L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 86 – MARS 1997 I.S.S.N. 0290 - 0068

NOTRE COUVERTURE : August Leopold CRELLE

Cet homme au visage affable n'était pas un grand mathématicien mais il a joué un rôle inestimable pour la diffusion des travaux de la plupart des mathématiciens du XIX^{e} siècle :

August Leopold CRELLE,

fondateur du célèbre "*Journal fur die reine und angewandte Mathematik*" mieux connu sous le nom de Journal de ... Crelle.

On trouvera une description de son œuvre et de sa personnalité dans l'article "La création des premières revues de mathématiques".

POUR AJOUTER UNE PIERRE A L'EDIFICE

Nous publions dans ce numéro un avis sur l'emploi des calculatrices au baccalauréat, la préoccupation des examinateurs étant une fonction croissante de la performance de ces machines. Et l'A.P.M.E.P. discute actuellement sur le projet de concevoir des sujets de bac où la calculatrice ne serait permise que pour une moitié de l'épreuve de mathématiques. Mais qu'en est-il aussi de l'utilisation en classe?

J'ai trouvé dans le dernier bulletin vert de l'A.P.M.E.P. un article (*) qui corroborait et éclairait les observations fâcheuses que je fis ces derniers temps et qui m'ont amenée à interdire les calculatrices aux deux dernières interrogations de ma Première S (les élèves ont été prévenus suffisamment à l'avance).

D'abord, je m'énervais de ne pouvoir obtenir que les élèves apprennent et sachent les valeurs particulières et les formules de trigonométrie. Mon autorité ne me permettait d'en convaincre qu'un petit nombre. Ce n'est bien sûr pas la première année que cela se produit et je ne suis certes pas le seul professeur dans ce cas. Comme d'autres je me fais une raison en me disant qu'on leur fournit un formulaire au bac et que l'important est qu'ils sachent que ces formules existent, qu'ils les retrouvent vite et qu'elles soient justes pour en faire un bon usage. Mon constat est que ce raisonnement est utopique, qu'il se fonde sur un idéal. En fait, si un élève n'a pas suffisamment appris quelque chose (je ne dis pas seulement "utilisé" mais "appris") alors les traces s'effacent vite. Au point qu'on ne peut plus compter sur ces connaissances pour espérer des associations d'idées et des rebondissements dans la recherche.

Puis, un concours de circonstances (la succession d'un exercice de trigonométrie et d'un exercice où intervenait une parabole) m'a fait penser qu'à force de compter sur leur calculatrice graphique, sans vouloir surcharger leur tête, ils avaient des machines pleines et des têtes vides. Une formule de Nicolas ROUCHE (**) me revint : "*En mathématiques, il faut avoir une tête à la fois bien faite et bien pleine*".

C'est ainsi, qu'avec le souci d'un changement, j'ai dit aux élèves qu'ils n'auraient pas droit à la calculatrice lors de la prochaine interrogation et j'ai promis d'inscrire au tableau les dernières formules apprises pour éviter les "sèches". Le travail m'a semblé plus calme et la moyenne n'a pas été moins bonne qu'auparavant. Mais certaines erreurs constatées pour une courbe – que j'avais choisie sans difficultés de calculs – m'a fait annoncer qu'à l'interrogation suivante et jusqu'à nouvel ordre, la calculatrice serait encore interdite. A ma grande surprise, il n'y eut aucune manifestation de mauvaise humeur. Je n'ai pas voulu leur demander pourquoi ils l'acceptaient si bien et j'attends de voir comment cela va évoluer; eux aussi sans doute! Ils ont d'ailleurs gagné à ce choix car je leur ai donné des exercices plus classiques sans aller chercher systématiquement quelque chose où la calculatrice ne leur dit pas tout.

Je continue quand même à leur demander quelquefois d'utiliser la calculatrice en classe pour des calculs ou des observations car c'est un outil que je ne rejette absolument pas tant qu'il permet de réfléchir plus vite ou mieux, pourvu que ce ne soit pas moins!

O. SCHLADENHAUFEN.

(*) Dans le numéro 407 de décembre 1996 : "La partie cachée de l'iceberg" par Marie Lattuati et Isabel Santos-Rodrigues (p. 672-677).
(**) professeur émérite de mathématiques à l'Université de Louvain (Belgique).

SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 86 – MARS 1997

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
◇ N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
◇ Paiement à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 35.– F

DEUX PARADOXES DE THÉORIE DES PROBABILITÉS

Michel ÉMERY

(C.N.R.S. et Université de Strasbourg)

> Il faut éviter le paradoxe comme une fille publique qu'il est, avec laquelle on couche à l'occasion, pour rire, mais qu'un fou, seul, épouserait.
>
> *G. Courteline*

Le mot *paradoxe* peut revêtir des significations très diverses. Les deux petits paradoxes dont il va être question sont des énoncés mathématiques incontestables, mais qui peuvent, au premier abord, choquer l'intuition. Ils cessent donc d'être paradoxaux dès que l'on s'habitue à eux; ce sont d'ailleurs des résultats classiques (et élémentaires) de théorie des probabilités, que les lecteurs tant soit peu familiers avec celle-ci parcourront d'un œil blasé — de même, toutes proportions gardées, que des découvertes paradoxales en leur temps, comme l'existence d'irrationnels ou l'équicardinalité de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ («je le vois, mais je ne le crois pas»), sont devenues aujourd'hui des évidences.

Les exercices en petits caractères sont des remarques ou digressions laissées au lecteur pour éviter d'alourdir le texte. Les deux paradoxes sont indépendants et peuvent être lus dans n'importe quel ordre; leur seul point commun est l'utilisation du petit lemme ci-dessous (dont on pourrait d'ailleurs très aisément se passer) :

LEMME. — *Si N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, son espérance mathématique est la somme (finie ou infinie) de la série* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[N>k]$.

Pour le vérifier, il suffit de calculer de deux façons différentes la somme des probabilités figurant dans le tableau triangulaire infini

$$\begin{array}{lllll}
\mathbb{P}[N{=}1] & & & & \\
\mathbb{P}[N{=}2] & \mathbb{P}[N{=}2] & & & \\
\mathbb{P}[N{=}3] & \mathbb{P}[N{=}3] & \mathbb{P}[N{=}3] & & \\
\mathbb{P}[N{=}4] & \mathbb{P}[N{=}4] & \mathbb{P}[N{=}4] & \mathbb{P}[N{=}4] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

En sommant ligne par ligne, on trouve $0\,\mathbb{P}[N{=}0] + 1\,\mathbb{P}[N{=}1] + 2\,\mathbb{P}[N{=}2] + \dots$, c'est-à-dire l'espérance de N; en sommant d'abord chaque colonne, on obtient la série annoncée $\mathbb{P}[N>0] + \mathbb{P}[N>1] + \mathbb{P}[N>2] + \dots$

© L'OUVERT **86** (1997)

Le revers de la loi des séries. — Ce premier paradoxe est un phénomène bien connu dans l'étude des processus aléatoires ponctuels, et en particulier des processus de Poisson.
Dans la longue rue que j'habite, les voitures stationnent le long du trottoir en une file ininterrompue. Mon chien utilise ce trottoir pour sa promenade et ces voitures pour y lever la patte, mais il éprouve une telle aversion pour la couleur bleue qu'il arrête sa promenade, de part et d'autre de chez moi, à la première voiture bleue rencontrée. Son champ d'action est donc le plus grand intervalle de trottoir, autour de ma porte d'entrée, limité par deux voitures bleues. Sachant qu'une voiture sur dix est bleue, quelle est, en moyenne, la longueur de trottoir utilisable par Médor ?

Prenons comme unité de longueur les places de stationnement et supposons que chaque place a, indépendamment des autres, une chance sur dix d'être occupée par une voiture bleue. Pour éviter les effets de bord, supposons aussi la rue infiniment longue des deux côtés. Considérons une portion de rue centrée chez moi et de longueur L voitures, où L est très grand. Elle contient à peu près $L/10$ voitures bleues ; les $9L/10$ autres voitures sont donc réparties dans les $L/10$ intervalles entre voitures bleues successives, en comptant les intervalles de longueur nulle. En divisant la somme $9L/10$ des longueurs de tous ces intervalles par le nombre $L/10$ de ces intervalles, on trouve 9 pour leur longueur moyenne.

On peut donc s'attendre à ce que la réponse soit 9, ou en tout cas de l'ordre de 9. Mais on négligerait alors une donnée essentielle (au moins à mes yeux) : le trottoir devant MA maison n'est pas n'importe quel trottoir ! Nous allons voir que cela fait une grosse différence : en réalité, l'intervalle entre les deux voitures bleues de part et d'autre de chez MOI est en moyenne de 18 voitures.

Chaque voiture est de couleur soit bleue (notée b), soit non-bleue. Appelons C_0, C_1, C_2, etc. les couleurs des voitures successivement rencontrées en partant de chez moi vers la gauche. Le numéro N de la première d'entre elles à être bleue, c'est-à-dire $N = \inf\{n \in \mathbb{N} : C_n = b\}$, est aussi la longueur disponible pour Médor à gauche de ma porte. La longueur totale disponible est $N + N'$, où N', longueur disponible à droite, a par symétrie même loi que N. La quantité à laquelle nous nous intéressons, l'espérance $\mathbb{E}[N+N']$, vaut $\mathbb{E}[N] + \mathbb{E}[N'] = 2\,\mathbb{E}[N]$; il nous reste à trouver l'espérance de N.

Commençons par calculer la probabilité pour que N excède une valeur donnée $k \geqslant 0$. Ceci a lieu si et seulement si aucune des couleurs C_0, C_1, ..., C_k n'est bleue, c'est-à-dire si et seulement si $C_0 \neq b$ et $C_1 \neq b$ et ... et $C_k \neq b$. En utilisant l'indépendance des C_i, la probabilité de cet événement est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N > k] &= \mathbb{P}[C_0 \neq b \;\text{ et }\; C_1 \neq b \;\text{ et }\; \dots \;\text{ et }\; C_k \neq b] \\ &= \mathbb{P}[C_0 \neq b] \times \mathbb{P}[C_1 \neq b] \times \dots \times \mathbb{P}[C_k \neq b] = \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} ,\end{aligned}$$

et, d'après le lemme, l'espérance vaut

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[N > k] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} = \frac{9/10}{(1-9/10)} = 9 \,.$$

La longueur moyenne disponible à gauche de ma porte est donc 9 voitures, de même à droite, et la longueur totale est en moyenne 18.

EXERCICE. — Le calcul ci-dessus suppose qu'aucune voiture n'est garée juste devant ma porte : la première voiture vers la gauche et la première vers la droite ne sont pas la même. Vérifier que si une place de stationnement se trouve face à la porte, l'espérance n'est plus 18 mais 17,1.

D'où vient le désaccord entre ces deux résultats, 9 et 18, double l'un de l'autre? Les calculs sont bien entendu tous deux corrects, mais ils ne parlent pas de la même chose.

Pour le premier, nous avons pris $L/10$ voitures bleues et $9L/10$ non-bleues, nous les avons réparties au hasard dans les L places, et nous nous sommes intéressés à la moyenne des longueurs des $L/10$ intervalles entre deux bleues successives. En appelant $\mathcal{I}$ l'ensemble de ces $L/10$ intervalles et $\ell(i)$ la longueur de l'intervalle i, nous avons donc calculé la moyenne arithmétique

$$\frac{1}{|\mathcal{I}|} \sum_{i \in \mathcal{I}} \ell(i) \; .$$

Nous aurions d'ailleurs obtenu le même résultat en faisant la moyenne sur un ensemble beaucoup plus gros, prenant en compte toutes les répartitions possibles des $L/10 + 9L/10$ voitures dans les L places, plutôt que de tirer d'abord au sort l'une de ces répartitions.

Pour le deuxième calcul, nous avons fixé à l'avance un point, ma porte, et la longueur moyenne de l'intervalle enjambant ce point a été calculée sur toutes les répartitions possibles des $L/10 + 9L/10$ voitures. Il est clair que choisir un autre point aurait conduit au même résultat; on aurait d'ailleurs également pu tirer d'abord au sort une répartition, puis, cette répartition étant fixée, faire la moyenne, lorsqu'un point décrit toute la portion L, de la longueur de l'intervalle enjambant ce point. Par rapport à la moyenne arithmétique, dans laquelle tous les intervalles de $\mathcal{I}$ jouaient le même rôle, ce deuxième calcul avantage les intervalles plus longs, parce qu'ils contiennent plus de points, et fournit en fait la moyenne pondérée

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} p(i) \, \ell(i) \; ,$$

où les coefficients de pondération p, de somme 1, sont eux-mêmes proportionnels aux longueurs des intervalles :

$$p(i) = \frac{\ell(i)}{\sum_{j \in \mathcal{I}} \ell(j)} \; .$$

De façon tout à fait analogue, le nombre moyen n de personnes vivant au foyer d'un Français pris au hasard est largement supérieur à l'effectif moyen m des foyers français, parce que m est la moyenne arithmétique des effectifs des foyers français, alors que n est la moyenne pondérée par les effectifs eux-mêmes des différents foyers (lors du calcul de n, un foyer de 5 personnes sera compté 5 fois).

EXERCICE. — Plus précisément, en désignant par v la variance des effectifs des foyers considérés, $n = m + v/m$.

Remarquez que si la répartition aléatoire des $L/10$ voitures bleues parmi L avait fourni le résultat périodique (excessivement improbable) où deux voitures bleues successives sont toujours séparées par exactement 9 non-bleues, l'ensemble $\mathcal{I}$ serait uniquement constitué d'intervalles de longueur 9, et les deux formules ci-dessus donneraient toutes deux 9. Mais contrairement à ce que peut dicter l'intuition, la répartition aléatoire fournit, outre des voitures bleues isolées et des intervalles de l'ordre de 9, bon nombre d'agrégats de voitures bleues, et quelques intervalles bien plus longs que 15 ; les valeurs proches de la moyenne, 9, ne sont pas du tout typiques, et il y a d'ailleurs environ 2,5 fois plus d'intervalles de longueur 0 que de longueur 9 (la valeur la plus probable est 0, puis 1, puis 2, etc.).
Vous avez reconnu la loi des séries. Supposons que l'on observe en moyenne une fois par siècle une explosion de supernova. En considérant ces phénomènes comme instantanés et indépendants, le modèle probabiliste employé pour décrire leur structure temporelle est ce qu'on appelle un processus de Poisson : si s est le nombre de secondes dans un siècle, on admet qu'à chaque seconde, indépendamment de ce qui se passe avant et après, on a une chance sur s d'assister à une supernova.[1] La situation est tout à fait semblable à celle vue plus haut, les secondes jouant le rôle des places de stationnement et la paramètre $1/10$ étant remplacé par $1/s$. Certains siècles observeront une supernova, mais d'autres jusqu'à trois ou quatre; et en compensation certains intervalles entre deux supernovæ dureront plusieurs siècles. À tout instant, que l'on soit en train d'en observer une ou que l'on n'en ait pas vu depuis 350 ans, l'espérance mathématique du temps à attendre jusqu'à la suivante est un siècle. Mais l'espérance de la durée qui séparera la dernière supernova avant l'an 4000 de la première à partir de l'an 4000 est, elle, de deux siècles, les deux morceaux d'intervalle avant et après 4000 y contribuant chacun pour un siècle. D'après ce que nous venons de voir, ce doublement de la durée moyenne de l'intervalle enjambant un instant donné s'explique qualitativement par la variabilité des durées des intervalles entre supernovæ. Venant en contrepartie de l'existence de petits intervalles, ce doublement n'est finalement que l'autre versant de la loi des séries.

Le paradoxe de Feller. — Il se trouve, sous le nom de « persistence of bad luck », dans le traité de W. Feller *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Wiley, 1966), volume 2, chapitre I, § 5.
Rappelons qu'une variable aléatoire X est dite *diffuse* si, pour tout nombre x, la probabilité $\mathbb{P}[X{=}x]$ est nulle. Tel est le cas des variables gaussiennes, ou exponentielles, ou uniformes sur un intervalle, etc. ; au contraire, une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, n'est jamais diffuse.
Vous effectuez une expérience aléatoire dont le résultat est une certaine variable aléatoire diffuse. Par exemple, au bureau de poste, vous mesurez la durée passée à attendre d'être servi (elle n'est diffuse qu'à condition d'admettre qu'en entrant, la

1. Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait travailler non pas avec une durée fixe comme la seconde, mais avec une durée qui tend vers zéro. Le nom de processus de Poisson vient de ce que, pour tout intervalle de temps A, le nombre (aléatoire) de supernovæ observées pendant A suit la loi de Poisson ayant pour paramètre la durée de A exprimée en siècles.

probabilité est nulle de trouver tout de suite un guichet libre tenu par un employé disponible).
Vous faites refaire indépendamment la même expérience par un ami (vous l'envoyez donc dans le même bureau, à la même heure, un jour d'affluence comparable), puis par un autre, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un d'eux obtienne un résultat supérieur au vôtre (attende plus longtemps que vous). Cet ami est le N-ième; ceci définit une nombre aléatoire N, que l'on peut considérer comme un indicateur de votre malchance : plus N est grand, plus il a été difficile de trouver quelqu'un de plus malchanceux que vous. Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire N? (Avant de lire la suite, essayez de deviner, puis de faire vous-même le calcul, qui se révèlera bien plus facile qu'il n'y paraît.)

Cette variable aléatoire est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, le cas $N = \infty$ signifiant qu'aucun de vos amis n'a obtenu un résultat dépassant le vôtre. Pour calculer la loi de probabilité de N, cherchons d'abord la probabilité pour que N excède un entier $k \geqslant 0$ donné. Dire que $N > k$ revient à dire que les k premiers à avoir tenté l'expérience après vous ont eu des résultats en-deçà du vôtre; ou encore que, parmi les $k+1$ premiers à tenter l'expérience (vous compris), c'est vous qui avez obtenu le résultat le plus grand. (C'est pour éviter les éventuels ex æquo que l'on a exigé une loi diffuse.) Mais ces $k+1$ personnes ont effectué indépendamment la même expérience aléatoire; par symétrie, chacune d'elle a donc précisément une chance sur $k+1$ d'avoir le plus grand résultat; et ceci établit la formule

$$\mathbb{P}[N > k] = \frac{1}{k+1} \, .$$

EXERCICE. — Cette expression ne dépend pas de la loi diffuse dont nous sommes partis. Comment aurait-on pu s'en douter a priori? (Indication : si une variable aléatoire X est diffuse, la fonction $f(x) = \mathbb{P}[X < x]$ est croissante et la variable aléatoire $f(X)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.)

Cette formule entraîne que la probabilité $\mathbb{P}[N = \infty]$, majorée par $1/(k+1)$ pour tout k fini, est nulle, et N est en fait finie. Mais son espérance, donnée, grâce au lemme, par

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[N > k] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty \, ,$$

est infinie! Ainsi, le nombre d'amis qu'il vous faudra tester pour en trouver un plus mal loti que vous est en moyenne infini, et vous pouvez à bon droit vous plaindre d'être le plus malchanceux des hommes. Naturellement, chacun de vos amis peut suivre le même raisonnement, sans même devoir recommencer l'expérience : il lui suffit d'utiliser les valeurs déjà obtenues et d'intervertir sa place et la vôtre dans la succession des tests; la valeur de N que lui obtient ainsi — et qui peut être différente de la vôtre — a, inévitablement, la même loi que la vôtre et la même espérance infinie.

À l'aide d'une machine disposant d'un programme qui choisit aléatoirement des nombres entre 0 et 1 (fonction « random »), ou à l'aide d'une table de nombres au hasard, il est très facile de simuler cette situation : un premier appel de cette fonction ayant fourni un résultat R, compter le nombre de nouveaux appels nécessaires pour obtenir une valeur dépassant R. On obtient ainsi une réalisation de la variable aléatoire N. C'est tout à fait faisable en pratique, et l'on y parvient raisonnablement vite, bien que le temps nécessaire, évidemment proportionnel à N, soit d'espérance infinie.

EXERCICE. — Pour simuler N plus rapidement, en n'appelant qu'une seule fois la fonction random, on peut prendre simplement la partie entière de $1/R$.

En répétant cette simulation, on peut fabriquer une suite de copies indépendantes N_1, N_2, ... de N. La loi des grands nombres affirme que la moyenne

$$\frac{N_1 + N_2 + ... + N_k}{k}$$

des valeurs observées tend vers l'infini quand k tend vers l'infini.

EXERCICE. — La moyenne arithmétique de N_1, ..., N_k tend vers l'infini, mais leur moyenne harmonique tend vers $6/(\pi^2-6)$.

EXERCICE. — Pour k grand, la variable aléatoire $k/\sup(N_1, ..., N_k)$ suit à peu près la loi exponentielle de densité $\exp(-x)$ pour $x > 0$ (cette loi est indépendante de k).

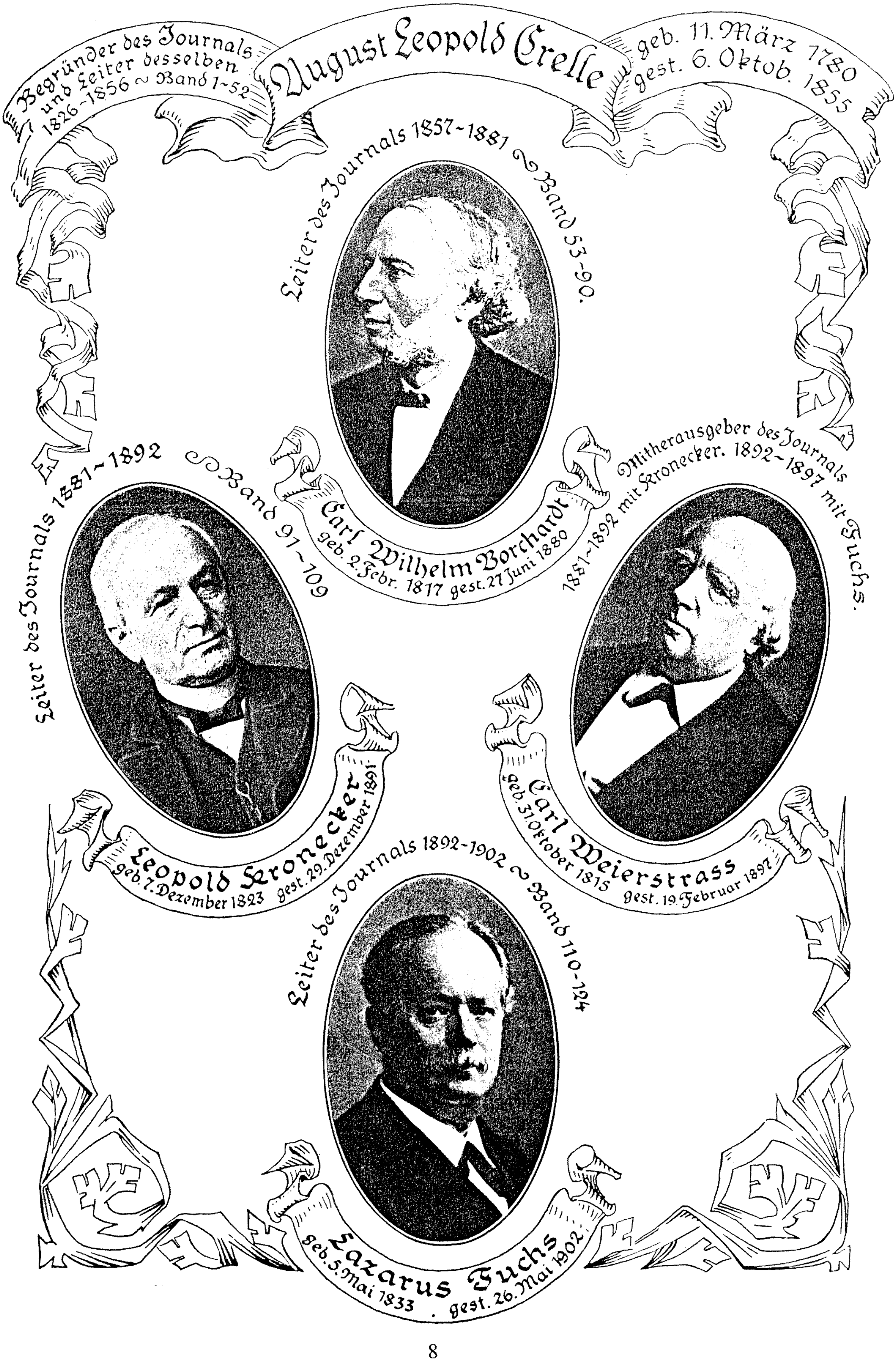
L'exercice précédent montre que, pour k grand, le plus grand des nombres N_1, ..., N_k est déjà de l'ordre de k ; la somme $N_1 + ... + N_k$ est, bien sûr, encore plus grande, mais pas tellement. De fait, sa croissance est à peu près en $k \ln k$, et la moyenne $(N_1+...+N_k)/k$ tend vers l'infini avec seulement une vitesse logarithmique. Cette moyenne évolue d'ailleurs de façon assez erratique, les très grandes valeurs des N_i se trouvant suffisamment grandes (ou suffisamment peu rares) pour contribuer au comportement, contrairement à ce qui se passe pour les lois des grands nombres à espérance finie. C'est par ses grandes valeurs, sporadiques mais pas très rares, que N a un comportement inhabituel, indigne des honnêtes variables aléatoires habituelles d'espérance finie.

Une illustration de ce phénomène est fournie par les records météorologiques, tels que : « Ce mois d'avril est le plus froid jamais enregistré en Basse-Normandie depuis que les archives météorologiques existent. » Très friands d'observations de ce type, les médias peuvent nous donner l'impression de vivre une époque exceptionnellement riche en catastrophes de tous genres. Et pourtant, sans avoir à prendre en compte une éventuelle évolution à long terme du climat, le paradoxe de Feller affirme qu'*il est normal, même si c'est peu intuitif, que de tels records soient souvent annoncés* : Considérons la température moyenne d'avril en Basse-Normandie cette année, l'année dernière, il y a deux ans, etc. En admettant que l'on puisse considérer ces données comme des variables aléatoires indépendantes, diffuses et de même loi, le nombre d'années qu'il faut remonter pour trouver un mois d'avril plus froid que celui de cette année est un nombre aléatoire N dont la loi et l'espérance sont celles calculées ci-dessus ; il est donc beaucoup plus enclin à prendre de grandes valeurs que l'on ne s'y attend intuitivement. Ajoutez à cela la variété des situations que l'on peut considérer (la grêle la plus violente jamais observée à Bordeaux, la plus forte crue du Rhin, la température la plus haute pour un 12 juin, la plus longue période de gel ininterrompu à Lyon, le mois d'octobre

le plus arrosé depuis 1934, la plus importante chute de neige à Strasbourg un jour de Noël, etc., etc., etc.), et vous serez peut-être à l'avenir un peu moins surpris par les sécheresses exceptionnelles et autres tornades du siècle. Je ne suis d'ailleurs pas loin de croire que la Météorologie Nationale utilise des programmes informatiques pour rechercher systématiquement les records battus par le jour, le mois ou l'année en cours, afin de les communiquer à la presse s'ils semblent suffisamment sensationnels!
Bien sûr, nul ne prétend que les records de chômage ou de pollution, par exemple, ne sont que des épiphénomènes probabilistes sans signification ni importance particulière. Mais le paradoxe de Feller nous enseigne qu'inversement, même en l'absence de tendance à long terme ou d'évolution sous-jacente, le jeu normal des fluctuations statistiques peut suffire à donner l'impression que nous traversons une période anormalement riche en records de toutes sortes, de chaleur et de froid, de pluie et de sécheresse.

ERRATA :

Dans l'article de C. Mercat : "*Théorie des nœuds et enluminure celte*" ('*L'Ouvert*' n° 84 de septembre 1996, page 1)
il fallait lire :
Kelles (**VIIème siècle**) et non pas (XIIème siècle).


Begründer des Journals und Leiter desselben 1826–1856 ~ Band 1–52
August Leopold Crelle
geb. 11. März 1780 gest. 6. Oktob. 1855
Leiter des Journals 1857–1881 ~ Band 53–90.
Carl Wilhelm Borchardt
geb. 2. Febr. 1817 gest. 27 Juni 1880
Leiter des Journals 1881–1892 ~ Band 91–109
Leopold Kronecker
geb. 7. Dezember 1823 gest. 29. Dezember 1891
Mitherausgeber des Journals 1881–1892 mit Kronecker. 1892–1897 mit Fuchs.
Carl Weierstrass
geb. 31. Oktober 1815 gest. 19. Februar 1897
Leiter des Journals 1892–1902 ~ Band 110–124
Lazarus Fuchs
geb. 5. Mai 1833 gest. 26. Mai 1902.

La création des premières revues de Mathématiques

Friedelmeyer Jean-Pierre

Entre la fin du 18ème siècle et le milieu du 19ème, les mathématiques subissent une mutation essentielle et peut-être unique dans leur histoire. Outre le fait d'une très grande richesse d'invention et d'un développement sans précédent, c'est la nature même des mathématiques qui change, la manière dont elles se pensent et fonctionnent relativement aux exigences de rigueur, ou dans leur rapport aux autres sciences, ou, plus généralement, dans leur rapport à la réalité.

Pour mesurer cette évolution, il fallait travailler dans la *durée*, mais sur quelque chose qui néanmoins présente une certaine stabilité, une certaine identité, un point d'appui fixe. Un tel support nous est heureusement fourni par les débuts du *"journalisme mathématique"*, c'est à dire la création des premières revues consacrées uniquement aux mathématiques, création qui se fait justement durant cette période, en Allemagne d'abord, puis en France, avec une durée de vie relativement courte pour les premières.

> **De 1786 à 1788** : *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik*, créé par Jean **Bernoulli** et Carl Friedrich **Hindenburg**.
>
> **De 1794 à 1800** : *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, créé par C.F. **Hindenburg** seul ; onze cahiers publiés au total.
>
> **De 1810 à 1831** : *Annales de Mathématiques pures et appliquées* créées par Joseph Diez **Gergonne** ; vingt-deux volumes au total.

Viennent ensuite deux journaux qui continuent aujourd'hui encore à paraître régulièrement.

> **En 1826** : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* créé par Augustus Leopold **Crelle**.
>
> **En 1836** : *Journal de Mathématiques pures et appliquées* créé par Joseph **Liouville**.

La création de ces journaux mathématiques est le signe concret d'un premier aspect d'évolution : celui d'une certaine professionnalisation de la communauté scientifique. La création des grandes écoles en France par la Révolution française (Ecole Polytechnique, Normale, Centrales), celle de l'Université de Berlin, en liaison avec la grande réforme de l'Université et de l'éducation impulsée par W. Humboldt en 1810, amènent à un tournant dans la situation financière des scientifiques. En France, « *d 'une situation précaire, où seuls s'en sortaient les académiciens*[1], *en dehors de scientifiques personnellement fortunés comme un Condorcet ou un Lavoisier, on en vint alors à une professionnalisation, qui impliquait à la fois une sécurité financière et le passage par le métier de professeur.* "[2]

En Prusse, la réforme de Humboldt se basait sur le principe de *"l'unité de la recherche et de l'enseignement"*, principe selon lequel les professeurs de la nouvelle université

---

[1] Jusqu' en 1785 on ne compte que 42 académiciens des Sciences [Dhombres 1989 ; p.172].

[2] idem p.181.

devaient susciter *"ein forschendes Lernen"* (un apprentissage en recherche) associant professeurs et étudiants dans des **Séminaires**. Les premiers séminaires étaient des séminaires de philologie (Breslau - Berlin 1812). C.G.J. Jacobi et F. Neumann fondèrent le premier séminaire de mathématique-physique à Königsberg en 1835/6. Auparavant, la diffusion des découvertes scientifiques se faisait principalement par la correspondance (voyez le rôle de la correspondance pour des gens comme les Bernoulli, Euler, même encore Gauss) et par les publications des Académies (Berlin, Paris, St Petersbourg, Royal Society).
Au delà de cet aspect sociologique[3], l'étude de ces revues spécialisées va nous permettre, par leur comparaison, de dégager les grandes caractéristiques des mathématiques et de leur évolution durant cette période. Mieux que l'étude comparée des textes mathématiques eux-mêmes, la mise en parallèle des revues permet à la fois de s'appuyer sur des éléments stables comme la personnalité de l'éditeur et la pérennité de la publication et en même temps de disposer d'un large éventail d'auteurs différents, plus ou moins représentatifs de leur époque. Ainsi elle révèle les permanences et les ruptures dans les idées de cette époque, dont la prise en compte va conditionner le succès ou l'échec de la revue. Contrairement aux écrits isolés, l'existence d'un Journal et sa pérennité sont soumises à de fortes contraintes économiques, et dépendent en majeure partie de l'adéquation de sa réponse aux préoccupations et aux questions de son époque. La réussite ou l'échec d'une revue nous informe sur les lignes de force de la pensée des savants, de ceux, connus, qui y écrivent, comme de ceux, inconnus, qui simplement la lisent. On peut alors constater déjà, à travers l'énumération ci-dessus, que les premières revues ont connu un succès relativement éphémère, alors que les deux dernières continuent à paraître aujourd'hui. Comme s'il avait fallu un temps d'adaptation et diverses mutations avant d'aboutir à un organisme suffisamment en symbiose avec l'environnement culturel et scientifique. Nous étudierons donc successivement :

- la perception de la place des mathématiques et de leur avenir à la charnière des 18e et 19e siècle, par les savants eux-mêmes,
- la distinction *Mathématiques pures, Mathématiques appliquées*, constante absolue et permanente des titres de ces revues,
- le succès remarquable du Journal de Crelle opposé à l'échec relatif des Annales de Gergonne.

1. Des mathématiques bloquées ?

Après l'euphorie provoquée par l'invention du calcul infinitésimal au XVIIème siècle et la découverte de son extraordinaire aptitude à donner l'explication des lois de l'Univers que Newton développera dans ses *"Principes mathématiques de la philosophie naturelle"*, les mathématiciens de la fin du XVIIIème siècle rencontraient des difficultés qui pouvaient paraître à certains insurmontables :

– incapacité à fonder rigoureusement ce calcul infinitésimal faute d'une théorie cohérente de l'infini,

[3] Etudié en détail dans [Dhombres 1989] et [Jahnke 1989].

– incapacité d'avancer dans la résolution algébrique des équations qui en était restée à peu près au point où l'avaient laissée deux siècles auparavant les illustres italiens Cardan et Ferrari,

– incapacité à donner un statut satisfaisant aux nombres imaginaires et négatifs toujours ressentis comme *"impossibles"* et paradoxaux, alors qu'ils étaient si utiles dans tous les domaines.

La nature, la vie, et l'art aussi, ont pour sortir des impasses, inventé des ressources merveilleuses par ce que l'on appelle **génie de la création**. Mais la science? Peut–elle se développer autrement que par une accumulation de connaissances, peut–elle changer de nature? S'il est vrai que : *"ce qui distingue le génie de tout ce qui n'est que simple talent ou simple habileté, c'est que seul il est capable de réduire des contradictions qui, sans lui, resteraient irréductibles »* (Lessing) alors se pose la question : y–a–t-il un génie mathématique capable de sortir des impasses évoquées ci–dessus?

Le développement foisonnant et incontrôlable des techniques calculatoires et des manipulations symboliques dans lesquelles Euler, Lagrange et d'autres étaient passés maîtres, pouvait faire illusion quand à une possibilité de sortie par un développement encore plus grand des calculs. Mais celui–ci trouvait sa limite dans la complexité même des écritures algébriques, dont l'excès conduisait à une véritable paralysie et au sentiment d'une sorte d'incapacité à aller plus loin.

Annoncé dès le milieu du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, le thème de la fin des mathématiques devenait récurrent en France jusqu'à ce que de jeunes mathématiciens tels Abel et Galois en fasse éclater toute l'ineptie par leur génie inventif.

Ainsi, de Diderot : *»Cette science s'arrêtera tout court, où l'auront laissées les Bernoulli, les Euler, les Maupertuis, les Clairaut, les Fontaine et les D'Alembert. Ils auront posé les colonnes d'Hercule. On n'ira pas au–delà (...) J'oserais presque assurer qu'avant qu'il soit cent ans, on ne comptera pas trois grands géomètres en Europe"*[4]

De même Delambre dans son : *"Rapport à l'Empereur sur le progrès des sciences, des lettres et des arts depuis 1789"* :

"Il serait difficile et peut–être téméraire d'analyser les chances que l'avenir offre à l'avancement des mathématiques : dans presque toutes les parties, on est arrêté par des difficultés insurmontables ; des perfectionnements de détail semblent la seule chose qui reste à faire."[5]

Plus surprenant est le fait de voir ce pessimisme relayé par le jeune Cauchy :

"Que dirais–je des sciences exactes : la plupart paraissent parvenues à leur plus haute période. L'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, les mathématiques transcendantes sont des sciences que l'on peut regarder comme terminées, et il ne reste plus à faire que d'utiles applications"[6]

---

[4] [Diderot D. ; *"De l'interprétation de la nature"* ; in œuvres philosophiques ; textes établis, avec introduction bibliographique et notes par Paul Vernière ; Garnier ; 1956 ; pp.180-181].

[5] [Delambre ; 1810].

[6] [Cauchy L.A. ; *"Discours à la société académique de Cherbourg"* ; 1811 ; Oeuvres complètes, tome XV ; pp.3-15].

Un autre aspect qui frappe l'historien de cette période et qui permet peut-être de mieux comprendre ce sentiment d'impasse, c'est l'extrême disparité des sujets étudiés. Le même *"Rapport à l'Empereur..."* est instructif quant à ce qui est perçu comme faisant partie des sciences exactes. En voici la table des matières avec le nombre de pages consacrées à chacune[7]:

	Nombre de pages	%		Nombre de pages	%
Géométrie	14	4,4	Géographie et Voyages	68	21,3
Géodésie et Tables	27	8,5	Physique Mathématique	24	7,5
Algèbre	35	11,0	Mécanique	18	5,6
Mécanique analytique	12	3,8	Manufactures et Arts	37	11,6
Astronomie	84	26,3	**Total**	**319**	**100,0**

En fait, la vision de la science est celle d'une **science utile**. Il s'agit de rendre compte des **applications** de la science du calcul plutôt que de célébrer les prouesses de ce calcul.
C'était l'époque où le vieux Lagrange, après des décennies passées à chercher la résolution des équations générales de degré supérieur à quatre s'écrie :
"Toutes les tentatives qu'on a faites depuis pour pousser plus loin la résolution des équations, n'ont abouti qu'à faire trouver de nouvelles méthodes pour le troisième et le quatrième degré, sans qu'on ait pu entamer les degrés supérieurs, si ce n'est pour des classes particulières d'équations."[8] Et plus loin :
"Il est possible que cette équation puisse être abaissée à un degré moindre, mais c'est de quoi il me paraît très difficile, sinon impossible de juger a priori."[9]
C'est que les calculs nécessaires étaient arrivés à un tel degré de complication qu'ils étaient manifestement hors de portée d'un esprit humain. Il fallait contourner la difficulté et inventer une nouvelle voie. Rappelons deux exemples tout à fait représentatifs.
Abel d'abord, en 1828 – il a 26 ans et mourra un an après :
"Pour parvenir infailliblement à quelque chose dans cette matière (la résolution des équations) *il faut donc prendre une autre route. On doit donner au problème une forme telle qu'il soit toujours possible de la résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème quelconque. Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible. Par exemple, dans le calcul intégral, au lieu de chercher à l'aide d'une espèce de tâtonnement et de divination, d'intégrer les formules différentielles, il faut plutôt chercher s'il est possible de les intégrer de telle ou telle manière. En présentant un problème de cette manière, l'énoncé même contient le germe de la solution, et montre la route qu'il faut prendre ; (...) Ce qui a fait que cette méthode, qui est sans contredit la seule scientifique, parce*

---

7 [*"Rapports à l'Empereur..."* ; Introduction par J. Dhombres ; p.17].
8 [Lagrange ; « *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* » Paris, 1808 , p.245].
9 id. p.257.

qu'elle est la seule dont on sait d'avance qu'elle peut conduire au but proposé, a été peu usitée dans les mathématiques, c'est ***l'extrême complication*** *à laquelle elle paraît être assujettie dans la plupart des problèmes, surtout lorsqu'ils ont une certaine généralité ; mais dans beaucoup de cas cette complication n'est qu'apparente et s'évanouira dès les premier abord"*[10]

Et Galois en 1831 – il a 20 ans et mourra quelques mois après :

"Or je crois que les simplifications produites par l'élégance des calculs (simplifications intellectuelles, s'entend ; de matérielles il n'y en a pas) ont leurs limites ; je crois que le moment arrivera où les transformations algébriques prévues par les spéculations des analystes ne trouveront plus ni le temps, ni la place de se produire ; à tel point qu'il faudra se contenter de les avoir prévues (...) Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs ; telle est la voie où je suis entré dans cet ouvrage."[11]

Dans ce contexte, les revues de mathématiques vont jouer un rôle à la fois de révélateur et d'acteur de cette mutation, et d'abord à travers le titre même qu'elles se sont choisi. Toutes y associent deux pôles apparemment antagonistes : mathématiques **pures**-mathématiques **appliquées.**

2. La distinction mathématiques pures - mathématiques appliquées.

Cette distinction marque directement une évolution essentielle et en masque une autre : elle prend acte de la modification intervenue durant cette période dans la relation des mathématiques avec les autres sciences : auparavant la distinction se faisait par les vocables *mathématiques pures* et *mathématiques mixtes*. En même temps, la permanence du titre *"Rein und angewandt"* - *Pures et appliquées* - dans les revues citées plus haut, masque l'évolution interne aux mathématiques elles-mêmes, qui se traduit par une modification radicale de sens pour le mot **pur** durant la même période.

Le passage des mathématiques mixtes aux mathématiques appliquées.

La distinction *mathématiques pures - mathématiques mixtes* remonte au moins au début du 17^e siècle ; par exemple elle est utilisée par Francis Bacon dans son livre *"De dignitate et augmentis scientiarum"* (livre III chap. IV).Cette distinction est encore explicite à la fin du 18^e siècle dans l'*Encyclopédie Méthodique*, même si certaines des rubriques précédentes sont regroupées :

"Les mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle Mathématiques pures, considère les propriétés de la grandeur d'une manière ***abstraite*** *: or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue ; dans le premier cas les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique ; dans le second, Géométrie.*

---

[10][Abel , Oeuvres complètes; tome II ; p.217-218 , Christiania , 1881].

[11] [Galois, *« Préface pour deux mémoires d'analyse pure »*,(déc. 1831) ; cf. publication de l'APMEP n° 48 « Présence d'Evariste Galois », p 19.)

La seconde classe s'appelle Mathématiques mixtes ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable; nous disons : de la grandeur concrète, c'est à dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers.
Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Mécanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation (...)"
Tous les journaux mathématiques créés dans les premières décennies du 19e siècle remplacent le terme **mixte** par le terme **appliquée**. Cette modification de mixte en appliquée, entérine un profond changement dans la relation qu'entretiennent les mathématiques avec les autres sciences et manifeste une évolution du concept même de science de la nature. Cette évolution peut se décrire de la façon suivante : la distinction **mathématiques pures - mathématiques mixtes** traduit une sorte de séparation **statique** entre l'**abstrait** et le **concret**, entre une science abstraite et une science empirique qui se sert du nombre et de la mesure pour résoudre les problèmes de la vie quotidienne. Au contraire, la distinction **mathématiques pures - mathématiques appliquées** reflète la vision **dynamique** d'une science de la nature, elle-même abstraite qui se construit autour de concepts (gravitation, polarité, organisme, capillarité, etc...) et dont les mathématiques servent de **forme** et de **langage**.
Cette nouvelle distinction est enregistrée dès 1803 dans le Dictionnaire de mathématiques de Klügel, un des membres influents de l'Ecole Combinatoire allemande :
"Jusqu'à présent toutes sortes de recherches étaient rassemblées dans les Livres sous le terme mathématiques appliquées au point que celles-ci apparaissaient comme un corpus informe de connaissances totalement disparates. Mais il faut séparer tout ce qui concerne l'observation mathématique de la nature, de ces théories pratiques de la vie quotidienne (des Arts et Métiers) où les mathématiques sont seulement une aide, sans déterminer l'essentiel. Celles-ci seront appelées mathématiques techniques, en opposition aux recherches physico-mathématiques. (...) Parmi ces dernières se trouve une science que l'on peut qualifier presque sans aucune restriction, de ***science a priori****, la* ***mécanique pure****, laquelle fut élaborée avec un succès si brillant de Newton à Laplace, et qui fait honneur à la sagacité de la raison humaine."*[12]
Comment se traduit alors dans les faits cette nouvelle façon de concevoir la distinction mathématique pures - mathématiques appliquées?

[1212] [Klügel 1803 ; p.607], traduit par l'auteur de cet article, comme toutes les autres citations de l'original allemand.

La répartition dans les différentes revues.

Si l'on éprouve une certaine difficulté dans les *Archiv* et les *Annales de Gergonne* à apprécier ce qui serait mathématiques appliquées, c'est tout simplement parce que l'évolution mathématique mixtes - mathématiques appliquées n'était pas entièrement acquise : où faut-il placer les articles d'astronomie, de mécanique, les problèmes d'assurance ou de calcul de probabilités? A titre indicatif, si l'on part de la répartition suivante, certes contestable,

mathématiques pures	mathématiques appliquées
arithmétique	tout le reste
analyse	
géométrie	

on arrive aux proportions suivantes :

Archiv : sur 85 articles entre 1794-1800, non classés, le partage se fait presque moitié-moitié : 40 de mathématiques appliquées ; 45 de mathématiques pures.

Gergonne : on tombe à 1/3 de mathématiques appliquées et 2/3 de mathématiques pures (67,46%) ; les articles sont classés en une multitude de rubriques[13].

Crelle : pour la période 1826-1831 uniquement ; 17% (soit 29 articles sur 173) de mathématiques appliquées (Crelle met la mécanique dans les mathématiques pures ; donc si on applique ce principe on obtient seulement 10%).

Liouville : également environ 17% de mathématiques appliquées sur la première série du Journal, c'est à dire jusqu'en 1856[14].

Le rôle de la géométrie

En relation avec cette évolution, il est intéressant également de noter la place de la géométrie dans les trois premières revues : les *Archiv* n'en contiennent que très peu ; 7% des articles (6 articles au total), essentiellement dans les derniers numéros. Cela tient au but avoué de cette revue : diffuser les résultats et l'idéologie de l'Ecole Combinatoire Allemande. Chez *Gergonne*, 46,36% du total est consacré à la géométrie ; chez Crelle 33%.

Mais on ne compare pas exactement les mêmes choses, car le mot géométrie est tributaire d'une autre évolution, une évolution interne aux mathématiques dites **pures**, évolution portant sur le qualificatif **Pur**.

Le deuxième phénomène : mathématiques pures.

13 [Dhombres, Otero, 1993].

14 [Duvina, 1994].

Le deuxième phénomène est masqué, lui, par la permanence du titre : celui de l'évolution sémantique de l'expression **mathématiques pures**. Celle-ci peut se mesurer dans la classification même des rubriques. Comparons les seuls 5 numéros chronologiquement communs aux *Annales de Gergonne* et au *Journal de Crelle* soit entre 1826 et 1831 : la table des matières de chaque volume des *Annales de Gergonne* est éclatée en une multitude de rubriques, sans ordre particulier, allant de l'analyse distinguée en algébrique, indéterminée, élémentaire ou transcendante, à la trigonométrie, la mécanique, l'astronomie, la gnomonique, en passant par la géométrie classée en analytique, descriptive, pure ou transcendante, pour ne citer que les plus classiques.

En contraste saisissant, deux rubriques seulement chez Crelle, l'une de **mathématiques pures** (elle même partagée en **analyse, géométrie et mécanique**), l'autre de **mathématiques appliquées**.

Certes les *Annales* sont orientées vers les professeurs de lycée et marquées par le parti-pris analytique [15]. Gergonne les présente ainsi, dans la préface au premier numéro : *"Ces Annales seront principalement consacrées aux Mathématiques pures, et surtout aux recherches qui auront pour objet d'en perfectionner et d'en simplifier l'enseignement".* Néanmoins les raisons de ce type de classification et de contenu sont plus diverses et plus profondes. Rien n'empêchait Gergonne **a priori** de changer ses objectifs pour tenir compte des évolutions du temps et de la nouvelle génération de mathématiciens (il l'a bien fait dès le deuxième volume en revenant sur la décision annoncée dans le premier, de publier des comptes rendus de lecture). Et le volume 17 contient des articles de Abel, Cauchy, Plücker et Poncelet, les volumes 18 et 19, des articles de Galois.

En fait, isolé, éloigné de Paris, Gergonne, contrairement à Crelle, n'enregistre pas les progrès fondamentaux des mathématiques, et l'évolution profonde que celles-ci subissent durant cette période. Sa revue reflète la vision désormais archaïque d'une mathématique éparpillée en une multitude de rubriques sans projet unitaire - d'une mathématique un peu désabusée qui ne croit guère en d'autres progrès possibles que de détail comme cela a été évoqué dans la première partie. L'Allemagne était probablement mieux préparée à accueillir ces changements par trois facteurs au moins : l'importance de la réflexion philosophique avec Kant, Fichte, Hegel ; l'influence du romantisme allemand dont de nombreux poètes avaient un grand intérêt et certains même une profonde connaissance de la science de leur temps ; les innovations pédagogiques (Basedow, Pestalozzi) et la grande réforme de l'enseignement engagée par W. Von Humboldt en 1810. Nous n'aborderons ici que les deux premiers aspects. Pour les innovations pédagogiques, je renvoie à la remarquable étude faite par Jahnke dans [Jahnke 1989].

En philosophie :

La *Critique de la Raison pure* (1781) a certainement joué un rôle important dans l'évolution sémantique de l'expression *Mathématiques Pures*. Klügel, dans le dictionnaire déjà cité, consacrera plusieurs pages à cet ouvrage, dans l'article *mathématiques*. Rappelons la définition que donne Kant, d'une connaissance pure : il commence par

[15] [Dhombres, Otero, 1993]

reprendre la définition commune, en quelque sorte au premier degré : *"On appelle **pure** toute connaissance à laquelle rien d'étranger n'est mêlé"* (ce qui renvoie bien à la distinction mathématiques pures - mathématiques mixtes). Puis il ajoute sa propre spécification, devenue classique : *"Mais une connaissance est surtout dite **absolument pure**, quand on n'y trouve en général aucune expérience ou sensation, quand elle est, par suite, possible complètement **a priori**."*[16]

Cette définition garderait cependant son caractère statique de simple dichotomie entre les connaissances pures et les connaissances empiriques basées sur l'expérience, si Kant en était resté là. Or l'apport essentiel de la *Critique de la Raison Pure* se situe à un autre niveau. Parmi les connaissances pures (a priori) Kant distingue celles qui découlent de jugements purement **analytiques** ou explicatifs (p.37), lesquels n'apportent rien de plus que ce qui est déjà dans un concept, de celles qui découlent de jugements **synthétiques** (extensifs) : *"On pourrait aussi nommer les premiers **explicatifs**, les autres **extensifs**, car les premiers n'ajoutent rien au concept du sujet par le moyen du prédicat, mais ne font que le décomposer par l'analyse en ses concepts partiels qui ont été déjà (bien que confusément) pensés en lui ; tandis qu'au contraire les autres ajoutent au concept du sujet un prédicat qui n'avait pas été pensé en lui et qu'on n'aurait pas pu en tirer par aucun démembrement."* (p.37). Or *"La Mathématique fournit l'exemple le plus éclatant d'une raison pure qui réussit à s'étendre d'elle-même et sans le secours de l'expérience"* (p.493) car *"les jugements mathématiques sont tous synthétiques."* (p.40).

Le ressort de cette extension tient en ce que les mathématiques procèdent par **construction** des concepts. *"Mais construire un concept c'est représenter **a priori** l'intuition qui lui correspond. La construction d'un concept exige donc une intuition **non empirique** qui, par conséquent, en tant qu'intuition, soit un objet **singulier** mais, qui, néanmoins, comme construction d'un concept (d'une représentation générale) doit exprimer dans la représentation (Vorstellung) quelque chose d'universel qui s'applique à toutes les intuitions possibles appartenant à ce concept."* (p.493).Kant appelle **intuition pure** une telle intuition non empirique, et il en dégage deux, fondamentales : l'espace et le temps. Par exemple en géométrie : « *la figure singulière tracée est empirique, et pourtant elle sert à exprimer le concept sans porter préjudice à son universalité.* »

La présentation des mathématiques comme jugements synthétiques **a priori** et surtout l'accent mis sur le thème de la construction des concepts vont clarifier le concept de mathématiques pures et les exigences de celles-ci. Que les concepts de la géométrie soient construits était une caractéristique acquise depuis les *Eléments d'Euclide*, mais le texte de Kant n'en éclaire pas moins le caractère abstrait et général (non empirique) des constructions de figures (singulière et empirique) parce que *"dans cette intuition empirique, on ne considère jamais que l'acte de la construction du concept."* (p.494).

Dans un court essai publié en 1810, et intitulé *« Contribution à une exposition des mathématiques sur de meilleurs fondements »*, un jeune logicien praguois du nom de **Bolzano**, s'il se félicite de la distinction kantienne des jugements analytiques et

---

[16] [Kant, 1781 ; p.46 ; introduction §VII].

synthétiques, conteste radicalement l'existence d'intuitions pures (concept qui lui paraît contradictoire en soi) et donc aussi le principe même de la construction des concepts au moyen de ces intuitions pures. Pour Bolzano, les mathématiques ne se distinguent pas des autres sciences par l'usage d'une forme d'intuition particulière, et n'ont besoin, pour leurs fondements, d'autre chose que de la logique elle même.
Du fait que depuis Descartes la géométrie et l'algèbre interféraient dans l'analyse par la traduction numérique des propriétés géométriques en termes d'équations et de fonctions, il devenait logique de vouloir séparer les critères qui relèvent du géométrique de ceux qui relèvent du numérique, et donc de mettre en place les règles de *"pureté"* mathématique.
Cette volonté stimula de façon extraordinaire les développements de l'analyse, surtout et d'abord en Allemagne, mais également redonna une nouvelle jeunesse à la géométrie qui pourra elle aussi se qualifier de **géométrie pure**.

Un exemple : la démonstration purement analytique du théorème des valeurs intermédiaires.

Dans son *Cours d'Analyse* publié en 1821 sous le titre *"Analyse algébrique"*, Cauchy énonce et démontre de la façon suivante le théorème dit *"des valeurs intermédiaires"* :
"Théorème IV : Si la fonction f(x) est continue par rapport à la variable x entre les limites $x=x_0$, $x=X$ et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et f(X) on pourra toujours satisfaire à l'équation f(x)=b par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X. Démonstration : Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation y=f(x) rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation y=b dans l'intervalle compris entre les coordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise."[17]
C'est un argument géométrique sensible, intuitif. La nécessité d'une démonstration *purement analytique* n'est pas explicitée[18]. Elle était pourtant formulée dès 1817 par Bolzano :
"Il n'y a absolument rien à objecter, ni contre la justesse, ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode, faute qui consiste à vouloir déduire les vérités mathématiques pures (ou générales) (c'est à dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) des considérations qui appartiennent à une ***partie appliquée*** *(ou spéciale) seule, à savoir la géométrie."*[19]
Cette nécessité n'est pas ressentie justement parce que l'analyse n'est pas séparée encore de la géométrie, dont elle représente seulement l'outil d'investigation le plus efficace.
Ainsi l'une des contributions majeures des mathématiciens du 19e siècle, particulièrement germaniques, sera la reconstruction de l'analyse sur des bases non géométriques, à

---

17 [Cauchy 1821 ; p.50].
18 Cauchy, cependant, donne dans la note III p.460 et suivantes une preuve analytique. N'oublions pas la division du cours en parties obligatoires et parties facultatives.
19 [Bolzano 1917 ; p.137].

travers ce qu'on a appelé l'arithmétisation de l'analyse, qui d'une certaine façon illustre admirablement les thèses de Kant citées plus haut, dans ses deux aspects :

- celui d'une mathématique **pure** où tout recours à l'intuition sensible est banni, puisque s'appuyant sur le seul concept de nombre,

- celui de la construction des concepts mathématiques puisque cette arithmétisation trouvera son aboutissement dans la **construction des réels**, seul cadre théorique permettant de réaliser la coupure absolue de l'analyse avec l'intuition sensible.

Une nouvelle jeunesse pour la géométrie.

Inversement, cette coupure ne restera pas sans effet sur la géometrie elle-même : "(En donnant) *un fondement purement analytique aux notions et propriétés assurées jusque là seulement par l'évidence de leur corrélat géométrique."*[20]. Les critères même de rigueur sont changés, qui s'appuient uniquement sur des arguments numériques et topologiques. Le continu en particulier, concept géométrique, s'il en fut, est défini analytiquement, achevant l'identification commencée avec Descartes entre nombre et étendue.

Il n'est donc pas étonnant que la géométrie elle-même connaisse un regain d'intérêt et un développement spectaculaire. Libérée des contraintes de l'intuition sensible, elle pouvait enfin relever le défi posé par la démonstration du 5^{e} postulat d'Euclide et développer les géométries non-euclidiennes. Elle pouvait explorer les espaces à un nombre de dimensions quelconque supérieur à trois. Elle développait un outil algébrique autour du concept de groupe dont l'aboutissement est le fameux *Programme d'Erlangen* de Félix Klein. Celui-ci entérinait une rupture dans la géométrie, annoncée dès le début des années 1820 laquelle passait de l'étude des propriétés des figures à celle des **relations** entre objets géométriques, à la recherche de principes généraux et abstraits. C'est ce que souligne Chasles dans son *"Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie"* : *"L'ancienne géométrie est hérissée de figures. La raison en est simple. Puisqu'on manquait alors de principes généraux et abstraits, chaque question ne pouvait être traitée qu'à l'état concret, sur la figure même qui était l'objet de cette question et dont la vue seule pouvait faire découvrir les éléments nécessaires à la démonstration ou à la solution cherchée."*[21]

La géométrie projective puis les travaux de Poncelet, Steiner, Moebius, Plücker vont annoncer cette rupture, dont les objectifs sont nettement précisés dans l'introduction au *"Traité des propriétés projectives des figures"*[22] : *"Agrandir les ressources de la simple géométrie, en généraliser les conceptions et le langage ordinairement assez restreints, les rapprocher de ceux de la géométrie analytique, et surtout offrir des moyens généraux propres à démontrer et à faire découvrir d'une manière facile, cette classe de*

[20] [Cavaillès, « *Philosophie mathématique* », p.31, Hermann , Paris 1952].

[21] [Chasles, p.207-208 ; 1837].

[22] [Poncelet, 1922 rééd. 1865 p.XXII].

*propriétés dont jouissent les figures quand on les considère d'une manière purement abstraite et indépendamment d'une grandeur absolue et déterminée, tel est l'objet qu'on s'est spécialement proposé dans cet ouvrage."*Tous les auteurs ci-dessus vont présenter leurs idées principales dans le *Journal de Crelle*.

Une nouvelle manière d'appréhender la question de l'intelligibilité de la nature dans le langage mathématique.

Galilée avait proposé de lire « *cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers. Mais on ne peut le comprendre si on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à en connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot .Sans eux c'est une errance vaine dans un labyrinthe obscur* ».Et effectivement, la science du XVII^{ème} siècle va culminer avec la publication, en 1787, des « *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* » par Newton, lesquels donnent la clef de lecture de la mécanique du cosmos. Mais beaucoup d'autres domaines : le magnétisme , l'électricité, la chaleur..., échappent encore à une mathématisation véritable en restant au niveau de descriptions qualitatives vagues et empreintes de mystère. C'est que l'outil mathématique reste trop marqué par la géométrie d'Euclide (les triangles, les cercles dont parle Galilée). L'espace de la géométrie des Anciens jusque Descartes est un espace inerte « *tout à fait abstrait et privé de vie* », comme le dira Schelling . Le XIX^{me} siècle va peu à peu l'animer, le charger de dimensions, de directions, de tensions, de polarité engendrant un espace en constante **extension** (**Ausdehnung,** selon le titre célèbre de Grassmann, qui signifie à la fois extension, expansion, dilatation), un espace chargé de lignes de force électriques et gravitationnelles, sur lequel les nombres eux-mêmes deviennent actifs sous forme d'opérateurs (vecteurs, nombres complexes, quaternions). « *De la ligne droite d'Euclide aux lignes de force de Faraday (...), ce sont de telles idées qui font avancer la science (...) , et nous pouvons espère d'autres progrès par une libération des idées dynamiques et géométriques* ». Toute l'histoire de la science des deux derniers siècles nous enseigne que c'est l'effort d'abstraction entrepris par les mathématiques qui a conditionné leur applicabilité de plus en plus performante, à travers la physique mathématique. Théorie de la chaleur, lois de l'électromagnétisme, plus tard théorie de la relativité et mécanique quantique sont autant d'étapes de ce jeu dialectique entre mathématiques pures et appliquées où l'investigation d'une matière fantastiquement plus riche et plus complexe que ce qu'en révèle l'observation sensible immédiate oblige les mathématiques à créer des formes elles mêmes de plus en plus élaborées pour en rendre compte « *Résultat paradoxal : c'est le mouvement même de l'abstraction amplifiante de la mathématique qui conditionne leur incarnation comme êtres physiques : la mathématique s'applique d'autant mieux qu'elle est plus "abstraite"."*[23].

Cette nouvelle relation de la science à la réalité objective rend possible la rencontre et l'influence réciproque de la pensée scientifique et de la production artistique, dans la

[23] [Chatelet, 1993 ; p.25].

mesure même où Science et Art s'éloignent tous deux de l'expérience commune et concrète. Dans la mesure même où tous deux subliment cette expérience commune en **formes** qui sont conditionnées non plus uniquement par cette expérience, mais aussi principalement par des points de vue idéaux (esthétiques ou scientifiques) comme la simplicité, l'harmonie, l'architectonique, la structure etc...[24] Cette rencontre de la science et de l'esthétique est parfaitement illustrée par la figure emblématique du romantisme allemand : Friedrich von Hardenberg, dit Novalis.

Novalis (1772-1801) : la rencontre du Génie mathématique et du Génie poétique.

Dyck dans son étude parue en 1960 *"Novalis and Mathematics"*[25] tient pour acquis qu'il a étudié les mathématiques avec Hindenburg à Leipzig, mais il n'y a pas de preuve certaine. Toujours est-il que Novalis possédait la plupart des écrits de l'Ecole Combinatoire Allemande dans sa bibliothèque et que cette Ecole a considérablement façonné sa conception des mathématiques et par contrecoup sa vision du monde en général. Originellement, le projet et la caractéristique fondamentale de l'Ecole Combinatoire Allemande dont les *Archiv der reinen und augewandten Mathematik* devaient servir la diffusion, consistait à ramener toute l'analyse à un calcul combinatoire, dans la perspective de ce qu'on appelait alors l'analyse algébrique, mais aussi dans la filiation de l'**ars combinatoria** présenté par Leibniz comme la science générale des formules et des opérations. Hindenburg et son Ecole cherchaient ainsi à développer une théorie générale des formules, et un symbolisme cohérent, accompagné de méthodes graphiques. Trop lourd, trop ambitieux, le projet échoua, mais eut néanmoins pour effet de modifier la conception des mathématiques parmi ses membres. Cette conception amplifia l'accent mis sur le **symbolisme** des mathématiques, perçues comme la science des formes et des systèmes de formes. Klügel, dans l'article *"Mathematik"* de son Dictionnaire, écrit :
"Mathematik ist die Wissenschaft von den Formen der Größen." (*"les mathématiques sont la science de la forme des quantités (des grandeurs)"*) ajoutant ce commentaire bien dans le style kantien : *"La mathématique se distingue en pure et appliquée. La pure, qui est la mathématique proprement dite, est ainsi appelée parce que tous les concepts, toutes les propositions, tous les regroupements et décompositions des grandeurs se forment directement par la raison, purement et indépendamment de l'aide d'une quelconque connaissance ou expérience sensible. Les symboles dans les relations arithmétiques entre les grandeurs, et les figures dans les géométriques ne sont que des moyens pour garder les étapes de la succession des propositions et fixer l'attention sur chaque terme, sans y perdre l'ensemble."*[26]
C'est sur ce dernier aspect que Novalis devait réagir tout particulièrement : les mathématiques sont l'expression et le symbole d'une unité, d'une harmonie supérieure de la science, et réciproquement, le sens de cette unité doit être recherché dans les symboles

---

[24] [Jahnke, 1989 ; p.40 à 62].
[25] [Dyck Martin ; « *Novalis and matematics* », Chapel Hill, 1960]
[26] [Klügel, 1803 ; p.603].

mathématiques. D'où une distinction importante entre calcul parfait et calcul imparfait parallèle à la distinction mathématiques pures et mathématiques mixtes : imparfait est le calcul qui exécute des opérations sur des objets isolés ; parfait, celui qui prend en compte la structure globale des opérations. Le principe unificateur est ce que Novalis appelle le **Génie Mathématique**, celui qui rend l'impossible possible et le possible impossible, qui rend le connu inconnu et l'inconnu connu.. Ce **Génie Mathématique** rejoint alors le **Génie Poétique** comme expression de la subjectivité de l'artiste romantique, en opposition aux règles de l'art classique. *"Le génie, c'est la capacité de traiter comme réels des objets imaginaires."*[27]
Il est créateur de nouvelles formes : nombres complexes, géométries non euclidiennes, structures algébriques. Et ces formes s'inscrivent dans une conception quasi **organique** des mathématiques. *"L'idée s'imposa à moi de l'unité organique de tous les objets des mathématiques"* dira Steiner[28] et Dedekind concrétisera cette conception en attribuant le substantif **Corps** à la structure la plus riche de l'algèbre. *"Comme dans les sciences de la nature, la géométrie ou la vie de la société humaine, ce nom devra désigner ici également un système qui possède une certaine perfection, plénitude et achèvement (Abgeschlossenheit) par lesquels il apparaît comme un tout organique, telle une unité naturelle."*[29]
Tant la profonde réflexion philosophique de Kant et de ses successeurs sur les conditions et les modalités d'une science pure que les élans quasi mystiques du Romantisme allemand ont ainsi formé une nouvelle génération de mathématiciens pour lesquels les mathématiques sont l'expression la plus pure et la plus libre des créations de l'esprit humain : pure comme connaissance *a priori*, libre comme expression du génie mathématique créateur de formes. En exergue à sa thèse de mathématique présentée en 1825, C.G.J. Jacobi ne met pas seulement une citation grecque, mais aussi un aphorisme pris dans l'*Hymne à la mathématique* de Novalis : *"Egregie asserit Novalis poeta"* : *"Der Begriff der Mathematik ist der Begriff der Wissenschaft überhaupt. Alle Wissenschaften müssen daher streben, Mathematik zu werden."* : *"Le concept des mathématiques est le concept capital de la science. Toutes les sciences doivent tendre à devenir mathématiques."*[30] On peut alors comprendre la réussite exemplaire du *Journal de Crelle* comme la rencontre heureuse d'un esprit d'époque (Zeitgeist) en plein ébullition et d'une personnalité remarquable qui a su en canaliser les énergies, les idées, les lignes de force. Contrairement à Hindenburg, Crelle n'a pas voulu faire de son journal le propagateur de ses propres idées. Une des originalités du *Journal de Crelle* c'est que Crelle n'y écrit pas d'articles, seulement des énoncés de problèmes. Il s'efface totalement derrière ses auteurs. Contrairement à Gergonne il travaille **entouré** d'amis, de savants, d'artistes, dont il favorise les échanges. Il habite et dirige l'édition du Journal dans une grande ville, Berlin, haut lieu du développement culturel et scientifique du 19e siècle en Allemagne.
Voyons un peu plus en détail les circonstances de cette réussite.

---

[27] Novalis dans [Guerne, 1956 ; p.208].
[28] [cité par Jahnke, 1989 ; p.56].
[29] [Dedekind, 1893 ; p.452].
[30] cité dans [Jahnke, 1989 ; p.170].

3. La réussite du Journal de Crelle.

Elle tient en au moins quatre facteurs aux effets conjugués : d'abord à une personnalité humaine très riche, attachante, à la fois opiniâtre et en même temps très souple ; cette personnalité était très impliquée dans la vie sociale et culturelle de son temps, tant celle de l'Allemagne que de l'étranger ; elle était partie prenante dans le développement de la science de son temps et particulièrement dans les mathématiques, même si Crelle n'a pas marqué ce développement par des travaux ou des découvertes significatifs ; enfin, Crelle a joué un rôle important dans la mise en place des nouvelles institutions universitaires qui ont entouré la fameuse réforme de Humboldt de 1810.

La personnalité de Crelle (1780-1855).

Toutes les personnes qui ont fréquenté Crelle soulignent l'extrême cordialité du personnage. Citons simplement cette appréciation d'Abel, dans une lettre à Holmboe (janvier 1826) : *"Tu ne peux pas t'imaginer l'homme excellent qu'il est, exactement ce qu'il faut, prévenant sans faire preuve de cette effroyable politesse que vous témoignent bien des gens, d'ailleurs fort honnêtes. J'ai avec lui des rapports aussi aisés qu'avec toi ou d'autres très bons amis."*. Plus important pour son journal, Crelle a un don extraordinaire pour juger des qualités des jeunes talents et pour les encourager dans leurs recherches. Peu d'éditeurs peuvent se vanter d'avoir leur nom associé à la gloire d'autant de jeunes mathématiciens que Crelle : Abel, Dirichlet, Eisenstein, Graßmann, Hesse, Jacobi, Kummer, Lobachevski, Möbius, Plücker, V. Staudt, Steiner et Weierstraß ont fait connaître leurs premiers travaux par l'intermédiaire du *Journal de Crelle*. Ce caractère très sociable n'empêchait pas une grande obstination pour la réussite de son journal. Les difficultés furent immenses, éditoriales et bien sûr financières. Une lettre de Jacobi à Crelle fait part *"du souci que vous m'avez instillé et qui certainement est partagé par tous les* ***cœurs analytiques****, sur l'incertitude qui pèse sur la continuation du Journal"*[31]. Crelle a énormément investi dans son Journal, du travail et de l'argent personnel, voire même sa santé. Mais un succès immense est venu le récompenser dès la parution du premier numéro, et l'a certainement encouragé à poursuivre. Ce succès a même tout de suite débordé les frontières allemandes, comme le rapporte A. von Humboldt à la suite d'un de ses voyages à Paris : *"Le Journal de Crelle bénéficie de la plus haute estime en France, où on le préfère au Journal de M. Gergonne. Je sais cela de mon séjour en France, où on le nomme à tout instant à l'Institut (de France, Académie des Sciences) et où MM. Laplace, Fourier, Cauchy, Poinsot, le Gendre lui ont manifesté publiquement leur témoignage d'estime."*[32]

Une personnalité très impliquée dans la vie sociale et culturelle de son temps.

Crelle tenait salon, tous les lundis soir, comme le raconte Abel dans une lettre à Hansteen: *"Il y a chez lui une sorte d'assemblée où l'on s'occupe principalement de musique, à quoi malheureusement je ne comprends pas grand chose. Je m'y amuse bien*

[31] [Eccarius, 1976 ; p.11].
[32] id.

tout de même car j'y rencontre toujours quelques jeunes mathématiciens avec qui causer. Chez Crelle il y avait aussi auparavant une réunion hebdomadaire de mathématiciens, mais il a été obligé de les interrompre parce qu'il y avait un nommé Ohm (Martin, un frère de Georg le physicien) *avec qui personne ne pouvait s'entendre à cause de son effroyable arrogance."*
Ces cercles musicaux se sont beaucoup développés en Allemagne au 19^{e} siècle, un autre exemple célèbre, en relation avec notre sujet étant celui de M^{me} Dirichlet alias Rebekka Mendelsohn, une des sœurs de Felix Mendelsohn. Ils sont la traduction de ce désir de l'âme romantique allemande d'une étroite unité entre l'art et la science.
Crelle avait aussi le souci de ne pas se limiter à son environnement culturel germanique et correspondait avec de nombreux mathématiciens de langue française : Ampère, Gergonne, Legendre, Liouville, Poinsot, Poisson, Poncelet et Quetelet. En 1830 il entreprit un voyage à Paris. Il rencontra plusieurs fois Gauß à Göttingen et réussit à lui faire écrire quatre articles dans son Journal.

Acteur dans le développement des mathématiques de son temps.
Sans être un mathématicien de grande importance, Crelle était très au fait des mathématiques de son temps. Il a lui-même publié avant 1826 - date de parution du premier numéro de son Journal - 12 ouvrages de mathématiques, dont la traduction de la Géométrie de Legendre et plusieurs ouvrages de Lagrange. Ses recherches personnelles étaient assez étroitement en relation avec celles de l'Ecole Combinatoire allemande, avec pour principale publication un *"Essai de théorie des Facultés analytiques..."* ; en 1823 (en référence à la théorie des factorielles créée par Kramp) et qu'Abel qualifiera de *"livre remarquable, surtout sous le rapport de la forme."*[33]
Est également à signaler, car significatif par le titre, son *Essai d'une présentation purement algébrique du calcul des grandeurs variables en accord avec l'état présent des mathématiques* (1823). Après 1826, Crelle continuera à publier régulièrement, nombre de ses publications étant consacrées à des aspects soit techniques soit pédagogiques.

Acteur dans les institutions officielles.
En effet, Crelle était d'abord un important fonctionnaire du bâtiment et des travaux publics, et joua un rôle important dans la construction du chemin de fer en Allemagne dans les années 1830. Dans ce cadre, il crée un autre Journal, *"Journal für die Baukunst"* (un peu l'équivalent des *Annales des "Ponts et chaussées"*), dont il assure la publication de 1829 à 1851.
En 1828 il est nommé Conseiller privé au Ministère des Cultes, où ses activités peuvent se répartir en trois directions : il élabore un plan pour la création d'un institut polytechnique pour les mathématiques, la physique et la chimie sur le modèle de l'Ecole Polytechnique Française qui fascinait beaucoup l'intelligensia allemande avec comme vocation la formation des professeurs. Ce projet n'aboutit pas ; il met au point un projet de programme pour l'enseignement des mathématiques dans les lycées prussiens, ainsi

[33] [Eccarius, 1976 ; p.7].

que pour un Manuel scolaire officiel du Ministère ; enfin, il fait office de rapporteur, pendant vingt ans, pour les Manuels scolaires[34]. C'est donc un homme entièrement plongé à la fois par la culture et par l'action, dans son époque, qui entreprend la publication d'un *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* pour combler un vide devenu insupportable.

La création du Journal : les intentions.

La préface au premier numéro mérite d'être citée largement :

"Il n'y a pas un domaine significatif du savoir qui n'ait pas aussi sa publication en allemand. Seule la mathématique, immense et illimitée, cette science élevée au dessus du temps et du lieu, au-dessus des opinions et des passions, qui parmi toutes, est celle qui est le mieux en étroite parenté avec la vérité, elle seule n'a pas son Journal.

Depuis 16 ans existe sans interruption en français un journal mathématique : "Les annales de mathématiques pures et appliquées", *ouvrage périodique rédigé par M. Gergonne à Montpellier, et un autre à Bruxelles est en voie de naître.*

Même dans d'autres langues, il ne manque pas de possibilités de publier des articles mathématiques isolés. Seule, en allemand cette possibilité n'existe pas (...)

Comme donc un Journal est dans les faits un moyen très efficace pour développer une science et la diffuser, pour la fermer aux influences étrangères, et la protéger des sujétions, des modes, des autorités, des écoles, des respects et la conserver dans le domaine libre de la pensée, il vaut la peine d'essayer s'il est possible de donner vie et croissance à une telle publication en langue allemande pour les mathématiques."

Puis sont énumérées les intentions de l'éditeur : viser un public très large formé non seulement de spécialistes mais qui se préoccupe autant de la **diffusion** des connaissances que de leur perfectionnement ; elle doit être libre des modes, des écoles, des habitudes, pour laisser la porte ouverte à toutes les idées nouvelles ; elle doit être ouverte aux publications étrangères mais celles-ci seront traduites ; elle comprendra aussi bien des mathématiques pures que des mathématiques appliquées ; elle diffusera des traductions ou des rééditions de textes marquants.

Le succès.

Le succès dépassa largement les espérances de Crelle, manifestant combien son journal répondait à un besoin essentiel de la science du temps. Il fut double : dans l'audience et les soutiens qu'il obtint chez les savants mais aussi de la part des autorités., succès aussi dans les articles proposés qui affluaient de partout.

Néanmoins l'ouverture préconisée dans le premier éditorial ne pouvait pas ne pas avoir de conséquences. Dès le second numéro, Crelle accepte de publier des articles en langue étrangère, et celles-ci seront présentes de façon non négligeable durant toute la période où Crelle s'occupe du Journal, c'est à dire jusqu'en 1855. Durant cette période, 24% des articles furent rédigés en français, 12,7% en latin, 1,1% en anglais ou italien, soit un total de 37,8% (plus du tiers en langue non allemande).

---

[34] [Jahnke, 1989 ; p.383)

Surtout il ne peut maintenir l'équilibre souhaité entre mathématiques pures et mathématiques appliquées. L'évolution même de cette science ne le permettait pas, mais aussi l'importance théorique du contenu des articles de mathématiques pures l'obligerons vite à choisir la voie de la spécialisation. Crelle eut l'intelligence de ne pas contrecarrer cette évolution, quitte à se replier pour les questions pratiques et techniques, sur le *Journal für die Baukunst*. Cette évolution vaudra au *Journal de Crelle* d'avoir eu la priorité de publication pour nombre de textes majeurs du 19[me] siècle : sur la série du binôme (Abel) ; sur les fonctions elliptiques (Abel et Jacobi) ; sur la résolution des équations dont le degré dépasse 5 (Abel) ; sur la géométrie (Möbius, Poncelet, Steiner, Plücker, Grassmann...) ; sur la géométrie non euclidienne (Lobachevski) ; sur la théorie des nombres (Dirichlet, Eisenstein, Kummer) etc...

Conclusion.

Le *Journal de Crelle* nous paraît ainsi être le meilleur révélateur des mutations les plus significatives du 19[me] siècle concernant les mathématiques. Comme les autres revues, il manifeste une certaine professionnalisation dans l'exercice du métier de mathématicien. En opposition à ces revues, il enregistre la rupture avec le recours à l'intuition géométrique et entérine le concept d'une mathématique pure comme connaissance totalement *a priori*. Porté par le courant idéaliste du Romantisme allemand, Crelle défendra une conception des mathématiques qui trouve en elle-même la source de son développement. Lors de son voyage à Paris en 1830, il nous a laissé quelques notes de voyage dont voici deux extraits significatifs : *"Le véritable but des mathématiques est d'être le moyen de l'illumination de la raison et de l'exercice des forces spirituelles."* ; *"On en est venu en France à un véritable préjugé contre la culture des mathématiques pures"*. N'est ce pas de l'année 1830 que l'on date quelque-fois le déclin des mathématiques françaises au XIX[ème] siècle?

Bibliographie

Bolzano B. 1817 — *"Rein analytischer Beweis..."* Trad. française par J. Sebestik ; *Revue d'Histoire des sciences* ; t.17-1964, p.136-164.

Cauchy A. 1821 — *"Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, Analyse Algébrique."* œuvres complètes, II[e] série ; tome III ; Gauthier-Villars, Paris, 1897.

Chasles M. 1837 — *"Aperçu historique des méthodes en géométrie."* Bruxelles 1837 ; Réédition en fac-similé Gabay Paris 1989.

Châtelet G. 1993 — *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*, Seuil, Paris, 1993.

Dedekind R. 1893 — *"Vorlesungen über Zalhentheorie von P.G. Lejeune Dirichlet"* Herausgegeben und mit Zusätzen ; von R. Dedekind, Braunschweig 1893 ; Reprint New-York 1968.

Delambre
1810
"Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789, et sur leur état actuel" ; Paris Imprimerie Impériale 1810 réédition 1989 ; Belin

Dhombres J.
Otero M.H.
993
"Les Annales de Mathématiques pures et appliquées.", le journal d'un homme seul au profit d'une communauté enseignante, in E. Ausejo, M. Hormigon (éd), Messenger of Mathematics, Madrid 1993, p.1-53.

Dhombres J. et N.
1989
"Naissance d'un nouveau pouvoir : sciences et savants en France 1793-1824." Bibliothèque historique Payot, Paris, 1989.

Duvina S.
"Le Journal de Mathématiques pures et appliquées sous la férule de J. Liouville." Dans *Sciences et Techniques en Perspective*, Vol.28, 1994.

Eccarius W.
1976
"August Leopold Crelle als Herausgeber des Crelleschen Journals." Journal de Crelle n°286/287 ; à l'occasion du 150^{e} anniversaire de la création du *Journal de Crelle.*

Guerne A.
1956
"Les Romantiques allemands." Textes choisis et présentés par A. Guerne ; Desclée de Brouwer ; Paris 1956.

Jahnke H.N.
1989
"Mathematik und Bildung in der Humboldschen Reform." Dissertation Univ. Bielefeld, Institut, für Didaktik der Mathematik 1989.

Kant E.
1781
"Critique de la Raison pure." Trad. française par A. Tremesaygues et B. Pacaud ; PUF Paris 1965.

Klügel G.S.
1803
"Mathematisches Wörterbruch." Leipzig ; Schwickert 1803-1831 ; Article Mathematik.

Poncelet J.V.
1822
"Traité des propriétés projectives des figures", Paris Gauthier-Villars 1822, rééd .1865.

LE CAHIER DE COURS AU COLLEGE : UNE DEMARCHE POSSIBLE

par Bernard Blochs et Jacques Gervais , IREM de Strasbourg : groupe Collège de Mulhouse.

Un cours[1] de mathématiques est un écrit bien spécifique à notre matière, il se présente sous la forme d'une suite de définitions, d'exemples, de figures, de propriétés, de démonstrations ... Lorsqu'un professeur prépare chez lui son cours, il se trouve face à de nombreuses questions. Comment formuler les définitions, les propriétés ? Faut-il donner certaines propriétés sous une forme générale ou des exemples sont-ils suffisants ? Est-il utile de faire des figures ? Combien ? Lesquelles ? Avec quelles notations ? ...
Dans cet article nous montrons comment nous avons essayé de demander à des élèves de collège de faire eux-mêmes ce travail de synthèse et d'écriture, étape sans laquelle il nous semble qu'une éducation mathématique reste incomplète.
Le fait de demander aux élèves d'écrire le cours peut aussi permettre à l'enseignant de contrôler ce qu'ils ont retenu des activités qui ont précédé.

1/ Introduction : pourquoi ce travail ?

Ce travail s'intéresse au cahier de cours, non pas dans le cadre d'un enseignement magistral (dans lequel le thème étudié commence par un cours fait par le professeur), mais dans un travail "par activités" ou perspective constructiviste, recommandée dans le B.O., dans lequel les élèves doivent être le plus possible des acteurs de leur apprentissage.

Dans le modèle d'enseignement de type "cours magistral", le cours peut sembler facile à écrire : c'est par lui que l'on commence, les élèves sont censés ne rien connaître sur le sujet de la leçon et donc être tous au même niveau. Dans une perspective "constructiviste", le cours intervient après des activités, éventuellement des exercices, aussi il nous semble naturel qu'il soit le plus possible articulé avec celles-ci.[2]. Dans l'esprit de l'enseignant, l'articulation existe, bien sûr, mais un des buts de ce travail est de lui donner un sens pour chaque élève. D'autre part, si l'on souhaite que les élèves soient le plus actifs possible, n'est-il pas possible de les associer à l'élaboration du cours, de leur cours ? Ne s'approprieront-ils pas mieux une leçon qu'ils ont contribué à élaborer ? [3]
Comment alors ce cours pourra-t-il tenir compte du programme du B.O. (qui est destiné à être lu par les enseignants plutôt que par des élèves !) ?

---

[1] Lorsque nous parlons de *cours*, il s'agit de ce que l'on écrit dans le cahier de cours, pas du cours de mathématiques qui a lieu de 8h à 9h ...
[2] Remarquons que cette articulation pose souvent un gros problème aux stagiaires IUFM de deuxième année : après avoir fait avec les élèves des activités, parfois très intéressantes, ils exposent alors souvent un cours sans faire le lien, ou presque, avec ces mêmes activités.
[3] Notre objectif est donc différent du travail effectué à l'IREM de Poitiers où ont été élaboré des *Fichiers méthodes* et des *Répertoires Connaissances* qui sont destinés à être distribués aux élèves.

Ainsi ce travail a deux objectifs :

1/ soigner l'**articulation** activités / cours.

2/ **associer les élèves** à l'élaboration du cours (plus dans sa forme que dans le fond, celui-ci étant déterminé par le programme).

Signalons que le fait d'associer les élèves à l'élaboration de leur cours apparaît rarement dans les articles qui parlent d'institutionnalisation (voir la définition d'institutionnalisation au paragraphe suivant). Au contraire cette phase semble souvent celle où l'enseignant reprend les choses en main : "*L'enseignant, en dehors des phases d'institutionnalisation, est seulement un animateur de la situation*" [1] [4], "*...l'enseignant ne sait pas exactement à l'avance dans quelle direction les élèves vont aller, et l'institutionnalisation* ***qu'il va proposer*** (c'est nous qui soulignons) *ensuite dépend partiellement du déroulement qui est effectivement variable.*" [2]. Signalons aussi que cette phase semble avoir été assez peu étudiée : "*La phase d'institutionnalisation est souvent présentée comme le point final du processus. Il s'agit pourtant d'un véritable continent à explorer.*" [3]

2/ Dans quel cadre théorique nous plaçons-nous ?

Le lien entre l'énoncé des résultats mathématiques (l'institutionnalisation) et la recherche antérieure de l'élève a depuis longtemps été souligné par Guy Brousseau qui indique qu'une situation didactique comporte plusieurs phases :

- une phase d'**action**, où le problème appelle une recherche de l'élève (recherche "ouverte", il ne s'agit pas pour l'élève de suivre un "chemin balisé"),
- une phase de **formulation**, où l'élève met en oeuvre des langages, qui peuvent être écrits (il rédige) ou oraux (il explique à un camarade),
- une phase de **validation**, où doivent apparaître des preuves, il s'agit d'approuver ou de rejeter les formulations précédentes,
- une phase d'**institutionnalisation**, où le savoir a une fonction de référence culturelle et doit être décontextualisé (il s'agit de généraliser) par rapport à l'activité.

L'activité donnée aux élèves doit avoir un but annoncé aux élèves, comme le signale Claire Margolinas : *"Tout le travail qui est fait sur la construction de situations didactiques témoigne de l'importance accordée à la notion de finalité. Je renvoie ici aux caractéristiques des situations d'action, de formulation, de validation, et d'institutionnalisation fondées principalement sur leur finalité."* [4]

Cet objectif est un objectif mathématique. Cela semble une évidence, mais n'oublions pas qu'en collège de nombreuses activités ont un côté "ludique" et se situent dans un cadre "concret" qui peut facilement cacher l'enjeu mathématique. Lorsqu'on veut introduire le régionnement du plan par la médiatrice, il est classique de faire chercher aux élèves un objet, un trésor ... (il est plus prés de ... que de ...). L'élève s'intéresse-t-il à la médiatrice ou au trésor ?

---

[4] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie située à la fin de l'article.

Ce problème est signalé par Claire Margolinas [4]:
"La théorie des situations ne prend en compte que ce que j'appelle le sujet mathématique. La théorie ne considère l'élève que dans la mesure où celui-ci rentre en interaction avec le milieu mathématique, ce qui amène une question : comment peut-on conduire l'élève à considérer un milieu quel qu'il soit, et surtout s'il s'agit d'un milieu matériel, comme un milieu mathématique ?"
Les objectifs d'une nouvelle leçon seront annoncés aux élèves, en effet comme le signale R. Bkouche :
"Les activités de l'élève, pour qu'elles prennent sens par rapport à un savoir, doivent se situer dans une problématique ... dont le maître doit savoir définir le niveau de transparence et dire aux élèves de quoi il s'agit. Il ne s'agit pas d'attendre que l'élève découvre à la fois la problématique et les éléments pour répondre aux problèmes qu'elle pose."[5]
Le professeur à partir du programme, définit donc une liste d'objectifs. Cette liste est lue aux élèves et affichée dans la salle de classe, en général dès la première activité.
Pendant l'année scolaire 95 / 96 nous avons essayé ce type de travail avec nos classes (niveau cinquième et quatrième).
Les consignes données aux élèves étaient de la forme suivante :
"Cette année vous allez, pour certaines leçons, participer à la préparation de la feuille de cours qui va reprendre les résultats essentiels que nous avons découverts ensemble pendant les activités. Cette feuille doit être faite en tenant compte des objectifs du programme qui figurent sur la liste affichée dans la salle de classe."

Concrètement le cahier de cours de nos classes n'est pas un cahier ou un classeur avec des feuilles en papier mais un porte-documents avec des poches plastiques transparentes dans lesquelles les élèves glissent les feuilles de cours. Ces feuilles de cours sont complétées par un sommaire et un index distribués aux élèves par le professeur.

Nous allons maintenant évoquer quelques scénarios que nous avons utilisés.

3/ Quelques scénarios :

S1. Cours préparé avec l'ensemble de la classe, chaque élève écrit son cours.

Le thème était "Angles et démonstration" en quatrième.
Une gestion très simple:
Après des exercices de démonstration, occasion de rappels, on se propose de faire un bilan.
En classe entière, on fait l'inventaire des mots-clé, et on discute d'un plan. On propose des mises en pages.
Puis chaque élève réalise un cours à la maison, en deux pages au plus. Ces deux pages sont ramassées. Je les lis et je propose au crayon des modifications à chacun, si cela me semble nécessaire. A chaque élève ensuite de tenir compte de ces propositions, je ne vérifie plus.

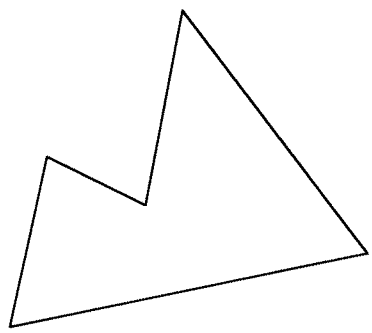
L'avantage de ce scénario est qu'il est d'une grande simplicité. L'inconvénient est qu'il laisse une part assez faible au débat entre élèves, clé de voûte de la gestion constructiviste.
Pour tenter de pallier cet inconvénient, on pourrait, lors de la "correction ", sélectionner des feuilles "intéressantes " (pour leurs qualités ou leurs erreurs) et les proposer à la discussion. Cela serait peut-être lourd ? En tout cas, je ne l'ai pas fait.

S2. Toute la classe participe, en groupes , à la rédaction du cours. Tous les élèves reçoivent le même cours.

Nous étions en 5ème, il s'agissait de la leçon sur les aires.

Objectifs :
Comparaison de l'aire d'un triangle quelconque et d'un rectangle l'encadrant. Relier l'aire d'un parallélogramme avec celle d'un triangle et d'un rectangle.
L'usage des formules n'est pas prioritaire dans les premières séances.
Etablir la formule donnant la formule de l'aire d'un triangle en montrant que l'on peut prendre n'importe lequel des trois côtés.
Etablir la formule donnant l'aire d'un parallélogramme en montrant que l'on peut prendre n'importe lequel des côtés et la hauteur correspondante.
Décomposer un polygone en triangles et calculer son aire après avoir pris les mesures nécessaires.

Nous avons conclu les activités par les deux formules :
Parallélogramme : $A = c \times h$ Triangle : $A = \dfrac{c \times h}{2}$
Il y a donc eu une première institutionnalisation dans le cahier d'exercices.
Les élèves ont eu ensuite à calculer l'aire de différents triangles et de différents parallélogrammes en choisissant toutes les bases possibles.
Puis on demandait de chercher l'aire d'une figure "complexe" comparable à l'exemple ci-contre. Ce travail n'a pas posé de problèmes particuliers.



<u>Préparation du cours :</u>

Pour faire le cours, les élèves étaient divisés en trois groupes. L'un devait rédiger le cours sur le triangle, un autre sur le parallélogramme et le troisième sur les figures

"complexes" (que l'on doit décomposer en figures dont on sait calculer l'aire : triangles, parallélogrammes ...).
Chaque groupe étant partagé en deux groupes : deux groupes indépendants travaillaient sur le triangle, deux sur les parallélogrammes, deux sur les figures complexes.
A l'issue du travail de groupe, les deux groupes sur le triangle ont successivement présenté leur travail rédigé sur des affiches. Un débat de classe a suivi afin de choisir et d'améliorer le travail fait. Deux élèves choisis par le professeur ont été chargés de la rédaction de la partie définitive du cours sur le triangle à partir des deux affiches et des remarques de la classe. La même gestion a été adoptée pour les deux autres parties du cours. Les feuilles ont été ensuite photocopiées et distribuées à tous les élèves.
Examinons, à titre d'exemple, le travail sur les triangles.
Sur le document écrit et affiché préalablement dans la classe par le professeur figuraient deux objectifs concernant le triangle :

- *On me donne un triangle. Je mesure ce qu'il faut. Je calcule son aire.*
- *On me donne un triangle et on m'impose un côté comme base. Je mesure ce qu'il faut. Je calcule l'aire.*

Le document définitif produit par les élèves, après le débat de classe, est le suivant (il était manuscrit).
Remarquons que les élèves en élaborant le document le font en "se laissant" du travail car après avoir reçu ce document photocopié ils doivent le compléter en calculant l'aire des trois triangles, encadrer la formule ... (ils imitent en cela ce que l'enseignant avait fait pour les premières feuilles de cours de l'année qu'ils devaient compléter). Nous estimons que les triangles ont été bien choisis par les élèves car pour calculer les aires on doit tracer des hauteurs dans les trois cas possibles.

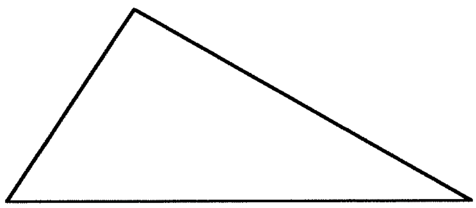
AIRES

Texte des élèves d'élèves:

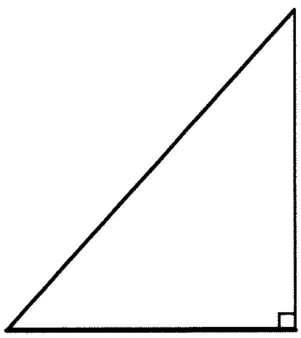
***Aire d'un triangle** :*

Comment calculer l'aire d'un triangle où les hauteurs sont choisies [par l'élève].

Calculs :

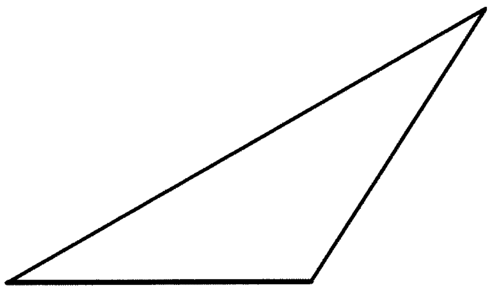


Comment calculer l'aire d'un triangle où un côté est imposé.



côté imposé

calculs :

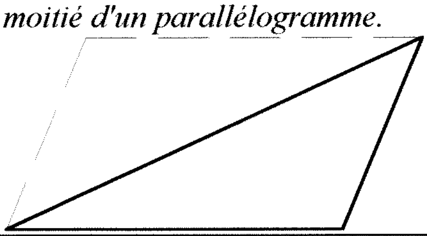


côté imposé

calculs :

Lorsque l'on veut tracer une hauteur mais où la base imposée est trop courte (comme dans l'exemple ci-dessus), on doit la rallonger.

Pour calculer l'aire d'un triangle on fait $\frac{\text{côté} \times \text{hauteur}}{2}$ *car le triangle est la moitié d'un parallélogramme.*



S3. Un échec concluant.

Dans une autre classe, une trop grande part d'initiative a été laissée aux élèves , à propos de cette même leçon sur l'aire du parallélogramme.
A la suite d'une série d'activités du type "puzzle sur un quadrillage ",

- on avait obtenu oralement la formule "base × hauteur",
- on avait pu rectifier plusieurs fois l'erreur classique "côté × côté ".

Mais, volontairement, j'avais évité d'écrire la définition de la hauteur et la formule.
Après une séance consacrée à l'invention d'exemples "difficiles" à proposer au voisin, on est passé à la réalisation de la feuille de cours.
Il y avait une demi-classe, composée d'élèves faibles seulement. Les élèves étaient repartis en trois groupes de quatre élèves chacun. Au bout de 30 minutes, un élève de chaque groupe devait présenter le cours obtenu sous forme d'une affiche.
Finalement , chacun des trois groupes présente plusieurs exemples, sans dire les mots base ou hauteur, et sans énoncer de formule. Pire, dans un exemple, un groupe utilise à tort la formule "côté × côté ", et aucun des élèves présents ne relève l'erreur, malgré une forte incitation de ma part!
Constat d'échec, qui nous semble appeler deux remarques:
La raison de cet échec semble claire : l'activité n'avait pas été conclue formellement ; autrement dit, chaque discussion avait été tranchée par recours au puzzle. Donc la règle, pourtant exprimée plusieurs fois, n'avait pas eu l'occasion d'intervenir comme l'instrument mathématique de validation.
Il est probable que le résultat apparent aurait été satisfaisant si certains groupes avaient comporté au moins un élève de niveau correct. Mais, dans ce cas, les difficultés n'auraient-elles pas été masquées plutôt que résolues, comme dans un cours magistral ?

S4. Groupe pilote : un seul groupe d'élèves prépare le cours. Tous les élèves reçoivent le même cours.

Pour plusieurs leçons, nous n'avons pas demandé à toute la classe de participer à l'élaboration de leur cours, mais seulement à un groupe : il rédigeait ce cours (au fond de la salle de classe ou au CDI) pendant que les autres élèves cherchaient des exercices d'application.
Après présentation du cours à l'ensemble de la classe (sous forme d'affiche ou de transparent), ce groupe pilote, en fonction des remarques de leurs camarades, rédige ensuite la version qui sera photocopiée et distribuée à tous les élèves.
Ce groupe, qui doit être hétérogène[5], est composé par le professeur qui fera appel à un autre groupe pour une autre leçon faite suivant le même scénario.
La gestion de ce scénario est très simple mais l'implication des élèves est parfois moins grande que dans le scénario précédent.

---

[5] Le cours devra être celui de l'ensemble de la classe; aussi nous semble-t-il nécessaire que le groupe pilote reflète la diversité de celle-ci.

S5. Deux groupes préparent le cours puis le présentent à la classe. Chaque élève écrit ensuite son cours.

Leçon: “ La propriété directe de Pythagore ” , en quatrième.
Les activités d'introduction ont été conclues de façon formelle par la relation de Pythagore. L’élaboration de la feuille de cours consistera seulement à réécrire “librement ” la conclusion en précisant les conditions, et à chercher des exemples “intéressants ”.
Avant la mise en forme du cours, une séance d’exercices.
Je propose deux exercices “ bateaux ”, avec recherche de l'hypoténuse. On les résout.
Je pose les questions:
- qu’y a-t-il de commun à ces exercices ?
- peut-on en poser de plus difficiles ?

Plusieurs élèves trouvent l’idée de donner l’hypoténuse et de demander le calcul d’un autre côté. On résout un exemple.
Huit élèves consacrent une heure à élaborer sur deux affiches une feuille de cours.
Ils sont répartis en deux groupes homogènes sans élèves faibles (cf. bilan critique, les groupes ci-dessous), qui vont travailler au CDI, pendant que les autres feront une séance type SOS, entre autres à propos d’exercices simples sur Pythagore.
Ces deux groupes disposent de papier “ affiches ”, de feutres, mais pas de livres.
La consigne est de “ préparer une feuille du cahier de cours sur la propriété de Pythagore, sans oublier des exemples ”. Au bout d’une heure, les deux groupes reviennent dans la salle de classe, puis exposent leurs affiches (voir ci-dessous). Personne en particulier n’est chargé de les commenter: La discussion sera collective.
La discussion.
La classe s’amuse un peu à considérer qu’il s’agit d’une élection. Le débat s’oriente rapidement autour de deux axes intéressants:
•fallait-il définir l’hypoténuse de manière générale, ou en parler à propos d’un exemple?
•valait-il mieux énoncer Pythagore par une phrase, ou se contenter de l’énoncer avec des lettres, à propos d’une figure particulière ?
Les arguments fournis ne peuvent pas être clairs et ne le sont pas !
Mais la question est posée.
La balance penche finalement en faveur de formulations générales. La présence du professeur y est-elle pour quelque chose ? Probablement ...
L’élaboration de la feuille de cours. Elle se fait individuellement, à la maison, en tenant compte des projets présentés par les deux groupes, et de la discussion qui a suivi. Le professeur vérifie le cours de chacun et le rectifie éventuellement.
Bilan critique.

Les groupes.

Pourquoi avoir choisi pour l’élaboration des affiches des groupes homogènes sans élèves faibles ? S’il nous semble important de sensibiliser tous les élèves à des problèmes de synthèse, de formulation, de formulation générale d’un outil ..., il est

difficile, voire impossible à des élèves faibles de réaliser complètement un tel travail. Par contre, il nous semble intéressant de permettre à tous de participer à une discussion sur ces questions.[6]
De manière plus prosaïque, le niveau de 4$^{\text{ème}}$ ne bénéficie pas de cours type SOS ou ATP. Il m'a semblé que c'était une bonne occasion d'en faire un !
La gestion de la classe est facile : le travail en groupes ne risque pas de perturber le reste de la classe, et le CDI est prévu pour accueillir des groupes fonctionnant ainsi. La discussion en finale en classe entière est habituelle, et le professeur la supervise facilement.

Points positifs :

- Débat intéressant sur :
  - la nécessité d'une définition pour l'hypoténuse,
  - la différence entre énoncé de la règle et simple exemple (dans l'affiche 1 les élèves n'ont pas vu la nécessité d'énoncer la propriété sous une forme générale comme cela a été fait dans l'affiche 2),
  - les deux types d'exercices (calcul de la longueur de l'hypoténuse ou d'un côté de l'angle droit)
- Rédaction individuelle, qui permet un contrôle par l'enseignant sur ce qui s'est passé pour chacun.
- La gestion constructiviste de ce cours ne m'a pas semblé plus coûteuse en temps qu'un cours magistral.

Point négatif :
Je me suis aperçu en corrigeant les feuilles que tous les élèves présentaient deux exemples, mais que 40% des élèves n'avaient pas compris la différence entre les deux types d'exercices et présentaient deux exemples comparables : il s'agissait chaque fois de calculer la longueur d'un côté de l'angle droit. Pour ceux-là, on a repris des exercices divers, et je leur ai demandé d'ajouter un exemple à leur feuille de cours. Cet "échec relatif" ne résulte certainement pas de la méthode constructiviste. Il est simplement mis en évidence par la rédaction individuelle des élèves, et donc peut être corrigé à posteriori.

[6] Ce point de vue est différent de celui exposé dans le scénario S3 par l'autre auteur de cet article.

Affiche 1: *PYTHAGORE.*

Texte des élèves:

La règle de Pythagore.

$AC^2 + AB^2 = CB^2$

$2^2 + 6^2 = CB^2$

$4 + 36 = CB^2$

$CB^2 = 40$ *donc* $CB = \sqrt{40}$

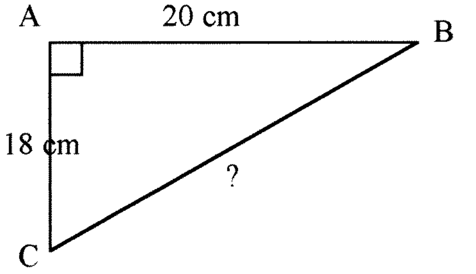
donc $CB = 6,3$ *unités.*

Hypoténuse

L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.

C'est le plus grand côté du triangle.

Exemple :



Le triangle ABC est rectangle en A. L'hypoténuse est [CB]. J'applique Pythagore.

$AC^2 + AB^2 = CB^2$

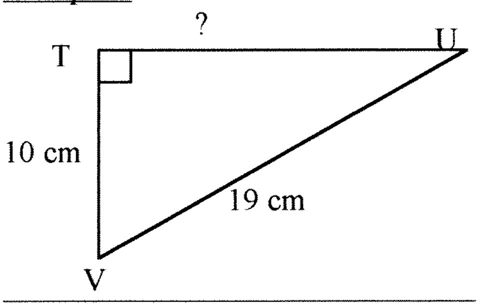
$8^2 + 20^2 = CB^2$

$64 + 400 = CB^2$

$CB^2 = 464$ *donc* $CB = \sqrt{464}$

donc $CB = 21,5$ *cm.*

Exemple :



Le triangle TUV est rectangle en T. L'hypoténuse est [VU]. J'applique Pythagore.

$TU^2 + TV^2 = VU^2$

$10^2 + TU^2 = 19^2$

$100 + TU^2 = 361$

$VU^2 - TV^2 = TU^2$

$361 - 100 = 261$

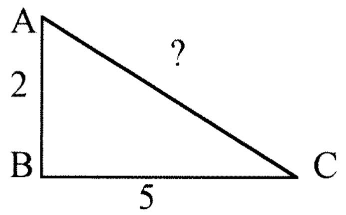
$TU = 261$ *donc* $TU = \sqrt{261}$

donc $TU = 16,2.$

Affiche2 : *THEOREME DE PYTHAGORE.*

Texte des élèves:

Exemple 1. On cherche l'hypoténuse.



Le triangle ABC est rectangle en B. L'hypoténuse est [AC]. On applique la règle de Pythagore.

$$AB^2 + CB^2 = AC^2$$
$$2^2 + 5^2 = AC^2$$
$$4 + 25 = AC^2$$
$$AC^2 = 29$$
$$AC = \sqrt{29}$$
$$AC = 5{,}4 \text{ unités.}$$

Exemple 2.

Le triangle DEF est rectangle en F. L'hypoténuse est [DE]. On applique la règle de Pythagore.

$$DF^2 + FE^2 = DE^2$$
$$DE^2 - FE^2 = DF^2$$
$$13^2 - 9^2 = DF^2$$
$$DF^2 = 169 - 81$$
$$DF = \sqrt{88}$$
$$DF = 9{,}4 \text{ unités}$$

Règle de Pythagore :
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Quelques remarques après une année d'expérimentation.

Ces quelques scénarios (bien sûr non exhaustifs) se différencient suivant deux critères :
- Le nombre d'élèves qui préparent le cours puis le présentent à la classe : un groupe, deux groupes, toute la classe ou personne (scénario S1). Remarquons que pour les activités des élèves qu'évoque cet article **il n'est pas du tout indispensable de faire travailler toute la classe en petits groupes**. Seul un scénario (le S2) utilise ce type de travail.

• Les élèves reçoivent le même cours ou chaque élève fait son propre cours.
Dans ce dernier cas, il est souhaitable que le professeur relise le cours de chaque élève, cela lui permet ainsi de contrôler ce que ce dernier a retenu et compris de la leçon et de lui signaler d'éventuelles erreurs !

Nous avons remarqué que le débat de classe était souvent plus riche quand il s'appuyait sur deux affiches ce qui permettait des comparaisons.

Une condition nous parait importante : les activités doivent être conclues, décontextualisées, explicitement et formellement dans le cahier d'activités, avant de commencer l'élaboration de la feuille de cours. Ceci est d'autant plus vrai pour les activités fortement contextualisée, avec un caractère ludique. Ceci nous paraît conditionner fortement la réussite de ce type de travail comme nous l'avons déjà signalé dans le paragraphe "un échec significatif". Il nous semble que l'enseignant ne doit pas hésiter à intervenir à ce moment là s'il veut moins avoir à le faire lors de l'élaboration du cours.

Reprenons l'exemple de la recherche d'un trésor pour introduire le régionnement du plan par la médiatrice. Supposons que l'activité se termine dans le cahier d'exercices par : "Le trésor se trouve ...". Si c'est ensuite le professeur qui fait le cours, il va bien sûr faire une leçon qui portera sur la médiatrice pas sur le trésor ! Mais l'articulation activité/cours risque d'être peu évidente pour les élèves ! Si ce sont les élèves qui préparent le cours, l'écart sera peut-être trop important entre l'activité qui, à leurs yeux, porte sur la recherche d'un trésor et un cours qui doit porter sur les médiatrices (comme le demande la liste des objectifs préparée par le professeur). Nous pourrions formuler cette remarque autrement : il s'agit dés la fin de l'activité d'amorcer la dialectique "outil-objet" par une conclusion du type "*Le trésor se trouve ..., nous l'avons trouvé grâce à la médiatrice qui partage le plan ...*"

Il est important de ne pas faire travailler trop longtemps les élèves sur le même cours, ils se lasseront assez vite. Il est également important de varier la forme de travail en utilisant les différents scénarios et en n'hésitant pas à faire parfois nous mêmes le cours.

Une question capitale est bien sûr le rôle de l'enseignant : doit-il intervenir lorsque les élèves élaborent le cours ? Quand estime-t-il que le cours proposé par les élèves est "acceptable" et qu'il peut délivrer le "bon à tirer" ?
Ce cours doit être celui de la classe mais le professeur en est bien sûr responsable !

• L'enseignant doit évidemment intervenir s'il y a écrit quelque chose de faux dans le cours pour le faire corriger. Signalons que cela ne nous est jamais arrivé lorsque les élèves reçoivent tous le même cours élaboré par des groupes puis amélioré dans un débat de classe : le groupe, puis la classe fonctionnent comme des "filtres" successifs qui corrigent les erreurs. Ce qui est plus fréquent c'est d'avoir des erreurs dans les cours élaborés individuellement comme nous l'avons signalé ci-dessus. Vaut-il mieux laisser apparaître ces erreurs pour les rectifier ensuite, ou les “filtrer ” à travers le débat de classe ? Celui-ci rectifie-t-il les “théorèmes-élèves faux”, ou les masque-t-il par le leadership des “forts ” ? C'est un débat que nous ne savons pas trancher ...

• Nous intervenons aussi si nous estimons qu'il manque des exemples intéressants. Si dans le cours sur l'aire des triangles il n'y avait pas eu de triangle nécessitant de tracer une hauteur extérieure à ce triangle, nous aurions demandé aux élèves d'en rajouter. Cela a été le cas pour certains élèves dans le cours sur la relation de Pythagore où il a fallu leur demander de rajouter un exemple où l'on devait calculer la longueur de l'hypoténuse.

• Si le professeur souhaite que les propriétés du cours aient un statut clair (démontrée, vérifiée, admise) il devra en général le rappeler aux élèves.

• Un autre cas est plus ambigu. Le vocabulaire des élèves est souvent différent du vocabulaire du professeur et c'est aussi un des objectifs de ce travail : les élèves auront un cours plus proche d'eux.[7] Mais notre rôle est aussi d'augmenter leur vocabulaire mathématique.
Prenons un exemple, le mot *consécutif* est étranger à la plupart des élèves de 6ème. Ils écriront peut-être dans leur cours *sommets voisins*. Dans ce cas, en leur disant que leur mot est très évocateur, nous leur expliquons qu'ils doivent connaître le mot usuel *consécutif* et dans leur cours nous leur proposons un compromis : nous leur demandons d'écrire *sommets consécutifs* suivi de *voisins* entre parenthèses.

• Les élèves, surtout dans les "petites classes" (6ème, 5ème), éprouvent rarement le besoin de formuler des propriétés, des définitions. Par exemple dans une leçon sur une symétrie ils illustreront la définition et les propriétés sur des dessins (souvent codés) mais en général, peut-être parce que c'est difficile pour eux, ils n'indiqueront pas en langage naturel comment construire l'image d'un point. Si le professeur souhaite que ce soit fait, il devra le demander aux élèves. De façon générale, quel que soit le niveau, au collège l'expression des élèves est souvent maladroite et l'enseignant doit s'attendre à avoir un travail de reformulation important à faire à ses élèves. De même, surtout dans les premières leçons faites par les élèves, l'enseignant devra aider les enfants à énoncer des définitions qui doivent comporter un avertisseur : *définition*, un indicateur : *on appelle* ... ou ... *signifie* ...

• Nous n'avons pas encore abordé une question essentielle (qui n'est d'ailleurs pas propre à ce type de travail) : Quand peut-on passer des activités au cours ?[8] *"Le professeur provoque au bon moment des synthèses au cours desquelles l'acquis est*

[7] C'est (entre autres) une raison pour laquelle nous n'incitons pas les élèves à s'inspirer du cours de leur livre

[8] Derrière cette question, apparaît une question plus générale : quel est le rôle du cahier de cours ?

dûment rangé dans les cahiers et la mémoire"[6]. Certes, mais comment déterminer *ce bon moment* ?
Nous n'avons pas de règle commune, et nous avons plutôt l'impression de fonctionner un peu à l'intuition.
Pour l'un d'entre nous le cours est élaboré après quelques heures d'activité (en gros entre 4 et 8 heures) et dans tous les cas avant un contrôle portant sur le thème étudié , ceci étant une sorte de contrat explicité aux élèves : un contrôle n'abordera une nouvelle notion que si celle-ci figure dans le cahier de cours. Pour le deuxième auteur, le délai peut être beaucoup plus long : jusqu'à six mois après le début des activités. Entre-temps, l'élève utilise comme outils les conclusions et formules encadrées en rouge dans le cahier d'activités (voir page 10). L'objectif n'est plus de faire le point "à chaud" avant un contrôle, mais plutôt de voir ce qui reste à plus long terme dans la mémoire des élèves, de vérifier si le temps leur a permis de faire un tri pour ne retenir que l'essentiel.[9]

Pour terminer ce paragraphe, ajoutons quelques remarques plus négatives.
Ce type de travail est souvent long, coûteux en énergie (c'est bien sûr variable suivant le scénario adopté).
Pour les élèves les plus faibles il peut y avoir "dilution" du cours en raison de cette longueur. Le cours fait par le professeur peut avoir plus d'impact.
Nous ne sommes pas sûrs de pouvoir faire ce type de travail avec toutes les classes : si l'on enseigne dans des classes faibles, peu motivées, on sait bien que ces élèves, souvent fragilisés, sont plus à l'aise dans un cours magistral suivi d'exercices d'application bien dirigés. Il nous est arrivé de renoncer à ce type de travail dans de telles classes.

Ces trois remarques nous incitent à ne pas toujours travailler de cette manière mais à ne pas hésiter à reprendre les choses en main (plus ou moins souvent suivant les classes et les leçons) pour la phase d'institutionnalisation. Il nous semble suffisant que les élèves élaborent ainsi quatre ou cinq leçons pendant l'année scolaire.

4/ Conclusion .

Cette façon de procéder nous parait plus cohérente avec la perspective constructiviste que le cours fait par l'enseignant. Il n'y a pas de rupture entre les activités et le cours. Comme dans celles-ci le cours "*favorise le développement des capacités de travail personnel de l'élève et de son aptitude à chercher, à communiquer et à justifier ses affirmations ...*" cela favorise "*un nouvel enrichissement ... en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.*" (B.O. N° 6, 30 Mars 1995).

[9] Au risque d'avoir des ennuis avec quelques parents d'élèves : "Comment voulez-vous que mon enfant révise avant le contrôle s'il n'a pas de cours ?".

On peut également penser que l'élève s'appropriera mieux un cours qu'il a plus ou moins élaboré, mais cela nous ne l'avons pas encore évalué.

Ce qui nous parait très important à souligner c'est que les élèves vont réfléchir et travailler sur des choses en général inédites pour eux et pourtant à nos yeux capitales :

- Comment résumer plusieurs heures de travail dans une synthèse la plus courte, la plus claire, la plus lisible possible ?

- Comment formuler une définition, une propriété, comment choisir les notations ?

- Quelle est, dans le cahier de cours, la place, le rôle des figures, des exemples ?

- Comment choisir puis résoudre de "bons" exemples ? Ceci nous semble très important, en effet cela peut aider l'élève à repérer les savoir-faire techniques nécessaires à l'utilisation des nouveaux résultats, ces savoir-faire sont souvent très différents de ce qui est mis en oeuvre dans les activités d'introduction ou dans les démonstrations.

- ...

Autrement dit les élèves ne travaillent pas seulement sur des connaissances, mais aussi sur des métaconnaissances.

Nous ne disons pas que tous arrivent à tout faire, loin de là. Mais tous seront sensibilisés à ces questions.

Références.

[1] R. Douady ; *De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle*. Cahier de didactique des mathématiques n°6 ; IREM Paris VII.

[2] A. Robert; *Une introduction à la* didactique des mathématiques. Cahier de didactique des mathématiques n° 50 ; IREM Paris VII.

[3] Joshua et Dupin; *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. P.U.F.

[4] Margolinas Claire; *Eléments pour l'analyse du rôle du maître*. RDM Vol 12 n°1. 1992.

[5] Bkouche Rudolf; *L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique*. Repères N°9.

[6] Nicolas Rouche; *L'archipel des isométries, essai de redécouverte*, Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve Belgique. 1982.

UNE TRANSFORMATION OUBLIEE QUI SORT DE L'ORDINAIRE L'INVERSION.

Gérard KUNTZ
(Irem de Strasbourg)

INTRODUCTION

Les différentes transformations ponctuelles qui sont proposées aux élèves tout au long du collège et du lycée possèdent des vertus rares (et précieuses) dans la grande famille des transformations ponctuelles : elles CONSERVENT les formes, les angles géométriques ou orientés, l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les barycentres, le contact. L'élève qui subit l'énumération, puis la démonstration répétitive de ces propriétés, finit par se dire qu'elles sont la règle. Cette erreur de perspective explique l'ennui, perceptible en Première et Terminale, face à des démonstrations de théorèmes considérés comme "évidents" par accumulation. Rien de tel, pour réveiller l'intérêt, que de proposer aux élèves une transformation ponctuelle qui ne soit pas systématiquement conservatrice, par exemple l'inversion. Elle fut longtemps enseignée en Terminale, avant l'émergence de l'outil informatique, puis injustement oubliée. Elle peut être étudiée, grâce à l'informatique, dès la Seconde. On se contente, à ce niveau, d'observer, de décrire et d'établir quelques propriétés liées à sa définition. En Première, la démarche théorique peut partiellement expliquer et justifier certaines images informatiques étonnantes. En Terminale, l'inversion est un excellent sujet de travaux dirigés, en relation avec les nombres complexes par exemple (1).

Le texte qui suit a été proposé à une classe de Première S du lycée Couffignal à Strasbourg qui bénéficie d'un enseignement d'informatique appliquée aux mathématiques (2). L'article relate les temps forts de l'activité, les commente, évalue sa pertinence et en propose des prolongements.

UNE TRANSFORMATION ORIGINALE : L'INVERSION (3)

O est un point fixe donné du plan, k est un réel donné non nul, (O,i,j) est un repère orthonormé.
I(O,k) est la fonction du plan dans lui-même, définie ainsi :
au point M du plan, I(O,k) associe le point M' tel que :
a) O, M, M' soient alignés.
b) $\overline{OM} \times \overline{OM'}=k$ (4).

© L'OUVERT **86** (1997)

1) Montrez que les conditions a) et b) sont équivalentes à $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}=k$.
2) Quel est l'ensemble de définition de I(O,k)? Y a-t-il des points invariants? Précisez-les.
3) Pour toute la suite, on prendra k=2.

a) A partir de la définition de I(O,2), comment évolue M' quand M s'approche de O? Quand M tend vers 0? Quand M s'éloigne de O? Où se trouve M' quand M est très loin de 0?

b) Soient (x,y) les coordonnées de M, (x',y') celles de M'.

Calculez x' et y' en fonction de x et y.
4) Sous Graph'x, tracez une droite D ne passant pas par O. Tracez l'image de D par I(O,2). Conjecture ?
Que se passerait-il si D contenait O ?
5) Tracez un cercle ne contenant pas O. Quelle est son image par I(O,2) ?
6) Tracez un cercle passant par O. Quelle est son image par I(O,2) ?
7) Quelle est l'image de la parabole d'équation $y=x^2 -0.5$
8) Appliquez I(O,2) à des courbes qui vous paraissent intéressantes dans ce contexte (expliquez pourquoi).

Quelques précisions techniques en début de séance

Le logiciel Graph'x possède une qualité rare : il permet de transformer une courbe C_1 définie pas son équation, en une courbe C_2 par simple introduction des formules mathématiques de la transformation. Si T transforme M(x,y) en M'(x',y') tel que x'=f(x,y) ; y'=g(x,y), il suffit d'écrire l'équation paramétrique de C2 sous Graph'x : $x(t)=f(x_1,y_1)$; $y(t)=g(x_1,y_1)$. Le logiciel interprète x_1 et y_1 comme coordonnées du point courant de la courbe 1 (C_1) : il trace donc point par point la courbe 2, image de C_1 par T (le tracé point à point doit être demandé au logiciel : il est pédagogiquement très important, comme nous le verrons plus loin).(5)

Quelques exemples présentés à la classe entière grâce à la tablette de rétroprojection suffisent pour que le principe de l'activité soit compris. Il faut encore préciser que la courbe initiale peut être introduite en machine indifféremment sous forme cartésienne ou paramétrique. Un rappel sur l'équation paramétrique du cercle n'est pas inutile... Le tout prend environ dix minutes en début de séance.

Une analyse a priori de l'activité

Elle est prévue pour deux séances de deux heures. Elle donnera lieu à un compte-rendu écrit. Elle débutera par une partie théorique, sans laquelle l'activité informatique est impossible (établissement des formules de l'inversion). Elle nécessite une approche géométrique subtile ou la résolution d'un système d'équation avec deux paramètres, ce qui rendra sans doute une aide orale nécessaire.

L'observation préalable du déplacement relatif de M et de son image M', est un moment capital pour comprendre la transformation. Les points proches de O ont une image lointaine et les points lointains une image voisine de 0. Cette observation permet d'interpréter les images informatiques obtenues.

La partie informatique ne présente pas de difficultés importantes. Mais une observation attentive des images calculées peut conduire à d'intéressants prolongements théoriques (non conservation des longueurs, caractère bijectif de la transformation, involutivité, bijection entre tout segment]OA] et une demi-droite etc). Il n'est pas question d'imposer ces notions aux élèves, mais de prolonger les remarques intéressantes qui ne manquent jamais en environnement informatique.

La dernière question met en valeur la fertile imagination ludique des élèves pour les amener à créer des images en totale rupture avec les courbes sages, accessibles à leurs moyens théoriques. La notion de transformation prend alors tout son sens (on modifie vraiment les formes !).

LES TEMPS FORTS DE L'ACTIVITE (OBSERVATION ET THEORIE).

a) Les préliminaires théoriques

Le domaine de définition de la transformation est déterminé sans difficulté. Si k est positif, les points invariants sont définis par $OM^2 = k$ donc par $OM= \sqrt{k}$. Mais une difficulté demeure pour interpréter cette relation. Plusieurs élèves parlent d'un ou deux points invariants : ils imaginent en effet M sur une droite (O, M et M' sont alignés sur ... (OM)) dont ils ne voient pas le caractère essentiellement variable... Certains vérifient le résultat qui les surprend en transformant le cercle finalement mis en évidence dans l'exemple proposé, $C(O,\sqrt{2})$. Aucun des élèves ne songe à écrire $\overrightarrow{OM'}=\alpha\overrightarrow{OM}$, puis $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=k$. (On en déduit la valeur de α, $k/x^2 + y^2$ et les formules de l'inversion).

La résolution du système est faite par substitution, sans précaution aucune à propos des dénominateurs (en fonction de la démarche choisie, x ou y figure au dénominateur). Il faut un bon moment d'échanges avec la classe pour mettre en évidence le fait que x et y

ne peuvent être simultanément nuls (traduire ainsi l'impossibilité pour M d'être en O ne va pas de soi). Si donc une des substitutions n'est pas possible, l'autre l'est nécessairement, et le dénominateur x^2+y^2 n'est pas nul. La partie informatique de l'activité peut commencer.

b) Analyse et interprétation d'images informatiques

Les élèves ne cachent pas leur surprise en découvrant à l'écran qu'une droite ne contenant pas O se transforme en cercle. Un élève surpris est disponible pour observer, réfléchir et comprendre.

Le temps et l'image

Une nette dissymétrie entre le tracé de la droite initiale et du cercle est immédiatement perceptible. La vitesse du tracé de la droite est constante, celle du cercle varie très fortement en fonction de la distance du point par rapport à O. Plus précisément le tracé qui commence en O (ou au voisinage) est quasi stationnaire. On s'éloigne très lentement de O, puis de plus en plus vite, pour y revenir au ralenti et s'y arrêter à nouveau longuement (M se déplace toujours dans le même sens sur le cercle). Cela se traduit, quand le cercle est achevé, par un tracé dont la surbrillance décroit en s'éloignant de O et qui se prolonge par des points isolés (Figure 1). Sur certains écrans, le point image stagne de longues secondes en O, à tel point que les élèves pensent que "rien ne se passe, ça ne marche pas"! Dans d'autres cas, la stagnation est plus brève, mais ces élèves observent alors que le cercle "ne se ferme pas tout à fait".

On retrouve ainsi un aspect cinématique des transformations que la réduction ensembliste avait fait oublier : elles transforment non seulement des courbes, mais aussi des MOUVEMENTS. L'informatique prolonge ici le rôle des systèmes articulés qui furent historiquement des "machines à transformer".

Etre ou ne pas être sur le cercle

Un zoom sur le cercle autour de O fait apparaître dans tous les cas l'absence, dans l'image, d'un arc contenant O (figure 2). Ce zoom prend un temps considérable (de très longues secondes) dans le cas où le cercle image de l'écran paraissait fermé en O. Sans grande difficulté, les élèves conviennent que O ne peut appartenir à l'image. L'explication immédiate : "O n'a pas d'image" est améliorée : "Pour que l'image soit en O, il faudrait que M soit à l'infini". De manière plus convaincante : "Si OM' est nul, $\overline{OM} \times \overline{OM'}$ ne peut valoir 2".

Il reste à comprendre l'absence (à géométrie variable) d'un arc tout entier, de milieu O. Pour cela, il faut se rappeler comment le logiciel traite et transforme les objets géométriques qui lui sont confiés (une activité antérieure a été consacrée à ce sujet essentiel).

Les points qui manquent, proches de O, sont les images de points qui en sont très éloignés. D'où vient leur défection? Il faut revenir à la notion de droite dans Graph'x : c'est une équation et un intervalle [a,b] de décimaux, c'est à dire .... un segment! On comprend alors l'absence de points "très éloignés" ainsi que leurs images : le "trou" constaté chez certains n'est pas une fiction. Mais pourquoi le cercle paraissait-il fermé chez d'autres? Tout dépend de l'équation de la droite et de l'intervalle introduits en machine par les différents binômes.

Comment fermer le cercle à l'écran ?

L'écran graphique utilisé, de 26 centimètres sur 18, comporte 640 pixels horizontalement et 480 pixels verticalement. Chaque pixel correspond donc, dans la configuration adoptée, à environ 0.04 centimètres. Si donc OM' est inférieur à 0,04 millimètres, M' et O sont confondus sur l'écran. Tous les points M, tels que OM soit supérieur à 50 centimètres, ont une image confondue avec O (les images calculées ne se limitent pas aux images des points de l'écran). Il est donc aisé de fermer le cercle : il suffit de choisir un intervalle assez grand. On comprend aussi l'extrême lenteur du tracé au voisinage de O, où peuvent se superposer un très grand nombre de points. Le temps de calcul devient alors perceptible, malgré la célérité du micro-processeur. La brèche réapparaît en zoomant sur O, c'est-à-dire en changeant les unités.

Des bavures hautement pédagogiques

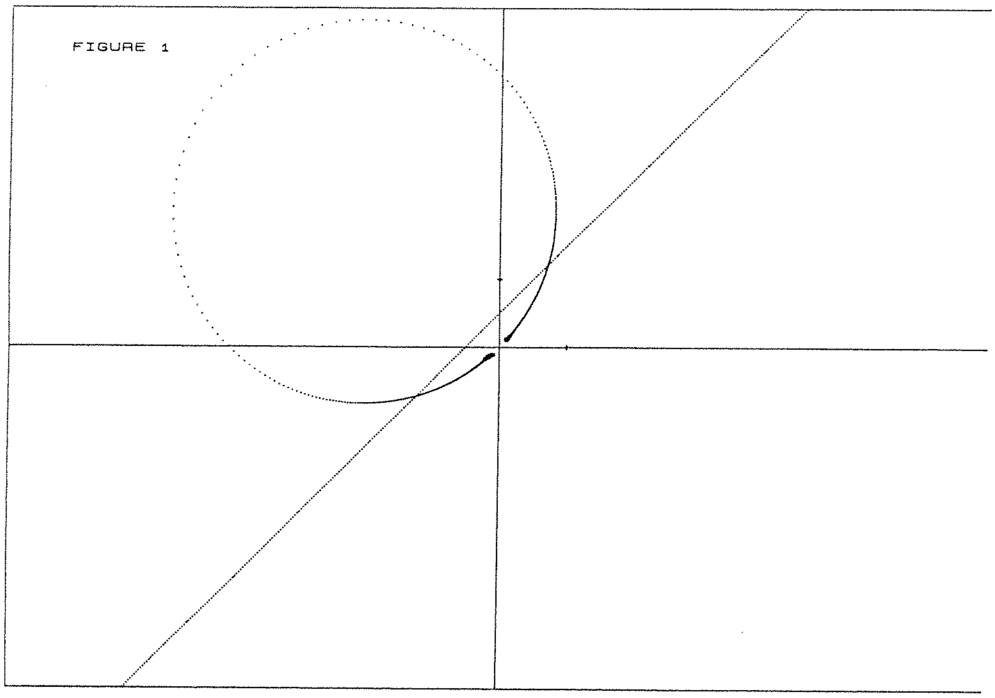
Le passage sur table traçante éclaire encore plus l'intéressant processus de réalisation de l'image. Il est pratiquement impossible de tracer point à point sur cet instrument les cercles qui apparaissent fermés à l'écran : le stylet frappe interminablement le point O et génère de grosses bavures d'encre (le nombre de points calculés est égal au nombre d'allers-retours du stylet : il faut bien plus de temps pour baisser et lever le stylet que pour allumer un pixel. Le temps de la mécanique est fortement dilaté par rapport à celui de l'électronique. En réduisant l'intervalle, le phénomène s'atténue, mais l'accumulation de points dans le voisinage de O demeure sensible : les bavures, bien qu'inesthétiques en sont un témoignage précieux (figures 1 et 2). L'inégale densité des tracés, qui tire son origine des imperfections techniques, témoigne d'une inégale répartition de points sur le cercle, qu'il convient d'expliquer.

Du segment géométrique au segment informatique

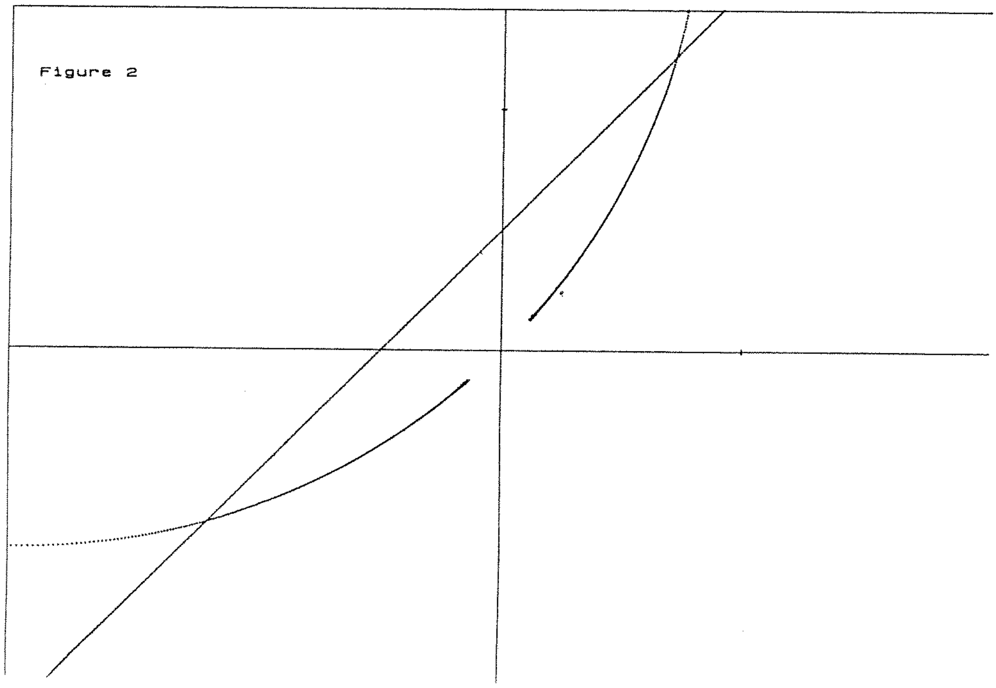
Affinons un peu plus la conception de segment sous Graph'x. A l'équation et à l'intervalle de décimaux, il faut ajouter une notion essentielle : le pas du partage (accessible à l'utilisateur sous Graph'x). Le segment initial est divisé en n segments égaux, dont la longueur commune est le pas. Finalement, du point de vue informatique, le segment est réduit à la suite des coordonnées (décimales) des n+1 points obtenus en partageant le segment initial. (Sur la figure 1, on distingue parfaitement l'égale répartition des points sur le segment, qui se prolonge d'ailleurs en dehors de la feuille).

On peut maintenant faire comprendre aux élèves l'allure étrange donnée au cercle par la table traçante. Partant de la relation $\overline{OM'}=2/\overline{OM}$, on remarque que si un point M du segment est éloigné de O, le passage au suivant modifie peu la longueur de [OM], donc celle de [OM'] (M' est alors voisin de O): d'où l'accumulation de points autour de O. De plus, si M et P sont deux points consécutifs du segment, éloignés de O, l'angle $\widehat{MOP}$ est voisin de 0. Cet angle croît à mesure que M s'approche de O et devient maximal au

INVERSE D'UNE DROITE NE PASSANT PAS PAR O



Zoom sur figure 1.



voisinage de la projection de O sur le segment. Alors, même si OM' et OP' sont des longueurs voisines, M et P seront nettement séparés, comme le prouve la figure 1 (on peut tracer OM et OP et mettre en évidence M' et P'). **La perte de densité observée quand on s'éloigne de O est autant liée à des phénomènes angulaires qu'à des considérations métriques.**

Des distances élastiques

Le raisonnement qui précède repose sur une observation capitale : le segment et le cercle sont tracés (à l'écran et sur table traçante) en suivant un des deux sens possibles sur chacune des deux figures (pas de retour en arrière). Deux points consécutifs du segment sont donc transformés en deux points consécutifs du cercle. Il est alors clair que l'inversion ne conserve pas les distances. En effet, les distances de deux points consécutifs du cercle varient comme le montre à l'évidence la figure 1.

De plus, le **segment [MP]** formé par deux points consécutifs de la droite initiale a pour image l'**arc $\overset{\frown}{M'P'}$**. Dans ce qui précède, on compare MP et M'P' et non pas la longueur de [MP] et de son image ! De quoi déconcerter des élèves habitués à des transformations moins inventives.

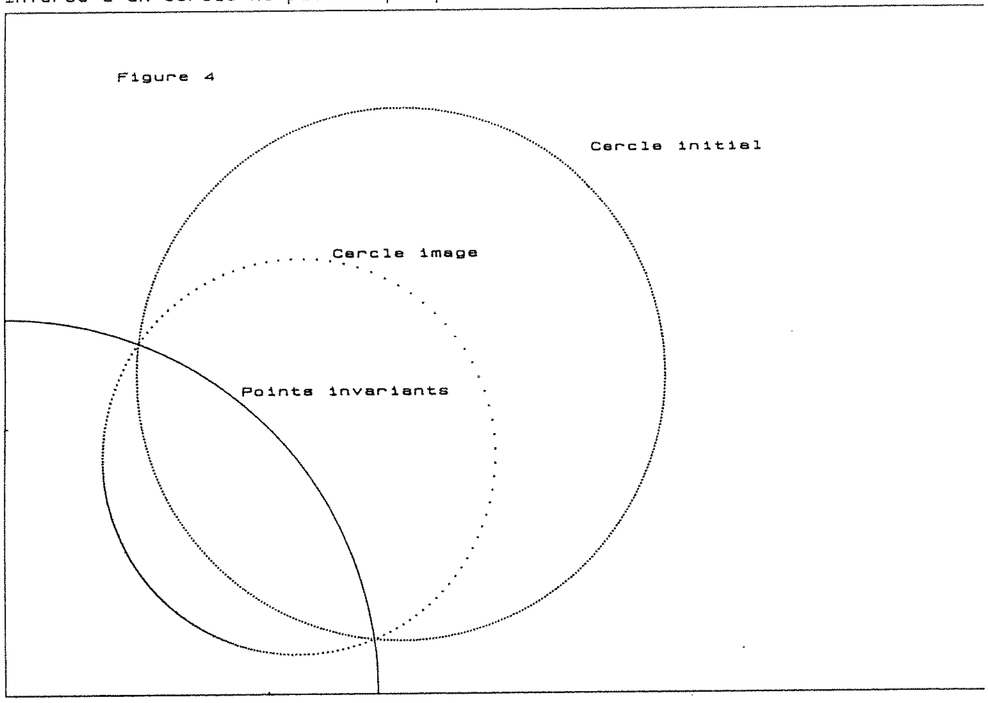
Technique et pédagogie ont partie liée

Certains choix techniques dans l'usage d'un logiciel peuvent avoir des conséquences pédagogiques désastreuses. Pour preuve, la figure 3, réalisée en modifiant dans Graph'x un seul paramètre, la nature du tracé : plus de bavures, une variation de la densité du tracé à peine perceptible. **Le tracé en continu** gagne en esthétique (on pourrait même refermer la brèche autour de O) Mais on a perdu les informations capitales traitées précédemment. Il est illusoire d'opposer les expertises technique et pédagogique : elles sont indissociables.

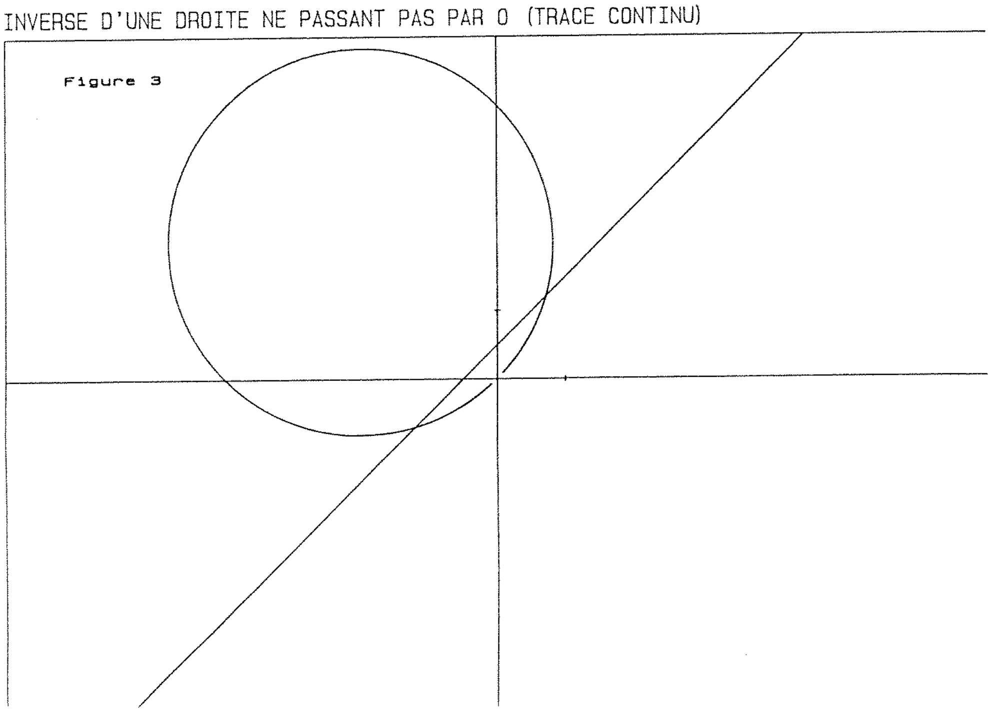
Si on bougeait la droite ?

Spontanément, certains élèves déplacent la droite à l'écran : le cercle grandit si on la rapproche de O (et devient tout petit si on s'en éloigne). L'idée de limite ayant fait son chemin, la formulation suivante apparaît "le rayon du cercle tend vers l'infini quand la distance de O à la droite tend vers 0". Anticipant la question suivante, certains élèves constatent que si la droite passe par O, "l'image est la droite elle-même". Ils supputent : "c'est un cercle de rayon infini". La manière dont l'image s'élabore à l'écran conforte leur audace. Comme précédemment sur le cercle, le point image stagne près de O, s'éloigne lentement, puis de plus en plus vite sur une des demi-droites d'origine O, réapparaît sur l'autre demi-droite et se dirige vers O d'un pas de sénateur.

Inverse d'un cercle ne passant pas par O.



INVERSE D'UNE DROITE NE PASSANT PAS PAR O (TRACE CONTINU)



Le lien intuitif que ces élèves établissent entre droite et cercle est rendu possible par la transformation progressive de l'une en l'autre que permet l'informatique. La théorie donnera plus tard un contenu à cette perception intuitive. En attendant, il faut affiner certaines des formulations précédentes et traiter de façon théorique (sur le papier) l'image d'une droite passant par O (et privée de O). On comprend alors la façon dont l'image est construite à l'écran.

Réflexions complémentaires à propos des autres images

Toutes les questions délicates et intéressantes ont été abordées dans ce premier exemple, qu'elles soit théoriques ou liées à l'interprétation des images. Nous nous contenterons donc de résumer les remarques essentielles des élèves, dans la suite de ce travail.

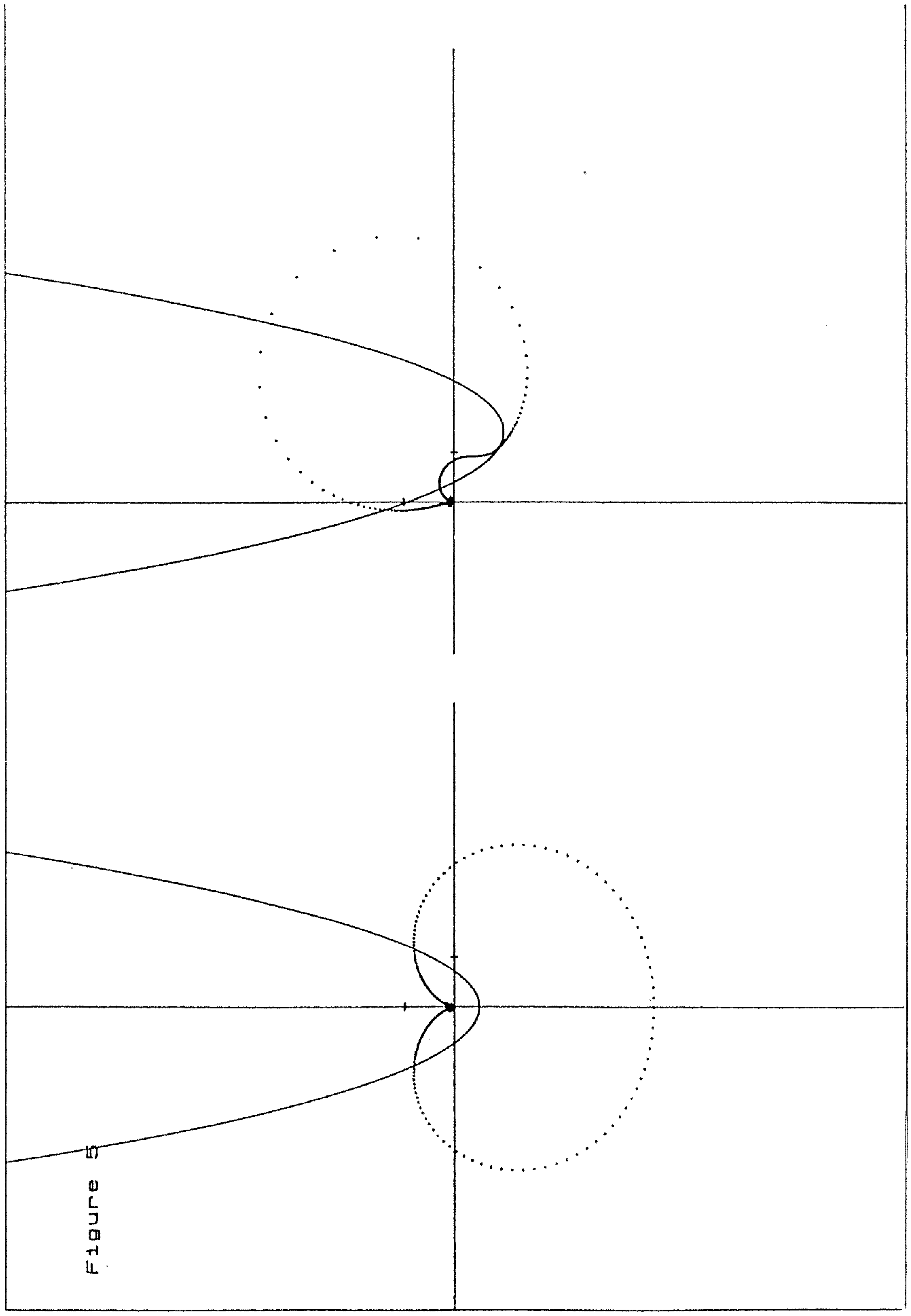
Quand on transforme un cercle passant par O (et privé de O) en une droite, les points sont régulièrement répartis sur le cercle et irrégulièrement sur la droite : la régularité a changé de camp !

La question de l'image d'un cercle ne passant pas par O (figure 4) donne lieu à une initiative et à une conjecture intéressantes. Un binôme trace le cercle (I) des points invariants et explique pourquoi il passe par les points communs aux deux cercles. Il permet aussi de distinguer les points et leurs images (un point intérieur à (I) a une image à l'extérieur et réciproquement). Voici la conjecture : un cercle ne passant pas par O et son inverse sont homothétiques dans une homothétie de centre O (la démonstration utilise une inversion de centre O, de rapport la puissance de O par rapport au cercle). La formulation d'une telle conjecture suppose une grande familiarité avec les images informatiques et une bonne connaissance théorique. Enfin, il est intéressant de chercher où se trouvent les régularités de la figure 4 (sur cette figure, l'absence de bavures confirme l'absence d'accumulation de points sur le cercle image, que confirme le raisonnement).

En transformant la parabole, les élèves rencontrent des courbes nouvelles qui les ravissent. L'image ressemble étrangement à une cardioïde (le terme plaît beaucoup)... L'explication de la bavure en O est aisée, ainsi que celle des symétries observées.

Un zoom autour de O montre que (Oy) est tangente à la courbe en ce point (si toutefois on la complète en y ajoutant O). Les élèves s'amusent à translater la parabole pour engendrer des formes étranges.

La dernière question donne libre cours à l'imagination. Deux stratégies se dessinent. Certains introduisent en machine des équations qu'ils compliquent à loisir et ils sont généralement déçus par le résultat (la complication d'une équation n'a que peu de rapports avec l'intérêt de sa courbe représentative du point de vue de l'inversion!). D'autres se disent qu'il serait intéressant de transformer des courbes ayant de nombreuses asymptotes (les "points à l'infini" sont ramenés en O). La trigonométrie en fournit à



Images d'une parabole.

Figure 5

foison (tan(x), cotan(x), 1/cos(x) par exemple). Leurs résultats sont spectaculaires et s'interprètent aisément . Les différentes branches sont transformées en boucles ayant toutes O en commun et tangentes en O (en tous cas sur les tracés!) (6)

La figure 6 est obtenue à partir de la courbe d'équation y=0.3+1/2cos(x). Sept branches (en pointillé) ont été transformées en sept boucles (en trait plein). Il est facile d'établir les correspondances entre branches et boucles. La courbe transformée a été agrandie par homothétie (de rapport 4.5) pour la rendre plus lisible.

c) Et si on se passait d'informatique ?

Une fois l'activité achevée, il est possible d'en imaginer une autre approche. Telle qu'elle est conçue, elle appelle deux questions : qu'apporte l'informatique à ce travail? Est-il possible de l'envisager sans y faire appel ?

L'article répond à la première question : la machine ne remplace pas les outils traditionnels (la main, la règle ou le compas), elle ouvre de nouveaux espaces.

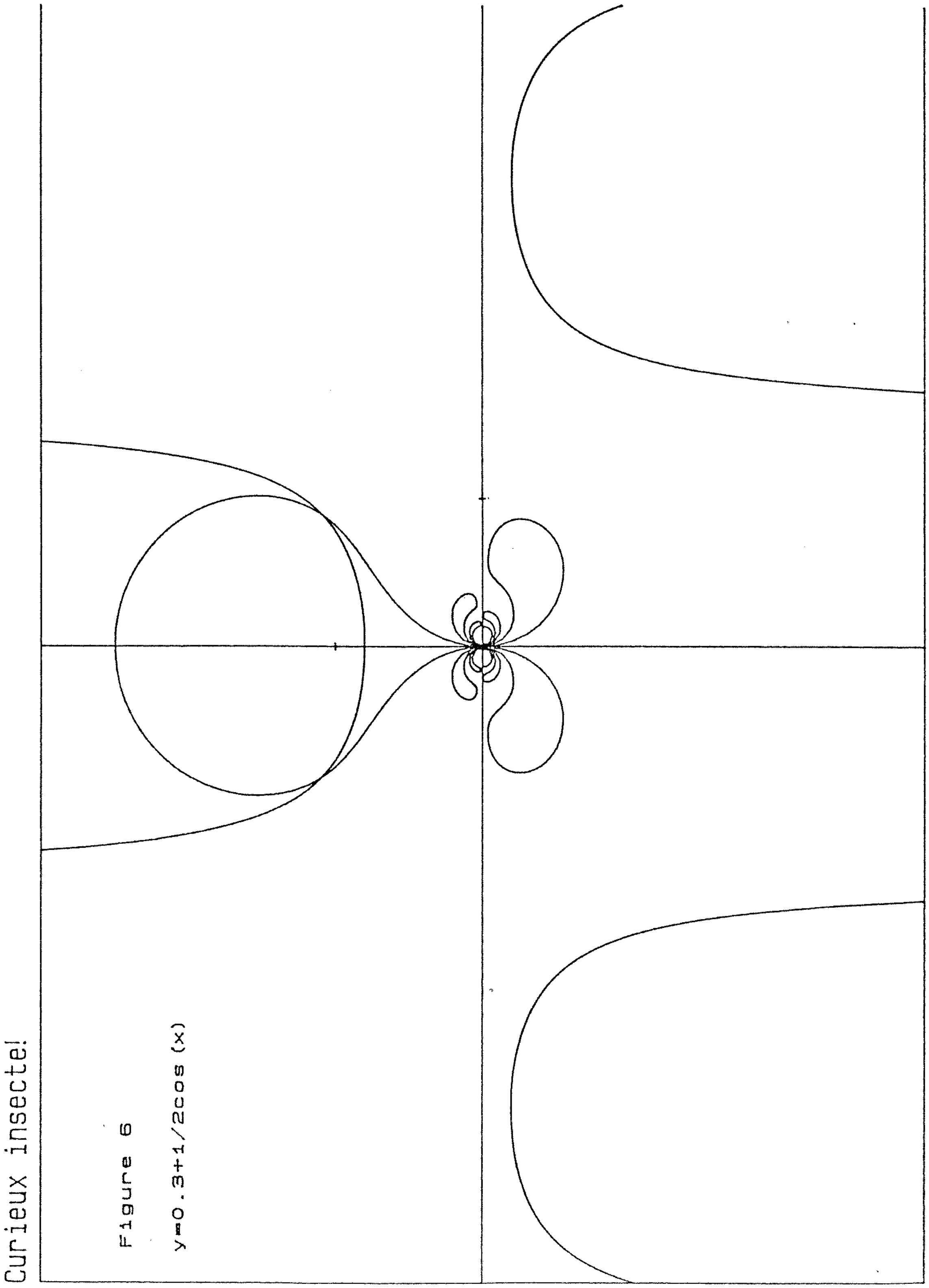
Il laisse entrevoir la possibilité de mener le même travail en module (déjà en Seconde, mais surtout en Première et en Terminale S) sans aucun recours informatique, par des moyens purement géométriques.

L'étude de l'image d'un point qui s'approche du pôle O, ou qui s'en éloigne indéfiniment, utilise uniquement la définition. Pour montrer la non-conservation des distances, on prend deux points alignés avec le pôle, proches de O. On calcule la position des images : la conclusion s'impose.

Que l'image d'une droite ne passant pas par O ne puisse être une droite se montre aisément : le point le plus éloigné de O de la figure image est l'image du point de la droite le plus proche de O. La figure image est donc toute entière dans un cercle de centre O! Un raisonnement analogue prouve que si un cercle passe par O, son image ne peut être un cercle (il y a des points aussi éloignés que l'on veut de O sur la figure image).

Le seul outil vraiment indispensable pour une étude plus explicite de l'inversion est la puissance d'un point par rapport à un cercle et la condition de cocyclicité de quatre points qui y est liée : si $\overline{OM}\times\overline{OM'}=\overline{ON}\times\overline{ON'}$ et si M,M',N,N' ne sont pas alignés, alors M,M',N,N' sont cocycliques. Ces notions sont souvent traitées en Première comme application du produit scalaire. Grâce à elles, on trouve sans grandes difficultés les images d'une droite et d'un cercle (on passe ainsi des conjectures aux preuves).

Si on ajoute à cela la condition de cocyclicité de type angulaire (elle est au programme de Terminale S), on peut montrer une propriété supplémentaire du plus haut intérêt, qui échappe à l'activité informatique élémentaire : **cette transformation qui ne respecte**


Curieux insecte!
Figure 6
y=0.3+1/2cos(x)

pas grand'chose conserve cependant les angles géométriques des tangentes aux points communs à deux courbes (elle conserve en particulier le contact et l'orthogonalité : on connaît l'importance de ces propriétés dans la mise en oeuvre de l'inversion). Les développements sur ce sujet se trouvent par exemple dans l'ouvrage de géométrie de Terminale C et E de Condamine et Vissio (Delagrave 1968), disponible dans les bibliothèques des I.R.E.M.

Cette seconde approche de l'inversion est complémentaire de la première. L'idée de la mettre en oeuvre naît de l'activité décrite dans l'article : l'informatique (digitale par nature) peut donner envie de faire de la géométrie (analogique par essence) à mains nues.

CONCLUSION : UNE ACTIVITE MATHEMATIQUE INTENSE

Revenons à l'activité proposée aux élèves. On l'aura constaté, la réalisation et l'interprétation des images précédentes nécessite, de leur part, une activité mathématique intense. Leur familiarité avec l'outil informatique a développé une observation pertinente des images calculées. Aussi curieux que cela paraisse, la durée devient ici un paramètre intéressant en géométrie (des courbes, on est passé au mouvement). Les allers et retours fréquents entre observation et théorie, entre environnement informatique et papier crayon (ou tableau), et la nécessité de rédiger les observations, les conjectures et les démonstrations, tout cela fait de ces séances un temps fécond de formation scientifique.

Certaines remarques ont été diffusées dans la classe et démontrées (par exemple, l'existence d'un axe de symétrie pour la figure 1). Les questions posées en cours d'activité ont conduit à de courts développements théoriques au tableau. Ainsi, à l'issue de ce travail, les élèves ont à leur disposition les éléments théoriques pour répondre aux questions qui ont émergé des débats : l'inversion est-elle bijective? Quelle est sa transformation inverse? Quelle est l'image d'un segment]OA]? (l'idée que ce serait une demi-droite a beaucoup intrigué, surtout si la distance OA est très petite). Comment trouver l'équation de la courbe inverse d'une courbe donnée (on pourra alors DEMONTRER certaines propriétés observées) ?

On le voit,beaucoup d'idées importantes en mathématiques ont été abordées. Elles seront approfondies ultérieurement. Elles pourront être reprises sous l'angle géométrique avec CabriGéomètre (ou en se passant d'informatique). A chacun de donner dès maintenant à ce travail les prolongements qu'il souhaite, jusqu'au niveau universitaire (voir l'annexe ci-dessous).

Enfin, dans cette classe, le mot TRANSFORMATION a pris un sens nouveau.

Annexe : des prolongements possibles (très) au-delà du lycée

Dans une critique (très constructive) de cet article, Henri Lombardi suggère d'adopter un point de vue résolument "géométrique" dont voici les grandes lignes. L'inversion (de puissance positive) est une "symétrie" par rapport au cercle (C) des points fixes. On peut le mettre en évidence de la façon suivante : on prend l'image (C_2) d'un petit cercle (C_1), voisin de (C) et ne coupant pas (C). On zoome de manière à garder (C_1) et (C_2) à l'écran. On voit alors (C) presque comme une droite, (C_1) et (C_2) comme deux cercles presque symétriques par rapport à cette droite.

On peut aussi transformer (C), (C_1) et (C_2) par une inversion I dont le centre est sur (C) : I(C_1) et I(C_2) sont alors symétriques par rapport à la droite I(C). Si (C_1) et (C_2) coupent (C), un zoom sur une des intersections donnera trois droites dont celle qui correspond à (C) est bissectrice des deux autres. L'inversion I (centrée sur (C) transforme (C_1) et (C_2) en deux cercles symétriques par rapport à I(C).

Autre point de vue géométrique : l'inversion est une transformation qui opère sur l'ensemble des cercles et des droites (les cercles généralisés), plutôt que sur l'ensemble des points. Une équation d'un objet de ce type est de la forme : $a(x^2+y^2)-2bx-2cy+d=0$ ((a,b,c,d) est un quadruplet homogène). Une inversion transforme (a,b,c,d) de manière linéaire en conservant l'ensemble des cercles de rayon nul : $b^2+c^2-da=0$. Par trois points distincts, il passe toujours un unique cercle généralisé. On obtient ainsi une autre justification de l'unicité du point à l'infini pour la géométrie de l'inversion. On est conduit à s'intéresser aux faisceaux de cercles généralisés (ce sont justement les droites dans l'espace projectif des (a,b,c,d)) et à leurs transformés, ainsi qu'à l'orthogonalité de deux cercles généralisés (un cercle et un de ses diamètres par exemple).

On peut aussi se débarrasser de l'infini (et de son satané point) en transformant le plan (π) par une inversion de l'espace centrée en dehors de (π). (π) devient une sphère (S) et les inversions de (π) des "symétries-cercles" de (S). Un miracle se produit alors : une symétrie-cercle de la sphère (S) peut être obtenue comme autoperspective de la sphère depuis un centre de perspective P extérieur à la sphère (éventuellement rejeté à l'infini si le cercle est un grand cercle). Quand on a un point P extérieur à la sphère, le cône tangent de sommet P est tangent à (S) selon un cercle (C), ensemble des points fixes pour l'autoperspective de (S) de sommet P. Quant aux points intérieurs à la sphère, ils définissent des autoperspectives involutives de (S), sans points fixes (elles correspondent aux inversions de puissances négatives du plan).

Le groupe de Möbius de (S) est le groupe de transformations de (S) engendré par les symétries-cercles. Il opère de manière naturelle sur ses propres involutions sans point fixe, donc sur l'ensemble des points intérieurs à la sphère. On obtient ainsi les isométries du modèle de Beltrami pour l'espace hyperbolique! En revanche, si on prend le sous-groupe du groupe de Möbius de (S) qui conserve une calotte sphérique (S'), on obtient les isométries du modèle de Poincaré du plan hyperbolique. Ces remarques pourraient conduire à d'époustouflantes expériences sur ordinateur, à une version spatiale de Cabri-Géomètre et à un article sur la géométrie hyperbolique amusant et relativement facile à écrire.

Et dire que pour certains l'inversion était une transformation élémentaire!

NOTES

1) Les élèves de Seconde (et même de Première Scientifique...) ont de la peine à entrer dans une démarche mathématique demandant plusieurs étapes et la construction de savoirs intermédiaires. L'informatique permet de MONTRER d'emblée les images d'une courbe et de sa transformée. Elle crée un choc visuel qui peut éveiller l'intérêt, puis l'attention pour l'indispensable et difficile étape d'interprétation et de d'explication des images. C'est son mérite principal. Il est parfaitement possible de faire sur le sujet un travail intéressant sans aucun moyen informatique, on le verra à la fin de l'article. Mais il faut alors construire des outils adaptés au problème (la puissance d'un point par rapport à un cercle et la cocyclicité sont des détours obligés) et disposer de bien plus de temps que pour l'activité en environnement informatique. Certains aspects du travail présentés dans l'article disparaissent alors (transformation et mouvement, inverses de courbes autres que des droites ou des cercles), mais l'essentiel demeure : il existe des transformations qui transforment vraiment les figures.

2) Deux heures par quinzaine en demi-classe. L'activité décrite a pris deux séances de deux heures (la rédaction du compte-rendu est comprise dans cette durée).

3) L'activité décrite s'est déroulée à l'extrême fin de l'année 95/96. L'ensemble du travail devait se faire impérativement en deux séances de deux heures. Il fallait donc mettre en oeuvre un logiciel que les élèves connaissent bien et qui ne supposait pas de nouvel apprentissage. Graph'x répondait à ces conditions. Le Géomètre aurait demandé un travail sur les propriétés du triangle rectangle (ou de Thalès) qui, des expériences antérieures l'ont montré, rallonge singulièrement l'activité. Le choix du point de vue analytique résulte donc de contraintes informatiques circonstancielles. Mais la première partie du texte (avant l'établissement des formules analytiques de l'inversion) fait appel à la seule DEFINITION : les points invariants, la bijectivité, l'image d'un point s'approchant du pôle ou s'éloignant à l'infini, tout cela se fait AVANT toute étude analytique (le passage par la définition est d'ailleurs le plus simple pour conclure) et sans aucun moyen informatique (chaque chose en son temps). La réflexion préalable (en environnement papier-crayon) est une condition indispensable pour expliquer les images à venir.

4) Commentaire d'Henri Lombardi : "Je pense qu'il faudrait remplacer k par R^2 pour des raisons d'homogénéité et pour mettre en valeur le rôle du cercle des points fixes, de rayon R. Il faudrait, dans la partie théorique, guider les élèves en leur demandant de démontrer que les conditions a) et b) (avec M distinct de O) équivalent à : $OM'=(R^2/OM^2)OM$. Cette forme est plus géométrique, donc plus parlante que celle obtenue en résolvant des systèmes d'équations (raisonnement très délicat si on le veut rigoureux, dans le cas où une des coordonnée est nulle). Toutes les méthodes sont bonnes, mais certaines sont plus faciles parce que plus significatives. Le fait que l'inversion est involutive (donc bijective) est facile à prouver. Vu l'importance de cette propriété, elle devrait faire l'objet d'une question".

5) Remarque d'Henri Lombardi : "Graph'x (comme la plupart des grapheurs) transforme correctement les courbes paramétrées (ou facilement paramétrisables). Il n'en est plus de même avec les courbes algébriques planes réelles en coordonnées cartésiennes. La version actuelle de Maple est très mauvaise pour les courbes non paramétrées présentant des singularités, même avec des degrés faibles.

L'inversion augmente a priori le degré et fournit donc un moyen amusant de trouver des courbes paramétrisables de haut degré (on peut par exemple transformer une parabole ou une hyperbole successivement par plusieurs inversions de centres distincts convenablement choisis)".

6) Commentaire d'Henri Lombardi : "Ne serait-il pas bon de faire remarquer que deux directions asymptotiques distinctes donnent deux éléments de contact distincts tandis que deux directions égales donnent le même élément de contact (cf figure 6)? (l'image d'une hyperbole et d'une translatée seraient très parlantes). Cela donne un résultat assez différent de ce qui se passe avec les transformations perspectives".

BIBLIOGRAPHIE

1) Slowick Claude. Pour une transformation de la didactique des transformations. Repères-Irem n°4 (1991)

2) Bkouche Rudolf. De la géométrie et des transformations.Repères-Irem n°4 (1991)

3) Bourguet Michel. Cartographie et mathématiques. Repères-Irem n°6 (1992)

4) Le Goff Jean-Pierre. La perspective en Première Scientifique : une certaine suite dans les idées.

5) Daniel Jean-Claude. Géométrie en mouvement. Repères-Irem n°18 (1995).

ECONOMIE ET MATHEMATHIQUES
QUELQUES ELEMENTS DU DEBAT

Le groupe de Recherche -Formation MATH-ECO travaille à l'IREM de Strasbourg depuis septembre 1993.
Composé actuellement de huit enseignants de Mathématiques et de Sciences Economiques et Sociales, il se propose d'explorer les aspects bidisciplinaires des programmes de Mathématiques des classes de **Première et Terminale ES**.

Le groupe vient de publier une Brochure IREM[1] .
Cette brochure est sa contribution à l'effort des enseignants des deux disciplines qui recherchent un complément de formation ou des informations. Trouver une synergie interdisciplinaire est devenu une nécessité pour renouveler l'enseignement des deux disciplines. De nombreux points restent à aborder ou à approfondir. Le groupe Math-Eco a pour unique ambition de donner à chacun de ses lecteurs l'envie d'en savoir plus et de franchir le pas qui le sépare de son collègue de l'autre discipline.

Le document publié ici est tiré de cette brochure (pages 4 à 6).

---

[1] Brochure N°170 en vente à la bibliothèque de l'I.R.E.M. DE STRASBOURG : 50F + 15F de frais de port. Prière d'établir votre chèque à l'ordre de M.l'Agent Comptable de l'U.L.P. pour l'I.R.E.M.

© L'OUVERT **86** (1997)

« Proposition 8 : le but de la pratique scientifique n'est pas de connaître la réalité mais de construire sa compréhensibilité .
Proposition 11 : les sciences sociales sont des disciplines à l'intérieur desquelles il y a lutte entre des théories contradictoires »
Renato Di RUZZA, **Eléments d'épistémologie pour économistes**, Grenoble, 1988, PUG.

1) La naissance de l'économie mathématique

Stanley JEVONS (1888)[2], l'un des fondateurs de l'économie mathématique au 19e siècle, faisait remarquer que l'économie devait être une science mathématique du simple fait qu'elle traite de *quantités* et se prête donc naturellement au traitement mathématique.
Dans ce sens, les tentatives les plus anciennes de décrire et d'expliquer la création de richesses ont toujours plus ou moins fait appel à la mesure et au calcul. Citons ainsi la tentative de François QUESNAY (Le tableau économique, 1758) de rendre compte à l'aide d'un *tableau chiffré* de la genèse et de la circulation de la richesse nationale.
Mais dans les années 1870, l'usage des mathématiques en économie va prendre une dimension nouvelle, à tel point que l'on parle à ce propos de *révolution marginaliste*. En effet de façon quasi simultanée trois auteurs, Stanley JEVONS et Carl MENGER en 1871, Léon WALRAS en 1874 (fondateurs du courant néoclassique) ont fait appel au calcul pour élaborer leur théorie de la valeur :

- la valeur des choses leur vient de leur utilité, mais celle-ci est essentiellement un sentiment propre à chacun et donc non mesurable
- quand la quantité d'un bien, consommée par une personne, augmente, l'utilité d'une unité supplémentaire consommée est de plus en plus faible : pour chaque individu *l'utilité marginale* d'un bien diminue quand la consommation de ce bien augmente
- on peut alors utiliser le calcul différentiel pour raisonner mathématiquement sur des grandeurs qui échappent à la mesure. On montrera ainsi que pour deux biens donnés, le rapport des prix est égal au rapport des utilités marginales !

C'est bien là que l'on peut parler de révolution : les mathématiques sont maintenant au coeur du *raisonnement* économique.

2) L'économie mathématique aujourd'hui

Le courant de l'économie mathématique s'est peu à peu imposé au dépens de l'économie "littéraire", mais son hégémonie aujourd'hui n'est pas sans susciter un grand nombre de critiques. Aussi est-il intéressant de rappeler les arguments toujours actuels en faveur de l'usage des mathématiques en économie :

- on a souvent reproché à l'économie et à ses modèles leur abstraction. Celle-ci est cependant légitime et même nécessaire à la compréhension d'une réalité complexe. Simplifier en forçant certains traits pertinents, c'est construire un *idéal-type* au sens de Max WEBER. C'est le propre de toute démarche scientifique

---

[2] JEVONS W. S., The theory of Political Economy, 1888, cité par MEIDINGER Cl., **Science économique : questions de méthode**, Paris, 1994, Vuibert

- la démarche hypothético-déductive a révolutionné la physique autant que l'économie. La discussion des hypothèses et les problèmes posés par la vérification constituent de nouvelles questions à résoudre, mais ne remettent pas en cause la méthode elle-même
- l'utilisation du langage mathématique rend la théorie économique accessible à tous. En effet, si le vocabulaire et la syntaxe des mathématiques sont communes à tous les mathématiciens, on ne peut pas en dire autant de la langue littéraire, chaque auteur pouvant utiliser les mots dans un sens particulier et propre à sa théorie. Gérard JORLAND (1995)[3] remarque ainsi que c'est à partir du moment où la théorie de MARX a été formalisée en langage mathématique qu'elle est devenue l'objet d'un débat scientifique plutôt que polémique.

3) La critique de l'usage des mathématiques

Utilisées par une multitude de disciplines scientifiques et notamment par la « science économique », les mathématiques permettent de mettre en évidence la cohérence du discours théorique, de confronter les théories qui ont pu être formalisées et de faire des vérifications (et des prévisions) grâce à l'économétrie.
L'utilisation des mathématiques est cependant critiquée tant par des économistes que par les spécialistes d'autres sciences sociales.
Dès la fin du 19e siècle, lorsque L. WALRAS présente ses travaux d'économie mathématique, on lui objecte que « l'économie politique est une science morale qui a pour point de départ et pour point d'arrivée l'homme ».
L'économie mathématique est considérée par les économistes contemporains de Walras comme une simple *quantification* et non comme une *formalisation,* et le rejet qu'elle inspire provient de la crainte de voir *mesurer* les sentiments, les passions et les comportements humains.
Le Professeur Alain BIENAYME (1994)[4] présente les risques que comporte, selon lui, l'outil mathématique en raison de la « manière dont il est souvent utilisé » :

- l'outil mathématique peut conduire à des « excès de langage » lorsque l'on néglige « ce que les conclusions doivent aux prémisses » ; ainsi certains théorèmes sont toujours retenus (et enseignés) alors que les transformations du monde éloignent de plus en plus la réalité des hypothèses (parfois nombreuses) du modèle; il peut en résulter une « vision erronée du monde »
- l'outil mathématique peut créer des « illusions de la logique », lorsque les connaissances mathématiques dictent le choix des hypothèses (les plus commodes pour la formalisation) sans que leur pertinence ne soit suffisamment examinée; l'emploi des mathématiques peut conduire « à des déformations de la vision » et à des conclusions contraires à certaines expériences : « sauf à considérer que la fécondité d'un théorème se juge à sa capacité de focaliser réfutations et controverses, on peut déplorer que notre science ait pris de nos jours un tour aussi biscornu et sinueux pour se rapprocher de la vérité »

---

[3] JORLAND G., **Les paradoxes du Capital**, Paris, 1995, Ed. Odile Jacob
[4] in HURIOT J.-M. (éd.), **Economie, mathématiques & méthodologie**, Paris, 1994, Economica

- les mathématiques ne permettent pas dans chaque cas de départager les théories et les explications qu'elles proposent, mais ce sont celles qui se prêtent le mieux à la mesure qui risquent d'être privilégiées et retenues : ainsi la « domination excessive du mesurable » constitue un troisième danger d'autant plus que de nombreux phénomènes ne sont pas mesurables, ce qui peut expliquer le peu d'intérêt qu'ils ont suscité malgré leur importance pour la compréhension de la réalité.

« Ce qui précède ne constitue en rien le procès d'une discipline fort utile à l'économiste, mais celui d'une spécialisation qui (...) devient oublieuse de l'objet principal dont elle traite »

Jean-Pierre DUPUY (1994)[5] considère que « le savoir de la science économique est un savoir faux » non pas parce qu'il n'est pas en parfaite adéquation à la réalité - ce qui ne peut pas être son objectif - mais parce que cette science « s'interdit dès le départ de prendre en compte ces influences mutuelles » que sont « la contagion des désirs, des sentiments et des passions ». L'existence de ce savoir contribue cependant à façonner la réalité sociale et économique qui « tend à ressembler au modèle théorique, mais ce n'est pas pour autant (...) que celui-ci dit la vérité au sujet du réel ».

Ces remarques rejoignent d'une certaine façon la critique de Serge LATOUCHE (1994)[6] : « Tout l'édifice du calcul rationnel repose sur le postulat métaphysique de l'existence du sujet rationnel, l'homo oeconomicus, c'est à dire d'une machine à calculer simple et unique (...) ».

L'usage des mathématiques en économie est donc discutée et il semble qu'une des raisons principales soit la suivante : les sciences sociales s'intéressent à des faits qui sont chargés de sens et il semble difficile de constituer des modèles abstraits (et mathématiques) qui considèrent ces faits comme des objets sans renoncer à l'essentiel : aux significations.

« Comment donc connaître rationnellement l'irrationnel, comment concevoir des modèles d'une réalité irrationnelle sur lesquels on puisse raisonner ? »[7].

4) Le débat sur les mathématiques en économie : un prétexte ?

Nul ne conteste à la science physique son utilisation des mathématiques, son haut niveau d'abstraction ou encore le caractère arbitraire de certaines de ses hypothèses. Pourquoi dans ce cas le débat est-il aussi animé en économie ?

L'économie est à l'instar des autres sciences humaines une gageure pour la connaissance :

- toute conclusion énoncée par l'économiste peut concerner directement le citoyen ordinaire. D'entendre que l'assurance sociale serait plus efficiente si elle était confiée au "marché" nous fera bien plus réagir que les écrits sur le big-bang, la matière manquante ou autres leptons...

---

[5] DUPUY J.-P., Lettre de l'AFSE, n° 23, juillet 1994, in **Problèmes économiques** n° 2444-2445, 1-8 nov 1995, pp.4-5

[6] GRANGER G.G., Epistémologie, **Encyclopaedia Universalis**

[7] LATOUCHE S., Le rationnel et le raisonnable, A qui se fier ? **Confiance, interaction et théorie des jeux, La revue du M.A.U.S.S., n°4,** 2e semestre 1994, Editions de la Découverte

- la théorie économique, quand elle est diffusée largement, tend à devenir auto-réalisatrice. Les phénomènes économiques sont le résultat de nos actes qui sont eux-mêmes le reflet de nos croyances. Si tout le monde croit que le franc a des raisons de se déprécier, les ventes massives de francs vont précipiter sa chute. La croyance était-elle cependant justifiée au départ ? On voit ici combien il faut se méfier de la "vérification" en tant que preuve de la justesse d'une théorie (cf. Karl POPPER[8])...
- l'adhésion à une théorie constitue encore largement un acte de foi. Derrière les débats "scientifiques" se cachent souvent des querelles idéologiques et politiques !

En replaçant la critique de l'utilisation des mathématiques dans ce contexte, nous pouvons formuler quelques remarques :

- quand on critique l'excès de mathématiques en économie, on critique principalement un *modèle* , une *théorie* : la construction néoclassique de *l'équilibre général par le libre jeu des marché*s. Cela revient à condamner l'outil pour une partie de ce qu'il a produit !
- la critique porte souvent davantage sur les discours de vulgarisation souvent réducteurs et peu nuancés, que sur les travaux des scientifiques proprement dits (beaucoup plus précautionneux quant-à la portée de leurs conclusions).

Ces quelques commentaires n'ont pas la prétention d'être exhaustifs et n'épuisent certainement pas le débat sur l'utilisation des mathématiques en économie. Les textes cités en référence permettront à ceux qui le souhaitent d'approfondir la réflexion.

[8] POPPER K., **La logique de la découverte scientifique**, Paris, 1973 (1959), Ed. Payot, p 480

UN AVIS SUR LES CALCULATRICES

Marc NOURISSON

Lycée International - Strasbourg

Quelle attitude peut-on adopter face aux perfectionnements des calculatrices utilisées aux examens et concours ?

1) Ne pas réagir, ce qui entraîne une course effrénée aux perfectionnements pour les constructeurs, une course à l'équipement pour les familles, une inégalité très forte entre les candidats, la perte des bases du calcul pour les élèves, l'inutilité de l'enseignement des mathématiques en fin de compte. En effet, même si l'avantage réellement procuré par une calculatrice performante lors de l'épreuve de math du bac est faible on n'arrivera à en convaincre ni les élèves ni leurs parents ce qui jettera le discrédit sur cette épreuve et sur notre enseignement.

2) Réagir au coup par coup à l'évolution technique pour limiter les conséquences exposées ci-dessus, c'est semble-t-il la voie choisie par le ministère si on considère le texte communiqué aux recteurs le 24/5/95 : "... les calculatrices de type infrarouge sont autorisées dans les salles d'examen, mais l'utilisation de cette fonction entre calculatrices est interdite". Outre que, de la sorte, nous aurons toujours un train de retard par rapport aux fabriquants de calculatrices et aux élèves les mieux informés, je me demande comment on peut vérifier qu'un élève ayant une calculatrice autorisée n'utilisera pas les fonctions interdites.

3) Modifier les contenus d'enseignement et les sujets du bac en fonction des machines disponibles : cette attitude revient à laisser dicter les contenus par les fabricants de calculatrices : est-ce pédagogique ? Est-ce démocratique ? De plus, elle repose sur des principes qui ont déjà fait leurs "preuves" dans beaucoup d'autres domaines (il faut laisser faire le marché, on ne peut rien contre le progrès technique, tout ce qui peut être fait par une machine devient indigne de l'activité humaine, ...). Par ailleurs, s'il est possible, au niveau bac + 2, de faire des sujets où les calculatrices les plus puissantes à l'heure actuelle sont peu utiles (hormis leurs fonctions de communication ...), ceci me paraît impossible au niveau du bac où il s'agit de tester l'acquisition des bases et non de sélectionner les 300 meilleurs étudiants de classes préparatoires.

4) Limiter les possibilités des machines autorisées aux examens et concours, la liste exhaustive de celles-là étant fixées pour plusieurs années, par exemple : $+, -, \times, \div, \ln, \exp$, puissance, $\sqrt{}, \sin, \cos, \tan$, pas de mémoire modifiable permanente, pas de programmation, pas de graphique, pas de calcul formel, entrée unique par clavier, pas de possibilité de communication. Pour la mise en

© L'OUVERT 86 (1997)

œuvre pratique de cette contrainte il faudrait que le ministère diffuse chaque année à tous les surveillants de l'épreuve de math du bac une liste exhaustive des machines autorisées; ainsi il n'y aurait que deux choses à vérifier en début d'épreuve : l'inscription de chaque machine sur la liste et le fait qu'elle soit éteinte, les fabriquants se chargeant chaque année de demander au ministère l'inscription de leurs calculatrices. Ceci n'est pas du tout contradictoire avec l'utilisation des moyens électroniques (calculatrices, ordinateurs, ...) en cours à des fins pédagogiques, sans rendre toutefois les élèves dépendants des machines.

De ces quatre solutions, c'est la dernière qui a ma préférence car elle me semble la moins mauvaise; il en existe sûrement de meilleures, mais je ne les ai pas trouvées.

Pour finir, je précise qu'il ne s'agit ni de figer définitivement les contenus d'enseignement, ni de refuser l'informatique ou les calculatrices, ni d'ignorer frileusement le monde qui nous entoure mais de mettre fin à une situation floue et inégalitaire qui ne peut que porter tort à l'enseignement des maths, surtout en lycée.

PUBLICITÉ

Il n'est guère de n° de '*L'Ouvert*' dont l'un ou l'autre des articles ne suscite un intérêt ou une réaction bien au-delà du modeste horizon de notre région.

Quelques exemples récents :

• L'article de E. Ehrhart : *Les roulettes d'ellipses* ('*L'Ouvert*' n °62 (1991)) fait l'objet d'une note dans l''*American Mathematical Monthly*' d'avril 1995.

• L'article de D. Dumont : *Une preuve lumineuse de la relation*

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = 2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots)^2$$

('*L'Ouvert*' n°69 (1992)), inspire un article à M. Rogalski dans la '*Gazette des mathématiciens*' (n° 68 - avril 1996).

• L'article de P. Girault : *Quelques résultats sur les courbes planes* ('*L'Ouvert*' n°74 et 75, mars et juin 1994) a permis à la revue de l'Association '*Femmes & math*' d'illustrer son premier numéro en janvier 1996 par quelques courbes étrangement féminines.

Et pour le futur, nous avons le plaisir de vous informer que le n° d'avril prochain de la revue '*Pour la Science*' publiera une reprise de l'article de R. Iss : *Sable et mathématique* ('*L'Ouvert*' n° 41 et 42, septembre et décembre 1985).

A VOS STYLOS

PROBLÈME 40

Énoncé (proposé par B. Kordiemsky) :

On place $2n$ jetons d'un jeu de dames, n blancs et n noirs, sur une ligne horizontale (on suppose $n \geq 3$) : d'abord deux cases vides consécutives, puis un blanc, un noir, un blanc, un noir, etc.

L'objectif est de parvenir à la disposition suivante : tous les noirs, puis tous les blancs, puis deux cases vides.

Pour cela, le seul type de coup autorisé est une translation de deux jetons consécutifs vers les deux cases laissées vides par le précédent coup.

Peut-on y parvenir en n coups? La solution est-elle unique?

Ebauche de solution.— Le problème ne semble pas passionner nos lecteurs. Pour relancer leur intérêt, nous reproduisons ci-dessous une ébauche de solution qui nous a été signalée par M. Jean Brette et qu'on trouve dans l'ouvrage de E. Lucas, *Récréations mathématiques*, tome 3, p. 145-151, A. Blanchard, Paris, 1960, disponible à la bibliothèque de notre IREM. Lucas attribue le problème à Tait (*Philosophical magazine*, janvier 1884, et *Introductory address to the Edinburgh mathematical Society*, 9 novembre 1885). Selon Lucas, Delannoy propose une solution à l'aide de quatre algorithmes selon la congruence de n modulo 4.

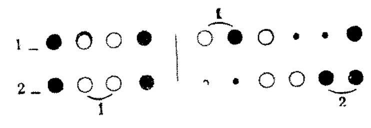
Au début, on a les deux cases vides suivis des 2n jetons, donc 2n+2 cases. On place un trait vertical après la $n-$ième case, et cela servira de repère car les déplacements s'opéreront en général d'un côté à l'autre de ce trait. L'algorithme comportera toujours deux phases, une première consistant en déplacements de couples bicolores et une seconde en déplacements de couples unicolores.

Dans tous les cas, le premier coup de la première phase consiste à placer sur les deux premières cases vides le couple bicolore NB formé de l'avant-avant-dernier jeton (noir) et de l'avant-dernier (blanc). A l'issue du premier coup on obtient donc une ligne de jetons qui commence par NB.

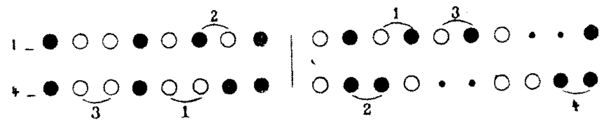
Supposons n pair. C'est de la situation après ce premier coup qu'on part dans les schémas ci-dessous.

Si $n = 4k$, on continue alors la première phase par $2k-1$ coups au cours de laquelle on continue de déplacer des couples bicolores (alternativement BN et NB), puis la deuxième phase comporte $2k$ déplacements de couples unicolores (alternativement BB et NN).

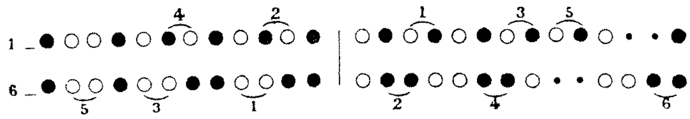
Si $n = 4k + 2$, la première phase se poursuit avec $2k$ déplacements de couples bicolores, puis la deuxième phase comporte $2k + 1$ déplacements de couples unicolores (alternativement NN et BB).



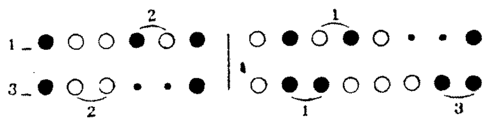
B. — Quatre pions de même couleur.



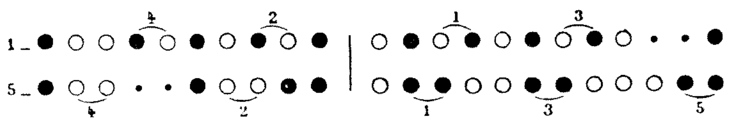
B. — Huit pions de même couleur.



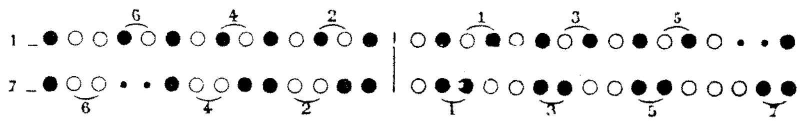
B. — Douze pions de même couleur.



A. — Six pions de même couleur.



A. — Dix pions de même couleur.

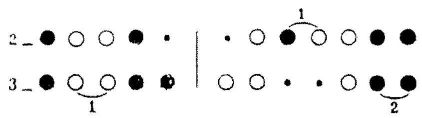


A. — Quatorze pions de même couleur.

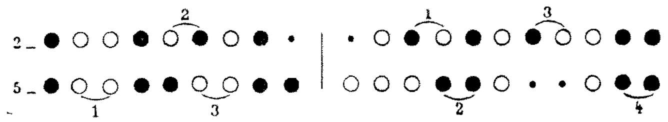
Supposons n impair. Le deuxième coup consiste alors toujours à déplacer le couple bicolore BN à cheval sur le trait vertical. Les schémas ci-dessous partent de la situation à l'issue de ce deuxième coup.

Si $n = 4k + 1$, la première phase se poursuit alors avec $2k - 1$ déplacements de couples bicolores, puis la deuxième phase comporte $2k$ déplacements de couples unicolores.

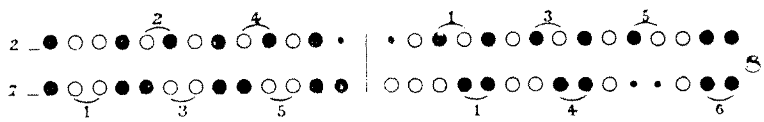
Si $n = 4k+3$, la première phase se poursuit avec $2k$ déplacements, puis la deuxième phase comporte $2k + 1$ déplacements.



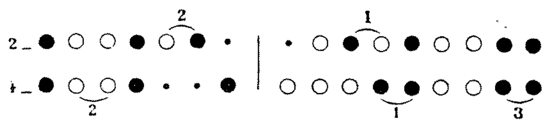
D. — Cinq pions de même couleur.



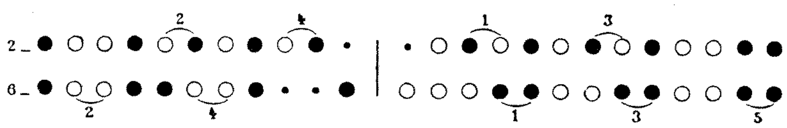
D. — Neuf pions de même couleur.



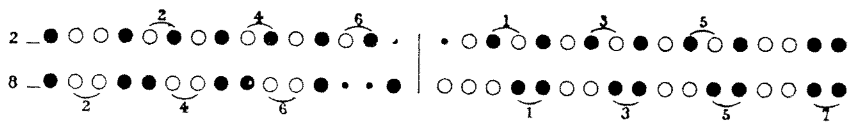
D. — Treize pions de même couleur.



C. — Sept pions de même couleur.



C. — Onze pions de même couleur.



C. — Quinze pions de même couleur.

Tout cela semble fort raisonnable, on a bien l'impression de détenir *la* solution. Convient-il néanmoins de *démontrer* la validité de ces algorithmes, quitte à changer de formalisme? Faut-il démontrer leur unicité? Ou se contentera-t-on de ces schémas considérés comme convaincants? A nos lecteurs de nous le faire savoir.

PROBLÈME 41

Énoncé (proposé par J. Zeng) :

Dans ce qui suit, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial autrefois noté C_n^k.

On appelle composition de l'entier p en k parts toute suite ordonnée $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ telle que $\forall i\ c_i \geq 1$, et $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = p$.

On note $C(p,k)$ l'ensemble des compositions c de ce type, et on pose

$$S(n,p,k) = \sum_{c \in C(p,k)} \binom{n}{c_1}\binom{n}{c_2}\cdots\binom{n}{c_k}$$

Donner une expression de la somme suivante à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{k-1} S(n,p,k).$$

Remarque : L'auteur du problème propose encore une généralisation de ce résultat, qui sera soumise aux lecteurs de notre rubrique en fonction de l'intérêt suscité par ces deux premières questions.

Solution de M. Wambst :

La première question se résoud par un rapide calcul. On trouve

$$(1)\quad \begin{aligned} \binom{n}{2} - \binom{n}{1}\binom{n}{1} &= -\binom{n+1}{2} \\ \binom{n}{3} - \binom{n}{2}\binom{n}{1} - \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n}{1}\binom{n}{1} &= \binom{n+2}{3} \end{aligned}$$

pour tout entier n. Introduisons les notations suivantes. Soit $C(p)$ l'ensemble de toutes les décompositions de l'entier p, c'est-à-dire $C(p) = \bigcup_{k=1}^{p} C(p,k)$. Pour tout $c \in C(p,k)$, on note $|c| = k$ la longueur de la décomposition. Le problème consiste à démontrer que l'on a

$$\sum_{c \in C(p)} (-1)^{|c|+1} \binom{n}{c_1}\binom{n}{c_2}\cdots\binom{n}{c_{|c|}} = (-1)^{p+1}\binom{n+p-1}{p} \qquad (1)$$

pour tous les entiers $p \leq n$.

On le démontre par recurrence. Tout d'abord, remarquons que l'on a

$$C(p) = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left\{(k, c_1, c_2, \ldots, c_{|c|}) \text{ où } c \in C(p-k)\right\}.$$

La démonstration de cette égalité ensembliste est immédiate.
A présent, nous supposons que (1) est vraie jusqu'au rang $p > 0$. Nous allons utiliser la généralisation bien connue de la formule de Leibniz $(PQ)' = P'Q + PQ'$ où P et Q sont deux fonctions dérivables (dans notre cas, des polynômes de Laurents). On a

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}(PQ) = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \frac{\partial^k}{\partial x^k} P \frac{\partial^{p-k}}{\partial x^{p-k}} Q \,. \tag{2}$$

Prenons $P(x) = x^{-n}$ et $Q(x) = x^n$. La formule (2) donne :

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}(1) = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \frac{\partial^k}{\partial x^k}(x^{-n}) \frac{\partial^{p-k}}{\partial x^{p-k}}(x^n) \,. \tag{3}$$

Or, on a

$$\frac{\partial^{p-k}}{\partial x^{p-k}}(x^n) = n(n-1)\cdots(n-p+k+1)x^{n-p+k} = (p-k)! \binom{n}{p-k} x^{n-p+k}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k}{\partial x^k}(x^{-n}) &= -n(-n-1)\cdots(-n-k+1)x^{-n-k} \\ &= (-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1)x^{-n-k} = k! \binom{n+k-1}{k} x^{-n-k} \,.\end{aligned}$$

Après quelques simplifications, la formule (3) devient

$$0 = p! \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{n+p-1}{k} \binom{n}{p-k} x^{-p} \,.$$

Ce qui implique

$$(-1)^{p+1} \binom{n+p-1}{p} = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \binom{n+p-1}{k} \binom{n}{p-k} \,.$$

Par hypothèse de recurrence, on a

$$(-1)^k \binom{n+k-1}{k} = - \sum_{c \in C(k)} (-1)^{|c|+1} \binom{n}{c_1} \binom{n}{c_2} \cdots \binom{n}{c_{|c|}}$$

pour tout $k < p$. Nous obtenons donc l'égalité:

$$\begin{aligned}(-1)^{p+1} \binom{n+p-1}{p} &= \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{c \in C(k)} (-1)^{|c|+2} \binom{n}{p-k} \binom{n}{c_1} \binom{n}{c_2} \cdots \binom{n}{c_{|c|}} \\ &= \sum_{c' \in C(p)} (-1)^{|c'|+1} \binom{n}{c'_1} \binom{n}{c'_2} \cdots \binom{n}{c'_{|c'|}} \,.\end{aligned}$$

La seconde égalité est une conséquence de la remarque sur les décompositions d'entiers en sommes d'entiers. Ceci termine la demonstration.
Il est possible d'étendre ce résultat aux "q-coefficients binômiaux" définis comme suit. Soit un scalaire $q \neq 1$. Pour tout entier n, on pose $n_q = \frac{1-q^n}{1-q}$. Il s'agit d'une généralisation des entiers car la limite de n_q est n lorsque q tend vers 1. On pose de plus $n_q! = n_q(n-1)_q \dots 1_q$ et $0_q! = 1$. Les coefficients du binôme se généralisent par la formule $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}_q = \frac{n_q!}{p_q!(n-p)_q!}$. Soit $c = (c_1, \cdots, c_{|c|}) \in C(p)$ une décomposition de l'entier p. Posons $\gamma(c) = \frac{1}{2}(|c|^2 - \sum_{i=1}^{|c|} c_i^2)$. On a alors la formule suivante qui généralise (1) :

$$\sum_{c \in C(p)} (-1)^{|c|+1} q^{-\gamma(c)} \begin{pmatrix} n \\ c_1 \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} n \\ c_2 \end{pmatrix}_q \cdots \begin{pmatrix} n \\ c_{|c|} \end{pmatrix}_q = (-1)^{p+1} q^{-\frac{p(p-1)}{2}} \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}_q .$$

Elle se démontre de la même manière que (1) en utilisant les q-différentiations définies par $\partial_q(P)(x) = \frac{P(x)-P(qx)}{x-qx}$ au lieu de la dérivée usuelle $\frac{\partial}{\partial x}$.

PROBLÈME 42

Enoncé (proposé par H.S.M. Coxeter) : Soient x et y deux nombres réels positifs, supposés irrationnels et tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Montrer que les ensembles

$$X = \{[x], [2x], [3x], [4x], \dots\} \text{ et } Y = \{[y], [2y], [3y], [4y], \dots\}$$

forment une partition de l'ensemble des entiers naturels (où $[z]$ désigne ici la partie entière du nombre réel z).

Que se passe-t-il quand x et y sont rationnels?

Indication.— Nous avons reçu deux réponses (de P. Renfer, de R. Schäfke). Michel Emery nous signale que le problème est déjà résolu de deux manières différentes (analytique et géométrique) dans l'Ouvert $n°65$. Il existe aussi une jolie solution combinatoire due à Coxeter. Nous ne reviendrons pas sur ce problème, sauf si nos lecteurs le demandent.

PROBLÈME 43

Énoncé (proposé par D. Dumont et G. Kreweras) :

On écrit une suite finie $(m(1), m(2), m(3), \dots m(k))$ d'entiers naturels $m(i)$ comme un "mot" $m = m(1)m(2)m(3)\cdots m(k)$. Un *anagramme* p d'un mot m est un mot

de même longueur formé des mêmes "lettres" (entiers naturels) mais dans un ordre qui peut être différent.
Un anagramme $p = p(1)p(2)p(3)\cdots p(k)$ de $m = m(1)m(2)m(3)\cdots m(k)$ sera dit :

- *alternant large* si $p(1) \geq m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) \geq m(3)$, $p(4) \leq m(4)$, $\cdots$ $p(2i-1) \geq m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.

- *alternant mixte* si $p(1) > m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) \leq m(4)$ $\cdots$ $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.

- *alternant strict* si $p(1) > m(1)$, $p(2) < m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) < m(4)$ $\cdots$ $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) < m(2i)$, etc.

Dans ce problème on étudie les anagrammes alternants des mots suivants :
$m_1 = 12$, $m_2 = 1234$, $m_3 = 123456$, $\cdots$ $m_n = 1234\cdots(2n-1)(2n)$,
$\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 01$, $\mu_2 = 0112$, $\mu_3 = 011223$, $\cdots$ $\mu_n = 0112233\cdots(n-1)(n-1)n$.

Exemple : $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est un anagramme alternant large de μ_3.

1°) On définit l'entier a_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot m_n. Montrer que a_n est également le nombre des anagrammes alternants stricts de m_{n+1}.

2°) On définit l'entier α_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot μ_n. Montrer que α_n est également le nombre des anagrammes alternants mixtes de μ_{n+1} et le nombre des anagrammes alternants stricts de μ_{n+2}.

3°) Montrer que $a_n = 2^n \alpha_{n-1}$ $(n \geq 1)$.

Indication.— Nous avons déjà reçu une solution complète de Pierre Renfer, que nous publierons ultérieurement. En outre, le problème a des prolongements fort intéressants, dont nous serons amenés à parler.

PROBLÈME 44

Énoncé (proposé par Paul Erdös) :

Le grand mathématicien hongrois Paul Erdös, qui vient de disparaître, fut l'inventeur de très nombreux problèmes. En hommage à sa mémoire, voici un problème d'Erdös que nous soumettons à nos lecteurs.

Etant donnés deux entiers naturels m et n tels que $m < n$, on considère une partition de l'intervalle d'entiers $[m, n[= \{m, m+1, m+2, \ldots n-1\}$ en deux sous-ensembles A_1 et A_2 disjoints : $[m, n[= A_1 \cup A_2$. On dira que c'est une *partition d'Erdös* si l'entier n peut, d'au moins une manière, s'écrire comme somme d'éléments distincts de l'un des A_i.
Exemple.— $m = 1$, $n = 8$, $[1, 8[= \{1, 2, 4, 5\} \cup \{3, 6, 7\}$ est une partition d'Erdös de $[1, 8[$ car $8 = 1 + 2 + 5$.
Le couple (m, n) est un *couple d'Erdös* si toute partition de $[m, n[$ en deux sous-

ensembles est une partition d'Erdös. L'objectif du problème est d'identifier les couples (m, n) qui sont des couples d'Erdös.

1°) Montrer que $(1, 11)$ n'est pas un couple d'Erdös.
Montrer que $(1, 12)$ et $(2, 12)$ sont des couples d'Erdös.

2°) Trouver d'autres couples d'Erdös, et les déterminer tous si possible.

Indication.— Notre collègue Marie-Paule MULLER nous a signalé une erreur dans cet énoncé : $[2, 12[= \{2, 3, 5, 6, 8\} \cup \{4, 7, 9, 10, 11\}$ n'est pas une partition d'Erdös, donc $(2, 12)$ n'est *pas* un couple d'Erdös.
En revanche, Marie-Paule nous assure que $(2, 15)$ est bien un couple d'Erdös. Dans notre prochaine édition, nous remplacerons donc $(2, 12)$ par $(2, 15)$. Merci, Marie-Paule! Félicitons-nous d'avoir fait cette erreur involontaire dans l'énoncé de ce problème, car cela nous permet de constater l'existence de gens qui s'y intéressent. S'il le faut, nous introduirons *volontairement* des assertions fausses dans les énoncés à venir pour mieux sonder notre lectorat.

PROBLÈME 46

Énoncé (proposé par R. Schäfke) :

Soit la matrice carrée $M_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$ (coefficient binomial).
Montrer que M_n est définie positive, de déterminant égal à 1, et que si λ est valeur propre de M_n alors $1/\lambda$ est également valeur propre de M_n.

PROBLÈME 47

Énoncé (proposé par M. Krier) :

On considère un polygone plan P à n côtés, de sommets consécutifs A_0, A_1, $\cdots$ A_n, avec $A_n = A_0$. Sur chaque segment A_iA_{i+1} on construit un carré $A_iA_{i+1}B_iC_i$, toujours du même côté pour un observateur qui se déplacerait sur le polygone.
L'objectif du problème est de déterminer P de telle sorte que les $2n$ points B_i et C_i soient sur un même cercle.
1°) Rechercher les polygones P convexes. Il y a la solution évidente où l'on prend pour P un polygone régulier. Est-ce la seule solution?
2°) Indiquer comment on peut obtenir les polygones non convexes ayant la propriété demandée.
Remarque.— On évitera de s'embourber dans la définition d'un polygone.

Association des professeurs de mathématiques (APMEP)
Régionale de Strasbourg
10 rue du Général Zimmer
67000 Strasbourg
tel 0388392407

La régionale d'Alsace de l'association des professeurs de mathématiques organise cette année sa rencontre régionale le samedi après-midi **22 mars 1997** à Sélestat. **Tous les professeurs de mathématiques** de l'académie, adhérents ou non, inscrits ou non , **sont cordialement invités** à assister à la conférence, à participer à un des ateliers ou débat, à s'informer ou à proposer des idées, à consulter quelques brochures APMEP ou IREM parues récemment, à discuter avec des collègues d'autres établissements.

SAMEDI 22 mars 1997 au Lycée Jean-Baptiste SCHWILGUE 1, rue du Stade 67604 Sélestat de 14h à 18h30..

Programme :

14h à 15h15 : conférence plénière historique par Jean-Pierre Friedelmeyer, professeur au lycée Couffignal, docteur en histoire des sciences : « la théorie du hasard est-elle née du hasard ? »

15h30 à 16h45 : ateliers parallèles sur les thèmes suivants :

collège : des outils informatiques pour diverses situations mathématiques, par Jacques Ourliac, professeur au collège Jean de la Fontaine, Geispolsheim,

lycée : pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordre de grandeur, par Nacer Makhlouf, professeur à l' Université de Haute-Alsace, co-auteur de la brochure APMEP « fondements pour un enseignement de l' Analyse en termes d'ordre de grandeur »,

lycée professionnel : atelier animé par Jean-Claude Sachet, membre du bureau national de l'APMEP, responsable du secteur « lycées professionnels »,

17h à 18h30 : pause café, consultation de brochures, assemblée générale de l'association .