
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 89 - DÉCEMBRE 1997 I.S.S.N. 0290 - 0068



W. Weber

Verlag von B.G. Teubner.

Phot. W. Weiß, Straßburg / Z.E.

NOTRE COUVERTURE :

Heinrich WEBER, portrait extrait du livre qui lui est consacré à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire (Festschrift - 5 mars 1912).

Voir l'article de N. SCHAPPACHER et K. VOLKERT qui ouvre ce numéro.

EDITORIAL

Un responsable de l'éducation nationale française constatait récemment l'état de délabrement de l'éducation nationale et affirmait la nécessité de repenser l'enseignement des sciences.

Je voudrais à mon tour m'inquiéter de la montée de l'inculture scientifique, parfois jusqu'aux plus hauts sommets, et souhaiter la **revalorisation de la formation** scientifique, initiale et **continue**.

Indiquons quelques objectifs souhaitables de cette formation scientifique, notamment en mathématiques, au travers de quelques exemples.

Cette formation doit être une **formation à la rigueur**. Cette rigueur exercée dans la classe de mathématiques, doit pouvoir être utilisée hors la classe de mathématiques, dans des situations non mathématiques.

Récemment un responsable du système éducatif évoquait un taux d'absentéisme de 12% chez les enseignants. Pour excuser cette information inexacte déclarée dans un établissement public, devant des caméras de télévision, le responsable répondait qu'elle avait été faite dans un cadre privé. Ce même responsable indiquait plus tard, dans une émission radiophonique publique, que les enseignants du primaire avaient été revalorisés de 180% et ceux du secondaire de 100%. Il faut donc dire et redire que la rigueur ne se divise pas ; elle ne se limite pas à certains domaines, quelques spécialités scientifiques ou à la classe de mathématiques en laissant le manque de sérieux, le mensonge ou la malhonnêteté aux autres domaines. La formation à la rigueur doit aider à l'analyse des discours, des problèmes et de leurs solutions et participe ainsi à la formation du citoyen. Ce n'est pas le recours malheureux aux statistiques qui donne de la rigueur à un discours, mais la précision des faits, des arguments et des raisonnements qu'il expose.

La formation au raisonnement et à la logique devrait être un autre objectif de l'enseignement des mathématiques. Cette formation, comme la formation à la rigueur, déborde l'enseignement des mathématiques. Illustrons l'intérêt de cette formation sur des exemples non mathématiques.

L'enseignement des sciences physiques a été supprimé en 6^{ème} et 5^{ème} par le ministre de l'éducation Jospin. Son conseiller de l'époque déclare maintenant qu'il faut revaloriser l'enseignement des sciences expérimentales dès le primaire. La réforme des lycées, mise en place par M. Jospin, avec notamment la suppression de la série C et la modification des horaires et des coefficients des mathématiques, vient de s'achever en 1994. Or voilà que le même conseiller déclare que le second degré est « le système le plus en panne du pays » et annonce une prochaine réforme des lycées. Une meilleure formation nous permettrait sans doute de mieux comprendre la logique et les raisonnements qui animent ces réformes.

Un autre objectif important de la formation est d'« entraîner les élèves à la **pratique de la démarche scientifique**, en développant conjointement des capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique », tel que le précisent les intentions majeures des actuels programmes officiels de mathématiques de lycée. Mais un spécialiste des sciences de la terre, devenu spécialiste en histoire des sciences puis grand spécialiste des problèmes de l'éducation déclarait : « comme tout est enseigné avec une vision mathématique, de manière logique et dogmatique, on ne développe pas l'esprit d'imagination ni la faculté d'adaptation. »

Et cette observation montrant que la réalité est contraire aux intentions doit nous rendre bien triste, triste s'opposant à allègre comme on l'aura compris.

Richard Cabassut.

HEINRICH WEBER : UN MATHÉMATICIEN Á STRASBOURG, 1895–1913*

Norbert SCHAPPACHER (Strasbourg), Klaus VOLKERT (Heidelberg)

Er ist eine schmiegsame und doch wieder energische Natur und besitzt eine wunderbare Fähigkeit, leicht in ihm zunächst fremde Auffassungen einzudringen, so z.B. in die Riemannsche Funktionentheorie und die Dedekindsche Zahlentheorie. Diese seine Anpassungsfähigkeit hat es ihm ermöglicht, auf fast allen Gebieten unserer Wissenschaft in den letzten Dezennien mitzuarbeiten und die umfassenden Lehrbücher, den Weber – Wellstein, den Riemann – Weber, die Algebra zu schaffen, die wir alle kennen und benutzt haben.

[Klein 1926, 275]

Il est d'une nature flexible et en même temps énergique et il a une capacité merveilleuse de s'appropriier des points de vue qui lui sont a priori étrangers, par exemple la théorie des fonctions à la Riemann et la théorie des nombres à la Dedekind. Cette faculté d'adaptation lui permet de contribuer à presque tous les domaines de notre science durant les dernières décennies et de créer les ouvrages importants que nous connaissons tous et que nous avons tous utilisés, tels le Weber-Wellstein, le Riemann-Weber, l'Algèbre.

[Trad. N. Sch.]

On n'a plus l'habitude aujourd'hui de ces savants qui arrivent à couvrir dans leurs travaux la quasi-totalité des spécialités de leur discipline, et même si les mathématiques à l'époque de l'activité de Heinrich Weber, c'est-à-dire entre 1866 et 1913, n'étaient pas encore aussi riches et ramifiées que maintenant, les mathématiciens universalistes contemporains de Weber se comptent facilement sur les doigts d'une main. Et le plus universaliste de tous, David Hilbert (1862–1943), à la différence de Weber, réalisait ses multiples exploits en découpant sa vie professionnelle en périodes bien séparées, allant jusqu'à oublier ses travaux antérieurs chaque fois qu'il attaquait un nouveau domaine de recherche. De vingt ans plus jeune, Hilbert fut l'un des élèves du professeur Weber à l'Université de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad). Et quand Weber, à l'âge de 53 ans, quitta sa chaire à Göttingen pour venir à Strasbourg en 1895, Hilbert, 33 ans, devint son successeur, et domina bientôt non seulement les mathématiques à Göttingen, mais celles du monde entier. Le rapport entre les deux collègues, bien qu'extrêmement amical, fut donc inversé. Ceci ne s'explique pas par l'âge de Weber. En effet, cette constellation — qui marqua pour beaucoup la période strasbourgeoise de Heinrich Weber, comme on le verra — n'exprime qu'un principe qui semble s'être répété

* Version préliminaire d'une contribution à l'ouvrage collectif "Sciences et cultures — Les trois universités de Strasbourg 1872–1945", en préparation. Tirage: December 3, 1997.

© L'OUVERT 89 (1997)

plusieurs fois dans la vie professionnelle de Weber. Tel le serviteur fidèle et respecté d'une grande maison, il ne manqua ni de zèle, ni d'initiative, ni de succès, ni des meilleures qualités humaines et professionnelles — mais dans chacun de ses grands projets sa contribution se plaça au service, et donc dans l'ombre, d'un collègue ou d'une institution. Ceci peut expliquer le fait que, malgré la très grande richesse et l'importance des travaux de Weber, aucun recueil de ses œuvres n'a jamais été publié.

Parmi tous les mathématiciens allemands du siècle dernier, Heinrich Weber fut celui qui changea le plus souvent de poste [Lorey 1916, 72, note], comme en témoigne le tableau biographique en annexe. Mais malgré toutes ses pérégrinations et malgré le fait qu'il était naturellement un médiateur entre collègues ou écoles divergents, il était plus étroitement associé à deux réseaux de mathématiciens: l'«école de Königsberg» d'une part et les mathématiciens «du Sud de l'Allemagne» de l'autre. Ce dernier groupe se distingue moins par l'origine de ses membres que par son opposition au réseau des mathématiciens prussiens, dirigé jusque dans les années 1880 par les mathématiciens berlinois, en particulier par Karl Weierstrass. Ceci n'empêche pas que Weber fut en même temps l'un des héritiers en matière d'algèbre et de théorie des nombres du mathématicien berlinois Leopold Kronecker, et ce fut Weber qui rédigea l'article nécrologique sur Kronecker pour le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* [45] et les *Mathematische Annalen* [46].¹ Ces *Mathematische Annalen*, fondées sous la direction de Clebsch à Göttingen en 1868, furent le journal mathématique du réseau des «Allemands du Sud» et Weber y collabora comme membre du comité éditorial. Le plus grand héros mathématique de Felix Klein et de son groupe fut Bernhard Riemann. Après la mort subite de Clebsch (successeur de Riemann à Göttingen, et premier leader du groupe) en 1873, ce furent Richard Dedekind et surtout Weber qui prirent en charge l'édition des œuvres de Riemann, en y incluant des parties importantes du *Nachlass* scientifique de Riemann.

Le réseau des «Allemands du Sud» gagna finalement Göttingen, qui tomba définitivement sous le contrôle de Klein à partir de 1892, année décisive du fait du départ de Hermann Amandus Schwarz à Berlin comme successeur de Weierstrass, et de l'arrivée de Marburg à Göttingen de Heinrich Weber. La ville de Göttingen (Hanovre) avait été incorporée à la Prusse en 1866, et devint ainsi vers la fin du siècle, sous la régie d'Althoff dont Klein fut un des conseillers les plus importants, le centre d'une *nouvelle politique prussienne* pour les mathématiques et les sciences naturelles qui reléga Berlin au deuxième plan. Le départ de Weber de Göttingen pour Strasbourg en 1895 peut donc s'interpréter comme la création d'une antenne alsacienne du réseau qui dominait alors les mathématiques en Allemagne.

¹ Les renvois de la forme [**] se rapportent à la liste des publications de Weber donnée en annexe. — Dans son article sur Kronecker, Weber livra ce qui devint par la suite le dictum le plus cité de Kronecker: “Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.” [46, p. 15] (C'est le Bon Dieu qui a créé les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme.) — La bonne relation de Weber avec les berlinois est attestée aussi par le fait que son nom figure à plusieurs reprises sur les listes retenues pour les postes à pourvoir à Berlin, voir [Biermann 1988, pp. 306, 312, 315].

En véritable universaliste, Heinrich Weber noua et suivit de nombreux contacts à Strasbourg, au-delà des cercles mathématiques. Ils sont reflétés dans la *Festschrift*, cette collection très riche et variée d'articles que ses amis lui dédièrent en 1912 et que nous évoquerons vers la fin de cet article. Nous discuterons aussi plus en détail l'ouverture de Weber vers l'enseignement des applications des mathématiques et des mathématiques élémentaires. Deux autres entreprises, tributaires d'idées développées à Göttingen — d'une part sa contribution au programme de recherche sur le douzième problème de Hilbert et en fait la plus grosse partie du troisième tome (1908) de l'*Algèbre* de Weber, et d'autre part le projet de la création d'une faculté technique à l'Université de Strasbourg — ne furent finalement pas couronnées de succès et assombrissent donc le bilan des 18 ans que Weber passa à Strasbourg. Un assombrissement analogue frappa sa vie privée, avec la mort de sa femme en 1902. Sa fille qui s'occupait depuis du ménage, mourait à son tour en 1909.

L'arrivée à Strasbourg.

De multiples raisons personnelles disposèrent Weber à quitter Göttingen pour Strasbourg. Strasbourg est assez voisin de son Heidelberg natal.² Son salaire effectif y était plus élevé qu'à Göttingen au début, surtout parce que les impôts en Alsace étaient en 1895 encore nettement inférieurs à ceux de Prusse.³ Une de ses filles, Lina Weber-Holtzmann, était mariée à Strasbourg.

A son arrivée, Weber fut reçu par une *Kaiser-Wilhelm-Universität* (KWU) qui s'était créée une bonne réputation générale, surtout par le nombre important de jeunes professeurs dynamiques recrutés lors de la première vague au milieu des années 1870. La composition du *Mathematisches Seminar* au début de la KWU avait été faite suivant les conseils de Kronecker. Celui-ci avait proposé à Roggenbach, pour les trois chaires initialement prévues, de contacter les analystes Emil Friedrich Prym et Elwin Bruno Christoffel, ainsi que le géomètre Theodor Reye. Tous les trois avaient collaboré à l'Ecole Polytechnique de Zürich (avant la période zurichoise de Heinrich Weber). Les deux derniers vinrent effectivement à Strasbourg. Avant l'arrivée de Weber, à partir de l'été 1875, le *Mathematisches Seminar* de Strasbourg fut marqué par une tension entre Christoffel et Reye. Christoffel se retira de plus en plus des affaires du séminaire et demanda finalement sa retraite en 1894,⁴ libérant ainsi le poste. Weber semble avoir fait l'unanimité de

² Voir ADBR AL 103, No. 244, 855–858, Math.Nat.Fak. à Kaiserlicher Statthalter, 29/10/1894: "In Göttingen ist er [Weber] schwerlich schon so festgewurzelt, dass er unter günstigen äusseren Verhältnissen nicht gerne nach seinem heimatlichen Süden zurückkehrte." — Ceci est confirmé par NSUG, Klein Nachlass XII, 209, Weber à Klein, Straßburg, 5/5/1895: "Der Frühling ist hier wundervoll und wir übersehen von unserer hohen Warte weithin die Gegend im Blühenschmuck. Das ganze Leben ist leichter und südlicher als in G[öttingen] und ich wünschte nur, noch einige Jahre jünger und genußfähiger zu sein."

³ Voir ADBR AL 103, No. 789, Weber à Kaiserlicher Statthalter, 27/3/1909.

⁴ Corriger l'erreur dans le répertoire [Scharlau 1990, 243] où on trouve 1892. (En 1892, Christoffel se cassa le bras, ce qui lui causa des douleurs persistantes.) — Aussi, dans [Scharlau 1990] ne sont pas non plus mentionnés les professeurs *extraordinarius* Georg Roth (un alsacien), Eugen Netto (1879–1882) et Carl Schering (1882–1889) — voir [Wollmershäuser 1981, 661f].

la *mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät* à Strasbourg pour la succession de Christoffel. A part Reye, Weber trouva comme collègue mathématicien à son arrivée Adolph Krazer, professeur *extraordinarius*, c'est-à-dire sans chaire, élève de Prym.⁵

Les mathématiques, ainsi que l'université en général, étaient très bien équipées à Strasbourg depuis l'ouverture du Palais Universitaire en 1884, tant du point de vue des salles/bureaux, que de la bibliothèque du *Seminar* et de sa collection de maquettes géométriques. On y formait entre 30 et 60 étudiants de mathématiques.⁶ Ceci continua avec la participation de Weber. Ainsi en 1899, quand les mathématiques appliquées devinrent un sujet d'examen reconnu par la *Prüfungsordnung*, les mathématiciens de Strasbourg furent parmi les premiers à se doter d'une salle de dessin dès 1899, faisant écho au développement parallèle à Göttingen.⁷ Le contact entre Weber et Reye semble avoir été cordial.⁸

Pourtant le nouvel appartement des Weber dans la *Goethestraße* était apparemment moins beau que celui qu'ils avaient habité à Göttingen.⁹

Terminons ce paragraphe en décrivant brièvement l'évolution du personnel mathématique à Strasbourg sous l'influence de Weber. Un poste de professeur 'extraordinarius' était occupé par l'alsacien G. Roth, remplacé par J. Wellstein, un élève de Weber, en 1904. A. Krazer fut remplacé en 1902 par Disteli, puis en 1905 par H. Timerding et finalement par Richard von Mises en 1909. Un troisième *Extraordinariat* fut créé pour L. Maurer dans les années 1896/97. En 1903 Max Simon fut nommé *ordentlicher Honorarprofessor* pour l'histoire des mathématiques – voir [Simon 1909] et [Volkert 1994]. Il s'agit là du premier poste de ce type en Allemagne. Comme *Privatdozenten* nous trouvons J. Wellstein, P. Epstein (1903) et

⁵ Pour plus de détails sur l'histoire du *Mathematisches Seminar*, voir [Wollmershäuser 1981] et les dossiers archivaux qu'il cite. Pourtant l'hypothèse [Wollmershäuser 1981, p. 62] selon laquelle la mésentente entre Reye et Christoffel aurait résulté d'un simple malentendu, nous semble peu convaincante. A comparer par exemple avec la remarque, sans doute relative aux travaux mathématiques de Christoffel, que Minkowski fait dans une lettre à Hilbert en 1889: "... daß je weiter sich einer von den Wegen entfernt, auf welchen das Gros wandelt, er um so eher zur Selbstüberschätzung und Verkleinerung anderer Verdienste verleitet wird." [Minkowski 1973, 34]

⁶ Voir [Minkowski 1973, 36] (lettre du 19/6/1889): "In Straßburg sollen sich noch immer ca. 45 Mathematiker vorfinden. Die dortigen mathematischen Collegienzimmer sind wahrhaft opulent eingerichtet." De même NSUG, Klein Nachlass XII, 209, Weber à Klein, Straßburg, 5/5/1895: "Die Vorlesungen habe ich heute vor 8 Tagen angefangen und bin mit der Zahl der Zuhörer ganz zufrieden. In den ausgewählten Capiteln der Functionentheorie habe ich 17 in der Zahlentheorie 15. Wie die Qualität ist, kann ich noch nicht sagen. Das Seminar denke ich erst heute anzufangen. Die Einrichtungen der Universität und die baulichen Verhältnisse sind vorzüglich. Auch das Seminar gut ausgestattet. Ich hoffe aber, daß es mir gelingt, das Vorhandene nach Göttinger Muster auch noch auszunützen. Der min.[?] Curator, Ministerialrath Ham[m] ist mir in Versprechungen sehr entgegengekommen. Hoffentlich hält er auch alles." Pour l'évolution du nombre d'étudiants, voir [Wollmershäuser 1981, 66].

⁷ Voir ADBR AL 103, Nr. 993, Weber, Reye, Krazer au Curator, 25/2/1899. Pour Göttingen voir [Lorey 1916, P. 247]. Voir aussi l'article de Weber [61].

⁸ NSUG, Klein Nachlass XII, 209, Weber à Klein, Straßburg, 5/5/1895: "Reye habe ich mehrmals gesehen und er ist mir immer ein lieber und sympathischer Freund."

⁹ NSUG, Klein Nachlass XII, 209, Weber à Klein, Straßburg, 5/5/1895: "Unsere Wohnung ist mir recht. Freilich Frau und Kinder müssen in dieser Beziehung viel entbehren."

A. Speiser (1911).

Heinrich Weber algébriste.

La création de l'algèbre structurale fut l'un des développements les plus radicaux dans l'histoire des mathématiques entre, disons, 1870 et 1930. Les travaux algébriques de Weber (dont en particulier ses recherches mathématiques les plus importantes de la période strasbourgeoise) se situent non seulement dans cette phase du bouleversement de l'algèbre, mais reflètent en eux-mêmes la transition, voire la recherche d'une nouvelle conception de l'algèbre. D'abord, Weber adopta dans certains articles de recherche l'approche abstraite de Richard Dedekind, le plus 'moderne' des algébristes de la fin du siècle. Ainsi l'article [33] des deux amis Dedekind et Weber n'est rien moins que l'acte fondateur de la géométrie algébrique moderne. Les deux auteurs mettent en place une théorie complète, résolument arithmético-algébrique, des courbes algébriques.¹⁰ De même, partant d'un cours non publié de Dedekind de 1856/57, Weber fut le premier auteur à publier [47] une discussion de la notion abstraite de groupe telle que nous la voyons aujourd'hui (en particulier, sans distinction *a priori* entre les groupes finis et les groupes infinis).¹¹ Mais ces publications de pointe n'entraient pas aussitôt dans la vision de l'algèbre généralement acceptée¹² et Weber lui-même se montre nettement plus conservateur dans son manuel d'algèbre, vraisemblablement pour des raisons pédagogiques. Par exemple, contrairement à son article [47], la notion abstraite de groupe n'est introduite dans le *Lehrbuch der Algebra* qu'au début du deuxième tome. Le premier tome reste plutôt proche des modèles classiques de l'époque, tel le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Camille Jordan (1870). La refonte définitive de la discipline devra attendre le jalon marquant de la *Moderne Algebra* de B. van der Waerden (1930). Tout ceci est connu et a été bien analysé par les historiens.¹³

Le fait que le *Lehrbuch der Algebra* ne se situe pas résolument du côté d'une nouvelle conception de l'algèbre mais porte toutes les marques de la période transitoire, explique en partie sa très grande richesse en résultats qu'on ne retrouve plus

¹⁰ Les idées essentielles de l'article sont toutes dues à Dedekind, mais le texte fut entièrement rédigé par Weber, après correspondance et discussions entre les auteurs. Voir [Geyer 1981], [Strobl 1982], [Ullrich 1997], et [Dieudonné 1974, p. 61]. — Des articles mathématiques rédigés en collaboration sont plutôt rares au 19-ème siècle: il n'y en a que 12 exemples dans le journal de Crelle depuis son début (1826) jusqu'en 1899. On y relève en particulier 2 articles de Rosanes et Pasch, ainsi que 4 de Frobenius et Stickelberger. Dedekind et Weber collaborèrent et se lièrent d'amitié depuis l'édition des œuvres de Riemann.

¹¹ Cet article [47] est un des premiers comptes-rendus de la théorie de Galois publiés en Allemagne. En ce qui concerne la mise en valeur d'une notion abstraite de groupe, il fut précédé de onze ans par la contribution [34] de Weber aux *Mathematische Annalen* 20 (1882), tome qui contient aussi un article de W. Dyck. Ces deux publications de 1882, bien que moins 'modernes' que la discussion de [47] en 1893, représentent elles aussi des étapes importantes vers la notion abstraite de groupe, voir par exemple [v.d. Waerden 1985, pp. 152–154].

¹² [Corry 1996, p. 38] cite pour preuve l'article de Hölder sur la théorie de Galois, dans l'*Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften* de 1898.

¹³ Voir [Kiernan 1971], [Scholz 1990, pp. 394–398], [Corry 1996, pp. 34–45], [Neumann 1997]. La portée de l'article de Dedekind et Weber est reflétée dans les neuf renvois à Heinrich Weber dans l'index de [Bourbaki 1984] qui ne renvoient tous qu'à cet article.

dans les manuels d'algèbre aujourd'hui. Ainsi les trois volumes constituent une formidable "mine de résultats"¹⁴ toujours utiles pour les chercheurs d'aujourd'hui.

Un autre aspect de Weber algébriste, qui marqua sa période strasbourgeoise, est celui de *son rôle dans le programme de recherche du douzième problème de Hilbert, c'est-à-dire dans la théorie de la multiplication complexe, et de ses erreurs*. A peine arrivé à Strasbourg, Weber devait corriger une faute que Frobenius (Berlin) avait relevée dans la première édition du premier tome de son *Algebra*; en même temps il était impatient de se mettre au travail pour le troisième tome dont le point culminant est la multiplication complexe.¹⁵ Ce troisième tome de plus de 700 pages ne parut finalement qu'en 1908. Il représente donc l'œuvre scientifique la plus importante de la période strasbourgeoise de Weber, et est incontestablement une réalisation tout à fait impressionnante de sa vie de chercheur et professeur. Son contenu ne serait plus classé aujourd'hui dans l'algèbre; on y trouve notamment la théorie arithmétique des fonctions elliptiques et fonctions modulaires et la théorie du corps de classes dans son état du début du siècle qu'on doit en grande partie à Weber. Il avait mis au point sa notion de corps de classes pendant ses premières années à Strasbourg.¹⁶

En 1900, pendant la préparation de l'ouvrage, le domaine prit un tournant avec l'énoncé du douzième des 23 problèmes posés par Hilbert dans sa célèbre adresse au Congrès International des Mathématiciens à Paris. Hilbert y conjectura en particulier que toute extension abélienne d'un corps quadratique imaginaire peut être engendrée par des modules singuliers et des racines d'unités, et Hilbert dit que la théorie de la multiplication complexe développée par Weber, combinée avec ses propres théorèmes sur les corps de classes, devrait permettre de démontrer cette conjecture sans difficultés majeures — voir [Schappacher 1996] pour plus de détails. En citant Weber, Hilbert [Hilbert 1901, p. 311] renvoya seulement au livre [3] de 1891 et ne mentionna pas ses articles [56], [57], [60] de 1897–98. Et en 1903 Fueter, élève de Hilbert, travaillant sur le douzième problème, reprit dans sa thèse

¹⁴ Expression utilisée par J.-P. Serre dans une lettre au premier auteur du 16/9/1997. A titre d'exemples, Serre relève la 'Bézoutiante' du tome I (§79), "les sous-groupes finis de GL_2 et GL_3 , en particulier le groupe simple d'ordre 168, cher à Klein" au deuxième tome, et la *Tabelle VI* à la fin du troisième tome (pp. 721ff) donnant les valeurs de certains invariants modulaires — qui "(autant que j'aie pu voir) ... ne contiennent pas d'erreur numérique; un agréable contraste avec des auteurs plus récents ...".

¹⁵ NSUG, Klein Nachlass XII, 209, Weber à Klein, Straßburg, 5/5/1895: "... Dann geht es wieder ans Ausfeilen der Algebra. Frobenius hat mich auf einen Fehler im 1^{ten} Bande aufmerksam gemacht, den ich glücklicherweise noch im zweiten berichtigen kann. Der Beweis der Irreduzibilität der allgemeinen Kreistheilungsgleichung (Ste. 419) ist nicht richtig. Es ist ärgerlich, und gut, daß es noch einigermaßen ausgebessert werden kann. Später freue ich mich, wieder mit erneuten Kräften und erweiterten Kenntnissen ausgestattet, in die Complexe Multiplication zu gehen (Classenkörper)." — Le troisième tome du *Lehrbuch der Algebra* est la seconde édition profondément retravaillée et enrichie du livre [3] de 1891. Notons en passant que la biographie de Weber par Schoeneberg dans le *Dictionary of Scientific Biography* omet cette œuvre complètement — et copie d'ailleurs la date de naissance incorrecte de [Voss 1914].

¹⁶ Voir les articles [56], [57], [60] de 1897–98. La théorie est reprise dans le *Viertes Buch* du tome III du *Lehrbuch der Algebra*. La notion définie par Weber joue sur la décomposition des idéaux premiers dans les corps de classes, formalisée de façon analytique — cf. [Frei 1989, §5].

la partie arithmétique de la théorie du corps de classes de Weber sans le citer, en substituant le mot *Strahl* à ce que Weber avait appelé *Zahlgruppe* — voir la note p. 596 du tome III du *Lehrbuch der Algebra*.¹⁷ Weber à Strasbourg se trouva donc en compétition difficile avec l'équipe de son ami et ancien élève Hilbert à Göttingen. Ayant reçu la thèse de Fueter, il demanda à Hilbert d'être tenu au courant de l'état des travaux à Göttingen sur ce problème. Il est peut-être significatif qu'il ne mentionna point dans cette lettre une thèse qu'il encadrerait au même moment à Strasbourg et qui aurait dû donner une confirmation partielle de la conjecture de Hilbert.¹⁸ Cette concurrence n'était d'ailleurs peut-être pas facilitée par le fait que Hilbert lui-même avait quitté ce terrain de recherche depuis 1900.

La contribution de Weber à la conjecture de Hilbert devrait avoir pour résultat que les *Teilungskörper*, et donc les corps de rayon d'un corps quadratique imaginaire, peuvent être engendrés par des modules singuliers et des racines d'unités.¹⁹ S'il était vrai, ce résultat serait un pas important vers la conjecture de Hilbert. Mais cette conjecture et le résultat envisagé par Weber sont faux. Et en 'démontrant' son résultat, Weber rata sa chance historique de corriger la faute de Hilbert rapidement après l'énoncé du douzième problème. En fait, la fausseté de la conjecture ne fut constatée qu'en 1914, après la mort de Weber, par Fueter (qui avait d'ailleurs lui-même contribué aux erreurs à ce sujet).

L'analyse des faux raisonnements de Weber dans son troisième tome montre tout un dédale d'erreurs, souvent imbriquées l'une dans l'autre, dont la plus sérieuse est peut-être la confusion occasionnelle de deux types de corps bien distincts que Weber appelle tous deux *Teilungskörper* et dénote par le même symbole — voir [Schappacher 1996], avec référence à [Hasse 1926]. On peut rajouter à ceci une grave erreur que Weber avait commise et répétée trois fois ([37], [5, t. II, p. 766, (7)] et [70]) dans ses 'démonstrations' de ce qu'on appelle toujours le "Théorème de Kronecker et Weber" et qui représente le résultat de base du douzième problème de Hilbert — voir [Neumann 1981, pp. 125-26].

¹⁷ Le fait que Fueter ne dit point que son *Strahl* est un groupe, est utilisé dans [Corry 1996, pp. 152–154] comme confirmation de la conception semi-structurale de l'algèbre chez Hilbert. Mais Corry semble ignorer les travaux de Weber. Cette origine de la notion pourrait suggérer une modification de la thèse de Corry.

¹⁸ NSUG, 8° Cod. Ms. philos. 205, 39–40; Weber à Hilbert 4/7/1903: "Lieber Freund! Ich sehe jetzt etwas Licht vor mir in den Arbeiten, die ich nicht ganz nach eigener Neigung übernommen habe, und ich hoffe, in den bevorstehenden Ferien wieder an Dinge gehen zu können, die mich mehr interessieren. Ich möchte mich wieder mit der complexen Multiplikation beschäftigen. Da ich aber ziemlich heraus gekommen bin, so werde ich mich zunächst wieder einarbeiten müssen, und besonders auch mit der seither erschienenen Literatur näher bekannt machen. Mein heutiger Brief hat den Zweck Sie zu bitten mir etwas näher die Arbeiten von Ihnen und Ihren Schülern zu besprechen[?], die für die Theorie des Classenkörpers der quadratischen Körper von Wichtigkeit sind. Sie könnten mir durchaus, wie ich glaube, meine Arbeit wesentlich erleichtern. Ich habe neulich eine Dissertation von Fueter bekommen, die mir nach Titel und Inhalt in dieser Beziehung viel zu versprechen scheint." — La réponse de Hilbert n'est apparemment pas conservée. — La thèse sous la direction de Weber fut celle de Daniel Bauer: *Über den Teilungskörper der elliptischen Funktionen mit singulärem Modul und die zugehörigen Classenkörper*, Strasbourg 1903.

¹⁹ Voir le tome III du *Lehrbuch der Algebra*, p. 620, no. 6. Ceci généralise la thèse de Bauer.

Les mathématiciens ont peur des erreurs, troubles-fête dans la science qui réalise le plus haut standard de rigueur de toutes les disciplines. Mais l'histoire des sciences peut gagner à les étudier. Les multiples fautes dans les travaux arithmético-algébriques de Weber exigent une réflexion sérieuse, même si elle peut difficilement être concluante. Neumann propose, pour l'erreur qu'il considère, une explication par l'insuffisance du formalisme algébrique hérité de Kronecker. Pour ce qui est de la multiplication complexe dans le tome III de l'algèbre, la psychologie de la recherche semble plus adaptée pour élucider cette question. Plus précisément, l'autorité de Hilbert continuait à appuyer la conjecture après son départ de la scène active. Devant cette conjecture Weber se trouvait seul à Strasbourg, en concurrence avec une équipe mal connue mais jeune et dont il fallait craindre la résolution complète du problème, tandis que lui ne pouvait qu'espérer engranger son résultat partiel. . .

Passons maintenant aux *engagements administratifs* que Heinrich Weber assumait à Strasbourg. Heinrich Weber avait l'habitude de prendre de telles responsabilités. Il fut recteur adjoint de l'Université de Königsberg en 1875, recteur de l'Université de Marburg en 1890/91, président de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung en 1895 et en 1904, président du Congrès International des Mathématiciens à Heidelberg en 1904. Et il fut recteur de la KWU Strasbourg en 1900. Le projet administratif le plus ambitieux — et le plus désespéré — auquel Weber participa à Strasbourg était :

Le projet récurrent d'une faculté technique pour la KWU.

Dès 1871, Baron Franz von Roggenbach, 'allemand du Sud' aussi dans le sens de son opposition au chancelier prussien, chargé tout de même par ce dernier de la création de l'université allemande à Strasbourg, envisagea une faculté technique pour rendre l'Université plus attrayante aux yeux de la population locale, supposée peu attirée par l'idéal de la science pure. Mais dès le début aussi cette idée s'avéra trop hardie, tant du côté du système universitaire établi en Allemagne, que du côté de l'acceptation locale — voir [Craig 1984, pp. 64-65].

En 1898, le physicien Ferdinand Braun fut contacté par des industriels de Strasbourg et de Cologne pour évaluer des appareils télégraphiques, ce qui fut le début d'une collaboration qui rappelle, bien que sur une échelle réduite, la fondation, le 26/2/1898 à Göttingen, de la *Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik*, association de sept industriels avec cinq professeurs de l'Université de Göttingen, avec comme *spiritus rector* Felix Klein.²⁰ En fin d'année 1899 le projet de la création d'une faculté technique à la KWU revint à l'ordre du jour. Il fut alors traité par le recteur Theobald Ziegler (philosophe) avec la connivence du *prorecteur* Heinrich Weber et d'autres collègues dont Ferdinand Braun. Weber fut en contact avec Felix Klein et donc guidé dans cette affaire par les projets plus larges de Klein en vue d'une intégration des disciplines techniques

²⁰ Pour Braun voir [Hars 1997], pour la *Göttinger Vereinigung* [Manegold 1970, 168-180].

aux universités allemandes. Comme ces projets allaient à l'encontre des intérêts propres des écoles polytechniques aussi bien que de l'idéologie dominante des professeurs des universités, surtout mais pas uniquement en sciences humaines, il n'est pas surprenant que les ambitions de Klein échouèrent dans un "accord" avec son adversaire Slaby, orchestré par Althoff, à Göttingen en juin 1900 — voir [Manegold 1970, pp. 213–214].

Il n'est donc pas non plus étonnant de voir le *Memorandum für die Errichtung einer sechsten technischen Fakultät an der Kaiser-Wilhelm-Universität zu Straßburg* du 16 janvier 1900 classé rapidement par les instances compétentes à Berlin. C'est moins étonnant encore si l'on pense aux dépenses considérables qu'une telle création aurait engendrées. Toutefois, la question se pose des raisons précises de l'avortement du projet dans ce cas. John Craig [Craig 1984, pp. 141–145] interprète le *Memorandum* avant tout comme une réaction au projet d'établir la théologie catholique à la KWU. Il ne dispose pas de document qui établisse ce lien explicitement, mais il plaide sa thèse avec beaucoup de conviction. Toutefois, même en supposant que le projet de théologie était la motivation principale du *Memorandum*, les activités de Klein ailleurs en Allemagne peuvent au moins expliquer pourquoi les strasbourgeois ont choisi le projet d'une faculté technique pour lutter contre la faculté catholique. A titre d'exemple, peu de temps avant le projet strasbourgeois, Klein avait tenté de jumeler l'école polytechnique de Breslau avec l'université de cette ville.

Plus de dix ans après, le 10/9/1912, le gouvernement du *Reichsland Elsaß-Lothringen* demanda à la KWU de prendre position sur la création éventuelle d'un *Polytechnikum* du *Reichsland*. C'était en fait le parlement du *Reichsland*, le *Landtag*, qui avait adopté dans sa session du 2/4/1912 une motion demandant au gouvernement de lui faire parvenir pour l'année suivante un mémorandum sur la création d'une école polytechnique en Alsace-Lorraine. Originellement il était question d'une école polytechnique à Strasbourg. Là-dessus le débat du *Landtag* fut simple et clair: tout le monde était pour une école polytechnique, les Lorrains la voulaient à Metz, les Alsaciens à Strasbourg.²¹

Nous ignorons les raisons immédiates de cette motion aussi bien que leur suite. De toute façon la guerre de 1914–1918 aurait compromis tous les plans dans cette direction. Ce qui nous intéresse ici est la réponse donnée par la KWU. En novembre 1912 une commission fut formée dont les membres étaient les professeurs Braun, Ehrhard, Ewald, Nowack, Rehm, Sapper, Schur et Thiele. Le 11/12/1912 cette commission reçut un premier texte, rédigé par Thiele en collaboration avec Braun et Schur et après consultation de Heinrich Weber (âgé alors de 70 ans). Ce texte fut essentiellement adopté, hormis quelques modifications mineures et quelques derniers changements rédactionnels faits par Braun.²² Le texte discute deux

²¹ ADBR, AL 103, Nr. 931. Le procès-verbal du *Landtag* est relié dans la liasse; les documents ne respectent d'ailleurs pas toujours l'ordre chronologique.

²² ADBR, AL 103, Nr. 931. On y trouve les versions *A* (la rédaction de Thiele, avec les modifications de la commission) et *B*, le texte définitif.

possibilités de lier une école polytechnique avec la KWU: I) la *lockere Verbindung* (liaison lâche), selon laquelle les étudiants suivent certains cours à l'université, de telle sorte que l'école polytechnique puisse se limiter aux cours propres aux disciplines techniques; II) l'intégration de l'école polytechnique à l'université en tant que faculté technique de la KWU. Pour le modèle I, sont discutés les besoins des disciplines concernées de la KWU.

- Mathématiques: nécessité de créer trois nouveaux postes de professeurs de mathématiques, chacun avec un poste d'assistant, pour l'enseignement des praticiens.
- Physique: agrandissement de l'amphithéâtre, un nouveau poste de professeur *extraordinarius* avec assistant.
- Chimie: elle se vante de sa proximité avec les besoins de l'industrie, si bien que les nouvelles responsabilités vis-à-vis d'une école polytechnique pourraient être assumées à un prix relativement modique; en même temps, on souligne le prix considérable de l'équipement de nouveaux laboratoires de chimie, au cas où on envisagerait de doter l'école polytechnique d'un département de chimie.
- Minéralogie/géologie: les conséquences dépendent de l'existence d'une faculté de métallurgie à l'école polytechnique.
- Economie et matières d'intérêt général: seulement l'agrandissement de salles de cours qui a été réclamé depuis un moment.

Pour le modèle II, on dresse une liste des instituts techniques indispensables et éventuels d'une faculté technique. Puis, le reste du texte se lit comme un véritable enterrement des idées de Felix Klein qui avait toujours voulu intégrer autant que possible l'enseignement technique aux universités: le projet d'une faculté technique ne reviendrait pas moins cher que celui d'une école polytechnique liée à l'université selon le modèle I; mais il impliquerait des désavantages liés surtout à la très grande diversité des disciplines qu'il faudrait accommoder. Finalement, cette dernière partie du texte insiste tellement sur les grands besoins financiers pour la création d'une bonne école polytechnique, capable de faire face à la concurrence avec Karlsruhe, qu'on se demande si les auteurs n'étaient pas carrément hostiles à une école polytechnique à Strasbourg, quelle que soit sa forme.

Heinrich Weber et les mathématiques élémentaires.

La formation des maîtres (des futurs professeurs de lycée) fut au centre d'un grand débat national en Allemagne vers la fin du 19^{ème} siècle — voir [Lorey 1916, 263–276]. Au niveau universitaire cette formation était de nature résolument scientifique; on ne faisait aucune différence entre les étudiants qui voulaient devenir professeurs de lycée et les futurs chercheurs. Par conséquent la formation des maîtres était très abstraite et loin de la pratique de l'enseignement. Felix Klein critiqua cette situation: le débutant à l'université oublie tout ce qu'il a appris au lycée parce que les mathématiques universitaires sont sans lien visible avec les mathématiques scolaires. Ensuite, quand il rentre au lycée comme professeur, il oublie toutes les mathématiques universitaires parce qu'elles ne lui sont plus utiles. De plus, l'absence des applications des mathématiques du curriculum des écoles

(et des universités) fut critiquée au vu des besoins de la nation en ingénieurs et techniciens qualifiés — voir [Klein 1899] et [Mattheis 1994]. Un des mathématiciens qui, comme Klein, P. Stäckel et A. Gutzmer, chercha des remèdes, était Heinrich Weber. Son idée était de créer des cours spécifiques sur les mathématiques élémentaires, c'est-à-dire sur les mathématiques de lycée approfondies, destinés aux futurs professeurs, dispensés en sus des cours habituels. Le premier cours de ce type donné par Weber eut lieu à Gießen en 1888; la tradition fut continuée à Göttingen et à Strasbourg.²³

En 1898 le gouvernement de la Prusse établit les mathématiques appliquées (c'est-à-dire la géométrie descriptive, la géodésie et la mécanique) comme discipline autonome dans la formation des maîtres. Un futur professeur de lycée était désormais obligé d'étudier trois disciplines: les mathématiques pures, les mathématiques appliquées et la physique. Mais il manquait aux universités des enseignants compétents pour les mathématiques appliquées. On finit ainsi par créer des postes de mathématiques appliquées aux universités — sans pour autant y créer des cursus pour futurs ingénieurs. A Strasbourg ce fut un poste de professeur *extraordinarius* occupé par H. Timerding d'abord, et ensuite par R. von Mises.

Le premier tome de l'*Encyclopädie der Elementarmathematik*, écrit par H. Weber lui-même, est consacré à l'arithmétique et à l'algèbre, le deuxième, écrit par Joseph Wellstein, traite la géométrie et le troisième, écrit par le fils Rudolf Weber (alors Privatdozent à Heidelberg, plus tard professeur de physique à l'université de Rostock), s'occupe des mathématiques appliquées. L'idée de l'ouvrage était de rassembler toutes les informations dont un professeur de mathématique a besoin. Beaucoup de soin est consacré aux questions des fondements: par exemple Weber lui-même a créé une théorie élémentaire des ensembles pour y fonder l'idée du nombre. Il s'agit là d'une transformation didactique, en particulier d'idées de Dedekind. Dans le second tome de l'*Encyclopädie der Elementarmathematik* on trouve une longue discussion sur les fondements de la géométrie écrite par Wellstein. A la suite des propositions de Meran (1905) on discuta beaucoup sur l'introduction de l'analyse dans l'enseignement au lycée. En incluant ce thème dans le tome I Weber montra son adhésion aux idées proposées entre autres par Klein.

L'*Encyclopädie der Elementarmathematik* connut un succès considérable; elle fut rééditée quatre fois. L'ouvrage de Weber et Wellstein remplaça les *Éléments de mathématique* de R. Baltzer (parus pour la première fois au début des années 1860) et se trouvait en concurrence avec l'édition allemande (par P. Stäckel) des *Éléments* d'Emile Borel.

Weber se présente ici comme un homme très conscient des besoins de son époque, doté d'un bon sens de la pratique. Ceci devient plus clair si on compare l'*Encyclopädie der Elementarmathematik* avec les cours de Klein (*Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*) qui, en réalité, sont assez éloignés de la pratique

²³ Pour le programme de Weber, voir [65], texte presque identique avec la préface du premier tome de l'*Encyclopädie der Elementarmathematik* [8].

de l'enseignement scolaire. Il faut ajouter que la KWU était la première université allemande à proposer des cours de didactique des mathématiques à ses étudiants. Ces cours étaient assurés par Max Simon, professeur au lycée de Strasbourg (aujourd'hui, lycée Fustel de Coulange) et *Honorary professor* chargé de cours d'histoire de mathématiques. Il est l'auteur d'un livre sur ce sujet [Simon 1909], basé sur ces cours à Strasbourg.

Remarquons en passant que Heinrich Weber participa aussi à la fondation de la grande *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften* publiée depuis 1899 sous la direction de F. Klein et Fr. Meyer. L'origine en était une randonnée de Meyer, Klein et Weber dans le Harz (près de Göttingen) en 1894.

La Festschrift pour Heinrich Weber.

Le 5 mars 1912 Weber fêtait son 70^{ème} anniversaire. Pour cette occasion un groupe d'amis, de collègues et d'élèves compilèrent un recueil d'articles: la *Festschrift*, parue en 1912 (réimprimée par Chelsea en 1971) dont la publication fut offerte par la maison d'édition Teubner à Leipzig (l'éditeur de plusieurs livres de Weber). Parmi les 29 collaborateurs, on trouve des collègues de Strasbourg comme Reye et l'astronome J. Bauschinger (auteur d'ailleurs d'un article dans l'*Encyclopädie der Elementarmathematik*), le physicien R. Gans, le mathématicien appliqué R. von Mises, le géomètre et successeur de Reye Fr. Schur, l'historien des mathématiques Max Simon et l'astronome C. Wirtz, mais aussi des élèves de Weber à Strasbourg comme P. Epstein, A. Speiser, H. Timerding et J. Wellstein. De plus nous y trouvons D. Hilbert, le vieil ami R. Dedekind, H. Hahn et O. Blumenthal, A. Kneser et A. Loewy, E. Study et P. Stäckel, à qui on doit d'ailleurs les commentaires historiques dans l'*Encyclopädie der Elementarmathematik* (dès la deuxième édition). Finalement il y a les physiciens A. Sommerfeld et E.V. Huntington (Cambridge, Mass.). La liste des auteurs est donc impressionnante. Pour des raisons que nous ignorons Felix Klein n'en fait pas partie.

La Fin.

Le 17 mai 1913 s'achève à Strasbourg la vie de Heinrich Weber, peu de temps avant la fin de la KWU. Il n'y eut pas de continuation locale, à Strasbourg, des projets poursuivis par Weber: ni en ce qui concerne la question d'une école polytechnique en Alsace, ni dans son domaine de recherche mathématique, la multiplication complexe. En effet, quand le Congrès International des Mathématiciens se réunit à Strasbourg en 1920, il fut fermé aux mathématiciens allemands (au titre du boycott contre la science allemande après la première guerre mondiale; le premier Congrès International des Mathématiciens avec de nouveau une participation allemande fut celui de Bologne en 1928). Le mathématicien japonais Teiji Takagi, qui avait pendant la guerre complété la théorie du corps de classes et repris, en évitant les erreurs, la partie du troisième tome du *Lehrbuch der Algebra* qui s'occupe du douzième problème de Hilbert, participa au congrès de Strasbourg — et n'y trouva personne capable d'apprécier ses travaux. Des mathématiciens français comme André Weil et Claude Chevalley ne commencèrent pas avant la fin des années

1920 à assimiler et développer les recherches arithmético-algébriques de l'école allemande.

Remerciements. Nous remercions chaleureusement tous ceux qui nous ont aidé dans la préparation de cet article par des documents, indications, commentaires ou critiques, en particulier P. Roquette, D. Rowe et J.-P. Serre.

Curriculum Vitæ de Heinrich Weber

- * 5/3/1842¹ Martin Georg Friedrich Heinrich Weber né à Heidelberg. Père: Dr. Georg Weber, professeur d'histoire et écrivain populaire très connu, '*Lehrbuch der Weltgeschichte*', '*Weltgeschichte in übersichtlicher Darstellung*'
- 1853-1860 lycée de Heidelberg; son professeur de mathématiques: Arthur Arneth, auteur d'une histoire des mathématiques et *Privatdozent* à l'Université de Heidelberg
- 1860 étudiant à l'Université de Heidelberg; cours de Hesse, Bunsen, Kirchhoff et Helmholtz
- 1862, pendant un semestre, étudiant à Leipzig
- 1863 docteur-ès-mathématiques à Heidelberg (sans thèse)
- 1863-1865 séjour à Königsberg; théorie des fonctions et physique mathématique sous la direction de Franz Neumann et F. Richelot; période importante pour le développement mathématique de H.W.
- 1866 habilitation à Heidelberg, thèse proposée par F. Richelot: "*Zur Theorie der regulären Lösungen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*" (no. [1] de la liste des publications, A.3)
- 1866-1869 Privatdozent à Heidelberg
- 1869 professeur "außerordentlich" (c'est-à-dire, sans chaire) à l'Université de Heidelberg
- 1870 professeur "ordinarius" (chaire) à l'Ecole Polytechnique de Zürich (successeur de Dedekind); mariage avec Emilie Dittenberger; au fil des années 7 enfants dont 3 meurent jeunes
- 1875 professeur à l'Université de Königsberg (successeur de Richelot)
- 1883 professeur à l'Ecole Polytechnique de Berlin-Charlottenburg
- 1884 professeur à l'Université de Marburg (successeur de R. Baltzer)
- 1892 professeur à l'Université de Göttingen (successeur de Gauss - Dirichlet - Riemann - Clebsch - Fuchs - H.A. Schwarz)
- 1895 Professeur à l'Université de Strasbourg (successeur de B.E. Christoffel)
- 1901 mort de Emilie Weber, née
- 1902 Doctorat honoré de l'université de Kristiana (centenaire d'Abel)
- 1912 Doctorat d'honneur de la Faculté de Philosophie de Heidelberg
- +17.5.1913 mort à Strasbourg

Positions administratives: recteur adjoint de l'Université de Königsberg (1875), recteur des Universités de Marburg (1891) et de Strasbourg (1900).

Président de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung (1895, 1904), du Congrès International des Mathématiciens, Heidelberg 1904. Membre de la rédaction des *Mathematische Annalen* (1893).

Distinctions scientifiques: Membre des Académies de Göttingen (1875), de Berlin (1896), de Munich (1903), de Stockholm, d'Uppsala et de l'Accademia dei Lincei.

Références, I: Publications de Heinrich Weber

a) Livres, brochures.

[1] *Theorie der Abel'schen Funktionen vom Geschlecht drei* (Berlin, 1876).

¹ [Voss 1914] donne par erreur le 5 mai comme date de naissance. Cette erreur s'est propagée assez loin dans la littérature, par exemple dans [Schoeneberg, DSB].

- [2] Über Causalität in den Naturwissenschaften. Rede, gehalten bei der Übergabe des Prorectorates der Albertus-Universität zu Königsberg (Leipzig, 1871).
- [3] Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Akademische Vorlesungen (Braunschweig, 1891).
- [4] Die Universität Marburg unter preussischer Herrschaft. Festrede zur Einweihung der neuen Aula am 26. Juni 1891 (Marburg, 1891).
- [5] Lehrbuch der Algebra. — Première édition: tome I (Braunschweig, 1895), tome II (Braunschweig, 1896) — Deuxième édition: tome I (Braunschweig, 1898), tome II (Braunschweig, 1899), tome III (= deuxième édition retravaillée et enrichie de [3]) (Braunschweig, 1908).
- [6] Über die Entwicklung unserer mechanischen Naturanschauung im neunzehnten Jahrhundert. Rede zum Antritt des Rectorats der Kaiser-Wilhelms-Universität Straßburg (Strasbourg, 1900).
- [7] Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen. 2 tomes. — Quatrième édition: Braunschweig 1900, 1901. — Cinquième édition dans un volume: Braunschweig 1910. — Les trois éditions antérieures portaient le titre: “Die partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen”, cours de B. Riemann publié par K. Hattendorf (première édition: Braunschweig, 1869).
- [8] Encyclopädie der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. Publié par H. Weber et J. Wellstein. Tome I: Elementare Algebra und Arithmetik, par H. Weber (Leipzig, 1903); tome II: Encyclopädie der elementaren Geometrie, par H. Weber, J. Wellstein et W. Jacobsthal (Leipzig, 1905); tome III: Angewandte Elementarmathematik, par H. Weber, J. Wellstein et R.H. Weber (Leipzig, 1907). Dès la deuxième édition, le tome III fut divisé en deux parties: Mathematische Physik, par R.H. Weber (Leipzig, 1910), et Darstellende Geometrie, graphische Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, politische Arithmetik und Astronomie, par J. Wellstein, H. Weber, H. Bleicher et J. Bauschinger (Leipzig, 1912).
- b) Mémoires:
- [9] Ueber singuläre Auflösungen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **66** (1866), 193–236
- [10] Ueber ein Princip der Abbildung der Theile einer krummen Oberfläche auf eine Ebene, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **67** (1867), 229–247
- [11] Ueber eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **68** (1868), 286–292
- [12] Ueber einige bestimmte Integrale, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **69** (1868), 222–237
- [13] Ueber das Additonstheorem der Abel’sche Functionen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **70** (1869), 193–211
- [14] Zur Theorie der Umkehrung der Abel’schen Integrale, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **70** (1869), 314–345
- [15] Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$, *Mathematische Annalen* **1** (1869), 1–34
- [16] Note zu Riemann’s Beweis des Dirichlet’schen Prinzips, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **71** (1870), 29–39
- [17] Note über ein Problem der Abbildung, *Mathematische Annalen* **2** (1870), 140–142
- [18] Probleme der Wärmeleitung, *Vierteljahrszeitschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich* **16** (1872), 116–124
- [19] Ueber die mehrfachen Gauß’schen Summen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **74** (1872), 14–56
- [20] Ueber die unendlich vielen Formen der θ -Function, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **74** (1872), 57–86
- [21] Ueber die Bessel’schen Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der electrischen Ströme, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **76** (1873), 75–105
- [22] Ueber die stationären Strömungen der Electricität in Cylindern, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **76** (1873), 1–20
- [23] Zur Theorie der Transformation algebraischer Functionen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **76** (1873), 345–348
- [24] Ueber eine Darstellung willkürlicher Functionen durch Bessel’sche Functionen, *Mathematische Annalen* **6** (1873), 146–161
- [25] Neuer Beweis des Abel’schen Theorems, *Mathematische Annalen* **8** (1875), 49–52

- [26] Ueber die Transcendenten zweiter und dritter Gattung bei den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **82** (1877), 131–144
- [27] Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsbreite, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **22** (1877), 71
- [28] Ueber die Transformationen der Theta-Functionen, ins Besondere derer von drei Veränderlichen, *Annali di matematica pura ed applicata* (2) **9** (1878/79), 126–166
- [29] Ueber die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Theta-Functionen mit zwei Veränderlichen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **44** (1878), 332–354
- [30] Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle, *Mathematische Annalen* **13** (1878), 35–47
- [31] Bemerkungen zu der Schrift "Ueber die Abel'schen Functionen vom Geschlecht drei" [Auszug aus einem Schreiben an Herrn Borchardt], *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **88** (1879), 82–84
- [32] Anwendung der Theta-Functionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, *Mathematische Annalen* **14** (1879), 173–206
- [33] avec R. Dedekind: Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **92** (1882), 181–299
- [34] Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist, *Mathematische Annalen* **20** (1882), 301–329
- [35] Ueber die Galois'schen Gruppen der Gleichung 28ten Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen, *Mathematische Annalen* **23** (1884), 489–502
- [36] Zur Theorie der elliptischen Functionen, *Acta Mathematica* **6** (1885), 329–416
- [37] Zur Theorie der Abel'schen Zahlkörper I - III, *Acta Mathematica* **8** (1886), 193–263
- [38] Ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Functionen, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1886), 359–370
- [39] Zur Theorie der Abel'schen Zahlkörper IV, *Acta Mathematica* **9** (1886/87), 105–130
- [40] Zur Theorie der elliptischen Functionen. Zweite Abhandlung, *Acta Mathematica* **11** (1887/88), 330–390
- [41] Zur complexen Multiplikation elliptischer Functionen, *Mathematische Annalen* **33** (1889), 390–409
- [42] Stationäre Ströme der Electricität in Platten, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1889), 93–101
- [43] Paul du Bois-Reymond, *Mathematische Annalen* **35** (1890), 457–460
- [44] Zur Theorie der Bessel'schen Functionen, *Mathematische Annalen* **37** (1890), 404–416
- [45] Leopold Kronecker, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **2** (1892), 185–196
- [46] Leopold Kronecker, *Mathematische Annalen* **43** (1893), 5–31
- [47] Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie, *Mathematische Annalen* **43** (1893), 521–549
- [48] Temperatenausgleich zwischen zwei sich berührenden homogenen Körpern, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1893), 722–730
- [49] Formule de Jordan modifiée par Cayley, *Nouvelles Annales de Mathématiques* **14** (1895)
- [50] Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1896), 275–281
- [51] Zur Theorie der ganzzahligen algebraischen Zahlen; *in: Papers of the Chicago Congress* (Chicago, 1896), 401–407
- [52] Darstellung der Fresnel'schen Wellenfläche durch elliptische Functionen, *Vierteljahrszeitschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich* **41**, 2ième partie (1896), 275–281
- [53] Vier Briefe an Arthur Cayley über elliptische Modulfunctionen, *Mathematische Annalen* **47** (1896), 1–5
- [54] Bemerkungen zu den vorstehenden Briefen, *Mathematische Annalen* **47** (1896), 6–18
- [55] Transcendental numbers, *Bulletin of the American Mathematical Society* (2) **3** (1897), 175–195 [= trad. chap. XXV du Lehrbuch der Algebra, tome I]
- [56] Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern, *Mathematische Annalen* **48** (1897), 433–473
- [57] Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern. Zweite Abhandlung, *Mathematische Annalen* **49** (1897), 83–100
- [58] Differentialgleichungen der elektrolytischen Verschiebung, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1897), 936–946

- [59] Über die Genera in algebraischen Zahlkörpern; *in*: Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August, publiées sous a direction de F. Rudio (Leipzig, 1898), 113–122
- [60] Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern, *Mathematische Annalen* **50** (1898), 1–26
- [61] Wirkung der neuen preussischen Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten auf den Universitätsunterricht, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8** (1899), 95–104
- [62] Komplexe Multiplikation; *in*: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Tome premier en deux parties. Arithmetik und Algebra, publié sous a direction de Wilhelm Franz Meyer. Deuxième partie (Leipzig, 1900–1904), 716–732
- [63] Über Abel's Summation endlicher Differenzen, *Acta Mathematica* **27** (1903), 225–234
- [64] Theorie der reellen quadratischen Irrationalzahlen, *Archiv der Mathematik und Physik* **4** (1903), 193–212
- [65] Die Stellung der Elementarmathematik in der mathematischen Wissenschaft, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **12** (1903), 398–401
- [66] Über komplexe Primzahlen in Linearform, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **129** (1904), 35–62
- [67] Eröffnungsansprache; *in*: Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker Kongresses in Heidelberg vom 8. August bis 13. August 1904, publiées sous a direction de A. Krazer (Leipzig, 1905), 24–30
- [68] Bemerkungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen; *in*: Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker Kongresses in Heidelberg vom 8. August bis 13. August 1904, publiées sous a direction de A. Krazer (Leipzig, 1905), 446–450
- [69] Elementare Mengenlehre, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **15** (1906), 175–184
- [70] Über zyklische Zahlkörper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **132** (1907), 167–188
- [71] Über die Komposition der quadratischen Formen, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1907), 86–100
- [72] Über die Definition des Doppelintegrals, *Acta Mathematica* **15** (1909), 289–294
- [73] Zur Theorie der zyklischen Zahlkörper, *Mathematische Annalen* **67** (1909), 22–60
- [74] Über den Satz vom Modus für krummlinige Lichtstrahlen, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **29** (1910), 396–406
- [75] Über die Gauß'sche Methode zur angenäherten Berechnung von Integralen, *Archiv der Mathematik und Physik* **17** (1911), 113–117
- [76] Zur Theorie der zyklischen Zahlkörper. Zweite Abhandlung, *Mathematische Annalen* **70** (1911), 459–470
- [77] Über die Gibbs'sche Erscheinung bei bestimmten Integralen, *Mathematische Annalen* **73** (1913), 286–288
- [78] avec J. Wellstein: Der Minkowski'sche Satz über die Körperinvariante, *Mathematische Annalen* **73** (1913), 275–284

c) Ouvrages publiés sous a direction de Heinrich Weber:

- [79] Riemann, Bernhard. *Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß* [avec la collaboration de R. Dedekind] (Leipzig, 1876) — Deuxième édition, augmentée par Wissenschaftlicher Nachlaß (M. Noether, W. Wirtinger): Leipzig, 1892
- [80] Jacobi, Carl Gustav Jacob. *Ueber die vierfach periodischen Functionen zweier Veränderlicher*. Traduit par A. Witting, *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* **64** (Leipzig, 1895)
- [81] Rosenhain, Johann Georg. *Abhandlung über die Functionen zweier Variablen mit vier Perioden*. Traduit par A. Witting, *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* **65** (Leipzig, 1895)
- [82] Göpel, Adolph. *Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung*. Traduit par A. Witting, *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* **67** (Leipzig, 1895)
- [83] Lagrange, Joseph Louis. *Zusätze zu Eulers Algebra. Unbestimmte Analysis*. Traduit par A.J. von Oettingen, *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* **103** (Leipzig, 1898)
- [84] Gauß, Carl Friedrich. *Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichtes*. Traduit par R. Weber, *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* **135** (Leipzig, 1903)
- [85] Euler, Leonard. *Opera omnia. Series primum, volumen primum. Vollständige Anleitung zur*

Algebra. Mit den Zusätzen von Joseph Louis Lagrange (Leipzig & Berlin, 1911)

d) Divers:

[86] Anmerkungen und Zusätze; *in*: Henri Poincaré, “Der Wert der Wissenschaft”, traduit par Emilie Weber (Leipzig & Berlin, 1906)

Références, II: Bibliographie générale.

- K.-R. Biermann (1988), Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810 – 1933, Stationen auf dem Wege eines mathematischen Zentrums von Weltgeltung; Akademie-Verlag Berlin.
- N. Bourbaki (1984), *Eléments d’histoire des mathématiques*, Paris (Masson)
- L. Corry (1996), Modern algebra and the rise of mathematical structures; Science Networks, vol 17, Basel, Boston (Birkhäuser)
- J.E. Craig (1984), Scholarship and Nation Building. The Universities of Strasbourg and Alsatian Society 1870–1939, Chicago, London (University of Chicago Press)
- J. Dieudonné (1974), *Cours de géométrie algébrique*, 1. Aperçu historique. . . , Paris (PUF)
- Festschrift (1885) für die 38. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte. Die naturwissenschaftlichen und medicinischen Institute der Universität Straßburg und die naturhistorischen Sammlungen der Stadt Straßburg, Strasbourg
- Festschrift (1912) Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912 gewidmet von Feunden und Schülern, mit dem Bildnis von H. Weber in Heliogravüre und Figuren im Text, Leipzig und Berlin (Teubner), 1912
- G. Frei (1989), Heinrich Weber and the Emergence of Class Field Theory; *in*: Rowe, McCleary (ed.s), *The History of Modern Mathematics*, vol. I: Ideas and their Reception, Proc. Poughkeepsie 1989, Boston etc. (Academic Press); pp. 424–450
- G. Frei (1995), Heinrich Weber (1842–1913); *in*: Die Albertus-Universität zu Königsberg und ihre Professoren, aus Anlaß der Gründung der Albertus-Universität vor 450 Jahren herausgegeben von Dietrich Rauschnig und Donata v. Nerée, Berlin (Duncker & Humblot); pp. 509–520
- J.-P. Friedelmeyer & A. Fuchs (1989), L’activité mathématique à Strasbourg et en Alsace, 1538 à nos jours. *in*: *Les sciences en Alsace 1538–1988*, Strasbourg: Oberlin, 33 - 47
- W.-D. Geyer (1981), Die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen nach Dedekind und Weber; *in*: W. Scharlau (ed.): *Richard Dedekind 1831–1981*, Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag, Braunschweig, Wiesbaden (Vieweg); 109–133
- F. Hars (1997), Ferdinand Braun, manuscrit pour le volume HISA
- H. Hasse (1926), Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, *Jber. DMV* **35**
- D. Hilbert (1901), *Mathematische Probleme*, *Gesammelte Abhandlungen* (2. Auflage), Band III, Berlin - Heidelberg - New York (Springer) 1970, 290–329.
- W. Lorey (1916), *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des neunzehnten Jahrhunderts*, Leipzig & Berlin (Teubner)
- B.M. Kiernan (1971), The development of Galois theory from Lagrange to Artin, *Archive for the History of Exact Sciences* **8**, 40–154
- F. Klein (1899), Über Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **7**, 126 - 138
- F. Klein (1926), *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Teil I, Berlin (Springer)
- K.H. Manegold (1970), *Universität, technische Hochschule und Industrie. Ein Beitrag zur Emanzipation der Technik im 19. Jhd. unter besonderer Berücksichtigung der Bestrebungen Felix Kleins*; *Schriften zur Wirtschafts- und Sozialgeschichte* **16**, Berlin (Duncker & Humblot)
- M. Mattheis (1994), Felix Klein und die Reform des Mathematikunterrichts um die Jahrhundertwende, Staatsexamensarbeit Fachbereich Mathematik Universität Mainz

- H. Minkowski (1973), Briefe an David Hilbert, mit Beiträgen und herausgegeben von L. Rüdtenberg und H. Zassenhaus, Berlin, Heidelberg, New York (Springer)
- O. Neumann (1981), Two proofs of the Kronecker-Weber theorem "according to Kronecker, and Weber", *J. reine angew. Math.* **323**, 105–126
- O. Neumann (1997), Die Entwicklung der Galois-Theorie zwischen Arithmetik und Topologie (1850–1960), *Archive Hist. Exact Sciences* **50**, 291–329
- N. Schappacher (1996), On the History of Hilbert's Twelfth Problem, I; Paris 1900 – Zürich 1932: The Comedy of Errors, preprint
- W. Scharlau (ed.) (1990), Mathematische Institute in Deutschland 1800–1945, *Dok. Gesch. Math.* **5**, Braunschweig (Vieweg); Universität Strasbourg: pp. 242–244
- B. Schoeneberg (DSB), Heinrich Weber, *in*: Dictionary of Scientific Biography.
- E. Scholz (1990), Geschichte der Algebra — Eine Einführung, Mannheim - Wiesbaden (BI - Spektrum Verlag)
- M. Simon (1909), Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte, Berlin: Cassirer
- W. Strobl (1982), Über die Beziehungen zwischen der Dedekindschen Zahlentheorie und der Theorie der algebraischen Funktionen von Dedekind und Weber, *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.* **33**, 225–246
- P. Ullrich (1997), Die Entdeckung der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern: der Ursprung der "Dedeking-Ringe", preprint Münster
- S.G. Vlăduț (1991), Kronecker's Jugendtraum and modular functions; *Studies in the Development of Modern Mathematics*, vol. **2**, New York etc. (Gordon & Breach)
- K. Volkert (1994), Max Simon als Historiker und Didaktiker der Mathematik. *in*: Der Wandel im Lehren und Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften. Tome I. Mathematik, sous la direction de J. Schönbeck, H. Struve et K. Volkert, Weinheim: Deutscher Studien Verlag; 73–88
- A. Voss (1914), Heinrich Weber, *Jber. DMV* **23**, pp. 431–444
- B. van der Waerden (1985), A History of Algebra, from al-Khwārizmī to Emmy Noether, Berlin, Heidelberg etc. (Springer)
- F.R. Wollmershäuser (1981), Das Mathematische Seminar der Universität Straßburg 1872–1900, *in*: Butzer, Féjer (ed.s), E.B. Christoffel, The Influence of his Work on Mathematics and the Physical Sciences; Basel, Boston, Stuttgart (Birkhäuser); 52–70

Références, III: Archives, abréviations.

ADBR — Archives Départementales du Bas-Rhin, Strasbourg.

NSUG — Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen, Handschriftenabteilung.

SUI TE DE FIBONACCI : LE ZERO ET L'INFINI.

par Gérard Kuntz (Irem de Strasbourg)

Introduction.

Les élèves qui travaillent en environnement informatique ont tous rencontré des suites ou des fonctions au comportement étrange : leur limite, calculée par voie théorique, n'est pas celle que suggère la calculatrice¹. Un exemple classique est donné par la suite² définie par $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Sa limite théorique (quand n tend vers l'infini) est e. Sur une calculatrice, les valeurs approchées frôlent e pour basculer brusquement à un. Le phénomène a été suffisamment expliqué : il est inutile d'y revenir. Il peut être intéressant, en revanche, de proposer une situation qui permette de comprendre *en profondeur* la nature des divergences entre les démarches théorique et informatique. La suite de Fibonacci en est un exemple particulièrement remarquable.

Le contexte de l'activité.

Le problème qui suit³ a été traité par les élèves d'une terminale S du lycée Couffignal à Strasbourg, dans le cadre d'activités mathématiques en environnement informatique. Ils ont travaillé en binômes, avec de fréquents allers et retours entre l'expérimentation avec Derive et le raisonnement théorique, comme le texte les y invite. L'enseignant (et son stagiaire) sont intervenus à la demande des élèves : ils ont bien pris soin de ne pas se substituer à eux pour résoudre les questions qui leur étaient soumises, se bornant à reformuler les interrogations, à suggérer des parallèles avec d'autres situations, à renvoyer à certaines parties du cours. L'ensemble du travail a pris, de ce fait, huit heures (quatre séances de deux heures, y compris le compte-rendu d'activité).

¹ Eléments de réflexion sur l'utilisation numériques des calculatrices programmables en Première S et en Terminale C et E. Aline Robert. Repères-Irem n° 11.

² L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a. Gérard Kuntz. Repères Irem n° 11, page 25.

³ Une première forme du problème est due à Nicole Vogel (voir l'article cité en note 2, pages 20 à 22). Mon collègue du lycée Couffignal, Philippe Michel, a rédigé (et testé avec des élèves) les questions 1 à 4. J'y ai ajouté les questions 5 et 6, pour préciser les phénomènes observés.

Texte détaillé de l'activité.

On appelle suite de Fibonacci, toute suite réelle **u** définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. On considère la suite de Fibonacci telle que $u_0=0$ et $u_1=1$.

Déterminer ses 10 premiers termes.

 tablir à l'aide de la fonction *itere* un programme permettant de calculer u_n . (on pourra considérer la suite de vecteurs V_n de coordonnées (u_n, u_{n+1})). Calculer u_{100} .

2. a) Montrer que s'il existe une suite géométrique non nulle qui soit de Fibonacci, alors sa raison q est solution de l'équation : $x^2 = x + 1$.

$$\text{On pose } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

b) a et b étant deux réels fixés, montrer que la suite **v** de terme général $v_n = a\alpha^n + b\beta^n$ est une suite de Fibonacci dont on déterminera les deux premiers termes.

c) Réciproquement, soit **u** une suite de Fibonacci. Montrer que son terme général peut s'écrire : $u_n = a\alpha^n + b\beta^n$. Exprimer a et b en fonction de u_0 et u_1 .

d) Déterminer u_n en fonction de n , dans le cas où $u_0=0$ et $u_1=1$.

e) Montrer que les seules suites de Fibonacci convergentes sont celles dont le terme général peut s'écrire : $u_n = b\beta^n$. Déterminer leur limite.

3. Déterminer une valeur approchée à 10^{-6} près des termes de rang 10, 20, 30, 40 et 100 de la suite de Fibonacci **u** définie par $u_0=1$ et $u_1=\beta$.

Faire de même pour la suite **v** définie par $v_n = \beta^n$. Que constatez-vous?

4. Soit ε un réel non nul de valeur absolue inférieure à 10^{-6} .

x est la suite de Fibonacci définie par $x_0 = 1$ et $x_1 = \beta + \varepsilon$.

y est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\beta + \varepsilon$.

a) Déterminer a et b tels que $x_n = a\alpha^n + b\beta^n$.

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

d) Expliquer alors le phénomène constaté au 3.

5. Refaire l'étude de la question 4. en changeant la valeur de ε (on prendra pour ε les valeurs 10^{-10} , 10^{-50} et 10^{-100}).

6. Calculer la valeur exacte de u_{100} . Calculer une valeur approchée de cette valeur exacte en faisant varier la précision. Expliquer le phénomène observé.

Des préalables d'une grande complexité.

La principale difficulté sur laquelle ont longuement buté les élèves est liée à *la définition de la suite de Fibonacci comme suite récurrente*. Elle est aggravée par la nécessité d'en connaître *deux termes consécutifs* pour calculer le suivant. Cette situation, présentée en cours dans le chapitre sur la récurrence, n'avait pas laissé grand souvenir... Une très longue errance a précédé la résolution de la question **2.c**. La plupart des élèves n'ont pas su traduire la phrase « u est une suite de Fibonacci », puis ont confondu allègrement l'hypothèse (qui leur posait un problème) et la conclusion (il est plus facile de raisonner quand on dispose d'une expression formelle de la suite). L'idée de la récurrence a émergé tardivement. Il a fallu ensuite beaucoup de temps pour que l'hypothèse de récurrence soit correctement formulée (avec deux propositions liées par la conjonction de coordination « et »). Vérifier l'hypothèse de récurrence pour les valeurs initiales n'est pas allé de soi : son expression conduit à un système dans lequel sont mêlés a, b, u_0 et u_1 , nombres au statut flou. Quelles sont les données? Où sont les inconnues? Le fait qu'une hypothèse de récurrence ne soit vraie, pour les premières valeurs de n, que sous certaines conditions (qui garantissent l'unicité de la solution) a produit une perplexité certaine.

Il faut reconnaître que *les difficultés passées en revue sont considérables* : le fait qu'elles semblent avoir été finalement dépassées (si on en croit les comptes-rendus) est très encourageant. Il a été possible alors de passer aux questions 3 et 4, qui mettent en évidence des résultats étonnants que nous allons maintenant décrire et expliquer.

Des divergences troublantes.

Dans la partie **2.c**, le résultat suivant a été démontré : *la suite de Fibonacci de premiers termes u_0 et u_1 est égale à la suite de terme général $u_n = a\alpha^n + b\beta^n$, avec $a = \frac{u_0\beta - u_1}{\beta - \alpha}$,*

$$b = \frac{u_1 - u_0\alpha}{\beta - \alpha}, \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \text{ (Derive calcule a et b sans difficulté).}$$

En particulier, pour $u_0=1$ et $u_1=\beta$, on obtient la suite de Fibonacci définie par $v_n = \beta^n$. On dispose alors de *deux définitions de la même suite*, l'une récurrente, l'autre géométrique de raison β . On pourrait s'attendre à deux séries de valeurs approchées voisines à partir de ces deux points de départ. Il n'en est rien.

Voici les valeurs obtenues avec Derive :

n	u_n	v_n
10	0.008134	0.008130
20	0.000519	0.000066
30	0.055728	0.000001
40	6.85410	$4.3 \cdot 10^{-9}$
100	$2.372 \cdot 10^{13}$	$1.21 \cdot 10^{-21}$

Le comportement de v_n est attendu : cette suite géométrique de raison voisine de -0.6 tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En revanche, u_n n'a vraiment pas l'air d'être égale à v_n : elle semble évoluer vers l'infini avec n , en contradiction totale avec la théorie!

Une explication de nature théorique.

La question 4. fournit la clé d'interprétation d'un phénomène dont les élèves avaient rencontré d'autres manifestations au cours d'activités antérieures. Mais il a été nécessaire, pour qu'ils puissent s'en saisir, de préciser une propriété dont la démonstration dépasse le programme actuel de Terminale : *aucun rationnel, à fortiori aucun décimal, n'est égal à $\sqrt{5}$.*

De ce fait, le nombre ε introduit par l'énoncé a pu prendre sens (cela ne s'est pas fait sans difficultés) : en mode approché, Derive ne connaît pas $\sqrt{5}$. Il utilise *une valeur approchée décimale* de β que l'énoncé note $\beta + \varepsilon$. ε ne saurait être nul (sinon β serait décimal). Il est en valeur absolue inférieur ou égal à 10^{-6} (précision imposée).

Ainsi, à l'insu de l'utilisateur novice, *Derive remplace les suites u et v par deux nouvelles suites : la première, x , est de Fibonacci. Ses deux premiers termes sont 1 et $\beta - \varepsilon$. La seconde, y , est géométrique de raison $\beta - \varepsilon$, toujours voisine de -0.6.*

Pour la suite géométrique, rien de bouleversant. Sa limite est toujours nulle quand n tend vers l'infini. En revanche, le calcul de a et b pour la suite x donne :

$$x_n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \alpha^n + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\right) \beta^n. \text{ A partir de là, les choses s'éclairent. } x \text{ est somme de deux suites}$$

géométriques de raison α et β . La première tend vers l'infini (sa raison est supérieure à un et ε est diff rent de zéro), la seconde a comme limite zéro. Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm \infty$ (ε pourrait être négatif).

Enfin, ce résultat paraît indépendant de la précision : il repose sur le fait que ε est diff rent de zéro. Il restait à vérifier cette affirmation : une nouvelle surprise attendait les élèves.

Et si on augmentait la précision?

Voici le tableau de valeurs (ordre de grandeur de x_n et y_n selon la précision demandée) proposé dans un des comptes-rendus

ε	n	x_n	y_n
10^{-6}	100	$3.5 \cdot 10^{14}$	$1.2 \cdot 10^{-21}$
10^{-6}	150	$9.9 \cdot 10^{24}$	$4.4 \cdot 10^{-32}$
10^{-6}	200	$2.8 \cdot 10^{35}$	$1.5 \cdot 10^{-42}$
10^{-10}	100	$3.5 \cdot 10^{10}$	$1.2 \cdot 10^{-21}$
10^{-10}	150	$9.9 \cdot 10^{20}$	$4.4 \cdot 10^{-32}$
10^{-10}	200	$2.8 \cdot 10^{31}$	$1.5 \cdot 10^{-42}$
10^{-50}	100	$1.2 \cdot 10^{-21}$	$1.2 \cdot 10^{-21}$
10^{-50}	150	$9.6 \cdot 10^{-20}$	$4.4 \cdot 10^{-32}$
10^{-50}	200	$2.7 \cdot 10^{-9}$	$1.5 \cdot 10^{-42}$
10^{-100}	100	$1.2 \cdot 10^{-21}$	$1.2 \cdot 10^{-21}$
10^{-100}	150	$-3.3 \cdot 10^{-21}$	$4.4 \cdot 10^{-32}$
10^{-100}	200	$-9.7 \cdot 10^{11}$	$1.5 \cdot 10^{-42}$

Pour une précision supérieure ou égale à 10^{-50} , les profondes différences entre les valeurs approchées de x_n et y_n disparaissent mystérieusement! Quand n passe de 100 à 150 puis à 200, certaines différences réapparaissent, mais uniquement dans l'ordre de grandeur de ces nombres, tous deux très voisins de zéro.

Les énormes différences avec les valeurs calculées pour de faibles précisions ont beaucoup surpris les élèves malgré leur usage intensif de l'outil informatique. Pour comprendre, il leur fallait retourner vers la théorie, et plus particulièrement vers la forme de x_n :

$$x_n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \alpha^n + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\right) \beta^n.$$

Pour n fixé, l'augmentation de la précision se traduit par une diminution du premier terme de x_n . Quand la précision passe de 10^{-6} à 10^{-50} , ce terme devient négligeable face à la seconde partie de x_n , elle-même voisine de zéro (il est multiplié par 10^{-44} !). Le paradoxe de la partie précédente semble s'être évanoui!

En réalité, *il n'est que masqué*. Si l'on prend des valeurs de n plus grandes, le même phénomène se reproduit, *puisque le premier terme de x_n tend vers l'infini*. Le problème réside dans la capacité des ordinateurs à mener ces calculs à terme. Ceux dont disposaient les élèves ne permettaient pas d'aller, en un temps raisonnable, au-delà des valeurs numériques explorées. *Sur des ordinateurs plus puissants, l'exploration aurait conduit aux mêmes constats, avec simplement des valeurs numériques plus extrêmes*.

Il est d'ailleurs possible de préciser le coût à payer pour faire réapparaître le paradoxe du paragraphe précédent, en fonction de la précision exigée. Des élèves se sont demandés comment rendre x_n supérieur à 1000 (il sera *alors très différent* de y_n). Ils ont résolu

l'inéquation $\alpha^n \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \geq 1000$: elle est vérifiée pour $n \geq \frac{\ln(\frac{1000\sqrt{5}}{\varepsilon})}{\ln\alpha}$. Ainsi par exemple, pour

une précision de 10^{-100} , le résultat est atteint pour $n > 317$; pour une précision de 10^{-1000} , il faut calculer ... 4801 termes! (c'est très au-delà des possibilités d'investigation de nos ordinateurs).

Certains élèves ont parlé « d'une sorte de forme indéterminée » pour expliquer le phénomène. Quand la précision augmente, ε prend des valeurs de plus en plus voisines de 0. Il faut alors, pour mettre en évidence les comportements différents des deux suites x_n et y_n , prendre des valeurs de n de plus en plus grandes. Cette remarque peu orthodoxe (ε et n n'ont pas le même statut) montre néanmoins qu'ils ont compris quelque chose d'essentiel dans ce travail.

Conclusion.

Sur tout ordinateur travaillant en mode approché (aussi puissant soit-il), x_n et y_n connaissent des destins très différents : la première évolue vers l'infini, la seconde vers zéro. Plus la précision de calcul est grande, plus il faut de termes pour mettre la propriété en évidence. Le fait que $\sqrt{5}$ ne soit pas décimal est la raison profonde de cette situation.

Le calcul exact de x_{100} ne présente aucune difficulté pour Derive. L'idée naturelle est de calculer une valeur approchée de ce nombre pour échapper aux difficultés signalées. Mais cette démarche réserve bien des surprises (en fonction de la précision exigée) : nous laissons au lecteur le plaisir de les découvrir et de les interpréter⁴.

Les élèves ont, au travers de cette activité, touché du doigt la grande complexité de l'ensemble des réels. Ils ont compris la nécessité d'en préciser les propriétés. Ils ont constaté, une fois encore, que l'outil informatique ne dispense pas de réfléchir...

⁴ x_{100} est la différence de deux termes très grands et très voisins. C'est une situation où l'outil informatique fournit des résultats approchés très sensibles à ... l'approximation choisie. L'interprétation détaillée des résultats numériques obtenus avec Derive n'est pas simple. Etienne Meyer et Gérard Bétrémieux m'y ont aidé. Je tiens leur contribution à la disposition des lecteurs.

NOMBRES DE FIBONACCI ET PERMUTATIONS

Dominique DUMONT(*)

On appelle permutation sur les trois lettres a, b, c tout “mot” formé de ces trois lettres exactement. Enumérons les permutations sur trois lettres : $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Nous en dénombrons 6. Sur deux lettres il n’y en a que 2 : ab et ba . Combien sur quatre lettres a, b, c, d ? Un mot de quatre lettres tel que $cadb$ s’obtient en insérant la lettre d dans le mot cab , ce qui peut se faire à 4 places différentes et donne $dcab, cdab, cadb$ et $cabd$. Ainsi chaque mot de trois lettres donne naissance à 4 mots de quatre lettres, ce qui donne en tout $6 \cdot 4 = 24$ permutations sur quatre lettres, et puisque $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, on a $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Chacune des 24 donne à son tour naissance à 5 permutations sur 5 lettres, d’où $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ permutations sur 5 lettres, et d’une manière générale le nombre de permutations sur n lettres est égal à $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, entier qu’on note $n!$ et qu’on appelle “factorielle n ”.

Supposons à présent qu’on restreigne ce dénombrement aux permutations satisfaisant la condition suivante : chaque lettre doit se trouver soit à la place qu’elle occupe dans le mot initial $abcd$, soit à une place voisine, immédiatement à gauche ou à droite de cette place initiale. Ainsi nous prenons en compte une permutation telle que $acbd$, mais pas $cabd$... car c se trouve ici trop loin de sa troisième place initiale. Combien a-t-on de permutations de ce type, que nous appellerons des F -permutations?

- sur deux lettres, ab et ba conviennent toutes deux
- sur trois lettres, abc, bac, acb , soit 3 F -permutations
- sur quatre lettres, $abcd, bacd, acbd, abdc, badc$, 5 F -permutations.

Si nous notons F_n le nombre de F -permutations sur n lettres, nous avons donc $F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5$. Nous remarquons que $F_4 = F_3 + F_2$ et nous allons voir que nous aurons de même $F_5 = F_4 + F_3 = 8$. En effet considérons une F -permutation sur les 5 lettres a, b, c, d, e . La lettre se trouve soit en cinquième place soit en quatrième. Si elle se trouve en cinquième place c’est qu’on l’a simplement accolée au bout d’une de nos $F_4 = 5$ permutations sur quatre lettres : $abcde, bacde, acbde, abdce, badce$. Si e se trouve en quatrième place, la seule lettre qui puisse se trouver en cinquième place est d , et on a simplement concaténé (mot technique pour dire “accoler”) le mot ed à l’une des $F_3 = 3$ permutations sur 3 lettres : $abcd, bacd, acbd$. Comme il n’y a pas d’autre possibilité nous avons bien démontré la relation $F_5 = F_4 + F_3$, et notre preuve s’étend évidemment au cas de n lettres, ce qui nous

(*) paru dans Encyclopédie philosophique Article “Combinatoire” PUF
© L’OUVERT 89 (1997)

conduit à la relation de récurrence (R) :

$$(R) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = 1, F_2 = 2$$

Les nombres F_n , s'appellent les nombres de Fibonacci.

Les F -permutations nous conduisent à d'autres identités sur les F_n par exemple à la relation (P) - P comme Pythagore - que voici :

$$(P) \quad F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \quad \text{pour tout } n$$

Examinons par exemple le cas $n = 4$, considérons les F -permutations sur 8 lettres, permutations du mot $abcdefgh$. Pour en fabriquer une, nous pouvons nous contenter de concaténer une F -permutation sur $abcd$ et une F -permutation sur $efgh$. Nous avons $F_4 = 5$ choix pour la première et dans chaque cas autant pour la seconde, ce qui fait en tout $F_4^2 = 25$ F -permutations sur 8 lettres, qui se caractérisent par le fait que les deux groupes de lettres a, b, c, d et e, f, g, h ne sont pas interpénétrés, la quatrième place étant occupée par d ou par c . Il reste le cas où cette quatrième place est occupée par e , et où d occupe alors la cinquième place. Une telle F -permutation sur 8 lettres se fabrique en concaténant une F -permutation de abc , suivie du mot ef , puis d'une F -permutation de fgh . Il y en a donc $F_3^2 = 9$ de ce type. Au total

$$F_8 = F_4^2 + F_3^2 = 25 + 9 = 34$$

Notre démonstration s'étend évidemment au cas de n quelconque. Elle s'étend aussi au cas où l'on concatène des permutations de longueurs inégales, ce qui conduit à d'autres identités analogues, et encore aux cas où l'on concatène plus de deux permutations, ce qui donne lieu à d'autres identités encore. On voit ici que l'interprétation combinatoire d'une suite de nombres entiers permet de trouver des identités sur ces nombres.

Or il existe une toute autre méthode pour trouver des identités, une méthode bien plus classique qui est tout simplement celle du calcul. Considérons par exemple la relation (B) - B comme Bézout - que voici :

$$(B) \quad F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^n \quad \text{pour tout } n$$

Pour démontrer cette identité, il suffit de procéder par récurrence, en vérifiant d'abord qu'elle est vraie pour $n = 2$, et en montrant que si elle est vraie pour $n - 1$ elle est vraie pour n . Si elle est vraie pour $n - 1$ on a :

$$\begin{aligned} F_{n-1}^2 &= F_n F_{n-2} + (-1)^{n-1} \\ F_{n-1}^2 + F_n F_{n-1} &= F_n F_{n-2} + F_n F_{n-1} + (-1)^{n-1} \\ (F_{n-1} + F_n) F_{n-1} &= F_n (F_{n-2} + F_{n-1}) + (-1)^{n-1} \\ F_{n+1} F_{n-1} &= F_n F_n + (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

elle est donc vraie pour n .

Notons en passant que ce que nous venons de faire consiste à vérifier l'identité, bien plus qu'à la trouver, tandis que la méthode combinatoire de concaténation nous avait véritablement conduits à la relation (P) . Nous n'irons pas jusqu'à prétendre que c'est là un phénomène général, et qu'il faut en conséquence préférer la méthode combinatoire. Car on "trouve" aussi des identités par des calculs judicieux.

Il n'en reste pas moins que les deux approches, calculatoire et combinatoire, sont en situation de concurrence, et qu'on est constamment conduit à comparer leurs résultats. Ce faisant, on observe, et c'est paradoxal, que les identités qu'on obtient de façon directe, "naturelle" dans chaque cas, ne sont en général pas les mêmes selon qu'on a utilisé la méthode combinatoire ou la méthode calculatoire. Ainsi, nous pouvons certes obtenir la relation (P) par le calcul et sans combinatoire, mais cela ne se fera pas sans quelque détour et le passage par d'autres identités, alors que la Combinatoire nous l'a fournie directement. A l'inverse, l'identité (B) n'est plus du tout lumineuse lorsqu'on essaie de l'interpréter combinatoirement. Dans un tel cas on est tenté de rechercher une bijection avec une nouvelle classe d'objets permettant de dégager une signification combinatoire de l'identité (B) .

Dans l'étude de beaucoup d'objets combinatoires on est amené à faire intervenir des paramètres supplémentaires. Dans le cas des F -permutations on peut ajouter au paramètre n "nombre des lettres" "le paramètre k -nombre de lettres à leur places". Par exemple sur $abcde$ on a $k = 3$ car trois lettres, a , b , et e sont à leur place initiale. En raffinant le dénombrement de cette manière on obtient le tableau suivant :

k	=	0	1	2	3	4	5	6	7									
F_0	=	1																
F_1	=	1	=	0	+	1												
F_2	=	2	=	1	+	0	+	1										
F_3	=	3	=	0	+	2	+	0	+	1								
F_4	=	5	=	1	+	0	+	3	+	0	+	1						
F_5	=	8	=	0	+	3	+	0	+	4	+	0	+	1				
F_6	=	13	=	1	+	0	+	6	+	0	+	5	+	0	+	1		
F_7	=	21	=	0	+	4	+	0	+	10	+	0	+	6	+	0	+	1

Si nous désignons par F_n^k le coefficient situé sur la n -ième ligne et la k -ième colonne, le nombre de F -permutations ayant n lettres parmi lesquelles k sont à leur place, nous observons la récurrence :

$$(R') \quad F_n^k = F_{n-1}^{k-1} + F_{n-2}^k$$

dont la démonstration est rigoureusement identique à celle de la récurrence (R) ci-dessus. Mais la relation (R') nous permet de comprendre pourquoi notre tableau n'est autre que le célèbre triangle de Pascal réécrit "de travers". On trouve ici le "coefficient binomial" $\binom{n}{k}$, qu'on notait autrefois C_n^k en F_{2n-k}^k .

Extrait du Liber Abbaci de Leonardo Pisano dit Fibonacci (Edition de Baldassarre Boncompagni (Rome 1857)) présentant le célèbre texte sur la multiplication des lapins.

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Qvidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense | geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8; ex quibus paria 5 geminant alia paria 5; quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria 21; cum quibus additis parijs 13, que geminantur in septimo, erunt in ipso paria 34; cum quibus additis parijs 21, que geminantur in octauo mense, erunt in ipso paria 55; cum quibus additis parijs 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria 89; cum quibus additis rursus parijs 55, que geminantur in decimo, erunt in ipso paria 144; cum quibus additis rursus parijs 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria 233. Cum quibus etiam additis parijs 144, que geminantur in ultimo mense, erunt paria 377; et tot paria peperit suprascriptum par in prefato loco in capite unius anni. Potes enim uidere in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, uidelicet 377; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus.

parium
1
primus
2
Secundus
3
tercius
5
Quartus
8
Quintus
13
Sextus
21
Septimus
34
Octauus
55
Nonus
89
Decimus
144
Undecimus
233
Duodecimus
377

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DIOPHANTINNE DU SECOND DEGRÉ

Présentation par Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Dans l'article qui suit, Éric KERN nous propose un algorithme original de résolution de l'équation dite de Pell-Fermat :

$$(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad ; \quad x^2 - Dy^2 = \mp 1 \quad (D \in \mathbb{N}^*, \text{ non carré}),$$

et plus généralement de l'équation diophantienne du second degré :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = R \quad ; \quad A, B, C, R, \text{ entiers.}$$

Cet algorithme reprend en fait un article déjà ancien, publié en 1852 par Scheffler dans le journal de Crelle (*), mais il est considérablement perfectionné et modernisé.

L'attribution de l'équation $x^2 - Dy^2 = +1$ à John Pell (1611-1685) est erronée. Elle est probablement la conséquence d'une confusion due à Euler. C'est Fermat qui le premier a indiqué (en 1657) qu'une telle équation avait une infinité de solutions et affirmé être en possession d'une démonstration par descente infinie, soumettant le problème aux anglais Lord Brounker et Wallis. Mais son origine est beaucoup plus ancienne; il faut la chercher dans la détermination d'approximations rationnelles de \sqrt{D} lorsque D n'est pas un carré parfait. Par exemple Boudhâyana, l'auteur hindou du plus vieux Sulba-Sutra (**), connu donne $\frac{17}{12}$ et $\frac{577}{408}$ comme approximations de $\sqrt{2}$, fractions dont les termes vérifient $17^2 - 2 \times 12^2 = 1$ et $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$.

De façon plus générale, la recherche de x et y vérifiant $x^2 - Dy^2 = 1$ équivaut à la recherche d'un rationnel qui approxime \sqrt{D} car alors on a : $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = D + \frac{1}{y^2}$, de sorte que plus y est grand mieux \sqrt{D} est approché par $\frac{x}{y}$.

Fermat et ses successeurs avaient compris qu'il y avait un lien entre le développement en fraction continue de \sqrt{D} et les solutions de l'équation de Pell-Fermat.

Rappelons que si $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels non nuls, la notation

© L'OUVERT 89 (1997)

(*) Methodus nova aequationem indeterminatam secundi gradus ... Journal de Crelle Tome XLV cahier 4, p. 349 à 369.

(**) Sulba-Sutra : textes sacrés décrivant les règles de constructions des temples et des autels. Ils sont datés environ de l'époque de Pythagore

$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ désigne la fraction

$$r_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}$$

et avec la convention :

$$\begin{aligned} p_{(-1)} &= 1 & ; & & q_{(-1)} &= 0; \\ p_0 &= a_0 & ; & & q_0 &= 1 \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} & \text{pour } n \geq 1 \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} & \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

et alors la fraction $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ est irréductible; $r_{n+1} - r_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$ et la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel positif.

Réciproquement, pour tout $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ il existe une suite unique $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels non nuls a_i telle que $r_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ converge vers x . La fraction r_n s'appelle la réduite d'ordre n de x et a_n le $n^{\text{ième}}$ quotient partiel. Ce vocabulaire s'explique par le fait que a_n et r_n sont obtenus de la manière suivante. On décompose x en

$$x = [x] + \frac{1}{\partial x} \text{ où } \partial x = \frac{1}{x - [x]}$$

et on itère l'opération ∂x qui donne à chaque fois un nombre supérieur à 1, dont la partie entière n'est jamais nulle.

Exemple : $x = \sqrt{41}$; $\partial x = \frac{1}{\sqrt{41}-6} = \frac{1}{5}(\sqrt{41}+6) = 2 + \frac{\sqrt{41}-4}{5} = x_1$ donc $x = [x] + \frac{1}{x_1}$ avec $[x_1] = 2$. Soit $x_2 = \partial x_1 = \frac{5}{\sqrt{41}-4} = \frac{\sqrt{41}+4}{5} = 2 + \frac{\sqrt{41}-6}{5}$ donc

$$x = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{\sqrt{41}-6}{5}}}$$

Soit $x_3 = \partial x_2 = \frac{5}{\sqrt{41}-6} = \sqrt{41} + 6 = 12 + (\sqrt{41} - 6)$ et l'on constate que l'on est revenu au point de départ puisque

$$\partial x_3 = \frac{1}{x_3 - [x_3]} = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = x_1$$

Ainsi, dans ce cas particulier le développement est périodique et on écrit $\sqrt{41} = [6, 2, 2, 12, 2, 2, 12, \dots]$ ou plus simplement $[6, \overline{2, 2, 12}]$.

Lagrange fournira les premiers résultats précis et démontrés (*) sur le développement en fraction continue de \sqrt{D} , en relation avec l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$.

Ces résultats peuvent se résumer ainsi :

1) Le développement en fraction continue d'un réel est périodique si et seulement si ce réel est quadratique, c'est à dire de la forme $a + b\sqrt{r}$ (a, b, r rationnels, \sqrt{r} non rationnel).

2) Soit s la période du développement en fraction continue de \sqrt{D} et $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ ($n \geq 1$) les réduites; alors les solutions de $x^2 - Dy^2 = 1$ sont

$$\begin{cases} x = p_{ns-1}; y = q_{ns-1}, n \geq 1 & \text{si } s \text{ est pair} \\ x = p_{2ns-1}; y = q_{2ns-1}, n \geq 1 & \text{si } s \text{ est impair} \end{cases}$$

Par exemple : pour $x^2 - 41y^2 = 1$, $s = 3$. Et la "plus petite solution" est $x_0 = p_5$; $y_0 = q_5$ avec $\frac{p_5}{q_5} = [6, 2, 2, 12, 2, 2] = \frac{2049}{320}$ soit $x_0 = 2049$, $y_0 = 320$.

Dès que l'on connaît "la plus petite solution" (x_0, y_0) , les autres sont obtenues par les formules de récurrence

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & Dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Le déterminant de T vaut 1, d'où l'importance du groupe unimodulaire $GL(2, \mathbb{Z})$, des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = \mp 1$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$) dans le traitement de ce problème.

Aujourd'hui la résolution de l'équation diophantienne du second degré est traitée au moyen de la théorie des modules ce qui représente un investissement assez lourd (**). L'avantage de l'article d'Eric Kern ci-dessous est qu'il ne nécessite que peu de connaissances théoriques, et se programme aisément avec un logiciel du type MAPLE.

Dans une première partie il met en place les éléments théoriques utilisés et classe les irrationnels au moyen d'une relation d'équivalence traduisant le fait que leur développement en fraction continue est identique à partir d'un certain rang, dans le cas réel. Une relation similaire est définie dans le cas des irrationnels complexes. Dans le prochain numéro il donnera les principes de résolution des équations $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = R$ dans le cas d'un discriminant négatif, et dans une troisième partie le cas du discriminant positif.

(*) Lagrange : Solution d'un problème d'arithmétique, "Miscellanea Taurinensia 1766-1769. Oeuvres, tome I, Gauthier-Villars 1867 pp. 671-718

(**) Cf. par exemple Alain Faisant : L'équation diophantienne du second degré, Hermann Paris 1991

I. GÉNÉRALITÉ SUR LES NOMBRES QUADRATIQUES

Éric KERN

A. Nombres quadratiques

Rappelons que $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$ est appelé **nombre quadratique** si z est racine d'un (unique) polynôme unitaire du second degré à coefficients rationnels.

Il existe alors aussi un polynôme $P(t)$ à coefficients entiers tel que $P(z) = 0$. Ce polynôme n'étant pas unique, nous allons introduire un certain nombre de notions qui permettront d'établir une bijection (canonique) entre les nombres quadratiques et certains de ces polynômes.

Si D est un réel négatif, on posera

$$\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}.$$

Soit $P(t) = At^2 + Bt + C$ un polynôme de degré 2 à coefficients dans \mathbb{Z} . Si $D = B^2 - 4AC$ est le discriminant de $P(t)$ alors

$$\frac{-B + \sqrt{D}}{2A} \quad \text{et} \quad \frac{-B - \sqrt{D}}{2A}$$

s'appellent respectivement la **première** et la **deuxième** racine de $P(t)$.

Ces deux racines (éventuellement confondues si $D = 0$) sont des nombres quadratiques si et seulement si $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$, et on dira alors que $P(t)$ est **irréductible**.

On dira que $P(t)$ est **primitif** si $\text{pgcd}(A, B, C) = 1$.

Il est facile de vérifier que pour tout nombre quadratique ρ , il existe un unique polynôme primitif irréductible $P(t) = At^2 + Bt + C$ à coefficients entiers tel que ρ soit la première racine de $P(t)$.

Ceci fournit la bijection annoncée entre nombres quadratiques et polynômes du second degré à coefficients entiers, irréductibles et primitifs.

On dira simplement que le nombre quadratique ρ et le polynôme $P(t)$ sont associés. Ceci permet bien sûr de parler du discriminant d'un nombre quadratique.

I. GÉNÉRALITÉ SUR LES NOMBRES QUADRATIQUES

Par exemple, $\rho = (3 - \sqrt{5})/7$ est un nombre quadratique (réel) de polynôme associé $P(t) = -49t^2 + 42t + 4$ et de discriminant $D = 980 = 4 \cdot 7^2 \cdot 5$.

Il est immédiat que, sans aucune restriction sur le polynôme à coefficients entiers $P(t) = At^2 + Bt + C$, le discriminant $D = B^2 - 4AC$ vérifie :

$$\begin{aligned} D &= 0 \pmod{4} \text{ si } B \text{ est pair,} \\ D &= 1 \pmod{4} \text{ si } B \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Si $\rho = \alpha + \beta\sqrt{\gamma}$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, est un nombre quadratique, on désignera par $\rho^\sigma = \alpha - \beta\sqrt{\gamma}$ le conjugué de ρ .

On remarquera d'ailleurs que si $P(t)$ est le polynôme associé à ρ , alors $-P(t)$ est le polynôme associé à ρ^σ .

Ceci est en rupture avec les conventions habituelles qui imposent la condition $A > 0$ et qui du coup donnent un même polynôme pour ρ et pour ρ^σ , ce qui fait perdre la bijection entre nombres quadratiques et polynômes!

Pour la suite, une bonne partie de notre exposé reposant sur les propriétés du groupe unimodulaire

$$\text{GL}(2, \mathbb{Z}) = \{T \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det(T) = \pm 1\},$$

précisons en la structure.

B. Structure du groupe unimodulaire

On rappelle que :

$$\begin{aligned} \text{GL}(2, \mathbb{Z}) &= \{T \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det(T) = \pm 1\}, \\ \text{SL}(2, \mathbb{Z}) &= \{T \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det(T) = 1\}. \end{aligned}$$

Si $a \in \mathbb{Z}$, on pose:

$$T(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \text{ et } \Delta(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

On a:

$$\begin{aligned} \Delta(a)\Delta(b) &= \Delta(a+b); & \Delta(a) &= T(a)T(0); & T(0)T(0) &= I \\ T(a)^{-1} &= T(0)T(-a)T(0) = T(0)\Delta(-a) \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= T(-1)T(1)T(-1); & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= T(1)T(-1)T(1); \\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Delta(a); & \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Delta(-a) \end{aligned}$$

$$-I = (T(-1)T(1))^3 = (T(1)T(-1))^3$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} T(a) = \begin{pmatrix} a\alpha + \beta & \alpha \\ a\gamma + \delta & \gamma \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Delta(a) = \begin{pmatrix} \alpha & a\alpha + \beta \\ \gamma & a\gamma + \delta \end{pmatrix}$$

En particulier, si on pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{-1} & p_{-2} \\ q_{-1} & q_{-2} \end{pmatrix}, \quad \text{on a } T(a_0) \cdots T(a_n) = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad 0 \leq k \leq n$$

On reconnaît ici les formules classiques qui donnent les réduites p_n/q_n des fractions continues, généralisées ici au cas où les a_k peuvent être négatifs ou nuls.

Pour simplifier les notations, on posera aussi :

$$T(a_0) \cdots T(a_n) = T(a_0, \dots, a_n).$$

Remarque : (technique de calcul). On se sert des relations utiles suivantes :

$$T(a_0, a_1, \dots, a_r) T(b_0, b_1, \dots, b_s) = T(a_0, a_1, \dots, a_r, b_0, b_1, \dots, b_s)$$

$$T(a_0, a_1, \dots, a_r)^{-1} = T(0, -a_r, \dots, -a_1, -a_0, 0)$$

Ceci évite en général de multiplier entre eux deux grands nombres!

A titre d'exercice on pourra par exemple calculer

$$G = T(11, 12, 11, 13) T(13, 15, 11, 12, 11)^{-1}$$

Quel est (sans calculs) son déterminant ?

Réponse :

$$G = \begin{pmatrix} -5938883 & 77599038 \\ -535868 & 7001795 \end{pmatrix}$$

Théorème de structure :

Tout $T \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ est produit d'un nombre fini (non nul) d'éléments de la forme $T(a)$ avec $a \in \mathbb{Z}$. En outre si $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\gamma \neq 0$, T s'écrit de façon unique sous la forme

$$(*) \quad T = \epsilon \cdot T(a_0, \dots, a_n) \Delta(a)$$

avec $\epsilon = \pm 1, a \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{Z}, a_k \geq 1$ si $1 \leq k \leq n$.

I. GÉNÉRALITÉ SUR LES NOMBRES QUADRATIQUES

Si $\gamma = 0$, on a $\alpha\delta = \pm 1, \delta = \pm 1$ et on a donc soit $T = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \epsilon\Delta(a)$, soit $T = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $\epsilon = \pm 1$. Les relations ci-dessus montrent que T est produit d'un nombre fini non nul d'éléments de la forme $T(a)$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

Supposons désormais $\gamma \neq 0$. Si T vérifie (*), on a $\epsilon = \text{sgn}(\gamma)$ d'où l'unicité de ϵ . Quitte à multiplier T par $\epsilon = \text{sgn}(\gamma)$, on peut désormais supposer $\gamma > 0$.

Supposons d'abord que T vérifie (*) avec $\epsilon = 1$. Posons $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = T(a_0, \dots, a_n)$.

On a donc $T = \begin{pmatrix} p_n & ap_n + p_{n-1} \\ q_n & aq_n + q_{n-1} \end{pmatrix}$ et par suite

$$\alpha = p_n, \gamma = q_n \text{ et on a } \alpha/\gamma = p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n].$$

Or on sait que l'on peut écrire de façon unique (fractions continues)

$$\alpha/\gamma = [b_0, \dots, b_m] \text{ avec } b_k \in \mathbb{Z}, b_k \geq 1 \text{ si } 1 \leq k < m, b_m \geq 2 \text{ si } m \geq 1.$$

On a donc

$$(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_m) \text{ si } (-1)^{m+1} = \det(T) = (-1)^{n+1}$$

et

$$(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_m - 1, 1) \text{ si } (-1)^{m+1} = -\det(T)$$

d'où l'unicité des a_0, \dots, a_n , donc aussi de (*).

Réciproquement, si on définit les a_0, \dots, a_n de la manière ci-dessus et si on pose $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = T(a_0, \dots, a_n)$, on a $\alpha = p_n, \gamma = q_n$ et $\begin{vmatrix} \alpha & p_{n-1} \\ \gamma & q_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ et donc aussi $\begin{vmatrix} \alpha & \beta - p_{n-1} \\ \gamma & \delta - q_{n-1} \end{vmatrix} = 0$; par suite, il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\beta - p_{n-1} = \lambda\alpha, \delta - q_{n-1} = \lambda\gamma.$$

Posons $\lambda = a/s$ avec $s \geq 1$ et $\text{pgcd}(a, s) = 1$. On a $a\alpha/s \in \mathbb{Z}, a\gamma/s \in \mathbb{Z}$ donc $s \mid \alpha$ et $s \mid \gamma$ et par suite $s = 1$ puisque $\text{pgcd}(\alpha, \gamma) = 1$. On a donc bien ici $T = T(a_0, \dots, a_n)\Delta(a)$. \square

C. Sur l'équivalence des irrationnels

Le groupe $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ opère à gauche sur $\mathbb{C} - \mathbb{Q}$ par :

$$G \cdot z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{si } G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$$

En particulier on a :

$$T(a) \cdot z = a + \frac{1}{z}, \quad \Delta(a) \cdot z = a + z$$

Cette opération ainsi que la restriction de l'opération à $SL(2, \mathbb{Z})$ définissent donc de façon naturelle deux relations d'équivalences sur $\mathbb{C} - \mathbb{Q}$, les classes d'équivalences (pour chacune des opérations) étant les orbites.

Lorsqu'on considèrera l'opération avec $SL(2, \mathbb{Z})$ on parlera d'**équivalence stricte**.

Quand un groupe opère sur un ensemble, une des notions importantes est l'étude du stabilisateur d'un élément. Ceci est l'objet du résultat :

Théorème : Soient $\rho \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$ et $G \in GL(2, \mathbb{Z})$. Alors :

- 1) Si ρ n'est pas un nombre quadratique on a $G \cdot \rho = \rho$ si et seulement si $G = \pm I$.
- 2) Si ρ est un nombre quadratique, $P(t) = At^2 + Bt + C$ le polynôme associé, $D = B^2 - 4AC$ son discriminant, alors pour que $G \cdot \rho = \rho$, il faut et il suffit que G soit de la forme

$$G = G(t, u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t - Bu) & -Cu \\ Au & \frac{1}{2}(t + Bu) \end{pmatrix}$$

où $t, u \in \mathbb{Z}$ vérifient l'équation de Pell-Fermat :

$$t^2 - Du^2 = 4\epsilon$$

avec $\epsilon = \pm 1$. On a d'ailleurs $\epsilon = \det(G)$.

On remarquera enfin que, en posant $\alpha = \frac{1}{2}(t - Bu)$, $\gamma = Au$, on a $\alpha - \gamma\rho^\sigma = \frac{1}{2}(t + u\sqrt{D})$, de sorte que l'équation $t^2 - Du^2 = 4\epsilon$ s'écrit aussi :

$$N(\alpha - \gamma\rho^\sigma) = (\alpha - \gamma\rho)(\alpha - \gamma\rho^\sigma) = \epsilon$$

Posons $G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. L'équation $G \cdot \rho = \rho$ s'écrit aussi $\gamma\rho^2 + (\delta - \alpha)\rho - \beta = 0$, donc si ρ n'est pas un nombre quadratique ceci signifie que l'on a $\gamma = \delta - \alpha = \beta = 0$ et $\det(G) = \epsilon$ s'écrit alors $\alpha^2 = \epsilon$ i.e. $\alpha = \pm 1$ (on a $\alpha \in \mathbb{Z}$), autrement dit $G = \pm I$. Si ρ est un nombre quadratique cette équation signifie qu'il existe un $u \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$\gamma = Au, \quad \delta - \alpha = Bu, \quad -\beta = Cu$$

Si on pose $t = \alpha + \delta \in \mathbb{Z}$ on a bien : $\alpha = \frac{1}{2}(t - Bu)$, $\beta = -Cu$, $\gamma = Au$, $\delta = \frac{1}{2}(t + Bu)$ et en écrivant que $\det(G) = \epsilon = \pm 1$ on obtient $t^2 - Du^2 = 4\epsilon$.

Réciproquement, si $t^2 - Du^2 = 4\epsilon$, on vérifie aisément en distinguant deux cas suivant la parité de D i.e. la parité de B , que $\frac{1}{2}(t - Bu) \in \mathbb{Z}$ et $\frac{1}{2}(t + Bu) \in \mathbb{Z}$ et en posant $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t - Bu) & -Cu \\ Au & \frac{1}{2}(t + Bu) \end{pmatrix}$ il est alors trivial de vérifier que

I. GÉNÉRALITÉ SUR LES NOMBRES QUADRATIQUES

$G \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ et que $G \cdot \rho = \rho$.

Enfin à partir de $\rho = \frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$, un calcul simple montre que si $t, u \in \mathbb{Z}$ et si on pose $\alpha = \frac{1}{2}(t - Bu)$, $\gamma = Au$, alors $\alpha - \gamma\rho^\sigma = \frac{1}{2}(t + u\sqrt{D})$, de sorte que l'équation $t^2 - Du^2 = 4\epsilon$ s'écrit aussi $N(\alpha - \gamma\rho^\sigma) = (\alpha - \gamma\rho)(\alpha - \gamma\rho^\sigma) = \epsilon$. \square

Remarque : On vérifiera également que :

$$G(t_1, u_1)G(t_2, u_2) = G(t_3, u_3) \text{ avec } \frac{1}{2}(t_1 + u_1\sqrt{D})\frac{1}{2}(t_2 + u_2\sqrt{D}) = \frac{1}{2}(t_3 + u_3\sqrt{D})$$

soit :

$$t_3 = \frac{1}{2}(t_1t_2 + u_1u_2D), \quad u_3 = \frac{1}{2}(t_1u_2 + t_2u_1)$$

En particulier, si $G = G(t, u)$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $G^n = G(t_n, u_n)$, avec

$$\frac{1}{2}(t_n + u_n\sqrt{D}) = \left(\frac{1}{2}(t + u\sqrt{D})\right)^n$$

Enfin si $G = G(t, u) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et si $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a :

$$x_1 - y_1\rho = (x - y\rho)(\alpha - \gamma\rho) = (x - y\rho)\frac{1}{2}(t - u\sqrt{D})$$

Exercice : Étudions en détail le cas le plus simple, celui des nombres quadratiques imaginaires, c'est à dire le cas $D < 0$. Soit \mathcal{G} le groupe des $G \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ tels que $G \cdot \rho = \rho$.

On est donc amené à résoudre $t^2 + u^2|D| = 4\epsilon$, de sorte que l'on a $\epsilon = 1$, autrement dit on a $\mathcal{G} \subset \text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

• Si $D < -4$, les uniques solutions sont : $(t, u) = \pm(2, 0)$, ce qui correspond à $G = \pm I$.

Sinon, comme D est un discriminant, on ne peut avoir que $D = -4$ ou $D = -3$.

• Si $D = B^2 - 4AC = -4$, les uniques solutions sont : $(t, u) = \pm(2, 0)$ et $(t, u) = \pm(0, 1)$, ce qui donne $\frac{1}{2}(t + u\sqrt{D}) = \pm 1$ et $\frac{1}{2}(t + u\sqrt{D}) = \pm i$, de sorte que \mathcal{G} est un groupe à 4 éléments engendré par $G = G(0, 1) = \begin{pmatrix} -B/2 & -C \\ A & B/2 \end{pmatrix}$.

• Si $D = B^2 - 4AC = -3$, les uniques solutions sont : $(t, u) = \pm(2, 0)$, $(t, u) = \pm(1, 1)$ et $(t, u) = \pm(-1, 1)$, ce qui donne $\frac{1}{2}(t + u\sqrt{D}) = \pm 1$, $\frac{1}{2}(t + u\sqrt{D}) = \pm \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ et $\frac{1}{2}(t + u\sqrt{D}) = \pm \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, de sorte que \mathcal{G} est un groupe à 6 éléments engendré par $G = G(1, 1) = \begin{pmatrix} (1-B)/2 & -C \\ A & (1+B)/2 \end{pmatrix}$.

D. Équivalence des complexes non réels.

On pose $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ et $\Pi_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < 0\}$. On a donc $\mathbb{C} - \mathbb{R} = \Pi_+ \cup \Pi_-$ et un petit calcul montre que si $G \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ et si $z \in \Pi_+$ (resp. $z \in \Pi_-$) alors on a aussi $G \cdot z \in \Pi_+$ (resp. $G \cdot z \in \Pi_-$).

Pour simplifier les définitions on posera : $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} < \Re(z) \leq \frac{1}{2}\}$, ainsi que $\mathcal{B}_+ = \mathcal{B} \cap \Pi_+$ et $\mathcal{B}_- = \mathcal{B} \cap \Pi_-$.

On appellera domaine fondamental la partie \mathcal{F} de Π_+ définie par $z \in \mathcal{F}$ ssi $\Im(z) > 0$, $|z| \geq 1$, $-1/2 < \Re(z) \leq 1/2$, avec en outre $\Re(z) \geq 0$ si $|z| = 1$. On dira qu'un $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ est **réduit** si $z \in \mathcal{F}$ ou si $\bar{z} \in \mathcal{F}$.

On définit $\partial : \mathbb{C} - \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} - \mathbb{R}$ de la manière suivante :

Si z est réduit on pose $\partial z = z$. Sinon il existe un unique $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a - 1/z \in \mathcal{B}$ et on pose alors

$$\partial z = a - \frac{1}{z} \in \mathcal{B}$$

autrement dit on a $\partial z = G \cdot z$ avec $G = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

On remarquera que $\partial \bar{z} = \overline{\partial z}$.

Lemme 1:

Soit $z \in \mathcal{B}_+$ alors :

Si $\Im(z) < 1/2$ on a $\Im(\partial z) > 2\Im(z)$ et si $\Im(z) \geq 1/2$ on a $\partial z \in \mathcal{F}$.

Supposons d'abord $z \in \mathcal{B}_+$, $\Im(z) < 1/2$ et montrons que $\Im(\partial z) > 2\Im(z)$. En posant $z = x + iy$, on a $\Im(\partial z) = y/(x^2 + y^2)$. La condition $\Im(\partial z) > 2\Im(z)$ s'écrit donc aussi $y/(x^2 + y^2) > 2y$, soit $(x^2 + y^2) < 1/2$, vérifiée car $|x| \leq 1/2$ et $|y| < 1/2$.

Supposons maintenant que $z = x + iy \in \mathcal{B}_+$, $\Im(z) = y \geq 1/2$ et $z \notin \mathcal{F}$. Nous allons montrer que $\partial z \in \mathcal{F}$. Comme $z \notin \mathcal{F}$ on a $|z| \leq 1$. Si $|z| = 1$ on a $x < 0$ et $-1/z = -x + iy \in \mathcal{B}$ donc $\partial z = -x + iy$, et comme $-x > 0$, on a bien $\partial z \in \mathcal{F}$ dans ce cas. On peut donc supposer que $|z| < 1$. On a $-1/z = (-x + iy)/(x^2 + y^2)$, donc aussi $|\Re(-1/z)| = |x|/(x^2 + y^2) \leq 4|x|/(4x^2 + 1) \leq 1$ car $(2|x| - 1)^2 \geq 0$. On a donc $\partial z = a - 1/z$ avec $a = 0, 1, -1$. Si $a = 0$ on a $|\partial z| = 1/|z| > 1$ donc $\partial z \in \mathcal{F}$.

Il suffit donc de considérer le cas $a = \epsilon = \pm 1$, de sorte que $\partial z = \frac{(\epsilon x - 1) - iy}{x + iy}$. La condition $|\partial z| \geq 1$ s'écrit simplement $-2\epsilon x + 1 \geq 0$ soit $\epsilon x \leq 1/2$. Comme $z \in \mathcal{B}$ on a $\epsilon x < 1/2$, donc $|\partial z| > 1$, donc $z \in \mathcal{F}$, sauf si $\epsilon = 1$ et $x = 1/2$. Dans ce dernier cas on a $|\partial z| = 1$ et $\Re(\partial z) = (-1/4 + y^2)/(1/4 + y^2) \geq 0$, car $y \geq 1/2$, donc $\partial z \in \mathcal{F}$. \square

Lemme 2:

Soient z, z' deux réduits de $\mathbb{C} - \mathbb{R}$. S'il existe un $G \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ tel que $z' = G \cdot z$,

I. GÉNÉRALITÉ SUR LES NOMBRES QUADRATIQUES

on a $z = z'$. Deux réduits distincts de $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ ne peuvent donc être strictement équivalents.

Posons $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ et $z = x + iy$. On peut supposer que $z, z' \in \mathcal{F}$.

Quitte à échanger z et z' on peut supposer $\Im(z') \geq \Im(z) = y \geq \sqrt{3}/2$ donc, puisque $\Im(z') = \Im(z)/|cz + d|^2$ on a $|cz + d|^2 = (cx + d)^2 + c^2y^2 \leq 1$, donc aussi $\frac{3}{4}c^2 \leq 1$ et ceci n'est possible que si $c = 0, 1, -1$.

Si $c = 0$ on a $ad = 1$ donc $a = d = \pm 1$ et quitte à remplacer G par $-G$, on peut supposer $a = d = 1$. On a alors $z' = z + b$, donc $b = 0$ et par suite $z = z'$.

Si $c = 1$ on a $(x + d)^2 + y^2 \leq 1$ donc aussi $|x + d| \leq 1/2$ (car $y^2 \geq 3/4$) et ceci n'est possible que si $d = 0, 1, -1$ (car $-1/2 < x \leq 1/2$).

- On ne peut avoir $d = 1$ car alors $x + d = x + 1 > 1/2$.
- Si $d = -1$ on a $x + d = x - 1 \leq -1/2$ de sorte que l'on a nécessairement $x = 1/2$ et on a alors aussi $y = \sqrt{3}/2$, donc $z = j + 1$ et comme $-a - b = 1$, on a aussi :

$$z' = \frac{(-b-1)(j+1)+b}{(j+1)-1} = \frac{(b+1)j^2+b}{j} = j + b(j+j^2) = j - b$$

et par suite $b = -1$ et $z' = z$.

- Si $d = 0$ on a $b = -1$ et par suite $z' = a - 1/z$. En outre on a $x^2 + y^2 \leq 1$ donc $|z| = 1$ et $x \geq 0$. On a donc aussi

$$z' = a - 1/z = a - \bar{z} = (a - x) + iy \in \mathcal{F}$$

Comme $1/2 < x \leq 1/2$ et que $-1/2 < a - x \leq 1/2$, ceci n'est possible que si $a = 0, 1$.

Si $a = 0$ on a $z' = -x + iy$ donc $|z'| = |z| = 1$ et alors $x \geq 0$ et $-x \geq 0$, donc $z = iy$ et par suite $y = 1$, donc $z = z' = i$.

Si $a = 1$, on a $x = 1/2$ donc $z' = z$ car :

$$z = 1/2 + i\sqrt{3}/2 = j + 1 = -j^2 \text{ et } z' = 1 - 1/z = 1 + 1/j^2 = 1 + j = z.$$

Si $c = -1$ on se ramène à $c = 1$ en remplaçant G par $-G$. \square

Théorème :

Si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $z_n = \partial^n z$ soit réduit. En outre z_n est alors l'unique réduit de $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ strictement équivalent à z .

Le lemme 1 montre qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $z_n = \partial^n z$ soit un réduit, qui est donc strictement équivalent à z . Le reste est une conséquence du lemme 2. \square

Remarque : le lemme 1 montre en particulier que l'algorithme donne assez rapidement un z_n réduit.

Exemple : Si

$$z = z_0 = \frac{609 + i\sqrt{3}}{62}, \quad z \notin \mathcal{B}_+$$

Éric KERN

$$z_1 = 0 - \frac{1}{z_0} = \frac{-609 + i\sqrt{3}}{5982}, |z_1| < 1$$

$$z_2 = -10 - \frac{1}{z_1} = \frac{-11 + i\sqrt{3}}{62}, |z_2| < 1$$

$$z_3 = -5 - \frac{1}{z_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, |z_3| = 1$$

et z_3 est réduit.

E. Équivalence des irrationnels réels.

On définit maintenant $\partial : \mathbb{R} - \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ par $\partial x = \frac{1}{x - [x]}$, ce qui s'écrit aussi $x = [x] + 1/\partial x$, i.e. $x = T([x]) \cdot (\partial x)$ ou encore $\partial x = T([x])^{-1} \cdot x$. En outre on a $\partial x > 1$.

Si on pose $x_n = \partial^n x$, $a_n = [x_n]$, alors $x = [a_0, a_1, \dots]$ est le développement en fraction continue de x et on a $x_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$ et $x = T(a_0, \dots, a_{n-1}) \cdot x_n$.

Il est clair que $\partial x = \partial y$ si et seulement si $y = x + a$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

Nous allons maintenant donner une autre caractérisation de l'équivalence des irrationnels réels, d'une importance capitale par la suite.

Définition : (Condition de Scheffler)

Soient $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Nous dirons que x et y vérifient la condition S (resp. S_- , resp. S_+) s'il existe $r \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$ tels que : $\partial^r x = \partial^s y$ (resp. $\partial^r x = \partial^s y$ et $r + s$ impair, resp. $\partial^r x = \partial^s y$ et $r + s$ pair). Si $x = [a_0, a_1, \dots]$ et $y = [b_0, b_1, \dots]$ sont les développements en fractions continues de x et de y , la condition $\partial^r x = \partial^s y$ signifie que l'on a $a_{r+p} = b_{s+p}$ pour tout $p \geq 0$. On peut d'ailleurs remarquer que l'on a alors aussi $\partial^{r+t} x = \partial^{s+t} y$ pour tout entier $t \geq 0$.

On vérifie aisément que S et S_+ sont des relations d'équivalence sur $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. En outre si x et y vérifient S_- alors, si y et z vérifient S_- (resp. S_+), alors x et z vérifient S_+ (resp. S_-).

Lemme :

Soient $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $a \in \mathbb{Z}$. Alors :

- 1) x et $a + x$ vérifient S_+
- 2) x et $-x$ vérifient S_-
- 3) x et $1/x$ vérifient S_-
- 4) x et $a + 1/x$ vérifient S_-

La condition 1) est triviale car $a + x = [a + a_0, a_1, \dots]$ et on peut prendre $s = r = 1$. D'autre part on a :

$$-x = [-(a_0 + 1), 1, a_1 - 1, a_2, \dots] \text{ si } a_1 \neq 1, \text{ donc ici } \partial^3(-x) = \partial^2 x$$

$$-x = [-(a_0 + 1), a_2 + 1, a_3, \dots] \text{ si } a_1 = 1, \text{ donc ici } \partial^2(-x) = \partial^3 x$$

et 2) est donc vérifié. Vérifions 3). Supposons d'abord $x > 0$. On a alors :

I. GÉNÉRALITÉ SUR LES NOMBRES QUADRATIQUES

$1/x = [0, a_0, a_1, \dots]$ si $a_0 > 0$, donc ici $\partial^2(1/x) = \partial x$

$1/x = [a_1, a_2, \dots]$ si $a_0 = 0$, donc ici $\partial(1/x) = \partial^2 x$

ce qui vérifie 3) lorsque $x > 0$. Lorsque $x < 0$ la conclusion résulte de ce qui précède et de $1/x = -1/(-x)$. Enfin 4) est alors une conséquence de 1) et de 3).

Théorème : Soient $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ pour que x et y vérifient la condition S (resp. S_- , resp. S_+) il faut et il suffit qu'il existe $G \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ (resp. $G \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ et $\det(G) = -1$, resp. $G \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$) tel que $y = G \cdot x$.

Tout d'abord remarquons que si $x_r = \partial^r x = \partial^s y = y_s$, on a $x = T(a_0, \dots, a_{r-1}) \cdot x_r$ et $y = T(b_0, \dots, b_{s-1}) \cdot y_s$ et par suite aussi $y = T(b_0, \dots, b_{s-1})T(a_0, \dots, a_{r-1})^{-1} \cdot x = G \cdot x$ et $\det(G) = (-1)^{(r+s)}$, la condition est donc nécessaire.

Réciproquement soit $G \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ (resp. $G \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ avec $\det(G) = -1$, resp. $G \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$) avec $y = G \cdot x$ et montrons que x et y vérifient la condition S (resp. S_- , resp. S_+).

Comme tout élément de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ est produit d'éléments de la forme $T(a)$ avec $a \in \mathbb{Z}$, la réciproque est alors une conclusion immédiate de 4) du lemme précédent.

□

Remarque : nous verrons comment cette condition d'équivalence, facile à tester pour les nombres quadratiques réels, ainsi que la façon qui permet de construire des stabilisateurs non triviaux peut être considérée comme un des piliers dans le succès de la résolution de l'équation de Pell-Fermat.

Corollaire :

Soit $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Pour qu'il existe un $G \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ avec $\det(G) = -1$ tel que $G \cdot x = x$ il faut et il suffit que le développement en fraction continue de x soit périodique à partir d'un certain rang, avec une période impaire.

En effet d'après ce qui précède la condition demandée sur x signifie qu'il existe $n \geq 0$ et $p \geq 1$ impair tel que $a_m = a_{m+p}$ si $m \geq n$ ce qui démontre le résultat.

RENCONTRE REGIONALE DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

organisée par l'APMEP

Dans l'après-midi du samedi 22 mars 1997, une cinquantaine de professeurs de mathématiques se sont réunis au lycée Jean-Baptiste Schwilgué, de Sélestat. La rencontre a débuté par une conférence historique de Jean-Pierre Friedelmeyer sur les probabilités et s'est poursuivie par trois ateliers parallèles dont le compte rendu suit. Puis une assemblée générale adoptait de nouveaux statuts et discutait de la politique de la régionale.

ATELIER LYCEES PROFESSIONNELS.

par Jean-Claude SACHET,
responsable du secteur lycées professionnels
au bureau national de l'APMEP.

L'objectif principal de cet atelier était de présenter les travaux et les réflexions menées par l'APMEP au niveau national sur ce thème.

L'atelier a consacré une grande partie de son temps à présenter et à commenter les nouveaux programmes de mathématiques en baccalauréat professionnel qui sont entrés en vigueur à la rentrée 1996 pour les premières et en septembre 1997 pour les terminales.

La présentation du tronc commun et des différents chapitres spécifiques a été détaillée à la demande des participants. Il est apparu que ceux-ci manquaient d'informations à ce sujet et étaient très demandeurs. La répartition des éléments du programme en fonction des différentes spécialités professionnelles de bac. professionnel a été commentée. Les différentes réflexions de la commission nationale Lycées Professionnels de l'APMEP ont été ajoutées avec le souhait que ce type de travail se développe également au niveau régional de l'association.

La deuxième partie de la rencontre a été consacrée à la présentation des brochures réalisées par l'APMEP pour les collègues de lycées professionnels : recueils de sujets classés en BEP et bac. professionnel par thèmes professionnels. Les participants ont souhaité être mieux informés sur les brochures à venir. Notons à ce sujet que fin 1997 paraîtront deux nouvelles brochures, l'une sur les sujets de BEP tertiaires et l'autre sur le Diplôme National du Brevet séries Technologiques et Professionnelles. Bien lire le Bulletin Grande Vitesse (BGV) de l'APMEP qui annoncera leur parution.

La fin de cette rencontre a été consacrée à la présentation des travaux menés par l'APMEP pour l'évaluation des programmes de BEP (EVAPM LP) : le cahier des exercices proposés aux élèves a été présenté et les principales analyses sur les résultats de cette évaluation ont été commentées.

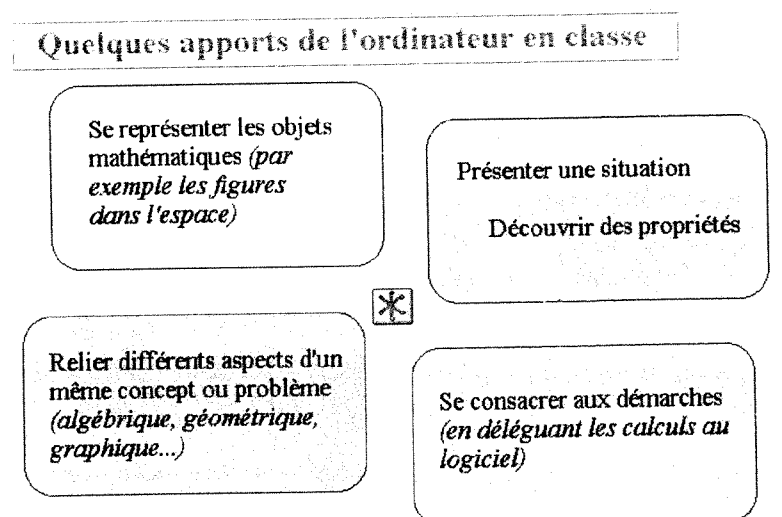
Un appel a été lancé pour qu'en Alsace se forme un groupe APMEP réfléchissant aux questions concernant l'enseignement des mathématiques en lycées professionnels, un rapprochement avec le groupe similaire existant en Lorraine pouvant être une première approche.

DES OUTILS INFORMATIQUES POUR DIVERSES SITUATIONS MATHÉMATIQUES

par Jacques OURLIAC,
collège Jean de la Fontaine, Geispolsheim.
Jourliac@ac-strasbourg.fr

L'objectif de l'atelier est de faire un tour rapide sur les apports des nouvelles technologies à l'enseignement des mathématiques. Pour cela, depuis peu, la DISTNB¹ a envoyé dans les Académies un ensemble d'outils sur Cédérom qui œuvrent dans ce sens.

Ces thèmes sont abondamment illustrés par des exemples de situations concrètes. Observons en quelques uns.



Au collège la géométrie, et en particulier dans l'espace, s'appuie sur la visualisation de figures. Depuis près de dix ans de nombreux logiciels de construction géométrique ont été développés.

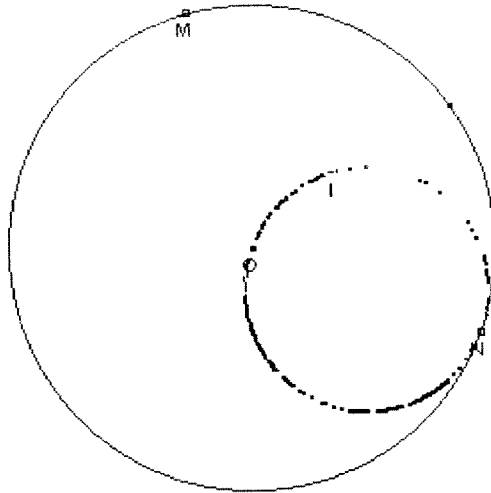
Il n'est pas question de dire quel est le meilleur² logiciel ; comme pour un manuel chaque enseignant, chaque équipe fera son choix. Mais certaines fonctionnalités me paraissent pédagogiquement intéressantes :

- l'historique d'une construction,
- l'animation automatique d'une figure (comme une vidéo),
- l'observation des lieux, et celle de l'évolution des figures...

¹ Direction de l'Information scientifique, des Technologies Nouvelles et des Bibliothèques

² La liste des divers logiciels figure sur le CD et sur le serveur Internet

Prenons l'exemple en 4^{ème} de l'ensemble des milieux I d'une corde [MN] d'un cercle lorsque la corde pivote autour de N. L'image ci-dessous est issue de cette « vidéo » que l'on peut passer aux élèves sans se préoccuper de l'outil (informatique ici). Cette même image sera intégrée facilement au sein d'un document...



Depuis longtemps l'informatique est coûteuse en temps et le restera encore, mais au plaisir de voir l'étonnement de nos élèves face au multimédia en géométrie s'ajoute la facilité de réalisation ! D'ailleurs peut-on parler ici de multimédia (son, images animées) ? Pas vraiment mais sur le CD précédemment cité des ouvertures intéressantes sont faites :



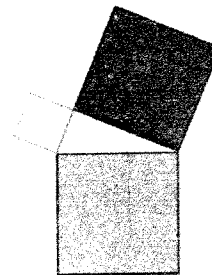
GEOFLASH

La géométrie qui saute aux yeux

[Présentation de la version d'évaluation d'avril 1996](#)

[Triangles rectangles...](#)

[Thalès ...](#)

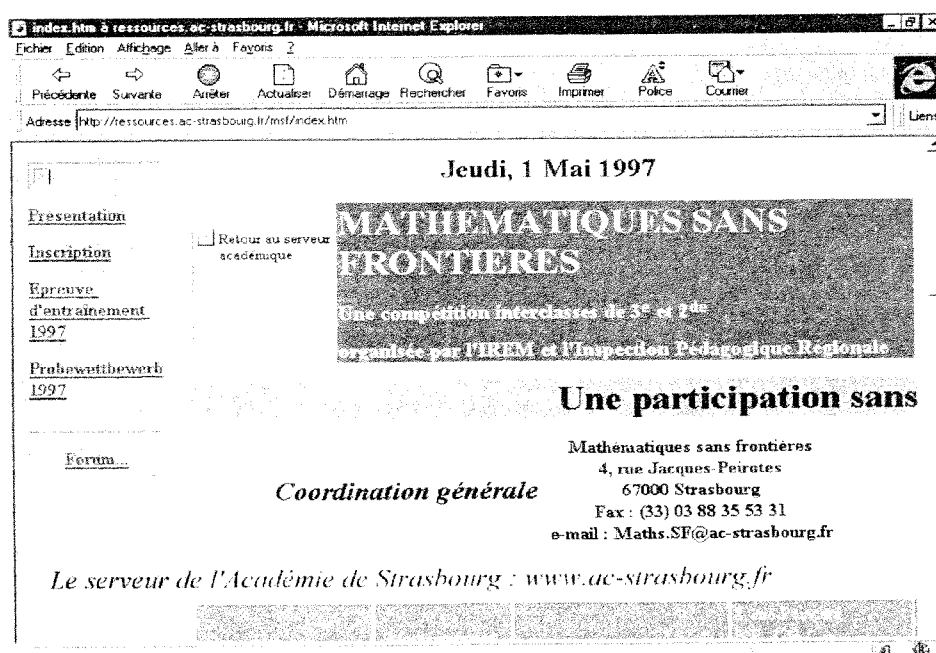


Sélection : le point C sur le cercle CEP Angle : 135°

Avec cette encyclopédie et l'outil de création qui va avec, nous pouvons rêver de films mathématiques qui pourraient passionner nos élèves sur les réseaux informatiques de l'établissement, sur Internet...

Vous avez dit Internet ? C'est la mode ! Pas seulement.

L'Académie de Strasbourg³ s'est engagée dans cette aventure (mathématiques sans frontières en est un élément) mais le ministère de l'éducation nationale aussi et une grande partie des éléments du CD support de cet atelier est disponible en ligne pour tous. Pour conclure on ne peut qu'inviter chacun à découvrir et à partager les immenses ressources de ce réseau.



³ www.ac-strasbourg.fr

UNE ALTERNATIVE POUR UN ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR

Abdenacer MAKHLOUF
Université de Haute Alsace
N.Makhlouf@univ-mulhouse.fr

L'ensemble des professeurs s'accorde à souligner la difficulté à enseigner l'Analyse au Lycée dans son état actuel. On est souvent partagé pour introduire les limites entre une approche numérique sous forme d'activités et un énoncé d'une suite d'axiomes dont le champ d'action est limité ou bien une présentation formelle «epsilon-deltaïque» bien éloignée de la perception intuitive et trop abstraite pour des élèves dont les niveaux en mathématiques sont très hétérogènes. L'objectif de cet exposé est la présentation d'une alternative à l'enseignement de l'Analyse au lycée basée sur l'introduction en mathématique de la notion de grandeur, ce qui va réconcilier les mathématiques intuitives et les mathématiques formelles. Les fondements de cette approche sont contenus dans la brochure APMEP N°103: «*Fondement pour un enseignement de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur : les réels dévoilés*» par R.Lutz, A.Makhlouf et E. Meyer.

Cette alternative reprend d'une certaine manière les idées de G.W. Leibniz et I. Newton au 17^{ème} siècle et défendues par de nombreux mathématiciens du 18^{ème} siècle dont la famille Bernoulli, le marquis de l'Hospital, Euler, D'Alembert...

Par souci de rigueur en mathématique, les infinitésimaux, dépourvus de fondement logique, sont tombés en désuétude et la notion de limite a trouvé une définition en termes de majorations. Cette définition, irréprochable sur le plan de la logique, est peu conforme à l'idée intuitive et conduit par ailleurs à des raisonnements contravariants⁴. Les infinitésimaux sont réhabilités par le logicien A. Robinson (1960) dans un cadre appelé «*Analyse non standard*» et formalisés ensuite par E.Nelson (1977), il s'agit d'une extension de la théorie de Zermelo et Fraenkel en adjoignant le prédicat *standard* et trois axiomes qui le régissent. Les idées infinitésimales fécondes dans de nombreux domaines de la recherche mathématique appelaient une application didactique. A cet effet, un cadre élémentaire, inspiré de l'Analyse non standard avec un vocabulaire plus approprié, est présenté dans la brochure précitée.

L'introduction des ordres de grandeur dans l'ensemble des entiers s'effectue à peu de frais. On se place dans le cadre mathématique habituel et on rajoute au langage le prédicat (adjectif) *entier modéré* avec les quatre axiomes suivants :

- *l'entier naturel 1 est modéré.*
- *La somme et le produit de deux entiers modérés sont modérés.*
- *Tout entier inférieur à un entier modéré est modéré.*
- *Il existe dans l'ensemble des entiers naturels un nombre entier non modéré appelé entier très grand...*

⁴ Un raisonnement covariant est un raisonnement direct, comme en algèbre ; il consiste en une succession d'assertions déduites l'une de l'autre. En revanche, dans un raisonnement contravariant, on commence par la fin pour déterminer une stratégie gagnante.

Cette extension, appelée $ZF+$, enrichit le concept de nombre entier et permet d'étendre, de façon naturelle, la notion d'ordre de grandeur à l'ensemble des nombres réels. On définit un *réel modéré* comme un réel dont la partie entière est modérée, un réel est *très grand* si sa partie entière est très grande. Parmi les réels modérés, les *réels très petits* ou *infinitésimaux* sont ceux dont l'inverse est un réel très grand. L'arithmétique sur ces nombres est fidèle à l'intuition.

On définit à l'aide des infinitésimaux la *notion de proximité* qui est fondamentale pour l'Analyse. On dit que deux réels sont *très proches* si leur différence est un réel très petit. On en déduit de nombreuses règles d'approximation qui sont très simples à élaborer et à démontrer. Ce premier niveau d'extension permet de réhabiliter l'aspect numérique de l'Analyse. Un travail sur la nature d'expressions algébriques dépendantes d'un nombre x très grand ou très petit ou très proche d'un nombre donné r permet de faire de l'Analyse sur les nombres et prépare ainsi l'élève à un apprentissage plus facile des différents concepts de l'Analyse.

Un exemple significatif est de démontrer, à l'aide de manipulations algébriques sur les nombres, que si $z = \sqrt[3]{1+x}$ où x est un nombre très petit alors $z = 1 + \frac{x}{3}(1+t)$ où t est un nombre très petit. Un expert verrait un développement limité mais le traitement qu'on fait est exclusivement numérique, on ignore complètement la notion de fonction et de dérivée. Le cadre avec les ordres de grandeur $ZF+$ est insuffisant pour établir une définition de la limite équivalente à la définition classique. Un second niveau d'extension est par conséquent nécessaire.

Le second niveau d'extension, appelé ZFE , s'obtient en adjoignant, à la théorie classique de Zermelo et Fraenkel (avec l'axiome du choix), le prédicat *bien déterminé* avec trois axiomes le régissant. L'extension $ZF+$ en est un sous produit. On retrouve naturellement les ordres de grandeur et toute l'analyse approximative qui vont permettre de définir et de communiquer plus facilement les idées fondamentales de l'Analyse. Ainsi, la définition de limite est établie telle que nous la suggère l'intuition : la limite d'une fonction f quand x tend vers a est le réel bien déterminé l tel que pour tout x très proche de a , $f(x)$ est très proche de l . Les théorèmes classiques de l'Analyse (théorème des valeurs intermédiaires, toute fonction continue sur un intervalle fermé est bornée, toute suite croissante et majorée est convergente...) possèdent dans ce cadre des démonstrations d'un type nouveau accessibles à un élève de lycée. Ce calcul infinitésimal par sa fidélité à la perception intuitive facilite et développe chez l'élève l'art de raisonner et d'inventer.

La pédagogie de cette approche reste à élaborer. Des groupes IREM sont mis en place en Alsace et en Picardie pour réaliser des documents et mener des expérimentations. Les âmes sensibles et désireuses de participer au débat et à la construction d'un nouvel enseignement de l'Analyse sont invitées à nous rejoindre.

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Connaître la personnalité des mathématiciens célèbres n'est pas chose aisée. Leur oeuvre publiée a gommé toute trace d'émotion et de sentiment pour présenter les résultats mathématiques dans toute leur rigueur et leur vérité. Vérité souvent très belle sans doute et admirable, "honneur de l'esprit humain", mais abstraite et froide, figée dans son éternité comme un ciel étoilé par une nuit d'hiver glacée. Ce qui en a éloigné plus d'un, curieux de sciences mais rebuté par son aridité. A tort : les lettres écrites par les mathématiciens à leurs amis ou collègues nous révèlent des personnalités sensibles et passionnées, essayant de résoudre au mieux, non seulement les problèmes scientifiques qu'ils se sont posés mais aussi les mille et un tracas de leur vie quotidienne et les difficultés causées par les événements politiques et sociaux. Cette rubrique vous présente des lettres, ou de larges extraits que nous pensons représentatifs et révélateurs de la personnalité profonde, mais quelquefois méconnue, de nos illustres savants. Dans ce numéro :

Gauss et la géométrie non euclidienne; correspondance avec Farkas Bolyai.

Gauss pouvait avoir quelque chose d'irritant pour un jeune mathématicien contemporain : ce dernier n'étant jamais sûr que sa propre découverte n'avait pas déjà été pressentie, voire annoncée ici ou là dans la correspondance du "Mathematicorum Princeps"; ceci en toute simplicité, sans malice, mais qui n'empêchait pas de meurtrir le jeune débutant. C'est ce qui s'est passé avec la géométrie non euclidienne et les deux Bolyai, Farkas le père, Janos son fils.

Né dans une famille noble de Hongrie en 1775, Wolfgang (*) Bolyai von Bolya raconte sa rencontre avec Gauss à Göttingen en automne 1796 :(**) *"J'y fis alors la connaissance de Gauss qui y étudiait [depuis l'automne de 1795], et dont je suis encore aujourd'hui l'ami, mais combien loin de pouvoir me comparer à lui. Il était très modeste et très réservé : ce n'est pas trois jours, comme avec Platon, mais pendant des années, qu'on eût pu vivre avec lui sans reconnaître combien il était grand. Quel malheur pour moi de n'avoir pas su ouvrir et lire ce livre sans titre et muet, je n'avais pas idée de l'étendue de son savoir, et lui, en voyant mes goûts, m'estima beaucoup sans savoir combien j'étais peu de chose. Ce qui nous unit fut notre passion commune (qui ne se révélait pas extérieurement) pour les Mathématiques et notre conformité morale, de sorte que souvent, occupés chacun de nos propres pensées, nous nous promenions ensemble pendant des heures sans dire un mot"*.

© L'OUVERT 89 (1997)

(*) Dénomination germanique de Farkas.

(**) cf. Paul Stäckel et Friedrich Engel : *Gauss, les deux Bolyai et la géométrie non euclidienne*, Gauthier Villars Paris 1897, p. 6. Les traductions françaises des lettres citées ici, sont extraites de ce fascicule.

Ces communications de W. Bolyai même sont complétées par des paroles que Gauss doit avoir dites, comme le raconte Sartorius von Waltershausen, dans le cours des années précédentes. *“Bolyai est le seul qui ait jamais su entrer dans mes idées métaphysiques relatives aux Mathématiques.”*

Gauss quitta Göttingen durant l'automne 1798 et les deux amis se rencontrèrent une seule et dernière fois encore le 24 mai 1799 à Clausthal dans le Harz, avant le retour de F. Bolyai dans son pays natal pour y exercer le métier de professeur de mathématiques, physique et chimie au collège de Maros Vásárhely. Mas ils continuèrent à s'écrire, pas très régulièrement, presque jusqu'à leur mort. (1855 pour Gauss; 1856 pour F. Bolyai). Il est probable que les deux amis se soient entretenus, lors de cette rencontre, des fondements de la géométrie et particulièrement du problème des parallèles et de l'axiome V (appelé axiome XI dans les textes qui suivent, selon une autre numérotation des axiomes euclidiens).

Gauss à W. Bolyai (Helmstedt, le 16 décembre 1799)

“Je regrette bien de n'avoir pas profité de notre voisinage rapproché d'autrefois, pour connaître davantage les travaux sur les premiers principes de la Géométrie; je me serais ainsi certainement épargné bien des peines inutiles, et j'aurais eu l'esprit plus en repos, autant que quelqu'un de mon caractère peut l'avoir, lorsqu'il reste encore tant à désirer relativement à un tel sujet. Quant à moi, mes travaux sont déjà bien avancés (autant que m'a permis de le faire le peu de temps que m'ont laissé mes occupations de nature toute différente); mais la voie dans laquelle je suis entré ne conduit pas au but que l'on cherche, et que tu affirmes avoir atteint, mais conduit plutôt à mettre en doute l'exactitude de la Géométrie.

Je suis, il est vrai, arrivé à bien des choses, qui seraient par la plupart des hommes regardées comme une démonstration valable, mais qui, à mes yeux, ne démontrent pour ainsi dire RIEN; par exemple, si l'on pouvait démontrer l'existence possible d'un triangle rectiligne, dont l'aire serait plus grande que toute surface donnée, je serais alors en état de démontrer avec une rigueur parfaite toute la Géométrie.

La plupart, il est vrai, voudraient donner à cela le rang d'un axiome, moi non; il serait bien, en effet, possible, quelque éloignés entre eux que l'on choisisse les trois sommets du triangle dans l'espace, que son aire fût néanmoins toujours inférieure (infra) à une limite donnée. Je possède quelques théorèmes pareils, mais je ne trouve en aucun d'eux quelque chose de satisfaisant. Fais-nous donc bientôt connaître ton travail; tu auras acquis alors droit à la reconnaissance, mais non pas celle, il est vrai, du gros du public (auquel appartiennent cependant nombre de gens regardés comme d'habiles mathématiciens); je m'aperçois, en effet, davantage chaque jour que le nombre des vrais géomètres est extrêmement restreint, et que la plupart des gens ne sont capables ni de porter un jugement sur les difficultés de pareils travaux, ni même de les comprendre; mais jouis de la reconnaissance de tous ceux dont l'opinion seule peut avoir effectivement du prix pour toi!

Il se trouve, à Brunswick, un émigré nommé Chauvelot, qui n'est pas mauvais géomètre et qui prétend avoir complètement établi la théorie des droites parallèles; son travail sera imprimé bientôt, mais je n'en attends rien de bon. Dans les Archives de Hindenburg, neuvième Partie, se trouve également une nouvelle recherche, d'un certain Hauff, sur le même sujet; c'est au-dessous de toute critique."

F. Bolyai enverra effectivement une "*Théorie de Göttingen, relative aux parallèles*" en automne 1804 et que Gauss commente ainsi :

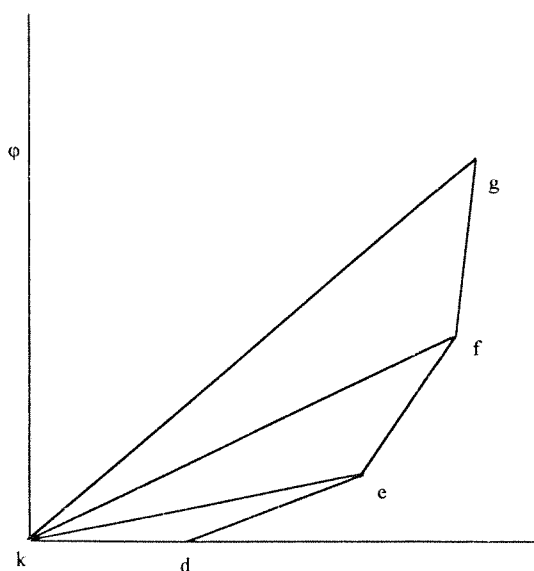
Gauss à W. Bolyai (Brunswick, le 25 novembre 1804)

Maintenant ... encore quelque chose à propos de ta Communication géométrique. J'ai lu ton mémoire avec le plus grand intérêt et la plus grande attention et j'ai été vraiment réjoui de la profonde perspicacité dont tu fais preuve. Mais ce n'est pas une louange inutile que tu désires; celle-ci, à un certain point, pourrait aussi sembler partielle, car la marche de tes idées a beaucoup de similitude avec celle que j'ai autrefois moi-même employée dans la recherche de la solution de ce noeud gordien, recherche vaine encore jusqu'ici. C'est seulement mon jugement sincère et sans détour que tu désires. Le voici : ta méthode ne me satisfait pas encore. Je vais chercher à mettre en pleine lumière, avec toute la clarté possible, la pierre d'achoppement que j'y trouve encore (et qui appartient aussi au même groupe d'écueils sur lesquels ont échoué jusqu'ici mes propres recherches). J'ai cependant toujours l'espoir que ces écueils finiront, avant la fin de ma vie, par me livrer enfin passage. Mais j'ai ici en ce moment, tant d'autres affaires en train, que je ne puis actuellement y penser; crois-moi, cela me réjouirait du fond du coeur, si tu me devançais et si tu réussissais à surmonter tous les obstacles. Je ferais alors, avec le plus grand plaisir, tout ce que je puis pour faire reconnaître ton mérite et pour le mettre en pleine lumière. J'arrive maintenant à la question. A toutes les autres conclusions, je ne trouve aucune objection essentielle à faire : ce qui, pour moi, n'est pas concluant, c'est simplement le raisonnement dans l'Article XIII. Tu supposes ici prolongée d'une manière indéterminée, une ligne II. ...kdefg ... formée de segments tous rectilignes et égaux kd, de, ef, fg, etc..., et où les angles kde, def, efg, etc... sont égaux entre eux, et tu veux démontrer qu'en procédant ainsi plus ou moins longtemps II devra nécessairement dépasser kφ. A cet effet, tu fais tourner la ligne droite kd∞ = Q, autour de k, du côté où est situé II, en sorte qu'elle passera successivement, en le rencontrant, de chaque côté du polygone II au côté suivant. Tu fais voir à merveille que Q, passant à la façon d'échelons par d, c, f, g etc..., se rapproche chaque fois davantage de kφ; contre tout ceci, aucune objection à faire, mais maintenant tu continues ainsi :

“Quapropter Q moveri potest modo prescripto, usque dum in $k\varphi' \infty$ pervenerit...” et voilà la conclusion qui ne me semble pas évidente.

De ton raisonnement, à mon avis, il ne s'ensuit pas le moins du monde que l'angle, autour duquel $Q \dots (1)$, en cheminant le long d'un côté de II qui se rapproche de $k\varphi$, ne devienne pas toujours moindre; de la sorte, l'agrégat de tous les rapprochements successifs, quel que fût leur nombre, pourrait bien ainsi n'être jamais [suffisamment] grand pour amener Q en $k\varphi$ si tu pouvais démontrer que $dke = ekf = fkg$, etc..., alors la chose serait nette et claire.

Le théorème est du reste exact, mais difficile à démontrer en toute rigueur sans présupposer d'avance la théorie des parallèles. On pourrait donc toujours appréhender que les angles dke, ekf, fkg etc... ne diminuassent successivement.



Si cela avait lieu (exempli gratia seulement) en progression géométrique, de sorte que l'on eût $ekf = \psi \times dke, fkg = \psi dke$, etc... (ψ étant plus petit que 1), alors la somme de tous les rapprochements, quelque grand que l'on prenne leur nombre, resterait toujours inférieure à $\frac{1}{1-\psi} \times ekf$, et cette limite pourrait encore alors être toujours inférieure à l'angle droit $dk\varphi$. Tu as exigé de moi un jugement sans détour : je te l'ai donné, et je te répète encore l'assurance que cela me ferait le plus grand plaisir si tu surmontais toutes ces difficultés”.

Ainsi, les espoirs que F. Bolyai avait fondé sur son travail furent anéantis au point de le faire renoncer à toute recherche. Il écrira dans son autobiographie : *“Comme je n'étais pas satisfait de mes tentatives pour démontrer l'axiome des parallèles, et qu'après les avoir pendant bien longtemps poursuivies jusqu'aux limites du possible, j'en perdais le repos, mon feu pour les mathématiques s'éteignit et je me tournai vers la poésie (*)* Ajoutant : *“Si jadis j'eus pu arriver à un résultat dans la question de l'axiome XI, je ne me serais occupé ni de la construction des poêles ni de l'art*

(1) Ici se trouvent des lettres devenues illisibles par l'effet de l'usure d'un pli dans le papier de la lettre

(*) F. Bolyai publia pourtant deux forts beaux volumes présentant les fondements des mathématiques, en 1832 et 1833 sous le titre *Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseo... introduceudi* (une réédition datée de 1896 existe à la BNS de Strasbourg)

poétique, et j'eus été un homme et un père de famille meilleur".

Son fils Janos prendra heureusement et avec succès le relais dans cette recherche millénaire. Janos Bolyai, fils de Farkas, né le 15 décembre 1802 à Klausenburg, est présenté ainsi à Gauss par son père. (lettre du 20 juin 1831).

W. Bolyai à Gauss (Maros Vásárhely, le 20 juin 1831)

[Mon fils] est déjà lieutenant en premier dans le Corps du Génie et sera bientôt capitaine ; c'est un beau garçon, un virtuose sur le violon ; il est fort en escrime et brave, mais il s'est souvent battu en duel, et c'est encore un militaire un peu trop bouillant, mais aussi un parfait galant homme : de la lumière dans les ténèbres, des ténèbres dans la lumière. Il est passionné pour les mathématiques et possède pour elles de rares aptitudes d'esprit, il est maintenant en garnison à Lemberg ; il a pour toi la plus grande vénération, il est capable de te comprendre et de t'apprécier. C'est à sa demande que je t'envoie ce petit opuscule de lui ; aies la bonté de le juger avec tes yeux si perspicaces, et, dans la réponse que j'attends impatiemment, écris-moi ton arrêt sans ménagement."

Le petit opuscule en question n'est rien moins que le fameux "Appendix" de Janos Bolyai où celui-ci fonde la géométrie hyperbolique (*) avec le sous-titre : "La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori) ; suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiome XI.

En réalité, Janos Bolyai avait percé depuis une dizaine d'années déjà la vraie nature du problème, comme l'indique une lettre à son père, datée du 3 novembre 1823 : "Je suis tout à fait décidé à publier un Ouvrage sur la théorie des parallèles, dès que j'aurai mis les matériaux en ordre et que les circonstances le permettront. Je ne l'ai pas encore fait, mais la voie que j'ai suivie a certainement pour ainsi dire, presque atteint le but ; le but même n'est pas atteint, mais j'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui ; il serait à jamais regrettable si elles étaient perdues. Lorsque vous les verrez, vous le reconnaîtrez aussi. En attendant je ne puis ici dire autre chose que ceci : J'ai du néant tiré un nouvel univers. Tout ce que je vous ai communiqué jusqu'ici n'est qu'une maison de cartes, comparé à cette tour. Je suis déjà autant persuadé que cela me fera honneur que si cela avait déjà eu lieu."

Gauss a donc été sollicité pour donner son avis sur "l'Appendix" avant sa publication en annexe au "Tentamen", l'oeuvre en deux volumes du père Farkas Bolyai. Sa réponse peut paraître étrange et décevante, même si en réalité, Gauss a jugé très positivement le travail de Janos Bolyai (**). La phrase : "je ne puis louer ce travail (...) car le louer ce serait me louer moi-même" fut très mal reçue par

(*) cf. K. Volkert, "Et pourtant quelques uns sont quarrables, la quadrature du cercle en géométrie hyperbolique". L'Ouvert n° 84 ; septembre 86

(**) Gauss à son élève et ami Gerling : "je considère ce jeune géomètre von Bolyai comme un génie de première grandeur".

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

le fils, qui soupçonnait son père d'avoir divulgué à Gauss les idées exposées dans l'“Appendix”, et que ce dernier voulait lui ravir la priorité de ses découvertes. Il n'en est rien comme le prouve la lettre de Gauss, si on la lit jusqu'au bout.

Gauss à W. Bolyai (Göttingen, le 6 mars 1832)

... Parlons maintenant un peu du travail de ton fils. Si je commence en disant que je ne puis louer ce travail, tu pourras bien un instant reculer d'étonnement; mais je ne puis dire autre chose; le louer serait me louer moi-même; en effet, le contenu tout entier de l'Ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, les résultats auxquels il a été conduit coïncident presque entièrement avec mes propres méditations qui ont occupé en partie mon esprit depuis déjà trente à trente-cinq ans. Aussi ai-je été complètement stupéfait. Quant à mon travail personnel, dont d'ailleurs j'ai confié peu de chose jusqu'ici au papier, mon intention était de n'en rien laisser publier de mon vivant.

En effet, la plupart des hommes n'ont pas l'esprit juste sur les questions dont il s'agit, et j'ai trouvé seulement bien peu d'entre eux qui prissent un intérêt particulier à ce que je leur ai communiqué à ce sujet. Pour pouvoir prendre cet intérêt, il faut d'abord avoir senti bien vivement ce qui fait essentiellement défaut, et sur ces matières la plupart des hommes sont dans une obscurité complète. C'était, au contraire, mon idée de mettre, avec le temps, tout ceci par écrit afin qu'au moins cela ne périclite pas avec moi.

Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée, et je suis rempli d'une joie extrême que ce soit précisément le fils de mon vieil ami qui m'ait devancé d'une manière si remarquable.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 44

Énoncé (proposé par Paul Erdős) :

Le grand mathématicien hongrois Paul Erdős, qui vient de disparaître, fut l'inventeur de très nombreux problèmes. En hommage à sa mémoire, voici un problème d'Erdős que nous soumettons à nos lecteurs.

Etant donnés deux entiers naturels m et n tels que $m < n$, on considère une partition de l'intervalle d'entiers $[m, n[= \{m, m + 1, m + 2, \dots, n - 1\}$ en deux sous-ensembles A_1 et A_2 disjoints : $[m, n[= A_1 \cup A_2$. On dira que c'est une *partition d'Erdős* si l'entier n peut, d'au moins une manière, s'écrire comme somme d'éléments distincts de l'un des A_i .

Exemple. — $m = 1, n = 8, [1, 8[= \{1, 2, 4, 5\} \cup \{3, 6, 7\}$ est une partition d'Erdős de $[1, 8[$ car $8 = 1 + 2 + 5$.

Le couple (m, n) est un *couple d'Erdős* si toute partition de $[m, n[$ en deux sous-ensembles est une partition d'Erdős. L'objectif du problème est d'identifier les couples (m, n) qui sont des couples d'Erdős.

1°) Montrer que $(1, 11)$ n'est pas un couple d'Erdős.

Montrer que $(1, 12)$ et $(2, 15)$ sont des couples d'Erdős.

2°) Trouver d'autres couples d'Erdős, et les déterminer tous si possible.

Indications (par M.-P. Muller) :

La démarche. — On recherche une partition $[m, n[= A_1 \cup A_2$ qui ne soit pas d'Erdős : si une partie contient des éléments de somme n , la partition sera mise hors jeu.

Les premiers pas. — Le plus simple est d'éliminer d'abord les partitions pour lesquelles un A_i contient *deux* éléments de somme n . Nous pouvons "voir" ces partitions en disposant les nombres $m, \dots, n - 1$ dans un tableau de manière à mettre en vis-à-vis deux nombres de somme n :

si $n = 2p + 1$:

		m	$m + 1$...	k	...	$p - 1$	p
$n - 1$...	$n - m$	$n - m - 1$...	$n - k$...	$p + 2$	$p + 1$

si $n = 2p + 2$:

		m	$m + 1$...	k	...	$p - 1$	p	$p + 1$
$n - 1$...	$n - m$	$n - m - 1$...	$n - k$...	$p + 3$	$p + 2$	

(certaines cases peuvent être vides). Ainsi, les partitions que nous éliminons d'abord sont celles pour lesquelles une colonne complète est dans un A_i . Dorénavant, deux éléments d'une même colonne ne seront jamais dans une même partie. Notons aussi que les éléments des colonnes incomplètes à gauche n'interviennent jamais dans une somme = n : leur appartenance est donc indifférente. En somme, il reste autant de cas à examiner que de partitions de la première ligne seule!

Pour continuer. La disposition adoptée pour les nombres $[m, n[$ permet aussi de "situer" trois éléments, ou plus, dont la somme est n . Deux remarques simples peuvent être faites dans ce cas.

1. Au plus un seul de ces éléments est sur la deuxième ligne, et il est alors plus à droite que les autres:

* * *
*

2. Lorsque la partition n'est pas d'Erdős, si deux nombres u et v sont dans A_i et si $u + v$ est dans une colonne complète et distincte de celles de u et v , alors $u + v$ est aussi dans A_i . En effet, dans le cas contraire, nous aurions son vis-à-vis $n - u - v$ dans A_i , et $u, v, n - u - v$ de somme n dans A_i . Une application simple lorsque $m = 1$: si 1 et u sont dans A_1 avec $u < p$, alors $u + 1$ et, par induction, $u + 2, u + 3, \dots, p$ sont tous dans A_1 .

A partir de ces considérations, montrer que :

- le couple $(1, n)$ est d'Erdős si et seulement si $n \geq 12$
- pour n impair, $(2, n)$ est d'Erdős si et seulement si $n \geq 15$
- mais $(2, 16)$ n'est pas d'Erdős
- si (m, n) est d'Erdős, alors (km, kn) aussi
- et donc $(2, n)$ est d'Erdős si $n \geq 23$
- si m est la partie entière de $(n + 1)/4$, alors (m, n) n'est pas d'Erdős.

PROBLÈME 46

Énoncé (proposé par R. Schäfke) :

Soit la matrice carrée $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$ (coefficient binomial).

Montrer que M est définie positive, de déterminant égal à 1, et que si λ est valeur propre de M alors $1/\lambda$ est également valeur propre de M .

Indication (par P. Renfer) :

On introduit la matrice triangulaire $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $t_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$ (où l'on convient que le coefficient binomial $\binom{i-1}{j-1}$ est nul si $i < j$), on montre que M est le produit de T par sa transposée : $M = T \cdot {}^tT$, puis on calcule T^{-1} (qui a, aux signes près, les mêmes coefficients que T), et enfin on montre que M et M^{-1} ont même polynôme caractéristique.

PROBLÈME 47

Énoncé (proposé par M. Krier) :

On considère un polygone plan P à n côtés, de sommets consécutifs A_0, A_1, \dots, A_n , avec $A_n = A_0$. Sur chaque segment $A_i A_{i+1}$ on construit un carré $A_i A_{i+1} B_i C_i$, toujours du même côté pour un observateur qui se déplacerait sur le polygone. L'objectif du problème est de déterminer P de telle sorte que les $2n$ points B_i et C_i soient sur un même cercle.

1°) Rechercher les polygones P convexes. Il y a la solution évidente où l'on prend pour P un polygone régulier. Est-ce la seule solution?

2°) Indiquer comment on peut obtenir les polygones non convexes ayant la propriété demandée.

Solution (par P. Renfer) :

Si les points B_i et C_i sont sur un même cercle de centre O , alors les points A_i sont tous sur un autre cercle de même centre O , car la médiatrice de $[B_i C_i]$ coïncide avec celle de $[A_i A_{i+1}]$. Soit α_i le demi-angle au centre, interceptant la corde $[A_i A_{i+1}]$

1) Cas des polygones convexes

Si le polygone P est convexe, alors: $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi$, avec $0 < \alpha_i \leq \pi$ pour $1 \leq i \leq n$. La solution évidente du polygone régulier correspond à : $\alpha_i = \frac{\pi}{n}$, pour tout i . Pour obtenir d'autres solutions, il s'agit d'étudier s'il est possible d'avoir $\alpha_i \neq \alpha_j$ avec $OB_i = OB_j$.

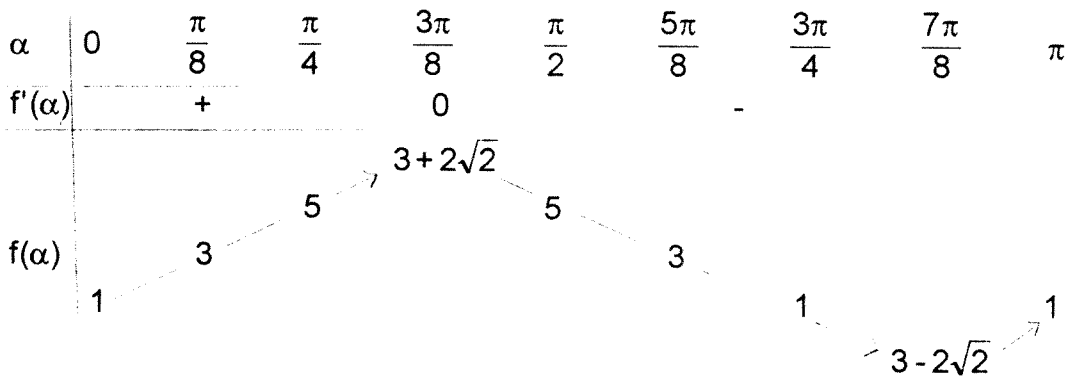
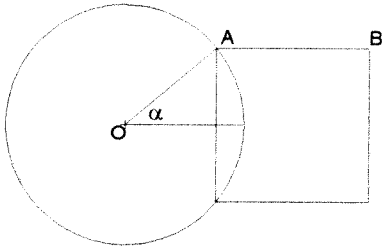
A VOS STYLOS

Distinguons suivant que les carrés sont à droite ou à gauche d'un observateur se déplaçant sur le polygone, dans le sens trigonométrique :

a) carrés à droite

Pour $\alpha \in]0, \pi[$, posons :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= OB^2 = (\cos \alpha + 2 \sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha \\ &= 3 + 2(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha) \\ &= 3 + 2\sqrt{2} \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$



Donc pour deux angles distincts α et β , de somme inférieure à π , on a :

$$f(\alpha) = f(\beta), \quad \text{si} \quad \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}.$$

On peut obtenir un polygone solution, en choisissant l'un des α_i égal à β et tous les autres égaux à α , avec

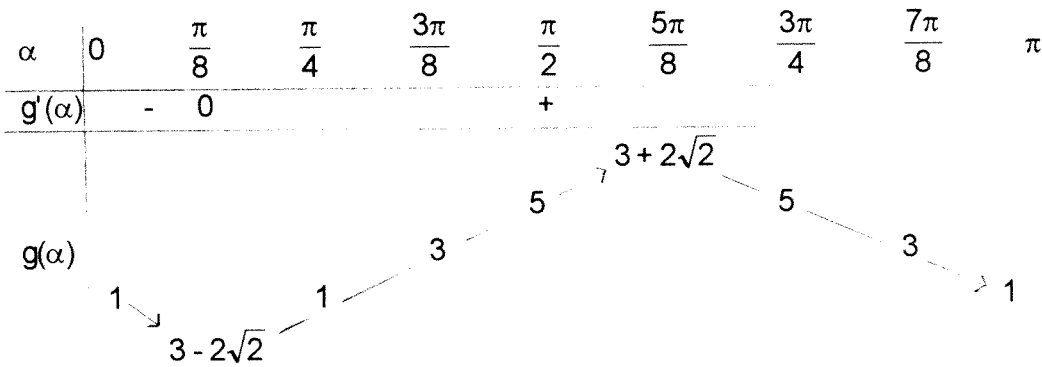
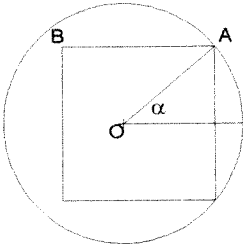
$$0 < \alpha \leq \frac{3\pi}{8}, \quad \frac{3\pi}{8} \leq \beta < \frac{3\pi}{4}, \quad \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}, \quad (n-1)\alpha + \beta = \pi$$

On trouve : $\alpha = \frac{\pi}{4(n-2)}$ et $\beta = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4(n-2)}$

b) carrés à gauche

Pour $\alpha \in]0, \pi[$, posons :

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= OB^2 = (\cos \alpha - 2 \sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha \\ &= 3 - 2(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) \\ &= 3 - 2\sqrt{2} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$



Donc, pour deux angles distincts α et β , de somme inférieure à π , on a :

$$g(\alpha) = g(\beta), \quad \text{si} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

On peut obtenir un polygone solution, en donnant à k angles parmi les α_i la valeur β et aux $(n - k)$ autres la valeur α , distincte de β avec :

$$1 \leq k \leq n - k \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad , \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \quad , \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \quad , \quad (n - k)\alpha + k\beta = \pi$$

On peut obtenir un octogone avec $n = 8$ et $k = 4$.

De façon générale on obtient :

$$\alpha = \frac{4 - k}{4(n - 2k)}\pi, \quad \text{avec} \quad k \leq 3 \quad \text{et} \quad k \leq n - 5 \quad (\text{donc} \quad n \geq 6) \quad \text{pour que} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

A VOS STYLOS

2) Cas des polygones non convexes

La contrainte $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi$ s'assouplit en $\sum_{i=1}^n \alpha_i = m \cdot \pi$, où $m \in \mathbb{N}^*$

a) carrés à droite

On peut obtenir un polygone solution, en donnant à k angles parmi les α_i la valeur β et aux $(n - k)$ autres la valeur α , distincte de β avec :

$$1 \leq k \leq n - k \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{7\pi}{4}$$

Si n est multiple de 8, on peut choisir $k = n/2$.

Si $k \neq n/2$, les angles α et β doivent être choisis commensurables à π .

b) carrés à gauche

On peut obtenir un polygone solution, en donnant à k angles parmi les α_i la valeur β et aux $(n - k)$ autres la valeur α , distincte de β avec :

$$1 < k < n - k \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{4}$$

Si n est multiple de 8, on peut choisir $k = n/2$.

Si $k \neq n/2$, les angles α et β doivent être choisis commensurables à π .

PROBLÈME 48

Énoncé (proposé par R. Garin) :

Pour quel(s) entier(s) naturel(s) n la somme

$$\sum_{k=0}^n k^2 (n - k)^2$$

est-elle un carré parfait ?

PROBLÈME 49

Énoncé (proposé par R. Kern) :

Dans un triangle ABC , on note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB , et α, β, γ les mesures respectives des angles en A, B et C .

1) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos \alpha = \cos 2\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 2\beta$.

2) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos \alpha = \cos 3\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 3\beta$.

PROBLÈME 50

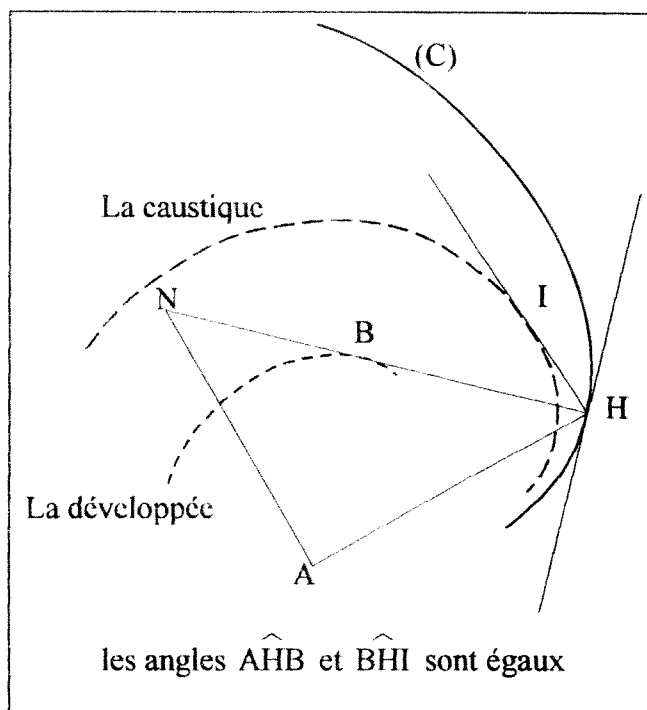
Énoncé (proposé par A. Stoll, IREM de Strasbourg) :

Données :

- Une courbe plane (C) “suffisamment régulière”
- un point A dans le plan de la courbe (C)

Notations : (cf. figure)

- H un point de la courbe (C)
- B désigne le centre de courbure correspondant à H
- N le point de la normale à (C) en H tel que (AN) soit perpendiculaire à (AH)
- I est le point de la caustique issue de A



Montrer que :

$$\frac{|2HN - HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}$$

Applications :

1. En déduire une construction géométrique du centre de courbure d'une parabole en un point quelconque.
2. Montrer que la caustique d'une spirale logarithmique par rapport à son centre est une spirale logarithmique identique.
3. Trouver d'autres applications de la formule ci-dessus.

PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$\operatorname{tg} x = \frac{x - \frac{1.3.5 x^3}{1.2.3 3!} + \frac{1.3.5.7.9 x^5}{1.2.3.4.5 5!} - \dots}{1 - \frac{1.3 x^2}{1.2 2!} + \frac{1.3.5.7 x^4}{1.2.3.4 4!} - \dots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \frac{a(a+2)(a+4) x^3}{a(a+1)(a+2) 3!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8) x^5}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4) 5!} - \dots}{1 - \frac{a(a+2) x^2}{a(a+1) 2!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6) x^4}{a(a+1)(a+2)(a+3) 4!} - \dots}$$

A DIFFUSER AUX PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES ET A AFFICHER DANS LES ÉTABLISSEMENTS

Association des professeurs de mathématiques (APMEP)
Régionale de Strasbourg
10 rue du Général Zimmer
67000 Strasbourg
tel 0388392407

La régionale d'Alsace de l'association des professeurs de mathématiques organise cette année sa rencontre régionale le samedi après-midi **28 mars 1998** à Sélestat. **Tous les professeurs de mathématiques** de l'académie, adhérents ou non, inscrits ou non, **sont cordialement invités** à assister à la conférence, à participer à un des ateliers ou débat, à s'informer ou à proposer des idées, à consulter quelques brochures APMEP ou IREM parues récemment, à discuter avec des collègues d'autres établissements.
Au cours de cette rencontre l'exposition « Objets mathématiques » de la régionale de Lorraine sera présentée.

SAMEDI 28 mars 1998
au Lycée KOEBERLE
Boulevard Charlemagne
67462 Sélestat
de 14h à 18h30.

Programme :

14h à 15h15 : conférence plénière historique par André STOLL, professeur au lycée Couffignal. **Les spirales :** esthétiques, mystiques, historiques, les spirales constituent également un formidable outil heuristique et pédagogique. Au cours de cet exposé, nous aborderons ces différents aspects de la spirale d'Archimède, de la spirale de Théodore, des spirales logarithmique et hyperbolique,...

15h30 à 16h45 : ateliers parallèles sur les thèmes suivants

collège : Mathématiques et interdisciplinarité au collège, animé par Farida CHAIBAI, collège Camus de Jarville, Lorraine : compte_rendu d'expérience et présentation de diverses activités permettant de relier les acquis de mathématiques aux contenus d'autres disciplines. On explorera les possibilités de travaux avec les enseignants d'autres matières, dans le cadre des programmes du collège.

lycée : Quelle épreuve de bac dans quelques années ? atelier animé par Jean-Pierre Richeton, président de l'APMEP.

lycée professionnel : La nouvelle brochure APMEP sur les lycées professionnels, l'exposition « objets mathématiques », atelier animé par Madeleine Huguel (lycée de Ste Marie-aux Mines) et par Marie-José Baliviera. (régionale de Lorraine)

17h à 18h30 : pause café, consultation de brochures, assemblée générale de l'association.

Inscription : (l'inscription n'est pas nécessaire mais recommandée)

S'inscrire par Minitel, entre le 15 décembre et le 12 janvier, de la manière suivante :

- taper 3614 EDUSTRA : dans le menu d'entrée choisir « 1 » consultation et inscription au PAF.
- dans le menu accès individuel à la formation choisir « 1 » (candidature individuelle).
- suivre les consignes, sachant que ce stage a les caractéristiques suivantes :

Sciences Mathématiques Stage numéro : 97TCA309C titre : journée régionale de l'A.P.M.E.P.

SOMMAIRE

N° 89 – DÉCEMBRE 1997

◇ <i>Notre couverture</i> : H. WEBER.....	I
◇ <i>Editorial</i> :	II
◇ <i>H.WEBER : un Mathématicien à Strasbourg, 1895-1913,</i> par N. SCHAPPACHER et K. VOLKERT	1
◇ <i>Suite de Fibonacci : le zéro et l'infini</i> par G. KUNTZ	19
◇ <i>Nombres de Fibonacci et permutations</i> par D. DUMONT	25
◇ <i>Résolution de l'équation diophantienne du second degré</i> par E. KERN	29
◇ <i>Rencontre régionale des professeurs de mathématiques</i>	42
◇ <i>L'histoire des mathématiques par correspondance</i> par J.-P. FRIEDELMEYER	48
◇ <i>A vos stylos</i> par D. DUMONT	54

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN

◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER

◇ *Correspondance à adresser à* :

Université Louis Pasteur

Bibliothèque de l'I.R.E.M.

10, rue du Général Zimmer

67084 STRASBOURG CEDEX

Tél : 88-41-64-40

Fax : 88-41-64-49

◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*

80 F (130 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,

120 F (200 F/2 ans) dans les autres cas.

Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent

Comptable de l'U.L.P. (IREM)

◇ *Prix du numéro* : 30.- F