückenhaft ist. (On ne devrait pas appeler cela Théorie des nombres transcendants, car notre connaissance des nombres transcendants est très lacunaire)* (Siegel 1967, Vorwort)

Bibliographie

Bolyai, J. *La science absolue de l'espace* (Mémoires de la société physique et naturelle de Bordeaux **5** (1867 - 69), 198 - 248).

Bonola, R. - Liebmann, H. *Die nichteuklidische Geometrie* (Leipzig et Berlin, 1908).

Chabert, J. L. *Les géométries non euclidiennes* (Repères No.1 [oct. 1990],69 - 91).

Frischauf, J. *Elemente der absoluten Geometrie* (Leipzig, 1876).

Gauß, C. F. *Werke.* Bd. 8, bearbeitet von P. Stäckel (Leipzig, 1900).

Hermes, J.: *Über die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile* (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch - physikalische Klasse 1894, 170 - 186).

Jagy, W. C. *Squaring Circles in the Hyperbolic Plane* (The Mathematical Intelligencer **17** no. 2 (1995), 31 - 36).

Knorr, W. *The Ancient Tradition of Geometric Problems* (New York, 1993).

Liebmann, H.: *Die Construction des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln* (Sitzungsberichte der mathematisch - physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1901, 477 - 491).

Martin, G. E. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane* (New York, 1986).

Montucla, J. - E. *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (Paris, 1754).

Pappus *La collection mathématique*. 2 tomes. Traduit par van Eecke (Paris - Bruges, 1933).

Perron, O. *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene* (Stuttgart, 1962).

Rudio, F. *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung* (Leipzig, 1907).

Pont, J. C. *L'aventure des parallèles* (Bern, 1986).

Siegel, C. L. *Transzendente Zahlen* (Mannheim-Wien-Zürich, 1967)

Simon, M. *Elementargeometrische Ableitung der Parallelenconstruction* (Journal für die reine und angewandte Mathematik **107** (1891), 84 - 86).

Simon, M. *Zwei Sätze zur nichteuklidischen Geometrie* (Mathematische Annalen **48** (1897), 706).

Stäckel, P. *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß.* Herausgegeben in Gemeinschaft mit F. Engel (Leipzig, 1895).

Wantzel, P. L. *Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas* (Journal de mathématiques pures et appliquées **2** (1837), 366 - 374).

Cet article fut écrit pendant un séjour très agréable et informatif à l'IREM de Strasbourg. Je veux remercier tous les gens qui s'occupaient de moi, en particulier C. Dupuis, C. et J. P. Friedelmeyer et E. Urlacher. Egalement je veux remercier les auditeurs de mon cours sur l'histoire de la géométrie non-euclidienne pour leur patience et leur gentillesse.

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 1996

Le 23$^{\text{ème}}$ Rallye Mathématique d'Alsace a réuni 1250 candidats. La participation est sensiblement égale à celle du 22$^{\text{ème}}$ Rallye. En Terminale, 20 binômes ont été primés. Le premier prix avec félicitations du jury, récompense une copie remarquable. En Première, 20 binômes ont également été récompensés. Aucune copie ne se voit attribuer de premier prix, aucun binôme n'ayant entièrement résolu deux exercices.

Rallye de Première

Exercice 1

On se donne trois réels a, b, et c compris entre 0 et 1. Montrer l'inégalité :

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\leq 2$$

Solution

Nous avons $a\in[0;1]$ et $b,c\geq 0$ donc $abc\leq bc$ et $0<1+abc\leq 1+bc$

donc $\dfrac{1}{1+bc}\leq\dfrac{1}{1+abc}$ et $\dfrac{a}{1+bc}\leq\dfrac{a}{1+abc}$

et de même nous aurons: $\dfrac{b}{1+ac}\leq\dfrac{b}{1+abc}$ et $\dfrac{c}{1+ab}\leq\dfrac{c}{1+abc}$.

et finalement : $\dfrac{a}{1+bc}+\dfrac{b}{1+ac}+\dfrac{c}{1+ab}\leq\dfrac{a+b+c}{1+abc}$

Il suffit donc de prouver que : $(a+b+c)\leq 2(1+abc)$

c'est à dire: $a(1-2bc)+b+c-2\leq 0$ $(*)$

Considérons la fonction $a\mapsto a(1-2bc)+b+c-2$ sur $[0,1]$;

elle est affine donc monotone sur $[0,1]$ et atteint son maximum en 0 ou en 1.

Pour prouver $(*)$ il suffit de le prouver pour $a=0$ et $a=1$, c'est à dire:

$$b+c-2\leq 0 \text{ et } -1+b+c-2bc\leq 0$$

Comme b et c sont dans $[0,1]$, il est évident que $b+c-2 \leq 0$
donc il reste seulement à prouver que $-1+b+c-2bc \leq 0$
c'est à dire $b(1-2c)-1+c \leq 0$ (**)

Le même raisonnement que le précédent avec $b \mapsto b(1-2c)-1+c$ (fonction affine monotone) assure qu'il suffit de prouver (**) pour $b = 0$ et pour $b = 1$, c'est à dire :

$-1+c \leq 0$ et $-c \leq 0$

Ce qui est évident car c est dans $[0,1]$ et ceci prouve le résultat.

Commentaires

L'examen des copies permet de penser que cet exercice a été ressenti comme étant le plus difficile par nos élèves. Aucun binôme n'a présenté une solution satisfaisante du problème posé. Abordé par environ trois quarts des candidats, il est révélateur d'un certain nombre d'idées fausses.

1) Les erreurs "techniques" de manipulations des inégalités (multiplication par un réel négatif, différences, quotients ...) ont été nombreuses.

2) Beaucoup de copies envisagent des cas particuliers (souvent les valeurs 0 ou 1) ; cette démarche constitue une première approche qui permet de se familiariser avec l'énoncé. Trop nombreux sont les candidats qui se contentent de ces essais et concluent que l'inégalité vérifiée pour des valeurs particulières, l'est pour tous les réels a, b, c de l'intervalle $[0,1]$.

3) Signalons une autre erreur fréquente concernant la "monotonie" des quantités utilisées, amenant bon nombre de candidats à considérer seulement le cas a=b=c=1, à montrer que la somme est inférieure à 3/2 et à conclure qu'elle est inférieure à 2 ; mais alors, un peu de sens critique aurait dû amener les auteurs de cette réponse à se demander pourquoi on avait dans le sujet remplacé 3/2 par 2. Les connaissances des élèves de première sur l'étude des fonctions d'une variable réelle dépassent le cadre des fonctions strictement croissantes sur un intervalle. Auraient-ils pensé avec la même assurance que toute fonction définie sur $[0,1]$ atteint son maximum en 1 ?

La difficulté de l'exercice résidait dans la présence des trois variables a, b et c ; nombreux sont les candidats ne se décidant pas à en privilégier une, afin de se ramener à l'étude des variations d'une fonction d'une seule variable par des moyens classiques.

Notons enfin que la solution proposée ne fait appel qu'à des fonctions affines.

Exercice 2

Danielle et Anne cultivent chacune leur jardin rectangulaire. Celui de Danielle a la plus grande longueur et la plus grande surface. Qu'en est-il du périmètre ?
Si Danielle avait celui de plus grande longueur et de plus grand périmètre, serait-elle sûre d'avoir celui de plus grande surface ?

Solution

Nous adopterons dans ce qui suit la convention selon laquelle la longueur est supérieure (ou égale) à la largeur ainsi que les notations suivantes:

L_d: longueur du jardin de Danielle.	L_a: longueur du jardin de Anne
l_d: largeur du jardin de Danielle	l_a: largeur du jardin de Anne
A_d: aire du jardin de Danielle.	A_a: aire du jardin de Anne
P_d: périmètre du jardin de Danielle.	P_a: périmètre du jardin de Anne

(Par convention $l_d < L_d$ et $l_a < L_a$)

Première question :

Avec ces notations on a : $L_d > L_a$ et $L_d l_d > L_a l_a$

Nous allons démontrer que le jardin de Danielle a le plus grand périmètre.

$$2(L_d + l_d) > 2(L_a + l_a) \quad \Leftrightarrow \quad L_d - L_a > l_a - l_d$$

Cas $l_a > l_d$

Soit $x = L_d - L_a$ et $y = l_a - l_d$ alors $L_d = L_a + x$ et $l_a = l_d + y$

On peut donc écrire :

$$L_d \times l_d = (L_a + x)l_d = L_a l_d + x l_d$$
$$L_a \times l_a = L_a(l_d + y) = L_a l_d + y L_a$$

Si on avait $x \leq y$, on aurait alors $x l_d \leq y L_a$ (puisque $x \leq y$ et $l_d < l_a < L_a$).

Par conséquent, on aurait une contradiction avec $L_d l_d > L_a l_a$

Cas $l_a \leq l_d$

On aura forcément $2(L_d + l_d) \geq 2(L_a + l_a)$

Deuxième question

Il suffit de prendre des contre-exemples .

En prenant $L_d = 9$ et $l_d = 1$ on a $P_d = 20$ et $A_d = 9$ et

en prenant $L_a = 5$ et $l_a = 4$ on a $P_a = 18$ et $A_a = 20$.

Donc le terrain avec la plus grande longueur et le plus grand périmètre n'a pas forcément la plus grande aire . La réciproque est donc fausse .

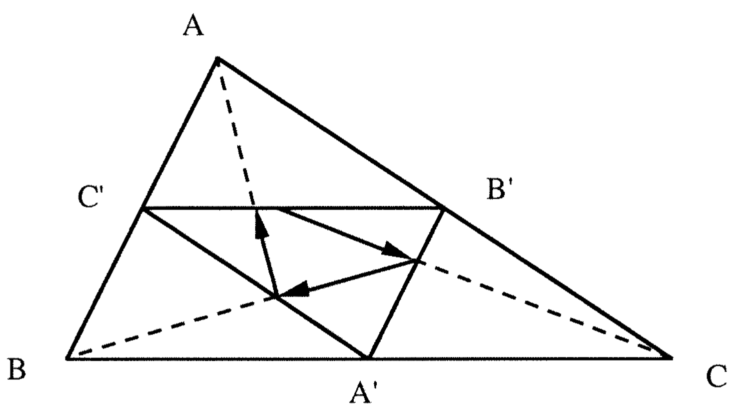
Commentaires

Les erreurs rencontrées dans cet exercice sont, pour ce qui est de l'aspect calculatoire les mêmes que celles du premier (inégalités).
L'aspect géométrique et concret du problème a visiblement permis d'éviter ici l'écueil de l'accumulation de cas particuliers sans grand intérêt.
Les copies permettent de constater l'acquisition de certains mécanismes. Le principe de disjonction des cas semble naturel pour bon nombre d'élèves, même si parfois les cas sensibles sont mentionnés mais laissés de côté.
La question concernant la réciproque suggérait une réponse négative. De très nombreux candidats fournissent un contre-exemple pour infirmer cette réciproque. Réjouissons nous de cette démarche.
Nous relevons également une proposition originale de solution utilisant une méthode graphique.

Exercice 3

Le professeur Spidermath a découvert que l'espèce d'araignée "Araneida Dreiecka" tisse sa toile de la manière suivante :
-elle place 3 fils formant un triangle noté A B C
-elle relie par 3 autres fils les milieux des côtés de ce triangle, formant un deuxième triangle noté A'B'C' (voir figure) ;
-elle part du fil B'C' et se dirige vers C jusqu'à rencontrer le fil A'B' ; là, elle change brusquement de direction et se dirige vers B en allant jusqu'au fil C'A' où elle change encore de direction se dirigeant désormais vers A jusqu'au fil B'C'.

Peut-elle retomber sur son point de départ ?



Solution

Cet exercice se résout en prenant un repère et en cherchant les différentes équations de droites. On peut par exemple prendre le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et on aura alors:

(B'C'): $x+y = \frac{1}{2}$ (A'C'): $x = \frac{1}{2}$ (A'B'): $y = \frac{1}{2}$

On appelle I, J, K, L les différents points de départ ou de changement de direction de l'araignée.
On sait que le point de départ I est sur (B'C') donc ses coordonnées sont de la forme $(\alpha ; \frac{1}{2} - \alpha)$ avec $\alpha \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

- On cherche l'équation de la droite (IC) et on obtient :

(IC): $(1+2\alpha)x + 2\alpha y = 2\alpha$

On détermine les coordonnées du point d'intersection de (IC) et de (A'B') en résolvant le système et on obtient $J\left(\frac{\alpha}{1+2\alpha}; \frac{1}{2}\right)$

En suivant la même méthode on obtient $K\left(\frac{1}{2}; \frac{2\alpha+1}{4\alpha+4}\right)$.

Puis on obtient $L\left(\frac{\alpha+1}{4\alpha+3}; \frac{2\alpha+1}{8\alpha+6}\right)$.

- Pour que I = L il faut et il suffit que $\alpha = \frac{\alpha+1}{4\alpha+3}$ (l'égalité des abscisses entraînera celle des ordonnées puisque les deux points sont sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2} - x$)

$$\alpha = \frac{\alpha+1}{4\alpha+3} \Leftrightarrow 4\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

(dont les racines sont $\alpha' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ et $\alpha'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$)

Donc, il y a une seule possibilité $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $y = \frac{1}{2} - x = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$

Conclusion : Un seul point convient; c'est le point $I\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}; \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$ dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

En fait on a $\overrightarrow{C'I}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{4}; \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$ et $\overrightarrow{C'B'}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{C'I} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{C'B'}$

Extension possible (pour les élèves de terminale)

Appelons u_0 l'abscisse du point de départ de l'araignée et u_n l'abscisse du point où l'araignée se retrouve sur $[B'C']$ après n tours . On aura alors $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x+1}{4x+3}$.

On peut alors étudier la convergence de la suite (u_n) en montrant que l'équation f(x) = x a une seule solution α sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ puis que $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{9}\right)^n\times\frac{1}{2}$ à l'aide éventuellement de l'inégalité des accroissements finis. On peut alors conclure que quelque soit le point de départ, la trajectoire se rapproche de celle recherchée dans l'exercice.

Commentaires

Les idées de méthode pour résoudre cet exercice, abordé dans environ deux copies sur trois, font appel soit à un processus d'itération, soit à un raisonnement de géométrie affine.

Dans le premier cas, qui est aussi le plus fréquent dans les copies, partant d'un intervalle ou d'un point particulier dont on détermine graphiquement les images successives, on a l'impression d'aboutir à un point limite. Cependant, la maîtrise des connaissances d'un élève de Première sur les suites lui permet difficilement de prouver cette conjecture. Cette démonstration est proposée dans le corrigé.

Dans le second cas, rencontré bien plus rarement dans les copies, il suffit d'écrire des équations de droites dans un repère non orthonormé et de chercher certaines de leurs intersections. Seuls trois binômes mènent ce raisonnement correctement mais un seul écrit la conclusion exactement. De petites erreurs de calcul empêchent les deux autres d'obtenir la bonne réponse.

Le raisonnement de géométrie analytique se fait ici de manière "naturelle" dans un repère non orthonormé. Vraisemblablement, ce type de repère est peu exploité en classes de seconde et de première. Cela explique certainement que peu de candidats aient opté pour la méthode analytique.

Rallye de Terminale

Exercice 1

Proposer une méthode et l'appliquer pour déterminer, sans l'aide d'une calculatrice, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 97^{1996}.

Solution

Première étape : On écrit $97^{1996}=(100-3)^{1996}$ et on applique la formule du binôme :

$$\begin{aligned}97^{1996}=(100-3)^{1996}&=\sum_{p=0}^{1996}C_{1996}^{p}100^{p}(-3)^{1996-p}\\&=(-3)^{1996}+\sum_{p=1}^{1996}C_{1996}^{p}100^{p}(-3)^{1996-p}\\&=3^{1996}+100\sum_{p=1}^{1996}C_{1996}^{p}100^{p-1}(-3)^{1996-p}\end{aligned}$$

Or $100\sum_{p=1}^{1996} C_{1996}^{p} 100^{p-1}(-3)^{1996-p}$ est un multiple de 100, donc les deux derniers chiffres de 97^{1996} sont les mêmes que ceux de 3^{1996}.

Deuxième étape : On peut utiliser une deuxième fois la formule du binôme en écrivant :

$$\begin{aligned}3^{1996} &= 9^{998} = (10-1)^{998}\\ &= (-1)^{998} + 998\times(-1)^{997}\times 10 + \sum_{p=2}^{998} C_{998}^{p}(-1)^{998-p}10^{p}\\ &= 1-9980+100\times a\\ &= 1+20-10000+100\times a\\ &= 21+100(a-100)\end{aligned}$$

On en conclut que le nombre se termine par 21 .

Commentaires

Le premier exercice était un problème d'arithmétique "élémentaire". Il a été très souvent abordé dans les copies , ce qui montre un intérêt pour un domaine quasiment disparu des programmes de nos classes. Nous relevons avec plaisir le nombre important de binômes parvenant au résultat correct, 21.

Cependant l'examen des copies appelle quelques commentaires supplémentaires. Nous observons un grand nombre de constatations (utilisation de la calculatrice ?) de la périodicité des deux derniers chiffres de 97^n sans véritable démonstration.

Signalons également (le problème est lié au précédent), qu'il était nécessaire de prouver que dans une multiplication, seuls les deux derniers chiffres de chaque terme influent sur ceux du produit. Cela a très rarement été démontré.

Ce résultat, vraisemblablement apparu comme naturel à bon nombre de candidats, nous amène à nous interroger sur leur réaction face à un quotient. La situation n'est plus la même, comme le montre l'exemple suivant : $5220 : 45 = 116$

$19620 : 45 = 436$

Exercice 2

On fixe deux réels strictement positifs a et b . Montrer que si a et b sont inférieurs ou égaux à 2, alors $a^a + b^b > ab$. Qu'en est-il dans les autres cas ?

Solution

1) Comparaison de x^x et x pour $x > 0$

• Si $x = 1$ alors $x^x = x$

• Si $x \in]0,1[$ alors $\ln x < 0$ et $x - 1 < 0$ donc $(x - 1) \ln x > 0$

• Si $x \in]1,+\infty[$ alors $\ln x > 0$ et $x - 1 > 0$ donc $(x - 1) \ln x > 0$

Dans ces deux cas on a $(x - 1) \ln x > 0$ c'est à dire $x \ln x > \ln x$ donc $x^x > x$ (car l'exponentielle est croissante).

<u>Conclusion :</u> Pour tout $x > 0$, $x^x \geq x$ avec inégalité stricte si $x \neq 1$.

2) Si $a \in]0,2]$ et $b \in]0,2]$ alors $ab \leq 2a$ et $ab \leq 2b$.
Vu la symétrie des écritures on peut poser $a \leq b$.

Si a est plus petit que b on aura $ab \leq 2a \leq a + b$, or, d'après 1) on aura

$$a^a + b^b > a + b \text{ si } a \neq 1 \text{ ou } b \neq 1$$

donc

$$a^a + b^b > ab \text{ si } a \neq 1 \text{ ou } b \neq 1$$

Pour $a = 1$ et $b = 1$ on a $a^a + b^b = 2$ et $ab = 1$, l'inégalité stricte est donc vérifiée.

3) Si $a \in]0,2]$ et $b \in]2,+\infty[$ alors $ab \leq 2b \leq b^2 \leq b^b < a^a + b^b$
(On fait de même si $a \in]2,+\infty[$ et $b \in]0,2]$)

4) Si $a \in]2,+\infty[$ et $b \in]2,+\infty[$ avec $a \leq b$ alors $ab \leq b^2 \leq b^b < a^a + b^b$

Commentaires

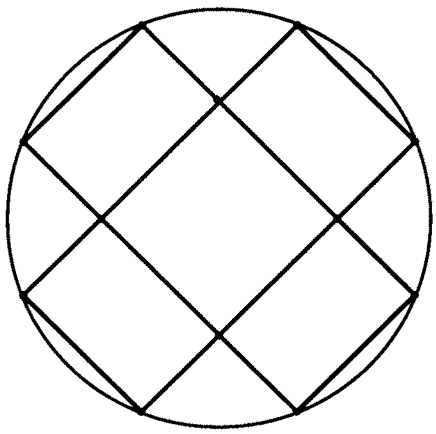
Ce problème a été traité par environ deux tiers des binômes, malheureusement avec peu de succès (moins de 10% ont fourni plus qu'un début de réponse acceptable). Nous remarquons, comme dans les copies de Première, et avec presque la même fréquence, la persistance de deux mythes primitifs :
- celui de la monotonie de toute fonction
- celui de la possibilité de soustraire ou diviser les égalités membre à membre.

Eh oui, il faut se faire une raison, ils sont faux (Ces croyances font partie des intuitions premières de certains sur les fonctions et les égalités. Leur expérience en Mathématiques aurait du leur fournir des connaissances plus précises et un langage plus adapté).
Mais à la différence des copies de Première, ces erreurs sont souvent "dissimulées" dans des argumentations qui invoquent les propriétés des limites des fonctions aux extrémités de l'intervalle d'étude.
Contrairement au deuxième problème de Première, la disjonction des cas a donné lieu à de nombreuses erreurs et on a vu des copies où les différents cas se recoupaient et/ou excluaient une

partie du domaine d'étude. Certains sont allés (peut-être est-ce de l'enthousiasme) jusqu'à envisager des cas où a ou b sont négatifs , pour lesquels le problème n'a pas de sens.
Parmi les solutions acceptables, on a relevé quelques démonstrations élégantes et originales.

Exercice 3

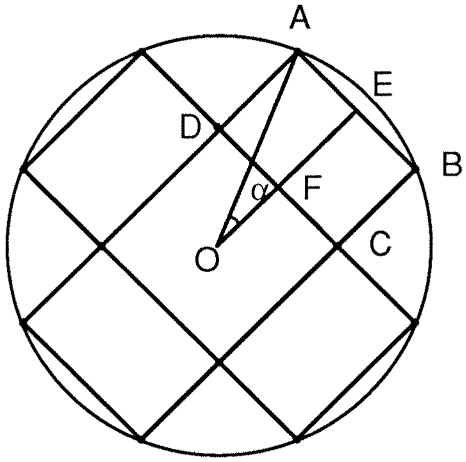
On désire placer 4 sets rectangulaires identiques sur une table ronde de rayon R. Ils ne peuvent ni se chevaucher, ni dépasser de la table. Ils sont disposés comme indiqué sur la figure.
On veut que ces sets soient d'aire maximale. Quelles doivent être leurs dimensions ?



Solution

Pour résoudre cet exercice, il fallait calculer l'aire d'un set de table en fonction d'un paramètre. On pouvait prendre l'une des dimensions d'un set, ou encore le rayon du cercle inscrit dans le carré central, comme on le verra dans la deuxième méthode. Mais le paramètre donnant les résultats les plus simples était l'angle appelé α sur la figure et qui est la moitié de l'angle au centre interceptant le côté du set qui est une corde. C'est ce qui fera l'objet de la première méthode.

Première méthode :



L'angle α varie entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

En appelant a et b les dimensions d'un set de table, on obtient alors :

$a = 2\ AE = 2\ R \sin\ \alpha$ et $b = EF = EO - DF = R \cos\ \alpha - R \sin\ \alpha$

(en effet OF = DF = moitié du côté du carré central)

L'aire vaut alors $ab = 2\ R^2 (\cos\ \alpha\ \sin\ \alpha - \sin^2\ \alpha)$.

Posons alors $f(x) = \cos x \sin x - \sin^2 x$ avec $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

On dispose de deux méthodes pour chercher les valeurs de $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ qui rendent f(x) maximale.

1) Transformer f(x)

On a alors $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{\sin(2x)+\cos(2x)-1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - 2x) - 1\right)$

et f(x) sera maximale lorsque le cosinus sera maximal, c'est à dire lorsqu'il vaudra 1.

La valeur $x = \frac{\pi}{8}$ est la seule valeur de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ qui convienne.

2) Calculer la dérivée de f

$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = \cos 2x - \sin 2x$

Or pour $X \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $\cos X \geq \sin X$ et pour $X \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos X \leq \sin X$.

On en déduit que f '(x) est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ et f '(x) est négatif sur $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$

Conclusion : f admet un maximum pour $x = \frac{\pi}{8}$.

Calcul de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$:

On a : $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

donc $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

car $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ sont positifs .

Conclusion finale : Les dimensions des sets doivent être :

$a = \sqrt{2-\sqrt{2}}R$ et $b = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}R$.

Remarque : Les calculs se généralisent ainsi facilement pour n sets de tables et on obtient :

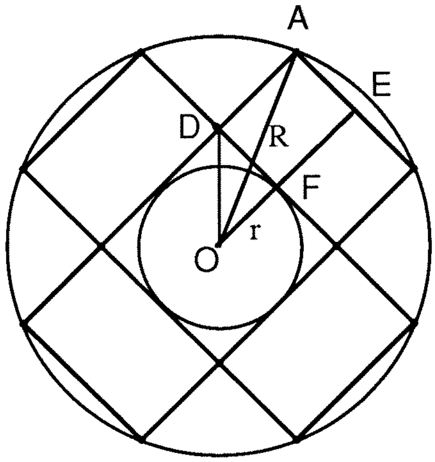
$a = 2R\sin\alpha$ $b = R\cos\alpha - \frac{R\sin\alpha}{\tan\frac{\pi}{n}}$ et l'aire sera maximale lorsque $2\alpha = \frac{\pi}{n}$

Les côtés a seront obtenus en construisant le polygone régulier à 2n côtés inscrit dans le cercle et en ne gardant qu'un côté sur deux .

On aura alors $a = 2R\sin\frac{\pi}{2n}$ et $b = \frac{R}{2\cos\frac{\pi}{2n}}$ et l'aire d'un set vaudra $R^2\tan\frac{\pi}{2n}$.

L'aire totale des sets de table vaudra alors : $nR^2\tan\frac{\pi}{2n}$ et la limite lorsque n tend vers l'infini de cette aire vaut $R^2\frac{\pi}{2}$ soit la moitié de l'aire de la table .

Deuxième méthode :



Notons r le rayon du cercle inscrit dans le carré central.

Les dimensions a et b d'un set s'écrivent alors :

$a = 2\,r\tan\frac{\pi}{4} = 2\,r$ en raisonnant dans le triangle OFD et $b = \sqrt{R^2 - r^2} - r$ en écrivant b = OE - r et en appliquant le théorème de Pythagore au triangle OEA.

Les cas limites sont ceux où a = 0 et b = R, on a alors r = 0, et $a = R\sqrt{2}$ et b = 0, on a alors $r = R\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc r décrit $\left[0, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et l'aire d'un set est donnée par $ab = 2\,r\left(\sqrt{R^2 - r^2} - r\right)$.

On pose $f(r) = 2\,r\left(\sqrt{R^2 - r^2} - r\right)$ et on cherche r tel que f(r) soit maximale. Pour cela on étudie les variations de f sur $\left[0, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$$f'(r) = 2\left(\frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} - 2r\right)$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow R^2 - 2r^2 = 2r\sqrt{R^2 - r^2}$$

Les deux membres de cette égalité sont positifs car $r \in \left[0, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ d'où :

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow R^4 - 4r^2R^2 + 4r^4 = 4r^2R^2 - 4r^4$$

$$\Leftrightarrow 8r^4 - 8R^2r^2 + R^4 = 0$$

On résout cette équation bicarrée en r^2 : son discriminant vaut 32 R^4, d'où :

$$r^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}R^2 \quad \text{ou} \quad r^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}R^2$$

Comme r est positif on obtient :

$$r = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}R \quad \text{ou} \quad r = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}R$$

Or, comme $r \in \left[0, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ seule la solution $r_0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}R$ convient.

La fonction f admet un seul extremum sur l'intervalle $\left[0, R\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, elle est positive (c'est une aire), et s'annule pour r = 0 et pour $r = R\frac{\sqrt{2}}{2}$. Cet extremum est donc un maximum.

<u>Conclusion :</u> Les dimensions des sets doivent être :

$$a = \sqrt{2-\sqrt{2}}R \quad \text{et} \quad b = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}R \ .$$

Commentaires

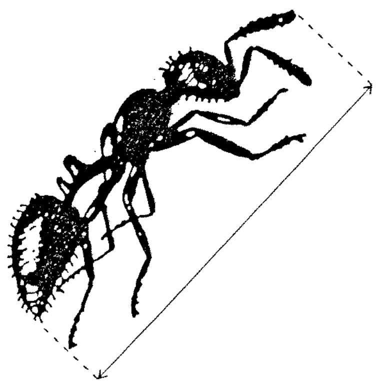
Cet exercice a souvent été abordé par les candidats. Environ deux tiers d'entre eux ont essayé de le résoudre, mais seulement 10% des élèves ont présenté un début de solution correcte. Le choix du paramètre a été déterminant, car dans de nombreux cas un mauvais choix donnait des calculs très compliqués. Des solutions entièrement correctes ont été données par une dizaine de binômes.

NOUVELLE BROCHURE :

LA PROPORTIONNALITE au collège

GROUPE COLLEGE DE MULHOUSE

Auteurs : Muriel BAUMGARTEN - Georges BIJAOUI - Eliane HUG - Marc LEVRECHON - Abdenacer MAKHLOUF - Anne SCHULTZ - Stelio TERZAKIS - Gérard WERNER



Mots-clés : Proportionnalité - Collège - Echelle - Pourcentage - Fonction linéaire - Agrandissement - Théorème de Thalès

Date : 1996

Editeur : I.R.E.M. de Strasbourg (S. 171)

ISBN : 2-911446-07-0

Résumé : Au sommaire :
Introduction à la proportionnalité
Les échelles
Les pourcentages
Les fonctions linéaires
Agrandissements et théorie de Thalès

Prix de vente : 30 F + 10 F de frais de port. Veuillez établir votre chèque à l'ordre de M. l'Agent Comptable de l'U.L.P. - I.R.E.M.

PROBLEMES DE MISE EN EQUATIONS : CES CHARADES DONT LA SOLUTION EST UN SYSTEME D'EQUATIONS A DEUX INCONNUES

Brochure du groupe math - français de l'IREM de Strasbourg :
Isabelle Beck, Nicole Cordier, Geneviève Didierjean, Claire Dupuis, Raymond Duval, Marie - Agnès Egret, Daniel Kremer, Gilles Robert, Michèle Vaillant, Brigitte Wenner, Ghislaine Werguet, Michèle Ziegler.

Depuis quelques années, à l'I.R.E.M. de Strasbourg, un groupe composé de professeurs de mathématiques et de français a pris l'habitude de se réunir pour mieux comprendre les démarches communes aux deux disciplines, en particulier dans la lecture et le raisonnement. La présente brochure est issue de ce travail de réflexion. Cette brochure écrite par des personnes qui enseignent pour la plupart en collège ou en lycée, s'adresse aux collègues du secondaire, en particulier aux enseignants de troisième ou seconde. Nous avons donc volontairement restreint notre recherche à des problèmes de mise en équations conduisant à des systèmes linéaires **à deux inconnues**. Nous proposons une nouvelle approche d'apprentissage de résolution de ce type de problèmes.

Dans une première partie (chap. I), nous procédons à un état des lieux dans les manuels scolaires et les brochures sur ce thème. On y voit proposé un plan de travail le plus souvent en quatre étapes :

1. Choix des inconnues.
2. Mise en équations (ou en équation) des données du problème.
3. Résolution du système d'équations (ou de l'équation) par les techniques habituelles.
4. Conclusion.

Ce plan de travail est toujours présenté à travers un ou deux exemples de résolution d'un problème particulier. Nous voyons apparaître cinq démarches différentes :
- utiliser des énoncés sans difficultés,
- proposer une liste de questions pour guider l'élève,
- substituer à l'énoncé une représentation figurale de la situation,
- donner un tableau totalement ou partiellement rempli,
- donner une esquisse de la résolution du problème.

Ce sont ces cinq démarches que nous avons analysées brièvement en nous attachant aux traitements proposés pour les deux premières, c'est-à-dire à ce qui recouvre le passage de l'énoncé du problème à l'écriture du système d'équations. Cela nous a permis ensuite de nous interroger sur la pertinence des méthodes de résolution classiquement proposées et, plus particulièrement, de poser la question : où est le problème dans les problèmes de mise en équations (chap. II et III) ?

Une deuxième partie est consacrée à l'analyse de la tâche cognitive que constitue le passage de l'énoncé à l'écriture du système. Pour dégager toutes les opérations, explicites ou implicites, que l'on effectue quand on passe d'un énoncé à l'écriture d'un système, nous avons dû prendre en compte non pas des exemples de problèmes mais déterminer un ensemble d' énoncés de problèmes possibles. Car d'un énoncé à un autre, il peut y avoir des variations qui vont modifier radicalement la complexité de la tâche. Nous avons également pris en compte un autre passage : c'est ce passage que nous avons appelé «la présentation complète» d'une situation extra-mathématique. L'examen de ces passages nous a permis de voir que la résolution des problèmes de mise en équations mobilise des opérations discursives de désignation d'objet et d'expressions de relations, à l'aide de mots comme à l'aide de symboles. Ces opérations sont beaucoup plus fines que celles habituellement mobilisées dans la lecture courante d'un texte ou dans la manipulation calculatoire d'équations. Et nous touchons là quelque chose d'essentiel pour l'apprentissage des mathématiques. Car cette mobilisation des opérations discursives de désignation d'objets n'a pas seulement un intérêt pour la résolution des problèmes de mise en équations, elle est également requise pour que l'introduction des écritures littérales ou que l'exigence d'un langage précis aient un sens aux yeux des élèves.

L'analyse du passage de l'énoncé à l'écriture du système d'équations a porté sur deux points :

- l'identification des quantités inconnues décrites ou désignées dans l'énoncé et la conversion de leur expression linguistique en une expression algébrique,
- l'identification des expressions correspondant aux relations d'égalité dans l'écriture des équations.

Il s'agit là de deux opérations totalement indépendantes l'une de l'autre. Les difficultés auxquelles elles peuvent donner lieu ne sont pas de même nature car elles ne relèvent pas des mêmes fonctions discursives.

Suite à cette analyse, une méthodologie d'enseignement est proposée. Son but est que les élèves s'approprient une procédure pour interroger le texte de façon à :

- en extraire toutes les informations présentées
- les organiser selon une disposition immédiatement transposable en l'écriture d'un système d'équations.

Matériellement, il s'agit du passage de la présentation séquentielle à la présentation sous une forme tabulaire. *Il ne s'agit donc pas, comme certains lecteurs pressés pourraient être tentés de le croire, de donner un tableau déjà construit, ou de dire ce qu'il faudrait mettre pour compléter un tableau.* Il s'agit d'apprendre à construire une grille de questions pour lesquelles les réponses se croisent deux à deux. Cela veut dire que les données de l'énoncé doivent être regardées sous deux aspects sémantiques différents. Cette procédure précède le choix des inconnues. Et c'est à ce stade que se fait la réelle compréhension de la mise en équations. Nous présentons une séquence d'apprentissage en classe de troisième et une autre en classe de seconde (chap. IV).

Il y a deux lectures possibles de cette brochure. Un lecteur qui ne voudrait que du concret et que de l'immédiatemment utilisable demain matin à huit heures dans sa classe pourrait donc se contenter du chapitre I et du chapitre IV. Le chapitre I lui évitera de parcourir plusieurs manuels. Nous l'avons fait pour lui. Et nous avons même constitué un échantillon représentatif de 35 problèmes tirés de différents manuels de Collège et de Lycée. Le chapitre IV a la forme d'une fiche de travail, non pour les élèves, mais pour l'enseignant.

Mais s'en tenir à ces deux chapitres et ou se contenter de vouloir simplement reproduire une séquence décrite serait s'exposer à des risques de contresens didactiques graves et à aller à la rencontre d'une certaine déception quant aux résultats. Car dès qu'il s'agit de faire entrer les élèves dans une démarche, et non pas seulement de leur faire reproduire

une technique dont les étapes sont bien décomposées, il ne suffit pas de savoir quelles activités leur faire faire, il faut surtout avoir soi-même compris pourquoi ces activités sont choisies et quelles réactions elles peuvent provoquer. Les «bonnes» activités, c'est-à-dire celles qui peuvent aider à prendre conscience du sens et de la complexité d'une démarche, présentent généralement trois caractéristiques :
- elles sont choisies en fonction d'un modèle du fonctionnement cognitif impliqué pour l'accomplissement de la tâche mathématique demandée,
- elles offrent des prises aux initiatives des élèves, même faibles,
- elles ne conduisent pas immédiatement à des réussites mais font apparaître des questions ou des difficultés qui n'avaient alors été soupçonnées ni par l'enseignant ni par les élèves eux-mêmes.

C'est évidemment la troisième caractéristique qui est la plus intéressante et la plus féconde pour progresser. Elle suppose que l'enseignant puisse interpréter les productions de ses élèves, jamais complètement semblables d'une classe à une autre ou d'un groupe d'élèves à un autre, en fonction de ce qu'implique la tâche, et qu'il régule en conséquence la présentation des différentes activités composant une séquence d'apprentissage. C'est pourquoi la lecture des chapitres II et III est essentielle. On pourrait même dire qu'elle dispense de la lecture des chapitres I et IV !

Brochure en vente à la Bibliothèque de l'I.R.E.M. : 30 F + 10 F de frais de port.
Prière d'établir votre chèque à l'ordre de M. l'Agent Comptable de l'U.L.P. - pour l'I.R.E.M.

NOUVELLE BROCHURE :

MATHEMATIQUES
ET
SCIENCES ECONOMIQUES ET SOCIALES
AU LYCEE

Le groupe MATH-ECO de l'IREM de STRASBOURG animera un stage dans le cadre du Plan Académique de Formation.

Intitulé du stage : 96TCA017G Bidisciplinarité sciences économiques et maths.

Date : jeudi 6 Mars 1997 de 9h à 12h et de 14h à 17h.

Lieu : Lycée Koeberlé à Sélestat.

Inscriptions : campagne C (entre le 16 décembre 1996 et le 13 janvier 1997).

Prix de vente : 50 F + 15 F de frais de port. Veuillez établir votre chèque à l'ordre de M. l'Agent Comptable de l'U.L.P. - I.R.E.M.

NOTE DE LECTURE

FAIRE DE LA GÉOMÉTRIE EN JOUANT AVEC CABRI-GÉOMÈTRE

Roger CUPPENS , IREM de Toulouse

Brochures APMEP n° 104 et 105, 479 pages

Dans cet ouvrage publié par l'APMEP, Roger Cuppens retrouve la démarche quasi expérimentale (fondée sur les constructions et le mouvement) qui a caractérisé historiquement les développements de la géométrie et qui a contribué à donner du sens aux notions mathématiques enseignées dans les classes du secondaire. Il s'adresse à des enseignants qui désirent découvrir (ou approfondir les possibilités considérables qu'offre le logiciel Cabri-Géomètre dans cette perspective. Les lecteurs de Repères-IREM en ont eu un aperçu dans le n° 18 de la revue (De d'Alembert à Cabri-Géomètre : le constructeur universel d'équations).

Les activités proposées ne sont pas destinées, a priori, à une utilisation directe en classe. Elles sont susceptibles en revanche de renouveler l'intérêt des enseignants pour une discipline un peu délaissée et de leur montrer la puissance de l'outil informatique pour conjecturer, construire et transformer.

Le premier tome passe en revue les possibilités et les contraintes du logiciel. La démarche est progressive et didactique : véritable auto-formation , elle permet au lecteur de s'initier au logiciel sans connaissances préalables en réalisant les constructions sur son propre matériel. La progression est claire et précise : on mesure l'abîme qui sépare les brochures informatiques, généralement illisibles, d'un texte d'initiation qui présente au lecteur la philosophie du logiciel, ses concepts et ses outils et les applique à des situations classiques.

Le second tome propose d'abord des questions de géométrie où l'utilisation du logiciel permet un point de vue nouveau. Roger Cuppens s'intéresse aux classiques de la géométrie : polygones réguliers, fonctions et courbes algébriques, fonctions et courbes transcendantes, éléments de géométrie différentielle, transformations et systèmes articulés. Rien ne résiste à Cabri-Géomètre! Point de démonstration. Et ce n'est pas fortuit : conjecturer, échafauder des hypothèses, bâtir des plans sont des préalables à la démonstration. Elle n'est que la mise en forme des idées. Dans tous ces domaines, Cabri-Géomètre s'avère un outil d'une puissance et d'une souplesse appréciables.

Suivent, induits par l'usage même du logiciel (animation en temps réel des dessins géométriques, possibilité de tracer automatiquement avec la souris des lieux géométriques, modification des menus pour adapter le logiciel aux connaissances de l'utilisateur), quelques problèmes nouveaux : maintenir la cohérence des figures au cours des déplacements, étendre à des ensembles polygonaux le tracé des lieux géométriques, étudier la performance des menus modifiés. Pour la généralisation des lieux géométriques par exemple, Roger Cuppens étudie la transformation d'un cercle en quadrilatère. Pour rendre possible les constructions par cas, il développe longuement une géométrie logique et booléenne.

Cette publication, rencontre d'un géomètre inventif et d'un logiciel d'exception, fourmille d'idées intéressantes (Roger Cuppens n'en manque jamais!). Elle confirme l'apport inestimable de Cabri-Géomètre au renouvellement de l'enseignement de la géométrie. Les concepteurs de la nouvelle calculatrice TI-92 ne s'y sont pas trompés, ils ont préféré le logiciel de Grenoble à tout autre (fût-il américain) !

Il reste à souhaiter que les enseignants de mathématiques fassent bon accueil à cet ouvrage de culture et de pratique, qui souligne le courage et le dynanisme des publications de l'APMEP.

G. Kuntz (IREM de Strasbourg).

A VOS STYLOS

PROBLÈME 37

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

(Pour le a) voir notre précédente édition). b) Deux joueurs A et B retirent à tour de rôle des allumettes sur un tas d'allumettes, avec la règle que le premier joueur ne peut prendre le tas tout entier, et qu'ensuite chaque joueur peut prendre un nombre d'allumettes au plus égal au double du nombre pris par l'autre joueur au coup précédent (cas de la "règle double"). Est considéré comme vainqueur celui qui ramasse la dernière allumette.

Trouver la stratégie gagnante pour le joueur qui commence.

Solution, par A. Troesch.— La stratégie gagnante est la suivante :

- lorsque le nombre initial d'allumettes n'est pas un nombre de Fibonacci, le premier joueur prend le nombre d'allumettes correspondant au terme le plus petit du développement de Fibonacci du nombre d'allumettes laissées par le deuxième joueur (ou du nombre initial d'allumettes lorsqu'il commence) ;
- lorsque le nombre initial d'allumettes est un nombre de Fibonacci c'est le deuxième joueur qui peut adopter cette stratégie gagnante (même si ce n'est pas très équitable, il y a tout de même un minimum de justice!)

Nous allons d'abord énoncer et démontrer la proposition suivante :

Proposition (Zeckendorf).— *Tout entier n est la somme d'une suite strictement croissante de nombres de Fibonacci non consécutifs. Cette écriture est unique : nous l'appellerons le développement de Fibonacci de n.*

Preuve

Soit $(F_{n_0}, \dots, F_{n_k})$ une suite strictement croissante de nombres de Fibonacci non consécutifs, et $n = \sum_{i=0}^{k} F_{n_i}$. Pour $j < k$ on a $\sum_{i=0}^{j} F_{n_i} < F_{n_j+1}$ (récurrence sur j). Il en résulte que si $\sum_{i=0}^{k} F_{n_i}$ est le développement de Fibonacci de n alors F_{n_j} est le plus grand nombre de Fibonacci inférieur à $n - \sum_{i=j+1}^{k} F_{n_i}$, d'où l'unicité du développement.
Démontrons maintenant l'existence du développement par récurrence sur n. Si $n = 1$ alors $n = F_1$. Supposons que tout nombre strictement inférieur à n admet un développement de Fibonacci. Alors

$$n = \sum_{i=0}^{k} F_{n_i} + F_p = \sum_{i=0}^{k+1} F_{n_i}$$

où F_p le plus grand nombre de Fibonacci inférieur à n, $\sum_{i=0}^{k} F_{n_i}$ le développement de $n - F_p$, et $n_{k+1} = p$. Pour montrer que c'est un développement de Fibonacci, il suffit de montrer que ce développement ne contient pas F_{p-1} : mais cela résulte de ce que, dans le cas contraire, $F_{p+1} = F_{p-1} + F_p$ serait inférieur à n, contrairement au choix fait pour F_p. $\square$

Remarques

1) $\sum_{i=0}^{k} F_{n_i}$ est un développement de Fibonacci si et seulement si pour tout i compris entre 1 et k, $F_{n_i} > 2F_{n_{i-1}}$ (en effet $F_{n_i} = F_{n_i-1} + F_{n_i-2} > 2F_{n_i-2} \geq 2F_{n_{i-1}}$. Pour la réciproque il suffit de remarquer qu'un nombre de Fibonacci est toujours inférieur au double de son prédécesseur).
2) Si $r = \sum_{i=0}^{k} F_{n_i}$ est un développement de Fibonacci et si $2p < F_{n_0}$ alors $r + p$ n'est pas un nombre de Fibonacci. En effet, si $\sum_{i=0}^{l} F_{n'_i}$ est le développement de Fibonacci de p, alors $2F_{n'_l} < F_{n_0}$ et ainsi $\sum_{i=0}^{l} F_{n_i} + \sum_{i=0}^{l} F_{n'_i}$ est le développement de Fibonacci de $r + p$: il comporte donc plus d'un terme.

Preuve de la stratégie dans le cas de la règle double

Il nous faut montrer que :

1) si le premier joueur peut suivre cette stratégie, le deuxième joueur ne peut la suivre et ne peut gagner.
2) le premier joueur peut toujours adopter cette stratégie à condition que le nombre initial d'allumettes ne soit pas un nombre de Fibonacci.

Montrons ces deux points :

1) D'après la remarque 1) le deuxième joueur ne peut jamais supprimer totalement le terme le plus petit du développement de Fibonacci du nombre d'allumettes que lui laisse le premier joueur lorsque celui-ci adopte la stratégie gagnante : le deuxième joueur ne peut donc jamais conclure et gagner;
2) D'après la remarque 2), le deuxième joueur ne peut interdire au premier joueur, par un choix judicieux du nombre d'allumettes qu'il prendrait, de supprimer le terme le plus petit du developpement du nombre d'allumettes qu'il lui-laisse, sinon $F_{n_0} = (F_{n_0} - p) + p$ ne serait pas un nombre de Fibonacci (F_{n_0} est ici le plus petit terme du développement de Fibonacci du nombre d'allumettes laissées par la premier joueur : prendre, dans la remarque 2), $r = F_{n_0} - p$).

Le seul cas où le premier joueur ne peut pas adopter la stratégie gagnante est le cas où le nombre initial d'allumettes est un nombre de Fibonacci : il lui faudrait prendre la totalité du tas, ce qui est interdit. Il laisse ainsi au deuxième joueur la possibilité d'adopter la stratégie gagnante. $\square$

PROBLÈME 38

Énoncé (proposé par G. Kreweras) :

De toute suite S d'entiers positifs on peut déduire une autre suite S' d'entiers positifs qui est celle des différences en valeurs absolues de termes consécutifs de S.

Partant d'une suite S_1 de n entiers, on obtient ainsi des suites S_2, S_3, ..., S_n, dont chacune a un terme de moins que la précédente et qu'il est commode de disposer en un triangle, pointe en bas, la suite S_n se réduisant à un seul terme. Un tel triangle sera appelé "triangle de différences". Il sera dit *injectif* si tous les termes ont des valeurs distinctes, et *parfait* si ces valeurs constituent l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\}$.

Voici deux exemples de triangles parfaits pour $n = 3$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & & 4 \\ & 5 & & 2 & \\ & & 3 & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & 4 \\ & 5 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

Le problème est de trouver d'autres triangles parfaits. En existe-t-il pour toutes les valeurs de n?

(Notre menace de ranger ce problème aux oubliettes a réveillé plusieurs de nos lecteurs, qui ont donc pris la plume pour nous écrire. Qu'ils en soient ici remerciés.)

Solution partielle de Marguerite Ponchaux, de Lille :

"Il est évident que si l'on échange les entiers composant un triangle parfait par rapport à la médiane verticale on obtient un triangle parfait.
Le temps consacré à la recherche par tâtonnements de solutions peut être abrégé par la remarque suivante : à chaque entier d'une ligne autre que la première correspond, dans la ligne précédente, au moins un entier plus grand. Par conséquent, le plus grand entier utilisé dans un triangle parfait de n lignes, $p = \frac{n(n+1)}{2}$, doit appartenir à la première ligne.
Pour la même raison, l'entier $p-1$ doit être soit en première ligne, soit en deuxième ligne en-dessous et à côté de p, et alors $p-2$ doit également être en première ou en deuxième ligne (et non en troisième ligne car alors le nombre 1 figurerait deux fois dans le triangle).
Prenons l'exemple des triangles de $n = 3$ lignes, avec donc $p = 6$. Il y a deux cas de première ligne à examiner : $6xy$ et $x6y$ (le cas $xy6$ est symétrique du premier).
En plaçant 5, on distingue pour $6xy$ les possibilités

$$\begin{array}{ccccc} 6 & & 5 & & y \\ & 1 & & z & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccccc} 6 & & x & & 5 \\ & z & & u & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & y \\ & 5 & & z & \end{array}$$

et pour $x6y$ les possibilités

$$\begin{array}{ccccc} 5 & & 6 & & y \\ & 1 & & z & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & & y \\ & 5 & & z & \end{array}.$$

Il s'agit à présent de placer 4 :

- la première ligne $65y$ ne donne aucune solution.
- la première ligne $6x5$ donne la solution $\begin{array}{ccccc} 6 & & 2 & & 5 \\ & 4 & & 3 & \\ & & 1 & & \end{array}$
- la première ligne $61y$ donne la solution $\begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & 4 \\ & 5 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$
- la première ligne $56y$ donne la solution $\begin{array}{ccccc} 5 & & 6 & & 2 \\ & 1 & & 4 & \\ & & 3 & & \end{array}$
- la première ligne $16y$ donne la solution $\begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & & 4 \\ & 5 & & 2 & \\ & & 3 & & \end{array}$

On vérifie dans chaque cas qu'il n'y a pas d'autre solution. Par suite pour $n = 3$ il y a 4 solutions (plus évidemment les 4 symétriques).
Pour $n = 4$ on trouve également 4 solutions :

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & & 10 & & 3 & & 8 \\ & 1 & & 7 & & 5 & \\ & & 6 & & 2 & & \\ & & & 4 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 8 & & 10 & & 3 & & 9 \\ & 2 & & 7 & & 6 & \\ & & 5 & & 1 & & \\ & & & 4 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & & 10 & & 1 & & 6 \\ & 2 & & 9 & & 5 & \\ & & 7 & & 4 & & \\ & & & 3 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 6 & & 10 & & 1 & & 8 \\ & 4 & & 9 & & 7 & \\ & & 5 & & 2 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

Pour $n = 5$ on trouve une seule solution :

$$\begin{array}{ccccccccc} 13 & & 3 & & 15 & & 14 & & 6 \\ & 10 & & 12 & & 1 & & 8 & \\ & & 2 & & 11 & & 7 & & \\ & & & 9 & & 4 & & & \\ & & & & 5 & & & & \end{array}$$

Pour $n = 6$ mes essais me font douter qu'il existe des solutions. L'usage d'un ordinateur me paraît maintenant souhaitable." (fin de citation de la lettre de Marguerite Ponchaux).

Solution complémentaire, d'après une lettre de Jean Brette, Palais de la Découverte, Paris :

Cette solution, pour $1 \leq n \leq 7$, est parue dans la Revue du Palais de la Découverte, 60, 1978, pp. $54 - 57$:
par analogie avec un problème de triangles de différences modulo 2 posé par Hugo Steinhaus (dans *100 problèmes élémentaires de Mathématiques*, Gauthier-Villars,

Paris, 1965, p. 45), on calcule modulo 2 à partir d'une ligne initiale de longueur 6 constitué de 0 et de 1. Entre 1 et 21 il y a 11 nombres impairs et 10 nombres pairs, donc il faut trouver 11 fois 1 et 10 fois 0 dans le triangle. Or cela ne se produit jamais (parmi les 64 lignes initiales possibles, il suffit d'en tester 32, par symétrie), donc il n'existe aucune solution pour $n = 6$.
Cette méthode modulo 2 ne marche pas aussi simplement pour $n \geq 7$, car Steinhaus donne l'exemple du triangle de ligne initiale 0010100 qui possède quatorze 1 et quatorze 0. Mais le calcul modulo 2 permet néanmoins de diminuer fortement le nombre de tests à effectuer. On vérifie assez facilement sur ordinateur qu'il n'y a pas non plus de solution pour $n = 7$, ni pour $n = 8$.

Solution complète :

Elle a été trouvée indépendamment par une équipe de mathématiciens taïwanais en 1977 et par une équipe de mathématiciens australiens en 1992 (l'un d'eux, Douglas Rogers, avait eu connaissance du problème grâce à notre ami Kreweras). La preuve des Australiens que tout triangle parfait est de taille $n \leq 8$ (et donc en fait de taille $n \leq 5$, la liste communiquée par Marguerite Ponchaux est complète) n'est pas très difficile, astucieuse mais un peu longue à exposer. Il se trouve qu'elle vient d'être republiée dans la revue "Quadrature" ($n°$25, été 1996). Nous y renvoyons donc nos lecteurs intéressés.

PROBLÈME 39

Énoncé (proposé par J. Lefort) : Pour l'énoncé original, voir nos précédentes éditions. Nous allons reformuler cet énoncé de manière légèrement différente en donnant la solution.

Solution de R. Schäfke :
On considère le graphe suivant (p est un entier naturel fixé, ici $p = 4$) :

$$
\begin{array}{lllllllllllllll}
(0,4) & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\
 & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to \\
 & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\to & \circ\ (12,0)
\end{array}
$$

On définit $a_{k,l}$ comme le nombre des chemins sur le graphe allant du point $(0, p)$ au point (k, l) en suivant le sens des flèches (on suppose $k \geq 0$ et $0 \leq l \leq p$). Si (k, l) et $(k, l + 1)$ ne sont pas connectés, on a $a_{k,l} = a_{k-1,l}$, et si au contraire ils sont connectés on a $a_{k,l} = a_{k-1,l} + a_{k,l+1}$. La table des $a_{k,l}$ coincide donc (aux conventions près) avec celle de l'énoncé original. Voici la table des $a_{k,l}$ pour $p = 4$:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \to & 2 & \to & 3 & \to & 4 & \to & 5 & \to & 6 & \to & 7 & \to & 8 & \to & 9 & \to & 10 & \to & 11 & \to & 12 & \to & 13 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
1 & \to & 3 & \to & 6 & \to & 6 & \to & 11 & \to & 17 & \to & 24 & \to & 24 & \to & 33 & \to & 43 & \to & 54 & \to & 54 & \to & 67 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow \\
1 & \to & 4 & \to & 4 & \to & 4 & \to & 15 & \to & 32 & \to & 32 & \to & 32 & \to & 65 & \to & 108 & \to & 108 & \to & 108 & \to & 175 \\
\downarrow & & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow \\
1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 16 & \to & 16 & \to & 16 & \to & 16 & \to & 81 & \to & 81 & \to & 81 & \to & 81 & \to & 256
\end{array}
$$

Le problème posé est de démontrer que

$$a_{mp,0} = (m+1)^p.$$

Définissons $b_{k,l}$ comme le nombre des chemins allant de (k,l) à $(mp,0)$. Voici la table des $b_{k,l}$, (toujours dans le cas où $p=4$ et $m=3$) qu'on construit de droite à gauche et de bas en haut à partir du point $(12,0)$:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
256 & \to & 192 & \to & 144 & \to & 108 & \to & 81 & \to & 54 & \to & 36 & \to & 24 & \to & 16 & \to & 8 & \to & 4 & \to & 2 & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
64 & \to & 48 & \to & 36 & \to & 27 & \to & 27 & \to & 18 & \to & 12 & \to & 8 & \to & 8 & \to & 4 & \to & 2 & \to & 1 & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
16 & \to & 12 & \to & 9 & \to & 9 & \to & 9 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 4 & \to & 4 & \to & 2 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow \\
4 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 2 & \to & 2 & \to & 2 & \to & 2 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 \\
\downarrow & & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow \\
1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 1
\end{array}
$$

Par définition $a_{mp,0} = b_{0,p}$. Il suffit donc de montrer que

$$b_{kp,l} = (m-k+1)^l = K^l \quad (0 \le k \le m, \quad 0 \le l \le p, \quad K = m-k+1),$$

ce que nous allons faire par récurrence descendante sur k, ascendante sur K. Pour $k=m$, $K=1$, c'est clair. Supposons le résultat vrai pour un certain k et tout l tel que $0 \le l \le p$. Soit un entier i tel que $0 \le i \le l$. Il n'y a qu'un seul chemin de $(kp-p+i,i)$ à (kp,i) et tout chemin de $(kp-p+i,i)$ à $(mp,0)$ passe par (kp,i), donc on a :

$$b_{kp-p+i,i} = b_{kp,i} = K^i.$$

D'autre part, tout chemin de $(kp-p,l)$ à $(mp,0)$ passe par un et un seul des points $(kp-p+i,i)$ $(0 \le i \le l)$. Or le nombre de chemins de $(kp-p,l)$ à $(kp-p+i,i)$ est égal à $\binom{l}{i}$ (comme tous les points intermédiaires sont connectés, on a ici un triangle de Pascal). Par suite, le nombre de chemins de $((k-1)p,l)$ à $(mp,0)$ est

$$b_{(k-1)p,l} = \sum_{i=0}^{i=l} \binom{l}{i} K^i = (K+1)^l.$$

PROBLÈME 40

Énoncé (proposé par B. Kordiemsky) :

On place $2n$ jetons d'un jeu de dames, n blancs et n noirs, sur une ligne horizontale (on suppose $n \geq 3$) : d'abord deux espaces vides consécutifs, puis un blanc, un noir, un blanc, un noir, etc.

L'objectif est de parvenir à la disposition suivante : tous les noirs, puis tous les blancs, puis les deux espaces vides.

Pour cela, le seul type de mouvement autorisé est une translation de deux jetons consécutifs vers les deux espaces vides.

Peut-on y parvenir en n mouvements? La solution est-elle unique? (Dans nos précédentes éditions, nous avons traité quelques exemples)

Indication.— M. Jean Brette nous écrit : "Une solution est donnée pour tout n (mais il n'est pas fait mention d'une étude d'unicité) dans E. Lucas, *Récréations mathématiques*, tome 3, p. 145-151, A. Blanchard, Paris, 1960."
Merci pour cette précieuse indication. Cet ouvrage se trouve à la bibliothèque de notre IREM. Lucas attribue le problème à Tait (*Philosophical magazine*, janvier 1884, et *Introductory address to the Edinburgh mathematical Society*, 9 novembre 1885), et donne effectivement une solution due à Delannoy. Cette solution consiste en un algorithme général, ou plus précisément en quatre algorithmes selon que n est congru à $0, 1, 2$, ou 3 modulo 4.
Cependant on ne peut pas dire qu'on trouve dans cet ouvrage une preuve que ces algorithmes résolvent le problème, même si cela semble marcher. Qu'est-ce qu'une solution "rigoureuse" d'un tel problème? Quel formalisme convient-il d'adopter pour le poser et le résoudre de manière vraiment convaincante?
On peut raisonnablement conjecturer que la solution est unique et que l'ouvrage de Lucas donne effectivement cette solution unique, mais cela reste à établir.
Nos lecteurs intéressés pourront consulter l'ouvrage, ou à défaut nous demander de reproduire la solution de Delannoy. Ils pourront aussi, pourquoi pas, améliorer la manière de formuler le problème et sa solution.

PROBLÈME 41

Énoncé (proposé par J. Zeng) :

Dans ce qui suit, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial autrefois noté C_n^k.

On appelle composition de l'entier p en k parts toute suite ordonnée $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ telle que $\forall i \; c_i \geq 1$, et $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = p$.

On note $C(p,k)$ l'ensemble des compositions c de ce type, et on pose

$$S(n,p,k) = \sum_{c\in C(p,k)} \binom{n}{c_1}\binom{n}{c_2}\cdots\binom{n}{c_k}$$

Donner une expression de la somme suivante à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}S(n,p,k).$$

Remarque : L'auteur du problème propose encore une généralisation de ce résultat, qui sera soumise aux lecteurs de notre rubrique en fonction de l'intérêt suscité par ces deux premières questions.

Indication : Pour notre précédente édition nous avions déjà reçu deux solutions complètes du problème, une de P. Renfer et une de M. Wambst. La formule à trouver est

$$S(n,p,k) = (-1)^{p+1}\binom{n+p-1}{p}.$$

En outre, M. Wambst propose une $q-$extension du résultat, avec des coefficients $q-$binomiaux. Son extension est différente de la généralisation que nous avait soumis l'auteur du problème, qui est plutôt de nature "planaire". Faute de place nous reportons tout cela à notre prochain numéro.

PROBLÈME 42

Enoncé (proposé par H.S.M. Coxeter) : Soient x et y deux nombres réels positifs, supposés irrationnels et tels que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1.$$

Montrer que les ensembles

$$X = \{[x],[2x],[3x],[4x],\ldots\} \text{ et } Y = \{[y],[2y],[3y],[4y],\ldots\}$$

forment une partition de l'ensemble des entiers naturels (où $[z]$ désigne ici la partie entière du nombre réel z).

Que se passe-t-il quand x et y sont rationnels?

Indication.— Nous avons déjà reçu des réponses (de P. Renfer, de R. Schäfke), mais aussi l'information que ce problème est déjà paru dans l'Ouvert il y a quelques années.

PROBLÈME 43

Énoncé (proposé par D. Dumont et G. Kreweras) :

On écrit une suite finie $(m(1), m(2), m(3), \ldots m(k))$ d'entiers naturels $m(i)$ comme un "mot" $m = m(1)m(2)m(3)\cdots m(k)$. Un *anagramme* p d'un mot m est un mot de même longueur formé des mêmes "lettres" (entiers naturels) mais dans un ordre qui peut être différent.
Un anagramme $p = p(1)p(2)p(3)\cdots p(k)$ de $m = m(1)m(2)m(3)\cdots m(k)$ sera dit :

- *alternant large* si $p(1) \geq m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) \geq m(3)$, $p(4) \leq m(4)$, $\cdots$ $p(2i-1) \geq m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.

- *alternant mixte* si $p(1) > m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) \leq m(4)$ $\cdots$ $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.

- *alternant strict* si $p(1) > m(1)$, $p(2) < m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) < m(4)$ $\cdots$ $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) < m(2i)$, etc.

Dans ce problème on étudie les anagrammes alternants des mots suivants :
$m_1 = 12$, $m_2 = 1234$, $m_3 = 123456$, $\cdots$ $m_n = 1234\cdots(2n-1)(2n)$,
$\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 01$, $\mu_2 = 0112$, $\mu_3 = 011223$, $\cdots$ $\mu_n = 0112233\cdots(n-1)(n-1)n$.

Exemple : $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est un anagramme alternant large de μ_3.

1°) On définit l'entier a_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot m_n. Montrer que a_n est également le nombre des anagrammes alternants stricts de m_{n+1}.

2°) On définit l'entier α_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot μ_n. Montrer que α_n est également le nombre des anagrammes alternants mixtes de μ_{n+1} et le nombre des anagrammes alternants stricts de μ_{n+2}.

3°) Montrer que $a_n = 2^n \alpha_{n-1}$ $(n \geq 1)$.

PROBLÈME 44

Énoncé (proposé par Paul Erdös) :

Le grand mathématicien hongrois Paul Erdös, qui vient de disparaître, fut l'inventeur de très nombreux problèmes. En hommage à sa mémoire, voici un problème d'Erdös que nous soumettons à nos lecteurs.

Etant donnés deux entiers naturels m et n tels que $m < n$, on considère une partition de l'intervalle d'entiers $[m, n[= \{m, m+1, m+2, \ldots n-1\}$ en deux sous-ensembles A_1 et A_2 disjoints : $[m, n[= A_1 \cup A_2$. On dira que c'est une *partition d'Erdös* si l'entier n peut, d'au moins une manière, s'écrire comme somme d'éléments distincts de l'un des A_i.

Exemple.— $m = 1$, $n = 8$, $[1,8[= \{1,2,4,5\} \cup \{3,6,7\}$ est une partition d'Erdös de $[1,8[$ car $8 = 1+2+5$.
Le couple (m,n) est un *couple d'Erdös* si toute partition de $[m,n[$ en deux sous-ensembles est une partition d'Erdös. L'objectif du problème est d'identifier les couples (m,n) qui sont des couples d'Erdös.

1) Montrer que $(1,11)$ n'est pas un couple d'Erdös.
Montrer que $(1,12)$ et $(2,12)$ sont des couples d'Erdös.

2) Trouver d'autres couples d'Erdös, et les déterminer tous si possible.