L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 88 – SEPTEMBRE 1997 I.S.S.N. 0290 - 0068

NOTRE COUVERTURE :
Carl Friedrich GAUSS

Elle reproduit une lithographie présentant un Gauss inhabituel et impressionnant de vivacité et d'intelligence.

C'est ainsi qu'on peut l'imaginer, écrivant ses lettres à ses contemporains, dont on trouvera en fin de numéro un exemple significatif.

Cet "Ouvert" est dédié à la mémoire d'Alain Bechtel (1952-1997), agent de service technique, qui en 15 ans de présence à l'UFR de Mathématique a vu défiler plus de 50 numéros.

EDITORIAL

Voici un numéro de *'L'Ouvert'* qui comporte une anomalie : il ne contient pas sa traditionnelle rubrique "A vos stylos". Mais rassurez-vous, ce n'est qu'une exception à la règle générale.

La période d'été présente des difficultés de coordination et la composition du numéro de septembre doit pour nous se conclure dans la foulée de celle du numéro de juin. De plus, la rubrique "A vos stylos" s'appuie sur des solutions fournies par des lecteurs et celles-ci suivent forcément la parution des numéros précédents, ce qui laisse peu de temps à Dominique Dumont pour composer ces pages. Un déplacement lointain a neutralisé pour une fois cette prouesse régulière. Soyez plus nombreux à lui envoyer des solutions pour l'aider à faire vivre plus aisément cette rubrique; cet intermède vous donnera du temps pour chercher.

Malgré cette lacune, ne rejetez pas ce numéro de *'L'Ouvert'* . Vous y trouverez une diversité qui vous sortira des tracasseries de début d'année scolaire.

. Les premières pages de l'article d'Eric Kern vous intrigueront sans doute mais un coup d'œil à la page 8 vous rassurera : les mathématiques n'y sont pas étrangères.

. Le deuxième article peut vous intéresser même si vous ne faites pas d'échange avec des classes d'un autre pays. Qui eut cru que l'élevage des truites comportait tant de mathématiques, et que des élèves de section L (sans spécialité math.) en viendraient à bout ? Si vous connaissez d'autres situations aussi riches, faites-nous en part ou écrivez un article.

. L'article de Jean-Luc Gasser vous fera faire un pas de plus dans la compréhension mutuelle des enseignements de mathématique et de physique. Pour ajouter des informations à cette étude, ne manquez pas de consulter la brochure "Dictionnaire de mathématiques et sciences physiques" de l'IREM de Strasbourg (50 F + 15 F de port) qui vous fera connaître à peu de frais ce qui se dit dans la maison d'à côté.

Notons que les sujets de physique du baccalauréat ne sont pas les seuls à comporter des défauts. Par exemple, une collègue me disait début juillet que le fait d'avoir donné la réponse dans une question d'un exercice sur les complexes avait piégé bien des élèves; ici la réponse donnée permettait un contrôle à ceux qui sont bons mais ne constituaient pas une aide pour les autres.

De toute façon, la forme des énoncés de mathématiques au baccalauréat est contestée depuis plusieurs années. Un groupe de l'APMEP travaille là-dessus pour concevoir des sujets d'un autre type.

. Le corrigé des épreuves du Rallye mathématique n'est plus à présenter mais il m'a donné une occasion supplémentaire de m'énerver devant les ordinateurs. La variété des traitements de texte accentue les problèmes de composition d'une brochure, surtout pour les formules de mathématiques : Word 7 ne peut être modifié sous Word 6, et inutile de vouloir le sortir en TeX sans tout retaper.

. Le dernier article ouvre une nouvelle rubrique pour '*L'Ouvert*' qui prolonge notre souci d'une culture historique enracinant les mathématiques dans la réalité humaine et sociale, en reproduisant de larges extraits de correspondance entre savants.

Bonne lecture!

O. Schladenhaufen.

SOMMAIRE

N° 88 – SEPTEMBRE 1997

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
http://irma.u-strasbg.fr/~irem
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 35.– F

LA MÉSAVENTURE DES COMPTABLES D'UTOPIA

Eric Kern

Fréquentant régulièrement des bouquinistes et des antiquaires, nous avons eu connaissance récemment de l'existence d'un texte étrange écrit sur un objet étrange, que, pour simplifier, nous appellerons un parchemin. L'étude du parchemin est d'une grande complexité. Dans un moiré qui semble en perpétuel mouvement apparaissent et disparaissent des phrases qui semblent avoir été reproduites à l'infini, avec d'imperceptibles changements de calligraphie et même parfois de sens. La texture du parchemin est elle-même si étrange qu'il semble impossible de la décrire. Après bien des efforts, nous pensons avoir réussi à rassembler quelques pièces du puzzle, en un texte cohérent, qui semble n'être qu'une histoire très banale, écrite sous forme d'un conte. Malgré toutes les réserves qui s'imposent, nous ne pouvons pas résister au plaisir de la communiquer.

Il y a très très longtemps, existait un royaume du nom d'Utopia. Les gens d'Utopia étaient de toutes les tailles, de la taille des gens actuels à des tailles infiniment petites et étaient en nombre infini.

Aussi, avait-on réparti ces gens en une infinité de castes : les grands, les demi-grands, les tiers de grands et ainsi de suite. Il n'y avait qu'un nombre fini de gens dans chaque caste.

Pour satisfaire les sujets de ce royaume, tous les articles devaient être reproduits en une infinité de dimensions : les grandes tailles, les demi-tailles, les tiers de taille et ainsi de suite.

Le prix d'un même article était bien sûr d'autant plus petit que l'article était menu. Ce dernier était déterminé avec une très grande précision, qui nécessitait un affichage avec une infinité de décimales.

Ceci n'était pas la seule bizarrerie de ce royaume. L'année était en effet divisée en une infinité de mois : le premier, le deuxième, le troisième et ainsi de suite.

Dans chaque caste il y avait des gens qui savaient additionner très rapidement une infinité de nombres successifs qui pouvaient, de ce fait, espérer accéder à la dignité de Comptable!

Il y avait aussi les Prêtres Mathématiciens qui connaissaient quelques secrets concernant ces additions, mais qui répugnaient à les révéler, de peur de se retrouver à mendier au coin de la rue (sic).

Le roi, qui n'avait pas la vie facile, avait nommé un Grand Argentier qui devait veiller à ce que les finances du royaume ne se transforment en un désastre.

Utopia ne faisait en effet commerce qu'avec un autre royaume du nom d'Aipotu qui avait les mêmes bizarreries qu'Utopia. Les sujets d'Utopia n'avaient d'intérêt que pour les objets fabriqués en Aipotu et inversement.

Les gens de ces deux pays étant très belliqueux, il importait, chaque année, d'équilibrer les importations et les exportations, afin d'éviter une guerre.
Pour survivre les Prêtres Mathématiciens avaient transmis aux Comptables quelques uns de leurs secrets.
Dans chaque caste des aides-comptables étaient chargés chaque mois de déterminer le total des exportations et des importations réalisées par la caste, les deux nombres obtenus étant ensuite recopiés sur une grande feuille de transactions.
Les feuilles des transactions présentées aux Comptables d'Utopia à la fin de l'année, comportaient une première ligne dans laquelle était inscrite le nom des mois et une première colonne dans laquelle figurait le nom des castes. Dans la première case de la première ligne qui était aussi la première case de la première colonne était apposé le sceau du Grand Argentier. La colonne de chaque mois était subdivisée en deux colonnes, une pour les importations et une pour les exportations. La ligne de chaque caste était subdivisée en deux lignes, une pour les importations une pour les exportations.
Les Prêtres Mathématiciens avaient indiqué aux Comptables et au Grand Argentier deux façons bien distinctes pour faire le bilan de l'année écoulée:
1) Additionner pour chaque mois les importations ainsi que les exportations pour l'ensemble des castes, reporter le résultat obtenu dans la colonne correspondante d'une dernière ligne, puis pour cette dernière ligne effectuer la somme des importations et la somme des exportations inscrites dans cette ligne, après avoir consciencieusement effectué toutes les opérations.
2) Additionner pour chaque caste les importations ainsi que les exportations pour l'ensemble des mois de l'année, reporter le résultat obtenu dans la ligne correspondante d'une dernière colonne, puis pour cette dernière colonne effectuer la somme des importations et la somme des exportations inscrites dans cette colonne, après avoir consciencieusement effectué toutes les opérations.
Tout ceci avait été consigné dans des textes sacrés qui précisaient que les résultats obtenus par chacune des méthodes étaient les mêmes. Les textes précisaient que pour éviter des conflits avec Aipotu il importait que le total annuel des importations de l'ensemble des castes ne doive pas différer substantiellement du total annuel des exportations de l'ensemble des castes. Ceci avait été révélé aux Prêtres Mathématiciens.
Les Grand Argentiers, qui ne faisaient confiance à personne, avaient dans un lointain passé divisé les Comptables en deux groupes: les Comptables du Nord et les Comptables du Sud. Ceux du Nord effectuaient les calculs suivant la première méthode des textes sacrés, ceux du Sud devant utiliser la deuxième méthode.
Les deux nombres calculés chaque année par les Comptables du Nord, qui étaient les mêmes que ceux calculés par les Comptables du Sud étaient tellement grands qu'il fallait beaucoup de temps rien que pour les énoncer.
Les Grand Argentiers, qui comme tous les dignitaires étaient plus ou moins corrompus, pour gagner du temps, ne s'intéressaient depuis longtemps qu'à une seule chose : la différence entre la recette et la dépense calculée par les Comptables, ceci dans le seul but d'éviter la guerre avec Aipotu. Bien que très belliqueux les

sujets d'Utopia n'aimaient pas l'idée de se faire tuer, ce qui aurait été inévitable en cas de conflit armé. Il en était de même pour les sujets d'Aipotu.
Chaque mois il y avait bien sûr des sujets avares qui exportaient un maximum d'articles mais ces derniers étaient miraculeusement compensés par des sujets dépensiers et endettés. Un même sujet pouvait d'ailleurs se révéler avare un mois et dépensier le mois suivant, mais cela ne se produisait pas trop souvent.
Aussi, au grand désespoir des Comptables, toute une année de calcul se résumait en une seule chose : annoncer le nombre zéro au Grand Argentier. Ceci était l'occasion d'une grande fête où tout Utopia faisait ripaille pendant des jours et des jours.
Depuis des temps immémoriaux tout se passait absolument sans problème. La légende parlait bien d'une année catastrophique mais ce n'était qu'une légende.
Les Comptables avaient beau savoir calculer très rapidement, il leur fallait exactement une année pour faire leurs comptes et étaient très malheureux de ne jamais pouvoir prendre de vacances. Etant très respectés par tous les sujets du royaume, aucun Comptable ne renonça jamais à sa charge. On sait aussi que les Comptables ne connaissaient aucune des propriétés des nombres : ce n'était que des Comptables.
Or un jour naquit un Comptable qui calculait quatre fois plus vite que les autres Comptables. Aussi la première année de son entrée en fonction s'ennuya-t-il prodigieusement ! Notre Comptable, en effet, aimait son métier mais n'aimait que son métier; l'idée de passer des vacances au soleil ne l'avait même pas effleuré. Il passa donc le reste de l'année, c'est à dire les trois quarts de l'année à réfléchir comment il pourrait remplir plus agréablement les années futures. Presque désespéré, il eut enfin l'idée qui allait faire de lui l'homme le plus célèbre d'Utopia.
Après avoir rempli ses obligations statutaires, ce qui ne lui prit que le quart de l'année, il s'amusa d'abord à faire le calcul des Comptables du Sud, étant lui-même un Comptable du Nord. Ceci lui permit de remplir la première moitié de l'année.
Pendant cette première moitié de l'année il avait aussi fait confectionner et remplir à ses frais, une feuille de calcul dans laquelle pour chaque mois et chaque caste ne figurait qu'un seul nombre, savoir la différence entre les exportations et les importations.
Pendant la moitié de l'année qui lui restait il se mit à additionner les résultats ainsi obtenus d'abord colonne par colonne en reportant les résultats dans une dernière ligne, puis ligne par ligne en reportant les résultats obtenus dans une dernière colonne. Après avoir additionné les nombres de la dernière colonne, puis les nombres de la dernière ligne quelle ne fut sa surprise de découvrir qu'il obtenait zéro. Dans cette feuille de calcul il y avait tantôt des nombres positifs tantôt des nombres négatifs mais ceci ne posait aucun problème à un Comptable. Tous ces calculs remplirent sa deuxième année de Comptable.
Dans les années qui suivirent, notre Comptable s'amusa à faire des simulations en faisant modifier légèrement (ce n'était pas un homme téméraire) les valeurs de la feuille officielle. Il en arriva à la conclusion que même lorsque le résultat final ne valait pas zéro ce résultat était le même que celui qu'il obtenait en utilisant les méthodes indiquées par les textes sacrés.

Notre Comptable qui avait un énorme besoin d'affection ne put s'empêcher de faire part de sa découverte dans tous les endroits qu'il fréquentait. La rumeur se fit bientôt si forte que tout le monde en Utopia ne parlait plus que de cela. Notre Comptable était devenu l'homme le plus célèbre du royaume.
Les Prêtres Mathématiciens regardaient avec amusement et avec tendresse notre comptable découvrir par des tâtonnements des résultats qui semblaient inédits, mais qui étaient enseignés aux novices peu de temps après leur entrée en séminaire. Les novices, qui n'avaient pas la maturité des prêtres avaient même en cachette composé une chanson très ironique à son sujet, qu'ils chantaient pendant leurs soirées.
Ce résultat intéressait énormément la guilde des Comptables. Non seulement il suffisait d'une demi-année pour faire les calculs, mais la feuille de calcul nécessaire pour effectuer les opérations avait une surface quatre fois plus petite que celle utilisée pour faire les calculs en suivant les canons imposés par les textes sacrés. Ceci était un argument de poids quand on sait que les Comptables payaient les feuilles de calcul avec leurs propres deniers. Il semblerait d'ailleurs que notre Comptable soit mort dans la misère, ayant investi toutes ses économies en feuilles de calcul pour faire ses simulations.
On décida donc de tirer au sort un Comptable dans chacune des castes qui rappelons-le étaient en nombre infini. On fit ceci dans le Nord et dans le Sud. Les Comptables ainsi désignés étaient chargés de faire des simulations, utilisant la nouvelle méthode en modifiant légèrement les valeurs fournies par les aides Comptables. Chaque année la simulation était la même pour tous les Comptables et invariablement on trouvait le même résultat, calculé par un même Comptable à la fois par lignes et par colonnes puisqu'un seul Comptable pouvait réaliser ces deux opérations en une seule année.
Les calculs de chaque simulation étaient aussi réalisés par les grands maîtres de la guilde en utilisant les canons sacrés. Invariablement ils en arrivaient à une conclusion : le Comptable, désormais légendaire d'Utopia, ne s'était pas trompé. Il n'y avait aucune raison de suivre les textes sacrés.
Cette expérience fut répétée année après année ceci pendant des siècles et des siècles. La guilde des comptables fut ainsi en possession de plusieurs infinités de résultat de simulations. Il faut savoir en effet que chaque siècle était formé d'une infinité d'années, la première, la deuxième, et ainsi de suite.
La guilde était très puissante dans le royaume aussi fit-elle pression auprès du Grand Argentier pour avoir le droit d'utiliser les nouvelles méthodes de calcul qui venaient d'être découvertes. Le roi qui était très influençable ne tarda pas à céder et signa la nouvelle charte des Comptables avec approbation et privilège du roi. Cet événement fut l'occasion d'une fête dans tout le royaume : ce fut la plus grande fête qu'ait jamais connu Utopia. La nouvelle méthode ne tarda pas à être divulguée aux gens d'Aipotu qui avaient de nombreux espions et qui l'adoptèrent aussi.
Les Comptables du Nord continuaient d'additionner par colonnes alors que les Comptables du Sud effectuaient des additions par ligne. Le Grand Argentier avait

été intransigeant à ce sujet.
Les Prêtres Mathématiciens tentèrent bien de s'opposer à pareille hérésie mais rien n'y fit : les gens d'Utopia avaient perdu la foi et le peuple, ainsi que le pouvoir avait remplacé les anciens dieux par des nouveaux moins exigeants et tellement plus agréables à servir. Les Prêtres Mathématiciens qui depuis longtemps n'étaient plus que tolérés furent chassés de leur temple et les quelques prêtres qui perpétuaient la tradition étaient réduits à la mendicité.
Les Comptables étaient les gens les plus heureux de tout le royaume. Le travail qui incombait à leur charge était fait en une moitié d'année et, n'ayant aucun intérêt particulier pour d'autres disciplines, passaient la deuxième moitié de l'année à bronzer au soleil. Ils devinrent ainsi les dignitaires les plus corrompus du royaume.
Des siècles et des siècles se passèrent ainsi ,pendant lesquels on perdit jusqu'au souvenir des textes sacrés, quand arriva l'**Année de la Grande Confusion**. Cette année là il semble que les sujets d'Utopia et d'Aipotu furent atteint d'une étrange maladie.
Chaque mois certaines castes avaient surtout envie d'acheter alors que d'autres étaient très productives et exportaient en masse et le mois d'après le même phénomène se reproduisait mais avec d'autres castes. Ceci se répéta pendant l'infinité des mois de l'année. De mémoire de Comptable on n'avait jamais vu une feuille de calcul aussi irrégulière. Les Comptables se mirent donc au travail et horreur, obtinrent pour la première fois depuis des temps immémoriaux un résultat différent de zéro.
Les Comptables du Sud s'étant concertés, il y en avait dans chaque caste et les castes étaient en nombre infini, durent se rendre à l'évidence : tout le monde avait trouvé le même résultat, ce qui excluait la possibilité d'une erreur de calcul. Il en était de même pour les Comptables du Nord. Cette année là les Comptables ne prirent pas de vacances, ils étaient très inquiets.
Le premier jour de l'an, jour de la cérémonie de communication des résultats, les Comptables du Nord selon l'étiquette de la cour annoncèrent donc un résultat positif et ce nombre était un nombre tellement grand que nous renonçons à en donner une description. Les sujets d'Utopia semblaient s'être comportés en gens particulièrement avares et productifs ce qui, bien qu'excellent pour les finances du royaume, était de mauvais augure pour envisager des relations pacifiques avec Aipotu. Même le roi qui d'habitude n'écoutait que d'une oreille très distraite commençait à frétiller sur son trône.
Puis vint le tour des Comptables du Sud. La plupart des gens de l'assistance pensèrent alors que les Comptables avaient été frappés de folie collective. Ils annonçaient bien le même nombre tout aussi grand que les Comptables du Nord avec une différence de taille : le nombre était précédé du signe moins, c'était un nombre négatif. Les Comptables du Sud prétendaient que les utopiens s'étaient comporté en gens extrêmement dépensiers ce qui était catastrophique pour les finances du royaume.
Le premier moment d'étonnement passé il fallut bien se rendre à l'évidence : les calculs des Comptables avaient été effectués consciencieusement et n'étaient pas

entachés d'erreur. Le grand jour de la prophétie était arrivé. Personne ne savait qui avait fait cette prophétie, mais tout le monde la connaissait. Cette année là il n'y eu pas de fête en Utopia.

Le nombre fourni par les Comptables le premier jour de la deuxième année qui suivit l'Année de la Grande Confusion resta gravé dans la mémoire des sujets d'Utopia qui lui attribuèrent des pouvoirs maléfiques. Bien que n'ayant aucune propriété remarquable digne d'être citée, on l'appela le Nombre de la Confusion et on le désigna par un symbole dont la calligraphie est tellement complexe que nous renonçons à la reproduire.

Il était toutefois urgent de trouver une solution. La rumeur ne disait-elle pas que le Grand Argentier d'Aipotu avait tenté de lever une armée mais que le projet avait avorté, personne ne faisant plus confiance à la banque centrale. Les sujets d'Utopia ne vivaient d'ailleurs plus que de troc ce qui à court terme risquait de plonger tout le pays dans l'anarchie.

Or le fou du roi était un homme sage. Il connaissait l'existence de ces loqueteux que l'on rencontrait parfois en train de mendier au coin d'une ruelle et qui se disaient Prêtres Mathématiciens. Des années passées dans l'étude de vieux grimoires lui avaient appris que c'était un Prêtre Mathématicien qui avait prédit le Jour de la Grande Confusion.

Il envoya donc quérir le mendiant qu'il entr'apercevait lors de sa promenade matinale. Le Prêtre Mathématicien était un homme généreux qui comprit immédiatement quel était le problème des Comptables d'Utopia. Il fit d'abord confectionner des feuilles de calcul qui étaient celles utilisées dans ces temps reculés où les Comptables calculaient en suivant les règles des textes sacrés. Il demanda aux aides-comptables de remplir la feuille de calcul suivant les anciens canons, puis il demanda à l'infinité de Comptables d'Utopia de faire les calculs suivant les règles édictées dans les textes sacrés.

Chaque Comptable n'ayant qu'une seule ligne ou une seule colonne à additionner car tous travaillaient sur la même feuille le calcul fut terminé rapidement. Les totaux par mois et les totaux par caste donnaient bien dans chaque cas des nombres finis, mais oh! stupeur, le calcul des exportations et des importations de l'année et dont la différence était le seul résultat qui intéressait le Grand Argentier fournissait bien deux nombres égaux : les exportations avaient exactement compensé les importations, du moins le pensèrent-ils, mais ces deux nombres étaient infinis.

Dans leur frénésie les Utopiens avaient fait tellement de transactions que celles-ci ne pouvaient qu'être décrites par deux nombres infinis. Ceci est du moins ce que l'on retint de l'explication donnée par le Prêtre Mathématicien aux Comptables qui n'en demandaient d'ailleurs pas tant.

Il donna bien d'autres explications, entre autres :

1) La méthode de calcul suivant les textes sacrés était la seule méthode de calcul simple pour déterminer l'état des finances du royaume après une année, ces dernières obéissant à des règles très subtiles.

2) Pour certaines années exceptionnelles, aucune méthode de calcul simple ne permettait de donner l'état des finances du royaume.

3) Les canons des textes sacrés avaient étés instaurés pour permettre la détection éventuelle de ces années exceptionnelles.
4) Les Prêtres Mathématiciens connaissaient des méthodes de calcul malheureusement très complexes permettant de déterminer l'état des finances du royaume lors des années exceptionnelles.
5) Après une année exceptionnelle, en l'absence de tout calcul, un examen très attentif de l'état des finances du royaume suffisait à savoir si les importations et les exportations avaient été équilibrées cette année là, ceci au moins avec une approximation telle qu'elle permettait aisément de conclure s'il y avait lieu ou non de faire la guerre à Aipotu.
Quand le Prêtre Mathématicien, qui tout à sa joie d'avoir un auditoire, prétendit qu'il était possible que depuis que les Comptables utilisaient leur méthode de calcul il s'était peut-être déjà passé d'autres années toutes aussi catastrophiques que l'Année de la Grande Confusion sans que personne s'en soit rendu compte, on crut que toutes ses années de misère lui avaient troublé l'esprit et on pensa qu'il radotait.
Le Grand Argentier, tout surpris de n'y avoir pensé plus tôt, se rappelant que les finances du royaume n'étaient ni pires ni meilleures qu'avant l'Année de la Grande Confusion ,décida que la chose la plus raisonnable était, maintenant que la confiance des sujets du royaume était ébranlée, de frapper une nouvelle monnaie, les anciennes étant caduques, ce qui fut fait sans tarder. La bonne nouvelle se répandit comme une traînée de poudre dans le royaume et les gens d'Aipotu qui avaient beaucoup d'espions en Utopia décidèrent d'adopter la même attitude. On organisa une grande fête pour célébrer l'événement et jamais encore en Utopia on n'avait vu une aussi grande fête.
Il ne nous a pas été possible de donner une forme cohérente au reste du parchemin. Nous ne pouvons donc pas savoir ce qu'il est advenu des Comptables et des Prêtres Mathématiciens, ni même de la suite des relations avec Aipotu.
On ne peut rien dire non plus de la nature de l'espace-temps dans lequel baignait Utopia, tout au plus peut-on émettre l'hypothèse que ce que certains appellent un infundibulum chrono synclastique, voire une structure encore plus mystérieuse, loin d'être une chimère, est une réalité de notre univers.
Le parchemin lui même ne semble avoir été écrit ni par un Comptable, on en dresse un tableau trop noir, ni par un dignitaire, ni par un Prêtre Mathématicien certaines répétitions et quelques maladresses indiquant le contraire. Le principal argument en faveur de cette dernière hypothèse est l'insistance avec laquelle on parle de l'irrégularité de la feuille de calcul de l'Année de la Grande Confusion, alors que tout mathématicien sait que la mésaventure en question n'a rien à voir avec une quelconque irrégularité. La description de Prêtres Mathématiciens répugnant à révéler leurs secrets est un autre argument en faveur de cette thèse. Il nous semble que l'auteur du parchemin n'exprime ici qu'une opinion sans fondements, mais couramment répandue en Utopia, d'ailleurs contredite par l'attitude du Prêtre Mathématicien mendiant. L'auteur du parchemin semble toutefois vouer une grande admiration aux Prêtres Mathématiciens.

Enfin, nous avons essayé de garder l'atmosphère, empreinte parfois de tendresse, parfois de grande naïveté, qui se dégage à la lecture du parchemin et nous espérons y être parvenus.

APPENDICE

Cette histoire m'a été suggérée lors d'une tentative pédagogique de démonstration de la formule d'inversion des signes de sommation dans les séries doubles, qui s'énonce:

Soient $a_{n,m} \in \mathbf{R}^r$ *pour* $n, m \geq 0$. *Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \|a_{n,m}\| < +\infty \tag{1}$$

alors on peut intervertir les sommations:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}, \tag{2}$$

les différentes séries intervenant dans cette égalité étant absolument convergentes.

Si (1) n'est pas vérifié, l'égalité (2) n'est plus vérifiée en général. Donnons le contre-exemple classique. Posons, pour $n \geq 1$, $m \geq 1$:

$$a_{n,m} = \frac{1}{n^2 - m^2} \quad \text{si} \quad n \neq m \quad \text{et} \quad a_{n,n} = 0.$$

On a donc :

- $a_{m,n} = -a_{n,m}$;
- $a_{n,m} = \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{1}{n-m} - \dfrac{1}{n+m}\right)$ si $n \neq m$.

Posons:

$$b_{n,m} = \frac{1}{n+m} \quad \text{et} \quad c_{n,m} = \frac{1}{n-m} \quad \text{si} \quad n \neq m \quad \text{et} \quad b_{n,n} = c_{n,n} = 0.$$

On a:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m+p} b_{n,m} &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n+m} + \sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{1}{n+m} \\ &= \sum_{k=m+1}^{2m-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2m+1}^{2m+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=m+1}^{2m+p} \frac{1}{k} - \frac{1}{2m}, \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{m+p} c_{n,m} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n-m} + \sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{1}{n-m} = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$

On a donc aussi :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m+p}(b_{n,m}-c_{n,m}) &= \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=m+1}^{2m+p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}-\frac{1}{2m}\\ &= \sum_{k=1}^{2m+p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}-\frac{3}{2m}=\sum_{k=p+1}^{2m+p}\frac{1}{k}-\frac{3}{2m}.\end{aligned}$$

Il en résulte $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,m}=\frac{3}{4m^2}$ et par suite aussi :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{n,m}=-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,m}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3}{4m^2}=-\frac{3}{4}\zeta(2)=-\frac{1}{8}\pi^2.$$

Les deux sommes sont différentes de zéros et opposées!

Donnons maintenant des indications pour la démonstration de la formule d'inversion des signes de sommation :

1) Si $a_n\in\overline{\mathbf{R}}_+$ pour $n\geq 0$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sup_{p\geq 0}\sum_{n=0}^{p}a_n$.

2) Si $a_{n,m}\in\overline{\mathbf{R}}_+$ pour $n,m\geq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m} &= \sup_{p\geq 0}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m}=\sup_{p\geq 0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p}a_{n,m}\\ &= \sup_{p\geq 0}\sup_{q\geq 0}\sum_{m=0}^{q}\sum_{n=0}^{p}a_{n,m}\ ;\\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,m} &= \sup_{q\geq 0}\sum_{m=0}^{q}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,m}=\sup_{q\geq 0}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{q}a_{n,m}\\ &= \sup_{q\geq 0}\sup_{p\geq 0}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=0}^{q}a_{n,m}.\end{aligned}$$

L'égalité (2) résulte alors de:

$$\sup_{p\geq 0}\sup_{q\geq 0}\sum_{m=0}^{q}\sum_{n=0}^{p}a_{n,m}=\sup_{p\geq 0}\sup_{q\geq 0}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=0}^{q}a_{n,m}=\sup_{q\geq 0}\sup_{p\geq 0}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=0}^{q}a_{n,m}.$$

La convergence des séries dans $\mathbf{R}$ signifiant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m}<+\infty$.

3) Si $a_{n,m} \in \mathbf{R}$ pour $n, m \geq 0$ et si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| < +\infty$, on pose :

$$b_{n,m} = \sup(0, a_{n,m}) \geq 0 \quad \text{et} \quad c_{n,m} = \sup(0, -a_{n,m}) \geq 0,$$

de sorte que

$$|a_{n,m}| = b_{n,m} + c_{n,m} \;\text{ et }\; a_{n,m} = b_{n,m} - c_{n,m}.$$

Et par suite:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(b_{n,m} - c_{n,m}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{n,m} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{n,m} - \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(b_{n,m} - c_{n,m}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}.
\end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat lorsque $a_{n,m} \in \mathbf{R}$. Le passage à $\mathbf{R}^r$ est clair.

MATHEMATIQUES DANS DES SITUATIONS D'ECHANGES AVEC DES CLASSES ETRANGERES

par le Groupe Europe de l'IREM de Strasbourg.

Un des objectifs du Groupe Europe de l'IREM de Strasbourg est de rendre compte d'expériences déjà réalisées impliquant l'enseignement des mathématiques dans des situations d'échanges scolaires. Après avoir évoqué dans un précédent numéro un échange en immersion[1] au cours duquel les élèves suivaient les cours de mathématiques dans le pays d'accueil, on étudie deux autres types d'échanges : un échange au cours d'un voyage pour lequel les élèves ne suivent pas les cours de mathématiques dans le pays d'accueil et un échange à distance pour lequel les élèves ne se déplacent pas dans le pays partenaire.

ENQUETE STATISTIQUE CONDUITE PAR DES ELEVES LORS D'UN VOYAGE A L'ETRANGER.

par Jean-Pierre Richeton et Annette Molard,
lycée Jean Monnet de Strasbourg.

A l' occasion de voyages d'élèves à l'étranger il est possible d'impliquer l'enseignement des mathématiques d'une façon qui, même si elle reste modeste et légère, permet de progresser dans le programme de l'année et d'expliciter un aspect culturel du voyage.

D'un point de vue **culturel**, l'enquête a pour thème la connaissance des pays d'Europe chez les jeunes de la région d'accueil. On observe alors des différences dans les habitudes de voyages entre les élèves français de la classe en voyage et les jeunes de la région d'accueil.
Dans la classe d'Annette Molard, les élèves de la même classe ont répondu de manière différente à la question « que vous a appris cette enquête ? » : de une ligne à une page; certains élèves bons en mathématiques ont trouvé que cette enquête n'avaient pas de rapport avec les mathématiques.

Pour **l'aspect linguistique**, l'enquête les oblige à s'exprimer en langue étrangère et à formuler les questions en langue étrangère, notamment avec leurs correspondants pour rédiger le questionnaire en allemand (questionnaire circulant dans l'école auprès des autres élèves de l'école).

Pour le **contenu mathématique**, dans cet exemple, la partie du programme officiel de 2nde traitée concerne les statistiques. Avant le voyage on signale aux élèves que les statistiques ont déjà été vues dans les classes précédentes et qu'ils réaliseront durant le voyage une enquête statistique dont le cahier des charges est communiqué avant le voyage (document ci-joint).

---

[1] « Echange en immersion entre un lycée français et un lycée allemand », par Annette Molard, article paru dans « l'Ouvert », n°82, pages 40 à 44.

ENQUETE STATISTIQUE LORS D'UN VOYAGE A L'ETRANGER

Dans la classe de Jean-Pierre Richeton, l'utilisation et l'exploitation des touches statistiques des calculatrices ont été approfondies[2].

Du point de vue **méthodologique**, les élèves utilisent leur manuel habituel de mathématiques, ce qui les place en situation d'autonomie par rapport au professeur de mathématiques (qui ne participe pas au voyage) et réalisent eux mêmes l'enquête statistique , ce qui les amène à faire preuve d'initiatives et à travailler éventuellement en équipe.
La durée de travail est de trois semaines (durée du séjour). La production des élèves est un devoir à rendre et dont le compte rendu collectif en classe a duré deux heures.
Voici l'énoncé distribué aux élèves.

EXPLOITATION STATISTIQUE D'UNE ENQUÊTE EFFECTUEE LORS DE VOTRE SEJOUR EN ALLEMAGNE OU EN AUTRICHE

I. Objet de l'enquête:

« Connaissez-vous les pays d'Europe » ?
Adressez-vous au plus grand nombre possible de jeunes de votre âge et de votre région d'accueil.

Questions à poser:

1)Avez-vous visité d'autres pays européens que le vôtre?

2) Si **oui**, indiquez
- les **noms** des pays
- le **nombre** de séjours **par pays**
- la **durée** (en jours) de chacun de ces séjours
- les **raisons** qui vous incitent à voyager dans un pays européen autre que le votre.

3) Question facultative: „ Wo ist es am schönsten in Europa?"

II. Exploitation statistique

Il vous faudra consulter le chapitre 5 de votre livre de mathématiques. Les graphiques devront être réalisés avec soin.

A) Etude du caractère qualitatif: « **les raisons...** »
Construire un diagramme circulaire (« fromage », en couleurs!) donnant pour chaque « raison » l'effectif correspondant, en pourcentage.
effectif d'une « raison »: nombre de personnes ayant invoqué cette raison (*voir page 116*).

B) Etude du caractère quantitatif: « **le nombre de visites par pays** »

[2] Cette exploitation de la calculatrice dans cette situation a été détaillée dans la brochure de l' IREM de Strasbourg « Des solutions pour gérer la classe de seconde, 1994-1995 (suite) » pages 2 à 15.

• Construire un tableau des effectifs en associant à chaque pays le nombre de visites qu'il a reçu (pour l'ensemble des personnes interrogées).
• Calculer les **fréquences** en pourcentages.
• Construire un **diagramme en bâtons** des effectifs (ou des fréquences, au choix).
Quel est le pays le plus visité? le moins visité?

C) Etude du caractère quantitatif: « **durée totale des séjours par personne interrogée** » *dans un pays autre que le sien en Europe.*
Il faut totaliser les durées de tous les séjours par personne.
1° Calculer (en jours) cette durée totale pour chaque individu. Le nombre de personnes associées à une durée donnée est l'effectif correspondant à cette durée.

2° Répartir ces durées en **classes** (intervalles de même amplitude).

3° Dresser un tableau (*voir page 118*) dans lequel figurent:
• les classes
• les centres x_i de ces classes (la classe n°1 a pour centre x_1, la classe n°2 a pour centre x_2, etc...)
• l'effectif n_i de chaque classe (n_1 est l'effectif de la classe n°1, etc...)
• les fréquences en pourcentage et les **fréquences cumulées croissantes** (*voir page 120*).

4° Calculs (*comme dans l'exemple 2 page 118*). On calculera (p représentant le nombre de classes):

a) l'**effectif total** $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$

b) la **durée moyenne** $\overline{d} = \dfrac{1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p} \times (\textit{somme des } n_i \times x_i)$ (*voir page 118*)

c) pour chaque centre de classe x_i, son **écart à la moyenne** $\overline{d}$
(c'est sa distance à $\overline{d}$, c-à-d $\left|x_i - \overline{d}\right|$)

d) les **carrés de ces écarts**

e) la **variance** et l'**écart-type** (*voir page 119*).

5° Construire le diagramme en bâtons et le polygone des effectifs (*voir page 116*).

6° Construire l'**histogramme** des fréquences cumulées croissantes et la **courbe de répartition.** (*voir page 120*)

7° Interpréter les graphiques:
• Quelle est la classe correspondant au plus grand effectif? Comment l'appelle-t-on?
• Recopier les définitions de *variance* et *écart-type*. Quel renseignement fournit l'écart-type?
• Que vous a appris toute cette enquête?

8° S'initier au mode statistique de votre calculatrice.

9° Facultatif: chercher une interprétation graphique pour la réponse à la question 3 du I.

Mini-dictionnaire

das Lineal .... la règle
der Bleistift .... le crayon
der Taschenrechner ... la calculette
die Menge .... l'ensemble
die Skizze .... la figure
die Strecke .... le segment
die Gerade .... la droite
der Schnittpunkt........le point d'intersection
die Ebene .... le plan
der Zirkel .... le compas
der Kreis .... le cercle
der Radius................. le rayon
der Durchmesser .... le diamètre
die Sehne .... la corde
der (Kreis)bogen .... l'arc (de cercle)
der Winkelmesser...... le rapporteur
der Winkel .... l'angle
gestreckter Winkel .... l'angle plat
die Winkelhalbierende la bissectrice
das Dreieck .... le triangle
- gleichschenklig .. • isocèle
- gleichseitig .... • équilatéral
- rechtwinklig ..... • rectangle

die Seite .... le côté
der Eckpunkt .... le sommet
die Höhe.................... la hauteur
das Lot.......la perpendiculaire
die Mittelsenkrechte .. la médiatrice
der Umkreis .... le cercle circonscrit
der Umfang............... le périmètre
die Fläche .... la surface
das Vieleck .... le polygone
Quadrat .... carré
die Spiegelung.....la réflexion (symétrie)
der Würfel .... le cube
die Kugel .... la sphère

die (ganze) Zahl........... le nombre (entier)
der Bruch..... .... la fraction
der Zähler.................... le numérateur
der Nenner... .... le dénominateur
kürzen........................ simplifier
teilen.......................diviser
zeilegen.................... développer
die Wurzel............. la racine
die Quadratwurzel....... la racine carrée
die Potenz la puissance
„2 **plus** 3 gleich 5"
„2 **minus** 3 gleich -1"
„2 **mal** 3 gleich 6"
„2 **durch** 3 gleich zwei Drittel (2/3)"
die Klammer................ la parenthèse
die Gleichung .... l'équation
die Ungleichung .... l'inéquation
die Lösung... .... la solution
der Satz....................... la règle, le théorème
Strahlensatz........... théorème de Thalès
die Aussage.. .... l'affirmation
das Beispiel.. .... l'exemple
ein Verfahren.............. une méthode
schätzen....................évaluer (à peu près)
der Wert...................... la valeur
die Funktion................la fonction
die graphische Darstellung........représentation graphique
der Abstand.. .... la distance
die Einheit.... .... l'unité
der Einheitsvektor .... le vecteur unité
die Gegenzahl............. l'opposé (d'un nombre)
die Probe..................... la preuve
die Voraussetzung .... l'hypothèse
die Behauptung .... la conclusion
der Beweis... .... la démonstration
der Unterschied .... la différence

<u>Attention</u> <u>également à l'écriture des fractions</u> : $3\frac{1}{4}$ signifie $3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$ (et non $3\times\frac{1}{4}$).

UNE EXPERIENCE D'ECHANGE A DISTANCE SUR LA MODELISATION D'UNE PISCICULTURE

par Kaare SVENSGAARD (Sonderborg Gymnasium)
et Richard CABASSUT (lycée international de Strasbourg)

1)la mise en place de l'échange:

Origine de l'échange :
La MAFPEN de Strasbourg a organisé pendant plusieurs années des stages de formation des enseignants dans le cadre d'un projet TRIFOLIUM. Un professeur de mathématiques d'un lycée de Strasbourg a rencontré en 1994-95, au cours d'un de ces stages, un professeur de mathématiques d'un lycée danois de Sonderborg. L'année suivante, ces professeurs ont organisé un échange entre classes de premières, avec séjours réciproques d'une semaine des classes. A cette occasion, ils ont mesuré la difficulté d'impliquer l'enseignement des mathématiques dans ce type d'échanges. Aussi ont-ils décidé de mettre en place des échanges à distance au cours desquels ils pourraient expérimenter des thèmes concernant l'enseignement des mathématiques.

Classes susceptibles de participer à l'échange :
Le professeur français avait en charge des classes de première S et de première L avec ou sans option mathématiques. Le professeur danois enseignait dans des classes de première ou terminale, scientifiques ou linguistiques. D'autres professeurs de l'établissement français ont été sollicités pour proposer des thèmes d'échanges compatibles avec les classes danoises mais ont finalement décliné l'offre, invoquant des contraintes de programmes ou des difficultés à communiquer en langue étrangère.

Choix du thème et de la classe:
Plusieurs thèmes ont été envisagés : un travail sur les éléments d'Euclide à partir des travaux du mathématicien danois Georg Mohr et de son livre *Euclides Danicus* (voir « l'Ouvert n°74, pages 45 à 47), un échange de solutions d'exercices tirés de l'épreuve « mathématiques sans frontières » (pour laquelle il existe une équipe d'organisation au Danemark), des échanges à partir de cassettes vidéo en anglais sur le théorème de Pythagore, les polynômes ou les suites. Mais aucun passage à l'acte ne se produisait et l'année scolaire avançait. Début février, le collègue danois proposa un important dossier sur un problème de modélisation d'une pisciculture. Le dossier avait été composé à partir d'un article en danois et d'un article en anglais [1].

---

[1] Autentiske matematikanvendelser, Matematiklaererforeningen 1991 , « Vaekstmodeller for orreder. Ferskvandsfiskerilaboratoriet », H.C. Hansen, Askov Hojskole, pages 6 à 17 ; ISBN 87-89229-46-0 .
Mathematical Submodels in Water Quality Systems, Amsterdam, 1989, chapter 16 « Fisch Growth » by Jon From and Gorm Rasmussen.

Ce thème a été retenu, même si dans l'exposé de la situation il est fait mention de fonctions exponentielles et puissances à exposants réels, thèmes qui ne sont pas aux programmes de première française . En effet il nous a paru plus important d'entreprendre un échange même si le thème retenu ne correspond pas idéalement aux programmes des classes de l'échange plutôt que d'attendre indéfiniment de trouver un thème idéal.
Le professeur français travaillait pour sa classe de première scientifique avec d' autres professeurs et classes sur un projet pédagogique : même progression pédagogique sur l'année avec des contrôles communs aux trois classes. Devant la rigidité de ce système, et la pression du programme à finir dans le temps imparti, c'est la classe de première L, option mathématiques , qui a été choisie comme classe participant à l'échange.

2) un exemple de modélisation d'une pisciculture :

1) justification du modèle :
On étudie un modèle interdisciplinaire, en mathématique et en biologie , utilisé dans les piscicultures danoises et développé au laboratoire de recherche sur la pêche en eau douce de Silkeborg par Jan From et Gorm Rasmussen. Ce modèle décrit la croissance du poisson en fonction notamment de la quantité d'aliments absorbés, ce qui permettrait éventuellement une optimisation financière de la pisciculture.
Pour une période de temps donnée, la différence entre les quantités absorbées (INPUT) et celles perdues par un poisson (OUTPUT) est appelée croissance (GROWTH) et correspond à l'équivalent en énergie des variations des différentes parties du corps du poisson . L'unité choisie par le biologiste est le gramme d'oxygène chimiquement nécessaire (1 gCOD= 14,31 kJ = 27 g de poids frais). [2]

GROWTH = INPUT - OUTPUT **(1)**

Modélisation des quantités absorbées (INPUT) :
La première hypothèse est que les éléments absorbés (INPUT) dépendent de trois paramètres :
le poids (w) du poisson (un gros poisson mange plus qu'un petit),
le niveau d'alimentation (f) qui est un indicateur compris entre 0 et 1 (si f = 0 le poisson ne reçoit aucune nourriture et si f = 1 le poisson peut manger autant qu'il veut) et qui est défini comme étant proportionnel à la quantité de nourriture présente dans l'eau ,
la température (T) de l'eau en degré Celsius (l'activité de recherche de nourriture et la digestion du poisson dépendent de la température de l'eau).

Comment trouver la relation exprimant INPUT en fonction de w , f et T ?
Des hypothèses théoriques reposant sur les connaissances biologiques des truites permettent de proposer le modèle suivant.
Comme f est proportionnel par définition à la quantité de nourriture présente dans l'eau , on suppose que la quantité de nourriture ingurgitée INPUT est proportionnelle à la quantité de nourriture présente et donc proportionnelle à f.

---

[2] COD est l'abréviation de Chemichal Oxygen Demand .

Comme f est proportionnel par définition à la quantité de nourriture présente dans l'eau , on suppose que la quantité de nourriture ingurgitée INPUT est proportionnelle à la quantité de nourriture présente et donc proportionnelle à f.
Si un gros poisson est L fois plus long qu'un petit poisson et si on suppose que la croissance est isotrope , le gros poisson sera alors L^3 fois plus gros en volume que le petit et chaque surface du gros poisson sera L^2 fois plus importante que celle du petit . On suppose de plus que le gros poisson et le petit assimilent la même quantité de nourriture par centimètre carré de surface d'intestin . En conséquence , le gros poisson absorbe L^2 fois plus de nourriture que le petit poisson. Si on choisit le poids du petit poisson comme unité et si on note w le poids du gros poisson on a : $w = L^3$ donc $L = w^{1/3}$ soit $L^2 = w^{2/3}$. Et la quantité de nourriture ingurgitée INPUT est proportionnelle à la surface de l'intestin, et donc proportionnelle à L^2 ou encore $w^{2/3}$.

En conclusion le modèle théorique propose : $INPUT = f \times h(T) \times w^{2/3}$ **(2)** où h(T) est une fonction à déterminer.
On ajuste ensuite le modèle théorique par des expérimentations dans des aquariums. En fixant deux paramètres sur trois, on peut observer les variations de INPUT en fonction d'un paramètre.

L'expérimentation pratiquée avec les truites de type arc-en-ciel Oncorhynchus mykiss pour une période d'observation de un jour permet de proposer le modèle final suivant , en notant dR/dt la quantité absorbée (INPUT) par jour:

$$dR/dt = 0{,}086\, f \times \exp(0{,}0761\, T) \times w^{0{,}6767} \quad \textbf{(3)}$$

<u>Modélisations des quantités perdues (OUTPUT) :</u>

La justification de la modélisation des rejets est beaucoup plus complexe que précédemment et fait appel pareillement à la théorie et à de nombreux contrôles expérimentaux parmi lesquels ceux de Jan From et Gorm Rasmussen. Les pertes sont réparties avec les modèles suivants :

- matières fécales = $0{,}011861 \times (\exp(1{,}1057\, f) - 1) \times \exp(0{,}0808\, T) \times w^{0{,}5499} + 0{,}0162 \times f^{1{,}4259} \times \exp(0{,}0577\, T) \times w^{0{,}5471}$ **(4)** ;

- urine = $0{,}000229788 \times (\exp(2{,}132\, f) - 1) \times \exp(0{,}1112\, T) \times w^{0{,}6572}$ **(5)** ; on inclut dans ce poste les autres sécrétions externes, comme par exemple les pertes par les ouies ou la peau;

- métabolisme de base = $0{,}008464 \exp(0{,}0911\, T) \times w^{0{,}7751}$ **(6)** , le métabolisme de base étant l'énergie consommée par le poisson pour les nécessités vitales lorsque le poisson est affamé ;

3) les exercices proposés aux élèves :

Feuille de travail proposée aux élèves :
Un document en anglais présentant la modélisation précédente est distribué aux élèves. Il est accompagné des exercices suivants qui ont été traduits en français dans cet article. Ce document est une traduction de l'article danois de H.C. Hansen cité dans la première note de bas de page.

Exercice 1

Considérant la croissance dw/dt par jour de la truite , Jan From et Gorm Rasmussen parviennent à la formule jointe. Vérifier que nous obtenons la même formule en utilisant (1), (3), (4), (5), (6) et (7).

La formule jointe est : dw/dt =

$$
\begin{aligned}
& f \times 0{,}086 \times \exp(0{,}0761 \times T) \times w^{0{,}6767} - 0{,}011861 \times [\exp(1{,}1057 \times f) - 1] \\
& \times \exp(0{,}0808 \times T) \times w^{0{,}5499} - 0{,}0162 \times f^{1{,}4259} \times \exp(0{,}0577 \times T) \times w^{0{,}5471} \\
& - 0{,}006237 \times [\exp(1{,}0885 f) - 1] \times \exp(0{,}0769 T) \times w^{0{,}7030} \\
& - 0{,}000229788 \times [\exp(2{,}132 f) - 1] \times \exp(0{,}1112 T) \times w^{0{,}6572} \\
& - 0{,}008464 \times \exp(0{,}0911 T) \times w^{0{,}7751} \quad .
\end{aligned}
$$

Exercice 2

Réaliser un programme sur ordinateur qui permette, lorsqu'on entre les valeurs de f, T et w, d'obtenir dw/dt. S'assurer que le programme est construit de telle manière que les données individuelles (nourriture, matières fécales...) puissent être imprimées lorsqu'on en a besoin. Les exercices ci-dessous sont basés sur ce programme.

Exercice 3

Grâce au modèle informatique, définir un budget d'énergie pour un poisson de 10 gCOD, avec un niveau d'alimentation de 0,5 , dans une eau qui est à 5 degrés Celsius. Déterminer le pourcentage de nourriture qui est transformé en croissance, en matières fécales, en urine, en métabolisme de base et en activité.

Exercice 4

Il est très important pour un pisciculteur de trouver le niveau d'alimentation optimal pour un poisson de taille donnée à une température donnée. La quantité significative est appelée le ratio d'utilisation dw/dR et se calcule comme la croissance, c'est-à-dire, comme un pourcentage de la nourriture ingurgitée, soit:

$$dw/dR = [\ (100\ dw/dt\ ) : dR/dt\ ]\ \%$$

Vous devrez déterminer le ratio d'utilisation pour un poisson de 10 gCOD, dans une température de 5 degrés Celsius pour les niveaux d'alimentation f = 0,1 ; 0,2 ;... ; 0,9 ; 1,0 et , grâce à ce résultat, déterminer le niveau d'alimentation optimal, c'est-à-dire, la valeur de f pour laquelle le ratio d'utilisation est maximal.

Vérifier que le gros poisson a un ratio d'utilisation plus élevé que le petit poisson et observer aussi l'influence de la température.

Exercice 5

Dans l'exercice 4, vous aurez remarqué que les niveaux d'alimentation les plus élevés ne conduisent pas nécessairement à une importante croissance, comparé à des niveaux d'alimentation moyens. Une des raisons est peut être que le pourcentage de nourriture assimilée par la truite diminue lorsque la quantité de nourriture augmente. Le coefficient d'assimilation ak est une mesure particulière qui détermine comment le poisson assimile la nourriture:

$$ak = (\ \text{nourriture - matières fécales}\ )/\ \text{nourriture}$$

Utiliser le modèle informatique pour dessiner des courbes de ak, fonction de f, pour un poisson de 10 g et de 100 g , à une température de 5 et de 20 degrés Celsius. Tirez en une conclusion en quelques mots.

Exercice 6

Avant d'évaluer l'intérêt du modèle, vous devez examiner le but de ce modèle. Si l'on dit que le but de ce modèle est d'aider les pisciculteurs, alors la meilleure manière d'évaluer le modèle serait de discuter avec un pisciculteur qui l'utilise.

À présent, sachant que l'on dépense des millions pour l'assainissement de l'eau, vous devriez trouver d'autres objectifs, plus importants, de ce modèle.

Essayer de formuler un objectif d'un modèle, de telle façon qu'il prenne en compte les perspectives environnementales.

Lien avec le programme de mathématiques :

Ce thème a pu être relié aux extraits suivants du programme officiel français de mathématiques de première L :

- résoudre des problèmes issus de la vie courante ou d'autres disciplines et avoir une maîtrise minimale du calcul littéral nécessaire lors de l'étude des fonctions,
- dégager sur des exemples étudiés les différentes phases d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats,
- exploiter conjointement les aspects graphiques, numériques et algébriques ainsi que l'étude des variations de fonctions, employer des calculatrices ;
- études qualitatives (croissance , allure des représentations graphiques ...), interprétations graphiques,
- programmation des valeurs d'une fonction d'une variable,
- exemples d'étude de comportements de fonctions, de lectures de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique, d'étude de situations décrites au moyen de fonctions.

4) réalisation de l'échange :

le calendrier et les conditions de l'échange pour la classe française:
février : proposition danoise du thème.
mars : réponse française avec proposition d'un plan de travail .
séance en classe du 4 mars (1heure): lecture du texte anglais jusqu'à l'exercice 1 inclus. Explications des termes anglais, définition des fonctions INPUT et OUTPUT. Définition mathématique sommaire des fonctions exponentielles et puissances, avec usage de la calculatrice.
séance en classe du 5 mars (1heure): activités de programmation à la calculatrice pour répondre à l'exercice 2 de l'activité de pisciculture.
Les élèves sont répartis en 5 groupes par types de calculatrice. Un rapporteur par groupe rédige un compte rendu. Il est répondu aux questions suivantes concernant la programmation : comment passe-t-on en mode programmation ? comment nomme-t-on un programme ? quel algorithme de calcul définir pour résoudre l'exercice 2 ? comment code-t-on cet algorithme dans le langage de programmation de la calculatrice étudiée ? comment afficher les résultats ?
Les rapporteurs doivent rendre leurs rapports rédigés pour le 7 mars.
séance en classe du 11 mars (1heure):
Commentaires sur les rapports de chaque groupe. Résolution de l'exercice 3.
Pour le 14 mars les différents rapporteurs rendent les différents calculs de GROWTH en faisant varier w, T et f.
séance en classe du 14 mars (10 minutes) : Relever les devoirs. Lecture de l'exercice 5. Préparer la programmation du calcul du coefficient d'assimilation pour le 16 mars. Apporter du papier millimétré pour le 16 mars.

séance en classe du 16 mars (1heure):
Commentaires sur les rapports de chaque groupe. Résolution de l'exercice 4 avec répartition en différents groupes pour représenter les variations du ratio en fonction d'une variable prise parmi les trois T, w, f. Les groupes sont formés en fonction des valeurs des 2 variables fixées. Résolution des exercices 5 et 6. Bilan.
séance en classe du 18 mars (1heure):
Répartition en groupes de langues (anglais et allemand) pour rédiger nos réponses pour l'envoi aux élèves danois.
séance en classe du 23 mai (3/4 heure): Lecture des documents danois. Commentaire sur Excell.
séance en classe du 4 juin (1heure): Passage en salle d'ordinateurs pour présentation et manipulation d'Excell.
horaire total en classe: environ 7 heures.

5) évaluation de l'échange :

Méthodes de travail : Pour certaines séances, les élèves ont travaillé en groupe (de langues ou de calculatrices) avec un rapporteur. Pour certaines résolutions d'exercices (lorsqu'il s'agissait de faire des calculs en fixant deux paramètres parmi trois) les élèves se sont répartis les calculs à faire.
Certains élèves ont déclaré : « un aspect très positif de ce travail était qu'il nous a permis de faire quelque chose de différent de la norme ».

Ordinateurs ou calculatrices ? L'approche danoise et l'approche française sont très différentes. Les conditions matérielles d'accès à la salle d'ordinateurs pour les classes françaises (une seule salle pas toujours disponible, un nombre limité de poste où Excell est implanté, pas de classes en groupe dans l'horaire de première L) ont orienté le professeur vers l'usage des calculatrices. Par contre des ordinateurs plus facilement disponibles et un culture d'utilisation de l'ordinateur pour rédiger des devoirs ont orienté le professeur danois vers l'usage de Excell. Ceci a conduit la classe de première L à découvrir l'intérêt de l'usage d'un tableur :une visite de salle d'ordinateurs a permis d'illustrer cette découverte, dans des conditions il est vrai un peu rudes avec 30 élèves pour 8 ordinateurs.

Représentations de courbes : Le fait d'avoir représenté les courbes avec des choix d'unité et d'origine différents d'un groupe à l'autre a souligné, à la comparaison des résultats, l'importance d'un choix judicieux .

Utilisation des calculatrices : Les erreurs d'écriture (oubli de parenthèses, de signes et d'opérations) sont encore nombreux. En programmation, l'importance de programmer l'affichage des résultats intermédiaires est apparu indispensable pour mieux contrôler les calculs et pour localiser plus facilement dans le programme où se situait l'erreur.

Prolongement : Ce travail pouvait se prolonger par deux autres exercices. L'un propose de montrer comment se fait le passage de la formule de modélisation théorique **(2)** à la formule **(3)**. Mais il exige des ajustements linéaires de nuage de points expérimentaux avec utilisation de la fonction logarithme . Le deuxième exercice propose de simuler l'évolution du poids d'une truite au cours d'une année, lorsqu'on connaît la courbe d'évolution de la température au cours de l'année, pour les deux niveaux d'alimentation $f = 0,5$ et $f = 1$. On a renoncé à ces prolongements à cause de contraintes de programmes et de temps.

Interdisciplinarité : Le professeur de biologie de la classe française a été contacté dès le mois de février mais il n' a pas été possible de mener un travail commun . De même la question relative à l'environnement dans l'exercice 6 est restée sans réponse pour la classe française . On s'est donc satisfait de la réponse danoise : « La plupart des piscicultures danoises sont situées à proximité de courants d'eau. Elles prennent l'eau de ces courants et la rejettent une fois utilisée. Bien entendu l'eau est polluée par la nourriture non mangée par les poissons. Le niveau d'alimentation f étant proportionnel à la nourriture ajoutée dans l'eau , plus f est élevé, plus la pollution est grande. L'eau est également polluée par l'urine et les excréments des poissons. Construire une station de traitement des eaux à la sortie de chaque pisciculture est très cher. Le modèle devrait inclure ce coût de traitement de l'eau, et maximiser le profit de la pisciculture compte tenu de ce coût supplémentaire.» Ce thème environnemental est certainement un thème culturel, car ces préoccupations sont plus développées au Danemark qu'en France. Il est intéressant de montrer qu'il peut être abordé par le biais d'une activité mathématique.

Faisabilité : Un des objets de ce compte rendu est de persuader le lecteur qu'un échange à distance est faisable, même avec une mise en place tardive au cours de l'année scolaire, malgré un thème qui peut paraître dépaysant pour l'un des partenaires ou au regard d'une lecture trop stricte des programmes , en lui donnant un volume horaire limité et en lui assignant une ambition mesurée.

6) perspectives :

Utilisation de l'ordinateur : Le professeur français va essayer d'utiliser l'ordinateur en classe entière, dans le cas où les classes n'ont pas de groupes de travaux dirigés ou de modules dans leur emploi du temps, avec un ordinateur relié à un écran de télévision ou à un rétroprojecteur.

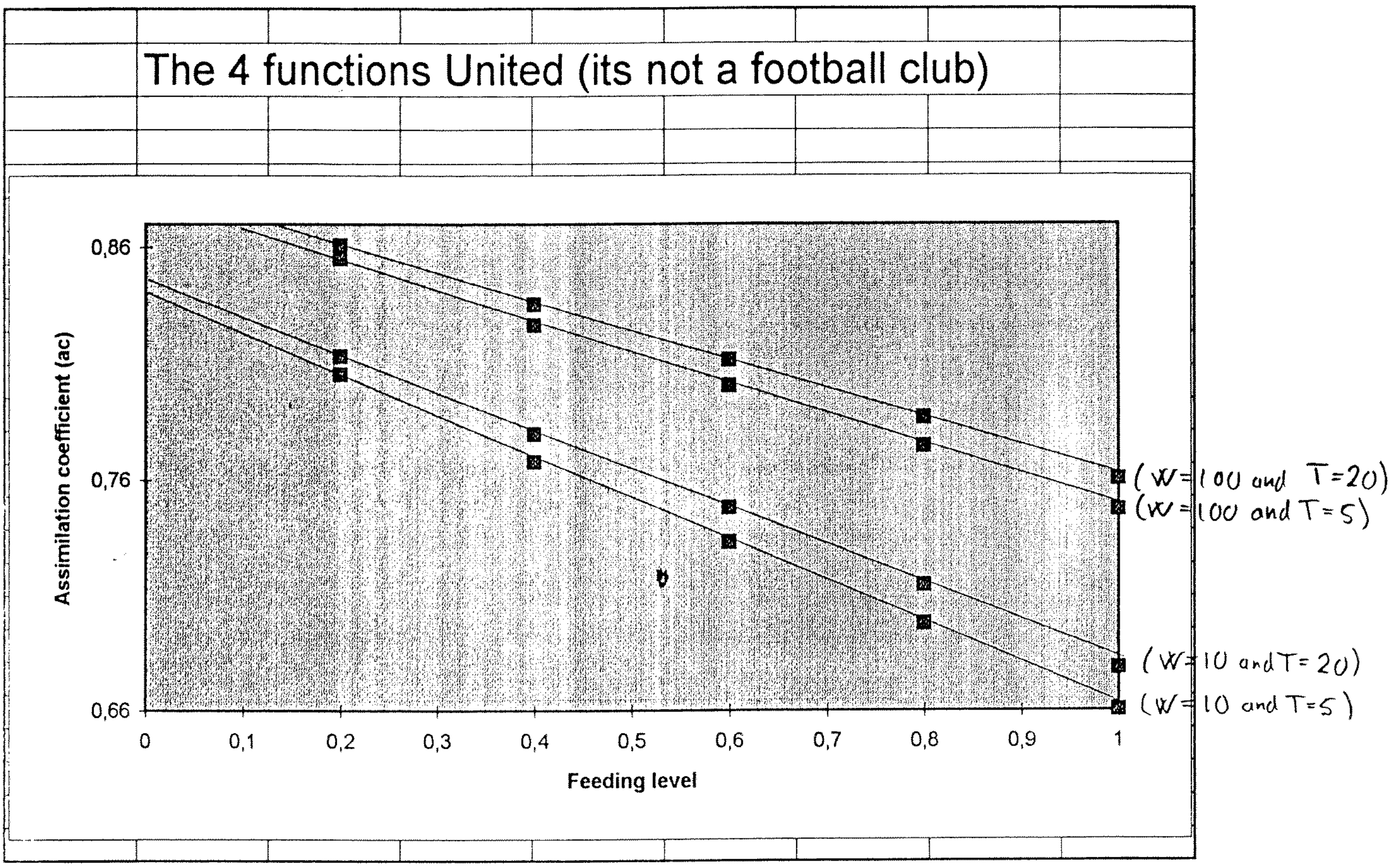
Utilisation d'Internet : Le professeur danois avait souhaité utiliser Internet, ce qui n'était pas possible puisque l'établissement français n'était pas connecté. Cela s'est traduit par un manque de souplesse et de rapidité dans les échanges. La prochaine connexion de l'établissement français à Internet devrait apporter cette amélioration.

Poursuite de l'échange : Cet échange devrait se poursuivre en choisissant éventuellement d 'autres thèmes et d'autres classes. Un thème de modélisation du traitement des fumées a été étudié mais aucun échange n'a encore été réalisé.

Annexe

On trouve ci-après des productions d'élèves avec d'abord le graphique de l'exercice n°5 proposé par des élèves danois sous Excell.

L'autre document est un commentaire de synthèse accompagnant des graphiques (non publiés) rédigé en allemand par des élèves français.



1/ Nach der Lektüre des Textes haben wir die unklaren mathematischen bzw. englischen Ausdrücke erlaütert.
Das Problem dieser ersten Lektüre war, wie man anhand von Experimenten das Nahrungsniveau (feeding level) festlegt und wie ma in der Theorie die Formeln 1, 2, 3, 4, 5 erhält.
Habt ihr das verstanden?

2/ Aufgrund der verschiedenen Taschenrechnertypen haben wir uns in Gruppen aufgeteilt um die Algorithmen, welche die Lösungen zu den Aufgaben geben, zu programmieren (siehe Programme im Anhang).

<u>Aufgabe 1</u> : Wir erhalten die verlangte Formel ohne Probleme.

<u>Aufgabe 2</u> : Siehe Programm Anhang 1.
Die Ergebnisse unserer Taschenrechner erscheinen ausschließlich auf dem Bildschirm, weshalb wir die Ergebnisse per Hand aufschreiben mußten.

<u>Aufgabe 3</u> : Kein Problem (siehe Anhang 2)

<u>Aufgabe 4</u> : Studie der Variation der Ratio anhand eines Paramet (2 Parameter sind festgelegt). Dieser Teil scheint uns, der Informativste zu sein (siehe Anhang 3).

- 1. Bemerkung : Wieso kann die Ratio negativ sein?
→ Dieses käme einem abmagernden Fisch gleich oder einem, der Winterschlaf hält.

- 2. Bemerkung : Legt man die Temperatur des Wassers und das Gewicht des Fisches fest, so bemerkt man daß die Ratio mit Anstieg des Nahrungsniveaus zunimmt, bis ein Maximum erreicht wird (dieses Maximum liegt um die 70 bis 80% der maximalen Nahrungsaufnahme aber variert mit Gewicht des Fisches und Temperatur des Wassers). Dies müßte mit der

maximalen Nahrungsaufnahmekapazität des Fisches übereinstimmen.
(Siehe Kurve 1-4)
• 3. Bemerkung: Fixiert man das Nahrungsniveau bei 1 und das Gewicht des Fisches, nimmt die Ratio mit Zunahme der Temperatur leicht ab (siehe Kurve 5-6)
Anscheinend bevorzugen die Fische kalte Gewässer, was jedoch mit der Rasse des Fisches zusammenhängen könnte. Diese Frage könnte man eventuel einem Fischzüchter stellen.
• 4. Bemerkung: Fixiert man das Nahrungsniveau bei 1 und die Temperatur, so steigt die Ratio mit Zunahme des Fischgewichts (Kurven 7,8)
Je schwerer der Fisch ist, desto größer sind seine Aufnahme-kapazitäten.
Schloßfolgerung: Aufgrund unserer Ergebnisse raten wir einem Fischzüchter zu kalten Fischbecken, großen Fischen und einem Nahrungsniveau um die 70-80 %.
Aufgabe 5: Fixiert man die Temperatur und das Gewicht des Fisches, so bemerkt man mit Zunahme des Nahrungsniveaus einen abnehmenden Aufnahmegrad: Je mehr der Fisch ißt, desto weniger kann er die aufgenommene Nahrung umsetzen (man nährt sich einem Sättigungsgrad).
Aufgabe 6: Man ist unklar, inwiefern die Fischzucht ein Umweltproblem darstellen könnte.

REFLEXIONS INSPIREES PAR LE SUJET DU BAC DE PHYSIQUE SERIE S 1996

Jean-Luc GASSER
groupe Maths-Physique
IREM de STRASBOURG

Le groupe Maths - Physique de l'IREM de Strasbourg[1] mène une réflexion depuis plus de quatre années sur l'enseignement de ces disciplines au lycée. Après avoir élaboré des activités dans le cadre des programmes et pouvant être traitées dans chaque matière [1], le groupe a rédigé un dictionnaire « bilingue » mathématiques et sciences physiques [2] qui contient une cinquantaine d'entrées utilisées conjointement dans les deux matières. Les similitudes et les différences de contenu des mots répertoriés ont été mises en évidence, et l'on a ainsi pu constater que certains termes pouvaient semer une importante confusion dans l'esprit des enseignants comme dans celui des élèves. Pour plus de précisions concernant les notions de translation et de rotation, on pourra se référer à un article précédemment publié dans la revue REPERES-IREM[3]; les problèmes soulevés par le terme « linéaire » ont été évoqués dans une publication parue dans le bulletin vert de l'APMEP[4].

Dans le cadre de cet article, seront développées quelques réflexions inspirées par le sujet du BAC de Juin 1996 de sciences physiques de la série S, s'organisant autour des notions de dérivée, de limite et de fonctions affine et linéaire. En effet, les collègues de sciences physiques, présents lors de la réunion d'harmonisation des barèmes, ont pu constater que les candidats pouvaient perdre jusqu'à 1,5 point sur 20 avec un correcteur « pointilleux », alors que les raisonnements mathématiques mis en oeuvre étaient corrects et auraient été acceptés sans problème dans cette discipline.

De l'avis de nombreux enseignants de sciences physiques, ce sujet présente de nombreuses faiblesses que nous soulignerons, mais la raison d'être de cet article est davantage de poser des questions de fond soulevées par les thèmes abordés. On pourra donc faire une lecture à deux niveaux de cet article :

- Les incohérences du sujet et du corrigé type proposé.
- Les notions mathématiques mises en oeuvre et la façon dont elles sont abordées (ou ignorées) dans les programmes des deux matières.

Dans un premier temps, nous reproduisons les extraits du sujet de sciences physiques qui nous intéressent, puis les solutions préconisées par les physiciens; ces dernières sont commentées en mettant en évidence les points litigieux. Dans la troisième partie, les notions mises en oeuvre sont analysées, et nous dégageons les lignes directrices qui posent problème face aux exigences des enseignants de mathématiques et de sciences physiques. L'analyse de questions souvent abordées dans des problèmes de physique amène une réflexion quant au contenu du programme d'analyse de mathématiques au lycée et nous conduit à suggérer

---

[1] Le groupe Mathématiques-Sciences Physiques est composé des enseignants du secondaire et du supérieur suivants:
Mathématiques: Frédéric DOUE, Jean-Luc GASSER, Suzy HAEGEL.
Sciences Physiques: Jean-Yves CABEL, Patrick DELOURME, Norbert FLEURY.

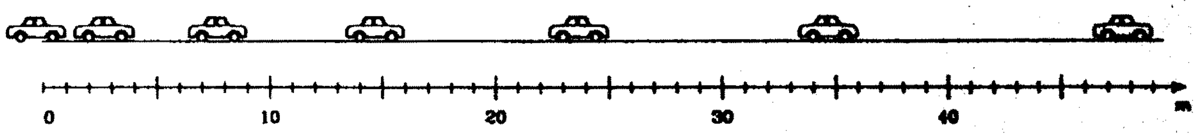
d'introduire dans les programmes d'enseignement quelques repères qui en sont actuellement absents.

I) EXTRAITS DU SUJET D'EXAMEN

Nous n'avons reproduit que les parties du texte original qui étaient intéressantes ou nécessaires à la compréhension du texte.

...

figure 1



II. VOITURE AU BANC D'ESSAI

Une voiture (...) se déplace sur une route horizontale rectiligne (...)

1. Etude du mouvement pendant la phase de démarrage (vitesse inférieure à 20 ms^{-1}).

On photographie les positions successives de la voiture toutes les secondes (figure 1 de la feuille annexe, à rendre avec la copie). Le départ des photographies est synchronisé avec celui de la voiture. A t=0, l'avant de la voiture coïncide avec la position origine x = 0 (pour plus de clarté, la position de la voiture à cet instant n'a pas été représentée sur l'enregistrement)[2].

1.1 Indiquer une méthode utilisable pour déterminer, avec une bonne approximation[3], la vitesse de la voiture à une date t donnée.

1.2 Donner dans un tableau les valeurs de la vitesse aux dates 1s, 2s,... 6s.

1.3 Représenter graphiquement les variations de cette vitesse en fonction du temps sur la figure 2 de la feuille annexe.

1.4 Montrer que la courbe construite permet de déterminer la nature du mouvement pendant cette phase.

(...)

III. REACTION ENTRE L'EAU OXYGENEE ET LES IONS IODURE

On se propose d'étudier la cinétique de la réaction entre l'eau oxygénée ... et les ions iodure...

Principe des mesures : le mélange des réactifs ayant été fait à la date t = 0 ...

Les mesures ont permis de suivre l'évolution de la concentration du diiode formé en fonction du temps, et de tracer les deux courbes $[I_2] = f(t)$ données page suivante, pour deux solutions différentes :...

---

[2] L'énoncé est fortement ambigu: il sous entend que la vitesse initiale est nulle, alors que cette donnée n'est pas fournie explicitement dans l'énoncé. Une lecture approfondie du texte met bien en évidence cette lacune.

[3] Un des problèmes dont il est question vient de l'expression « avec une bonne approximation ».

1. Etude cinétique

1.1 Définir la vitesse de formation du diiode à une date t. La calculer en $mmol.L^{-1}.min^{-1}$ pour chacune des deux courbes (a) et (b) à la date t = 2 min.

(...)

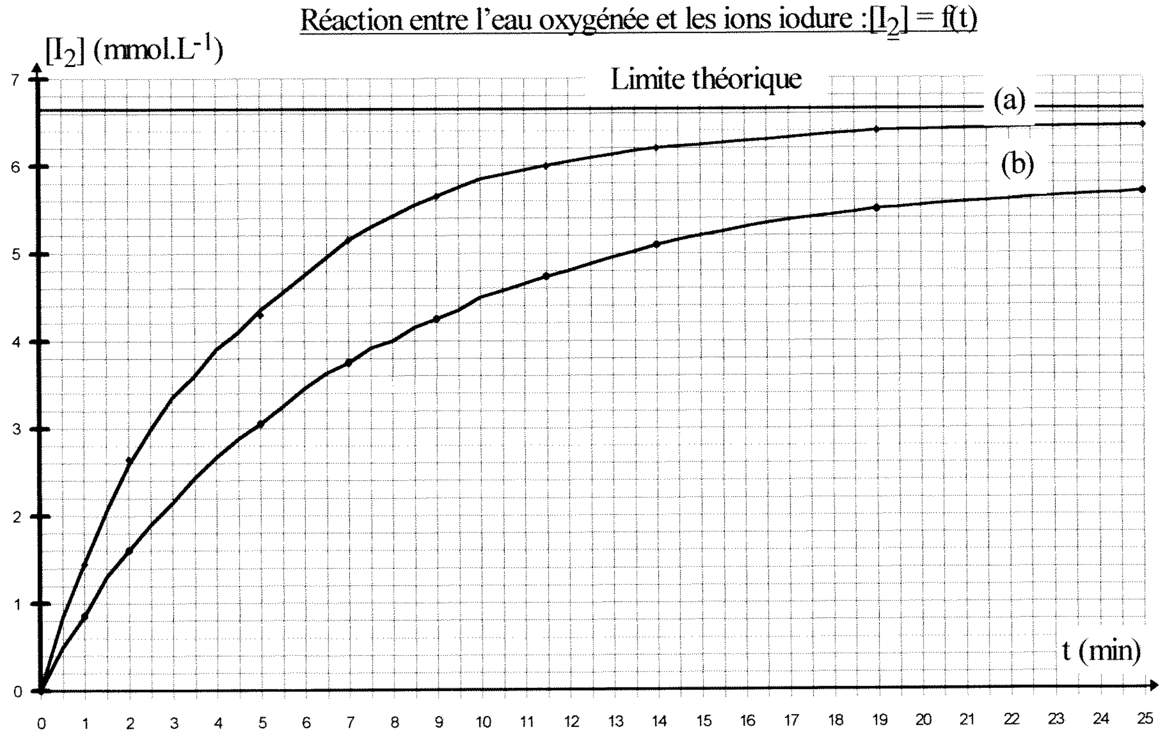
2. Etude du milieu réactionnel

(...)

2.3 Montrer que la concentration de diiode formé, lorsque la réaction est terminée, est en accord avec le résultat de la question précédente.

2.4 Peut-on considérer que cette concentration limite est atteinte :

- pour le mélange (1) ?
- pour le mélange (2) ?



II) SOLUTIONS APPORTEES PAR LE PHYSICIEN ET COMMENTAIRES

SOLUTIONS DES QUESTIONS DU PROBLEME : « VOITURE AU BANC D'ESSAI »

Solution proposée par le corrigé type :

1.1 Le calcul de la vitesse à l'instant n est donné par l'expression : (1) $v_n = \dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t}$.

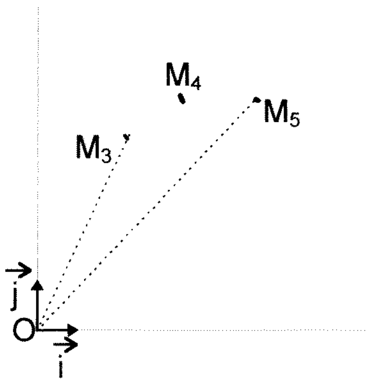
Nos commentaires :

Du fait de la pratique expérimentale (par exemple l'enregistrement par étincelles à intervalles de temps réguliers des déplacements d'un mobile sur un coussin d'air), on définit, ***en 1ère S***, **la vitesse instantanée** au point M_i comme la vitesse moyenne sur un petit intervalle **autour** du point M_i.

Exemple : Sur l'enregistrement ci-dessous, on approxime les vitesses instantanées numériques et vectorielles au temps t_3 par :

$$v_{M_3} = \frac{M_2M_4}{t_4 - t_2} \qquad \vec{v}_{M_3} = \frac{\overrightarrow{M_2M_4}}{t_4 - t_2}$$

En ***Terminale S***, on utilise la notion de dérivée, en cherchant pour la vitesse instantanée, la limite de la vitesse moyenne lorsque l'intervalle de temps tend vers zéro.



$$\vec{v}_{M4} = \frac{\overrightarrow{M_3M_5}}{t_5-t_3} = \frac{\overrightarrow{OM_5} - \overrightarrow{OM_3}}{t_5-t_3}$$ vecteur vitesse moyenne

$$\vec{v}_{M4} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_5} - \overrightarrow{OM_3}}{t_5-t_3} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$$ vecteur vitesse instantannée au temps $t = t_4$

On pourra remarquer que ce choix qui est dicté par l'obtention d'une meilleure précision expérimentale, entre en conflit avec l'approche traditionnelle de la notion de dérivée en mathématiques, dans laquelle le nombre dérivé est obtenu comme la limite du taux d'accroissement au point d'étude x_0 :

$$(4)\ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)$$

alors qu'en formalisant la méthode expérimentale proposée par les physiciens, on définira :

$$(5)\ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right).$$

Certains élèves ont donc donné l'une des réponses suivantes :

$$(2)\, v_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad (3)\, v_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}$$

Elles n'ont pas été acceptées par la très grande majorité des correcteurs, alors que les élèves ont la **notion mathématique correcte** présente à l'esprit.

De plus, la lecture attentive des programmes de sciences physiques en vigueur à la rentrée 1996 montre que la formule (1) n'est pas explicitement exigible des élèves. Les programmes parus dans les B.O. hors série du 24 septembre 1992 (première) et du B.O. spécial n°3 du 16 février 1995 (terminale)[4] précisent simplement que les élèves doivent « savoir analyser un document chronophotographique pour déterminer vecteurs vitesse et accélération ».

Solution proposée par le corrigé type :
1.2 *Les valeurs numériques obtenues avec cette formule (1)sont donc :*

vitesse V_i au temps t_i	*V_1*	*V_2*	*V_3*	*V_4*	*V_5*	*V_6*
vitesse en $m.s^{-1}$	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*

Nos commentaires :

On remarquera que la valeur au temps t = 0 ne peut pas être obtenue de cette façon (on ne connaît pas la valeur au temps t = -1), elle est en fait donnée par l'énoncé[5]. Les valeurs obtenues sont en progression arithmétique, ce qui correspond à un mouvement uniformément accéléré.

Si on prend la formule (2), on obtient le tableau suivant :

vitesse V_i au temps t_i	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
vitesse en $m.s^{-1}$	1	3	5	7	9	11

Ces valeurs amènent plusieurs remarques :

- on peut calculer la vitesse au temps t=0, et cette valeur contredit l'énoncé. Le candidat peut donc soupçonner une éventuelle erreur, ou bien simplement supprimer la valeur de cette liste !
- Les valeurs obtenues sont également en progression arithmétique, ce qui est rassurant connaissant le résultat à obtenir...

Si on prend la formule (3), on obtient le tableau suivant :

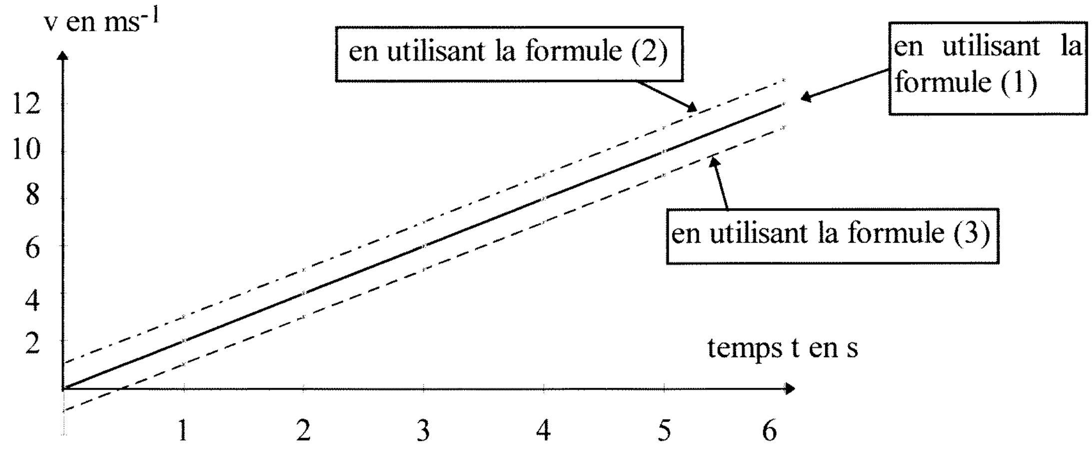
vitesse V_i au temps t_i	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
vitesse en $m.s^{-1}$	1	3	5	7	9	11

[4] Ces références sont données dans les programmes publiés par le CRDP, édition 1996.
[5] En admettant que la vitesse initiale est effectivement nulle...

A ce stade du problème, on ne décèle aucune contradiction avec l'énoncé, et les valeurs obtenues sont bien en progression arithmétique.

Solution proposée par le corrigé type :
1.3 *Représentation graphique des variations de cette vitesse en fonction du temps*

Nos commentaires :
Les deux autres courbes obtenues ont été tracées sur le même graphique.



Solution proposée par le corrigé type :
1.4 *La courbe est rectiligne et passe par l'origine. Le mouvement est uniformément accéléré avec une vitesse initiale nulle.*

Nos commentaires :
En utilisant la formule (1) : Le physicien dira que c'est la représentation graphique d'une **fonction linéaire**. Il est important de noter que les élèves qui répondent que c'est une **fonction affine** (qui est particulière, puisque sa représentation graphique passe par l'origine) se font **sanctionner**, alors qu'en mathématiques cette réponse est tout à fait correcte ! Le problème est analogue à celui qui consiste à dire qu'un carré n'est pas un rectangle particulier.
En utilisant la formule (2) : On peut très bien répondre qu'entre les temps t = 1s et t = 6s, le mouvement est uniformément accéléré. Si on trace la droite, elle coupe l'axe des ordonnées en 1, ce qui correspond à une vitesse initiale non nulle. Dans ce cas, si le tracé effectué est une portion de droite, ce qui contredit l'énoncé, la notion de fonction affine est acceptée.
En utilisant la formule (3) : Les remarques sont analogues à celles qui concernent la formule (2), mais la voiture aurait eu une vitesse initiale négative, donc aurait commencé en marche arrière.

On voit donc qu'un élève qui a compris les notions mathématiques mises en jeu peut se faire sanctionner de façon non négligeable. Un travail de clarification des attentes de chacun, et d'harmonisation semble ici indispensable, tant au niveau des enseignants que des élèves. On pourra trouver quelques éléments de réponse dans la **troisième** partie de cet article.

SOLUTION DES QUESTIONS DU PROBLEME :
« REACTION ENTRE L'EAU OXYGENEE ET LES IONS IODURE »

Solution proposée par le corrigé type :
III) 1.1 *Cette vitesse est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe $[I_2] = f(t)$ à la date t*

Valeurs :	*On acceptera les valeurs suivantes :*
Pour le mélange (1) : $v_1 = 0,75$ mmol.L^{-1}.min^{-1}	$0,72 \leq v_1 \leq 0,79$ *(en mmol.L^{-1}.min^{-1})*
Pour le mélange (2) : $v_2 = 0,60$ mmol.L^{-1}.min^{-1}	$0,57 \leq v_2 \leq 0,63$.*(en mmol.L^{-1}.min^{-1})*

Nos commentaires :

Le corrigé ne propose ni n'impose de méthode pour calculer ce nombre, bien qu'on puisse observer un tracé de tangente à la courbe sur le corrigé type. Ce dernier propose simplement un intervalle de validité des coefficients directeur sans qu'on ne connaisse les critères qui ont présidé à ce choix.

A priori, on peut tracer géométriquement la tangente à la courbe et lire son coefficient directeur, ou alors prendre deux points voisins sur la courbe et calculer le coefficient directeur de la sécante ainsi obtenue. Remarquons que la courbe proposée est effectivement une courbe expérimentale : on peut voir neuf points « mesurés » sur chaque courbe, et la courbe elle même a été tracée à main levée (voir la courbe donnée dans la partie I qui a été retracée pour les besoins de cet article). Pourquoi ne pourrait-on pas encore utiliser la méthode de la partie II pour calculer le nombre dérivé à la date t = 2 min ? La valeur ainsi obtenue ($\frac{4,3-1,4}{4} = 0,725$) pour le premier mélange est effectivement dans l'intervalle accepté par le corrigé, alors que la valeur obtenue pour le second mélange ($\frac{3,05-0,9}{4} = 0,5375$) n'est pas jugée acceptable ! Heureusement, les intervalles acceptables ayant été élargis lors de la réunion d'harmonisation, aucune réponse de ce type n'a pu être rejetée.

Solution proposée par le corrigé type :
2.3 *On obtient $[I_2]_\infty = 6,67 \times 10^{-3} mol.L^{-1}$ en tenant compte de la stoechiométrie de l'équation bilan.*
Nos commentaires :
Le raisonnement tenu n'a pas d'importance ici. Seul le résultat nous importe : la droite d'équation $y = 6,63 \times 10^{-3}$ est asymptote horizontale à la courbe.

Solution proposée par le corrigé type :
2.4 *Pour le mélange (1), la limite est presque atteinte. Pour le mélange (2), on est assez loin de la limite.*
Nos commentaires :

On sera bien d'accord avec le résultat proposé pour le mélange (2), mais concernant celui du mélange (1), on pourrait ne pas être d'accord ! La courbe est encore loin de l'asymptote à l'oeil nu.

III) NOTIONS MISES EN OEUVRE, CRITIQUES, LIMITATIONS.

Question II)1.1 et 1.2

Dans ces questions, il s'agit de calculer le nombre dérivé en un point d'une fonction dont on connaît la valeur en un certain nombre de points (expériences, tableau de valeurs,...). En fait, ce problème est totalement ignoré par les programmes de mathématiques et n'est pas posé dans les programmes de physique, qui se contentent d'y apporter une réponse sans la justifier, réponse qui n'est parfois pas justifiable comme nous allons le voir ! Le programme de sciences physiques stipule simplement que les élèves de terminales S sachent « analyser un document chronophotographique pour déterminer vecteurs vitesse et accélération, étudier les caractéristiques d'un mouvement ».

Il s'agit en fait d'un problème d'analyse numérique qui n'est en aucune façon abordé dans l'enseignement secondaire des mathématiques. Toutes les fonctions que les élèves sont amenés à étudier sont en effet connues continûment (formules, représentation graphique continue,...), et le calcul approché de la dérivée en un point n'est pas posé si on ne dispose que de données discrètes sur la fonction. Il est donc tout à fait normal que certains élèves reviennent à l'approche mathématique faite en première, qui consiste à définir le nombre dérivé en un point comme limite du coefficient directeur d'une sécante qui passe par le point d'abscisse x_0 (formule (4)). Nous pouvons même dire que cette démarche satisfait quelque part l'enseignant de mathématiques, car une idée importante de la notion de dérivée a été retenue, ce qui est souvent loin d'être le cas...

On trouvera dans n'importe quel ouvrage d'analyse numérique des méthodes qui permettent de calculer la valeur approchée du nombre dérivé en un point connaissant des valeurs prises par la fonction autour de ce point, nous ne les développerons donc pas ici. L'expression de l'erreur commise montre évidemment qu'elle diminue lorsque l'intervalle entre les valeurs connues de la fonction diminue. L'idée la plus simple consiste évidemment à utiliser la formule (1) couramment employée en physique. Analysons d'un peu plus près sa signification.

La fonction f est supposée avoir toutes les propriétés requises si aucune précision n'est apportée, et on utilisera les notations habituelles : la fonction à étudier s'appelle f, h est un réel « petit » strictement positif.

En mathématiques, on cherche le nombre dérivé en x_0 en calculant :

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$

Les approximations proposées dans les formules (2) et (3) consistent donc à prendre les nombres :

$$(6)\ \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{et} \qquad (7)\ \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

comme approximations du nombre $f'(x_0)$.

La méthode proposée en physique conduit à évaluer la valeur du nombre dérivé en x_0 par l'expression :

$$(8)\ \left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\right)$$

• Il est presque sûr qu'en prenant la formule (2) ou (6) ou la formule (3) ou (7) pour calculer une valeur approchée du nombre dérivé, on commet une erreur systématique puisque la tangente est précisément obtenue par le coefficient directeur de la droite qui a une intersection « double » avec la courbe, ce qui ne saurait être le cas ici (voir Figure 1). Les nombres calculés par les formules (6) et (7) sont les coefficients directeurs des sécantes (M_0M_2) et (M_0M_1) respectivement.

La formule (1) ou (8) propose en fait de prendre la moyenne arithmétique des coefficient directeurs à droite et à gauche. Intuitivement cette valeur est meilleure, puisqu'on fait la moyenne de deux valeurs biaisées, l'une supérieurement (M_0M_2)et l'autre inférieurement (M_0M_1) (voir Figure 2) :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right)$$

On calcule alors le coefficient directeur de la droite (M_1M_2).

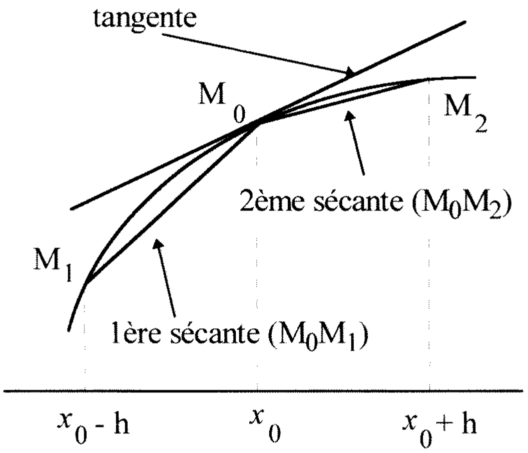


Figure 1

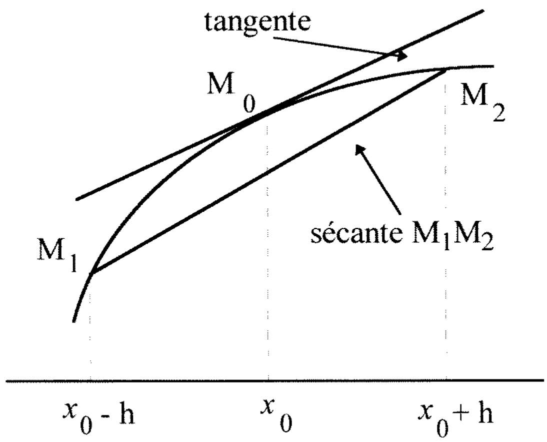


Figure 2

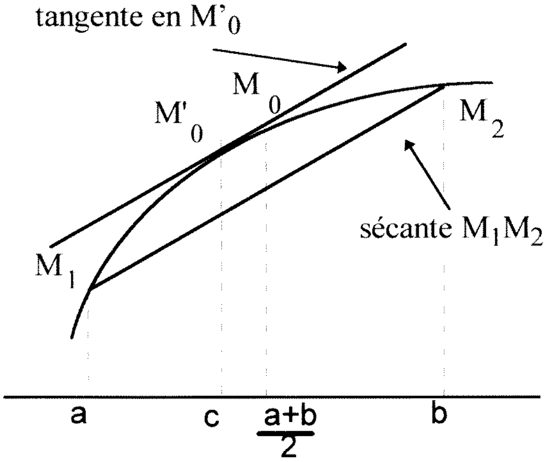


Figure 3

• La formule des accroissements finis nous apprend que si la fonction f est continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[, alors il existe un réel c de]a,b[tel que :

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

La formule (1) suggère en fait que $c=\dfrac{a+b}{2}$ et donc que (voir Figure 3) :

$$f'(c)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ce n'est évidemment pas forcément le cas, et une question qui vient à l'esprit est de caractériser les fonctions pour lesquelles cette propriété est toujours vraie. Voir plus loin...

• Examinons maintenant l'ordre de l'approximation. En employant la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2, on obtient :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(c_1) \quad avec\ c_1\in[x_0\,;x_0+h]$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(c_2) \quad avec\ c_2\in[x_0-h\,;x_0]$$

D'où par soustraction :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)+\frac{h}{4}\left(f''(c_1)-f''(c_2)\right)$$

On obtient donc une bonne approximation de f' grâce à l'approximation suggérée par les Physiciens dans les deux cas suivants lorsque le nombre $\frac{h}{4}\left(f''(c_1)-f''(c_2)\right)$ est « petit » :

* Si le nombre h est « petit ».

Le cours de physique indique bien que la longueur de l'intervalle doit tendre vers 0. On peut considérer que c'est le cas si l'on observe, par exemple, l'enregistrement sur table à coussin d'air du déplacement d'un solide qui n'est pas animé d'une trop grande vitesse par rapport à l'intervalle entre deux étincelles (plusieurs dizaines de millisecondes). Est ce vraiment le cas dans ce problème ? L'exercice proposé est donc totalement en dehors du champ d'application de la méthode proposée !

* Si la dérivée seconde f'' varie peu. Un cas extrême se produit lorsque f'' est constante, donc si f est une fonction polynôme du second degré...

Cette dernière remarque explique pourquoi les résultats obtenus sont excellents avec l'approximation de la formule (1), puisqu'on aboutit parfaitement au résultat proposé, à savoir que la vitesse augmente linéairement avec le temps, ce qui correspond à une accélération constante. Mais le fait que la vitesse augmente linéairement avec le temps est obtenu même si l'on prend une des formules (2) ou (3), avec simplement un problème de vitesse initiale non nulle (si on suppose qu'elle l'est...). En fait la méthode de calcul proposée est parfaite avec le problème étudié : on utilise une propriété caractéristique des fonctions polynômes du second degré (ou de la courbe parabole) !

* Si f est une fonction polynôme du second degré, alors pour tous les réels a et b, la relation suivante est vérifiée :

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

* Géométriquement, le coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point d'abscisse x_0 est égal au coefficient directeur de la sécante à la courbe passant par deux points dont les abscisses sont symétriques par rapport à x_0.

* En fait, lorsqu'on calcule les valeurs des tableaux proposés dans la solution avec les formules (2) et (3), on calcule les différences finies d'une fonction tabulée, et celui qui les a un peu étudiées sait bien que les valeurs obtenues seront en progression arithmétique si la fonction est un polynôme du second degré (voir également plus loin).

La question à poser n'est donc certainement pas le calcul approché d'une vitesse, du moins si aucune considération sur les limites de validité de la formule (1) ou bien la caractérisation d'une fonction polynôme du second degré n'a été sérieusement abordée en cours.

Nous avons posé ce problème à des enseignants de mathématiques lors d'une journée de formation dans le cadre de la MAFPEN. Leur réaction a été intéressante, puisque le calcul d'une valeur approchée du nombre dérivé en un point à l'aide de valeurs tabulées d'une fonction n'est pas au programme de l'enseignement secondaire. Trois types d'approche sont apparus :

* Certains stagiaires ont reconnu les valeurs de la fonction $x \mapsto x^2$ et ont calculé sa dérivée pour répondre à la questions posée...
* D'autres ont utilisé la formule (2) ou (3), en calculant donc la vitesse moyenne sur un intervalle de temps (et non pas sur deux).
* Les derniers ont utilisé la formule proposée par les physiciens, et ont justifié leur choix par la notion d'interpolation linéaire. Cette réaction est très intéressante, car elle dépend apparemment des générations d'enseignants. Pour certains, l'utilisation de l'interpolation linéaire fait partie de leur formation initiale, et était très présente lors de leurs études. Pour les générations suivantes, cette démarche est beaucoup moins naturelle. Ce phénomène rejoint une observation analogue en ce qui concerne les notions de translation et de rotation (voir [3]).

Une autre approche du problème posé dans ce sujet pourrait consister en la démarche suivante :

En cours de mathématiques, on peut facilement établir un résultat classique des propriétés des différences finies pour les fonctions polynômes, en se limitant éventuellement au deuxième degré pour des raisons de difficultés calculatoires. Une fonction polynôme étant tabulée avec un pas régulier, on calcule les différences finies successives, et si le polynôme est de degré n, alors toutes les différences finies d'ordre supérieur ou égales à n+1 sont nulles (ce résultat est analogue à celui de la dérivation). On peut aussi s'arrêter avant : il est facile d'établir que les différences finies d'ordre n sont constantes, que celles d'ordre (n-1) sont en progression arithmétique... Si l'on reprend l'exemple proposé par le sujet, le résultat qu'on peut obtenir est que si la fonction tabulée (les positions de la voiture toutes les secondes) est un polynôme, alors ce polynôme est du second degré, et donc, son polynôme dérivé est du premier degré (la vitesse est une fonction affine du temps) :

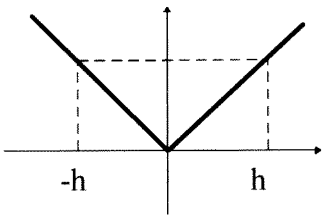
valeurs tabulées (position de la voiture)	0		1		4		9		16		25		36
différence première (vitesse)		1		3		5		7		9		11	
différence seconde (accélération)			2		2		2		2		2		
différence troisième				0		0		0		0			

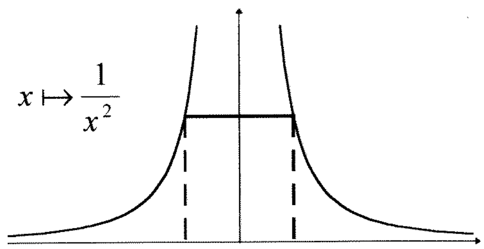
A ce stade, on peut donc dire que l'accélération de la voiture est bien constante pendant la phase de démarrage. Si on veut connaître sa vitesse exacte à un instant donné, on sait, d'après le cours, que la formule (1) nous la donnera.

Il nous semble que cette démarche serait plus adéquate, car on ne fait pas de pseudo calcul de vitesse, qui donne des résultats parfaits simplement parce que le mouvement est uniformément accéléré. Si l'on étudiait un mouvement circulaire, les résultats donnés par la formule (1) seraient moins bons, sauf dans le cas du mouvement circulaire uniforme, pour lequel la valeur numérique sera inexacte (la corde est plus courte que l'arc) mais le support vectoriel correct (la médiatrice de la corde est aussi un rayon du cercle, et est donc perpendiculaire à la tangente au cercle).

- L'expression (8) $\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\right)$ peut-elle servir de définition du nombre dérivé en un point en mathématiques comme le suggère l'approche faite en cours de physique du secondaire ?

Nous apportons une réponse négative en considérant les deux contre-exemples suivants :





Pour chacune de ces deux fonctions, l'expression $\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\right)=0$ est nulle pour tout h strictement positif, alors que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable à l'origine (on obtient en fait la moyenne de la dérivée à droite et à gauche) et que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ n'est même pas définie à l'origine. Il serait donc sage de critiquer la formule (8) à l'aide de ces deux contre-exemples.

Question II)1.3

En mathématiques, toute fonction du type $x \to ax+b$ est appelée fonction affine, quelles que soient les valeurs de a et b. En particulier si $b = 0$, on obtient les fonctions affines particulières appelées fonctions linéaires, et si $a = 0$, on obtient les fonctions affines particulières appelées fonctions constantes. Cette approche est importante du point de vue structurel et est à mettre en parallèle avec deux exemples suivants :

- Tout nombre entier est également un nombre décimal particulier, qui est également un nombre rationnel particulier, qui est également un nombre réel particulier. Ceci signifie simplement que l'ensemble des entiers est inclus dans l'ensemble des nombres décimaux, qui est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels, qui est inclus dans l'ensemble des nombres réels. Personne ne dira qu'un entier n'est pas un décimal particulier !

• Un carré est un rectangle particulier, qui est lui même un parallélogramme particulier. On peut bien, sûr considérer qu'un carré n'est pas un rectangle, et que l'appellation rectangle exclut la catégorie des carrés comme cela est parfois fait à l'école primaire. Mais quel dommage !

Ne pas considérer les inclusions précédentes est une perte de richesse évidente, et il en est de même pour les notions de fonctions affines et linéaires (à un moindre degré cependant). En fait, dans l'enseignement secondaire, les propriétés des fonctions linéaires ne sont pas vraiment mises en évidence et exploitées de façon approfondie. Cela pourrait justifier éventuellement l'exigence d'une distinction entre fonction linéaire (on est dans une situation de proportionnalité) et fonction affine non-linéaire.

De plus, la structure des programmes de mathématiques ne va pas dans ce sens. Au collège, on étudie des situations de proportionnalité issues de domaines variés avec un nombre fini et restreint de valeurs. On met en évidence les propriétés additives et multiplicatives de ces situations. La représentation graphique des situations étudiées met en évidence l'alignement des points sur une droite passant par l'origine. On utilise bien l'expression « en fonction de »[6], mais la notion de fonction est hors programme au collège. On « introduit prudemment la notation *f(x)* »[7] en 3ème, et on y emploie les termes de fonctions affines et linéaires en traçant les droites qui y sont associées. La notion de fonction n'est étudiée qu'à partir de la seconde, et on n'étudie pas de propriétés fonctionnelles qui mettraient en évidence les propriétés des fonctions linéaire, à savoir :
pour tous les réels x, y et k $\quad f(x+y)=f(x)+f(y) \quad$ et $\quad f(kx)=kf(x)$.

Les fonctions linéaires sont des fonctions parmi d'autres, et il n'y a pas de raison dans le cadre des programmes, de faire une distinction systématique et forcenée entre les fonctions linéaires et les fonctions affines non-linéaires.

Question III)2.4

Quels sont les critères qui permettent de décider que « la courbe a atteint son asymptote » ?

• Est-ce le pourcentage d'ion iodure atteint par rapport à la limite théorique ? Il n'est que d'environ 97% et 81% pour les deux réactions étudiées au bout de 26 min. Graphiquement, la courbe n'est confondue avec son asymptote (vu l'échelle choisie qui est raisonnable) dans aucun des deux cas.

• Est ce la vitesse de formation des produits qui est devenue tellement faible que l'on peut considérer que la réaction est achevée ? La vitesse initiale de formation était d'environ 1,75 $\text{mmol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$ (coefficient directeur de la tangente à l'origine). Si on fait un calcul approché en utilisant la formule (2), on trouve respectivement 0,014 et 0,028 $\text{mmol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$, ce qui correspond environ à 0,8% et 1,6% de la vitesse initiale de formation. Ce critère est-il pertinent ?

[6] citation du programme.
[7] citation du programme.

• Dans le programme de sciences physiques de terminale S, beaucoup de phénomènes rencontrés ont une propriété asymptotique, par exemple les réactions en chimie, ainsi que des propriétés de charge ou de décharge du condensateur. Dans ce dernier cas, on considère, par exemple, que le condensateur est chargé lorsqu'on ne peut plus mesurer la valeur du courant de charge, même si le modèle mathématique qui exploite une fonction exponentielle montre que la fonction qui modélise ce phénomène n'atteint jamais la valeur de l'asymptote.

CONCLUSION

L'étude des notions mises en oeuvre dans l'enseignement des sciences physiques en terminale S fait apparaître une lacune dans le contenu des programmes de mathématiques correspondant, en ce qui concerne l'approximation numérique des valeurs de la fonction dérivée. Une harmonisation, tant entre les programmes des deux matières qu'entre les exigences des enseignants et des correcteurs, est souhaitable pour éviter des phénomènes nuisibles aux élèves.

Il n'est pas admissible qu'un candidat au Baccalauréat soit pénalisé pour les réponses qu'il donne quand les notions de fonctions affines et linéaires ont été correctement comprises du point de vue mathématique.

De même, il n'est pas acceptable qu'un candidat au Baccalauréat soit sanctionné s'il ne donne pas la formule attendue d'approximation du nombre dérivé d'une fonction quand :

• d'une part, les programmes de mathématiques n'abordent pas les notions correspondantes d'analyse numérique et que la notion de dérivée est précisément introduite à l'aide d'une formule qui n'est pas acceptée ici.

• d'autre part, cette notion n'est pas explicitement exigible dans les programmes de sciences physiques en vigueur (voir la note n°4) même si les enseignants la considèrent comme allant de soi.

Ne pourrait-on pas envisager que les notions correspondantes d'analyse numérique soient abordées dans les programmes de mathématiques et de sciences physiques de l'enseignement secondaire ?

REFERENCES :

[1] « Mathématiques et Sciences Physiques », brochure S158 de l'IREM de Strasbourg (Juin 1994)

[2] « Dictionnaire de Mathématiques et Sciences Physiques », brochure S169 de l'IREM de Strasbourg (Juin 1996)

[3] GASSER Jean-Luc « Mathématiques et Sciences Physiques : translations et rotations » dans la revue REPERES n°25 octobre 1996 p.19 à 34.

[4] HAEGEL Suzy. « Maths-Physique : une activité commune » dans le bulletin vert de l'APMEP n°407 de décembre 1996 p.666 à 671.

NOUVELLE BROCHURE :

VOIR ET RAISONNER :

A LA CONQUETE DE L'ESPACE

AU COLLEGE

Groupe collège de Strasbourg

Auteurs : Claire Bayart, Claude Gos, Chantal Hindelang, Marie-Anne Keyling, Claude Mathern, Monique Ortlieb, Jean-Claude Rauscher, Gabrielle Roesch.

Première partie:

Enseigner la géométriedans l'espace au collège : une question de temps disponible ?

La question de la progression

La progression esquissée par le programme.

Voir et raisonner dans l'espace pour résoudre un problème : quelles sont les compétences en jeu ?

Compte rendu d'une enquête

Les stratégies d'enseignement.

Deuxième partie : des activités.

Le cube en sixième.

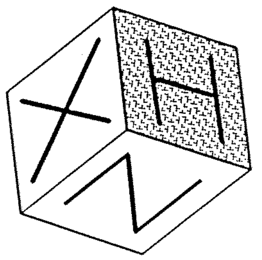
Des solides à partir d'un cube en cinquième.

Reconnaître la base et la hauteur d'un prisme droit en cinquième.

Le cylindre en cinquième.

Etre ou paraître en quatrième.

La sphère en troisième.



Troisième partie : les annexes

Bibliographie

Prix de vente : 30 F (+ 10 F de frais de port) – Chèque à l'ordre de M. l'Agent Comptable de l'U.L.P. (IREM) envoyé à la Bibliothèque.

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 1997

La séance de remise des prix de ce 24ème Rallye Mathématique d'Alsace a été inaugurée par Monsieur Jean-Yves MERINDOL (nouveau Président de l'Université Louis Pasteur). Il a commenté les nombres qui décrivent l'état du Rallye de cette année pour informer élèves et professeurs présents de certaines de leurs particularités.

- C'est le 24ème rallye Mathématique d'Alsace : eh bien 24 vérifie l'égalité $\sum_{k=1}^{24} k^2 = 70^2$. C'est le seul entier n, autre que 1, tel que la somme des n premiers carrés d'entiers soit un carré.
- Il y avait 1270 candidats. De 1270 il ne sait ce qu'on en peut dire mais par contre, $127 = 2^7 - 1$ est un nombre de Mersenne premier. Ajoutons que c'est le quatrième nombre de Mersenne premier et que 127 est l'exposant du douzième nombre de Mersenne premier.
- En première, 17 binômes ont été primés. Eh bien 17 est la longueur de la plus longue progression arithmétique connue dont tous les termes sont premiers. Le premier terme de cette progression est 3 430 751 869 et la raison 87 297 210.
- En terminale, 16 binômes se voient récompensés. On peut relever que pour seize entiers consécutifs, l'un d'eux est premier avec tous les autres, et seize est la plus grande valeur qui donne cette propriété vérifiée en fait pour tout entier $k \leq 16$*.

Corrigé des Epreuves de Première

Sujet 1 :

Enoncé :

Si x est un nombre réel, le seul nombre réel dont le cube est égal à x s'appelle la racine cubique de x et se note $\sqrt[3]{x}$.

Par exemple : $\sqrt[3]{1000} = 10 = 2 \times 5 = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125}$

On définit $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Montrer que α est un nombre entier.

* Si vous voulez prolonger le jeu de Monsieur MERINDOL, reportez-vous au livre de François le LIONNAIS "Les nombres remarquables".

Solution :

La définition donnée dans l'énoncé suggère de s'intéresser à α^3. Pour simplifier l'écriture, posons $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ et $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ $\quad \alpha$ s'écrit alors $\alpha = a - b$.

Alors :
$$\begin{aligned}\alpha^3 &= (a-b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\\ &= a^3 - b^3 + 3(ab^2 - a^2b)\\ &= a^3 - b^3 + 3ab(b-a)\end{aligned}$$

or $\quad a^3 = \sqrt{5}+2 \quad$ et $b^3 = \sqrt{5} - 2 \quad$ d'où $\quad a^3 - b^3 = 4$

et $\quad ab = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\ \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)\ (\sqrt{5}-2)} = \sqrt[3]{5-4} = \sqrt[3]{1} = 1$

On obtient ainsi :
$$\begin{aligned}\alpha^3 &= 4 + 3(b-a)\\ &= 4 - 3\alpha\end{aligned}$$

donc
$$\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$$

C'est à dire α est racine du polynôme du troisième degré $P(x) = x^3 + 3x - 4$

On remarque que 1 est la racine évidente de ce polynôme. On peut donc le factoriser par $(x - 1)$ et on obtient :
$$P(x) = (x-1)(x^2 + x + 4)$$

Or le discriminant de $x^2 + x + 4$ est -15, ce qui implique que $x^2 + x + 4$ n'a pas de racines réelles.

1 est la seule racine de P, on en déduit que : $\qquad \alpha = 1$

Commentaires :

Cet exercice a été abordé par tous les candidats et correctement traité par bon nombre d'entre eux. On notera cependant des usages abusifs de la calculatrice, avec manipulations diverses des valeurs approchées de a et b.

Bien que beaucoup de candidats aient pensé à calculer α^3, certains n'ont pas pensé à introduire un polynôme, ce qui laisse supposer que cette démarche n'est pas familière aux élèves.

L'égalité $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ a été utilisée sans démonstration par les élèves. Une justification même succincte aurait été la bienvenue.

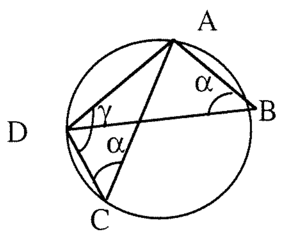
Sujet 2 :

Enoncé

Trois sirènes, Andromaque, Bérénice et Céphise, goûtent un repos bien mérité au bord d'un lac circulaire.

Emile, champion de natation à vitesse constante de son village de Climbach, sait que depuis son lieu de méditation, le Dorisfels (un charmant rocher au bord du lac), il lui faut une minute pour rejoindre Céphise, sept minutes pour retrouver Bérénice et cinq pour revoir Andromaque.
Céphise et Bérénice se reposent toutes deux à 500 mètres d'Andromaque.
Un journaliste venu admirer les exploits d'Emile, fait le tour du lac à pied en partant du Dorisfels ; il a rencontré Andromaque puis Bérénice et enfin Céphise.
Trouver la vitesse d'Emile le Champion et le rayon du lac.

Solution



On a par hypothèse :

AC = AB = 500 m

Posons $x = CD$. Alors $AD = 5x$, $BD = 7x$ et la vitesse d'Emile le Champion en mètres par minute vaut x. A, B, C, D étant cocycliques, on sait que $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$.
Posons $\alpha = \widehat{DBA}$.

La formule d'Al-Kashi[1] (relation de Pythagore généralisée) dans un triangle quelconque s'écrit, avec les notations habituelles :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$$

Appliquée aux triangles ABD et ACD, elle fournit les égalités :

$$25x^2 = 49x^2 + 500^2 - 2 \,.\, 500 \,.\, 7x \,.\, \cos\alpha \quad (1)$$

$$25x^2 = x^2 + 500^2 - 2 \,.\, 500x \,.\, \cos\alpha \quad (2)$$

[1] Al Kashi, mathématicien persan, né à Kasan, a travaillé à l'observatoire de Samarkand où il est mort en 1429. Il a élaboré des méthodes très performantes de calcul trigonométrique et algébrique approché. Par exemple, une résolution de l'équation $x^3 + 1 = 3x$ sous la forme d'une suite (x_n) vérifiant $x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^3 + 1)$. Ou bien un calcul de la circonférence donnant $2\pi = 6{,}2831853071795865$ un des plus anciens documents connus de calcul en fraction décimale. Mais aucun fait historique vérifié ne permet de lui attribuer la formule dite d'Al Kashi, attribution qui reste un mystère (à notre connaissance).

d'où, en éliminant $\cos\alpha$ entre (1) et (2) :

$$x^2 = \frac{6\ .\ 500^2}{192} \quad \text{soit, puisque x est positif}$$

$$x = \sqrt{\frac{6\ .\ 500^2}{192}} = \frac{125}{\sqrt{2}} \quad \mathrm{m.min}^{-1}$$

Posons $\gamma = \widehat{CDA}$. La formule d'Al-Kashi pour le triangle DCA nous donne :

$$500^2 = 25x^2 + x^2 - 2.5x^2 . \cos\gamma$$

d'où, comme $x = \dfrac{125}{\sqrt{2}}$,

on en tire : $\cos\gamma = -\dfrac{3}{5}$.

Mais $\sin\gamma$ est positif, donc $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \dfrac{4}{5}$.

Notons R le rayon du cercle circonscrit au triangle ACD (R est par conséquent le rayon du lac).

On sait que $2R = \dfrac{AC}{\sin\gamma}$ d'où $R = \dfrac{500}{2\times\dfrac{4}{5}} = 312{,}5\,\mathrm{m}$.

Commentaires

"Sais-tu quel est Emile ?
T'es-tu fait raconter le nombre des exploits...Mais qui peut les compter ?
Intrépide, et partout suivi de la victoire,
Charmant, fidèle enfin, rien ne manque à sa gloire."

(D'après Andromaque)

Champion de natation à vitesse constante, lecteur enthousiaste de Racine, Emile nous a donné l'occasion de proposer à nos candidats un problème de géométrie.

La résolution reposait sur les relations métriques dans un triangle quelconque et notamment la formule d'Al-Kashi.

Très souvent abordé, cet exercice n'a été entièrement résolu que par de rares binômes.

Faut-il y voir un manque de familiarisation des élèves avec la géométrie du triangle quelconque ?

Il convenait ici d'oublier les repères, le théorème de Pythagore et de se replonger dans des propriétés de géométrie usuelles sans doute moins en vogue à l'heure actuelle.

Puisse ce sujet, à défaut d'inciter à la lecture de Racine ou à la découverte des charmants alentours de Climbach, donner l'envie de refaire un peu de géométrie.

"Et sur quoi jugez-vous que j'en perds la mémoire, Prince ?
Aurai-je perdu tout le soin de ma gloire ?"

(Phèdre).

Sujet 3 :

Énoncé :

Cette année-là, Claude dit à François : " au casino d'Alexandrie, je connais une étrange machine. Elle génère 3 nombres réels positifs a, b et c. On gagne si l'un des 3 nombres a (1-a), b (1-b), c (1 -c) est inférieur ou égal à 1/4. Comme d'habitude, j'y gagne à tous les coups".

François lui répondit : "je connais une machine similaire à Assouan. Mais on y gagne si l'un des 3 nombres a(1-b), b(1-c), c(1-a) est inférieur ou égal à 1/4. J'y gagne à coup sûr".

Préférez-vous tenter votre chance à Alexandrie ou à Assouan ?

Solution :

Étude du Casino d'Alexandrie

Les 3 réels a, b, c étant positifs, on s'intéresse à 3 produits construits de la même manière.

Il suffit donc d'étudier l'application dérivable

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x(1-x).$$

dont la dérivée est $f'(x) = -2x + 1$

Le tableau de variations de f est immédiat :

x	0		1/2		1		$+\infty$
f(x)	0	$\nearrow$	1/4		$\searrow$		$-\infty$

D'après ce tableau, pour tout réel positif x, le produit x (1 - x) est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

On conclut que les trois nombres a (1 - a), b (1 - b) et c (1 - c) sont inférieurs ou égaux à $\frac{1}{4}$.

On gagne à tous les coups à Alexandrie.

Étude du Casino d'Assouan

Si l'un des 3 réels a, b ou c est supérieur ou égal à 1, l'un des 3 produits est négatif, et par conséquent inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Il reste alors à étudier le cas où les 3 réels sont compris entre 0 et 1.

L'étude précédente assure que :

$$0 \leq a(1-a) \leq \frac{1}{4}$$

$$0 \leq b(1-b) \leq \frac{1}{4}$$

$$0 \leq c(1-c) \leq \frac{1}{4}$$

Ayant 3 inégalités entre nombres positifs, on peut faire leur produit.

On a alors $\quad 0 \leq a(1-b)\, b(1-c)\, c(1-a) \leq \frac{1}{4^3}$.

On est ramené au problème suivant :

Si α, β et γ sont 3 réels positifs tels que $0 \leq \alpha\beta\gamma \leq \frac{1}{4^3}$ alors l'un au moins est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$. En effet, si ce n'était pas le cas,

$$\alpha > \frac{1}{4} \qquad \beta > \frac{1}{4} \qquad \gamma > \frac{1}{4}$$

d'où $\quad \alpha\beta\gamma > \frac{1}{4^3}$.

Donc, l'un au moins des réels $a(1 - b)$, $b(1 - c)$, $c(1 - a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
On gagne donc aussi à tous les coups à Assouan.

Commentaires

La première partie (Alexandrie) a été bien traitée. La seconde (Assouan) a rarement été menée jusqu'au bout.

Nombreux sont ceux qui se sont contentés de cas particuliers en oubliant les cas litigieux.

D'un point de vue plus technique, on notera le nombre important d'erreurs concernant les manipulations d'inégalités (problèmes de signes, multiplications membre à membre abusives).

Corrigé des Epreuves de Terminale

Sujet 1 :

Enoncé :

Si x est un entier naturel, on note p(x) le produit de ses chiffres. Démontrer que 12 est l'unique entier naturel x compris entre 0 et 100 tel que $x^2 - 10x - 22 = p(x)$.

Solution :

Nous devons déterminer l'ensemble des nombres n satisfaisant les trois conditions suivantes :

$$n^2 - 10n - 22 = p(n). \qquad (1)$$

$$n \in N \qquad (2)$$

$$0 \leq n \leq 100. \qquad (3)$$

Pour tout entier entre 0 et 100, on a : $0 \leq p(n) \leq 81$.

Par conséquent, les nombres cherchés satisfont les inégalités : $0 \leq x^2 - 10x - 22 \leq 81$. (4)

Ceci nous permet de déterminer un ensemble fini de nombres entiers qui contient tous les nombres recherchés. Il suffit pour cela de résoudre les deux inéquations de (4) et de retenir les solutions entières entre 0 et 100.

<u>Première inégalité</u> : $0 \leq x^2 - 10x - 22$. (4')

Le membre de droite est un polynôme du second degré dont nous déterminons le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 - 10x - 22$		+	0	-	0	+	

où : $x_1 = 5 - \sqrt{47}$ et $x_2 = 5 + \sqrt{47}$.
($x_1 \approx -1{,}85565$ et $x_2 \approx 11{,}85565$)

Donc, un nombre réel x satisfait (5) si et seulement si :

$$x \in \left]-\infty \ , \ x_1\right] \cup \left[x_2 \ , \ +\infty\right[.$$

C'est à dire, plus petit que x_1 ou plus grand que x_2.

<u>Deuxième inégalité</u> :

$x^2 - 10x - 22 \leq 81$ (4") c'est-à-dire : $x^2 - 10x - 103 \leq 0$ (4" ')

La dernière inégalité fait intervenir un polynôme du second degré dont nous déterminons le tableau de signes :

x	$-\infty$		y_1		y_2		$+\infty$
$x^2 - 10x - 103$		+	0	-	0	+	

où : $y_1 = 5 - 8\sqrt{2}$ et $y_2 = 5 + 8\sqrt{2}$.
($y_1 \approx -6{,}3137$ et $y_2 \approx 16{,}3137$)

donc, un nombre réel x satisfait (5) si et seulement si :

$x \in [y_1 \ , \ y_2]$. C'est-à-dire entre y_1 et y_2.

L'ensemble des solutions réelles de (4) est : $I = [y_1 \ , \ x_1] \cup [x_2 \ , \ y_2]$.

Ainsi, les nombres satisfaisant (1), (2) et (3) sont contenus dans l'ensemble I. Or, les nombres entiers entre 0 et 100 dans cet ensemble sont : 12, 13, 14, 15, 16.

Un calcul rapide nous permet , enfin, de constater que le seul nombre à satisfaire les trois conditions est 12.

Cette réponse a souvent été proposée par les candidats. Elle est plus courte que celle que nous avions envisagée. Elle a cependant l'inconvénient de ne pas être généralisable (en effet, on pourrait changer la question et se demander de façon plus générale si 12 est la seule solution entière de l'égalité (1)).
La solution qui suit permet de répondre à la question. Nous laissons au lecteur le soin de l'adapter.

Supposons x compris entre 0 et 9. Dans ce cas :

$$P(x) = x$$

l'équation s'écrit :

$$x^2 - 11x - 22 = 0$$

Les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{209}}{2} \qquad x_2 = \frac{11 + \sqrt{209}}{2}$$

Or ces deux nombres ne sont pas entiers.

Supposons x compris entre 10 et 99 :

x s'écrit : $x = 10a + b$ (où a et b sont compris entre 0 et 9 avec $a \neq 0$)
et $P(x) = ab$.

Alors l'équation s'écrit :

$$(10a + b)^2 - 10(10a + b) - 22 = ab$$

C'est-à-dire : $$100a^2 + 20ab + b^2 - 100a - 10b - 22 - ab = 0$$

Donc: $$b^2 + b(19a - 10) + 100(a^2 - a) - 22 = 0$$

On a là un trinôme du second degré en b, dont le discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (19a - 10)^2 - 4(100(a^2 - a) - 22) \\ &= -39a^2 + 20a + 188.\end{aligned}$$

La fonction $a \mapsto \Delta(a)$

est croissante sur $\left]-\infty \;,\; \frac{10}{39}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{10}{39} \;,\; +\infty\right[$

et $\Delta(2) = 72 \qquad \Delta(3) = -103 \qquad \Delta(1) = 169 \qquad \Delta(0) = 188.$

Donc, pour $a \geq 3 \quad \Delta(a) < 0$ et il n'y a pas de solution réelle.

Il reste à voir pour $a = 1, 2$ ($a = 0$ a déjà été traité).

1. Si $a = 1$ l'équation s'écrit alors : $b^2 + 9b - 22 = 0$

   dont les racines sont : $b = 2$ et $b = -11$

2. Si $a = 2$ l'équation s'écrit : $b^2 + 28b + 178 = 0$

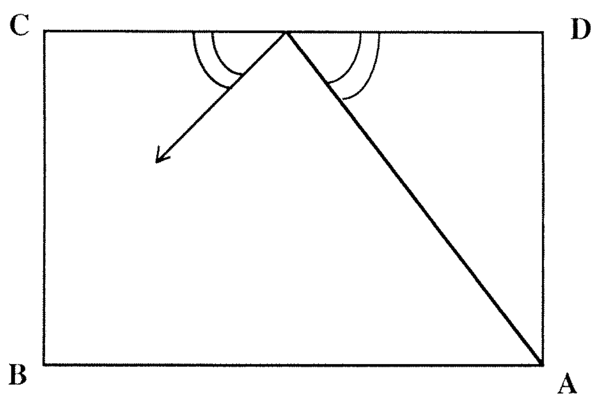
   dont les racines sont $-14 + 3\sqrt{2}$ et $-14 - 3\sqrt{2}$

Toutes les deux négatives et non entières.

Donc, la seule solution est 12.

Sujet 2 :

Enoncé :



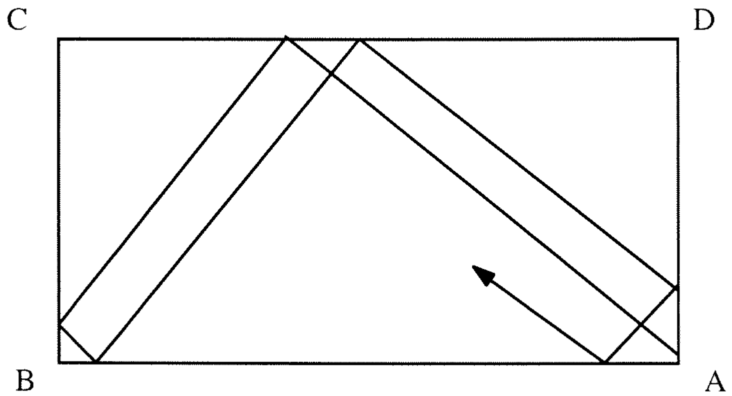
On dispose d'un billard rectangulaire ABCD de longueur AB = 1997 mm et de largeur AD = 1000 mm.

Il comprend un trou à chaque coin. On envoie une boule depuis le coin A suivant la bissectrice de l'angle BAD. Elle rebondit ensuite sur les bords, comme indiqué sur la figure. On néglige les frottements. Montrer que la boule atteindra un trou et déterminer au bout de combien de rebonds.

Plusieurs méthodes de résolution ont été envisagées. Nous citerons les trois principalement rencontrées.

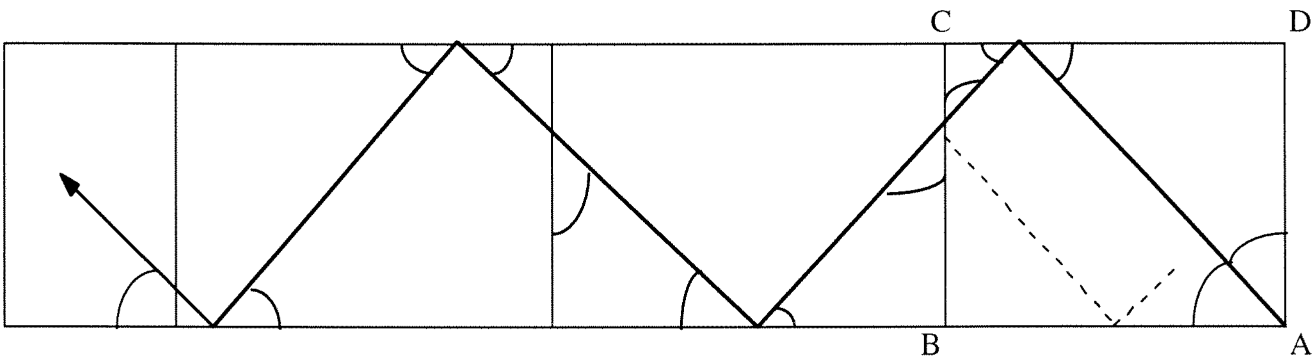
Solution :

1) *La détermination de la trajectoire de la boule sur la figure proposée :*



Le calcul portait alors sur les impacts successifs de la boule sur les côtés.

2) *Un raisonnement par symétries successives relativement aux côtés BC et AD.*

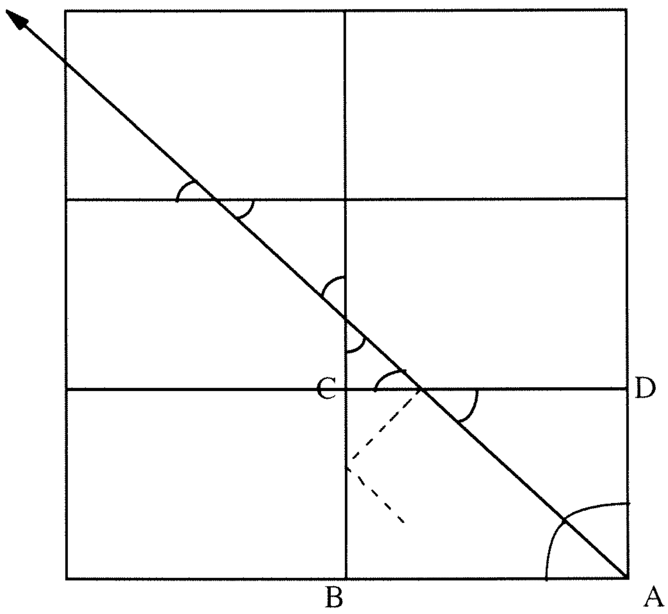


Ainsi représentée, la trajectoire est une ligne brisée. On peut se placer dans le repère orthonormé

$$R = \left(\mathcal{A},\ \frac{\overline{\mathcal{AB}}}{\left\|\overline{\mathcal{AB}}\right\|},\ \frac{\overline{\mathcal{AD}}}{\left\|\overline{\mathcal{AD}}\right\|} \right)$$

dans lequel les calculs des coordonnées successives sont simples.

3) Un raisonnement par symétries successives relativement à chaque côté du triangle permet de simplifier considérablement la représentation de la trajectoire.



Dans le repère orthonormé $R = \left(A, \dfrac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|}, \dfrac{\overline{AD}}{\|\overline{AD}\|}\right)$,

l'équation de la "trajectoire" est $y = x$

La boule atteindra un trou si et seulement si il existe 2 entiers k et l avec $(k,l) \neq (0,0)$ tels que la trajectoire rencontre le point de coordonnées $(1997\,k\ ,\ 1000\,l)$.
On doit donc avoir $1997\,k = 1000\,l$.

Il est clair que $k = 1000$ et $l = 1997$ conviennent donc la boule atteindra bien un trou.

Cherchons la plus petite valeur possible pour k .

1997 étant un nombre premier, comme 1000 doit diviser $1997\,k$, nous avons nécessairement k multiple de 1000.

On en déduit que $k = 1000$ est la plus petite valeur possible. Par suite $k = 1000$ et $l = 1997$ donnent le résultat.

Trouvons à présent le nombre de rebonds.

Il y a rebond chaque fois que la boule passe d'un rectangle à un autre dans le schéma ci-dessus. Elle tombe dans le trou de coordonnées $(1997\,k\ ,\ 1000\,l)$ avec $k = 1000$ et $l = 1997$.

Le trou est dans la 1997ème ligne "horizontale" de rectangles. Il y a donc eu 1996 rebonds contre les faces AB ou CD du billard. Le trou est dans la 1000ème colonne "verticale" de rectangles.

Il y a donc eu 999 rebonds contre les faces AD ou BC du billard.
La boule fait donc 2995 rebonds avant de disparaître.

Commentaires :

Cet exercice a en général semblé inspirer nos candidats. La première méthode a donné lieu aux résolutions les plus confuses (difficultés de représentation de la trajectoire sur la figure proposée, passage d'un "trou" lors des rebonds successifs).

Sujet 3 :

Enoncé :

Saint-Exupéry a quitté le service de l'aéropostale et s'est reconverti dans l'importation de plantes tropicales.
Dans les soutes de son triplan bimoteur, il transporte des boutures de baobab ("baobab baobabensis") et des rosiers des sables ("rosa arenarum"). Il dispose du même nombre de boutures de chaque espèce. Elles sont mélangées et réparties dans deux caisses.
A ce stade de leur croissance, les deux espèces sont encore indiscernables.
Le petit prince ouvre une des deux caisses au hasard et y dérobe une bouture pour la cultiver sur sa planète personnelle.
Le petit prince a l'impression que lorsque l'une des caisses ne contient aucun baobab, il a plus de chance d'avoir une bouture de rosier.
Pouvez-vous l'aider ?
Pouvez-vous lui dire quelle serait la meilleure situation pour lui ?

Solution :

Dans ce problème, on devait imaginer les deux procédures de choix les plus simples que le Petit Prince pouvait adopter.

Dans la première, le Petit Prince ouvre les deux boîtes puis choisit une bouture au hasard parmi les boutures sous ses yeux.

Cela conduit à une situation où la probabilité d'avoir une bouture de rosier est de un demi indépendamment du nombre de boutures de rosier dans chacune des boîtes.

Dans ce premier cas, la question du problème n'avait pas de sens. On pouvait donc en conclure que cette procédure n'était pas celle choisie par notre personnage.

Dans la seconde procédure, notre personnage choisit une des deux boîtes, l'ouvre puis fait son choix parmi les boutures sous ses yeux.

C'est dans ce cas que la distribution des boutures de rosier dans les boîtes change la probabilité d'obtenir un rosier. C'était la procédure à étudier.

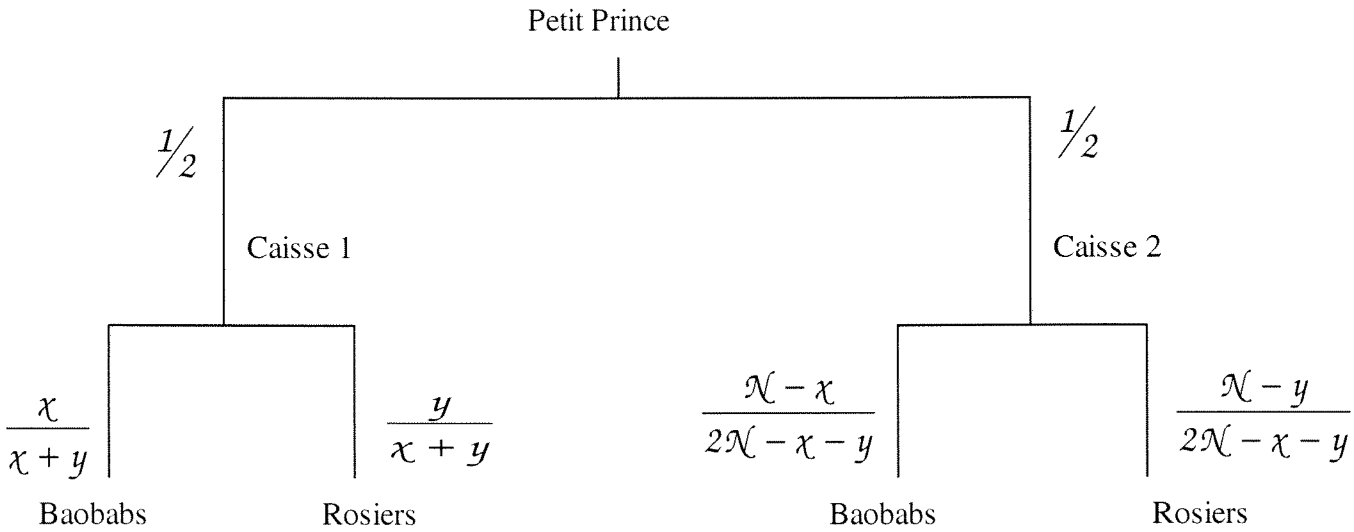
Au cours de cette étude, le choix des variables et des notations pouvait faciliter ou compliquer le travail. Peu de candidats sont allés au delà du calcul de la probabilité de l'évènement " le Petit Prince choisit un rosier" que nous noterons $\mathcal{R}(x,y)$.

On note $\mathcal{N}$ le nombre de baobabs et de rosiers ($\mathcal{N}$baobabs et $\mathcal{N}$rosiers). On note de même x le nombre de baobabs et y celui de rosiers dans première caisse.

Il y a donc :

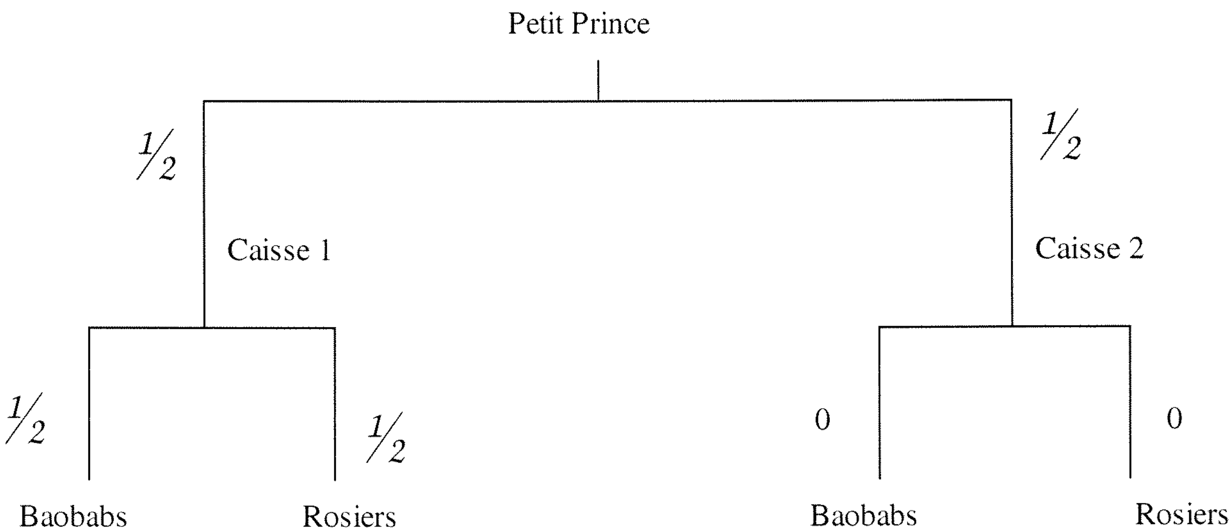
◊ $\mathcal{N} - x$	baobabs dans la deuxième caisse
◊ $\mathcal{N} - y$	rosiers dans la deuxième caisse
◊ $x + y$	boutures dans la première caisse
◊ $2\mathcal{N} - x - y$	boutures dans la deuxième caisse

Pour connaître la probabilité qu' en ouvrant l'une des deux caisses au hasard, le Petit Prince choisisse un rosier, nous faisons un arbre.



Ou si : $x = \mathcal{N}$ *et* $y = \mathcal{N}$

On a un arbre semblable si $x = 0$ *et* $y = 0$



La probabilité d'avoir un rosier est :

$$\mathcal{P}(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{y}{x+y} + \dfrac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-x-y}\right] & si \quad 0 < x+y < 2\mathcal{N} \\[2ex] \dfrac{1}{4} & si \;\; x+y=0 \quad ou \quad x+y=2\mathcal{N} \end{cases}$$

La difficulté est maintenant de savoir pour quelles valeurs de x et y (entiers, compris chacun entre 0 et $\mathcal{N}$) cette probabilité est la plus grande. Les deux caisses n'ont pas de signe distinctif. Le problème présente donc une symétrie : la situation est la même s'il y a x baobabs et y rosiers dans la première caisse ou s'il y a x baobabs et y rosiers dans la deuxième caisse. Ce qui se traduit par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}-x\,;\mathcal{N}-y) \;=\; \mathcal{P}(x\,;y)$$

On peut donc se contenter d'observer les cas où : $\begin{matrix} 0 \le x \le \mathcal{N} \\ 0 \le y \le \mathcal{N}/2 \end{matrix}$

Nous nous pencherons tout d'abord sur les cas où : $\begin{matrix} 0 \le x \le \mathcal{N} \\ 0 < y \le \mathcal{N}/2 \end{matrix}$

Nous étudierons par la suite le cas où $\begin{matrix} y = 0 \\ 0 \le x \le \mathcal{N} \end{matrix}$

1 er cas : Nous supposons $0 \le x \le \mathcal{N} \quad et \quad 0 < y \le \mathcal{N}/2$

L'énoncé suggère de comparer $\mathcal{P}(x;y)$ et $\mathcal{P}(0;y)$

$$2\left[\mathcal{P}(x;y)-\mathcal{P}(0;y)\right] = \left[\frac{y}{x+y}+\frac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-x-y}\right] - \left[1+\frac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-y}\right]$$

$$= \frac{y}{x+y}+\frac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-x-y}-1-\frac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-y}$$

$$= x\left[-\frac{1}{x+y}+\frac{\mathcal{N}-y}{(2\mathcal{N}-x-y)(2\mathcal{N}-y)}\right]$$

or : $\quad 2\mathcal{N} - y = \mathcal{N} + (\mathcal{N} - y) \geq x + y \quad car \quad \mathcal{N} - y \geq y \quad (y \leq \mathcal{N}/2)$

$$2\left[\mathcal{P}(x\ ;\ y) - \mathcal{P}(0\ ;\ y)\right] \leq x\left[-\frac{1}{x+y} + \frac{\mathcal{N}-y}{(2\mathcal{N}-x-y)(x+y)}\right]$$

$$\leq \frac{x}{x+y}\left[\frac{\mathcal{N}-y}{(2\mathcal{N}-x-y)} - 1\right]$$

or : $$\left[\frac{\mathcal{N}-y}{(2\mathcal{N}-x-y)} - 1\right] \leq \frac{x-\mathcal{N}}{2\mathcal{N}-x-y} \leq 0$$

Donc :

$$\mathcal{P}(x\,;y) \leq \mathcal{P}(0\,;y) \quad pour \quad 0 \leq x \leq \mathcal{N} \quad et \quad 0 < y \leq \mathcal{N}/2$$

On veut voir pour quelle valeur de $y\ (0 < y \leq \mathcal{N}/2)$ la fonction $y \mapsto \mathcal{P}(0\,;y)$ est maximale.

$$\mathcal{P}(0\,;y) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-y}\right] = \frac{1}{2}\left[2 - \frac{\mathcal{N}}{2\mathcal{N}-y}\right]$$

Or la fonction : $y \mapsto f(y) = 2\mathcal{N} - y$ est décroissante sur $[0, 2\mathcal{N}[$ d'où la fonction :

$$y \mapsto \frac{\mathcal{N}}{2\mathcal{N}-y}$$

qui est croissante sur l'intervalle où l'on se place et donc : $y \mapsto \mathcal{P}(0\,;y)$ est décroissante.

Le maximum est atteint pour $y = 1$ et vaut :

$$\mathcal{P}(0\,;1) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mathcal{N}-1}{2\mathcal{N}-1}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mathcal{N}-1/2-1/2}{2\mathcal{N}-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3/2 - \frac{1/2}{2\mathcal{N}-1}\right]$$

2 ème cas : Nous supposons $0 \leq x \leq N$ *et* $y = 0$ **, d'abord :**

$$P(x\,;0) \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{N}{2N - x}\right] \text{ si } x \text{ non nul}$$

et $P(0\,;0) = \dfrac{1}{4}$

Il nous reste à comparer $P(x;0)$ à $P(0;1)$.

On remarque que :

$P(0\,;0) \;-\; P(0\,;1) \;\leq\; 0$ pour tout N

Et pour x non nul :

$$P(x\,;0) \;-\; P(0\,;1) \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{N}{2N - x}\right] \;-\; \frac{1}{2}\left[1 + \frac{N - 1}{2N - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{N}{2N - x} - 1 - \frac{N - 1}{2N - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-4N^2 + 3N + 3Nx - 2x}{(2N - x)\;(2N - 1)}\right]$$

Or :

$$-4N^2 + 3N + 3Nx - 2x \;\leq 0$$

si et seulement si $\qquad -2x + 3Nx \;\leq\; 4N^2 - 3N$

si et seulement si $\qquad x \;\leq\; \dfrac{4N^2 - 3N}{3N - 2}$

or $\qquad \dfrac{4N^2 - 3N}{3N - 2} \;\geq\; N \qquad$ *pour tout* $N \;\geq\; 1$

Donc $P(x;0)$ - $P(0;1)$ est négatif pour tout entier x compris entre 0 et N.

Ceci nous permet d'affirmer que la probabilité d'avoir un rosier est la plus grande lorsque l'une des deux caisses contient un rosier et aucun baobab.

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Connaître la personnalité des mathématiciens célèbres n'est pas chose aisée. Leur œuvre publiée a gommé toute trace d'émotion et de sentiment pour présenter les résultats mathématiques dans toute leur rigueur et leur vérité. Vérité souvent très belle sans doute et admirable, "honneur de l'esprit humain", mais abstraite et froide, figée dans son éternité comme un ciel étoilé par une nuit d'hiver glacée. Ce qui en a éloigné plus d'un, curieux de science mais rebuté par son aridité. A tort : les lettres écrites par les mathématiciens à leurs amis ou collègues nous révèlent des personnalités sensibles et passionnées, essayant de résoudre au mieux, non seulement les problèmes scientifiques qu'ils se sont posés, mais aussi les mille et uns tracas de leur vie quotidienne et les difficultés causées par les événements politiques et sociaux. Nous ouvrons ici une nouvelle rubrique qui vous présentera des lettres, ou de larges extraits que nous pensons représentatifs et révélateurs de la personnalité profonde, mais quelquefois méconnue, de nos illustres savants.

Aujourd'hui, une lettre de Gauss à Sophie Germain, datée du 30 avril 1807 (jour de ma naissance, ajoutera Gauss, dans sa signature).

Gauss était marié depuis un an et demi (le 9-10-1805 exactement) à Johanna Osthoff "un merveilleux visage de madone dans lequel se reflète la paix de l'âme et la santé, des yeux tendres un peu exaltés, une taille irréprochable et une intelligence vive..." (*) mais qu'il perdra prématurément le 11-10-1809, après la naissance du troisième enfant, à peine âgée de 29 ans. En cette année 1807, Gauss était très heureux sur le plan personnel, mais cependant en butte à de sérieuses difficultés professionnelles. Napoléon venait de battre les troupes prussiennes du duc de Brunschwig à Iéna et Auerstadt, ce qui anéantissait les ressources que Gauss avait trouvées chez ce protecteur. Mais le 25 juillet 1807 un appel comme professeur d'astronomie et directeur de l'Observatoire à Göttingen devait le libérer d'une situation précaire et sans avenir. La situation de Gauss restait cependant difficile du fait des guerres napoléoniennes et de l'occupation française. Heureusement, sa célébrité de mathématicien lui garantissait des appuis non négligeables parmi les savants parisiens que Napoléon écoutait volontiers, d'autant plus que Gauss était depuis 1804 membre correspondant de l'Académie des Sciences de Paris. Parmi les protecteurs parisiens se trouvait un certain Le Blanc qui avait recommandé Gauss aux autorités d'occupation en écrivant une lettre au général Pernety alors responsable des troupes. En réalité, sous le nom de Le Blanc se cachait une des admiratrices les plus ferventes de Gauss, Sophie Germain (1776-1831), laquelle avait eu recours à ce pseudonyme pour se faire accepter d'abord par la communauté scientifique parisienne, ensuite par Gauss lui-même, ce qui en dit long sur l'esprit du temps à l'égard des femmes. Sophie

(*) Lettre de Gauss à F. Bolyai du 28-6-1804.

Germain était véritablement très douée pour les mathématiques (**) et avait étudié avec enthousiasme d'abord la "Théorie des nombres" de Legendre publiée en 1789, et surtout les "Disquisitiones arithmeticae" de Gauss publiées en 1801 dont elle assimilera rapidement et parfaitement les méthodes nouvelles et difficiles, au point qu'elle réalisera une avancée remarquable dans la démonstration du grand théorème de Fermat, connue sous le nom de théorème de Sophie Germain. Elle écrira une dizaine de lettres à Gauss, entre novembre 1804 et mai 1809. Nous reproduisons ici la réponse de Gauss à la troisième lettre. Elle révèle combien Gauss, souvent présenté comme froid et supérieur, était en réalité extrèmement respectueux et chaleureux dans sa correspondance, et très au-dessus des préjugés de son temps concernant la place des femmes, que ce soit en sciences ou ailleurs. La façon avec laquelle il traite Sophie Germain d'égal à égal en lui faisant des confidences sur ses travaux les plus récents est tout à fait révélatrice à cet égard.

N.B. : La lettre est reproduite telle que Gauss l'a écrite, c'est-à-dire en français, mais avec les quelques fautes bien excusables de la part de quelqu'un qui fait l'effort de répondre dans la langue de son correspondant.

Gauss à Sophie Germain

Votre lettre du 20 Fevrier, mais qui ne m'est parvenue que le 12 Mars, a été pour moi la source d'autant de plaisir que de surprise. Combien l'acquisition d'une amitié aussi flateuse et precieuse est-elle douce à mon coeur. L'intérêt vif, que Vous avez pris à mon sort pendant cette guerre funeste merite la plus sincere reconnaissance. Assurément, Votre lettre au Général PERNETY m'eût été fort utile, si j'avois été dans le cas d'avoir recours à une protection specielle de la part du gouvernement françois. Heureusement les evenemens et les suites de la guerre ne m'ont pas touché de trop près jusqu'ici, bienque je sois persuadé, qu'elles auront une grande influence sur le plan futur de ma vie. Mais comment Vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voïant se metamorphoser mon correspondant estimé Mr. LEBLANC en cet illustre personnage, qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurois peine de croire. Le goût pour les sciences abstraites en general et surtoût pour les mysteres des nombres est fort rare: on ne s'en etonne pas; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se decelent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos moeurs et par nos prejugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches epineuses, sait neansmoins franchir ces entraves et penetrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talens tout à fait extraordinaires, le génie superieur. En effet rien ne pourroit me prouver d'une maniere plus flateuse et moins equivoque, que les attraits de cette science, qui a embelli ma vie de tant de jouissances, ne sont pas chimeriques, que la predilection,

(**) Voir par exemple l'article de Amy Dahan Dalmedico dans "Pour la Science" n^{o} 132, oct. 1988 : "Sophie Germain".

dont Vous l'avez honorée.

Les notes savantes, dont toutes Vos lettres sont si richement remplies, m'ont donné mille plaisirs. Je les ai étudiées avec attention, et j'admire la facilité, avec laquelle Vous avez penetré toutes les branches de l'Arithmetique, et la sagicité avec laquelle Vous les avez su generaliser et perfectionner. Je Vous prie d'envisager comme une preuve de cette attention, si j'ose ajouter une remarque à un endroit de Votre derniere lettre. Il me semble, que la proposition inverse, savoir "si la somme des puissances n^{emes} de deux nombres quelconques est de la forme $hh + nff$, la somme de ces nombres eux-mêmes sera de la meme forme" est enoncée un peu trop generalement. Voici un exemple où cette règle est en défaut:

$$15^{11} + 8^{11} = 8649755859375 + 8589934592 =$$
$$8658345793967 = 1595826^2 + 11.745391^2.$$

Neanmoins $15 + 8 = 23$ ne peut se reduire sous la forme $xx + 11yy$.

Il en est de même de la proposition: si l'un des facteurs de la formule $yy + nzz$ (n étant un nombre premier) est de la forme $(1, 0, n)$ (***), l'autre appartient necessairement à la meme forme. Votre demonstration ne prouve que ce, qu'aucune autre forme indéfinie, que telle qui est equivalente à $(1, 0, n)$, multipliée par la forme $(1, 0, n)$, ne peut donner le produit $(1, 0, n)$, mais cette demonstration ne s'étend pas sur les nombres définis. Soit, pour le déterminant -n, C une classe de formes, quelconque mais ni equivalente à la principale, ni à une autre classe anceps, soit D la classe resultante de la duplication de C (qui sera differente de la principale), enfin soit D' la classe opposée à D. Il s'ensuit, que de la composition de $C+C+D'$ résulte la classe principale. Ainsi si les deux nombres f, g peuvent être representés par une forme de la classe C, et le nombre h par une forme de la classe D', le produit fg x h peut se reduire à $(1, 0, n)$; mais il est facile [de voir] que fg ne se reduit pas seulement à D ou D' mais aussi à $(1, 0, n)$. Nous avons donc ici le cas, qu'un facteur fg et le produit $fg.h$ sont de la forme $(1, 0, n)$, sans que pourtant l'autre facteur y appartienne nécessairement. Au reste on voit facilement que le premier facteur doit être composé sans cela la proposition serait juste. Dans l'exemple ci dessus le facteur $\frac{15^{11}+8^{11}}{23}$ enveloppe le diviseur 67.

Depuis cinq ans des travaux astronomiques – auxquels pour le dire en passant je dois surtout l'heureuse situation, dont j'ai joui pendant le vie de notre duc, le victime malheureux de son attachement fidel à la maison de Prusse – m'ont empeché de me delivrer autant qu'auparavant à ma predilection pour l'Arithmetique et les autres branches de l'analyse. Je n'ai pas pourtant negligé celle ci tout à fait. Tout au contraire j'ai rassemblé peu à peu un grand nombre de recherches, qui un jour fourniront un autre volume – sinon deux – certainement pas moins interessant que le premier. Même dans le dernier hiver j'ai reussi à y ajouter une branche entierement nouvelle. C'est la théorie des residus cubiques et des residus

(***) cf. l'article de M. Guinot : Eureka! $num = \Delta + \Delta + \Delta$ '*L'Ouvert*' n°78 et 79 de 1995.

biquarrés, portée à un degré de perfection égal à celui, qu'a atteint la theorie des residus quarrés. Je mets cette théorie, qui repand un nouveau jour sur les residus quarrés parmi les recherches les plus curieuses donc je me sois jamais occupé. Je ne saurais Vous en donner une idée sans écrire un Memoire expres. Voici pourtant quelque theoreme special, qui pourra servir d'un petit echantillon.

I. Soit p un nombre premier de la forme $3n+1$. Je dis, que 2 (c. à. d. +2 et -2) est residu cubique de p, si p se reduit à la forme $xx+27yy$; que 2 est Non-residu cubique de p, si $4p$ se reduit à cette forme. P.E.7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 94. Vous ne trouveres que $31 = 4+27, 43 = 16+27$, et $2 \equiv 4^3 (mod.31), 2 \equiv (-9)^3 (mod.43)$.

II. Soit p un nombre premier de la forme $8n + 1$. Je dis que +2 et -2 seront residus ou non-residus biquarrés de p, suivant ce que p est ou n'est pas de la forme $xx + 64yy$. Par ex. parmi les nombres 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137. Vous ne trouves que 73=9+64, 89=25+64, 113=49+64, et $25^4 \equiv 2(mod.73), 5^4 \equiv 2(mod.89), 20^4 \equiv 2(mod.113)$.

Les démonstrations de ces theoremes et de ceux qui sont plus generaux sont intimement liées à des recherches delicates. – Voici une autre proposition relative aux residus quarrés, dont la demonstration est moins cachée : je ne l'ajoute pas, pour ne pas Vous derober le plaisir de la developper Vous-même, si Vous la trouveres digne d'occuper quelques momens de Votre loisir.

Soit p un nombre premier. Soient les $p-1$ nombres inferieurs à p partagés en deux classes

$$A \ldots\ldots\ldots 1, 2, 3, 4, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$$
$$B \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2}(p+1), \frac{1}{2}(p+3), \frac{1}{2}(p+5), \ldots p-1.$$

Soit a un nombre quelconque non-divisible par p. Multipliés tous les nombres A par a; prenés en les moindres residus selon le module p, soient, entre ces residus, α appartenant à A et β appartenants à B de sorte que $\alpha + \beta = \frac{1}{2}(p-1)$. Je dis, que a est residu quarré de p lorsque β est pair, non-residu lorsque β est impair.

(...) Suivent quelques indications de corrections à apporter à l'édition des "Disquisitiones arithmeticae"

J'aurois repondu plus tot à Votre lettre, mais la decouverte d'une nouvelle planete par M.Olbers m'a un peu distrait. Par le premier essai que j'ai fait sur son orbite, je trouve son mouvement considerablement plus vite que celui de Cérès, Pallas et Junon, savoir 978" par jour. L'inclinaison de l'orbite de $7^0 6'$. L'excentricite 0,1. Cette planete a beaucoup plus de clarté que Cérès, Pallas et Junon, et j'espere la trouver parmi les observations de l'histoire celeste, peut être même parmi celles de Flamsteed. Je viens d'achever un ouvrage etendu sur les methodes, qui me sont propres, à determiner les orbites des planetes. Mais quoique je l'aie ecrit en allemand, je trouve beaucoup de difficulté d'y engager un libraire.

La guerre a suspendu tout commerce, plusieurs de nos plus grands libraires l'ont refusé. Je suis à present à traiter avec un autre qui se montre un peu plus courageux. S'il trouvera son conte à cette entreprise, peut être il sera encouragé par-là à risquer la publication d'un second volume de mes *disquisitiones*.

Continuez, Mademoiselle, de me favoriser de Votre amitié et de Votre correspondance, qui font mon orgueil, et soïes persuadée, que je suis et serai toujours avec la plus haute estime.

Votre plus sincère admirateur
CH. FR. GAUSS.

Bronsvic ce 30 April 1807
jour de ma naissance.

Buste de Sophie Germain, extrait du livre de Amy Dahan Dalmedico : "Mathématisations, Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole Française, Editions du Choix (1993) qui consacre un chapitre à "Sophie Germain et la théorie mathématique des surfaces élastiques".