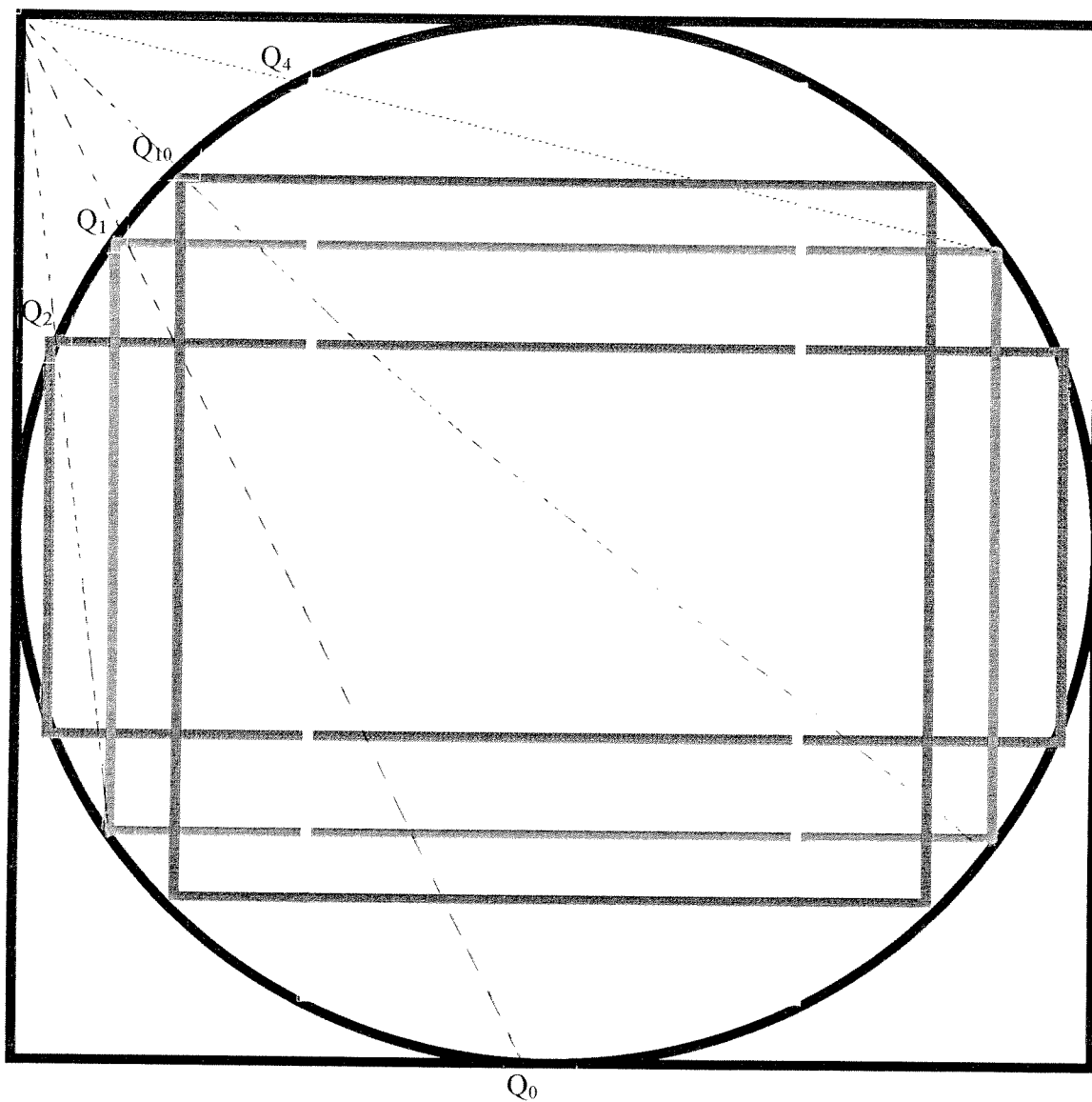


L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 87 - JUIN 1997

I.S.S.N. 0290 - 0068

P



NOTRE COUVERTURE :

Elle présente une construction très simple de toutes les fractions pythagoriciennes x/y , c'est-à-dire telles que $x^2 + y^2 = z^2$ avec x, y, z entiers naturels non nuls, premiers entre eux. Le principe en est le suivant. Un cercle est inscrit dans un carré de côté unité dont l'un des sommets est P . Soit Q_0 l'un des points de tangence sur un côté du carré ne passant pas par P . La droite (PQ_0) coupe le cercle en Q_1 . Alors le rectangle de sommet Q_1 inscrit dans le cercle donne le premier triplet $(3, 4, 5)$ (les côtés sont dans le rapport $4/3$).

En joignant les trois autres sommets de ce rectangle à P on obtient des points d'intersection Q_2, Q_4, Q_{10} correspondant aux triplets $(5, 12, 13)$ $(8, 15, 17)$ et $(20, 21, 29)$ respectivement. Joignant à nouveau P aux sommets des rectangles inscrits dont l'un des sommets est Q_2 ou Q_4 ou Q_{10} , on obtient d'autres triplets et ainsi de suite. Le plus remarquable est que chaque triplet pythagoricien est ainsi obtenu, une et une seule fois (cf. "The book of numbers", par J. H. Conway et R. K. Guy, Copernicus-Springer Verlag New-York, pp. 172-173).

TRAVAILLER ET REUSSIR ENSEMBLE

Huit années en Alsace, vues à présent de Provence, restent pour ma part une riche étape relationnelle et professionnelle : j'y ai rencontré des personnes enthousiastes et volontaires, j'y ai beaucoup reçu en travaillant, j'ai pu y prendre de réelles responsabilités.

Les institutions comme l'IREM, la MAFPEN, l'IUFM, ..., sont des lieux d'échanges, de formation et de production de documents au service des enseignants grâce à la créativité, la conscience professionnelle et l'ouverture scientifique de tous les professeurs qui s'y engagent. Le travail en équipe y est fréquent et efficace, ... même des inspecteurs y participent.

Quel plaisir de travailler ensemble!

Avec mon collègue, nous avons pu favoriser la mise en place de formations et la création de groupes de recherche-action dans des domaines variés grâce aux compétences et à l'amour du métier des nombreux formateurs.

'Mathématiques sans Frontières' (*) peut croître et s'étendre grâce aux équipes alsaciennes de professeurs et de chefs d'établissement qui ont su communiquer à d'autres leur passion : la forte participation à cette compétition dans plus de vingt pays en est une preuve tangible.

Alors pourquoi être parti?

Tout simplement j'ai pris la liberté de poursuivre mon compagnonnage en Provence, où j'essaie de partager ce que j'ai reçu en Alsace et ailleurs.

Les relations tissées sont toujours vivantes et ne s'oublient pas.

Merci encore à tous. Mathématiquement et amicalement vôtre,

Rémy JOST.

(*) Vous trouverez dans ces pages un dossier sur 'Mathématiques sans frontières'.

SOMMAIRE

N° 87 – JUIN 1997

◇ <i>Notre couverture</i>	I
◇ <i>Editorial : Travailler et réussir ensemble</i>	II
◇ <i>Variations autour d'un problème de moquette</i> par A. FRUCHARD et A. TROESCH	1
◇ <i>Pathologie des espaces connexes</i> par M. GUINOT	9
◇ <i>Rôle du professeur dans l'acquisition du raisonnement au collège</i> par F. PLUVINAGE	29
◇ <i>Rallye Mathématique d'Alsace 1997</i>	40
◇ <i>Mathématiques sans Frontières</i>	42
◇ <i>A vos stylos par 'L'Ouvert'</i>	57

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
- ◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
<http://irma.u-strasbg.fr/~irem>
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
- ◇ *Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent*
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro* : 35.– F

VARIATIONS AUTOUR D'UN PROBLÈME DE MOQUETTE

A. FRUCHARD

A. TROESCH

Peut-on recouvrir le sol de n'importe quelle pièce rectangulaire avec un rouleau de moquette de largeur fixée en coupant cette moquette uniquement dans le sens de la largeur? Lorsque l'une des dimensions de la pièce est un nombre entier de fois la largeur du rouleau, c'est évidemment possible. Mais une pose astucieuse permettrait-elle de recouvrir d'autres pièces?

Chercher une réponse à ces questions revient à chercher une réponse à l'énoncé apparemment plus général :

Énoncé 1. — *Un rectangle partitionné en un nombre fini de rectangles ayant chacun au moins un côté de longueur entière a-t-il nécessairement un côté de longueur entière?*

Lorsqu'on prend la largeur du rouleau comme unité de longueur, ces problèmes sont bien équivalents puisque toute partition en rectangles dont l'un des côtés est de longueur entière conduit à une partition en rectangles ayant une longueur 1 en redécoupant ces rectangles.

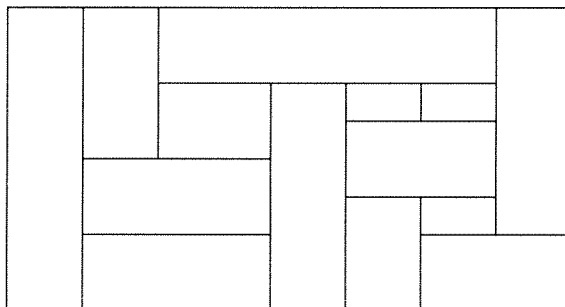


FIG. 1 – *Exemple de pose : un centimètre représente la largeur du rouleau*

Un rectangle est ici un pavé semi-ouvert de \mathbb{R}^2 , $R = [a, a + l[\times [b, b + h[$. Pour abrégé, un rectangle dont une des longueurs l ou h est entière sera appelé *rectangle entier* (à ne pas confondre avec les rectangles à sommets dans \mathbb{Z}^2). De même, nous appellerons *partition entière* d'un rectangle une partition en rectangles entiers.

Un article de mathématiques n'étant pas un roman policier, coupons court à tout suspens en dévoilant la réponse à l'énoncé 1 : OUI.

Nous sommes bien conscients qu'il s'agit là d'un exercice, peut-être déjà connu du lecteur, mais au-delà du résultat, c'est la variété des preuves et la comparaison de diverses approches mathématiques qui nous paraît intéressante. Aussi, nous suggérons au lecteur de réfléchir sur cet énoncé avant de continuer sa lecture. S'il trouve une preuve différente de celles que nous proposons, qu'il nous en fasse part.

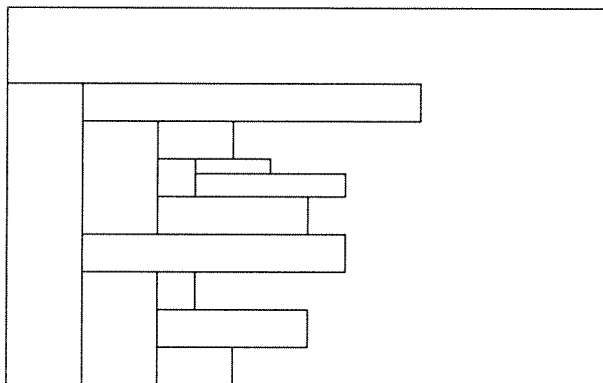


FIG. 2 – Amorce d’une partition en rectangles

Voici une preuve qui a l’avantage d’être courte :

Avec les notations

$$R = \bigcup_{k=1}^m R_k \text{ où } R_k = [a_k, a_k + l_k[\times [b_k, b_k + h_k[\text{ et } \{x\} \text{ pour la partie fractionnaire de } x,$$

on a :

$$\begin{aligned} (e^{2\pi i\{l\}} - 1)(e^{2\pi i\{h\}} - 1)e^{2\pi i(a+b)} &= (e^{2\pi i(a+l)} - e^{2\pi ia})(e^{2\pi i(b+h)} - e^{2\pi ib}) \\ &= -4\pi^2 \int_a^{a+l} e^{2\pi ix} dx \int_b^{b+h} e^{2\pi iy} dy \\ &= -4\pi^2 \int_R e^{2\pi i(x+y)} dx dy \\ &= -4\pi^2 \sum_{k=1}^m \int_{R_k} e^{2\pi i(x+y)} dx dy \end{aligned}$$

$$(1) (e^{2\pi i\{l\}} - 1)(e^{2\pi i\{h\}} - 1)e^{2\pi i(a+b)} = \sum_{k=1}^m (e^{2\pi i\{l_k\}} - 1)(e^{2\pi i\{h_k\}} - 1)e^{2\pi i(a_k+b_k)} = 0$$

donc $\{l\} = 0$ ou $\{h\} = 0$. \square

Après cette preuve austère, voici une petite anecdote pour détendre l’atmosphère. Cela se passe dans un prestigieux séminaire de mathématiques. À peine l’orateur a-t-il achevé la démonstration de son résultat principal qu’un auditeur lui présente un contre-exemple imparable. Après un long moment de perplexité et après mûre réflexion, l’orateur visiblement soulagé s’exclame : “Oui, mais j’ai une autre démonstration !”

Voici donc quelques preuves supplémentaires au cas où un lecteur nous présenterait un contre-exemple.

1 Preuve élémentaire

Elle consiste, à partir d’une partition en rectangles entiers, à construire une autre partition ayant un nombre plus petit de rectangles entiers. Par récurrence on arrive ainsi à une partition formée d’un seul rectangle entier.

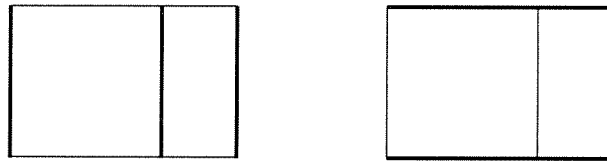


FIG. 3 – Les lignes grasses matérialisent les côtés de longueur entière

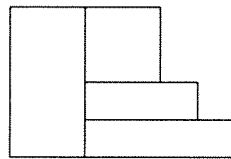


FIG. 4 – Escalier

On appelle *configuration entière* une union disjointe de rectangles entiers (au sens du début). On dit qu'une configuration entière est *réductible* s'il existe une configuration entière ayant même union, mais comportant un nombre moindre de rectangles. Par exemple deux rectangles entiers disjoints dont les adhérences ont un côté commun forment une configuration réductible : la première configuration de la Figure 3 est réductible parce que le côté commun est entier, la deuxième parce que la somme de deux entiers est un entier.

Une généralisation de cette configuration est l'*escalier*, constitué d'un rectangle juxtaposé à une pile de rectangles de longueurs décroissantes (voir Figure 4).

Pour montrer que cette configuration est réductible nous examinons les deux cas :

1. — La marche supérieure de l'escalier est de longueur entière

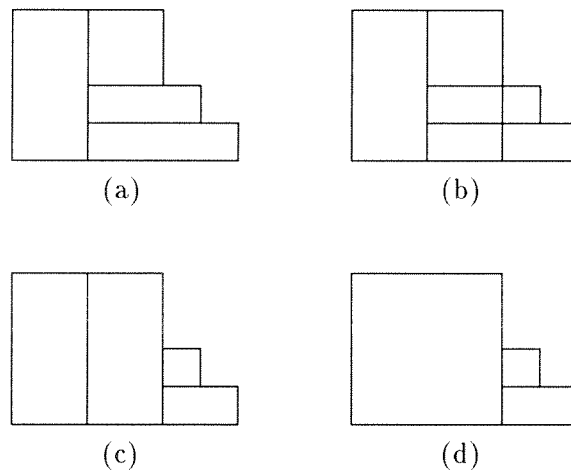


FIG. 5 – Marche supérieure de longueur entière

On peut alors subdiviser tous les autres rectangles de la pile en un rectangle ayant cette longueur, le rectangle restant étant alors lui aussi entier (cf. Figure 5 (b)) : c'est clair si c'est le côté vertical qui est de longueur entière, sinon le côté horizontal aura une longueur qui est la différence de deux entiers. L'étape suivante consiste alors à fusionner tous les rectangles ayant la même longueur horizontale que la marche supérieure de l'escalier (cf. Figure 5 (c)), et enfin, à fusionner le rectangle ainsi obtenu avec le rectangle juxtaposé à l'escalier (cf. Figure 5 (d)). On obtient ainsi une configuration ayant un rectangle de moins.

2. — La marche supérieure de l'escalier est de hauteur entière

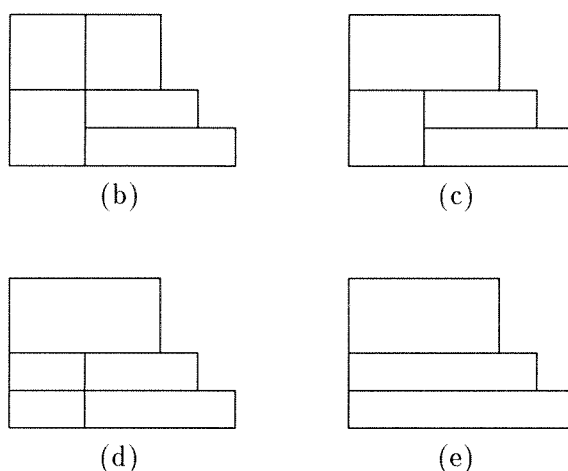


FIG. 6 – *Marche supérieure de hauteur entière*

Nous commençons par subdiviser le rectangle de gauche en le coupant horizontalement en un rectangle de hauteur h , et un rectangle restant qui est également entier. C'est clair si la longueur du côté horizontal est entière, sinon, sa hauteur est la différence de deux entiers (cf. Figure 6 (b)). On peut alors fusionner les deux rectangles supérieurs. On obtient ainsi une configuration ayant le même nombre de rectangles, mais contenant un escalier en ayant un de moins (cf. Figure 6 (c)).

Ou bien le nouvel escalier est réductible d'après le paragraphe précédent, si la longueur de son côté horizontal est entière, ou bien contient un escalier ayant un rectangle de moins. Par itération de ce procédé (cf. Figure 6 (d)) on aboutit finalement à une configuration ayant le même nombre de rectangles, mais contenant un escalier à une seule marche, dont nous avons déjà vu qu'il est réductible (cf. Figure 6 (e)). Ainsi toute configuration en escalier est réductible. La preuve de l'énoncé 1 repose alors sur le lemme suivant :

Lemme . — *Toute partition entière d'un rectangle contient un escalier.*

Preuve :

Considérons le rectangle R du pavage situé dans le coin inférieur gauche (cf. Figure 7). Les rectangles adjacents à droite de R forment une pile dont la hauteur est supérieure ou égale à la hauteur de R . Si elle est strictement supérieure à la hauteur de R , ce sont les rectangles reposant sur R qui auront une largeur totale égale à la largeur de R . Dans les

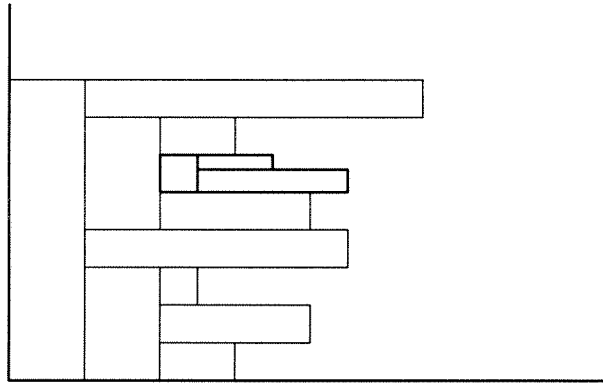


FIG. 7 – Recherche d'une configuration en escalier

deux cas nous aurons une configuration formée d'un rectangle et d'une pile de rectangles adjacents ayant une hauteur égale à la longueur du côté de R auquel ils sont adjacents. Pour fixer les idées supposons que cette configuration est horizontale. Si les longueurs des rectangles de la pile adjacente sont décroissantes, le maximum étant sur le bord inférieur du pavage, cette configuration est en escalier, et c'est terminé. Sinon, l'un des rectangles adjacents à R est, ou bien entouré de deux rectangles adjacents ayant des longueurs plus grandes, ou bien au bord du pavage et bordé par un rectangle plus long. Dans les deux cas, ce rectangle forme, avec les rectangles qui lui sont adjacents le long du côté encore libre, une configuration du même type : un rectangle R' bordé par une pile de rectangles dont la hauteur est égale à la longueur du côté de R' auxquels ils sont adjacents. On peut donc refaire le même raisonnement. Les nouveaux rectangles sélectionnés sont toujours situés à droite des rectangles précédents. On obtient ainsi une suite injective de rectangles du pavage. Cette suite est donc finie, ce qui signifie que le processus doit s'arrêter, et que l'on aboutit à une configuration en escalier. \square

2 Preuve par l'analyse

Elle s'inspire de la courte preuve donnée par la formule (1). Nous la présentons directement en dimension quelconque puisque cela n'est pas plus difficile. Ainsi :

Énoncé 2. — *Un pavé de \mathbb{R}^n , partitionné en pavés ayant chacun une longueur entière, a une longueur entière.*

Comme dans le cas de \mathbb{R}^n , nos pavés sont semi-ouverts :

$$P = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k[$$

Soit \mathcal{P} l'ensemble des réunions finies de pavés de \mathbb{R}^n . Cet ensemble est un *clan* c'est-à-dire un ensemble de parties stable par union finie, intersection finie et différence (pour la

différence écrire $\bigcup_{i \in I} P_i - \bigcup_{j \in J} Q_j = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (P_i - Q_j)$, et noter que la différence de deux pavés s'écrit comme la réunion d'au plus $2n$ pavés).

Lemme . — *Il existe une "mesure" à valeurs positives et négatives $\mu_n : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ additive (i.e. $\mu_n(A \cup B) = \mu_n(A) + \mu_n(B)$ si $A \cap B = \emptyset$) telle que si P est un pavé : $\mu_n(P) = 0$ si et seulement si P a au moins un côté entier.*

Preuve :

a) $n=1$

Soit F une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Posons $\mu_1([a, b]) = F(b) - F(a)$. Si $a < b < c$ alors $\mu_1([a, b]) + \mu_1([b, c]) = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \mu_1([a, c])$ et par récurrence la mesure d'un intervalle union finie d'intervalles deux à deux disjoints est la somme des mesures de ces intervalles. On prolonge donc μ_1 par additivité à \mathcal{P} . Pour obtenir la deuxième propriété on peut prendre F périodique de période 1, injective sur chaque période, par exemple $F(x) = x - [x]$, où $[x]$ est la partie entière de x . On a ainsi $\mu_1([a, b]) = 0 \iff b - a$ entier.

b) Dimension n

On définit

$$\mu_n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \mu_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \mu_1([a_n, b_n]).$$

Puisque \mathbb{R} est intègre, il est clair que $\mu_1([a_1, b_1]) \times \cdots \times \mu_1([a_n, b_n]) = 0$ implique qu'il existe i tel que $\mu_1([a_i, b_i]) = 0$.

Pour pouvoir prolonger μ_n par additivité à \mathcal{P} il faut montrer que si un pavé est une réunion disjointe de pavés alors la mesure de ce pavé est la somme des mesures des pavés qui le composent.

Le cas le plus simple est celui où la partition est le produit de partitions de chacun des côtés :

$$P = \bigcup_{\substack{i=1 \dots m_1 \\ j=1 \dots m_2 \\ \dots}} [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}] \times \cdots$$

Dans la somme correspondante des mesures des petits pavés,

$$\Sigma = \sum_{\substack{i=1 \dots m_1 \\ j=1 \dots m_2 \\ \dots}} \mu_1([a_i, a_{i+1}]) \times \mu_1([b_j, b_{j+1}]) \times \cdots$$

on regroupe les petits pavés par tranches de pavés ayant la même projection sur le premier axe de coordonnées d_1 . Pour une tranche i on peut mettre en facteur le premier facteur $\mu_1([a_i, a_{i+1}])$ dans chacun des produits. Le facteur restant est indépendant de la tranche : il correspond à la somme Σ_1 des mesures des pavés de dimension $n-1$ obtenue par projection sur l'hyperplan orthogonal à d_1 . En utilisant le résultat de la dimension 1

$$\Sigma = (\mu_1([a_1, a_2]) + \cdots + \mu_1([a_{m_1-1}, a_{m_1}])) \Sigma_1 = \mu_1([a_1, a_{m_1}]) \Sigma_1$$

on se ramène à la dimension $n-1$ et on conclut par récurrence. Dans le cas général, on se ramène au cas simple en subdivisant plus finement le pavé (considérer les hyperplans

passant par toutes les faces de la partition initiale). Comme nous venons de le voir, la somme des mesures de ces pavés est égale à la mesure du grand pavé. Mais comme chaque pavé de la partition initiale est une union disjointe de pavés de la nouvelle partition, la mesure du grand rectangle est la somme des mesures des pavés de la partition initiale. \square

3 Preuve “ arithmétique ”

L'idée s'inspire de la preuve d'un autre énoncé (pour abrégé, nous dirons ici qu'un rectangle $R = [a, a + l[\times [b, b + h[$ avec a, b, l et h entiers est un rectangle de \mathbb{Z}^2)

Énoncé 3. — *Un rectangle de \mathbb{Z}^2 partitionné en rectangles de \mathbb{Z}^2 ayant tous au moins un côté de longueur paire a au moins un côté de longueur paire.*

En effet l'aire totale, somme des aires des rectangles donc somme d'entiers pairs, est paire. Le nombre 2 étant premier, l'un des côtés est nécessairement pair. \square

Cela se généralise clairement à tout entier p premier :

Énoncé 4. — *Un rectangle de \mathbb{Z}^2 partitionné en rectangles de \mathbb{Z}^2 ayant tous au moins un côté divisible par p a au moins un côté divisible par p .*

On en déduit l'

Énoncé 5. — *Pour tout entier premier p , tout rectangle partitionné en rectangles entiers (au sens du début) a au moins un côté dont la longueur a une partie fractionnaire inférieure à $1/p$.*

Preuve :

En effet, après agrandissement φ d'un facteur premier p on obtient un rectangle $\varphi(R)$ partitionné en rectangles ayant un côté de longueur multiple de p . À chaque sommet (x, y) de cette partition on associe la “partie entière” dans \mathbb{Z}^2 , $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$. Ceci conduit à une partition dans \mathbb{Z}^2 d'un rectangle $[\varphi(R)]$ de \mathbb{Z}^2 à laquelle on peut appliquer l'énoncé précédent (noter que si $b - a$ est entier alors $\lfloor pb \rfloor - \lfloor pa \rfloor$ est un multiple de p). Après réduction d'échelle $1/p$ le rectangle $\varphi^{-1}([\varphi(R)])$ est donc entier (ie. a un côté entier) et ne diffère de R que d'au plus $1/p$. \square

L'énoncé 1 se déduit des propriétés archimédiennes de \mathbb{R} , de l'infinité des nombres premiers et de la compacité de $\{1, 2\}$:

$$(2) \quad \left(\forall p \text{ premier } \exists k \in \mathbb{N} \exists j \in \{1, 2\} \text{ et } 0 \leq x_j - k < \frac{1}{p} \right) \implies \exists j \in \{1, 2\} \text{ et } x_j \in \mathbb{N}.$$

Commentaires

1. — Nous attribuons le fait d'avoir trouvé cette preuve à notre penchant pour l'Analyse Non Standard. Celle-ci a au moins l'avantage de simplifier à nos yeux les formulations : on fixe un nombre premier p infiniment grand. Par exemple l'énoncé (2) est remplacé dans ce contexte par :

Si x est un réel standard infiniment proche d'un entier, alors x est entier.

2. — Nous sommes à la recherche d'une preuve totalement algébrique utilisant la propriété d'intégrité d'un anneau bien choisi (\mathbb{R} pour la preuve d'analyse, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour celle arithmétique...).

4 Généralisations aux dimensions supérieures

À notre avis les preuves présentées sont classées par ordre croissant de simplicité. Nous allons voir qu'elles sont aussi classées par ordre croissant de puissance, la méthode offrant les meilleures généralisations étant la dernière. La première méthode ne semble pas se généraliser directement. Déjà en dimension 3 le problème nous paraît inextricable, faute d'avoir trouvé un ensemble de configurations réductibles à la fois élémentaire et complet en ce sens que toute partition entière d'un pavé en contient une.

La preuve d'analyse a déjà fourni l'énoncé 2 pour la dimension n . Seule la preuve arithmétique offre une généralisation directe prouvant l'énoncé suivant

Énoncé 6. — *Un pavé de \mathbb{R}^n partitionné en un nombre fini de pavés ayant tous au moins c côtés de longueur entière a au moins c côtés de longueur entière.*

Preuve :

Après agrandissement d'un facteur p premier quelconque et prise de partie entière on obtient un pavé de \mathbb{Z}^n partitionné en pavés de \mathbb{Z}^n ayant c côtés divisibles par p , donc de volume divisible par p^c . Si p est supérieur à la longueur maximale d'un côté du pavé de départ, chaque longueur de la partie entière du rectangle agrandi contient au plus un facteur p dans sa décomposition en facteurs premiers, donc au moins c de ces longueurs sont divisibles par p . Ainsi au moins c longueurs du pavé initial ne diffèrent d'un entier que de $1/p$ au maximum, et ceci pour tout p premier assez grand. \square

Remarque finale

On peut aussi obtenir l'énoncé 6 à partir de l'énoncé 2. Supposons par l'absurde que le nombre de côtés entiers du grand pavé est inférieur ou égal à $k - 1$. Dans ce cas il existerait $n - k + 1$ côtés de P ayant une dimension non entière. Considérons une $(n - k + 1)$ -face P' de P ayant ces côtés. La partition du pavé P induit alors, par intersection sur P' , une partition de P' dont chaque pavé a au moins un côté de longueur entière. Il en résulte que P' a au moins un côté de longueur entière, d'où la contradiction.

Adresse des auteurs :

A. FRUCHARD
 Département de Mathématiques
 Pôle Sciences et Technologie
 Avenue Marillac
 17042 LA ROCHELLE cedex 1
 Tél. 05 46 45 87 92
 e-mail : afruchar@math.univ-lr.fr

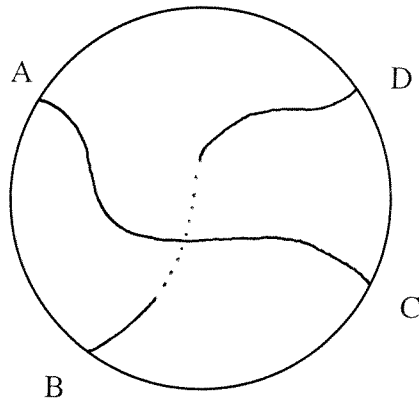
A. TROESCH
 I.R.M.A.
 Université Louis Pasteur
 7, rue René-Descartes
 67084 STRASBOURG cedex
 Tél. 03 88 41 66 67
 e-mail : troesch@math.u-strasbg.fr

PATHOLOGIE DES ESPACES CONNEXES

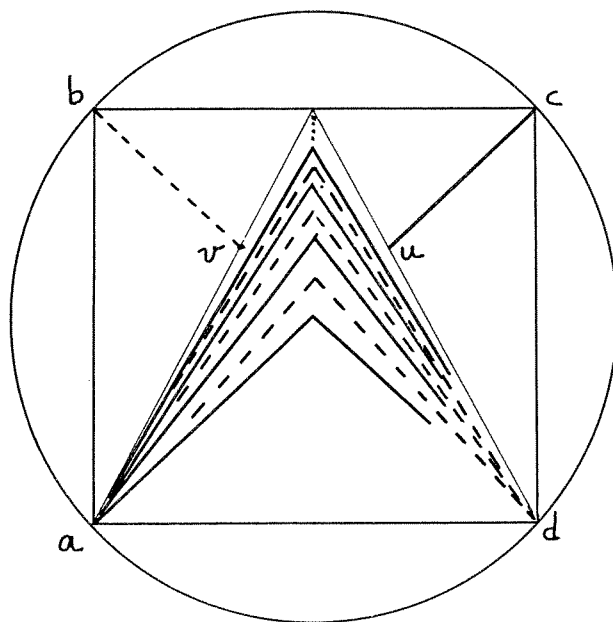
Marc GUINOT

Le groupe mathématique de Saumur n'a pas ménagé sa peine (ni son argent car les relations publiques coûtent cher) pour se faire connaître au-delà d'une ligne qui va de Varennes-sur-Loire à Saint-Lambert-des-Levées en passant par Saint-Cyr-en-Bourg. C'est ainsi que la revue '*Singularité*' (aujourd'hui disparue sans laisser de trace) et sa consœur '*L'Ouvert*' (toujours bien vivante) ont publié divers articles se référant expressément aux travaux de cette estimable "Académie" provinciale et ligérienne, et en particulier, pour ce qui concerne cette dernière publication, en décembre 1990 (sur les quaternions et les octonions) et en décembre 1992 (sur le calcul de certaines valeurs de la fonction zêta). En sens inverse, le groupe de Saumur n'hésite pas à faire son miel de certains articles de '*L'Ouvert*', comme l'an passé par exemple, en consacrant deux heures d'horloge à tenter de décomposer un carré en un nombre impair de triangles de même aire (cf. '*L'Ouvert*' n° 76, sept. 1994). Rappelons que c'est impossible...

Bref, tout cela pour dire que j'ai été fort dépité d'apprendre que le rédacteur en chef actuel de '*L'Ouvert*' ne connaissait même pas l'existence du groupe dont je suis le porte-parole. Cela ne l'a heureusement pas empêché de se déclarer prêt à publier l'article qui va suivre et qui est une version étendue du dernier compte-rendu que je lui ai fait parvenir. Le sujet (traité à Saumur le 10 mai 1996 est d'ailleurs directement inspiré par un intéressant article de J.-P. FRIEDELMEYER, le rédacteur en chef incriminé, concernant la première démonstration par GAUSS du théorème fondamental de l'algèbre ('*L'Ouvert*', n° 81). Un des points essentiels de l'argumentation de GAUSS est qu'il est impossible de disposer quatre points A, B, C, D sur un cercle, en suivant par exemple le sens trigonométrique, et de joindre A et C d'une part et B à D de l'autre par des lignes continues à l'intérieur du cercle, sans que celles-ci se coupent.



Or, ce résultat est faux si au lieu des arcs continus en question, on utilise des ensembles de points, considérés pourtant comme d'un seul tenant, et qu'on appelle des ensembles connexes. L'exemple représenté par la figure ci-dessous se trouve dans un numéro d'avril 2462 (1) de la revue '*Singularité*', dans un article intitulé "Paradoxical Connections in the Plane".



Précisons qu'un des ensembles est représenté en traits pleins épais et l'autre (faute de couleur) avec des tirets. Les pointillés du haut de la figure indique que l'imbrication des deux ensembles se poursuit indéfiniment jusqu'au côté bc . Les autres traits ne sont que des traits de construction. On voit alors que le premier de ces ensembles "joint" a à c en "passant" par u , que le second "joint" b à d en "passant" par v et qu'aucun de ces ensembles ne coupe l'autre en ce sens qu'ils n'ont aucun point commun. Pourtant, ce sont des ensembles connexes en ce sens qu'il n'est pas possible de les partager en deux ensembles "bien séparés". En effet, si on prend le premier de ces ensembles, par exemple, le seul partage envisageable serait de considérer d'une part le "bouquet" des lignes brisées issues de a et d'autre part le segment uc mais il est difficile de dire que ces ensembles sont "bien séparés" puisque le point u (qui appartient à uc) est "adhérent" à l'autre partie.

Il y a bien d'autres paradoxes du même genre dans l'article cité plus haut. Le plus spectaculaire est celui d'un ensemble connexe du plan dont la connexité ne tient qu'à un fil, je veux dire à un point : si on enlève celui-ci l'ensemble se désintègre complètement, devenant ce que les spécialistes appellent un ensemble totalement discontinu.

(1) 2462 après la naissance de Socrate... C'est un mode de datation que la revue souhaitait instaurer. '*Singularité*' a disparu trois ans après sa création, à la fin de cette même année 2462 soit en l'an 1992 de l'ère chrétienne.

Dans cet article, nous nous proposons d'expliquer comment tout cela est possible et nous y ajouterons un exemple assez rigolo d'ensemble connexe dénombrable donné en exercice par BOURBAKI.

A.— Les premiers paradoxes de la connexité

1. Nous supposerons connue la topologie élémentaire des espaces \mathbf{R}^n et nous nous contenterons pour le reste des quelques rappels suivants.

On appellera ici **espace topologique** tout ensemble E muni d'une structure définie par la donnée, pour tout élément x de E , d'un ensemble $\mathcal{V}(x)$ de parties de E satisfaisant aux axiomes suivants :

(V₁) L'ensemble $\mathcal{V}(x)$ n'est pas vide.

(V₂) Si $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$.

(V₃) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et si $W \supset V$, alors $W \in \mathcal{V}(x)$.

(V₄) Si $V, W \in \mathcal{V}(x)$, alors $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.

(V₅) Si $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \in \mathcal{V}(y)$ pour tout $y \in W$.

Les éléments de E sont appelés **les points** de E , les éléments $V \in \mathcal{V}(x)$ **les voisinages du point x de E** et la famille $(\mathcal{V}(x))_{x \in E}$ la **structure topologique** ou simplement la **topologie** de E .

La dernière propriété énoncée ci-dessus est la plus subtile. Elle signifie que tout voisinage de x est aussi voisinage des points suffisamment voisins de x . Elle se vérifie dans \mathbf{R}^n en prenant pour W une boule ouverte de centre x contenue dans V .

2. Telle que nous l'avons définie, la notion d'espace topologique permet d'introduire les notions bien connues d'ensemble ouvert, d'ensemble fermé, de point adhérent, etc ... que nous utiliserons constamment dans la suite. Elle est intimement liée à la notion d'application continue, qui généralise la notion classique de fonction continue. De façon précise, on dit qu'une application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F est **continue en a** (où a est un point donné de E) si pour tout voisinage W de $f(a)$ dans F , il existe un voisinage V de a dans E tel que $f(V) \subset W$. Il revient au même de dire que pour tout voisinage W de $f(a)$, l'ensemble $f^{-1}(W)$ (image réciproque de W par f) est un voisinage de a dans E . On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **continue** si elle est continue en tout point x de E .

Le lecteur vérifiera que cette dernière définition équivaut à dire que l'image réciproque par f de tout ensemble ouvert (resp. fermé) de F est un ensemble ouvert (resp. fermé) de E .

3. Les espaces topologiques les plus communs sont les **espaces métriques** (qui généralisent très naturellement les espaces numériques) et les sous-espaces d'un espace topologique donné. Pour définir ces derniers, considérons un espace topologique E et un sous-ensemble E' de E . Si $x \in E'$, il est naturel d'associer à tout voisinage V de x dans E le sous-ensemble de E' égal à $V \cap E'$ (**trace** de V sur E'). Lorsque V parcourt l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x dans E , les ensembles

$V \cap E'$ forment un ensemble $\mathcal{V}'(x)$ de sous-ensembles de E' qui vérifient en fait, comme la famille $\mathcal{V}(x)$, les axiomes (V_1) à (V_5) du n° 1. Muni de la structure d'espace topologique correspondante, on dit que E' est un **sous-espace** de E et sa structure est dite **induite** sur E' par la structure topologique de E .

On démontre alors facilement que les ouverts de E' sont les sous-ensembles de E' de la forme $U \cap E'$ où U est un ouvert de E et qu'on a un résultat semblable pour les fermés. Il convient de noter enfin que si E'' est un sous-ensemble de E' , le sous-espace E'' de E' est identique au sous-espace E'' de E ; autrement dit les topologies induites sur E'' par la topologie de E' d'une part et par celle de E de l'autre sont les mêmes.

4. La notion d'espace connexe est censée rendre compte, en topologie générale, de ce qu'est un ensemble d'"un seul tenant". On comprendra mieux ce que c'est en considérant un ensemble qui ne l'est pas, autrement dit un ensemble qui se "dissocie" naturellement.

On dira donc sans barguigner qu'un espace topologique E est **dissociable** s'il est réunion de deux sous-ensembles non vides **sans point adhérent** commun. Dans le cas contraire, on dira que c'est un **espace connexe**.

Un espace non connexe (donc dissociable) E est dit ordinairement **disconnexe**, mais le mot n'est ni très joli ni très bien formé. Enfin, une partie A d'un espace topologique E est dite connexe (et on dit que A est un **ensemble connexe** dans E) si le sous-espace A de E est connexe.

5. Cette définition étonnera peut-être certains lecteurs. Rassurons-les en leur demandant de voir avec nous que les propriétés suivantes sont équivalentes pour un espace topologique E donné.

- (i) E est dissociable (définition ci-dessus)
- (ii) Il existe dans E deux sous-ensembles fermés non vides F et G tels que $F \cup G = E$ et $F \cap G = \emptyset$.
- (iii) Il existe dans E deux sous-ensembles ouverts non vides U et V tels que $U \cup V = E$ et $U \cap V = \emptyset$.
- (iv) Il existe dans E un ensemble A non vide et différent de E qui est à la fois ouvert et fermé.

Supposons que E soit réunion de deux sous-ensembles A et B non vides sans point adhérent commun. Comme tout point de A est adhérent à A et tout point de B adhérent à B , il résulte de l'hypothèse que $A \cap B = \emptyset$. En d'autres termes, A et B sont des parties complémentaires de E . Mais il résulte aussi de l'hypothèse qu'un point adhérent à A ne peut appartenir à B . C'est donc un élément de A . Cela veut dire que $A = \overline{A}$, donc que A est fermé. Le même raisonnement montre que B est fermé. D'où la propriété (ii) avec $F = A$ et $G = B$. Il est ensuite facile de voir que (ii) implique (iii) et que (iii) implique (iv) en prenant $U = F$ et $V = G$ dans le premier cas et $A = U$ dans le second.

Enfin, si A est un sous-ensemble non vide et différent de E , à la fois ouvert et

fermé, il en est naturellement de même de A^c (*). On a donc $A = \overline{A}$ et $B = \overline{B}$ et par conséquent $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. D'où (i) puisque $A \cup B = E$.

6. Les exemples les plus simples d'espace sont fournis par les espaces numériques \mathbf{R}^n et en particulier par la droite réelle \mathbf{R} .

Plus généralement, tout sous-ensemble convexe de \mathbf{R}^n est connexe et donc en particulier tout intervalle I de \mathbf{R} est connexe. Ce dernier résultat admet d'ailleurs une réciproque, facile à établir, selon laquelle tout ensemble connexe de \mathbf{R} est convexe, et par conséquent un intervalle.

Outre les exemples précédents, nous aurons besoin de quelques résultats généraux sur les ensembles connexes d'un espace topologique quelconque. Il y en a trois à retenir :

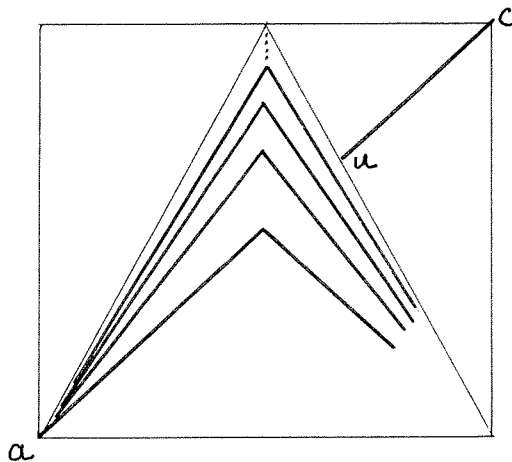
a) Toute réunion d'ensembles connexes A_i d'un espace topologique E est connexe si tous les A_i possèdent au moins un point en commun. En particulier, la réunion de deux ensembles connexes A et B de E est connexe si $A \cap B \neq \emptyset$.

b) Si A est un ensemble connexe d'un espace topologique E et si f est une application continue de E dans un second espace topologique F , l'image directe $f(A)$ de A par f est un ensemble connexe dans F . On dira en bref que l'**image continue** d'un connexe est un connexe. En particulier, un **arc continu** dans un espace topologique E est un connexe de E si on appelle ainsi l'image continue dans E d'un intervalle $[a, b]$ de \mathbf{R} (où $a < b$).

c) Si A est un sous-ensemble connexe d'un espace topologique E , il en est de même de \overline{A} et plus généralement de tout ensemble B tel que $A \subset B \subset \overline{A}$.

En termes plus parlants, on peut dire qu'un ensemble connexe le reste si on lui ajoute des points adhérents.

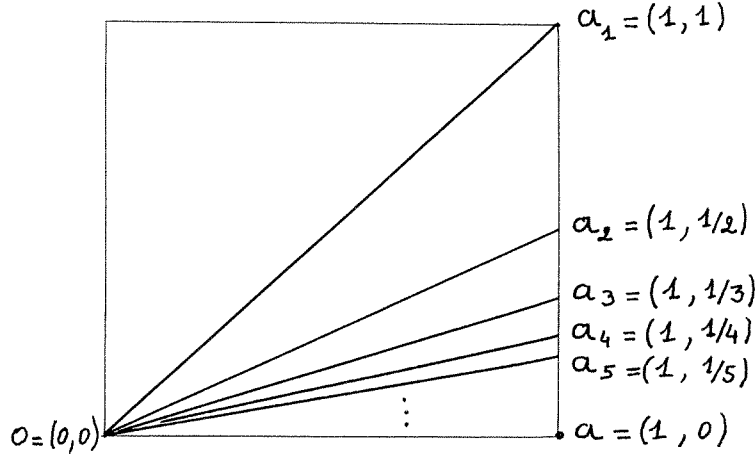
7. Ce sont les propriétés précédentes qui permettent de démontrer que l'ensemble E de l'introduction est connexe :



(*) C'est-à-dire le complémentaire de A dans E .

En premier lieu, il est facile de voir que la réunion R des lignes brisées issues de a est connexe en utilisant la propriété a) du n° 6. Comme le point u est adhérent par construction à R , on déduit de la propriété c) que $R \cup \{u\}$ est connexe. Le résultat final (la connexité de E) découle alors facilement de b) puisque le segment $[u, c]$ est connexe.

Un exemple plus classique et plus simple à concevoir est donné par la figure suivante :



qui représente l'ensemble $E = (U_{n=1}^{\infty} S_n) \cup \{a\}$ où S_n est le segment qui joint o à a_n . C'est aussi un ensemble connexe car a est évidemment adhérent à la réunion des S_n .

Le lecteur pourra s'amuser à démontrer que E n'est pas "connexe par arcs" en ce sens qu'il n'existe pas d'arc continu joignant dans E le point a à un autre point de E .

8. Les paradoxes précédents reposent essentiellement sur la propriété b) du n° 6. Pour éviter toute discussion, il serait bon de démontrer cette propriété.

Supposons donc qu'on ait un ensemble A connexe dans un espace topologique E et un ensemble B tel que $A \subset B \subset \bar{A}$. Il s'agit de voir que B est connexe. Raisonnons par l'absurde en supposant que cela ne soit pas le cas, donc que B puisse être dissocié en deux ouverts non vides. Rien n'empêche d'écrire ces ouverts de B sous la forme $U \cap B$ et $V \cap B$ où U et V sont deux ouverts de l'espace ambiant E . On a alors $(U \cap B) \cap (V \cap B) = \emptyset$, autrement dit $U \cap V \cap B = \emptyset$ et $(U \cap B) \cup (V \cap B) = B$, autrement dit $(U \cup V) \cap B = B$, relation qui veut dire aussi que $B \subset U \cup V$. Comme $A \subset B$, on déduit de cette dernière relation que $A \subset U \cup V$, ce qui s'écrit aussi $(U \cup V) \cap A = A$, c'est-à-dire $(U \cap A) \cup (V \cap A) = A$. Comme $U \cap A$ et $V \cap A$ sont des ouverts de A et que $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$, il résulte de toutes ces propriétés et de l'hypothèse que l'un des ensembles $U \cap A$ ou $V \cap A$ est vide (et l'autre égal à A). Supposons par exemple que ce soit $U \cap A$ qui soit vide et comme $U \cap B$ ne l'est pas, considérons un élément $x \in U \cap B$. Comme $x \in B, x \in \bar{A}$. Comme $x \in U$ et que U est un ouvert de E , U est un voisinage de x . Par suite, U doit rencontrer A , ce qui est absurde puisque $U \cap A = \emptyset$. CQFD.

Nous laissons le lecteur démontrer les autres affirmations du n° 6 et nous passons à un autre type de pathologie avec les espaces connexes dénombrables.

B.— Connexité et dénombrabilité

1. Rappelons que selon N. BOURBAKI, un ensemble E est dit **dénombrable** s'il peut être mis en correspondance bijective avec un sous-ensemble de \mathbf{N} . Il revient au même de dire que E est fini ou en correspondance bijective avec \mathbf{N} .

Comme exemples d'ensembles dénombrables, on peut citer l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels, n'importe quel sous-ensemble d'un ensemble dénombrable et l'image d'un ensemble dénombrable par une application quelconque. Comme exemples d'ensembles non dénombrables, on a l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels et n'importe quel intervalle non vide et non réduit à un point.

2. Dans un espace numérique \mathbf{R}^n , il est rare qu'un sous-ensemble N dénombrable soit connexe : cela n'arrive que dans les cas triviaux où N est vide ou réduit à un point. En fait, nous allons voir qu'un tel ensemble est **totalelement discontinu**, ce qui veut dire que tout sous-ensemble C de N qui est connexe est nécessairement vide ou réduit à un point. Pour le voir, nous nous contenterons du cas $n = 2$, le cas général pouvant se faire, sans difficultés majeures, sur le même modèle.

Si C est un sous-ensemble connexe de N , l'image de C par la projection $(x, y) \mapsto x$ est un connexe de \mathbf{R} car la projection en question est une application évidemment continue. C'est donc un intervalle I de \mathbf{R} , mais un intervalle qui est dénombrable comme l'ensemble C lui-même. Cela ne peut avoir lieu que si I est vide ou réduit à un point a .

On raisonne de même pour l'image de C par la projection $(x, y) \mapsto y$ qui est donc un intervalle J de \mathbf{R} , vide ou réduit à un point b . On a ainsi $C = \emptyset$ (si $I = \emptyset$ ou $J = \emptyset$) ou $C = \{(a, b)\}$. D'où le résultat.

3. Le même phénomène a lieu, en fait, si on remplace l'espace numérique \mathbf{R}^n par n'importe quel espace topologique E **métrisable** c'est-à-dire par un espace dont la topologie peut être définie par une certaine distance d .

Pour le voir, considérons un sous-ensemble dénombrable N de E et une partie connexe C de N . Supposons C non vide, choisissons un élément a dans C et associons à tout point x de E le nombre réel $d(a, x)$. Comme l'application de E dans $\mathbf{R} : x \mapsto d(a, x)$ ainsi définie est continue (c'est une conséquence élémentaire de l'inégalité triangulaire), l'image de C par cette application est un ensemble connexe de \mathbf{R} , donc un intervalle I , mais, là encore, un intervalle dénombrable. Comme I n'est pas vide, car il contient le nombre $0 = d(a, a)$, il est nécessairement réduit à cet élément. Cela veut dire aussi que $d(a, x) = 0$ pour tout $x \in C$. Comme la relation $d(a, x) = 0$ équivaut à $x = a$, on voit ainsi finalement que $C = \{a\}$. CQFD.

4. On déduit de ce qui précède qu'un espace topologique dénombrable et connexe ne peut être métrisable. Des exemples très simples peuvent néanmoins en être

donnés avec des topologies qui n'ont pas un grand intérêt. Ainsi, sur un ensemble E quelconque (dénombrable ou non), on peut définir une topologie particulière pour laquelle les seuls ouverts sont \emptyset et E . Muni de cette topologie, E est toujours connexe. Mais l'exemple n'est pas intéressant car si x est un point de E , il n'y a qu'un voisinage de x dans E , qui est E lui-même. Il en résulte que si x et y sont deux points distincts, il est impossible de trouver un voisinage V de x et un voisinage W de y tels que $V \cap W = \emptyset$; en fait, ici, on a toujours $V = W = E$...

La propriété que nous venons de citer, concernant deux points distincts, joue un rôle important en topologie générale. On dit, de façon précise, qu'un espace topologique E est **séparé** si pour deux points distincts quelconques x et y de E , il existe au moins un voisinage V de x et un voisinage W de y tels que $V \cap W = \emptyset$.

A priori, un espace séparé possède un assez grand nombre de voisinages et par conséquent un assez grand nombre d'ensembles ouverts ou fermés. Les espaces connexes séparés sont donc plus intéressants que les autres. Le premier exemple d'espace connexe séparé et dénombrable a été découvert par le mathématicien russe (on n'ose plus dire soviétique) Paul URYSOHN, celui-là même qui s'est noyé en 1924, à Batz-sur-Mer (Loire-Inférieure) à l'âge de 26 ans. Je ne connais pas l'exemple en question, mais je peux donner celui dont BOURBAKI propose l'étude en exercice (c'est peut-être le même!) dans son livre de Topologie générale (2).

5. Voici en tout cas de quoi il s'agit. On commence par considérer l'ensemble $E = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}_+$ des couples (x, y) de rationnels pour lesquels l'"ordonnée" y est un nombre ≥ 0 . C'est un ensemble dénombrable, donc un sous-ensemble totalement discontinu de \mathbf{R}^2 . Mais ce n'est pas la topologie induite sur E par la topologie de \mathbf{R}^2 qui nous importe ici, mais une topologie toute différente, dépendant d'un nombre irrationnel θ choisi une fois pour toutes et qu'on supposera positif pour fixer les idées. Si (x, y) est un élément de E et si ε est un réel > 0 arbitraire, on posera dans la suite

$$I_\varepsilon(x, y) =]x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon[, \quad J_\varepsilon(x, y) =]x + \theta y - \varepsilon, x + \theta y + \varepsilon[\\ R_\varepsilon(x, y) = I_\varepsilon(x, y) \cap \mathbf{Q}, \quad S_\varepsilon(x, y) = J_\varepsilon(x, y) \cap \mathbf{Q}$$

et

$$V_\varepsilon(x, y) = \{(x, y)\} \cup R_\varepsilon(x, y) \times \{0\} \cup S_\varepsilon(x, y) \times \{0\}.$$

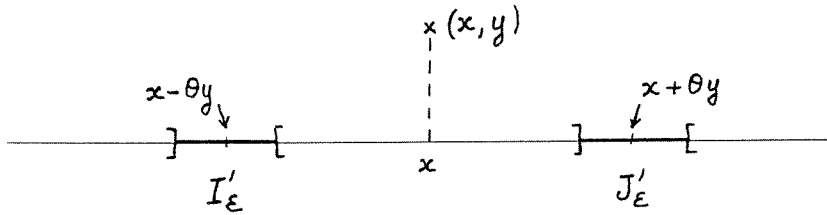
Les deux premiers ensembles (qu'on écrira aussi I_ε et J_ε lorsqu'aucune confusion ne sera possible) sont des intervalles de \mathbf{R} , de longueur 2ε , et de centres respectifs $x - \theta y$ et $x + \theta y$. Les deux suivants sont les traces des intervalles précédents sur \mathbf{Q} . Tous ces ensembles sont des sous-ensembles de \mathbf{R} . Si A est un sous-ensemble de \mathbf{R} quelconque, il peut être commode de lui associer l'ensemble $A \times \{0\}$ (que l'on notera A' en abrégé) et qui est, si on veut, l'image canonique de A dans \mathbf{R}^2 ou plus précisément cette image sur l'axe des abscisses. Avec ces conventions (et

(2) N. BOURBAKI, TG, Chap. I, § 11, ex. 1, p. 115.

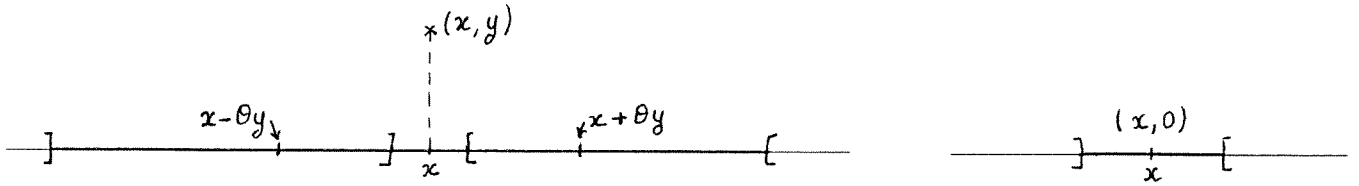
en écrivant R_ε et S_ε au lieu de $R_\varepsilon(x, y)$ et $S_\varepsilon(x, y)$, on a

$$V_\varepsilon(x, y) = V_\varepsilon = \{(x, y)\} \cup R'_\varepsilon \cup S'_\varepsilon.$$

On notera que R'_ε est l'ensemble des points rationnels de l'ensemble $I'_\varepsilon(x, y)$ alors que S'_ε est l'ensemble analogue associé à J'_ε . On aura une idée de ce qu'est l'ensemble $V_\varepsilon(x, y)$ en examinant le dessin suivant, qui suppose $y > 0$ et ε suffisamment petit.



Le même ensemble prend un aspect différent si ε est assez grand pour que I_ε et J_ε se rejoignent. Enfin, si $y = 0$, on a $I_\varepsilon = J_\varepsilon =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ et donc $V_\varepsilon(x, y) = V_\varepsilon(x, 0) = (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathbb{Q})'$.



Dans la suite, comme on l'a fait en partie pour ces dessins, il nous arrivera d'identifier un nombre réel x avec le point $(x, 0)$ et donc de confondre un sous-ensemble A de R avec l'ensemble $A' = A \times \{0\}$.

6. Cela étant, et aussi bizarre que cela puisse paraître, il existe sur l'ensemble $E = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+$ considéré, une topologie et une seule pour laquelle les voisinages d'un point (x, y) quelconque de E sont les sous-ensembles de E qui contiennent un ensemble de la forme $V_\varepsilon(x, y)$ pour au moins un réel $\varepsilon > 0$.

On dit encore que pour cette topologie les ensembles $V_\varepsilon(x, y)$ forment, lorsque ε parcourt l'ensemble des réels > 0 , un **système fondamental de voisinages** de (x, y) .

Appelons en effet $\mathcal{V}(x, y)$ l'ensemble des sous-ensembles V de E pour lesquels il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $V_\varepsilon(x, y) \subset V$. Il est alors évident que les axiomes (V_1) , (V_2) et (V_3) , caractérisant la structure d'espace topologique (cf. § A), sont satisfaits. Pour s'assurer de l'axiome (V_4) , il suffit de noter que si on a $V_\varepsilon(x, y) \subset V$ et $V_\eta(x, y) \subset W$ (pour deux réels ε et $\eta > 0$ donnés), alors $V_\varepsilon(x, y) \cap V_\eta(x, y) \subset V \cap W$ avec $V_\varepsilon(x, y) \cap V_\eta(x, y) = V_\tau(x, y)$ où τ est le réel > 0 égal à $\inf(\eta, \varepsilon)$, la vérification de cette dernière propriété étant immédiate.

Reste à établir l'axiome (V_5) selon lequel si $V \in \mathcal{V}(x, y)$ il existe un ensemble $W \in \mathcal{V}(x, y)$ tel que $V \in \mathcal{V}(x', y')$ quel que soit $(x', y') \in W$.

On peut prouver cela en prenant pour W un des ensembles $V_\varepsilon(x, y)$ contenus dans V . Le fait que $V \in \mathcal{V}(x', y')$ est évident si $(x', y') = (x, y)$. On peut donc supposer que (x', y') appartient à I'_ε ou à J'_ε , ce qui signifie que $y' = 0$ et que x' appartient à I_ε ou à J_ε . Supposons que $x' \in I_\varepsilon =]x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon[$. Comme il s'agit d'un intervalle ouvert, on peut trouver un nombre $\eta > 0$ tel que $]x' - \eta, x' + \eta[\subset I_\varepsilon$. D'après ce qu'on a noté plus haut sur les ensembles $V_\varepsilon(x, y)$ lorsque $y = 0$, cette relation s'écrit aussi $V_\eta(x', y') = V_\eta(x', 0) \subset I'_\varepsilon$ et donc $V_\eta(x', y') \subset (I_\varepsilon \cap \mathbf{Q})' \subset V_\varepsilon(x, y) \subset V$. Cela montre que $V \in \mathcal{V}(x', y')$, ce qui est le résultat cherché. On raisonne de même lorsque $x' \in J_\varepsilon$.

Nous supposerons dans la suite que l'ensemble dénombrable $E = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}_+$ est muni de la topologie que nous venons de définir : toutes les notions topologiques dont nous pourrions parler dans E (ouvert, fermé, adhérence, voisinage, etc) seront, sauf mention expresse du contraire, relatifs à cette topologie.

7. La première chose à faire est de démontrer que l'espace topologique E ainsi constitué est séparé.

On s'appuiera essentiellement sur le fait que θ est irrationnel, ce qui implique que la relation $r + \theta s = 0$ n'est possible, avec des coefficients rationnels, que si $r = s = 0$.

Commençons par démontrer que si (x, y) et (x', y') sont deux points distincts de E , alors chacun des éléments $x \pm \theta y$ est différent de chacun des éléments $x' \pm \theta y'$. C'est facile à voir pour $x + \theta y$ et $x' + \theta y'$ car si on avait $x + \theta y = x' + \theta y'$, on aurait $x - x' + \theta(y - y') = 0$, donc nécessairement $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$, contrairement au fait que $(x, y) \neq (x', y')$. On raisonne de même avec $x - \theta y$ et $x' - \theta y'$. Si on avait $x - \theta y = x' - \theta y'$, on aurait $(x - x') + \theta(y + y') = 0$. Cela entraînerait $x = x'$ et $y + y' = 0$. Comme y et y' sont des rationnels ≥ 0 on aurait aussi $y = y' = 0$. D'où la même contradiction que ci-dessus.

On raisonnerait enfin de même avec $x - \theta y$ et $x' + \theta y'$.

Comme $x + \theta y$ est différent de $x' \pm \theta y'$, le nombre

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \inf(|x + \theta y - x' - \theta y'|, |x + \theta y - x' + \theta y'|)$$

est > 0 . Pour une raison analogue, il en est de même de

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \inf(|x - \theta y - x' - \theta y'|, |x - \theta y - x' + \theta y'|).$$

Posons $\varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et démontrons que, alors

$$[I_\varepsilon(x, y) \cup J_\varepsilon(x, y)] \cap [I_\varepsilon(x', y') \cup J_\varepsilon(x', y')] = \emptyset.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant d'abord qu'il existe un nombre u appartenant à $I_\varepsilon(x, y) \cap I_\varepsilon(x', y')$. Cela veut dire que $|x - \theta y - u| < \varepsilon$ et $|x' - \theta y' - u| < \varepsilon$.

On a donc

$$\begin{aligned} |(x - \theta y) - (x' - \theta y')| &\leq |x - \theta y - u| + |u - x' + \theta y'| \\ &< 2\varepsilon \leq 2\varepsilon_2 \leq |x - \theta y - x' + \theta y'| \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

On raisonnerait de même avec les trois autres cas.

Si on pose $U_\varepsilon(x, y) = R'_\varepsilon(x, y) \cup S'_\varepsilon(x, y)$ et $U_\varepsilon(x', y') = R'_\varepsilon(x', y') \cup S'_\varepsilon(x', y')$, on déduit de ce qui précède que $U_\varepsilon(x, y) \cap U_\varepsilon(x', y') = \emptyset$. Il n'est pas difficile alors de voir que $V_\varepsilon(x, y) \cap V_\varepsilon(x', y') = \emptyset$ puisque $V_\varepsilon(x, y) = U_\varepsilon(x, y) \cup \{(x, y)\}$ et $V_\varepsilon(x', y') = U_\varepsilon(x', y') \cup \{(x', y')\}$: s'il y avait un élément commun entre ces deux ensembles, il faudrait soit que $(x, y) \in U_\varepsilon(x', y')$, soit que $(x', y') \in U_\varepsilon(x, y)$; dans le premier cas, cela impliquerait que $y = 0$, donc que $(x, y) \in U_\varepsilon(x, y)$ ce qui est impossible, dans le second que $y' = 0$, donc que $(x', y') \in U_\varepsilon(x', y')$, ce qui est impossible aussi. D'où le résultat annoncé.

8. Pour terminer cette petite étude (et démontrer que E est connexe), nous allons examiner la forme des voisinages fermés d'un point. De façon précise, nous allons chercher à quelles conditions un point (x', y') de E est adhérent à un voisinage du type $V_\varepsilon(x, y)$ de (x, y) . Une condition sûrement suffisante est que $x' + \theta y' \in [x + \theta y - \varepsilon, x + \theta y + \varepsilon]$ car si cette relation a lieu, n'importe quel intervalle ouvert de centre $x' + \theta y'$ rencontre nécessairement $J_\varepsilon(x, y)$. Comme l'intersection est un intervalle ouvert de \mathbf{R} , il s'y trouve des nombres rationnels et on en déduit que tout voisinage de (x', y') rencontre $V_\varepsilon(x, y)$. On a bien sûr la même conclusion si $x' + \theta y' \in [x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon]$, si $x' - \theta y' \in [x + \theta y - \varepsilon, x + \theta y + \varepsilon]$ ou si $x' - \theta y' \in [x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon]$. Par contre, si aucune de ces conditions n'est réalisée, il est impossible que (x', y') soit adhérent à $V_\varepsilon(x, y)$. En effet, avec cette hypothèse, on a simultanément

$$\begin{aligned} |(x + \theta y) - (x' + \theta y')| &> \varepsilon & |(x - \theta y) - (x' + \theta y')| &> \varepsilon \\ |(x + \theta y) - (x' - \theta y')| &> \varepsilon & |(x - \theta y) - (x' - \theta y')| &> \varepsilon. \end{aligned}$$

Si on appelle η le plus petit des nombres figurant dans les premiers membres de ces inégalités, on a $\eta > \varepsilon$. On va en déduire que

$$V_{\eta-\varepsilon}(x', y') \cap V_\varepsilon(x, y) = \emptyset$$

ce qui démontrera notre propos.

Supposons qu'il y ait un point commun entre ces deux ensembles. S'il s'agit d'un point qui n'est pas sur l'axe des abscisses, ce ne peut être que (x, y) et (x', y') en même temps. Mais l'égalité $(x, y) = (x', y')$ qui résulte de cette hypothèse est impossible, vu par exemple la relation $|(x + \theta y) - (x' + \theta y')| > \varepsilon > 0$. Il s'agit donc d'un point de la forme $(u, 0)$ et qui vérifie par conséquent (que yy' soit nul ou non) les deux relations

$$|x \pm \theta y - u| < \varepsilon \text{ et } |x' \pm \theta y' - u| < \eta - \varepsilon$$

avec des signes convenables. On a donc, avec ces mêmes signes,

$$|(x \pm \theta y) - (x' \pm \theta y')| \leq |(x \pm \theta y) - u| + |(x' \pm \theta y') - u| < \varepsilon + \eta - \varepsilon = \eta$$

alors que par hypothèse $\eta \leq |(x \pm \theta y) - (x' \pm \theta y')|$; d'où une éclatante contradiction.

9. Les conditions trouvées ont en fait une interprétation géométrique simple. La première d'entre elles $x' + \theta y' \in [x + \theta y - \varepsilon, x + \theta y + \varepsilon]$ s'écrit aussi

$$x + \theta y - \varepsilon \leq x' + \theta y' \leq x + \theta y + \varepsilon$$

ce qui fait deux inégalités à examiner.

La première inégalité signifie que (x', y') appartient à un certain demi-plan limité par la droite d'équation $x' + \theta y' = x + \theta y - \varepsilon$ (l'équation étant en x' et y'); la seconde que (x', y') appartient à un autre demi-plan limité par la droite d'équation $x' + \theta y' = x + \theta y + \varepsilon$. Comme ces deux droites sont parallèles (leur coefficient directeur commun est $-\frac{1}{\theta}$), on voit finalement que la condition ci-dessus caractérise les points (x', y') d'une bande de plan, bande de plan qui contient d'ailleurs le point (x, y) . On notera que le point d'abscisse $x + \theta y$ de l'axe des abscisses est aussi un point de cette bande et que la droite passant par ce dernier point et de coefficient directeur $-\frac{1}{\theta}$ passe par (x, y) , tout en étant la droite "centrale" de la bande.

On a des conclusions tout à fait semblables avec la condition $x' - \theta y' \in [x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon]$ qui s'écrit

$$x - \theta y - \varepsilon \leq x' - \theta y' \leq x - \theta y + \varepsilon$$

sauf que la droite centrale passe par $(x - \theta y, 0)$ et que son coefficient directeur est $\frac{1}{\theta}$.

Enfin, les deux conditions restantes $x' + \theta y' \in [x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon]$ et $x' - \theta y' \in [x + \theta y - \varepsilon, x + \theta y + \varepsilon]$ qui s'écrivent

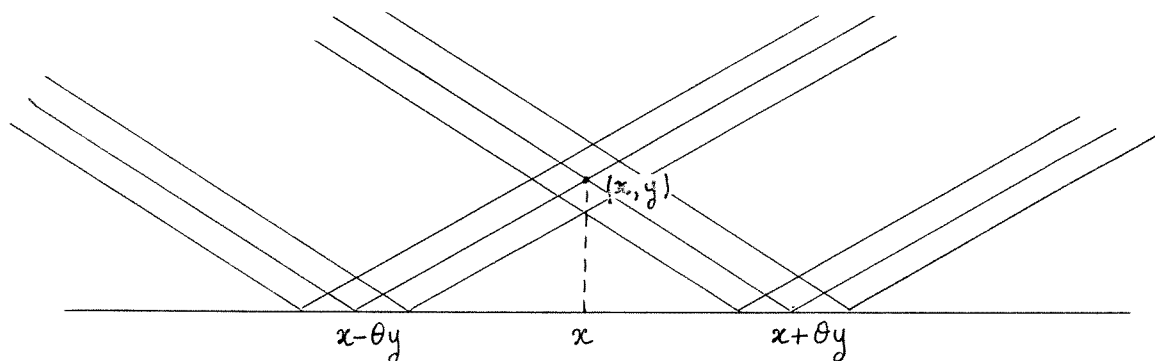
$$x - \theta y - \varepsilon \leq x' + \theta y' \leq x - \theta y + \varepsilon$$

et

$$x + \theta y - \varepsilon \leq x' - \theta y' \leq x + \theta y + \varepsilon$$

donnent lieu à deux nouvelles bandes dont les droites centrales passent respectivement par $(x - \theta y, 0)$ et $(x + \theta y, 0)$ et dont les coefficients directeurs respectifs sont encore $-\frac{1}{\theta}$ et $\frac{1}{\theta}$. Dans ces deux derniers cas, il n'y a pas de raison pour que les droites centrales passent par (x, y) .

Mais on comprendra mieux tout cela avec un dessin approprié



étant entendu que les “branches” de ce W peuvent être plus ou moins enchevêtrées (lorsque ε est assez grand), voire confondues en partie (lorsque $y = 0$) et que les seuls points à prendre en considération dans $V_\varepsilon(x, y)$, comme dans $\overline{V}_\varepsilon(x, y)$, sont les points à coordonnées rationnelles.

10. Cela étant, il est “géométriquement” évident que si (x, y) et (x', y') sont deux points quelconques de E , alors $\overline{V}_\varepsilon(x, y)$ rencontre $\overline{V}_\eta(x', y')$ quels que soient les réels $\varepsilon, \eta > 0$. Le lecteur qui aurait des doutes peut toujours faire une démonstration en bonne et due forme...

On déduit aisément de tout cela que tout voisinage fermé d'un point (x, y) dans E rencontre tout voisinage fermé d'un autre point (x', y') de E , ce qui n'est pas si banal, surtout si on se réfère aux espaces topologiques dont on a l'habitude!

La connexité de l'espace topologique E est alors facile à démontrer. Si celle-ci n'avait pas lieu, il existerait deux ouverts U et U' non vides de E tels que $U \cup U' = E$ et $U \cap U' = \emptyset$. Ce serait alors aussi des fermés. En appelant (x, y) un point de E appartenant à U et (x', y') un point de E appartenant à U' on aurait alors un voisinage fermé de (x, y) sans point commun avec un voisinage fermé de (x', y') , ce qui est contraire à ce qu'on vient de démontrer!

C. L'éventail de Knaster-Kuratowski

1. La description de ce dernier exemple très particulier suppose connu un autre espace plus célèbre que l'on appelle l'ensemble triadique de Cantor. Pour définir celui-ci, on considère d'abord l'ensemble K_0 égal à l'intervalle $[0, 1]$ que l'on partage en trois intervalles égaux. En supprimant l'intervalle intermédiaire ouvert $] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} [$ (appelé “tiers médian”), il reste un ensemble fermé K_1 constitué des deux intervalles $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$.

Ce qu'on a fait alors avec $[0, 1]$, on le recommence avec $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$: on les divise chacun en trois et on supprime leur tiers médian. Il reste un nouvel ensemble fermé K_2 formé de quatre intervalles $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ et $[\frac{8}{9}, 1]$.

On recommence ensuite avec ces quatre intervalles la même opération pour définir K_3 , et ainsi de suite. Une fois définie la suite illimitée de ces ensembles K_n , on ne

conserve que leurs points communs : l'ensemble K de ces points est par définition l'**ensemble triadique de Cantor**. En d'autres termes, on a

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n.$$

2. L'ensemble ainsi défini a de nombreuses propriétés remarquables qui en font un objet de choix pour les mathématiciens. Nous nous contenterons d'utiliser les résultats suivants :

(i) K est un ensemble fermé dans \mathbf{R} .

C'est une conséquence immédiate de la définition de K comme une intersection d'ensembles fermés.

(ii) K est totalement discontinu.

Dans le présent contexte, cela revient à dire que K ne contient aucun intervalle de longueur non nulle. Cela résulte facilement de ce que K_n est constitué d'intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$: si on suppose qu'il existe un intervalle I inclus dans K de longueur $l > 0$ et si on choisit un entier n tel que $\frac{1}{3^n} < l$, on aboutit à une contradiction car I doit être inclus dans K_n , donc dans un de ces intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$.

(iii) Il existe dans K un sous-ensemble dénombrable L partout dense.

Cette dernière propriété signifie que tout voisinage d'un élément x de K contient au moins un élément de L .

L'ensemble L dont on se servira ici est constitué des nombres 0 et 1 (extrémités de l'intervalle $K_0 = [0, 1]$), des nombres $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ (qui sont extrémités des intervalles constituant l'ensemble K_1), des nombres $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$ et $\frac{8}{9}$ (autres extrémités qui s'introduisent quand on considère les intervalles constituant l'ensemble K_2), et ainsi de suite.

Il est clair que toutes ces extrémités appartiennent en fait à tous les ensembles K_n , donc finalement à K ; on dira que ce sont les **points limites** de K . Leur ensemble L est dénombrable, comme réunion dénombrable d'ensembles finis et pour vérifier que tout voisinage V d'un élément x de K contient un point de L , il suffit de considérer un réel $\varepsilon > 0$ tel que $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset V$ (V étant ici considéré comme un voisinage dans \mathbf{R} , ce qui n'est pas gênant) et de choisir un entier n tel que $\frac{1}{3^n} \leq \varepsilon$: le point x appartient alors à un des intervalles constituant K_n et si a est une des extrémités de l'intervalle en question, on a $|x - a| \leq \frac{1}{3^n} \leq \varepsilon$; d'où le résultat.

En fait, comme il y a deux extrémités possibles pour l'intervalle utilisé, on peut même affirmer que tout voisinage V de x contient au moins un élément de K autre que x . Cela nous fournit la dernière propriété de K qui nous sera utile :

(iv) L'ensemble K n'a pas de point isolé.

3. On peut démontrer (et on verra ci-dessous une démonstration indirecte) que K n'est pas dénombrable – ce qui donne tout son intérêt à la propriété (iii) ci-dessus. En attendant cette démonstration, il nous faut admettre qu'on ne voit pas pourquoi le complémentaire M de L dans K ne pourrait pas être vide. Cela ne nous empêchera pas de considérer cet ensemble dans la suite!

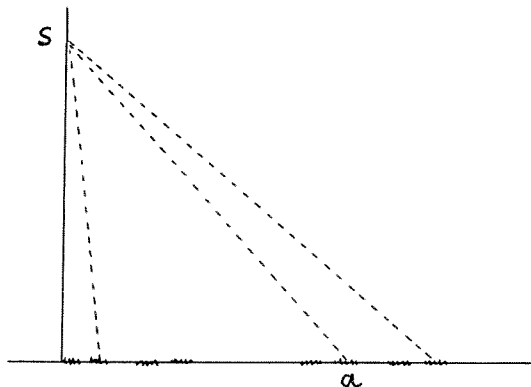
4. Ces résultats étant acquis, considérons dans \mathbf{R}^2 le point $s = (0, 1)$ et pour tout $a \in K$, le segment S_a joignant s au point $(a, 0)$. La réunion des segments S_a est un “éventail” très joli (qu’on pourrait appeler l’éventail de Cantor), mais ce n’est pas lui qui nous intéresse vraiment ici. En fait, sur chacun des segments S_a on considère soit l’ensemble Q_a des points (x, y) dont l’ordonnée y est rationnelle, soit l’ensemble I_a des points (x, y) dont l’ordonnée y est irrationnelle. C’est le premier ensemble que l’on utilisera si $a \in L$ et le second sinon, c’est-à-dire si $a \in M$. Pour mieux comprendre, on posera

$$E_a = \begin{cases} Q_a & \text{si } a \in L \\ I_a & \text{sinon.} \end{cases}$$

L’éventail de **Knaster-Kuratowski** (du nom de deux mathématiciens polonais dont le premier est moins connu que le second) est alors, par définition, l’ensemble

$$E = \bigcup_{a \in K} E_a.$$

C’est un ensemble qu’il n’est pas facile de représenter



et qui paraît avoir beaucoup de trous. . . Les apparences sont cependant trompeuses. Comme on l’a annoncé, c’est un ensemble connexe, mais dont la connexité ne tient que par le point s : si on enlève s , ce qui reste est totalement discontinu.

5. Il est facile de démontrer que $E - \{s\}$ est effectivement totalement discontinu dans \mathbf{R}^2 . On commence, pour cela, par remarquer que tout point (x, y) de $E - \{s\}$ est évidemment sur un segment S_a nécessairement unique (i.e. où a est nécessairement unique). Si on associe à tous les couples (x, y) de $E - \{s\}$ l’unique élément a de K tel que $(x, y) \in S_a$, on définit une application p de $E - \{s\}$ dans K , qui est la restriction d’une projection centrale, de centre s , et qui est bien sûr continue. Si C est alors une partie connexe non vide de $E - \{s\}$ son image par p est un ensemble connexe, donc un intervalle, mais comme c’est un intervalle contenu dans K et que K est totalement discontinu (propriété (ii) du n° 2), $p(C)$ est nécessairement réduit à un point a de K , ce qui veut dire que C est contenu dans le segment S_a .

Si maintenant on projette C sur l'axe des ordonnées, cette fois-ci par projection orthogonale, on définit une application $q : (x, y) \mapsto y$, évidemment continue, qui transforme C en un intervalle de \mathbf{R} . Comme $C \subset S_a \subset Q_a$ si $a \in L$ et que $C \subset S_a \subset I_a$ sinon, on voit que l'intervalle $q(C)$ obtenu ne contient que des nombres rationnels dans le premier cas ou que des nombres irrationnels dans le second. Cela n'est possible que si $q(C)$ est réduit à un point b . On voit ainsi que C est à l'intersection du segment oblique S_a et d'une droite horizontale. Il est donc bien réduit à un point.

6. Il est plus difficile, on s'en doute, de démontrer que E est connexe. Le raisonnement qu'on va faire utilise un profond théorème de topologie qu'on appelle le **théorème de Baire** et selon lequel dans un espace métrique complet les ensembles que Bourbaki qualifie de "maigres" n'ont pas de point intérieur.

Indiquons pour ceux qui l'ignoreraient qu'un ensemble est dit **maigre**, dans un espace topologique E , s'il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles fermés de E , tous sans point intérieur. Un sous-ensemble d'un ensemble maigre est maigre; une réunion dénombrable d'ensembles maigres est maigre et tout ensemble dénombrable A formé de points non isolés de E est maigre aussi si E est séparé (§ B, n° 4) : ces hypothèses impliquent en effet que pour tout $a \in A$, $\{a\}$ est fermé sans être ouvert – donc sans point intérieur.

Un ensemble maigre peut être "boursoufflé" – je veux dire avec un intérieur non vide – mais cela n'arrive pas dans un espace métrique complet : c'est le théorème de Baire, que, pour les besoins de la cause, nous admettrons provisoirement, en attendant de le démontrer *in fine*.

En fait, nous appliquerons le théorème de Baire à l'ensemble triadique de Cantor qui hérite de \mathbf{R} le fait d'être métrique et complet, cette dernière particularité venant de ce qu'il est fermé dans \mathbf{R} (n° 2, (i)).

7. Pour démontrer que l'éventail de Knaster-Kuratowski E est connexe, plaçons-nous dans l'hypothèse où l'on dispose de deux ouverts U et V de E tels que $U \cup V = E$ et $U \cap V = \emptyset$. Quitte à intervertir au besoin U et V , on peut supposer que U contient s . Notre affirmation de la connexité de E sera alors démontrée si on déduit de tout cela que U est nécessairement égal à E (et donc que V est vide).

8. Fixons d'abord un élément a de K et intéressons-nous aux nombres réels $v \in [0, 1]$ ayant la propriété que $(x, y) \in U$ à chaque fois que $(x, y) \in E \cap S_a$ avec $y \geq v$. Il est clair que le nombre 1 est un de ces nombres (c'est même, bien sûr, le plus grand possible).

Si on appelle v_o la borne inférieure de l'ensemble des nombres v en question, il est facile de vérifier que si $(x, y) \in E \cap S_a$ avec $y > v_o$, alors $(x, y) \in U$.

Le nombre v_o dépend évidemment de a ; on l'écrira aussi, de ce fait, $v_o(a)$. C'est l'ordonnée d'un point de S_a et d'un seul dont l'abscisse sera désignée par u_o ou, en cas de confusion, par $u_o(a)$. Si $v_o = 0$ (ce qui peut arriver – et on verra plus loin que c'est même ce qui arrive le plus souvent), on en déduit que tous les points

de S_a qui appartiennent à E appartiennent en fait à U , à l'exception éventuelle du point $(a, 0)$.

Si $v_o > 0$, il n'est pas assuré que $(x, y) \in V$ si $(x, y) \in E \cap S_a$ avec $y < v_o$, mais on peut affirmer qu'il y a sur S_a des points $(x, y) \in V$ aussi proches qu'on veut du point (u_o, v_o) de S_a : s'il en était autrement, il y aurait des nombres v ayant la propriété qu'on a décrite plus haut et qui seraient plus petits que v_o , contrairement à la définition de v_o .

On peut donc dire en résumé que lorsque $v_o > 0$, le point (u_o, v_o) est à la fois adhérent à U et à V (y compris, il vaut mieux le vérifier directement pour être tranquille, si $v_o = 1$). Ce fait entraîne que (u_o, v_o) ne peut appartenir alors à E , sinon ce serait un point de E adhérent à la fois à U et à V (dans $E!$), donc un point appartenant en même temps à U et à V (car U et V sont fermés dans E) ce qui est en contradiction avec le fait que $U \cap V = \emptyset$.

9. Lorsque $a \in M$ (le complémentaire de L dans K), on peut déduire de ce qui précède que $v_o(a)$ est nécessairement un rationnel car si c'était un irrationnel, on serait en présence d'un point (u_o, v_o) de E (revoir la définition de cet ensemble : n° 4) avec $v_o > 0$ – ce qui est impossible comme on vient de le voir.

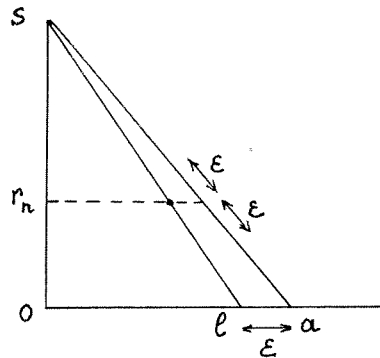
Cela va nous permettre de partager l'ensemble M en une suite (M_n) d'ensembles intéressants pour notre démonstration. On sait en effet, que les nombres rationnels compris entre 0 et 1 forment un ensemble dénombrable. Cela permet de les ranger en une suite illimitée r_0, r_1, \dots, r_n où l'on supposera $r_n \neq r_m$ si $m \neq n$ et $r_o = 0$ pour fixer les idées. Cette suite étant choisie, il est alors légitime de considérer, si n est un entier naturel donné, tous les points $a \in M$ tels que $v_o(a) = r_n$. Ces points formeront l'ensemble M_n annoncé. Il résulte de ce qu'on vient de dire sur la nature du nombre $v_o(a)$ lorsque $a \in M$ que

$$M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n \cup \dots$$

On peut ajouter que ces ensembles M_n sont deux à deux disjoints et qu'il n'est pas interdit que certains d'entre eux soient vides. En fait, nous allons voir qu'à l'exception de M_0 ils sont tous maigres dans K (n° 6). De façon plus précise, nous allons démontrer le résultat plus fort selon lequel, si $n > 0$, l'adhérence $\overline{M_n}$ de M_n dans K n'a pas de point intérieur (c'est ce qu'Bourbaki appelle un ensemble **rare**, mais il n'est pas nécessaire de s'embrouiller l'esprit avec un excès de vocabulaire).

Raisonnons par l'absurde en supposant que pour un entier $n > 0$, il y a dans $\overline{M_n}$ un point intérieur k . Alors $\overline{M_n}$ est un voisinage de k . Comme L est dense dans K (propriété (iii) du n° 2), $\overline{M_n}$ contient au moins un élément l de L . Le fait que l soit ainsi adhérent à M_n signifie aussi que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un élément $a \in M_n$ tel que $|l - a| \leq \varepsilon$. On a $v_o(a) = r_n > 0$ par définition. Si on considère alors sur le segment S_l l'unique point d'ordonnée r_n , on obtient en fait un point de E et il est facile de voir qu'il existe dans le disque centré en ce point et de rayon

2ε au moins un point de U et au moins un point de V (en fait situés sur S_a).



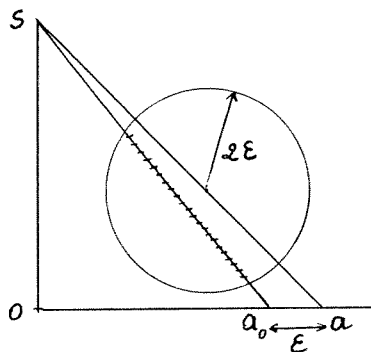
Comme le centre du disque ne dépend pas de ε , cela veut dire que c'est un point adhérent à U et à V , ce qui est absurde car en tant qu'élément de E , ce serait un point commun de U et de V .

10. Comme l'ensemble L est maigre (car c'est un ensemble dénombrable constitué de points non isolés : cf. n° 2, propriété (iv)), on déduit de tout cela que l'ensemble

$$L \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup \dots$$

est lui aussi maigre. D'après le théorème de Baire, cet ensemble ne peut avoir de point intérieur. Cela veut dire aussi que le complémentaire de cet ensemble dans K , qui est M_0 , est partout dense dans K (c'est une autre façon de présenter le théorème de Baire : dans un espace métrique complet, le complémentaire d'un ensemble maigre est partout dense).

Il est facile d'en déduire que U est dense dans E , compte tenu du fait que tous les points de M_0 , sauf peut-être ceux qui sont sur l'axe des abscisses, appartiennent à U (n° 8) :



On a donc (dans E), $U = \overline{U} = E$ et $V = \emptyset$, ce qui était le résultat cherché : cf. n° 7.

11. Reste à démontrer le théorème de Baire : dans un espace métrique complet E les ensembles maigres n'ont pas de point intérieur.

Dire qu'un ensemble $A \subset E$ n'a pas de point intérieur revient à dire qu'il ne peut contenir un ensemble ouvert non vide, autrement dit que pour tout ouvert U non vide de E , on a $U \not\subset A$, relation qui signifie aussi que $U \cap A^c \neq \emptyset$.

Pour démontrer le théorème de Baire, il suffit de démontrer le résultat précédent lorsque $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, sachant que F_n est fermé et que son intérieur est vide : il est en effet évident que lorsqu'un ensemble B n'a pas de point intérieur, la même propriété a lieu pour A si $A \subset B$.

Considérons donc un ouvert U non vide de E . Pour démontrer qu'il existe un point x dans l'ensemble $U \cap A^c$, nous allons construire une suite de Cauchy (x_n) dont la limite sera le point x cherché.

Appelons U_o l'ouvert U considéré. Comme F_1 n'a pas de point intérieur, $U_o \cap F_1^c \neq \emptyset$. Appelons x_1 un point de ce dernier ensemble. Comme celui-ci est ouvert (on rappelle que F_1 est fermé), il existe une boule B_1 de centre x_1 , que l'on peut supposer fermée contenue dans $U_o \cap F_1^c$. Quitte à diminuer le rayon (ce qui ne change rien à l'inclusion obtenue), on peut supposer que ce rayon est ≤ 1 . Si on appelle enfin U_1 la boule ouverte de même centre et de même rayon que B_1 , on a en résumé

$$x_1 \in U_1 \subset B_1 \subset U_o \cap F_1^c \text{ avec } r(B_1) \leq 1$$

où tout le monde aura compris ce que veut dire $r(B_1)$.

Comme F_2 n'a pas de point intérieur, $U_1 \cap F_2^c \neq \emptyset$. Appelons x_2 un point de cet ensemble. Comme il est ouvert (car F_2 est fermé), il existe une boule B_2 de centre x_2 , que l'on peut supposer fermée et de rayon $\leq \frac{1}{2}$, telle que $B_2 \subset U_1 \cap F_2^c$. Si U_2 est la boule ouverte de même centre et de même rayon, on a

$$x_2 \in U_2 \subset B_2 \subset U_1 \cap F_2^c \text{ avec } r(B_2) \leq \frac{1}{2}.$$

En procédant par récurrence, on définit ainsi des points x_n , des ouverts U_n et des boules fermées B_n tels que

$$x_n \in U_n \subset B_n \subset U_{n-1} \cap F_n^c \text{ avec } r(B_n) \leq \frac{1}{n}$$

pour tout $n \geq 1$.

On a ainsi $U_n \subset B_n \subset U_{n-1} \cap F_n^c \subset U_{n-1} \subset B_{n-1}$, ce qui prouve que la suite (B_n) (ainsi d'ailleurs que la suite (U_n)) est décroissante pour la relation d'inclusion. Ainsi, si $m \leq n$, x_n et x_m appartiennent à B_m . On a donc (en appelant d la distance de l'espace métrique E) $d(x_n, x_m) \leq 2r(B_m) \leq \frac{2}{m}$. Comme $\frac{2}{m}$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$, cela prouve que (x_n) est une suite de Cauchy. Comme l'espace E est complet, cette suite converge vers un point x de E . Comme $x_n \in B_m$ pour tout $n \geq m$ et que B_m est fermé, $x \in B_m$. A fortiori, $x \in U_{m-1} \cap F_m^c$. Cela montre que $x \in U = U_o$ (car $U_{m-1} \subset U_{m-2} \subset \dots \subset U_o$) et que $x \notin F_m$. Comme cette dernière relation a lieu quel que soit m , $x \notin A$. Ainsi $x \in U \cap A^c$. CQFD.

12. Le théorème de Baire montre de manière indirecte qu'un espace métrique complet E sans points isolés ne peut être dénombrable – à moins que E ne soit vide car s'il était dénombrable, il serait maigre (par rapport à lui-même) ce qui

est absurde car on voit mal comment l'ensemble vide (le complémentaire de E dans E) pourrait se faire partout dense dans E . . . Pour cette raison, l'ensemble triadique de Cantor n'est pas dénombrable.

Epilogue

Au vu des exemples précédents, la notion topologique d'ensemble et d'espace connexe peut paraître inadaptée au but recherché qui était de définir les ensembles d'"un seul tenant". On pourrait lui préférer (ce qu'on fait d'ailleurs dans certains cas) la notion d'ensemble connexe par arcs (cf. § B, n° 14). On notera cependant que l'adhérence d'un ensemble connexe par arcs n'a pas nécessairement la même propriété. Quoi qu'il en soit, tous les théorèmes des n°12 et 13 du § B sont vrais. . . En particulier, si on projette l'éventail de Knaster-Kuratowski sur une droite de direction quelconque, on obtient toujours un intervalle de cette droite – sans aucun trou, ce qui est, de toute façon, une propriété remarquable.

Bibliographie

L'article qui précède (sauf le § B) est largement inspiré de celui de D.R. Chalice, intitulé "Paradoxical Connections in the Plane" et paru dans *Singularité* (141, av. de Saxe 69003 Lyon) en avril 1992 (vol. 3, n° 5).

Pour des compléments de topologie, le lecteur pourra consulter le très accessible ouvrage de Jacques Dixmier, **Topologie générale**, P.U.F., 1981 et notamment le chap. X sur les espaces connexes (p. 145-149). Il y trouvera aussi l'énoncé et la démonstration du théorème de Baire pour les espaces métriques complets (p. 74).

A un niveau plus élevé, il y a naturellement la partie des **Eléments de mathématique** de N. Bourbaki, consacrée à la topologie (en deux volumes, chap. 1 à 4, C.C.L.S., 1971 et chap. 5 à 11, C.C.L.S., 1974); on y trouvera notamment tout ce qu'il faut savoir sur les espaces connexes (chap. 1, p. 80-88) et le théorème de Baire (chap. 9, p. 52-56).

Dernière minute : Au moment d'adresser mon manuscrit à la rédaction de '*L'Ouvert*', je relève que les préoccupations récentes du groupe mathématique de Saumur rejoignent celles d'une revue d'aussi haut niveau que '*The Mathematical Intelligencer*' qui, dans sa livraison de l'été 1996 (vol. 18, n° 3) publie un article sur l'école polonaise de topologie (The Beginning of Polish Topology) où les noms de Kazimierz Kuratowski et de Bronislaw Knaster figurent en bonne place. Il y est rappelé que Kuratowski est l'auteur d'un important traité de topologie en deux volumes (1933 et 1950) et que Knaster était passé maître dans la construction d'ensembles aussi étranges que biscornus. L'éventail de Knaster-Kuratowski n'en est qu'un exemple.

ROLE DU PROFESSEUR DANS L'ACQUISITION DU RAISONNEMENT AU COLLEGE

François PLUVINAGE,
Service académique de la formation des personnels

REGARDS SUR LES ELEVES... ET LES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

L'acquisition du raisonnement est l'objet de nombreuses études centrées sur l'élève. Cela est bien normal dans la mesure où on ne peut rien entreprendre dans l'enseignement si l'on n'a pas une connaissance suffisante des sujets qui apprennent. Mais la conduite d'une classe par un professeur s'appuie sur bien d'autres connaissances et savoir-faire, comme le soulignent justement les études didactiques. Le présent texte est une synthèse de considérations qui se trouvent dispersées dans plusieurs articles, augmentées de quelques réflexions propres à ce sujet. Nous nous intéressons plus spécifiquement à l'enseignement mathématique au collège, même si le raisonnement est loin de se limiter à ce cadre.

En arrivant au collège, tout élève a déjà été mis en contact avec des formes diverses de raisonnements. N'a-t-on d'ailleurs pas coutume de fixer à 7 ans l'âge, dit de raison, auquel un enfant est susceptible, au delà de la répétition de ce qu'il a rencontré au préalable, de mettre explicitement des principes en oeuvre dans des situations nouvelles pour lui. A la sortie du collège, un certain nombre d'élèves n'a pas pour autant progressé jusqu'à atteindre la capacité de produire un raisonnement hypothético-déductif. D'aucuns s'accommodent du fait que l'un ou l'autre élève n'accède pas à un tel stade de développement intellectuel, mais nous pensons pour notre part que chacun représente un cas d'échec pour notre enseignement, au même titre qu'un cas d'illettrisme en fin d'école primaire par exemple. Songeons aux compétences qu'exigera la société du XXIème siècle...

Le rôle du professeur de mathématiques est-il important ? On peut sans doute répondre positivement, mais en faisant preuve en même temps de modestie. En effet, plusieurs considérations entrent en ligne de compte, à la fois pour relativiser l'influence que peut avoir le professeur de mathématiques d'une classe de collège et pour pointer des possibilités d'action du professeur hors de sa salle de classe :

- D'une part, les mathématiques ne sont pas la seule discipline d'enseignement où l'on vise à développer la capacité à raisonner. En particulier, l'insertion du professeur de mathématiques dans l'équipe pédagogique d'une classe a son importance.

- D'autre part, un élève donné voit défiler devant lui toute une théorie de professeurs, qui se succèdent d'un niveau scolaire à l'autre. Les contrastes entre des personnalités différentes enseignant la même discipline peuvent être profitables aux élèves, pourvu que ces contrastes n'aillent pas jusqu'à des manques de cohérence dans les principes qui régissent le fonctionnement de la discipline elle-même. Il est utile en tout cas de rappeler qu'une année scolaire représente une étape dans le parcours de formation d'un élève. Il y a donc lieu de penser à inscrire l'enseignement dans une continuité, en imaginant que chaque professeur ne travaille pas pour aboutir à un " produit d'enseignement " complet mais apporte sa pierre à une construction ; il convient également de penser à se passer des relais entre collègues d'une année à l'autre.

- Enfin, il est bon d'avoir présent à l'esprit que le monde de l'élève ne se réduit pas à ses contacts avec ses professeurs : les ressources de l'établissement (par exemple), les camarades, l'univers familial, les influences extérieures à l'école y ont leur place.

Pour qu'un maximum d'élèves accède au raisonnement hypothético-déductif, les professeurs (pluriel tenant compte des propos qui précèdent) de mathématiques disposent de deux modes d'action : direct et indirect. Le premier consiste en un travail amenant explicitement à mettre en jeu le raisonnement, sous ses formes variées, le second consiste à la fois en la mise en place d'un mode de fonctionnement de la classe favorable à l'émergence du raisonnement et en une direction de son attention vers le développement des qualités qu'exige la production de raisonnements. Commençons par examiner ce second mode d'action du professeur.

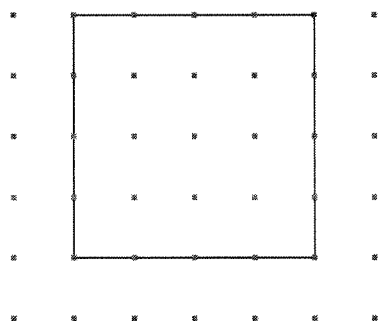
ORGANISER UN ENVIRONNEMENT FAVORABLE

Se soumettre soi-même à des exigences d'explicitation bien avant de les attendre des élèves

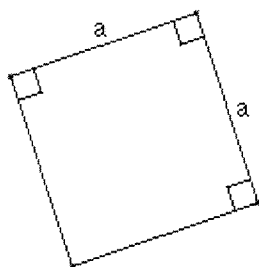
Faire un raisonnement suppose de s'appuyer sur des hypothèses. Produire un raisonnement suppose d'explicitier les hypothèses. Or beaucoup de raisonnements fonctionnent en pratique sans explicitation d'hypothèses. C'est ainsi que Jean-Blaise Grize, auteur de travaux sur l'argumentation, montre comment on se sort de contradictions dans un débat en avançant des hypothèses qui n'avaient pas été formulées jusqu'alors, et en le faisant naturellement au profit de la thèse que l'on soutient.

Dans une première phase, comme le souligne Pierre Van Hiele (voir à ce sujet un très ancien numéro, de mars 1959, du bulletin de l'A.P.M.E.P.), l'enseignement porte sur l'identification des objets. Par exemple en géométrie, on travaille à l'école primaire sur divers quadrilatères : carré, rectangle, losange, etc. Il s'agit d'abord de les distinguer perceptivement, de même que des objets de la nature, comme une paquerette et un brin de muguet. Pour ce faire, les activités de représentation, de description, éventuellement de fabrication (on fait aussi des fleurs en papier), participent de cette acquisition. Dans la description à un tel niveau, ce sont les règles d'économie du langage qui fonctionnent : on utilise pour la description le terme le mieux approprié ; on ne dira donc pas d'un quadrilatère que c'est un rectangle (ou un losange) si c'est un carré et, de cette façon, un carré n'est pas un rectangle. Or en mathématique au contraire, on sera amené à considérer les propriétés des objets, et donc à dire à cause de cela qu'un carré est un rectangle (ou un losange).

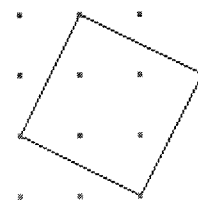
De tels écarts avec le fonctionnement usuel de la langue peuvent surgir brusquement, en étant plus ou moins signalés, ou se préparer. Dans le second cas, le professeur en a conscience bien avant que les élèves n'y soient confrontés, ce qui l'amène à fonctionner lui-même en référence au cadre dans lequel il souhaitera situer la réflexion et non pas en confortant le fonctionnement dans le cadre duquel il conviendra de s'écarter. Cela provoquera un décalage des exigences, entre celles auxquelles le professeur se soumet lui-même et celles auxquelles il soumet la production des élèves : dès le début du collège, le professeur (et a fortiori un auteur de manuel scolaire) peut s'astreindre à toujours présenter une figure géométrique accompagnée de toutes les hypothèses nécessaires, explicitées d'une manière ou d'une autre. Ce peut être par l'utilisation d'un support normalisé (papier quadrillé ou pointé), par l'emploi de signes conventionnels (figures dites codées) indiquant des angles droits ou des égalités de longueurs ou d'angles, par l'accompagnement de légendes ou de texte.



Un carré dans le plan pointé



Un carré indiqué par codage (angles droits) et égalité de côtés



Dans le plan pointé : un quadrilatère dont la nature est à établir (classe de cinquième)

Les figures de la page précédente illustrent des manières d'expliciter des hypothèses, dans le plan pointé et de manière très directement liée à la définition du carré sur la figure de gauche (qui peut déjà avoir été présentée à l'école élémentaire), par codage et légende sur la figure centrale, dans le plan pointé mais avec nécessité d'une démonstration (envisageable dès la cinquième, dans une classe intéressée, par considération des quatre triangles rectangles de côtés 1 et 2 qui encadrent le carreau central dans le quadrilatère "problématique" sur la figure de droite)

Développer dans la classe un mode d'expression démocratique

Les mathématiques ne connaissent pas l'argument d'autorité. Une assertion y est recevable indépendamment de qui l'émet ; si elle s'avère fausse, c'est en vertu des définitions posées et des résultats déjà établis. Dans un article (sur *le cas Gaël*), Guy Brousseau pointait un cas d'échec électif en mathématiques par le fait pour l'élève de chercher uniquement à satisfaire son professeur et non pas à mettre en oeuvre les règles dont la mise en oeuvre se justifie dans une situation donnée.

Cet équilibre, *une voix est une voix*, qui est une forme de la démocratie, apparaît ainsi comme une condition de bon fonctionnement mathématique. Rappelons pour illustrer ce propos, le fameux dialogue du Ménon dans lequel la maïeutique de Socrate s'exerce (d'une manière qui apparaît d'ailleurs pédagogiquement bien discutable aujourd'hui, comme Georges Glaeser se plaît à le souligner) à propos de la duplication de l'aire du carré : son interlocuteur n'est autre qu'un esclave. A cette époque où la démocratie ne concernait pas tout individu, les mathématiques allaient donc déjà plus avant, puisqu'elles pouvaient, sinon pour la découverte du moins pour l'accès aux résultats, mettre tout le monde sur un pied d'égalité.

Ne nous y trompons pas : ce fonctionnement "démocratique" des mathématiques est indépendant de l'autorité dans la conduite de la classe. Un professeur peut très bien être exigeant vis à vis de ses élèves, tout en considérant que le point de vue de chacun mérite d'être examiné sans a priori, et un professeur peut au contraire être peu contraignant, tout en écartant tout ce qui diffère peu ou prou des pratiques enseignées par des phrases du genre : "ce n'est pas comme cela que j'ai dit de faire". La question est donc bien celle de rapporter la validité en mathématiques à ce qui la fonde une fois le cadre de travail fixé, c'est-à-dire une vérité interne.

Se soucier de la productivité de ses élèves

Il n'y a pas de démocratie sans participation, et cette dernière suppose que tous se sentent en mesure d'apporter leur contribution. Des activités qui conduisent tout élève à se doter lui-même d'un matériau ont ainsi un double intérêt : d'une part chacun acquiert une expérience personnelle du domaine étudié, d'autre part les synthèses qui seront faites dans la classe fonctionneront en référence à une richesse de productions. Lorsque l'on envisage une activité, quatre critères d'efficacité, qui ont été explicités à la suite des réflexions d'un groupe de l'IREM de Strasbourg, permettent de s'assurer qu'elle peut avoir un réel intérêt pédagogique :

- la facilité du démarrage, qui dépend de la simplicité des consignes fournies aux élèves,
- l'intérêt dans la poursuite, déterminé par l'aspect esthétique de la réalisation ou par la curiosité qu'elle peut susciter,
- la présence d'une question mathématique de nature à engendrer des conjectures,
- la pertinence, pour résoudre les conjectures avancées, des outils mathématiques voulus.

A eux quatre, ces critères s'avèrent assez sélectifs, car ils conduisent en pratique à ne pas retenir bon nombre d'activités auxquelles on pourrait songer. Le choix, puis l'exploitation dans l'esprit précédemment évoqué, d'activités satisfaisantes doit concourir à l'acquisition d'une autonomie d'exploitation des savoirs mathématiques.

L'erreur, lors de phases exploratoires ou d'étapes d'entraînement, bien loin d'avoir un caractère négatif, peut au contraire être d'un grand intérêt pédagogique. Il est souvent plus fructueux de l'exploiter lorsqu'elle se présente, sans toutefois aller jusqu'à la provoquer (les élèves ne seraient pas dupes), plutôt que de tenter de la prévenir. Qu'il s'agisse de conclusions quelque peu hâtives ou d'extensions de règles valables dans un contexte mais injustifiées dans un autre cadre, l'examen des raisons qui mettent en cause les assertions incorrectes est souvent très instructif. Par exemple, dans une activité où un tracé de courbe est réalisé à partir de la détermination de certains des points (tracé de courbe " point par point "), une propension naturelle est de joindre simplement par des segments de droites les points obtenus. Si le choix des points a été laissé aux élèves, les différences perceptives entre les résultats des uns et des autres suffiront à lancer un débat fructueux. De même, une tentation fréquente pour l'addition des fractions est d'envisager la *pseudo-règle*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Le professeur qui aura rencontré les suites de Farey, peut-être à l'occasion d'un groupe IREM ou d'un stage de formation, saura d'emblée que cette opération d'addition des numérateurs et des dénominateurs correspond à une " moyennisation " des fractions.

Il pourra alors faire rechercher, sur des exemples en classe de cinquième ou dans le cas général en classe de quatrième, où se situe le *pseudo-résultat* par rapport aux deux nombres de départ (il est entre les deux).

De tels exemples et bien d'autres poussent à ne pas brider la créativité en imposant d'emblée des exigences de rigueur qui seraient prématurées. Au contraire, après la mise en place, l'institutionnalisation dira-t-on si l'on veut systématiser, du savoir-faire souhaité, l'exigence de correction dans les traitements se justifie pleinement.

TECHNIQUES PEDAGOGIQUES POUR L'APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT

Les considérations présentées jusqu'ici concernent le milieu-classe qui s'avère propice à la mise en place progressive de capacités de raisonnement. Mais ce climat n'est pas tout, il convient d'examiner les éléments qui interviennent très directement dans l'acquisition du raisonnement mathématique.

Appliquer, est-ce raisonner ?

Une première question est d'identifier les traitements dans lesquels on considérera que l'élève mobilise un véritable raisonnement. Appliquer une définition, une règle, un résultat, est-ce raisonner ? Un article bien connu de l'IREM de Grenoble, intitulé *l'âge du capitaine*, met en évidence le bien fondé de cette interrogation, même si cet article met en scène des élèves de l'école primaire. Ayant proposé à ces élèves des simulacres d'énoncés, du genre " *une maîtresse d'école a dans sa classe 11 garçons et 13 filles ; quel est son âge ?* ", on a souvent obtenu des réponses, données sans manifestation particulière d'étonnement (dans l'exemple indiqué, c'est 24 qui serait ainsi fourni). Les auteurs cherchent à illustrer ainsi que les élèves réagissent à la présence dans l'énoncé de certains indices, sans réfléchir plus avant (ne parlons même pas de raisonner).

Une application, même à bon escient, de principes ou de résultats n'indique donc pas nécessairement que son auteur a mis en oeuvre un raisonnement. Au niveau du collègue, c'est par exemple le cas pour des épreuves de type brevet dans lesquelles il convient d'appliquer le théorème de Pythagore. Une conduite plus rudimentaire que le raisonnement peut permettre d'associer à bon escient un triangle rectangle et l'égalité de Pythagore.

Au contraire, les cas où il faut expliquer sont beaucoup plus révélateurs, même si les mathématiques mises en oeuvre au départ ne sont pas d'un niveau très avancé.

Considérons par exemple le cas le plus simple possible, d'une opération à effectuer avec une machine, mais dans un cas choisi par l'auteur de l'énoncé pour qu'une demande d'explication se justifie :

*Effectue avec la calculette le produit $222,3 \times 444,287$
et dis si le résultat trouvé te paraît juste.*

Les nombres ont été choisis pour qu'avec une calculette quatre opérations, qui affiche huit chiffres, on trouve un entier, à savoir 98 765. D'où la réflexion :

Est-il normal que le produit de deux nombres décimaux, non entiers, soit un entier ?

On est ainsi amené à considérer non pas toute l'information donnée par l'énoncé, mais seulement la partie qui est pertinente pour la question qui se pose. Notons au passage que l'extraction d'information et non pas son traitement global, est un ingrédient essentiel du raisonnement. Dans notre exemple, il s'agit de la considération des chiffres après la virgule décimale ; le dernier chiffre de la partie décimale du produit sera 1 (puisque le résultat de la multiplication de 3 par 7 se termine par 1). Le résultat donné par la machine est donc faux.

L'exemple qui vient d'être donné est intéressant à plusieurs égards. Par rapport au raisonnement, il met en avant l'utilité possible d'une décomposition de l'information contenue dans un énoncé. Par rapport à l'usage de la machine, il peut contribuer à une désacralisation salutaire. Les élèves inexpérimentés croient en effet qu'une machine fournit toujours des réponses mathématiquement correctes. Nous songeons à ce propos à une observation de Bernard Blochs, où une élève ne comprenait pas, pour un produit de deux nombres de l'ordre de 10 000, que la calculette indique *erreur*, alors qu'elle ne s'était pas trompée ; pour elle, le signal d'erreur de la machine était ainsi de la même nature qu'une annotation d'erreur par le professeur sur une copie. Pour revenir à notre exemple, le résultat correct est 98 765,000 1 qui n'est évidemment pas loin de la réponse donnée par la calculette. Il permet de parler des nombres que traite une machine, par rapport aux nombres du mathématicien.

En oubliant quelques instants les élèves, uniquement à l'intention du lecteur, qui est en droit de se demander comment on construit un exemple de ce type, soulignons un troisième aspect intéressant de cet exemple : pour le construire sans procéder à des essais demandant des calculs fastidieux, le plus efficace est un logiciel de calcul formel. Et, de même que nous le disions à propos d'exigences d'explicitation, il y a là une pratique à laquelle il est fructueux que le professeur s'exerce bien avant de l'envisager pour les élèves. Dans notre cas, nous avons eu recours au logiciel DERIVE, où nous avons introduit l'entier 987 650 001 puis la commande *Factor.*, qui fournit la décomposition :

$$987\ 650\ 001 = 3^2 \times 13 \times 19 \times 444\ 287.$$

On notera au passage que la décomposition d'un entier en facteurs premiers ne fait pas partie des programmes du collège, ce qui montre bien que nous sommes là dans le domaine réservé des professeurs. Pour obtenir l'énoncé, il ne reste plus qu'à effectuer le produit $9 \times 13 \times 19$ et à placer les virgules décimales. On aurait pu de la même manière proposer des exemples pour lesquels une machine affichant davantage de chiffres serait aussi en défaut, comme $770,804 \times 97,301$ (qui fait 75 000,000 004) ou bien d'autres encore.

Le domaine numérique n'est bien sûr pas le seul dans lequel l'analyse d'un énoncé intervient pour la solution. Dans l'exemple géométrique suivant, ce n'est pas une extraction d'information mais une réinterprétation de l'énoncé qui est une clé pour la réponse.

Tracer un parallélogramme ayant des diagonales de 8 cm et de 10 cm et un côté de 3 cm.

Il n'est guère possible de répondre tant que l'on n'interprète pas le parallélogramme comme un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. Au contraire, cette réinterprétation, qui est à considérer comme un pas de raisonnement, rend le tracé très simple à effectuer. Nous reparlerons plus loin des apports que les problèmes de construction fournissent pour le raisonnement.

Amener les élèves à distinguer contenu et statut d'un énoncé

Pour un énoncé, appelé aussi assertion ou proposition par les mathématiciens, c'est évidemment sa valeur de vérité qui retient l'attention des élèves au premier chef : est-ce juste ? est-ce faux ? Mais dans le raisonnement, la question principale est ailleurs. Il s'agit de savoir, dans une situation donnée, si une proposition découle ou non des définitions posées et des résultats déjà acquis. Historiquement, c'est bien la réponse à une telle interrogation théorique qui est constitutive de ce que l'on a coutume d'appeler le "miracle grec". Dans son ouvrage de synthèse intitulé *Sémiosis et pensée humaine*, Raymond Duval donne (en p. 233) du raisonnement une définition fonctionnelle, dans laquelle il le décrit comme une démarche orientée vers un énoncé-cible. Le but premier du raisonnement n'est pas la valeur de vérité de l'énoncé-cible (c'en est une conséquence sous certaines conditions), mais l'emploi que l'on est en droit de faire de cet énoncé dans le discours mathématique.

Une démarche d'enseignement nécessaire à l'acquisition du raisonnement est donc de rendre les élèves sensibles à des caractéristiques d'un énoncé non pas isolé, mais plongé dans un univers discursif. Dans un discours, un énoncé a ainsi un contenu, ce qu'il dit, mais aussi un statut, qui tient à son articulation avec d'autres énoncés. La géométrie de traitement, dont Jean-Claude Rauscher et moi-même avons parlé dans un article publié par la revue *Petit x*, s'avère efficace pour introduire une telle distinction.

Un exemple qui a été expérimenté auprès d'élèves consiste à se donner une figure accompagnée de ses propriétés, numérotées pour pouvoir être commodément désignées, et à demander de construire la figure en employant ces propriétés. Tout élève achève la figure avant d'avoir utilisé toutes les propriétés, et il apparaît de plus, lors de la synthèse dans une classe, que des programmes de constructions différents ont été mis en oeuvre. Il suffit alors de désigner sous le nom d'hypothèses les propriétés utilisées pour un programme et sous le nom de conclusions les autres propriétés (qui sont donc également vraies), pour retrouver la terminologie usuelle de la démonstration. Citons, pour permettre un essai simple dans une classe, une figure qui est suffisamment riche pour ce faire : il s'agit du triangle rectangle d'une équerre habituelle (angles de 30° et 60°), muni de sa médiane issue du sommet de l'angle droit. Bien sûr, le repérage de la différence entre contenu et statut n'est pas encore le raisonnement, mais c'est un préalable nécessaire.

Utilisation de registres d'expression non discursifs

Un raisonnement hypothético-déductif demande en général d'enchaîner plusieurs pas de raisonnement. Produire un tel raisonnement, c'est donc être capable d'une part d'effectuer les pas de raisonnement et d'autre part d'articuler entre eux les différents pas de raisonnement. Il s'agit d'une activité complexe, que beaucoup d'élèves ne pourront pas mener à bien si on ne leur fournit pas des outils facilitateurs. L'univers du discours étant d'une manipulation subtile, il est intéressant de s'appuyer sur des objets transitionnels (c'est-à-dire qui n'apparaîtront pas dans la présentation finale) sortant de cet univers : des représentations, susceptibles par exemple de mettre en évidence, pour autoriser un pas de raisonnement qui est une déduction, la vérification des conditions d'emploi d'un théorème, mais aussi susceptibles d'illustrer l'organisation des différents pas de déduction qui constituent une démonstration. Nous renvoyons, pour des détails à ce sujet, aux deux articles de Marie-Agnès Egret et Raymond Duval publiés dans un numéro des *Annales de didactique et de sciences cognitives* (1990) de Strasbourg.

De tels articles présentent une alternative à une démarche d'enseignement fréquemment invoquée, même si elle constitue une erreur historique et une impasse pédagogique : justifier la démonstration par la nécessité de se convaincre d'un résultat a priori incertain. C'est une erreur historique parce que les mathématiques ne se sont jamais construites sur cette base. Aucun mathématicien ne s'est par exemple jamais demandé si la somme des angles d'un triangle faisait presque 180° ou exactement 180° , alors que si l'on pense à la physique, la valeur précise de la vitesse de la lumière dans le vide est un objet de questionnement. Un article de Bernard Capponi dans la revue *Petit x* met bien en évidence qu'il s'agit d'une impasse pédagogique. Le problème abordé dans une classe était une question qui se trouve chez Euclide et qui peut être ainsi posée :

Dans un rectangle, on trace une diagonale, et par un point quelconque de cette diagonale, on mène les deux parallèles aux côtés. Ces parallèles partagent le rectangle donné en quatre rectangles. Montrer que deux d'entre eux ont la même aire.

Les deux rectangles de même aire sont ceux dont la diagonale ne se trouve pas tracée sur la figure considérée. Dans son expérimentation, Bernard Capponi n'avait pas demandé d'établir l'égalité, mais de mesurer les côtés de ces rectangles et d'en déduire des valeurs approchées de leurs aires. Dans ces conditions, la suspicion quant à l'égalité des aires en question n'a pas pu être effacée de l'esprit d'une partie des élèves. Au contraire, dans une observation réalisée pour la thèse qu'elle a soutenue à Strasbourg, Ana Mesquita avait fait étudier la même situation par des élèves de sixième, mais en les faisant travailler sur la reconfiguration d'éléments de la figure ; ils ont alors pu obtenir la démonstration de l'égalité.

Soulignons, pour expliquer la faisabilité d'une telle démonstration dès la sixième, qu'elle ne fait intervenir (plusieurs fois) qu'un unique résultat, à savoir qu'une diagonale d'un rectangle le partage en deux triangles de même aire, et qu'elle n'exige pas la distinction entre contenu et statut d'un énoncé.

Un tel exemple souligne l'importance de la problématique dans laquelle est présenté un résultat à établir. Il convient que le professeur ait impulsé une orientation de la démarche des élèves vers sa démonstration et non pas vers une attitude de doute sur sa vérité.

Faire apparaître l'efficacité du raisonnement

L'acquisition du raisonnement demande un bon suivi de la part des professeurs, mais aussi un certain effort de la part des élèves. Il n'y a pas de miracle à ce sujet : cet effort sera d'autant plus volontiers fourni que la conviction de l'efficacité du raisonnement aura été installée dans les esprits. Des résultats célèbres, comme par exemple l'irrationalité de $\sqrt{2}$ qui peut être démontrée en troisième, concourent à cet effet recherché. Une autre caractéristique appréciable du raisonnement est qu'il abolit le temps. Il permet ainsi des reconstitutions, telle la suivante.

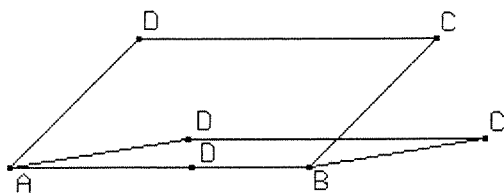


Figure I

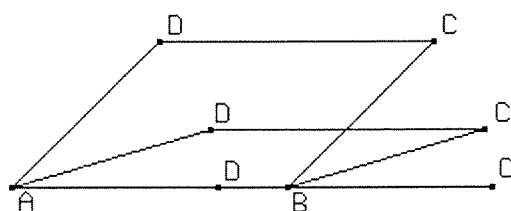


Figure II

Enoncé. Les figures I et II ont toutes deux été tracées grâce au logiciel CABRI. Dans chaque cas, on a construit un parallélogramme dont le côté AB est fixé, et on déplace le sommet D jusqu'à ce qu'il soit aligné avec A et B. Sur la figure I, le sommet C a alors disparu, tandis qu'il est resté sur la figure II, aligné avec A et B. Trouver deux programmes de construction du parallélogramme ABCD qui produisent ces deux effets.

UNE CONCLUSION A LAQUELLE IL ETAIT FACILE DE S'ATTENDRE

De la part de l'auteur, le lecteur peut s'attendre à une conclusion en faveur de la formation continue des professeurs. Nous tenons à ne pas le décevoir. Il est effectivement important de participer régulièrement à des actions de formation. Les techniques évoluent. Aujourd'hui, c'est bien évidemment le cas pour l'informatique. Après la programmation, les menus déroulants et l'environnement multi-fenêtres ; après ces derniers, l'hypertexte et les réseaux.

Se former à toutes ces techniques au fur et à mesure de leur évolution est utile pour faire progresser la qualité de son enseignement dans le sens de l'intérêt des élèves. Mais il n'y a pas que les techniques. Le public, l'organisation scolaire (par exemple au collège, l'apparition récente d'études dirigées), les programmes changent. Discuter avec des collègues, lors de séances de formation, des nouveautés à essayer est un bon moyen de profiter de ces changements pour le bénéfice des élèves, plutôt que de les subir comme des gênes par rapport aux pratiques de l'enseignement que l'on avait l'habitude de conduire.

Note : L'auteur souhaite remercier Michel de Cointet d'avoir bien voulu lui servir d'interlocuteur en cours de rédaction.

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 1997

Les exercices proposés cette année étaient mieux adaptés aux capacités des élèves que ceux de l'année dernière. Les solutions ont été plus nombreuses.

CLASSE DE PREMIERE

Sujet 1

Si x est un nombre réel, le seul nombre réel dont le cube est égal à x s'appelle la racine cubique de x et se note $\sqrt[3]{x}$.

Par exemple : $\sqrt[3]{1000} = 10 = 2 \times 5 = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125}$

On définit $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$

Montrer que α est un nombre entier.

Sujet 2

Trois sirènes, Andromaque, Bérénice et Céphise, goûtent un repos bien mérité au bord d'un lac circulaire.

Emile, champion de natation à vitesse constante de son village de Climbach, sait que depuis son lieu de méditation, le Dorisfels (un charmant rocher au bord du lac), il lui faut une minute pour rejoindre Céphise, sept minutes pour retrouver Bérénice et cinq pour revoir Andromaque.

Céphise et Bérénice se reposent toutes deux à 500 mètres d'Andromaque.

Un journaliste venu admirer les exploits d'Emile, fait le tour du lac à pied en partant du Dorisfels ; il a rencontré Andromaque puis Bérénice et enfin Céphise.

Trouver la vitesse d'Emile le Champion et le rayon du lac.

Sujet 3

Cette année-là, Claude dit à François : " au casino d'Alexandrie, je connais une étrange machine. Elle génère 3 nombres réels positifs a , b et c . On gagne si l'un des 3 nombres $a(1-a)$, $b(1-b)$, $c(1-c)$ est inférieur ou égal à $1/4$. Comme d'habitude, j'y gagne à tous les coups".

François lui répondit : "je connais une machine similaire à Assouan. Mais on y gagne si l'un des 3 nombres $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $1/4$. J'y gagne à coup sûr".

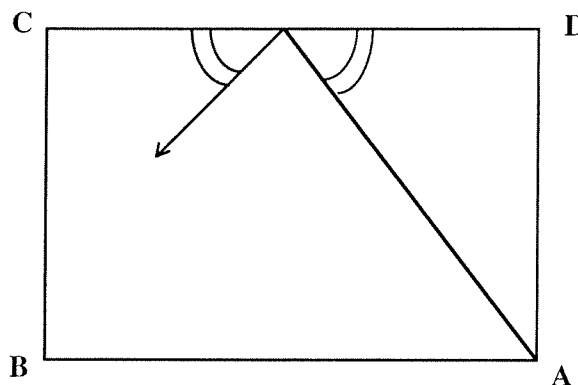
Préférez-vous tenter votre chance à Alexandrie ou à Assouan ?

CLASSE DE TERMINALE

Sujet 1

Si x est un entier naturel, on note $p(x)$ le produit de ses chiffres. Démontrer que 12 est l'unique entier naturel x compris entre 0 et 100 tel que $x^2 - 10x - 22 = p(x)$.

Sujet 2



On dispose d'un billard rectangulaire ABCD de longueur $AB = 1997$ mm et de largeur $AD = 1000$ mm.

Il comprend un trou à chaque coin. On envoie une boule depuis le coin A suivant la bissectrice de l'angle BAD. Elle rebondit ensuite sur les bords, comme indiqué sur la figure. On néglige les frottements. Montrer que la boule atteindra un trou et déterminer au bout de combien de rebonds.

Sujet 3

Saint-Exupéry a quitté le service de l'aéropostale et s'est reconverti dans l'importation de plantes tropicales.

Dans les soutes de son triplan bimoteur, il transporte des boutures de baobab ("baobab baobabensis") et des rosiers des sables ("rosa arenarum"). Il dispose du même nombre de boutures de chaque espèce. Elles sont mélangées et réparties dans deux caisses.

A ce stade de leur croissance, les deux espèces sont encore indiscernables.

Le petit prince ouvre une des deux caisses au hasard et y dérobe une bouture pour la cultiver sur sa planète personnelle.

Le petit prince a l'impression que lorsque l'une des caisses ne contient aucun baobab, il a plus de chance d'avoir une bouture de rosier.

Pouvez-vous l'aider ?

Pouvez-vous lui dire quelle serait la meilleure situation pour lui ?

Mathématiques sans Frontières
Mathematik ohne Grenzen
Mathematicas sin fronteras
Maths on the move
Matematica sinza frontiere

1. Origines¹

En 1986, dans le département du Loiret, M. Jost et une équipe d'enseignants lançaient « Le Rallye Mathématique du centre ». Un concours d'exercices de mathématiques à résoudre non pas individuellement mais en classe entière.

En 1989, le projet « mathématiques sans frontières », petit frère du précédent, vit le jour dans l'académie de Strasbourg et notamment dans le secteur Nord-Alsace. MM. Rémy Jost et Michel De Cointet, tous deux inspecteurs pédagogiques régionaux et inspecteurs d'académie en mathématiques, encadrés par une équipe dynamique de volontaires, mirent en compétition 87 classes de troisième et de seconde soit 2400 élèves (ce qui représente un taux de participation de 55% des classes de même niveau du secteur géographique cité). Le succès fut immédiat et l'évolution de « mathématiques sans frontières » dès les années suivantes le prouve sans conteste comme le décrit le tableau d'évolution de 1989 à 1996 joint.

2. Mathématiques sans frontières en bref.

- un concours inter-classes , aux niveaux 3^{ième} et seconde (ou équivalents dans les pays étrangers)
- projet lancé en 1989 , à l'initiative de l'IPR Rémy Jost, par différentes équipes composées d ' inspecteurs ,de chefs d ' établissements et de professeurs.
- calendrier :
 - épreuve d'entraînement en décembre 13 ex. en 2de
 - épreuve définitive en février ou mars 10 ex. en 3^{ième}
 - remise des prix par secteur en mai.
- équipe internationale de conception des sujets qui sont les mêmes pour tous les participants de tous les pays.
- organisation : équipes régionales d'organisation et de correction , chargées ,dans chaque secteur, de trouver des sponsors et d'organiser le distribution des prix, grande fête des mathématiques.
- but : développer l'intérêt pour les mathématiques , favoriser le travail en équipes , la participation de tous, l'initiative des élèves, la pratique d'une langue étrangère.
participation : environ 2700 classes , soit 75000 élèves (cf tableau d'évolution.)

¹ extraits du mémoire d'IUFM , rédigé en 1995-96, par Simon KUNTZ , professeur stagiaire en mathématiques

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Evolution 1989 à 1996

PAYS		89/90	90/91	91/92	92/93	93/94	94/95	95/96
FRANCE	Alsace	2400 87	6850 241	10850 398	17650 644	18150 660	19739 698	20084 706
RFA	Süd Baden - Nord Baden - Rhein Main - Süd Pfalz - Nord Pfalz- Hessen et franco-Allds Landau Berlin Baden-Baden		1025 41	2480 113	5820 269	6250 291	8279 376	11615 488
ITALIE :	Emilie-Lombardie Piémont - Pouilles Sicile - Trentin - Veneto			1250 53	8750 350	12500 500	13150 526	13500 470
SUISSE				160 8	1080 56	3150 154	4470 224	4500 225
LIBAN					550 17	1065 37	1250 42	Annulé car guerre
POLOGNE					400 18	600 30	652 21	426 15
FRANCE	Sud-Ouest (jumelage)						12000 300	12000 300
	Autres Régions				270 9	235 9	281 10	345 11
BELGIQUE	Epreuves en octobre				25 1		700 40	1450 78
LUXEM- BOURG					30 1	45 2	52 2	62 2
ROUMANIE					25 1	35 2	191 6	65 2
ECOSSE					45 4	420 13	1026 36	1950 75
ESPAGNE						970 31	1000 34	1000 34
HONGRIE						600 20	3050 93	6000 185
SLOVENIE						25 2	27 2	53 3
FINLANDE								12 2
DANEMARK						250 15	193 8	200 8
IRLANDE						30 1	27 1	27 1
IRLANDE DU NORD							320 16	1000 40
BULGARIE							95 6	96 4
TUNISIE							267 8	367 10
ETATS UNIS MEXIQUE							32 2	87 5
NIGER						1000 35		600 50
AUTRICHE								178 7
TOTAL		2400 87	7875 282	14740 572	34645 1370	45325 1802	66801 2442	75749 2725

1er Nombre : effectifs élèves , 2ème nombre : effectifs classes

ORGANISATION ET DEROULEMENT D'UNE EPREUVE

par Sylvie Freysz
membre de l'équipe organisatrice

1. Déroulement de l'épreuve :

Pierrot est élève de la classe de seconde 7 au lycée Crelle du secteur de Strasbourg-Europe ² et il se rend, ce jeudi après-midi de mars, à l'épreuve définitive de « Mathématiques sans Frontières », compétition entre classes de seconde et de troisième. Pierrot connaît : l'année précédente, sa classe de 3^{ème} avait déjà participé à la compétition, mais ils avaient été mal classés. Il y avait pourtant plusieurs bons élèves (dont lui !) dans la classe, mais il y avait aussi (et surtout !) des copains peu motivés et qui, une fois « leur » exercice terminé, s'étaient amusés et avaient dérangé les autres. Ils n'avaient pas pu terminer les dix exercices posés et pourtant ... il y en avait pour tous les goûts ! Des constructions pour lesquelles, une fois les calculs faits, il fallait surtout être soigneux, des découpages et des puzzles de figures à reconstituer, des mots et des nombres mystérieux à trouver, des problèmes très concrets de partage de tartes, etc. Les « bons » s'étaient réservés les exercices à 15 points, jugés plus difficiles, et ils avaient mis du temps à les faire ! Mais cela ne suffit pas.. c'est le total des points qui importe ! De surcroît, le professeur qui les avait surveillés avait fait un rapport sur leur mauvaise conduite : on a le droit de parler, de circuler dans la classe, mais pas de crier ni de provoquer des bagarres ! Conséquence : la classe a été exclue du tirage au sort pour les prix de participation.

Mais cette année, c'est différent : Pierrot est dans une classe où il y a beaucoup de bons élèves, ils sont plus nombreux (38) ce qui présente un avantage (pour une fois !) sur la classe de son copain Jeannot qui ne compte que 28 élèves... Car méfions-nous, cette année il y a les trois exercices « spécial seconde » à résoudre et à rédiger en plus ! Enfin, Pierrot essaie de se rassurer : à l'épreuve d'entraînement qui a eu lieu au mois de décembre, les élèves de 2^{nde} 7 s'étaient bien débrouillés : on l'avait désigné comme « chef », ce qui lui conférait la tâche de répartir les exercices en fonction des compétences de chaque groupe, veiller à ce que chaque exercice soit attribué, et que chaque feuille de solution soit rendue avec l'en-tête correctement complétée ; les camarades avaient tous apporté les affaires : instruments de géométrie, calculatrices, dictionnaires, atlas, ciseaux, cartons, papiers de couleurs... Pierrot se souvient avec effroi qu'en 3^{ème} ils avaient eu du mal à rédiger l'exercice n° 1 en anglais sans le dictionnaire bilingue qui était autorisé mais qui avait été oublié. C'était fort regrettable, car ils avaient fini par comprendre l'énoncé, rédigé en quatre langues étrangères ³ en faisant des recoupements entre les quatre « traductions » (faites par les élèves, bien entendu). Ils avaient trouvé la solution mathématique, mais il leur manquait plusieurs mots de vocabulaire pour pouvoir rédiger correctement. Ils ont sûrement perdu plusieurs points en langue ⁴. Pierrot finit par rejoindre sa salle de classe. « Tiens, il y a une prof d'un autre lycée à la place du mien : elle n'a pourtant pas une tête de prof de maths. »

² l'Alsace est divisée en 4 secteurs : Nord-Alsace, Centre-Alsace, Haute-Alsace et Strasbourg-Europe

³ pour les français : allemand, anglais, espagnol, italien

⁴ l'exercice n°1 est noté sur 10 : 5 pour la résolution mathématique, 5 pour l'expression en langue étrangère.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

En fait , « c'en est presque sûrement une » , car pour la surveillance définitive il y a permutation des professeurs de mathématiques qui inscrivent leur classe. Ceci pour éviter toute tentation d'aide à sa propre classe ou à une classe de son établissement.

Il reste néanmoins une possibilité qu'elle ne soit pas « matheuse » : son collègue de mathématiques enseigne dans deux classes inscrites à la compétition et ne peut, bien entendu, n'en surveiller qu'une . Comme il faut autant de surveillants que de classes inscrites, il aura demandé à sa collègue (d'espagnol ?) de bien vouloir surveiller la classe que l'équipe organisatrice lui aura indiquée.

Distribution des sujets : hum... à première vue , cela semble plus difficile qu'à l'épreuve d'entraînement ; alors, vite ! 1h30, cela peut être très court !

Les craintes de Pierrot n'étaient pas justifiées : tout s'est bien passé, et au bout du temps réglementaire, les treize feuilles comportant les solutions des treize exercices (une feuille par exercice, impérativement, pour faciliter la correction) sont rendues et mises sous enveloppe par la « surveillante ».

Il n'y a alors plus qu'à attendre que les professeurs de l'équipe organisatrice aient corrigé les quelques 2500 feuilles rendues pour le seul secteur de Strasbourg-Europe.

2 . La distribution des prix

Un beau jour d'avril, le professeur de mathématiques de la 2^{nde} 7 , plus souriant que d'habitude, vint leur communiquer l'invitation à la remise des prix . Cela va être la grande fête, d'autant plus que la classe entière est invitée . C'est de bon augure, car seules les classes ayant décroché un troisième, deuxième ou le premier prix sont invitées. Pour les autres (4^{ieme} prix , prix de motivation ou de participation), deux élèves délégués représenteront leur classe primée à la cérémonie.

La remise des prix se fait généralement un jeudi (non férié !) du mois de mai

Le secteur Strasbourg-Europe prime environ 70 classes, ce qui représente un millier d'élèves et professeurs au Palais des Fêtes.

Un orchestre de lycéens anime la distribution des prix : les morceaux de musique alternent avec les commentaires de deux présentateurs et un « rap des maths » a été composé par un de nos collègues !

Pierrot commence à s'impatienter : les personnalités n'en finissent pas de prononcer des discours, les animateurs de vanter la forte participation, etc. La phrase « Mesdames, mesdemoiselles et messieurs, voici l'instant solennel où nous annonçons le palmarès » retentit enfin ! Silence absolu dans le Palais des Fêtes (pourtant bien rempli !) : « Premier prix des classes de seconde : Madame le Maire vient remettre le trophée offert par la ville de Strasbourg (ce trophée est remis en jeu chaque année) à la classe de ... (suspense insoutenable) ... 2^{nde} 7 du Lycée ... Crelle ! » Tonnerre d'applaudissements . Les deux délégués , très émus, rejoignent la tribune après avoir traversé un parterre de personnalités du monde de l'Education , du monde politique, des chefs d'Entreprises (parrains de la compétition) et des journalistes. C'est la gloire ! Les autres prix sont ensuite distribués , suscitant à chaque appel d'une classe presque autant d'enthousiasme que pour les premiers.

3. Le financement.

En grande partie financée par le rectorat, la ville, le département et les collectivités locales (mairies, sivom, SI de collèges, sivu,...), la compétition est également dépendante de la générosité des sponsors : il y a bien entendu les « grands » : ceux qui

financent des premiers prix (un premier prix coûte environ 12 à 15 KF) ou qui assurent l'imprimerie (300 KF pour l'ensemble des équipes françaises) mais la fantaisie et la diversité des prix provient des sponsors qui donnent soit une participation financière à un voyage (il faut payer les cars pour transporter les élèves), soit un don en nature (billets d'entrée : cinéma, théâtre, opéra, manifestation sportive, musée ; objets publicitaires tels que tee-shirts, sacs à dos, stylos, montres... ; ou repas, baptêmes de l'air, abonnements, et autres)

N'oublions pas : la classe entière gagne : il faut donc trouver un cadeau divisible par le nombre d'élèves de la classe.

Une équipe de professeurs s'emploie à obtenir une subvention de la Commission Européenne, dans le cadre du programme Socrates-Comenius , mais ces subventions ne pourront que couvrir des frais de fonctionnement, et en aucun cas servir à la distribution des prix.

Une autre équipe est chargée, par secteur, de trouver des sponsors et des responsables de collectivités locales et de les convaincre de l'utilité de ce genre de compétition. Pas toujours facile !

Les français offrent des prix aux allemands ;des classes primées allemandes sont invitées en France et inversement . Il y a échanges de prix avec les autres pays par exemple.

4. Répercussions sur la vie de la classe.

Après l'épreuve d'entraînement, le professeur de mathématiques a souvent l'occasion d'être agréablement surpris. Les élèves veulent gagner ! Ils ont constaté qu'il était indispensable de travailler à plusieurs, qu'il était souvent payant d'être persévérant dans la recherche, et, pour pouvoir s'entraîner, demandent des exercices supplémentaires !

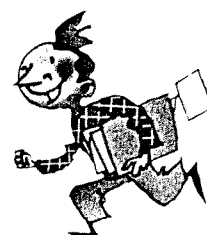
Là, il suffit au professeur de piocher dans les sujets des années précédentes (26 exercices par an depuis 8 ans ont été conçus pour MSF) pour les satisfaire et ... se faire plaisir !

A noter également :

- l'utilisation d'une langue étrangère constitue souvent une prise de conscience : pour faire des mathématiques avec les « autres », il faut d'abord pouvoir communiquer,
- les rencontres entre élèves français , allemands et suisses : on regrette simplement que ces rencontres ne puissent être étendues aux pays plus lointains (raisons financières),
- la réussite d'une classe ne dépend pas seulement du nombre de bons élèves qui s'y trouvent : il est évident que cela aide, et les premiers prix sont presque toujours « raflés » par des classes dont les élèves ont été triés (classes à « étiquettes » des lycées ou collèges réputés). Cependant des classes hétérogènes dans lesquelles règne une bonne entente, dont les élèves coopèrent dans une ambiance de respect mutuel, peuvent se classer très honorablement.



Mathématiques
sans frontières



HISTOIRE D'UN EXERCICE DE MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

par Michel BARTHELET

membre de l'équipe de conception des sujets

Je m'appelle "Inspection Générale" et j'appartiens à la famille des 13 exercices de l'épreuve définitive du concours Mathématiques Sans Frontières 1997. Oh, je suis regardé de haut par mes grands frères à 10 ou même à 15 points, mais mes 5 points sont faciles à obtenir et je plais à de nombreux d'élèves .

Au commencement, je suis né dans le cerveau d'un de mes géniteurs lors de son passage dans un supermarché. Hésitant devant le rayon des gâteaux, il a levé le nez et a découvert une caméra de surveillance. «Que peut-elle bien surveiller?» se demanda-t-il. Et ce fut l'éclair, et l'homme vit que l'idée était bonne. Rentré chez lui le soir, il me coucha sur le papier.

Où sont nés mes compagnons ? Dans l'imagination fertile de professeurs de mathématiques ou de personnes de leur entourage, dans de vieux livres, en bricolant, dans des remarques d'élèves, ou plus simplement dans d'autres concours étant entendu que ces derniers ne peuvent pas figurer sur le sujet de l'épreuve définitive.

Le jeudi suivant, car l'équipe de conception se réunit tous les jeudis de septembre à janvier, mon inventeur m'a photocopié et distribué à tous les membres de l'équipe sous le nom « Musée ». J'étais la proposition d'exercice numéro 31 de l'année 1997. L'idée était : comment placer des caméras de surveillance dans un musée dont le plan a la forme d'une croix grecque. «Cet exercice est vraiment trop facile !» se sont exclamés les sept autres membres de l'équipe. «Mettons-le au frigo» ont-ils dit. Ma vie a failli s'achever là, sans autre forme de procès. Pour d'autres propositions d'exercice c'est pire : «au congélateur» ou même «à la poubelle»! La sélection est dure. Il suffit d'être trop connu en Allemagne ou en Suisse ou ailleurs, d'être hors programme, ou trop dur, ou d'avoir déjà été proposé. Pour ce concours sans frontières les propositions viennent de partout : Allemagne, Suisse, Italie, Hongrie, Alsace... et sont toutes de qualité. L'équipe tient à placer des exercices venus de l'étranger dans chaque sujet. C'est ainsi que je découvre l'Europe. Etre sélectionné est mon concours à moi.

L'équipe de conception, qui ne comporte que des hommes... avis aux amatrices, est constituée d'un inspecteur de mathématiques en retraite et de 7 professeurs venus de toute l'Alsace et d'Allemagne. La Suisse participe également mais à distance. Chaque année, nous sommes une centaine à être présentés à leur sélection. Certaines propositions d'exercices sont de l'an dernier, ressorties du frigo ou du congélateur, et les autres sont de cette année. Mais nous ne serons que 26 élus. Nous sommes tous placés dans l'ordre d'arrivée dans la grille de l'annexe 1. Je me retrouve ligne 31, thème : angle solide ; difficulté : - ; langue vivante : non ; spécial classes de seconde : non ; appréciation : +; épreuve d'entraînement : oui ; définitive : oui. Je ne suis ni en «réserve» ni aux «oubliettes», mais je n'en suis pas loin.

Ce jeudi de la mi-octobre est un grand jour car c'est le jour de la sélection des 13 exercices de l'épreuve d'entraînement. Nous sommes déjà tous placés dans le tableau de l'annexe 2 et nos concepteurs ont alors une idée générale de la répartition : il ne faut pas qu'il n'y ait que des puzzles ou que du calcul. Il faut un peu de tout. Les rubriques ne sont pas sans intersection mais le tableau permet de s'assurer que plusieurs domaines sont recouverts. Pour l'épreuve de décembre, il faut des exercices faciles et attractifs. Bref, il faut donner envie aux élèves de s'inscrire au concours. Les exercices scolaires qui ressemblent trop à ceux qui sont proposés pendant un cours de mathématiques ou que l'on trouve dans les livres de classe sont éliminés. Il faut par ailleurs garder les beaux spécimens pour l'épreuve de mars. Un vrai casse-tête. Ah, j'oubliais aussi l'exercice qui demande le plus de travail à l'équipe, celui qui est à rédiger en langue étrangère. J'ai beau faire des efforts, mais faire un dessin pour tester de l'allemand ou du chinois... Comprenez que je ne peux pas être candidat pour cette place. Moi, je suis rangé dans la colonne «configuration plane» à 5 points. Nous sommes deux à postuler pour ce créneau, je n'ai donc aucune chance.

Chaque membre de l'équipe a choisi 13 exercices parmi les 100 propositions et ceux qui ont le plus de voix sont retenus. Alors chaque choix est expliqué, discuté, négocié. Pauvre de moi : «Trop facile, sans intérêt». Je m'en doutais, je ne serai pas de l'épreuve d'entraînement. Me voici rangé en réserve et, soudain, un grand froid envahit mon musée. Dommage, car j'aurais aimé paraître sur la belle plaquette en couleurs, imprimée par le Crédit Mutuel sur du papier glacé. L'équipe de conception se concentre désormais sur la rédaction des exercices de décembre car il faut rendre la copie fin octobre. Mais peut être qu'un jour, un prof. viendra...

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Mais oui, l'idée semée par l'un germe chez l'autre. C'est ainsi qu'un membre de l'équipe de conception décide un jour de faire quelque chose de moi. Quel bonheur. Il redessine le plan du musée, la position des caméras, reformule la question à poser. Bref je me sens complètement transformé. Il ne reste de moi que l'idée d'un musée à surveiller, le titre et le numéro. Au mois de novembre je repasse le grand examen sous mon nouvel habillage. « Ah, c'est bien! Voilà un exercice original. Gardons le.» Je suis fier car je plais à tous. Et ils ont déjà prévu que je serai à 5 points. Me voici plein d'espoir.

Les exercices à 5 points sont faciles et abordables par des élèves de tous les niveaux. Ceux qui sont à 10 points sont souvent plus longs car ils nécessitent une recherche ou des calculs plus complexes. Les derniers exercices à 15 points sont ceux qui se résolvent après plusieurs étapes.

Pour l'épreuve définitive, nous sommes encore une cinquantaine en lice, replacés dans une grille pour vérifier que tous les domaines sont présents. Je suis tout seul dans mon créneau. J'ai mes chances ! D'autant que le dessinateur, un professeur de math lui aussi, m'a paré d'un habit superbe : un joli tableau impressionniste, comme dans un vrai musée. Mais tous mes collègues ont chacun leur proposition de dessin.

Les discussions pour savoir qui sera sélectionné reprennent. Les critères de sélection sont simples : il faut un exercice qui soit intéressant à rédiger en langue étrangère et 12 autres tous attrayants. Les exercices de seconde sont ceux qui sont plus techniques ou plus difficiles. A ce stade du travail, nos concepteurs ne sont plus objectifs dans l'évaluation de notre difficulté. Ils nous ont tellement travaillés, voire complètement modifiés qu'ils nous connaissent par coeur. Je n'appartiens d'ailleurs plus à personne. Chaque membre a donné sa sélection et ils m'ont tous choisi! Mon côté original et le nouvel emballage les a séduits. Désormais j'appartiens à la grande famille des exercices de Mathématiques Sans Frontières qui est forte de 232 exercices !

La sélection faite, voici le temps de la gestation. Période difficile pour aller de la petite graine à un exercice achevé. Je suis à nouveau écrit, modifié plusieurs fois. J'ai même failli repasser au frigo. Le texte ne doit pas être trop long. Tout doit être énoncé clairement, surtout l'intitulé de la question. Les élèves comprendront-ils ce que l'on attend d'eux ? Le dessin permet-il de mieux comprendre le problème? Quelle échelle pour ce dessin ? Chaque exercice est ainsi peaufiné.

Le temps presse. Mon copain, l'exercice numéro 90, celui de langue étrangère, est déjà allé se faire traduire. Il portera le numéro 1 et occupera la première page. Quel cabotin! Nous sommes maintenant tous dans le ventre de l'ordinateur d'un de nos géniteurs. C'est lui qui composera la maquette du sujet. Alors la chasse aux fautes de frappe est ouverte. Ah, Paolo, ce n'est pas facile de les dénicher toutes !

Une maquette du sujet est partie chez un collègue des membres de l'équipe. Ce cobayage est notre première épreuve du feu. Nous sommes de beaux spécimens, dit-il.

Le terme approche, nous sommes tous prêts. Pour créer un sujet équilibré, nous avons chacun notre place dans la palette car il faut alterner calcul et géométrie en tenant compte des dessins. Je suis fier, je suis en deuxième place. Il ne nous reste plus qu'à être baptisés. C'est l'occasion d'une belle partie de fous rires pour les concepteurs. Pour moi, «musée» est vite abandonné : trop banal. C'est dommage, je l'aimais bien ce nom. Alors dans une belle pagaille ils proposent : au voleur, antivol, contrôle, vigile, pirate, surveillance, surveillant, surgé, pion, inspection, inspection générale. Stop, le voilà mon titre: «Inspection Générale» : puisqu'il faut tout contrôler, même les caméras elles-mêmes. Les titres sont souvent des clin d'oeil destinés aux professeurs de mathématiques comme par exemple «Produit Cartésien». Au fait, devinez d'où viennent les exercices dont les titres sont «Lazlo's cube» ou «Auf dem Kopf» ?

Mon copain, l'exercice numéro 13, un costaud à 15 points, me prédit l'avenir : nous nous retrouverons à l'imprimerie du Rectorat et nous suivrons la même procédure de secret que pour les sujets du baccalauréat. C'est dire combien c'est sérieux. Nous méritons bien cela, nous avons mis 5 mois à mûrir après beaucoup de travail. Ensuite les sujets seront répartis entre les différentes équipes d'organisation pour être dans les établissements avant le 6 mars 1997. Mais les prédictions sont toujours fausses, c'est bien connu.

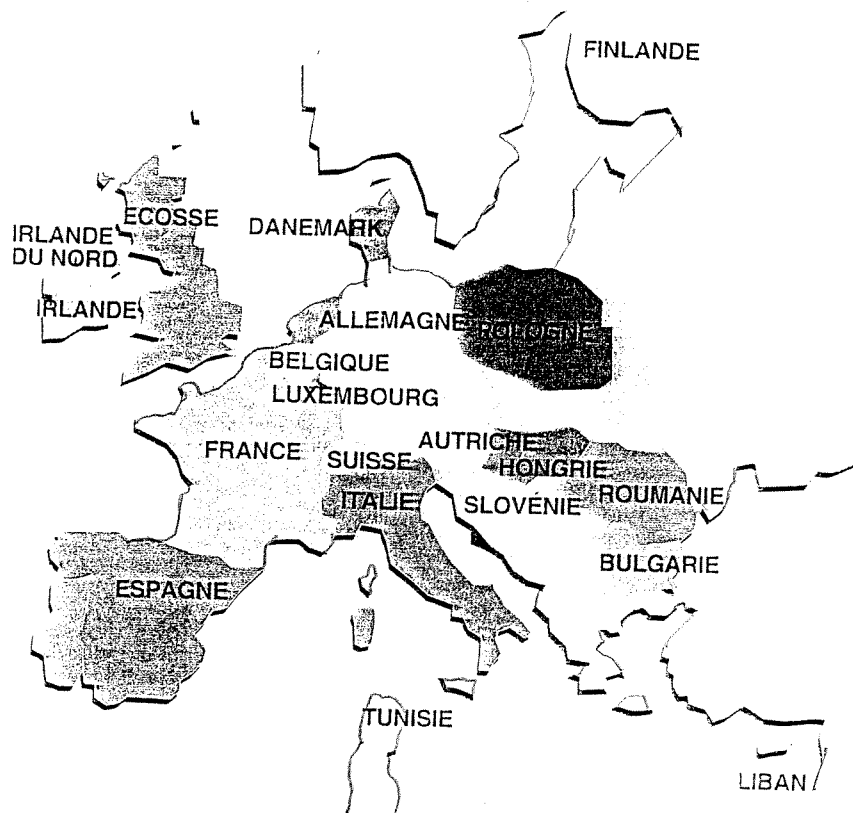
C'est ainsi que les élèves nous découvrent le vendredi 7 mars dans toute notre richesse et c'est alors que commence notre vie publique, mais ceci est une autre histoire.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

P.S. : Au secours! Mes petits frères se font plus rares car l'imagination fertile de nos concepteurs se tarit et, pareille à la nature, elle commence elle aussi à sécher. Alors bienvenue à tous ceux qui auraient des idées d'exercices pour préparer l'épreuve de Mathématiques Sans Frontières 1998.

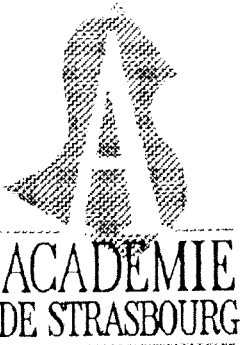
Adressez votre courrier à l'adresse ci-dessous :

Collège TWINGER
Mathématiques Sans Frontières
10, rue Ovide
67200 STRASBOURG.



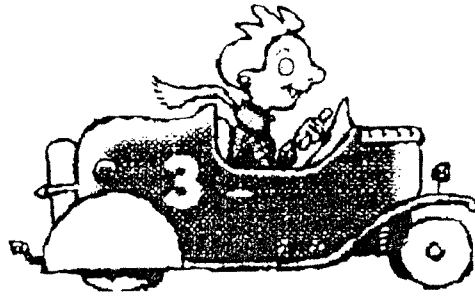
Compétition interclasses de 3^e & 2^{de}

Mathématiques
sans frontières



ACADEMIE
DE STRASBOURG
Institut de Recherche de
l'Enseignement des
Mathématiques
Inspection Pédagogique
Régionale de
Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

Epreuve du
6 mars 1997



- Les exercices n° 2, 3, 4, 6, 7, 8 ne nécessitent aucune justification. Pour les autres, des explications sont demandées.
- Le soin sera pris en compte
- Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.

exercice
n° 1
10 points

Plus ou moins de moins

Solution à rédiger en italien,
allemand, anglais ou espagnol.

Peter hat auf den Tisch sechs Karten gelegt, die völlig gleich aussehen. Auf der anderen Seite trägt jede von ihnen jeweils eine der Zahlen +1, +2, +3, -1, -2, -3.

Peter schlägt seinem Freund Paul das folgende Spiel vor : beide drehen gleichzeitig eine Karte um. Ist das Produkt der beiden Zahlen positiv, so ist Paul der Gewinner. Wenn das Produkt negativ ist gewinnt Peter.

Nach einigen Runden stellt Paul fest, dass Peter öfter gewinnt. Um seine Chancen zu erhöhen, schlägt er vor, eine der Karten mit einer negativen Zahl aus dem Spiel zu entfernen und mit fünf Karten weiterzuspielen.

Hat Paul recht ?
Begründe die Antwort.

Pietro ha posato sulla tavola sei carte da gioco mostrando un tergo identico. Nel davanti di ciascuna ci sono i numeri seguenti +1, +2, +3, -1, -2, -3.

Pietro propone allora al suo amico Paolo il gioco seguente: si tratta di girare contemporaneamente una carta ciascuno se il prodotto dei due numeri che appaiono è positivo, allora è Paolo che vince, se il prodotto è negativo sarà Pietro il vincitore.

Dopo qualche partita, Paolo si rende conto che Pietro vince più spesso di lui. Allora per avere più fortuna propone a Pietro di togliere via una carta che ha un numero negativo e di ricominciare il gioco con le cinque carte rimanente. E Paolo ad avere ragione?
Giustificate la risposta.

Peter put six cards down on the table. All of them have an identical back and on the other side they respectively show +1, +2, +3, -1, -2, -3.

Then Peter suggests his friend Paul the following game : they both simultaneously turn up one card. If the product of the two numbers is positive, Paul wins. If the product is negative Peter is the winner.

After a few games, Paul notices that Peter more often wins. So, in order to increase his chances of success, he proposes Peter to take off one card with a negative number and to start the game again with the five cards left.

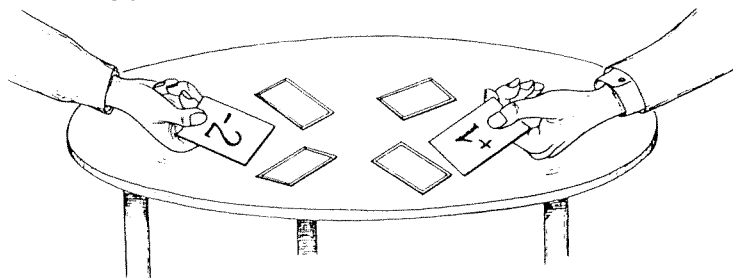
Is Peter right?
Justify your answer.

Pedro ha colocado sobre la mesa seis cartas que presentan un verso idéntico. En el anverso de cada una de ellas figuran respectivamente los números +1, +2, +3, -1, -2, -3.

Pedro propone entonces a su amigo Pablo el siguiente juego : cada uno vuelve simultaneamente una carta; si el producto de los dos números que aparece es positivo, Pablo gana; si el producto es negativo, Pedro es el ganador.

Tras algunas partidas, Pablo se da cuenta de que Pedro gana más a menudo que él. Así, para aumentar sus posibilidades, propone a Pedro que levante una carta que tenga un número negativo y que retome el juego con las cinco cartas restantes.

¿Tiene Pablo razón ?
Justifique su respuesta.



**exercice
n° 2
5 points**

Inspection Générale

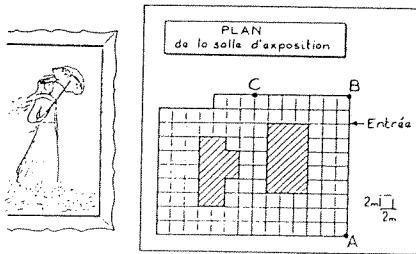
La figure ci-dessous est le plan d'une salle d'exposition où des tableaux sont accrochés aux 18 murs. Les parties hachurées représentent l'intérieur de locaux non affectés à l'exposition.

On dispose de quatre caméras qu'il s'agit de fixer aux murs. Tous les murs doivent être surveillés et chaque caméra doit être observable par l'une au moins des trois autres.

Sur le plan, le champ d'une caméra placée en un point du mur est l'intérieur d'un angle dont ce point est le sommet et dont la mesure maximale est 135° .

Trois caméras ont été placées en A, B, C.

Dessiner sur la feuille-réponse le plan de la salle d'exposition à l'échelle 1/100; placer la quatrième caméra D et colorier leurs champs de quatre couleurs différentes.

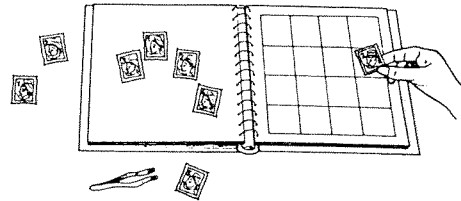


**exercice
n° 4
5 points**

Exercice timbré

Dans sa collection de timbres, Gérard possède des timbres de valeurs 1 F, 2 F, 3 F, 4 F ou 5 F. Avec 16 de ces timbres, il peut remplir toutes les cases d'une grille de 4 sur 4 de sorte qu'aucune ligne, aucune colonne, aucune diagonale ou parallèle aux diagonales ne comporte deux timbres de même valeur et que la valeur totale ne dépasse pas 50 F.

Donner une disposition possible des 16 timbres sur la grille.



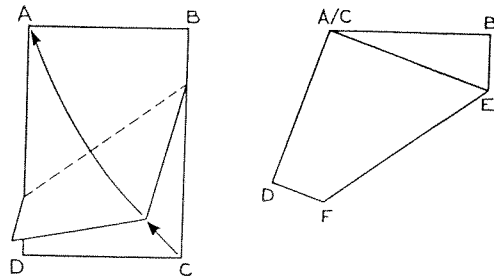
**exercice
n° 5
10 points**

Coin sur Coin

Les dimensions exactes d'une feuille rectangulaire sont 21 cm et $21\sqrt{2}$ cm.

On plie cette feuille en superposant deux sommets opposés. On obtient un pentagone.

Calculer l'aire exacte du pentagone ABEFD.



**exercice
n° 3
10 points**

Le cadre magique

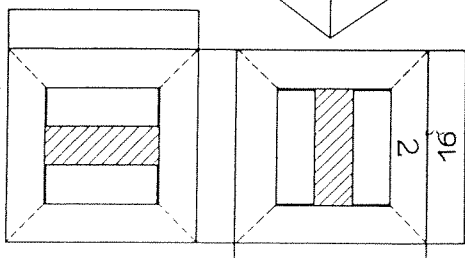
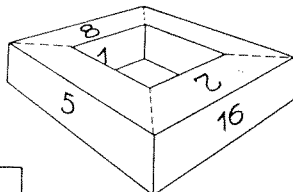
Claudia et Lætitia assemblent quatre morceaux de bois pour réaliser un cadre. Elles numérotent les quatre faces de chaque morceau avec les entiers de 1 à 16.

Claudia dit: "Regarde c'est magique, la somme des nombres inscrits sur les quatre faces de chaque morceau est égale à 34."

Lætitia, après avoir pris le solide en main, le repose comme l'indique la figure ci-dessous et répond:

"Il y a mieux ! Si j'additionne les nombres des quatre trapèzes du dessus ou bien du dessous, des quatre faces verticales extérieures ou bien intérieures, enfin de quatre secteurs ayant un sommet commun, alors je trouve toujours 34."

Sur la feuille-réponse, reproduire le patron ci-dessous et le compléter avec les numéros manquants.



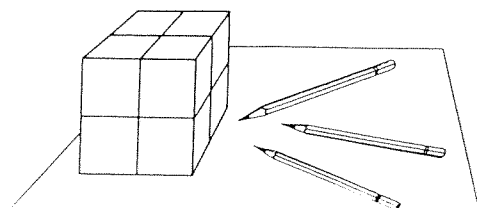
**exercice
n° 6
5 points**

Laszlo's cube

On a divisé chaque face d'un cube en quatre carrés identiques.

A l'aide de trois couleurs différentes, colorier les 24 carrés ainsi obtenus de sorte que deux carrés ayant un côté commun sur le cube ne soient pas de la même couleur.

Coller le patron d'un cube ainsi colorié sur la feuille réponse.

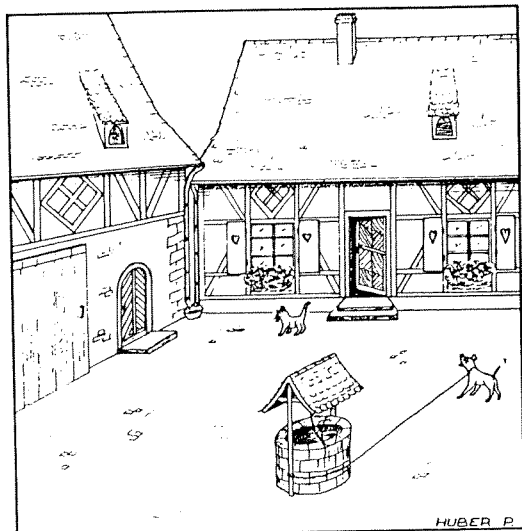


exercice n° 7
10 points

Chien roulé

Rantanplan est allongé dans la cour de la ferme; retenu par sa laisse fixée à la margelle du puits, il surveille la porte de la cuisine.

Soudain Gros-Minet franchit le seuil de la porte et s'enfuit en rasant les murs à la vue de Rantanplan. Une course-poursuite s'engage autour du puits en même temps que la laisse de Rantanplan, constamment tendue, s'enroule autour de la margelle...



Données:

- la cour de la ferme est carrée, son côté mesure 20 m,
- le puits est au centre de la cour,
- le diamètre de la margelle du puits est 1,20 m,
- la longueur de la laisse est 8 m, elle n'est pas élastique.

Construire sur la feuille-réponse, à l'échelle 1/100, la trajectoire décrite par l'extrémité mobile de la laisse de Rantanplan.

exercice n° 8
5 points

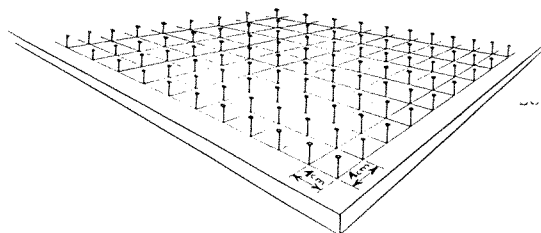
Passage clouté

On dispose d'une planche carrée de 20 cm de côté quadrillée par des clous espacés de 1 cm.

On veut réaliser un octogone, le plus régulier possible, dont les sommets sont huit clous reliés par une ficelle tendue.

Cet octogone doit avoir tous ses angles égaux, quatre côtés parallèles aux bords de la planche et le rapport de deux côtés consécutifs doit être aussi voisin que possible de 1.

Sur la feuille-réponse reproduire le quadrillage et dessiner l'octogone en couleur.

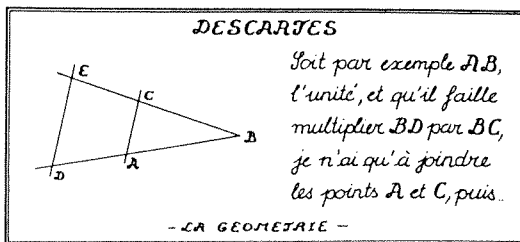


exercice n° 9
10 points

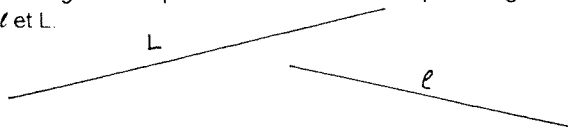
Produit cartésien

Dans son livre "La Géométrie", René Descartes (1596-1650) donne une méthode permettant de construire uniquement à la règle et au compas le produit de deux longueurs :

"Soit par exemple, AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC , je n'ai qu'à joindre les points A et C , puis tirer DE parallèle à CA et BE est le produit de cette multiplication."



- 1) Justifier le procédé de Descartes.
- 2) Avec l'unité de longueur AB choisie précédemment, les segments représentés ci-dessous ont pour longueurs l et L .



En s'inspirant de la méthode de Descartes construire sur la feuille-réponse un segment de longueur $\frac{L}{l}$

exercice n° 10
15 points

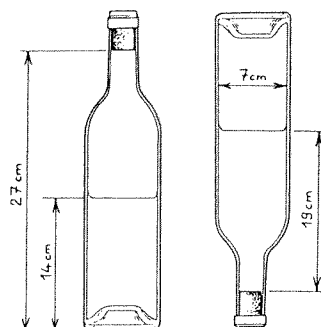
Auf dem Kopf

Le capitaine Haddock, après un repas bien arrosé, se fit sermonner par Tintin:

"Capitaine, ce n'est plus possible! Sur cette table, la bouteille de whisky était encore pleine hier, et maintenant la hauteur du liquide n'est plus que de 14 cm."

"Mille millions de mille sabords", répondit le capitaine en retournant la bouteille, "le whisky arrive encore à 19 cm au dessus du bouchon!"

Sachant que la bouteille a une contenance de 0,76 litre jusqu'en dessous du bouchon, calculer en cm^3 le volume du whisky qui s'y trouve encore.



Spécial Seconde

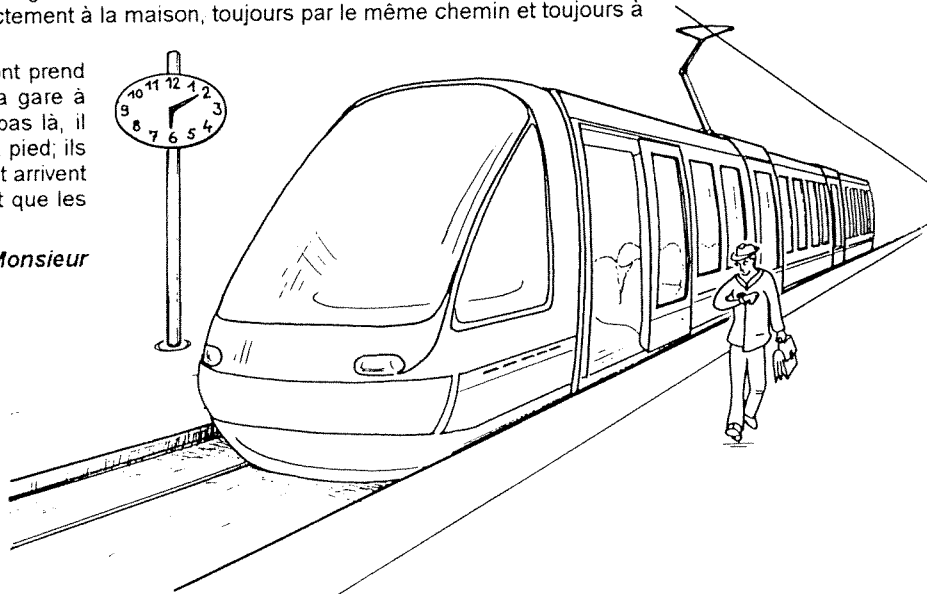
**exercice
n° 11
5 points**

Un km à pied ...

Chaque soir Madame Dupont part en voiture chercher son mari à la gare. Elle part de chez elle toujours à la même heure, prend toujours le même itinéraire, toujours à la même vitesse pour arriver à la gare exactement à 18 h 30, heure d'arrivée du train de son mari. Ils rentrent ensuite directement à la maison, toujours par le même chemin et toujours à la même vitesse.

Mais un jour, Monsieur Dupont prend un autre train qui arrive à la gare à 18 h 10. Sa femme n'étant pas là, il part aussitôt à sa rencontre à pied; ils se retrouvent sur le chemin et arrivent chez eux 10 minutes plus tôt que les autres jours.

**Combien de temps Monsieur Dupont a-t-il marché ?
Justifier la réponse.**



**exercice
n° 12
10 points**

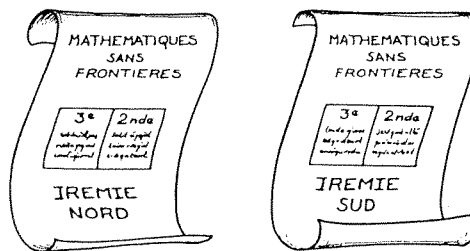
Moyennes Sans Frontières

Plus de 1000 classes de 3^{ème} et de 2^{nde} ont participé à la compétition "Mathématiques sans Frontières" en Irémie du Nord et du Sud.

Le rapport des organisateurs mentionne qu'un des exercices, qui valait 10 points, a été mieux réussi par les classes de 3^{ème} dans chacun des deux secteurs "Nord" et "Sud". Mais cependant, sur l'ensemble de l'Irémie, les classes de 2^{nde} ont obtenu une moyenne supérieure à celle des classes de 3^{ème}.

Ce rapport a laissé plus d'un élève perplexe... et pourtant les organisateurs ne se sont pas trompés.

Trouver un exemple d'une telle situation et justifier.



**exercice
n° 13
15 points**

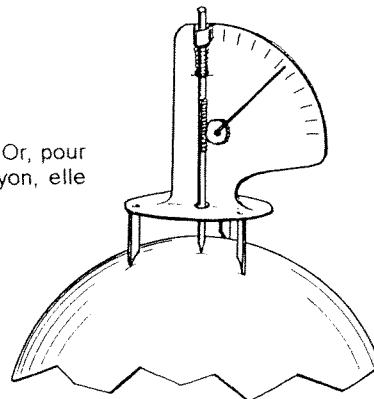
Boule à venir

Madame Lune a malencontreusement cassé sa boule de cristal. Or, pour prédire l'avenir, il lui faut une boule de même rayon. Pour déterminer ce rayon, elle s'adresse au professeur Tournesol. Il utilise un sphéromètre.

C'est un appareil qui permet de calculer le rayon d'une boule solide. Sa base est constituée de trois pieds formant un triangle équilatéral de côté 9 cm. Le pointeau central est porté par la droite perpendiculaire au plan de la base passant par son centre de gravité.

Les trois pieds reposant sur un morceau de la boule, on déplace le pointeau jusqu'à ce qu'il touche la sphère et l'appareil indique une distance de 2 cm de l'extrémité du pointeau au plan de la base.

Calculer le rayon de la boule de cristal ... et prédire l'avenir.



MSF 97

CLASSIFICATION DES EXERCICES

Points	Grandeurs et mesures		Repérages Distances Angles	Configurations Constructions Transformations		Nombres et Calculs	Représentation Organisation de données	Fonctions Numér.		Logique	Autres
	Plan	Espace		Plan	Espace			Equ. à sol. N	Vitesse		
				puzzles	Patrons	Dénombr.	Pourcents				
5											
10											
15											

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

N°	Titre provisoire	Thème	Difficulté .++.+.=.-	Spécial 2°	Rédac L.V.	Appréciat .++.+.=.-	Epreuve entraîn.	Epreuve définit.	Réserve	Oubliett	Observations

A VOS STYLOS

PROBLÈME 41

Énoncé (proposé par J. Zeng) :

Dans ce qui suit, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial autrefois noté C_n^k .

On appelle composition de l'entier p en k parts toute suite ordonnée $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ telle que $\forall i \ c_i \geq 1$, et $c_1 + c_2 + \dots + c_k = p$.

On note $C(p, k)$ l'ensemble des compositions c de ce type. Montrer que

$$(1) \quad \sum_{k=1}^p (-1)^k \sum_{c \in C(p, k)} \prod_{j=1}^k \binom{n}{c_j} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}.$$

pour tous les entiers $p \leq n$.

Remarque de J. Zeng sur la solution de M. Wambst J'ai lu avec intérêt la solution de mon problème publié dans le dernier numéro de l'Ouvert.

Je trouve la solution intéressante car élémentaire, mais un peu compliquée, et avec une petite erreur de signe dans le q -analogue (mais il s'agit peut-être d'une faute de frappe). Voici le q -analogue que je propose :

$$(1) \quad \sum_{k=1}^p (-1)^k \sum_{c \in C(p, k)} \prod_{j=1}^k \binom{n}{c_j}_q q^{\binom{c_j}{2}} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}_q.$$

La preuve ci-dessous est valable aussi bien pour q quelconque que dans le cas où $q = 1$:

Pour tout entier $n \geq 1$ et un scalaire q tel que $|q| \neq 1$, on définit le q -binôme $(x; q)_n = (1-x)(1-xq) \dots (1-xq^{n-1})$. Alors on a les formules de type binomial suivantes:

$$(x; q)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} (-x)^k, \quad \frac{1}{(x; q)_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}_q x^k.$$

On a l'identité générale suivante :

$$(a, x, a_2x^2 + \dots + a_nx^n)^k = \sum_{p=k}^{p=nk} \left(\sum_{c \in C(p, k)} \prod_{j=1}^k a_{c_j} \right) x^k.$$

D'autre part, si $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est une série formelle, on définit $[x^n]f(x) = a_n$ pour tout $n \geq 0$. Il est clair que $[x^n]$ est un opérateur linéaire sur l'espace vectoriel des séries formelles.

Le premier membre de (1) s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p (-1)^k [x^p] \{(-x; q)_n - 1\}^k &= [x^p] \sum_{k=1}^p \{1 - (-x; q)_n\}^k \\ &= [x^p] \left\{ \frac{1 - (-x; q)_n - [1 - (-x; q)_n]^{p+1}}{(-x; q)_n} \right\} \\ &= [x^p] (-x; q)_n^{-1} \\ &= (-1)^p \binom{n+p-1}{p}_q. \end{aligned}$$

PROBLÈME 43

Énoncé (proposé par D. Dumont et G. Kreweras) :

On écrit une suite finie $(m(1), m(2), m(3), \dots, m(k))$ d'entiers naturels $m(i)$ comme un "mot" $m = m(1)m(2)m(3) \cdots m(k)$. Un *anagramme* p d'un mot m est un mot de même longueur formé des mêmes "lettres" (entiers naturels) mais dans un ordre qui peut être différent.

Un anagramme $p = p(1)p(2)p(3) \cdots p(k)$ de $m = m(1)m(2)m(3) \cdots m(k)$ sera dit :

- *alternant large* si $p(1) \geq m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) \geq m(3)$, $p(4) \leq m(4)$, \dots , $p(2i-1) \geq m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.
- *alternant mixte* si $p(1) > m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) \leq m(4)$ \dots , $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.
- *alternant strict* si $p(1) > m(1)$, $p(2) < m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) < m(4)$ \dots , $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) < m(2i)$, etc.

Dans ce problème on étudie les anagrammes alternants des mots suivants :

$$m_1 = 12, m_2 = 1234, m_3 = 123456, \dots, m_n = 1234 \cdots (2n-1)(2n),$$

$$\mu_0 = 0, \mu_1 = 01, \mu_2 = 0112, \mu_3 = 011223, \dots, \mu_n = 0112233 \cdots (n-1)(n-1)n.$$

Exemple : $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est un anagramme alternant large de μ_3 .

1°) On définit l'entier a_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot m_n . Montrer que a_n est également le nombre des anagrammes alternants stricts de m_{n+1} .

2°) On définit l'entier α_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot μ_n . Montrer que α_n est également le nombre des anagrammes alternants mixtes de μ_{n+1} et le nombre des anagrammes alternants stricts de μ_{n+2} .

3°) Montrer que $a_n = 2^n \alpha_{n-1}$ ($n \geq 1$).

Solution de P. Renfer :

1) Il s'agit de construire une bijection entre l'ensemble des anagrammes alternants stricts de m_{n+1} et l'ensemble des anagrammes alternants larges de m_n . Voilà la recette :

Soit

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n+1 & 2n+2 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & \dots & p(2n+1) & p(2n+2) \end{pmatrix}$$

un anagramme alternant strict de m_{n+1} .

On a nécessairement : $p(2) = 1$ et $p(2n+1) = 2n$.

Sur la première ligne de p , ajouter 1 aux nombres impairs et retrancher 1 aux nombres pairs. Puis réordonner les colonnes de p , dans l'ordre croissant des nombres de la première ligne.

Supprimer la première colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la dernière colonne $\begin{pmatrix} 2n+2 \\ 2n+2 \end{pmatrix}$.

Retrancher 1 à tous les nombres des deux lignes.

On obtient ainsi un anagramme alternant large du mot m_n (la recette est bien réversible!).

2)

a) Il s'agit de construire une bijection entre l'ensemble des anagrammes alternants mixtes de μ_{n+1} et l'ensemble des anagrammes alternants large de μ_n . Voilà la recette :

Soit

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \dots & n & n & n+1 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & p(5) & p(6) & p(7) & \dots & p(2n) & p(2n+1) & p(2n+2) \end{pmatrix}$$

un anagramme alternant mixte de μ_{n+1} .

On a nécessairement : $p(2n+1) = n+1$ et $p(2n-1) = n$.

Sur la première ligne de p , ajouter 1 aux nombres de rang impair : $\mu(1), \mu(3), \dots, \mu(2n+1)$. Remplacer à la fin de la première ligne $(n+2)$ par 0 et placer la dernière colonne en tête.

Supprimer la dernière colonne $\begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}$ ainsi que l'antépénultième $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$.

Echanger deux à deux les colonnes ayant le même nombre sur la première ligne.

On obtient ainsi un anagramme alternant large du mot μ_n (la recette est bien réversible!).

b) Il s'agit de construire une bijection entre l'ensemble des anagrammes alternants stricts de μ_{n+2} et l'ensemble des anagrammes alternants larges de μ_n . Voilà la recette :

Soit

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \dots & n+1 & n+1 & n+2 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & p(5) & p(6) & p(7) & \dots & p(2n+2) & p(2n+3) & p(2n+4) \end{pmatrix}$$

un anagramme alternant strict de μ_{n+2} .

On a nécessairement : $p(2) = 0, p(4) = 1, p(2n+3) = n+2, p(2n+1) = n+1$.

Sur la première ligne de p , ajouter 1 aux nombres de rang impair : $\mu(1), \mu(3), \dots, \mu(2n+3)$ et retrancher 1 aux nombres de rang pair : $\mu(2), \mu(4), \dots, \mu(2n+4)$.

Remplacer à la fin de la première ligne $(n+2)$ par 0 et placer la dernière colonne en tête.

Supprimer les colonnes de rang 2, 4, $(2n+3), (2n+1)$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n+2 \\ n+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}$.

Echanger deux à deux les colonnes ayant le même nombre sur la première ligne.

Retrancher 1 à tous les nombres des deux lignes.

On obtient ainsi un anagramme alternant large du mot μ_n (la recette est bien réversible!).

3) Il s'agit de montrer qu'à chaque anagramme alternant strict du mot μ_{n+1} , on peut faire correspondre 2^n anagrammes alternants du mot m_{n+1} . Soit

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \dots & n & n & n+1 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & p(5) & p(6) & p(7) & \dots & p(2n) & p(2n+1) & p(2n+2) \end{pmatrix}$$

un anagramme alternant strict de μ_{n+1} .

Affectons d'un "prime" tous les termes $\mu(3), \mu(5), \mu(7), \dots, \mu(2n+3)$ de la première ligne :

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1' & 2 & 2' & 3 & 3' & \dots & n & n' & n+1 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & p(5) & p(6) & p(7) & \dots & p(2n) & p(2n+1) & p(2n+2) \end{pmatrix}.$$

Sur la deuxième ligne affectons d'un "prime" l'un des deux nombres 1, l'un des deux nombres 2, l'un des deux nombres 3, \dots , l'un des deux nombres n : il y a 2^n façons de le faire!

Remplaçons dans les deux lignes 1, 2, 3, \dots, n par 1, 3, 5, $\dots, 2n-1$ respectivement.

Remplaçons dans les deux lignes 1', 2', 3', \dots, n' par 2, 4, 6, $\dots, 2n$ respectivement.

Remplaçons dans les deux lignes $n+1$ par $2n+2$.

On obtient ainsi un anagramme alternant strict de m_{n+1} .

PROBLÈME 44

Énoncé (proposé par Paul Erdős) :

Le grand mathématicien hongrois Paul Erdős, qui vient de disparaître, fut l'inventeur de très nombreux problèmes. En hommage à sa mémoire, voici un problème d'Erdős que nous soumettons à nos lecteurs.

Etant donnés deux entiers naturels m et n tels que $m < n$, on considère une partition de l'intervalle d'entiers $[m, n[= \{m, m+1, m+2, \dots, n-1\}$ en deux sous-ensembles A_1 et A_2 disjoints : $[m, n[= A_1 \cup A_2$. On dira que c'est une *partition d'Erdős* si l'entier n peut, d'au moins une manière, s'écrire comme somme d'éléments distincts de l'un des A_i .

A VOS STYLOS

Exemple. — $m = 1, n = 8, [1, 8[= \{1, 2, 4, 5\} \cup \{3, 6, 7\}$ est une partition d'Erdős de $[1, 8[$ car $8 = 1 + 2 + 5$.

Le couple (m, n) est un *couple d'Erdős* si toute partition de $[m, n[$ en deux sous-ensembles est une partition d'Erdős. L'objectif du problème est d'identifier les couples (m, n) qui sont des couples d'Erdős.

1°) Montrer que $(1, 11)$ n'est pas un couple d'Erdős.

Montrer que $(1, 12)$ et $(2, 15)$ sont des couples d'Erdős.

2°) Trouver d'autres couples d'Erdős, et les déterminer tous si possible.

PROBLÈME 46

Énoncé (proposé par R. Schäfke) :

Soit la matrice carrée $M_n = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, où $a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$ (coefficient binomial).

Montrer que M_n est définie positive, de déterminant égal à 1, et que si λ est valeur propre de M_n alors $1/\lambda$ est également valeur propre de M_n .

PROBLÈME 47

Énoncé (proposé par M. Krier) :

On considère un polygone plan P à n côtés, de sommets consécutifs A_0, A_1, \dots, A_n , avec $A_n = A_0$. Sur chaque segment $A_i A_{i+1}$ on construit un carré $A_i A_{i+1} B_i C_i$, toujours du même côté pour un observateur qui se déplacerait sur le polygone.

L'objectif du problème est de déterminer P de telle sorte que les $2n$ points B_i et C_i soient sur un même cercle.

1°) Rechercher les polygones P convexes. Il y a la solution évidente où l'on prend pour P un polygone régulier. Est-ce la seule solution?

2°) Indiquer comment on peut obtenir les polygones non convexes ayant la propriété demandée.

Remarque. — On évitera de s'embourber dans la définition d'un polygone.

PROBLÈME 48

Énoncé (proposé par R. Garin) :

Pour quel(s) entier(s) naturel(s) n la somme

$$\sum_{k=0}^n k^2 (n-k)^2$$

est-elle un carré parfait ?

A VOS STYLOS

PROBLÈME 49

Énoncé (proposé par E. Kern) :

Dans un triangle ABC , on note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB , et α, β, γ les mesures respectives des angles en A, B et C .

- 1) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos \alpha = \cos 2\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 2\beta$.
- 2) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos \alpha = \cos 3\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 3\beta$.