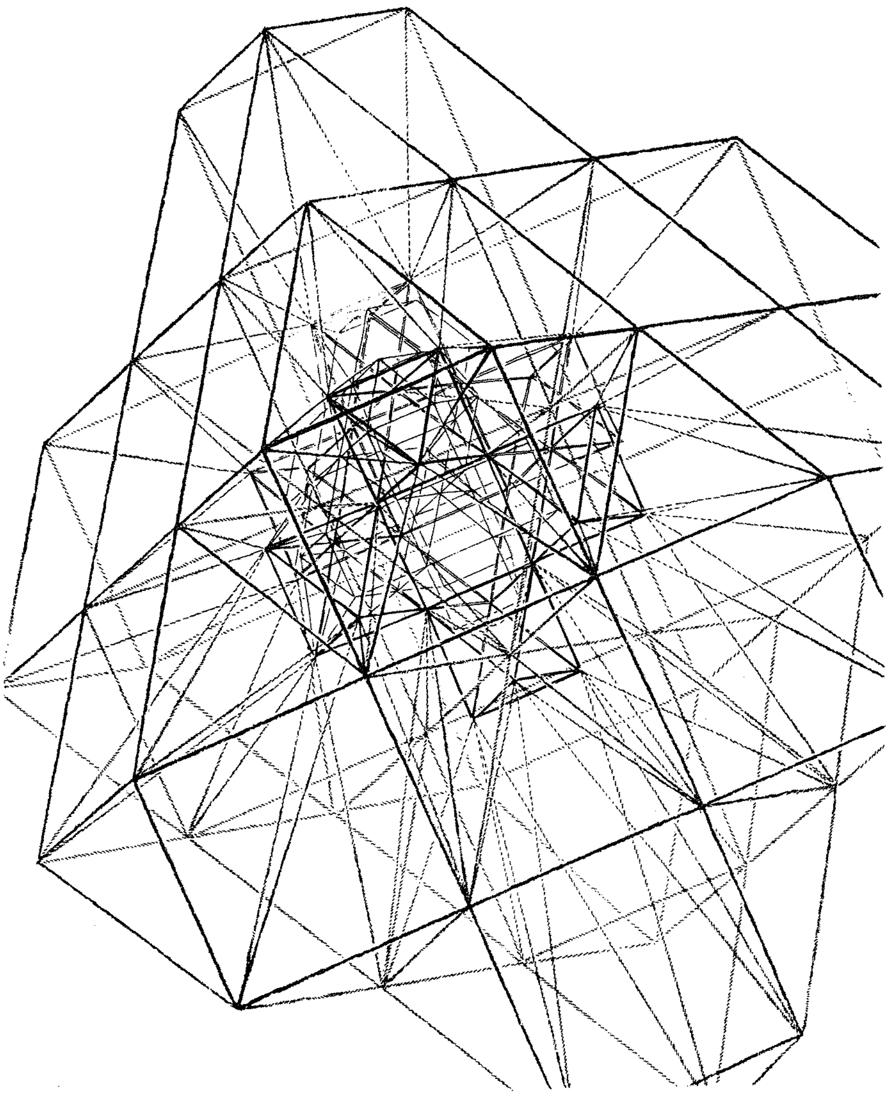
L'OUVERT

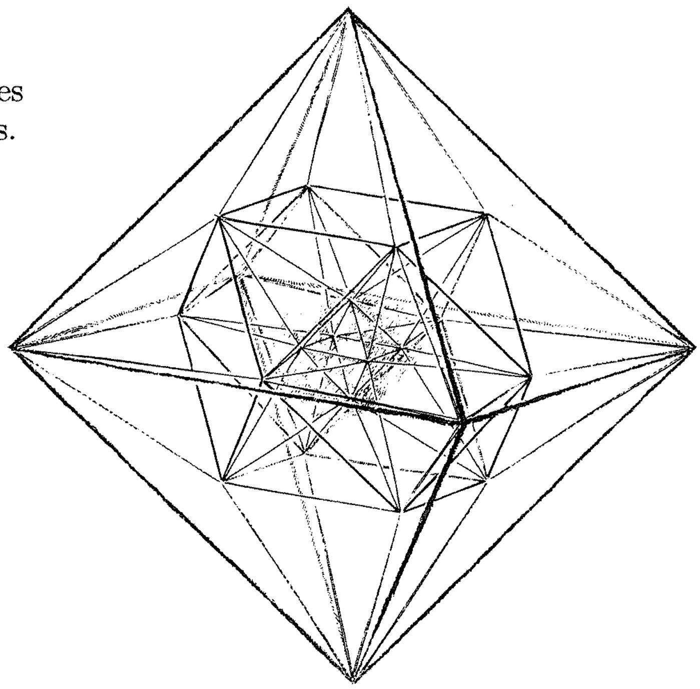
JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 90 – MARS 1998 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE

La couverture donne une réprésentation du pavage de l'espace de dimension 4 grâce au polytope C_{24}, exécutée par Patrice Jeener. C'est une reproduction tirée du livre "Espaces gravés" de P. Jeener, collection cedic/nathan. (texte de A. DELEDICQ)

Il existe 6 polytopes réguliers dans l'espace à 4 dimensions :
C_5 : 5 cellules tétraédriques
C_8 : 8 cellules cubiques (hypercube)
C_{16} : 16 cellules tétraédriques
C_{24} : 24 cellules octaédriques
C_{120} : 120 cellules dodécadriques
C_{600} : 600 cellules tétraédriques.



Le C_{24} est un polytope régulier composé de 24 cellules octaédriques, ici reprénté selon une perspective "classique" : un petit octaèdre central est entouré d'un cuboctaèdre (polyèdre semi-régulier ayant 6 faces carrées et 8 faces triangulaires équilatérales) puis d'un grand octaèdre. Les sommets de chaque carré du cuboctaèdre sont ensuite réunis à chacun des sommets, situés en face, du petit et du grand octaèdre.

Il existe trois pavages réguliers de l'espace à 4 dimensions (avec les C_8, C_{16} et C_{24}). Pour le pavage du C_{24} :

- D'abord, sur un premier espace de dimension 3, on construit un pavage semi-régulier de cuboctaèdres et d'octaèdres.
- Puis, sur un espace parralèle, on construit un pavage analogue mais en faisant correspondre un octaèdre à un cuboctaèdre déjà construit et réciproquement.
- Ainsi se placent côte à côte les C_{24} successifs.

VIVRE AU LYCEE AVEC LE MULTIMEDIA
POUR LE MEILLEUR ET POUR LE PIRE

par Gérard KUNTZ, IREM de Strasbourg.

> La première expérience ou, pour parler plus exactement, l'observation première est toujours un premier obstacle pour la culture scientifique. En effet cette observation première se présente avec un luxe d'images; elle est pittoresque, concrète, naturelle, facile. Il n'y a qu'à la décrire et à s'émerveiller. On croit alors la comprendre.
> Gaston Bachelard[1].

Ainsi donc, en cette année 1998, la France entre en modernité! Elle s'équipe enfin d'ordinateurs et s'abonne à Internet. Même le « mammouth » va bénéficier prochainement des bienfaits des « nouvelles technologies », Monsieur Allègre l'a juré!

Les chercheurs, les universitaires comme le monde industriel n'ont pas attendu ce tapage médiatique pour fréquenter les autoroutes de l'information. Par elles, la science *en train de se faire* est accessible *partout et sans délais.* Publicité des produits et des services, diffusion du savoir, colloque permanent *à l'échelle mondiale,* la révolution est profonde et le progrès incontestable.

Les élèves ***en formation initiale*** acquièrent, lentement et sur la longue durée, les clés de compréhension du monde. Au fil des années et au prix de beaucoup de travail, la rationalité s'édifie, la sensibilité s'affine et le citoyen en devenir prend conscience de ses droits et devoirs. La science diffusée au collège et au lycée est *ancienne et accessible :* au CDI, chaque élève trouve mention de tout ce qui a fait évoluer le monde. De quoi occuper plusieurs vies... Un documentaliste qualifié réduit les temps d'accès à des durées supportables aux élèves les plus pressés.

La difficulté ne réside plus dans l'accès à l'information. Elle se manifeste, massive et douloureuse, au moment du *traitement.* Chaque enseignant connaît l'extrême embarras d'une majorité d'élèves pour tirer parti d'un document : comprendre le sens général, extraire les éléments pertinents, reformuler certains passages, résumer ou contracter, interpréter graphiques et images, distinguer leur valeur (illustration, argumentation etc.) et les intégrer. La tâche se complique extraordinairement lorsqu'il s'agit de faire la synthèse de plusieurs documents.
L'outil multimédia masque ces difficultés, mais les amplifie. La virtuosité des jeunes utilisateurs à *surfer*[2] sur les réseaux ou sur les CD-ROM *crée l'illusion d'une maîtrise de*

---

[1] La formation de l'esprit scientifique, Vrin 1980, page 19.
[2] C'est un nouvel avatar du « petit génie de l'informatique » du début des années 90, qui a mystérieusement disparu du discours médiatique.

l'information. Les nouvelles techniques renforcent les obstacles en augmentant le débit de l'information et en diversifiant ses formes (sur le même écran, du texte, des images, des graphiques et simultanément du commentaire oral et/ou de la musique). Par quel miracle, un élève qui peine à exploiter un document simple et inerte deviendrait-il expert pour *s'approprier* une information rapide, dense, changeante et multiforme? L'arrêt sur image, sur texte ou sur graphique, leur examen prolongé, ne sont pas pratique courante pour les surfeurs[3]. Prendre des notes semble incompatible avec les nouveaux médias. Dans le meilleur des cas, on se contente de copies sur imprimante[4]. Et nous voilà revenus à la case départ, à la nécessité (et à la difficulté) de traiter l'information obtenue.

Introduire l'outil multimédia dans le système éducatif tel qu'il est, ç'est monter un moteur de Formule 1 sur une charrette à bras[5]. En formation initiale, l'utilisation (avec un minimum d'efficacité) des nouveaux outils exige des préalables. Les priorités imposées par les technologies de l'information sont claires et exigeantes.

D'abord *apprendre à lire un document* : comprendre son vocabulaire, sa structure, ses axes essentiels; interpréter les graphiques, déceler les parties pertinentes d'une image, d'un discours ou d'une musique et les mettre en relation avec le texte.
Savoir apprécier différents documents sur un thème donné : *trier, sélectionner, hiérarchiser,* voilà des compétences capitales face à l'inflation de l'information.
Une recherche documentaire informatique (surtout quand elle est menée maladroitement...) se révèle souvent pléthorique, donc décevante. *Parcourir en diagonale* un document suffit à l'expert pour en évaluer la portée dans sa recherche. L'apprenti chercheur, lui, doit acquérir cette habileté.
Enfin, faire *la synthèse* de plusieurs documents[6].

Au collège et au lycée, la formation mathématique inscrite dans les programmes et leurs commentaires prépare remarquablement à ces activités intellectuelles. L'usage d'un vocabulaire précis et de concepts décrits dans le détail, la nécessité déceler l'information pertinente dans les énoncés, de l'organiser en fonction du but poursuivi, la mise en oeuvre des connaissances de la discipline structurées en réseau et l'absolue nécessité de les hiérarchiser pour en tirer parti, les constants changements de cadre et de registres indispensables pour résoudre des problèmes, *voilà des aptitudes dont le transfert vers la recherche documentaire est précieux.* Hélas, l'obsession de la « réussite » , confondue avec

---

[3] En début d'année, il faut se battre pour que les élèves travaillant en environnement informatique examinent avec attention et interprètent les courbes que tracent les calculatrices ou les logiciels. Beaucoup imaginent que les tracés obtenus constituent le point final de l'activité.

[4] Dans un « excellent lycée » alsacien, une élève s'est contentée de fournir des photocopies d'encyclopédie comme fruit d'une recherche documentaire. L'enseignant lui a fait remarquer que le travail demandé (le traitement de l'information collectée) n'avait pas été fait. Protestation courroucée des parents auprès du Proviseur : « Notre fille a fourni au professeur l'état actuel de la question! ».

[5] François Jacob utilise cette image dans son livre « La statue intérieure » pour désigner l'étrange attelage du neocortex et du cerveau reptilien.

[6] Dans la vie sociale et professionnelle, cette activité est permanente. Pour y préparer les futurs techniciens supérieurs, une épreuve de ce type a été introduite à l'examen du BTS, avec des résultats plus que décevants.

les trompeuses statistiques du baccalauréat, enlève beaucoup de réalité aux intentions affichées. Les activités riches, formatrices et transférables -mais coûteuses en temps- sont trop souvent remplacées par des exercices répétitifs et ennuyeux qui préparent à l'examen plutôt qu'à la vie intellectuelle! Quant aux synthèses, faute de temps, elles incombent généralement aux enseignants qui en ont fait -c'est une caractéristique française- leur domaine réservé.

Les aptitudes requises par les technologies de l'information ne présentent guère de nouveauté par rapport à certaines circulaires ministérielles déjà anciennes[7] : savoir traiter l'information est une compétence essentielle dans la société actuelle, *indépendamment des nouveaux moyens techniques*. Mais à l'ère du multimédia, une formation insuffisante est *une forme d'illettrisme aux conséquences incalculables*.

Il faut d'abord convaincre les élèves *que surfer n'est pas apprendre* et que l'arrêt sur les documents, l'examen critique, sont indispensables. Bien sûr, le temps de l'errance à la recherche des documents est abrégé par une interrogation méthodique des bases de données (une réflexion préalable et un peu de logique booléenne la facilitent) : les joies du surf doivent être réservées à la flânerie et aux activités ludiques.

Qu'on ne s'y trompe pas : ***apprendre à lire ainsi*** *suppose un effort considérable, de l'école élémentaire au baccalauréat. Il faut y consacrer beaucoup de temps et en faire un objectif prioritaire dans toutes les disciplines.. La face de l'école pourrait en être changée.*

En effet, les élèves qui ont acquis ces compétences savent *apprendre par eux-mêmes :* il n'est pas nécessaire de les noyer sous un flot de connaissances qu'ils ne maîtriseraient pas. Des chapitres simples peuvent faire l'objet d'une recherche documentaire avec synthèse en classe. D'autres disparaissent des programmes : en cas de besoin, les élèves savent les retrouver. Les enseignants peuvent alors consacrer tout le temps nécessaire *aux notions difficiles, aux obstacles épistémologiques*[8] dont on ne triomphe que lentement, par des efforts répétés, sur la longue durée, et dont la vertu formatrice est avérée. Dans les classes scientifiques, le calcul différentiel et intégral relève de cette catégorie : il faut y passer tout le temps nécessaire pour qu'au sortir du lycée, la richesse en soit comprise (c'est loin d'être le cas actuellement). L'équation du second degré, le pivot de Gauss et les coniques sont en revanche accessibles aux élèves par une recherche personnelle, avec une aide limitée des enseignants.

Une réduction sensible des programmes est ainsi possible, *sans dommage pour les élèves*. Et dans la vie professionnelle, l'autonomie et la capacité d'apprendre par soi-même (avec une

---

[7] Elles sont restées à l'état de voeux pieux, faute de consacrer le temps nécessaire à ces démarches complexes : les programmes sont si chargés...

[8] Voir « Saut d'obstacle » dans Repères-Irem n° 22 et « Saut d'obstacle : gare aux approximations! » dans Repères-Irem n° 31

aide limitée -stages, transfert de compétences au sein des entreprises-) sont des qualités appréciées!
Le travail en groupe est particulièrement adapté aux recherches documentaires et à la mise au point. Il est une façon de lutter, en formation initiale, contre un individualisme que rien ne justifie (ni l'éthique, ni l'efficacité) et qui nuit à une bonne intégration dans la vie sociale et professionnelle. Dans le groupe, chacun apporte sa pierre, discute, exerce son sens critique.

Le rôle de l'enseignant est alors profondément modifié. Responsable de la transmission d'une science réellement profonde et difficile[9], il participe aux synthèses des groupes de recherche documentaire pour rectifier des erreurs, prolonger certains aspects et évaluer la qualité du travail. Il est appelé à s'exprimer sur des aspects imprévus qu'engendre inévitablement cette façon de faire : toutes les questions qui émergent peuvent-elles être traitées au moment où elles se posent? A quel prix (temps nécessaire, notions nouvelles à acquérir pour les aborder)? Flâner dans les systèmes documentaires conduit à d'intéressantes découvertes. Il convient d'en mesurer la portée[10].

Je rêve[11] d'enseigner de cette manière, d'accompagner le travail documentaire des élèves et de consacrer plus de temps à l'essentiel. Je suis persuadé que tous y gagneraient en plaisir et en efficacité. Mais il faut, pour que le rêve prenne corps, que chaque élève apprenne à traiter l'information. *C'est aujourd'hui la responsabilité première de l'école.* L'arrivée prochaine des outils multimédias au lycée renforce cette nécessité : ils ouvrent des espaces illimités de culture à ceux qui possèdent ces aptitudes. Mais ils laissent au bord du chemin ceux qui en sont dépourvus.

[9] Cela se fait sur la longue durée, par différentes approches : travaux introductifs, cours, exposés d'élèves, mise en oeuvre des notions en travaux dirigés, en environnement informatique, étude de situations extrêmes, travaux de synthèse (personnels ou en groupes).

[10] L'introduction de l'informatique en cours de mathématiques donne aux élèves de nouvelles initiatives. Il leur arrive d'expérimenter et d'émettre des conjectures que l'enseignant n'avait pas prévues. La séance en est enrichie. Mais certains enseignants sont fortement déstabilisés par cette perte de maîtrise de l'activité. On comprend leurs réticences face aux grands systèmes documentaires dont l'usage avec les élèves suppose de solides capacités d'adaptation.

[11] Est-ce vraiment utopique? L'école primaire Vitruve (20ème arrondissement de Paris) présentée lors de la « Marche du siècle » du 7 Janvier 1998 n'est pas loin de vivre ce rêve au quotidien. Ce n'est pourtant pas une école d'une zone « favorisée ».

SOMMAIRE

N° 90 – MARS 1998

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
80 F (130 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
120 F (200 F/2 ans) dans les autres cas.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 30.– F

UN THÉORÈME REMARQUABLE SUR LES COURBES DE L'ESPACE : JACOBI, EULER, GAUSS, CLAUSEN

par John McCLEARY, professeur au Vassar College, Poughkeepsie, New York

Durant l'année 1996-1997, le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Strasbourg avait organisé un atelier de lecture de quelques uns des grands textes du XIX^{e} siècle, parus dans le *Journal de Crelle* créé en 1826. John Mac Cleary, alors en séjour pour un an à l'U.F.R. de Mathématiques a participé assidûment à cet atelier, et y a fait un exposé intéressant qu'il a bien voulu rédiger et publier dans l'Ouvert.

Parmi les résultats géométriques les plus célèbres de Carl-Friedrich GAUSS (1777-1855) il y a sa contribution au théorème dit de Gauss-Bonnet. Nous considérons une surface F de l'espace et un triangle XYZ sur cette surface dont les côtés sont des segments géodésiques. L'application normale, $N : F \to S^2$, associe à chaque point de F l'un des points de la sphère unité S^2 se trouvant sur la ligne qui passe par l'origine et qui est parallèle à la direction normale à la surface F au point considéré. Dans les *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828) Gauss utilise l'application normale et certaines coordonnées spéciales pour prouver le résultat suivant.

Théorème. — *Soit XYZ un triangle géodésique sur une surface F de R^3. Notons ABC l'image de ce triangle par l'application normale à la surface. Alors*

$$\mathrm{aire}(ABC) = \pm(\angle X + \angle Y + \angle Z - \pi)$$

C'est une généralisation d'une grande portée du théorème donné en 1629 par Albert GIRARD (1595-1632) qui démontre le cas particulier d'un triangle limité par des segments de grands cercles sur une sphère. (Ce résultat est aussi attribué à Thomas HARRIOT (1560-1621) qui le découvrit en 1603 d'après une lettre écrite par Briggs en 1625. Voir [Rosenfeld 88].) Le signe $\pm$ est déterminé par la courbure gaussienne et peut être négatif quand la surface est *concavo-convexo* dans la terminologie de Gauss, c'est à dire courbée négativement.

Gauss fut manifestement heureux de ce résultat. Il écrit au § 20 des *Disquisitiones* : "Ce théorème, ..., si nous ne nous trompons pas, devrait être compté parmi les plus élégants dans la théorie des surfaces courbes, ...". Dans cet article nous présentons une preuve et une généralisation de ce théorème dues à C.G. JACOBI (1804-1851) qui parurent en 1836 dans le Journal de Crelle et encore dans l'Astronomische Nachrichten de SCHUMACHER en 1842. Les écrits de Jacobi diffèrent de façon significative des *Disquisitiones* de Gauss en ceci que l'approche est synthétique c'est à dire qu'elle utilise la géométrie élementaire de la sphère et non l'outil analytique que Gauss introduit dans les *Disquisitiones* et sur lequel est fondée la géométrie différentielle moderne. Pour simplifier, la généralisation de Jacobi supprime tout à fait la surface et énonce une propriété des courbes de l'espace.

Un autre but de cet article est de raconter l'histoire des deux preuves que Jacobi a données pour sa généralisation. En 1842 le travail de Jacobi attira l'attention de Thomas CLAUSEN (1801-1885), un astronome et mathématicien qui était considéré à son époque comme remarquablement doué en mathématiques. Le deuxième article de Jacobi, de 1842, commence par cette phrase : "Dans le numéro 457 de l'Astronomische Nachrichten Monsieur Clausen formule un doute non fondé sur l'exactitude du théorème que j'ai démontré dans le 16e volume du Journal de Crelle et dont le célèbre théorème de Gauss est un cas particulier".
C'est une réponse publique à la publication d'un doute émis sur un résultat mathématique. Nous allons parler des articles de Jacobi et Clausen aussi bien que d'un résultat d'Euler sur lequel Jacobi fonde sa seconde preuve. Ce qui ressort de l'histoire est un exemple particulier de l'accueil fait au travail de Gauss dans la période qui précède la grande construction de la géométrie différentielle par Gauss et Riemann. Jacobi était à la recherche des fondements de la géométrie comme l'étaient Gauss et Riemann. Le travail d'Euler sur la trigonométrie sphérique fournit à Jacobi les bases pour son théorème.

La première preuve de Jacobi
Journal de Crelle, tome 16 (1836), 344-350

Jacobi soumit un article en latin, intitulé *Démonstration et nouvelle généralisation d'un théorème de Gauss sur la courbure totale de triangles formés de géodésiques d'une surface donnée* *, au Journal de Crelle le 27 juillet 1836. Dans cet article Jacobi démontre le théorème suivant :

Théorème. — *Soient données XY, YZ et ZX trois courbes de l'espace telles que les directions normales à chaque paire de courbes se confondent en chaque sommet. Notons ABC l'image des normales aux courbes sur la sphère de rayon unité centrée à l'origine. Alors*

$$\mathrm{aire}(ABC) = \angle X + \angle Y + \angle Z - \pi$$

Rappelons que le vecteur normal à une courbe de l'espace est de norme un et dans la direction du rayon du cercle osculateur ou, de façon analytique, est obtenu en prenant la direction de la dérivée seconde d'une paramétrisation de la courbe par l'abscisse curviligne.

Au début de son article Jacobi rappelle le théorème de Gauss. Puis il affirme que ce théorème implique sa généralisation "*Cependant, pous considérer des courbes*

* traduit du latin par Margaret Fusco, Rachel Kitzinger et John McCleary

arbitraires, il faut admettre que ce sont des géodésiques d'une certaine surface, ...". Comme il a maintenant une preuve de sa généralisation il est clair que le point central de l'article n'est pas la généralisation. Il continue ainsi *"Le théorème précédent admet une présentation sous diverses formes, qui révèle mieux la qualité intrinsèque".*

Ainsi c'est la "qualité intrinsèque" que Jacobi recherche et la véritable source du théorème de Gauss. L'article se tourne maintenant vers l'explication de la dualité polaire sur une sphère selon L. EULER (1707-1783). Utilisant une version infinitésimale de la dualité polaire, Jacobi reprend le travail de son théorème qui conduit aux relations entre la surface ABC et son dual polaire, un hexagone $aa_1bb_1cc_1$ sur la sphère. Il établit alors un autre théorème dont les relations précédentes sont un corollaire et pour lequel il donne un bel argument synthétique. (Un compte rendu complet de l'article de Jacobi de 1836 peut être trouvé dans [McCleary 94].) En outre, pour se justifier d'avoir trouvé la "base réelle" du théorème de Gauss, Jacobi propose une preuve analytique de son second théorème à la manière des *Disquisitiones* de Gauss; il remarque : *"Si le théorème II, qui est accessible par une simple construction géométrique, a besoin d'une preuve par des formules analytiques, vous tombez dans des calculs assez compliqués."*

Ainsi il pense avoir trouvé un chemin plus direct pour le théorème de Gauss et par là un résultat majeur en géométrie des courbes et surfaces de l'espace.

Thomas CLAUSEN

Dans le numéro 257 des Astronomische Nachrichten de Schumacher de 1842, Thomas CLAUSEN publia sa *Berichtigung eines von Jacobis aufgestellten Theorems* (Une correction à l'un des théorèmes proposés par Jacobi). Dans cet article Clausen donne suite à la première des remarques de Jacobi. Etant données trois courbes de l'espace, XY, YZ et ZX, dont les normales s'accordent de part et d'autre des sommets, y-a-t-il en fait une surface sur laquelle ces courbes se trouvent être des géodésiques ? La réponse est NON et Clausen prouve, en utilisant la structure analytique de Gauss, qu'il y des conditions, même pour choisir deux courbes qui soient des géodésiques sur une surface. Il termine l'article avec cette remarque :
"Par conséquent, il n'est pas vrai que, pour deux et encore moins pour trois courbes sécantes et arbitraires de double courbure ayant la même normale aux points d'intersection, il y ait une surface sur laquelle ces courbes soient des géodésiques et Gauss déduisit son théorème pour les propriétés des surfaces courbes... ; une extension à la généralité comme celle prise par Jacobi n'est pas permise".

Qui était Thomas Clausen ? Examinons ici quelques moments de sa vie et de sa carrière - pour un excellent portrait de ce mathématicien, voir l'article de [Biermann 69]. Né à Nübel en Allemagne près de la frontière danoise, le 16 janvier 1801, son éducation fut prise en main à l'age de 12 ans par le pasteur local, Georg Holst, qui reconnut son talent et le recommanda à H.C. Schumacher (1780-1850) comme assistant à l'Observatoire d'Altona. Schumacher travailla avec Clausen de 1824 jusqu'en 1828 où ils eurent une sorte de brouille. Clausen alla alors à Munich où il travailla à l'Institut d'Optique de von Utzschneider qui donna à Clausen la liberté de travailler ses mathématiques et l'astronomie. Durant cette période il publia plusieurs articles dans le Journal de Crelle y compris un travail (vol. IV, 1829, 391-394) dans lequel il résoud un problème difficile et bien connu de Castillon.

En 1840, après une crise sévère de maladie mentale, Clausen quitta Munich et retourna à Altona auprès de Schumacher. Sans situation, Clausen chercha un appui auprès de Schumacher qui avait une correspondance considérable avec le monde scientifique de l'époque. Dans une lettre à Gauss, Schumacher demande que Gauss fasse la distinction chez Clausen entre son "caractère dérangé et ingrat" et son talent. Schumacher fait part de certains des derniers résultats de Clausen sur les nombres de Bernoulli à W. Bessel (1784-1846), un collègue de Jacobi. Bessel fut impressionné et suggéra à Jacobi que Clausen pouvait servir de "Rechenknecht" (une sorte de calculateur de service) dans le travail de Jacobi sur les variations planétaires et la théorie des perturbations, dans lequel les calculs étaient essentiels mais difficiles. Jacobi obtint 250 Talers de l'Académie de Berlin en juillet 1840 pour subvenir aux besoins de Clausen dans cette fonction.

Durant cette période (1840-1842) Clausen eut un grand élan de créativité. Il démontre le résultat qui porte son nom aujourd'hui, le théorème de Clausen-von Staudt, qui montre que, pour B_{2n} le nième nombre de Bernoulli

$$B_{2n} + \sum_{p-1|2n} \frac{1}{p} = \text{un entier}$$

Pour sa détermination de la trajectoire de la comète de 1770 il gagna un prix de l'Académie de Copenhague, ainsi que l'admiration de Bessel. Plus tard il impressionna Gauss avec sa découverte d'une lemniscate au moyen de la section d'un tore approprié. Il trouva une explication au fait que les lunules sont quarrables (au sens d'Hipparque) et il factorisa $2^{2^6} + 1 (= 274177 \times 67280421310721)$ par une méthode qui reste inconnue aujourd'hui. En 1842 Clausen fut appelé à l'Observatoire de Dorpat et il devint le directeur de cet observatoire en 1855, succédant à J.H. Madler (1794-1874).
Lorsqu'il reçut l'article de Clausen qui corrigeait le travail de Jacobi, Schumacher écrivit (le 1-IX-1842) à Gauss pour lui demander s'il voulait bien regarder l'article avant que lui, Schumacher, le publie. Il écrit, *"..., je ne veux pas voir Clausen s'opposer à Jacobi."* Cependant, il continue en disant, *"Si Clausen a raison, comme il me semble, c'est alors un leçon très utile pour Jacobi qui, avant les plus grands esprits, cherche toujours à améliorer ou au moins à généraliser"*. Selon [Koenigsberger], il y avait souvent des remarques désobligeantes sur Jacobi dans les correspondances de Gauss et Schumacher.

Gauss répondit à Schumacher (le 5-IX-1842) qu'il trouvait la réfutation de Clausen "à la généralisation alléguée de mon théorème entièrement justifiée." Schumacher publia alors l'article.

Jacobi revint à l'automne de 1842 d'un long voyage en Europe durant lequel il visita la France et l'Angleterre et trouva son travail apprécié en dehors de son cercle germanique. Il eut à coeur de répondre lui-même à Clausen avant que son enseignement ne commence et, le 16-X-1842, il soumit son second article sur l'extension du théorème de Gauss, intitulé *Über einige merkwürdige Curventheoreme.*

Dans les deux prochains paragraphes nous présentons, d'abord un exposé des contributions d'Euler à la trigonométrie sphérique sur lesquelles Jacobi base son travail, et ensuite la seconde preuve de Jacobi. Il est bon de noter cependant que, bien que Jacobi se soit trompé dans ses remarques d'introduction, sa preuve de 1836 ne dépend nullement de ces remarques corrigées par Clausen (voir [McCleary 94]). Il semble que le doute de Clausen, l'enthousiasme de Schumacher, et l'approbation de Gauss n'étaient pas fondés sur une lecture complète de l'article de Jacobi.

Euler et la trigonométrie sphérique

Les contributions d'Euler à la trigonométrie sphérique sont les bases de développements futurs sur le sujet (voir les articles de Chemla). Dans notre présentation nous mentionnons quelques-unes de ses idées principales.

I. Dans le mémoire de 1753 Euler introduit la notation moderne, à la fois pour la dénomination des triangles et pour les fonctions. Il distingue une fonction de son argument en place d'une pratique plus courante à l'époque qui était d'écrire des relations entre les valeurs traduisant leurs significations géométriques. L'habitude de nommer le côté opposé au sommet avec la minuscule de la lettre majuscule nommant le sommet apparait dans ce mémoire et joue un rôle dans la description que fait Euler de la dualité polaire.

II. Le mémoire applique le calcul des variations géométriquement pour obtenir les formules connues de trigonométrie sphérique à partir des principes variationnels. Le problème de *résolution d'un triangle sphérique* est traité de façon minutieuse - étant donnés trois éléments parmi les trois angles et les trois côtés d'un triangle, déterminer les autres éléments. Euler organise ses 5 formules d'une manière qui révèle la dualité polaire mais il ne présente pas ceci comme faisant partie de son étude. [Chemla] prétend qu'Euler avait à l'esprit des surfaces plus générales quand il écrivit le mémoire, en particulier la surface de la Terre comme une sphéroïde. La généralisation de ces méthodes est réalisée dans les *Disquisitiones* de Gauss.

III. Dans le traité de trigonométrie sphérique de 1779, Euler s'y prend de façon synthétique pour en déduire les formules. Utilisant la projection centrale il prouve certaines formules de base et obtient les autres par traitement algébrique. Au paragraphe 12 il présente la *règle de réécriture* - "...échanger minuscule et majuscule et prendre l'opposé du cosinus". Le principe sous-jacent qui prouve la règle de la réécriture est la dualité polaire. A chaque grand cercle nous pouvons associer son pôle, qui est le point éloigné de $\frac{\pi}{2}$ de chaque point du grand cercle et situé dans le demi-espace supérieur déterminé par une orientation sur le grand cercle. A un triangle sphérique ΔABC nous pouvons associer son dual polaire $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ où $\hat{A}$ est le dual polaire de BC, $\hat{B}$ le dual polaire de AC et $\hat{C}$ le dual polaire de AB. La règle de réécriture découle du théorème suivant :

Théorème. —

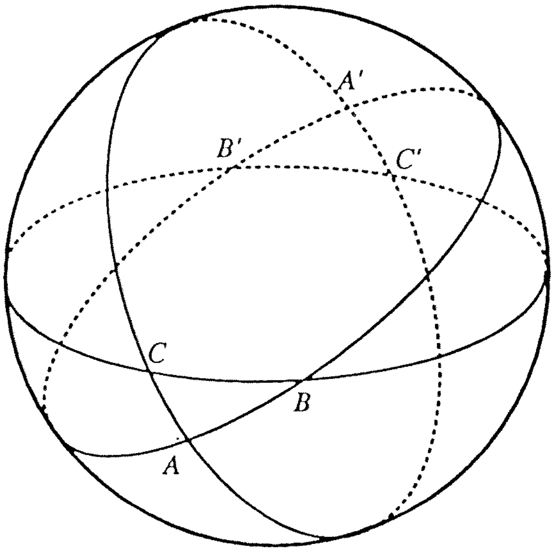
$$\hat{c} = \hat{A}\hat{B} = \pi - \angle C, \quad \hat{b} = \hat{A}\hat{C} = \pi - \angle B, \quad \hat{a} = \hat{B}\hat{C} = \pi - \angle C.$$

$$\angle\hat{A} = \pi - a, \quad \angle\hat{B} = \pi - b, \quad \angle\hat{C} = \pi - c.$$

IV. Dans une note de 1778, Euler donne sa preuve bien connue du théorème de Girard :

Théorème de Girard. — *Si ΔABC est un triangle formé d'arcs de grands cercles sur une sphère de rayon 1 alors*

$$\text{aire}(ABC) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$



(Démonstration d'Euler, 1781). Rappelons la définition d'une *lune* sur la sphère. C'est la région entre deux grands cercles. Si l'angle central qui détermine la lune est θ, alors l'aire de cette lune est $2\theta = (\theta/2\pi).4\pi$. Les grands cercles $\widehat{AB}$ et $\widehat{AC}$ forment deux lunes $ABA'C$ et $A'B'AC'$, et les deux ensembles ont pour aire $4\angle A$. Aussi les deux lunes couvrent ΔABC et $\Delta A'B'C'$ qui sont antipodiques et congrues. Comme on prend toutes les lunes associées au triangle ΔABC, on trouve que :

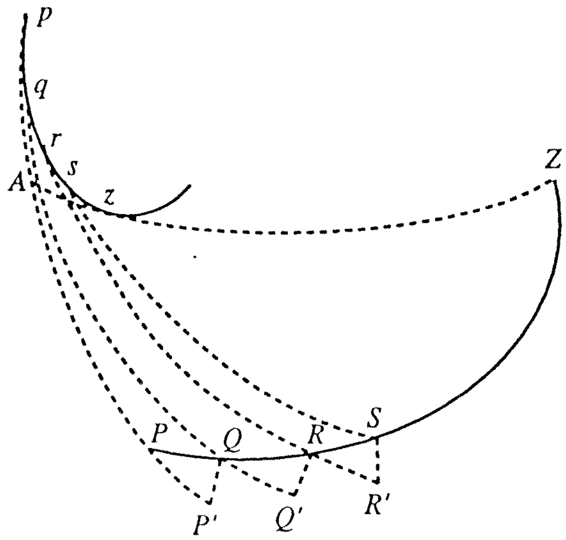
$$4\pi + 4\angle A + 4\angle B + 4\angle C - 6\,\text{aire}(\Delta ABC) + 2\,\text{aire}(\Delta ABC).$$

Il suit que aire(ΔABC) $= \angle A + \angle B + \angle C - \pi$, l'excès angulaire de ΔABC.
Dans l'approche que fait Jacobi du théorème de Gauss, il utilise la dualité polaire synthétique de Euler dans sa première démonstration et les lunes avec leur aire dans la seconde. Nous allons examiner cette seconde preuve dans ce qui suit.

La réponse de Jacobi
Astronomische Nachrichten tome 20 (1842), 115-120

Si $\alpha : [u, v] \to R^3$ est la courbe XY, paramétrisée par la longueur d'arc, soit ab le chemin déterminé par les tangentes $\alpha'(s)$ et AB le chemin déterminé par les normales $N(s)$ aux points de XY.
Soit $u < s_1 < s_\omega < v$ et $p = \alpha'(s_1), q = \alpha'(s_1 + ds_1) = \alpha'(s_2), r = \alpha'(s_2 + ds_2) = \alpha'(s_3)$, jusqu'à $z = \alpha'(s_\omega)$. Soit $P = N(s_1), Q = N(s_2), R = N(s_3), \ldots, Z = N(s_\omega)$. On a alors

$$pP = qQ = rR = \ldots = zZ = \pi/2.$$



On prolonge qP jusqu'à P', rQ à Q', etc. d'après la condition $qP' = rQ' = \ldots = \pi/2$. Donc les régions $qP'Q, rQ'R, \ldots$, sont chacune la moitié d'une lune. Alors, les aires de ces régions sont déterminées par les angles centraux, $\angle P'qQ, \angle Q'rR$, etc. Si l'on ne tient pas compte des triangles $\Delta PP'Q$, $\Delta QQ'R$, dont l'aire est un infiniment petit du second ordre, alors on trouve que

$$\begin{aligned}\angle PpQ + \angle QqR + \ldots &= \text{l'aire formée par } pz, zZ, pZ, \text{et } pP \\ &= T.\end{aligned}$$

On prolonge l'arc du grand cercle zZ jusqu'à pP au point A. Donc

$$\text{aire}(pAz) + \text{aire}(ZAP) = T.$$

Pour les triangles sphériques l'aire est l'excès angulaire, alors on a grâce à $\angle Azp = 0$:

$$\text{aire}(pAz) = \angle pAz + T - \pi.$$

Il suit de là que

$$\begin{aligned}\text{aire}(ZAP) &= T - \text{aire}(qAz) = T - \angle qAz - T + \pi \\ &= \pi - \angle qAz = \angle ZAP.\end{aligned}$$

Alors, l'aire de ΔZAP est aussi un angle $\angle ZAP$.

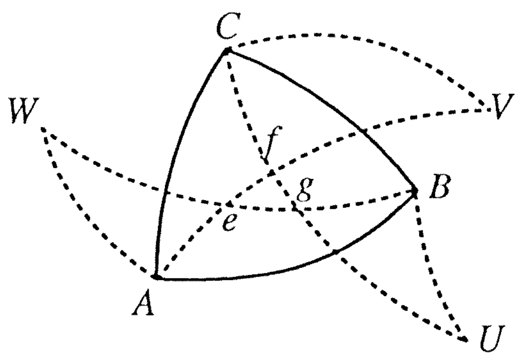
Le plan osculateur du point $\alpha(s_1)$ est le plan $OpP = OqA$ et au point qui correspond à z, le plan osculateur est le plan $OzZ = OAz$. Alors, $\angle qAz$ est l'angle formé par les plans osculateurs aux points $\alpha(s_1)$ et $\alpha(s_\omega)$. Nous avons montré :

Théorème I. — *Du centre d'une sphère on prend une ligne parallèle au rayon de courbure d'une courbe donnée XY, qui coupe la sphère selon une ligne PZ et, en même temps, on coupe la sphère par les plans parallèles aux plans osculateurs aux points X et Y qui construisent les arcs de grands cercles PA et ZA. On trouve alors que le chemin PZ a une longueur égale à l'angle $\angle PAZ$ et $\angle PAZ$ est supplémentaire à l'angle formé par les plans osculateurs aux points X et Y.*

Démonstration du théorème principal : On associe au triangle ΔXYZ son image normale ABC sur S^2. Des sommets A, B, et C on construit les arcs suivants de grands cercles,

BU sur le plan osculateur de la courbe YZ au point Y,
CU sur le plan osculateur de la courbe YZ au point Z,
AV sur le plan osculateur de la courbe XZ au point X,
CV sur le plan osculateur de la courbe XZ au point Z,
AW sur le plan osculateur de la courbe XY au point X,

BW sur le plan osculateur de la courbe XY au point Y.



Selon la démonstration du théorème I, on trouve :

$$\begin{aligned}
\text{aire}(BUC) &= \angle BUC = \text{aire}(BgU) + \text{aire}(BgC)\\
\text{aire}(CVA) &= \angle CVA = \text{aire}(CfV) + \text{aire}(CfA)\\
\text{aire}(AWB) &= \angle AWB = \text{aire}(AeW) + \text{aire}(AeB)
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
&\text{aire}(BUC) + \text{aire}(AVC) + \text{aire}(AWB) - \text{aire}(ABC)\\
&\qquad = \text{aire}(BgU) + \text{aire}(CfV) + \text{aire}(AeW) - \text{aire}(efg).
\end{aligned}$$

Car tous les triangles sont formés par des arcs de grands cercles; on peut donc remplacer l'aire par l'excès angulaire selon le théorème de Girard. Alors,

$$\begin{aligned}
&\angle BUC + \angle AVC + \angle AWB - \text{aire}(ABC)\\
&\qquad = \angle BUC + \angle BgU + \angle gBU - \pi\\
&\qquad + \angle AVC + \angle VfC + \angle fCV - \pi\\
&\qquad + \angle AWB + \angle AeW + \angle eAW - \pi\\
&\qquad - \angle AeW - \angle VfC - \angle BgU + \pi\\
&\qquad = -2\pi + \angle BUC + \angle AVC + \angle AWB + \angle gBU + \angle fCV + \angle eAW.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\text{aire}(ABC) = 2\pi - \angle eAW - \angle fCV - \angle gBU$. Pour terminer la démonstration, on montre que $\angle eAW = \pi - \angle X$, $\angle gBU = \pi - \angle Y$, et $\angle fCV = \pi - \angle Z$. Car les sommets partageant les directions normales, $\angle X$ est borné par les plans osculateurs au point X sur XY et XZ. Mais $\angle eAW = \angle VAW$ et AV, AW sont les arcs de grands cercles formés par les plans osculateurs au point X sur XY et XZ. D'après le theorème I, $\angle VAW = \pi - \angle X$. D'après le même argument aux points Y et Z, on a $\angle gBU = \pi - \angle Y$, et $\angle fCV = \pi - \angle Z$.

Finalement on a

$$\begin{aligned}\text{aire}(ABC) &= 2\pi - (\pi - \angle X) - (\pi - \angle Y) - (\pi - \angle Z)\\ &= \angle X + \angle Y + \angle Z - \pi.\end{aligned}$$

Conclusion

Jacobi termine son article de 1842 par un résultat remarquable :

LE BEAU COROLLAIRE. Si l'on donne une courbe arbitraire, continue, et fermée dans l'espace, et on prend le chemin déterminé par l'image normale sur la sphère, alors ce chemin ainsi construit divise la sphère en deux parties de même aire.

De toutes les mathématiques si riches contenues dans cet échange, ce corollaire, énoncé sans preuve à la fin de l'article de Jacobi, est le seul résultat que l'on trouve dans la plupart des livres récents (voir par ex. Spivak, vol. 3, p. 407), et lorsqu'on le trouve, la preuve est beaucoup plus dans l'esprit de Gauss et Riemann. Jacobi a souvent enseigné la théorie des courbes et surfaces (15 semestres de sa carrière d'enseignant). Sa réponse au théorème de Gauss fut de retourner à Euler qui avait façonné la théorie moderne de la trigonométrie sphérique, et de chercher une preuve synthétique. Cela établit une sorte de parallèle aux deux preuves qu'Euler a données du théorème de Girard, l'une basée sur des principes variationnels (*Disquisitiones*), l'autre synthétique (Jacobi). Clausen par contre, avait absorbé les méthodes de Gauss, et répondu au défi de Jacobi, en mettant en évidence une faille dans son argument final erroné.

Bibliographie

Biermann, K.-R., Thomas Clausen, Mathematiker und Astronom, Jour. de Crelle CCXVl (1969), 159-198.

Chemla K., The background to Gergonne's treatment of duality : Spherical trigonometry in the late 18th century, in D.E. Rowe and J. McCleary (eds.), The History of Modern Mathematics, vol. 1 331-359, Academic Press, 1989.

Chemla, K., Euler's work in spherical trigonometry : Contributions and applications, to appear in Euler's Opera Omnia (3) vol. 10, Über Magnetismus, Elektrizitat, und Wärme.

Clausen, T., Berichtigung eines von Jacobi aufgestellten Theorems, Schumacher Astronomische Nachrichten vol. 20 (1842) 32-40.

Euler, L.,Principes de la trigonométrie sphérique tires de la méthode des plus grands et plus petits, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin , vol. 9 (1753), 223-257.

Euler, L., De mensura angulorum solidorum, Acta academiae scientarum Petropolitanae vol. 2 I (1778 : II) (1781), 31-54.

Euler, L., Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis breviter et dilucide derivata, Acta academiae scientarum Petropolitanae vol. 3 I (1779 : I) (1782), 72-86.

Gauss, C.-F., Disquisitiones generales circa superficies curvas, commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores, vol. VI, 1828. (Astérique vol. 62(1979), P. Dombrowski).

Jacobi, C.G.J., Demonstration et amplifactio nova therorematis Gaussiani de curvatura integra triangli in data supreficie e lineis brevissimis formati, Crelle vol. 16 (1836), 344-350.

Jacobi, C.G.J., Uber einige merkwürdige Curventheoreme, Schumacher Astronomische Nachrichten , vol.20 (1842), 344-350.

Koenigsberger, Leo, C.G.J. Jacobi, Teubner, Leipzig, 1904.

McCleary, J., A theory of reception for the history of mathematics, in The History of Modern Mathematics, volume I, edited by D. Rowe and J. McCleary, Academic Press (1989), 3-14.

McCleary, J., Geometry from a Differentiable Viewpoint, Cambridge University Press, New York, 1994.

McCleary, J., On Jacobi's remarkable curve theorem, Historia Mathematica vol. 21 (1994), 377-385.

Reich, K., Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann, Archive for the History of Exact Sciences vol.11 (1973), 273-382.

Rosenfeld, B., A History of Non-Euclidean Geometry, Springer-Verlag, New York, 1988.

Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, volume III, Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1975.

Cet article est basé sur l'exposé : "Jacobi comme géomètre" donné dans l'Atelier de lecture - Histoire des mathématiques à Strasbourg, en avril 1997. Je remercie J.-P. FRIEDELMEYER et N. SCHAPPACHER pour les encouragements à présenter ce travail, et pour avoir organisé un séminaire stimulant durant mon séjour d'une année à Strasbourg.

ECHANGES AVEC LA RUSSIE

par Nicole VOGEL,
Lycée Schuman , Haguenau.

Impressions de Russie.

Depuis quelques années, l'APMEP entretient des liens étroits avec l'Association Russe des Professeurs de Mathématiques, la PAYM (cela se prononce «RAOUM»). Cela a favorisé entre autres quelques échanges d'enseignants. C'est ainsi que j'ai eu le plaisir d'accueillir en France une collègue russe, Olga Boulytcheva, en mars 1995. Ce fut le début d'une grande amitié et d'un intérêt passionné de ma part pour la Russie et de mes amis russes pour la France.
J'ai passé deux semaines de vacances en août 1996 à Kalouga chez Olga et sa famille.
Au retour, j'ai accueilli son mari Vladimir en Alsace, et je l'ai accompagné à Metz, à l'Université d'été « Probabilités et Statistiques » du 27 au 31 août 1996.
Je suis retournée une deuxième fois à Kalouga, pour une semaine début Octobre, et j'y ai participé au « Congrès International sur l'Enseignement des Probabilités et des Statistiques » proposé par la PAYM du 1er au 4 Octobre.
En avril 1997, l'APMEP a organisé un voyage en Russie pour les Français qui avaient reçu un collègue russe en 1995. J'ai donc fait un troisième voyage à Kalouga du 11 au 23 avril 1997, avec cette fois-ci des objectifs de visites d'établissements scolaires et universitaires.
Kalouga a 250 000 habitants. C'est une ville ancienne, très agréable, avec beaucoup de vieux bâtiments de différents tons ocre, beaucoup de parcs et de verdure, située sur les rives de l'Oka, affluent de la Volga, à environ 180 km au sud-ouest de Moscou.
A chacun de mes séjours, l'accueil a été extrêmement chaleureux. J'ai maintenant de nombreux amis et connaissances en Russie. Ils m'invitent souvent à partager le thé et à goûter les nombreuses et excellentes spécialités russes accompagnées de vodka et de romances et ne me laissent pas repartir sans un cadeau de chacun d'entre eux.
J'ai vu passer en pointillés l'été, l'automne et la fin de l'hiver russe. Les saisons sont très marquées et la vie s'adapte. En été et automne, nous avons passé beaucoup de temps dans les jardins des datchas, invités par les uns et les autres à manger des «chachlyki » (sorte de brochettes). En avril, c'était encore l'hiver, alors qu'en France tout était très vert et que les arbres avaient presque tous terminé leur floraison. Je suis arrivée sous la neige. Les petits lacs étaient encore gelés et dans la forêt, il restait d'assez grandes étendues enneigées. Il n'y avait pas d'herbe verte, seulement des restes roussis. Il faisait froid dehors et très chaud dans les maisons surchauffées...

En octobre et avril, mon voyage avait des objectifs professionnels.
En octobre, j'ai surtout découvert l'histoire de l'enseignement des probabilités en Russie et les expériences actuelles dans ce domaine.

J'ai visité l'école « numéro 24 » de Kalouga (les écoles ont rarement des noms, elles portent des numéros), où j'ai assisté à des cours de mathématiques et de français. C'est l'école de Macha, la fille d'Olga et Vladimir.
En avril, j'ai aussi visité l'école « numéro 710 » de Moscou, avec mes collègues français. C'est l'école où enseigne Evgueni Bounimovitch, vice-président de la PAYM.
Ces écoles réunissent toutes les classes de la première (CP) à la onzième (terminale), un peu comme nos lycées jusque dans les années 60.
J'ai aussi suivi des cours de mathématiques, d'informatique et de français à l'Université Pédagogique de Kalouga où enseignent Olga et Vladimir Boulytchev.
J'ai participé à des cours de préparation aux Olympiades de mathématiques dans les locaux de l'université, et à la finale nationale des Olympiades de mathématiques qui a eu lieu à Kalouga du 18 au 25 avril 1997.

Je voudrais vous faire partager quelques-unes de mes impressions sur l'enseignement des mathématiques en Russie.
Il est évident que tout cela ne prétend à aucune objectivité. Je n'ai eu ni suffisamment d'informations, ni visité assez d'écoles pour pouvoir conclure quoi que ce soit de général.

Je vais essayer de donner beaucoup d'énoncés d'exercices, car je pense que cela permet mieux de comprendre l'activité des élèves russes. J'ai fait moi-même toutes les traductions, sauf celles des deux exercices de probabilités du manuel d'E. Bounimovitch, qui sont de lui.
J'ai une fois de plus vérifié avec plaisir que les mathématiques sont un langage universel et qu'il est assez facile de comprendre un énoncé en langue étrangère. J'espère cependant ne pas avoir fait trop d'erreurs de sens et ne pas avoir déformé les contenus mathématiques.

L'enseignement des mathématiques en Russie : pour tous les élèves ou pour la sélection des élites ?

En Russie, il n'y a pas d'école maternelle. On entre à l'école à 7 ans, en classe de 1ère, qui est donc l'équivalent de notre CP. On passe ensuite en 2ème, 3ème ... et ainsi de suite jusqu'en 11ème qui correspond à notre terminale.
Les cours destinés à tous ont en général un effectif voisin de 25 élèves.
Une séquence a 45 minutes, c'est la durée d'un cours au moins jusqu'en 8ème. Dans les grandes classes, tout comme à l'université, un cours couvre souvent deux séquences.

1) Les cours de base, plutôt techniques, et pourtant...

a) Du très classique...

Les cours de mathématiques de base semblent avoir un contenu très classique : on enseigne beaucoup de techniques suivies de nombreux exercices d'application.

Par exemple, en classe de 8ème, j'ai assisté à une séance d'exercices sur des additions de fractions sous forme littérale. Le plus simple de cette liste était $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$, mais cela devenait rapidement beaucoup plus complexe. Les élèves semblaient bien se débrouiller. Chacun travaillait seul à sa table et le professeur appelait successivement des élèves à son bureau et corrigeait les cahiers avec eux. Ils utilisaient une présentation qui semble générale dans les écoles russes : $\frac{a^{(a}}{bc}+\frac{b^{(b}}{ca}+\frac{c^{(c}}{ab}=\frac{a^2}{abc}+\frac{b^2}{abc}+\ldots$

Mais à aucun moment le professeur n'a fait aucun rappel ni aucun corrigé destiné à l'ensemble de la classe.

J'ai aussi assisté à deux cours sur les vecteurs en classe de 9ème.
On utilisait la définition et les propriétés du produit scalaire pour calculer plus que pour démontrer, et, pour des vecteurs repérés dans une base du plan, on apprenait à reconnaître de façon très classique s'ils étaient colinéaires ou non, orthogonaux ou non.

On emploie les *notations* $\vec{u}\uparrow\vec{v}$ pour deux vecteurs colinéaires, $\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}$ pour deux vecteurs colinéaires de même sens, $\vec{u}\uparrow\downarrow\vec{v}$ pour deux vecteurs colinéaires de sens contraires, $|\vec{u}|$ pour la norme, ΔABC pour le triangle ABC et $\angle A$ pour l'angle A.

Voici à peu près la liste des exercices proposés pendant l'une de ces séances (les premiers ont été préparés à la maison, le professeur en donne rapidement un corrigé avec l'aide de quelques élèves qui vont au tableau) :

- On donne $\vec{a}(-1,0)\ \vec{b}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\ \vec{c}(\frac{2}{3},\frac{2}{3})\ \vec{d}(\frac{3}{5},\frac{4}{5})\ \vec{e}(0,1)\ \vec{f}(\sqrt{2},-1)$.

  Quels sont les vecteurs de norme 1 ?

  Déterminer *a* et *b* tels que $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{e}$.

  On donne $\vec{n}(5,y)$; trouver y tel que $\vec{d}\uparrow\vec{n}$; tel que $\vec{d}\perp\vec{n}$.

Les réponses proposées pour cette dernière question sont $y=6\frac{2}{3}$ et $y=-3\frac{3}{4}$, et le calcul avec ce type de nombres semble aussi rapide dans cette classe qu'avec des fractions ordinaires.

- Déterminer la longueur de la médiane issue de A d'un triangle ABC, connaissant les longueurs *a, b, c* de ses côtés.

  (Dans le cours précédent, les élèves ont vu que dans un parallélogramme ABCD, $AC^2+BD^2=2\,AB^2+2\,BC^2$.)

Dans une classe parallèle, le même professeur propose aussi :

- Dans un repère orthonormal, on donne le triangle ABC par $A(1,1)\ B(4,1)\ C(4,5)$. Calculer $\cos\angle A$.

Les élèves calculent $\cos\angle A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$ sans faire de figure. La particularité du triangle (rectangle) n'est donc pas exploitée. Ils ne sont apparemment pas habitués à faire des figures pour conjecturer.

- ABC est équilatéral ; on donne $A(0,0)$ $B(4,0)$ $C(x,y)$ $x>0, y>0$; A_1 , B_1 et C_1 sont les milieux des côtés.

  On cherche AA_1 , BB_1 , et les coordonnées de $\overrightarrow{AA_1}$ et $\overrightarrow{BB_1}$.

Là aussi, la figure vient très tard, ce qui ne permet pas d'exploiter au mieux ses propriétés.
On commence plutôt par des généralités comme : ΔAC_1C : $\angle A = 60°$; $\angle C_1 = 90°$; $\angle C = 30°$.

Pour tous ces exercices, les premiers qui trouvaient étaient rapidement invités à donner leur solution.
J'ai eu l'impression qu'on ne se préoccupait pas tellement de savoir si l'élève moyen avait compris ou pas.
Cette impression est renforcée par le fait qu'on n'écrit pas beaucoup, et lorsqu'on écrit, ce sont surtout des calculs et très peu d'explications ou de raisonnements.
D'ailleurs, les étudiants de l'Université Pédagogique ont été très surpris lorsque j'ai montré des copies de mes élèves français au Congrès d'octobre. Ils trouvaient que ce n'étaient pas des copies de math parce qu'il y avait plus de texte que de formules ou de calculs et ils ont demandé pourquoi ils écrivaient tout ça.

En fin de 9ème, deux ans avant la fin du lycée, les élèves passent un premier examen, où nous retrouvons ce type d'exercices de mathématiques.
Ce qui est très étonnant pour nous, c'est qu'un recueil d'énoncés est publié, que les élèves travaillent toute l'année les exercices de ce recueil et que le sujet de l'examen y est choisi.

Voici deux exemples de sujets d'algèbre (il y a aussi un sujet de géométrie, mais je n'ai pas le recueil de géométrie).

Sujet « numéro 5 »

1) Simplifier l'expression $\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\right):\frac{2}{a-b}$
2) Résoudre l'équation $x^2-5x-1=0$
3) Résoudre le système d'inéquations $\begin{cases}2+x>0\\1-2x>0\end{cases}$
4) Résoudre le système d'équations $\begin{cases}x^2-y=-2\\2x+y=2\end{cases}$
5) a) Tracer le graphe de la fonction $y=2x-5$ (Note : c'est le texte russe qui parle de fonction)
   b) Est ce que ce graphe contient le point A(-35 ; -65) ?
6) Donner la valeur de l'expression $-\frac{1}{4}xy$ pour $x=\sqrt{2}$ et $y=\sqrt{6}$
7) Trouver cos a, si $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ et $90°<\alpha<180°$

Sujet « numéro 34 »

1) Simplifier l'expression $\frac{3b^2+2b}{b^2-4}-\frac{b}{b-2}$

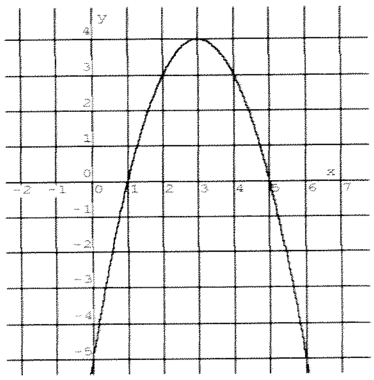
2) A l'aide de la formule $\gamma=\frac{P}{V}$, donner l'expression de V.

3) Résoudre le système d'inéquations $\begin{cases} 5x-1>4{,}5 \\ 2-3x>1 \end{cases}$

4) Calculer les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $y=4x^2+8x-5$ avec les axes du repère.

5) Un bateau peut parcourir la distance entre deux villages, situés au bord d'une rivière, en 4 heures dans le sens du courant et en 8 heures en remontant le courant. La vitesse du courant est de 2 km/h.
Trouver la vitesse propre du bateau et la distance entre les deux villages.

6) A l'aide du graphe de la fonction donné ci contre, déterminer :
   a) la valeur de y lorsque $x = 6$;
   b) le maximum de la fonction ;
   c) les valeurs de x pour lesquelles $y < 0$.



7) Trouver cos 405°.

Tout cela est finalement assez banal et répétitif, d'autant plus que l'apprentissage s'appuie sur ces modèles.
Cela paraît quand même assez efficace, puisque les élèves semblent très bons en calcul algébrique et numérique.
De plus, la calculatrice est très peu présente.

b) mais aussi beaucoup de liberté...

Cependant, il ne faudrait pas en conclure trop vite que l'enseignement russe des mathématiques, même celui qui est destiné à tous les élèves, se limite aux exemples que nous venons de voir.
La Russie est actuellement dans une période de grands changements qui a comme inconvénients le flou et la désorganisation qu'ils entraînent, mais comme avantages de larges possibilités d'innovation. Presque tout semble possible, bien que l'époque de la liberté totale commence à se transformer en une étape de restructuration et de définition de nouvelles règles.
C'est dans ce contexte que je situe les manuels dont E. Bounimovitch est co-auteur et les cours auxquels nous avons assisté à l'école expérimentale de Moscou.

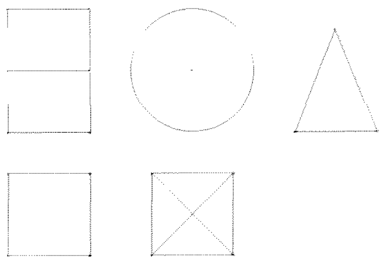
Dans ces manuels de l'équipe Dorofeev - Charigin, tout est nouveau : la présentation, mais aussi les programmes.
On y introduit par exemple les probabilités et la géométrie dans l'espace dès la classe de 5ème (notre 6ème), ce qui ne se faisait pas d'habitude.
Ainsi, on trouve par exemple dans le manuel de 6ème les deux exercices de probabilité suivants :

Exercice 1
Sacha a une boîte contenant 25 boules blanches et 50 boules rouges. Macha a une boîte contenant 40 boules blanches et 80 rouges. Chacun tire une boule de sa boîte et la remet dedans, puis recommence. Les tirages sont répétés jusqu'à ce que l'un d'entre eux tire une boule blanche. Celui-ci a alors gagné. Si les deux tirent une boule blanche en même temps, la partie est nulle et ils recommencent.
1) Sacha pense que le jeu n'est pas équitable car il a moins de boules blanches que Macha. Etes-vous d'accord avec lui ? Expliquez.
2) Macha pense que le jeu n'est pas équitable car Sacha est plus fort qu'elle en probabilités. Etes-vous d'accord avec elle ? Expliquez.
3) A votre avis, le jeu est-il équitable ?

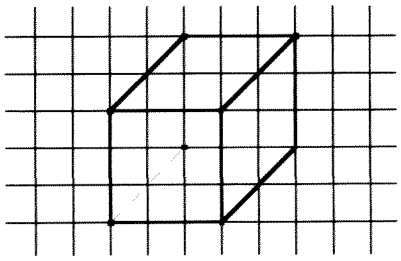
Exercice 2
Oleg a joué pendant trois mois à une loterie dont le tirage est hebdomadaire. Il n'a jamais gagné. Il continue à jouer car il pense que la loterie est un jeu aléatoire, que parfois on gagne et parfois on perd. Et, puisqu'il n'a pas gagné pendant longtemps, il pense qu'il va bientôt gagner. Etes-vous d'accord avec lui ?

Malheureusement, je n'ai assisté à aucun cours de probabilités à ce niveau.

La classe de 5ème que nous avons visitée à Moscou utilise ces manuels.
Nous y avons assisté à un cours de géométrie dans l'espace très vivant.
Il y a 26 élèves dans la classe.
Nous sommes dans une salle réservée à l'enseignement des mathématiques, où il y a beaucoup de matériel : une télé, un rétroprojecteur, mais surtout de nombreux volumes, cubes, cônes, cylindres, pyramides, beaux objets d'une vingtaine de centimètres de hauteur, et d'autres en fil de fer.
La plus grande partie de la leçon se fait oralement. Les élèves sont très attentifs, participent beaucoup, lèvent la main, mais ne parlent que lorsqu'ils sont interrogés. Ils se lèvent d'ailleurs lorsqu'ils sont invités à prendre la parole.
Le professeur, une jeune femme dynamique et enthousiaste, demande d'abord où on peut trouver les solides usuels présentés dans notre environnement.
Puis elle montre quelques figures préparées au tableau :



Elle demande quels sont les solides qu'il est possible de voir ainsi et comment il faut les placer pour avoir cette vue. Les élèves viennent manipuler les objets pour montrer à leurs camarades.
On fait ensuite des dessins de pyramides, en perspective cavalière (sans en fixer les règles), avec différentes bases, et on en compte le nombre de sommets et de faces.
Réciproquement, il faut préciser la base d'une pyramide à mille faces.
On s'intéresse ensuite à la surface latérale d'un cube de 3cm de côté, le problème étant de savoir s'il est possible de découper le patron d'un tel cube dans une feuille rectangulaire de côtés 3cm et 16cm.
On finit la leçon en dessinant sur le cahier un cube de 3 cm de côté en perspective cavalière, et en le divisant sur le dessin en cubes de 1cm de côté. Il faut trouver combien de fois il faut couper le cube (par des plans) pour qu'il soit décomposé ainsi.
Pour cet exercice de dessin, le seul travail écrit fait pendant la séance, les élèves ont beaucoup de mal à diviser leur cube en cubes unités, surtout parce que l'élève envoyé au tableau pour représenter le grand cube a choisi le quadrillage du tableau de façon peu judicieuse :



Beaucoup d'autres copient ce cube avec le même choix de quadrillage et divisent alors les arêtes orthogonales au plan du tableau en deux et non en trois.
Le professeur ne se rend pas vraiment compte de ce problème car elle ne circule pas dans la classe, ne corrigeant l'exercice qu'au tableau.

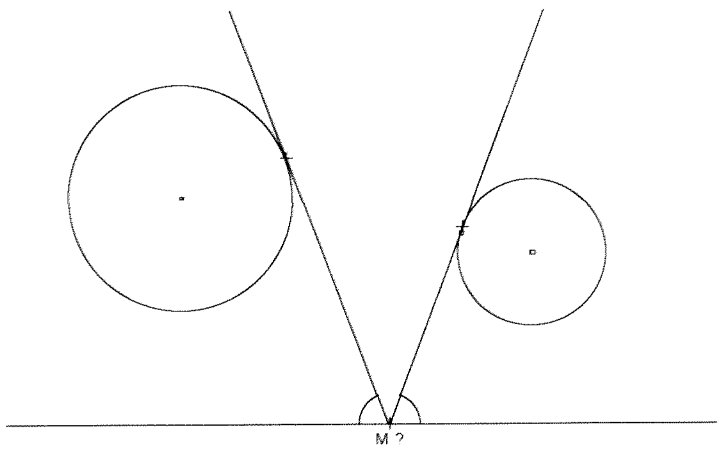
c) Et les élèves en difficulté ?

Dans l'école expérimentale de Moscou, numéro 710, on trouve théoriquement les élèves du quartier. C'était la règle à l'époque soviétique où existait une carte scolaire.
Maintenant, les parents sont libres d'envoyer leurs enfants dans l'école de leur choix, l'école étant libre de les accepter on non. Il y a donc des concours plus ou moins difficiles pour entrer dans certaines écoles.
Certaines ne prennent que des élèves primés aux olympiades. Ce n'est pas le cas de l'école numéro 710, mais le niveau y est quand même plus élevé que la moyenne.

De manière générale, pour les élèves en difficulté, les écoles prévoient des cours de rattrapage avec des manuels spéciaux.
Par exemple en mathématiques en 6ème, il y a 5 cours (séquences) hebdomadaires pour tous, 2 cours supplémentaires pour les meilleurs, 2 cours de rattrapage pour les plus faibles, où les élèves de deux classes parallèles sont regroupés.
Le redoublement existe, mais moins qu'en France. Il n'y a pas d'habitude dans ce domaine, car à l'époque soviétique, il n'y avait pas de mauvais élèves, seulement des mauvais profs. On ne mettait donc pas de mauvaises notes.
Malgré ces explications, nous ne comprenons pas bien pourquoi la quasi totalité des élèves que nous voyons semblent très motivés, travailleurs et peu en difficulté.
Des statistiques sur la répartition des élèves dans les différentes écoles et suivant les classes d'âge nous renseigneraient peut-être davantage. Par exemple, quel pourcentage d'une classe d'âge termine l'équivalent de notre lycée d'enseignement général ? Et toutes les écoles russes de ce type sont-elles de niveau comparable ? (Cela pourrait par exemple se mesurer aux taux d'admission dans les meilleures universités.)

2) Les cours facultatifs, avec des exercices de recherche

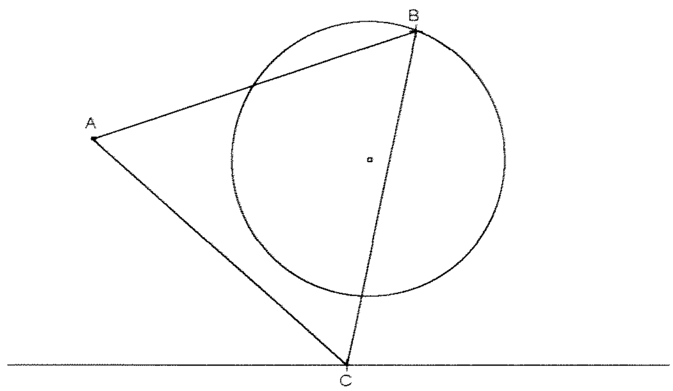
Toujours à l'école expérimentale de Moscou, nous avons vu un cours de mathématiques supplémentaire pour de bons élèves de 9ème. C'est un groupe de 12, 9 garçons et 3 filles.
Dans ces séances, on ne fait pas de cours, on ne fait que des exercices. Les exercices peuvent utiliser des notions qui ne figurent pas au programme. Dans ce cas, on présente très rapidement cette notion en tant qu'outil de résolution de problème, sans en faire une étude théorique complète.
Le cours auquel nous assistons propose des exercices de construction à l'aide de transformations du plan, mais cet objectif n'a pas été formulé.
Le professeur n'est pas un enseignant de l'école, mais un étudiant préparant une thèse de mathématiques.
Il donne au tableau le 1er énoncé, sous forme de figure :



Deux cercles C1 et C2 ainsi qu'une droite D sont donnés. On cherche M tel que les angles marqués sur la figure soient égaux.

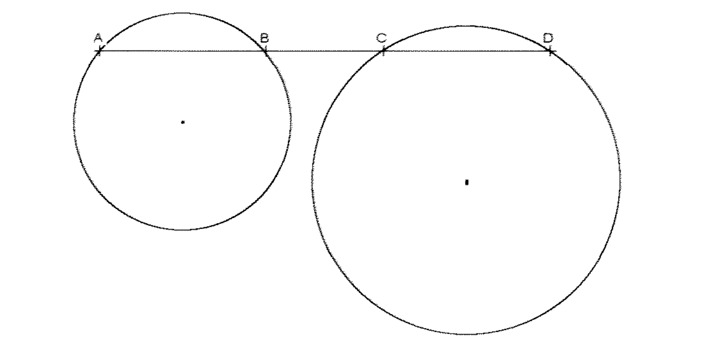
Les élèves cherchent en quatre groupes de trois élèves. Les trois filles travaillent ensemble.
Une solution est trouvée très rapidement.
Un élève l'expose oralement au tableau. Les autres ne prennent pas de notes. On ne se soucie pas de rédiger une réponse, mais on se pose le problème de l'existence et du nombre de solutions.

Puis on passe au 2ème exercice, toujours sous forme de figure :



Une droite D, un cercle G et un point A sont donnés. On cherche B sur G et C sur D tels que le triangle ABC soit équilatéral.
La aussi, les groupes trouvent très rapidement et on corrige en discutant le nombre de solutions.
La rotation n'est pas au programme obligatoire de la classe, le professeur fait juste une petite figure de rappel avec une courbe et son image par une rotation de 60°.

On passe au 3ème exercice :



On donne deux cercles C1 et C2 et une droite D. On cherche une droite D' parallèle à D qui coupe C1 et C2 en A, B ,C, D tels que AB = CD.
On corrige rapidement, toujours en s'appuyant seulement sur la figure, sans rien écrire.
A la fin de cette séquence, la seule trace que possèdent les élèves est une feuille sur laquelle se trouvent trois figures d'étude, souvent à main levée.

Ces cours spéciaux existent aussi à l'école primaire. Mais après la classe de 8ème, on peut aussi choisir une spécialité, sans obligation. Finalement, le nombre de séquences hebdomadaires de mathématiques peut aller d'un minimum de 3 à un maximum de 12, en terminale spécialité math. Dans ce cas, les élèves se retrouvent très souvent en petits groupes, et le travail à la maison est limité à la matière de spécialité et à une ou deux autres comme le russe. Par exemple, une classe de spécialité math n'aura de devoirs à la maison ni en physique, ni en chimie... On considère qu'il leur suffit d'apprendre les autres matières en classe, pendant les cours.
Voilà les mathématiques que l'on peut faire au lycée.

Mais en dehors existent en plus les cercles ou clubs mathématiques, gratuits, pour élèves volontaires, dont un des buts avoués est de préparer aux olympiades.
A Kalouga, j'ai assisté à une séance de ce type. Elle se déroulait à l'université pédagogique, en fin d'après midi donc après les cours au lycée, et le professeur était un enseignant de l'université, spécialiste des olympiades.
A Kalouga, tous les enseignants encadrant ces activités sont d'excellents mathématiciens, anciens étudiants de l'université de Moscou.
Ce cours est pris en charge financièrement par la municipalité.
Il s'agissait ici d'élèves de 8ème et de 9ème, qui sont en général les plus jeunes à qui ce genre d'activité est destiné. Les professeurs des différentes écoles de la ville présentent les clubs à leurs élèves et les invitent à y participer. Tout élève qui le souhaite y est accepté.

La séance que j'ai vue commence par des exercices de suites logiques, dans lesquels les jeunes présents excellent.

Par exemple : une boîte noire donne en entrée :	27	33	19	42
en sortie :	4	1	0	?

Certains lèvent la main pour donner la réponse dès que l'énoncé est terminé. Le professeur vérifie et leur demande de devenir juges pour les autres.

Autre exemple de boîte noire, en entrée, les mots (version francisée) :

	grenier	maison	escalier	chambre	nombreux
en sortie, les nombres :	1	0	0	3	?

On leur propose ensuite un exercice de logique ensembliste.
Il faut trouver qui sont les plus nombreux :
« Les chats sauf les chats qui ne sont pas des Vassia » ou bien
« Les Vassia sauf les Vassia qui ne sont pas des chats ».
Curieusement, cet exercice semble beaucoup plus problématique. Le professeur est obligé de donner beaucoup d'indications et guide la résolution, en montrant qu'il est possible de représenter les ensembles sous forme de diagrammes de Venn. J'apprends d'ailleurs avec surprise que les russes appellent cela des cercles d'Euler !

Voici l'exercice suivant.
La proportion des yeux bleus parmi les blonds est plus élevée que celle des yeux bleus dans la population totale.
On demande de comparer la proportion de blonds parmi les gens aux yeux bleus à celle des blonds dans la même population totale.
Cet exercice est difficile aussi. Le professeur propose de redessiner des ensembles, mais il faut dire que, comme chez nous, ils sont totalement passés de mode, et donc déroutants pour les élèves.
Une autre difficulté de ces deux exercices est qu'ils s'appuient sur des phrases compliquées, et que les cours de mathématiques russes ne semblent pas beaucoup entraîner à manipuler la langue.

Les exercices suivants consistent à placer des pièces imprenables sur des échiquiers, et exploitent les transformations géométriques associées aux différentes pièces. Les élèves proposent de nouveau assez facilement des solutions.

Toute la séance s'est déroulée dans la bonne humeur, avec très peu de contraintes mais beaucoup d'attention de la part des élèves. On ne leur demande pas de prendre des notes. On n'interroge que les volontaires. On ne vérifie pas du tout si tout le monde a compris les exercices proposés. On veut seulement que le groupe les résolve.
On fait des mathématiques comme un jeu, mais les jeunes ont très envie de le gagner.

3) Les Olympiades

Du 18 au 25 avril 1997 a eu lieu à Kalouga la finale des XXIIIèmes Olympiades Russes de Mathématiques.
C'est la quatrième et dernière étape des olympiades nationales. Il y a d'abord un concours par ville, puis par petite région, puis par grande région et enfin la finale qui réunit les élèves sélectionnés lors des étapes précédentes. En 1997, 160 élèves de toutes les régions se retrouvent ainsi pour une semaine à Kalouga. (Chaque année, c'est une autre ville qui organise la finale).
Leur voyage et leur séjour sont payés par les régions, quelquefois très lointaines, qui les envoient.
Les candidats se répartissent en trois niveaux, selon la classe qu'ils fréquentent : 9ème, 10ème, 11ème.
Les épreuves se déroulent sur deux jours. Il y a quatre exercices à résoudre en cinq heures le premier jour, et quatre, également en cinq heures, le deuxième.
Chaque exercice vaut le même nombre de points, mais chaque jour, ils sont classés en principe du plus facile au plus difficile. Les candidats savent donc qu'ils ont intérêt à les résoudre dans l'ordre, et en général, ceux qui résolvent le quatrième exercice ont également fait les autres.

Le jury se compose d'une trentaine de membres, professeurs et anciens lauréats des olympiades.

Dès la fin de la première épreuve, le jury commence son travail. Chaque membre reçoit les sujets avec des propositions de solutions. Les copies sont anonymes. La première correction est une double correction « horizontale » : chacun évalue le même exercice dans un certain nombre de copies, puis échange ces copies avec un collègue qui fait de même. Enfin, on compare les deux notes et on décide d'une note commune.
Le lendemain, pendant que les candidats passent la deuxième épreuve, on fait une double correction « verticale », chacun évaluant tous les exercices des copies qui lui sont attribuées.
Puis on note la deuxième épreuve en suivant le même processus.
Après une mise en commun des différents résultats et une délibération, le jury attribue une note à chaque candidat à l'issue de la troisième journée.
La quatrième journée, les candidats peuvent consulter leurs copies et leurs notes et émettre des objections auprès du jury s'ils les contestent.
Ce n'est qu'ensuite que le classement définitif est établi. La proclamation du palmarès ainsi que la distribution des prix clôturent alors solennellement les olympiades.

Le dispositif de correction peut sembler très lourd, mais il s'explique, car l'enjeu est bien plus important qu'il n'y paraît à première vue.
D'abord, on peut gagner des prix d'une certaine valeur pour le niveau de vie russe, par exemple une télé pour le premier prix, des radio-cassettes (ces prix également sont payés par les régions qui participent aux olympiades) ...
Mais on peut noter qu'il y a aussi des prix humoristiques : un élève a reçu un livre d'exercices d'écriture de niveau CP, parce qu'il écrivait très mal.
Ensuite, six candidats primés participeront à la finale internationale, ce qui signifie qu'on leur offrira une semaine de voyage lointain (cette année, en Argentine) inaccessible à une famille russe ordinaire.
Enfin, un prix aux olympiades ouvre beaucoup de portes : par exemple, les premiers prix assurent une entrée à la prestigieuse Université de Moscou, où la sélection est sinon très sévère.

Les énoncés ne sont pas anonymes, chacun est suivi du ou des noms de ses auteurs. Un prix du meilleur énoncé est également attribué aux auteurs par les concurrents.

Voici les sujets proposés aux candidats de la classe de 11ème :

Premier jour

Exercice 1

Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers relatifs $\left(x^2 - y^2\right)^2 = 1 + 16y$

Exercice 2

Un roi cruel veut constituer une assemblée de sages. Pour cela, il en convoque cent et leur propose ceci :
Il les placera en file indienne puis mettra à chacun un chapeau, bleu ou blanc ou rouge.

Chacun verra alors les chapeaux de tous ceux qui le précèdent, mais ni le sien, ni ceux des sages qui le suivent.
Puis, toutes les minutes, un autre sage devra dire une couleur. Si c'est celle de son chapeau, il sera sauf et fera partie de l'assemblée, sinon, il sera exécuté.
Le roi leur permet cependant de se concerter avant de leur mettre des chapeaux.
Quelle stratégie peuvent-ils adopter pour être sûrs de sauver le maximum d'entre eux ? Quel est ce nombre maximum ?

Exercice 3
Deux cercles se coupent en A et B. Une droite passant par le point A recoupe les cercles en C et D.
On appelle K le milieu du segment [CD], et M et N les milieux des arcs de cercles $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{BD}$ qui ne contiennent pas A. (Les points C et D sont situés de part et d'autre de A.)
Prouver que l'angle $\widehat{MKN}$ est droit.

Exercice 4
Un cube $n \times n \times n$ est composé de cubes unités.
On donne une ligne brisée fermée sans point double, formée de segments reliant les centres de deux cubes voisins (ayant une face commune).
Nous dirons qu'une face d'un cube est marquée lorsque la ligne brisée la coupe.
Prouver que l'on peut peindre toutes les arêtes des cubes à l'aide de deux couleurs, de sorte que dans chaque face marquée il y ait des nombres pairs, et dans chaque face non marquée des nombres impairs de côtés de chaque couleur.

Deuxième jour

Exercice 5
On considère l'ensemble des trinômes $x^2 + px + q$, où p et q sont deux entiers tels que $1 \leq p \leq 1997$ et $1 \leq q \leq 1997$.
Parmi ces trinômes, lesquels sont les plus nombreux : ceux à racines entières ou ceux qui n'ont pas de racine réelle ?

Exercice 6
On donne un polygone, une droite l et un point P de l en position générale (c'est à dire que toutes les droites contenant un côté du polygone coupent l en des points deux à deux distincts, et distincts de P).
On marque tous les sommets du polygone d'où sont issus deux côtés dont les prolongements coupent l de part et d'autre de P.
Démontrer que le point P est situé à l'intérieur du polygone si et seulement si chaque demi-plan de frontière l contient un nombre impair de sommets marqués.

Exercice 7
Une sphère, inscrite dans un tétraèdre, touche une de ses faces au point d'intersection de ses bissectrices, une autre au point d'intersection de ses hauteurs, et une troisième au point d'intersection de ses médianes.
Prouver que le tétraèdre est régulier.

Exercice 8
Dans une boîte rectangulaire $m \times n$, où m et n sont impairs, sont rangés des dominos de dimension 2×1 de telle manière qu'il ne reste qu'un carré 1×1 non recouvert (un vide), dans un coin de la boîte.
On peut donc déplacer d'une case un domino dont le petit côté est contigu au vide, ce qui décale également le vide.
Prouver qu'à l'aide de tels déplacements, on peut conduire le carré vide dans n'importe quel coin de la boîte.

Autres exemples

Classe de 9ème, 1er jour, exercice 1
Soit *P(x)* un trinôme à coefficients positifs. Prouver que pour tous les nombres réels *x* et *y*, on a l'inégalité : $(P(xy))^2 \leq P(x^2).P(y^2)$.

Classe de 9ème, 2ème jour, exercice 5
Dans une classe il y a 33 élèves.
On demande à chacun combien d'élèves de la classe portent le même prénom, et combien portent le même nom de famille que lui.
Parmi les réponses, on trouve tous les entiers de 0 à 10 inclus.
Prouver que dans la classe deux élèves au moins ont à la fois le même nom et le même prénom.

Classe de 9ème, 2ème jour exercice 8
Dans une grille carrée 10×10, on place les nombres 1, 2, ... , 100.
La somme de deux nombres voisins ne dépasse pas S. Trouver la valeur minimale possible pour S.
(Deux nombres sont voisins s'ils sont situés dans deux cases qui ont un côté commun).

Classe de 10ème, 1er jour , exercice 1
Identique à l'exercice 1 de 11ème.

Classe de 10ème, 1er jour, exercice 4
Un polygone peut se décomposer en 100 rectangles, mais pas en 99. Prouver qu'il ne peut pas se décomposer en 100 triangles.

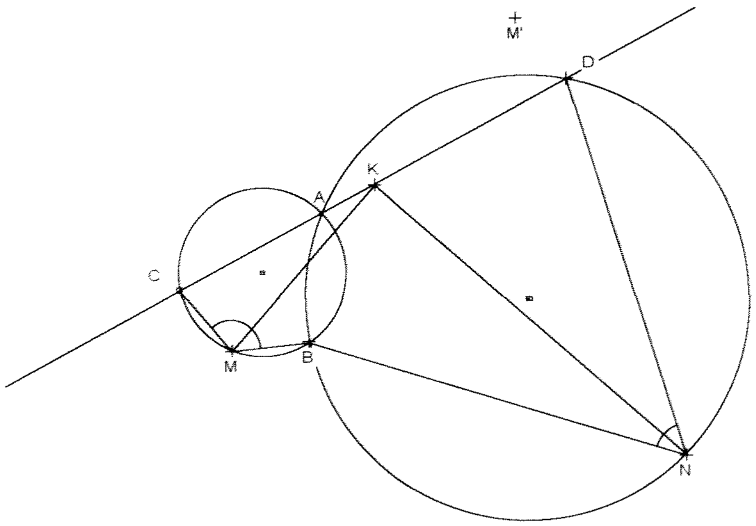
Classe de 10ème, 2ème jour, exercice 6

Un cercle de centre O est inscrit dans un triangle ABC.
Les points de contact sont K, M, N respectivement sur (AC), (AB), (BC).
B1 est le milieu de [AC]. La médiane (BB1) coupe (MN) en D.
Prouver que O est situé sur la droite (DK).

Voici un dernier énoncé qui peut faire l'objet d'un bel exercice de spécialité de terminale S avec quelques indications.

Classe de 10ème, 1er jour, exercice 3

Deux cercles se coupent en deux points A et B.
Une droite passant par A recoupe le premier cercle en C et le deuxième en D.
On appelle M et N les milieux des arcs de cercles BC et BD qui ne contiennent pas le point A, et K le milieu du segment [CD]. (On suppose que les points C et D sont situés de part et d'autre du point A).
Prouver que l'angle MKN est droit.



Exemple d'indications :

Soit a une mesure de $(\vec{MC}, \vec{MB})$ et b une mesure de $(\vec{NB}, \vec{ND})$.
1) Soit f la composée $rot_{N,\beta} \circ rot_{M,\alpha}$. Etudier $\alpha+\beta$ et $f(C)$. En déduire f.
2) Utiliser $M' = rot_{N,\beta}(M)$.

Voici le nombre de réponses justes, par classes (9 à11) et par exercices (1 à 8) :

	9	10	11
1	51	27	25
2	40	14	10
3	7	6	6
4	15	1	5
5	47	30	22
6	39	23	12
7	19	12	10
8	1	1	7
Sur	57	48	50	candidats

Voici le nombre de prix par classes :

	9	10	11
1er prix	1	3	1
2ème prix	13	6	7
3ème prix	13	9	15

Il y avait peu de filles candidates : 2 en classe de 9ème, 6 en 10ème, 2 en 11ème, mais presque toutes ont obtenu des prix : 1 en 9ème, 5 en 10ème, 1 en 11ème.

Ce que j'ai vu de la préparation et de l'organisation des olympiades m'a permis de comprendre qu'il était impossible à nos élèves de rivaliser avec les concurrents russes lors des épreuves internationales. Les candidats russes sont préparés par des séances hebdomadaires encadrées par des spécialistes, par quatre compétitions annuelles, plus des camps de vacances mathématiques dans des régions de villégiature, pendant trois ou quatre ans.
Par conséquent, nos élèves ont un statut d'amateurs dans une compétition où ils affrontent des candidats quasi professionnels.
Cependant, cette préparation russe résulte d'une volonté politique. L'argent manque actuellement pour presque tout en Russie, mais les villes et les régions continuent à investir, beaucoup, pour les Olympiades, et dans toutes les matières. On donne aux matières intellectuelles le même statut qu'au sport. Dans les deux cas, il y a au départ des clubs gratuits ouverts à tous ceux qui le souhaitent, dans lesquels les meilleurs se dégageront petit à petit.

4) La formation initiale des professeurs

Olga et Vladimir Boulytchev enseignant tous deux à l'Université Pédagogique de Kalouga, j'ai également eu l'occasion de m'intéresser à la formation des enseignants.

Dès la fin du lycée, un futur enseignant entre, après une sélection sur dossier, dans une université pédagogique où il étudiera à la fois la discipline qu'il a choisie, la didactique de sa discipline, la pédagogie et des matières complémentaires (par exemple informatique, langue étrangère.... pour les étudiants de mathématique).

Un professeur du secondaire n'a donc jamais fait d'études dans une faculté de mathématiques.

On quitte l'université pédagogique avec un diplôme interne après cinq années d'études. On essaie ensuite d'obtenir un contrat avec une école.

Actuellement, les enseignants russes ont des salaires extrêmement bas, et souvent ils ne les perçoivent pas du tout ou très en retard.

En 1997, il existe un salaire minimum officiel, de 80 MR mensuels (80 mille roubles, le taux de change étant à très peu de choses près un millier de roubles contre un franc français).

Le salaire d'un professeur confirmé est d'environ 350 à 400 MR. Mais 1 jeton de métro à Moscou ou un pain coûtent 1 MR , 1 kg de fruits (pommes, oranges ou bananes en avril) coûte 6 à 8 MR

Le logement est en général nettement moins cher qu'en France, les énergies (gaz, électricité) ont un prix symbolique, le téléphone est presque gratuit, mais tous les produits alimentaires ou manufacturés ont un prix comparable aux prix français.

On comprend donc qu'un salaire de prof ne peut être qu'un salaire d'appoint. L'une des conséquences est que l'enseignement est encore bien plus féminisé qu'en France. A l'université pédagogique, j'ai vu beaucoup de groupes d'étudiantes où il n'y avait pas le moindre garçon.

Lorsqu'un homme est enseignant, il complète son salaire par beaucoup d'autres activités lucratives, et très souvent un deuxième emploi.

Une autre conséquence est que beaucoup d'étudiants cherchent un autre emploi que l'enseignement à la fin de l'université pédagogique, en particulier dans des villes comme Kalouga où il n'y a pas d'autre université.

Malgré les bas salaires, il n'est cependant pas facile de trouver un emploi d'enseignant, mais cela dépend aussi des disciplines. C'est très difficile en français par exemple, car l'étude du français est délaissée au profit de l'anglais et, de plus en plus, de l'allemand.

J'ai assisté à des cours et à des TP de math, d'informatique et de français.

Prenons par exemple un lundi matin d'avril, en 5ème année d'université pédagogique de mathématiques.

La journée commence par une séance de TP de math d'une heure trente.

Le groupe se compose d'une douzaine d'étudiants, dont la moitié arrive en retard.

La séance porte sur les probabilités, auxquelles très peu d'heures sont consacrées, et seulement en 5ème année, ce thème n'étant pas encore réintégré aux programmes des lycées. Voici quelques exemples d'exercices proposés :

Exercice 1
Dans une urne, il y a n boules blanches et n boules noires. On extrait toutes les boules de l'urne, deux par deux et sans remise. Quelle est la probabilité que toutes les paires soient bicolores ?

Exercice 2
Dans un jury de trois personnes, deux membres prennent chacun la bonne décision, parmi deux possibles, avec une probabilité p indépendamment l'un de l'autre, et le troisième décide en lançant une pièce de monnaie. (La décision définitive se prend à la majorité des voix.)
D'autre part, un juge seul prend la décision juste avec une probabilité p.
Qui prend la bonne décision avec la plus grande probabilité : le jury ou le juge ?

Exercice 3
Deux joueurs lancent une pièce de monnaie. Le premier mise sur le couple pile-face, le second sur le couple pile-pile. Le jeu s'arrête dès qu'apparaît l'une de ces deux séquences. Lequel des deux joueurs a la plus grande chance de gagner ?

Exercice 4
On extrait deux pièces d'un jeu complet de dominos. Quelle est la probabilité qu'on puisse les assembler ?

Chaque étudiant (théoriquement, car beaucoup l'ont oublié) a un manuel de probabilités qui leur a été prêté par l'université. La plupart des énoncés en sont extraits, mais certains sont également dictés.
Quelques-uns des exercices ont été donnés à la maison. L'enseignant demande d'abord à chacun des étudiants combien il en a résolu. Ensuite, il désigne quelqu'un pour corriger chacun des exercices au tableau.
Les nouveaux exercices sont d'abord cherchés sur les cahiers, puis corrigés au tableau.
Le travail est détendu et assez actif, mais pas très rapide.

Les mêmes étudiants suivent ensuite une séance de cours d'une heure trente aussi. Cette fois-ci, il y a 25 étudiants, deux groupes de TP réunis. Les effectifs nous font rêver, mais ils sont à rapprocher des salaires des enseignants, qui ne sont guère plus élevés à l'université qu'au lycée...

Le cours de probabilité porte sur les théorèmes de Moivre-Laplace, le schéma de Bernoulli et la loi de Poisson. C'est très étrange de voir ces noms écrits en cyrillique, mais je suis encore plus surprise de constater un usage immodéré de l'alphabet latin. L'espérance est notée E, les probabilités p ou P. On trouvera donc « E = np », mais mieux, l'enseignant écrit « p = const. » pour dire que p est une constante, « th. » pour théorème, « ex. » pour exemple, alors que les mots équivalents russes n'ont aucun rapport avec ces lettres.

A la fin de la séance, j'interroge l'enseignant, Vladimir Boulytchev, sur ces notations. Il me répond que la principale, et sans doute la seule raison pour laquelle il les utilise, est que son professeur préféré écrivait ainsi lorsqu'il était étudiant à l'université de Moscou.
Il faut dire qu'à Moscou, Vladimir et Olga ont eu comme professeurs Kolmogorof et d'autres mathématiciens russes célèbres de la même génération, qui étaient très imprégnés de culture française. Il paraît même que l'un d'entre eux avait un accent français et prononçait les noms des mathématiciens russes à la française.
Certaines notations sont plus originales. L'intersection d'événements est notée $A_1.A_2.\ldots.A_n$ et non $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, de même la réunion, même non disjointe, est notée $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.
$(2n+1)!!$ représente le produit $1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)$, de même, $(2n)!!$ représente le produit $2 \times 4 \times \ldots \times (2n)$.

Le contenu du cours est très concret. Aucun théorème n'est démontré, par contre il y a de très nombreux exemples pour comprendre le sens et la portée des résultats.
Dans la formation de ces futurs professeurs, il semble donc que l'aspect théorique et formel des mathématiques est beaucoup moins développé que ses applications.
Je manque d'éléments pour en mesurer les conséquences, mais il ne faut pas oublier, comme je l'ai déjà souligné, que les professeurs du secondaire ne sont pas les seuls à assurer la formation mathématique des élèves, en particulier des meilleurs, où interviennent aussi des universitaires.

Conclusion : l'image des mathématiques dans la culture russe

Les écoles que nous avons visitées n'ont sans doute pas été choisies au hasard.
Cependant, toutes les classes que nous avons vues semblaient appliquées, attentives, motivées.
Les relations avec les enseignants étaient toujours détendues et conviviales, et pas du tout répressives.
On met des notes de 1 à 5, 5 étant la meilleure, mais il semble que la plus mauvaise note utilisée en pratique est 2.
Les élèves semblent respecter les professeurs, mais pas les craindre.
D'autre part, les professeurs russes m'ont souvent parlé de leurs problèmes de salaire, mais n'ont jamais évoqué de conditions de travail difficiles.

Alors, qu'est ce qui explique que le travail du professeur de mathématique russe semble si facile ?
D'abord, on peut constater que l'ambiance dans les classes ressemble à ce qu'elle était chez nous il y a trente ans, et que toutes les explications que nous pouvons trouver à sa dégradation en France sont peut-être un début de réponse à la situation actuelle des écoles russes. Il y a une différence importante toutefois : il y a trente ans, l'école et la famille françaises avaient en général des règles très strictes, ce qui n'est pas le cas actuellement en Russie.

Il semble aussi que le système de sélection russe est original : il se fait plutôt par la réussite, et pas par l'échec.
On propose toujours plus de travail et plus de difficultés aux meilleurs, il y a même des manuels d'exercices pour eux, mais dans une certaine mesure, par exemple pour les clubs mathématiques, il suffit d'être volontaire, sans autre forme de sélection, pour aller plus loin.

Une étudiante de l'université pédagogique m'a posé la question suivante : « En Russie, nous aimons les élèves doués, au Japon, on aime les élèves travailleurs, et en France ? ».
Je lui ai répondu que je crains qu'en France nous n'appréciions que les élèves à la fois doués et travailleurs.

Je ne sais pas vraiment ce que devient un élève en échec en Russie, mais j'ai l'impression qu'on ne l'ennuie pas trop. Pour reprendre le parallèle avec l'entraînement sportif, on n'exige pas de celui qui est trop lent au sprint qu'il passe de 16 secondes aux 100 mètres à 15. On lui permet cependant de s'exercer à cela s'il le souhaite et on intensifie l'entraînement de ceux qui sont susceptibles de rivaliser avec les meilleurs.
Les meilleurs par contre sont très sollicités. La sélection est sévère.
Par exemple Macha, la fille de mes amis, en classe de 8ème, suivait des cours par correspondance à l'université de Moscou. Elle enverra ainsi régulièrement des devoirs pendant quatre ans, comme élément de son dossier de candidature à l'entrée à l'université.
La participation aux clubs et aux olympiades en fera également partie.
Macha suit une école spécialisée en langues étrangères. Elle a six cours d'anglais par semaine depuis la classe de 3ème, et deux cours de français depuis la 6ème. Mais son école est l'une des meilleures dans toutes les matières, parce que c'est la seule de Kalouga qui sélectionne à l'entrée.

Je pense aussi que les études et les matières intellectuelles, les mathématiques en particulier, bénéficient encore actuellement en Russie d'une bien meilleure image qu'en France.
J'ai souligné que les villes et les régions, qui ont pourtant beaucoup moins de moyens qu'en France, financent généreusement les Olympiades et leur préparation.
Les universitaires s'intéressent beaucoup à la formation des jeunes.
C'est une longue tradition en Russie. Ainsi Kolmogorof dirigeait à Moscou un internat pour jeunes élèves doués, où les meilleurs en mathématiques d'URSS achevaient leur enseignement secondaire.
Mes amis russes y ont été élèves.

Je vais conclure avec une de leurs plaisanteries. Vladimir et Olga sont de grands amateurs de poésie, et j'ai rarement vu autant de recueils de poèmes que chez eux dans une bibliothèque française, mais ils m'ont dit, à propos d'un de leurs camarades d'études de mathématiques à l'université de Moscou : « Il n'avait pas suffisamment d'imagination pour être mathématicien, alors il est devenu poète » ...
(Il ne s'agit en aucun cas d'Evgueni Bounimovitch, qui a assez d'imagination pour être à la fois mathématicien et poète...)

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE DU SECOND DEGRÉ (SUITE)

II. Généralités sur les formes quadratiques binaires

Éric KERN

A. Définitions et premières propriétés :

Définition :
Une forme quadratique (binaire entière) est un polynôme $f \in \mathbb{Z}[x,y]$ homogène du second degré, autrement dit

$$f(x,y) = f \cdot \binom{x}{y} = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \quad \textit{avec} \;\; A, B, C \in \mathbb{Z}$$

On écrira simplement de façon abrégée $f = [A, B, C]$, si aucune confusion n'est possible.

La donnée de $f = [A, B, C]$ étant équivalente à celle du polynôme $P(t) = At^2 + Bt + C$, il est raisonnable de transporter à la forme quadratique f les définitions en usage pour le polynôme $P(t)$. Ainsi $D = B^2 - 4AC$ s'apelle le discriminant de f, si $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$ la forme f est dite irréductible et si $\text{pgcd}(A, B, C) = 1$, la forme f est dite primitive. Enfin on donne aisément la définition de la première et de la deuxième racine de f.

Si ρ est un nombre quadratique, l'unique forme irréductible et primitive f telle que ρ soit la première racine de f sera dite associée à ρ.

On pourra vérifier le tableau de correspondance suivant :

Correspondance entre nombres quadratiques et formes :

$$\begin{array}{ccccccc}
[A,B,C] & \leftrightarrow & \rho, & [-A,-B,-C] & \leftrightarrow & \rho^\sigma, \\
[-A,B,-C] & \leftrightarrow & -\rho, & [A,-B,C] & \leftrightarrow & -\rho^\sigma, \\
[-C,-B,-A] & \leftrightarrow & 1/\rho, & [C,B,A] & \leftrightarrow & 1/\rho^\sigma, \\
[C,-B,A] & \leftrightarrow & -1/\rho, & [-C,B,-A] & \leftrightarrow & -1/\rho^\sigma.
\end{array}$$

La matrice

$$M = M(f) = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice de f. On a donc :

$$D = B^2 - 4AC = -4\det(M)$$

On rappelle que le discriminant D de f vérifie :

$$D = 0 \mod 4 \qquad \text{ou} \qquad D = 1 \mod 4$$

ceci suivant que B est pair ou impair.

Soit $D \in \mathbb{Z}$ vérifiant $D = 0 \mod 4$ ou $D = 1 \mod 4$. Si $D = 0 \mod 4$, alors $f = [1, 0, -D/4]$ est une forme quadratique primitive de discriminant D. Si $D = 1 \mod 4$, alors $f = [1, -1, (1-D)/4]$ est une forme quadratique primitive de discriminant D.
Dans les deux cas f s'appelle la forme quadratique principale de discriminant D.

Si $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ et si $f = [A, B, C]$, on définit une nouvelle forme $f1 = f \cdot T = [A_1, B_1, C_1]$ par

$$f_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \cdot \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix} = f \cdot \left(T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = (f \cdot T) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Un petit calcul donne

$$\begin{aligned} A_1 = &\quad A\alpha^2 + B\alpha\gamma + C\gamma^2 = f(\alpha, \gamma) \\ B_1 = &\quad 2A\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C\gamma\delta \\ C_1 = &\quad A\beta^2 + B\beta\delta + C\delta^2 = f(\beta, \delta) \end{aligned}$$

En outre on a :

$$M(f_1) = M(f \cdot T) = {}^tTM(f)T$$

Par suite si $D1 = B_1^2 - 4A_1C_1$ est le discriminant de $f1$, $D = B^2 - 4AC$ le discriminant de f, $\Delta = \det(T)$, on a

$$D_1 = D \cdot \Delta^2$$

et en particulier, si $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, on a $D_1 = D$, i.e. les formes f et $f \cdot T$ ont même discriminant.Comme on a aussi $(f \cdot T_1) \cdot T_2 = f \cdot (T_1T_2)$ on en déduit que $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ opère à droite sur les formes quadratiques par $(f, T) \mapsto f \cdot T$. En outre cette opération est aussi une opération sur les formes de discriminant D donné.

On remarquera que l'on a

$$f \cdot T = f \cdot (-T)$$

Proposition :
Soient $f = [A, B, C]$ une forme quadratique, $G \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, $f_1 = [A_1, B_1, C_1] = f \cdot G$, alors $\mathrm{pgcd}(A, B, C) = \mathrm{pgcd}(A_1, B_1, C_1)$. En particulier f est primitive si et seulement si f_1 est primitive.

Les formules ci-dessus montre que l'on a : $A_1\mathbb{Z} + B_1\mathbb{Z} + C_1\mathbb{Z} \subset A\mathbb{Z} + B\mathbb{Z} + C\mathbb{Z}$. Comme $f = f_1 \cdot G^{-1}$ on a aussi $A\mathbb{Z} + B\mathbb{Z} + C\mathbb{Z} \subset A_1\mathbb{Z} + B_1\mathbb{Z} + C_1\mathbb{Z}$, donc aussi $A_1\mathbb{Z} + B_1\mathbb{Z} + C_1\mathbb{Z} = A\mathbb{Z} + B\mathbb{Z} + C\mathbb{Z}$.

Cas particuliers :

i)Si $T = T(a)$ on a : $f_1 = f \cdot T(a) = [Aa^2 + Ba + C, B + 2Aa, A]$ soit :

$$\begin{aligned} A_1 &= Aa^2 + Ba + C = \frac{B_1^2 - D}{4A} \\ B_1 &= B + 2Aa \\ C_1 &= A \end{aligned}$$

ii)Si $T = \Delta(a)$ on a : $f_1 = f \cdot T(a) = [A, B + 2Aa, Aa^2 + Ba + C]$ soit :

$$\begin{aligned} A_1 &= A \\ B_1 &= B + 2Aa \\ C_1 &= Aa^2 + Ba + C = \frac{B_1^2 - D}{4A} \end{aligned}$$

Ces deux dernières formules seront très utiles par la suite.

A coté de cette opération (la seule utilisée dans la littérature) il existe une deuxième opération naturelle de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ sur les formes quadratiques définie par :

$$f * T = \det(T) f \cdot T$$

les deux opérations coïncidant donc si on se restreint à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

On dira que deux formes f et g sont strictement équivalentes s'il existe un $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ tel que $f = f * T = f \cdot T$. Nous nous refuserons de parler des cas d'équivalence non stricte.

L'intérêt de la considération de $f * T$ au lieu de $f \cdot T$ provient du résultat suivant :

Proposition :
Soient $f = [A, B, C]$ est une forme quadratique irréductible de discriminant D, ρ la première racine de f. Si $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ et si on pose $\epsilon = \det(T), f_1 = f * T^{-1} = [A_1, B_1, C_1]$ on a :

$$N(\alpha\rho + \beta) = \epsilon \frac{C_1}{A}, N(\gamma\rho + \delta) = \epsilon \frac{A_1}{A}, T \cdot \rho - T \cdot \rho^\sigma = \frac{\sqrt{D}}{A_1}$$

et $T \cdot \rho$ est la première racine de $f_1 = f * T^{-1}$.

On a $T^{-1} = \epsilon \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$, donc

$$A_1 = \epsilon(A\delta^2 - B\gamma\delta + C\gamma^2) \text{ et } C_1 = \epsilon(A\beta^2 - B\alpha\beta + C\alpha^2)$$

Or on a $\alpha\rho+\beta=\dfrac{(-B\alpha+2A\beta)+\alpha\sqrt{D}}{2A}$ donc

$$N(\alpha\rho+\beta)=\frac{B^2\alpha^2-4AB\alpha\beta+4A^2\beta^2-\alpha^2D}{4A^2}=\frac{4AC\alpha^2-4AB\alpha\beta+4A^2\beta^2}{4A^2}=\epsilon\frac{C_1}{A}$$

De même on obtient $N(\gamma\rho+\delta)=\epsilon\dfrac{A_1}{A}$. Enfin on a

$$T\cdot\rho-T\cdot\rho^\sigma=\frac{\alpha\rho+\beta}{\gamma\rho+\delta}-\frac{\alpha\rho^\sigma+\beta}{\gamma\rho^\sigma+\delta}=\frac{\epsilon(\rho-\rho^\sigma)}{N(\gamma\rho+\delta)}=\frac{\sqrt{D}}{A_1}$$

D'autre part si $P(t)=At^2+Bt+C$ et $P_1(t)=A_1t^2+B_1t+C_1$ on a, en remarquant que $f_1\cdot T=\epsilon f$:

$$P_1(T\cdot\rho)=\frac{1}{(\gamma\rho+\delta)^2}f_1\cdot\begin{pmatrix}\alpha\rho+\beta\\ \gamma\rho+\delta\end{pmatrix}=\frac{1}{(\gamma\rho+\delta)^2}(f_1\cdot T)\begin{pmatrix}\rho\\ 1\end{pmatrix}=\frac{\epsilon}{(\gamma\rho+\delta)^2}P(\rho)=0$$

donc $T\cdot\rho$ est une racine de f_1, donc la première racine de f_1, car $T\cdot\rho-T\cdot\rho^\sigma=\dfrac{\sqrt{D}}{A_1}$.

Corollaire :
Soient f et f_1 deux formes quadratiques irréductibles de même discriminant D, ρ la première racine de f et ρ_1 la première racine de f_1. Si $T\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ on a :

$$f*T=f_1\iff\rho=T\cdot\rho_1$$

La proposition précédente montre que si $f*T=f_1$, on a bien $\rho=T\cdot\rho_1$. Réciproquement, si $\rho=T\cdot\rho_1$, en posant $f=[A,B,C]$ et $f_2=[A_2,B_2,C_2]=f_1*T^{-1}$, la proposition précédente montre que :

$$\rho=\frac{-B+\sqrt{D}}{2A}=\frac{-B_2+\sqrt{D}}{2A_2}$$

donc $A=A_2, B=B_2$ donc aussi $C=C_2$ et par suite $f=f_2=f_1*T^{-1}$, donc $f_1=f*T$.

B. Dérivée d'une forme quadratique irréductible

Formes quadratiques irréductibles à discriminant positif :

Ce qui précède permet de définir de façon naturelle la notion de dérivée d'une forme quadratique irréductible à discriminant positif.

Définition :
Si f est une forme quadratique irréductible de discriminant $D>0$ on pose

$$\partial f=f*T([\rho])$$

ρ étant la première racine de f.
De cette manière, si $n \geq 0$ est un entier, $\partial^n \rho$ est la première racine de $\partial^n f$.

En raison de leur importance, explicitons les formules qui donnent la dérivée d'une forme irréductible $f = [A, B, C]$ à discriminant $D > 0$.

Soit $\rho = \dfrac{-B + \sqrt{D}}{2A}$, posons $a = [\rho]$, alors $f_1 = [A_1, B_1, C_1] = \partial f$ est donnée par :

$$\begin{aligned} C_1 &= -A \\ B_1 &= -(B + 2Aa) \\ A_1 &= -(Aa^2 + Ba + C) = \frac{B_1^2 - D}{4A} \end{aligned}$$

Ceci permet donc d'obtenir l'algorithme suivant :

Algorithme : (j' ♡)

Si on pose $f = f_0 = [A_0, B_0, -A_{-1}]$, alors $f_n = \partial^n f = [A_n, B_n, -A_{n-1}]$ et f_n est obtenu par :

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= -(B_n + 2A_n a_n) \\ A_{n+1} &= \frac{B_{n+1}^2 - D}{4A_n} \end{aligned}$$

avec

$$a_n = \left[\frac{-B_n + \sqrt{D}}{2A_n} \right]$$

Si ρ est la première racine de f on a alors $\rho = [a_0, a_1, \cdots]$.

Enfin on a :

$$f * T(a_0, \cdots, a_{n-1}) = f_n$$

L'intérêt de cet algorithme réside dans le fait qu'à partir d'un certain rang il se répète périodiquement, qu'il est aisé de déterminer le début de la partie périodique ainsi que la période. La démonstration de ce fait (théorème de périodicité de Lagrange) sera effectuée ultérieurement.

Formes quadratiques à discriminant négatif :

Transcrivons aussi la notion de dérivée des nombres quadratiques non réels aux formes quadratiques. Soient ρ un nombre quadratique non réel (donc de discriminant $D < 0$) et $f = [A, B, C]$ la forme quadratique (primitive) associée. On a donc $D = B^2 - 4AC$, donc aussi $4AC = B^2 + |D| > 0$ et par suite A et C sont non nuls et de même signe. Dire que $\rho \in \Pi_+$ (resp. $\rho \in \Pi_-$) siginifie que $A > 0$ (resp. $A < 0$) , donc que f est une forme quadratique définie positive (resp. négative). Enfin on a :

$$|\rho| = \frac{C}{A} \text{ et } \Re(\rho) = -\frac{B}{2A}$$

Définition :
Soit $f = [A, B, C]$ une forme quadratique primitive de discriminant $D < 0$. Si $A > 0$, on dira que f est réduite si on a :

$$A \leq C \;\; et \;\; -A \leq B < A \;\; avec\ en\ outre \;\; B \leq 0 \;\; si \;\; A = C$$

Si $A < 0$, f sera dite réduite si $-f$ est réduite.Ainsi, si ρ est la première racine de f, f est réduite si et seulement si ρ est réduit.

Transcrivons maintenant la définition de la dérivée des nombres quadratiques non réels. Soit ρ un tel nombre et suposons ρ non réduit et $\rho \in \Pi_+$. Posons $\rho_1 = \partial\rho = a - 1/\rho$. Soient $f = [A, B, C]$ et $f_1 = [A_1, B_1, C_1]$ les formes primitives associées à ρ et ρ_1. On a $\rho = \dfrac{-1}{z-a}$ donc $\rho = G \cdot \rho_1$ avec $G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ donc aussi :

$$f_1(x, y) = f(-y, x - ay) = Cx^2 + (-B - 2aC)xy + (Ca^2 + Ba + A)y^2$$

de sorte que $[A_1, B_1, C_1] = [C, -B - 2aC, Ca^2 + Ba + A]$. Reste à déterminer comment on calcule a. On détermine a par la condition $-1/2 < \Re(\rho_1) \leq 1/2$ ce qui s'écrit $-A_1 < -B_1 \leq A_1$ soit $-C \leq B_1 < C$. En outre on a $B_1 = -B \mod 2C$ et ces deux dernières conditions déterminent entièrement B_1 et on a alors $a = -\dfrac{B_1 + B}{2C}$.

Définition :
Soit $f = [A, B, C]$ un forme quadratique primitive de discriminant $D < 0$. On définit $\partial f = f_1 = [A_1, B_1, C_1]$ de la manière suivante : Si $A > 0$ et si f n'est pas réduite on définit B_1 par les conditions :

$$-C \leq B_1 < C \;,\; B_1 = -B \mod 2C$$

et on pose :

$$b = \frac{B_1 + B}{2C} \;,\; A_1 = C \;,\; C_1 = Cb^2 - Bb + A = \frac{B_1^2 + |D|}{4C}$$

de sorte que $f_1 = f * \Theta(b)$ avec $\Theta(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$
Si f est réduite on pose $\partial f = f$. Enfin si $A < 0$ on pose $\partial f = -\partial(-f)$. Donc si ρ est la première racine de f alors $\partial^n \rho$ est la première racine de $\partial^n f$.

Les résultats obtenus pour les nombres quadratiques non réels se transposent en des résultats sur les formes quadratiques primitives à discriminant négatif.Ainsi si $f = [A, B, C]$ est une telle forme et si on pose $f_n = [A_n, B_n, C_n] = \partial^n f$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que f_n soit réduite et f_n est alors l'unique réduite strictement équivalente à f.

En outre soit $n \geq 1$. Si $A_n > \sqrt{|D|}$ on a $A_{n+1} < A_n/2$. Si $0 < A_n \leq \sqrt{|D|}$ alors f_n ou f_{n+1} est réduite.On tombe donc sur une réduite avec au plus $\log_2(|C|/\sqrt{|D|})+2$ dérivations.

C. Généralités sur la représentation des formes quadratiques

Définition :
Soient $f = [A, B, C]$ une forme quadratique et $x, y, R \in \mathbb{Z}$. Si

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = R$$

on dit que (x, y) est une représentation de R par f. Si de plus $\operatorname{pgcd}(x, y) = 1$ *on dit que (x, y) est une représentation propre de R par f.*
On dit alors aussi que f représente (resp. représente proprement) R.

Exemple : Si $f = [1, 0, 1]$, i.e. $f(x, y) = x^2 + y^2$, alors $(1, 1)$ est une représentation propre de 2 par f, $(2, 2)$ est une représentation de 8 par f, 8 n'est pas représenté proprement par f, 3 n'est pas représenté par f, $(5, 5)$ est une représentation de 50 par f et $(1, 7)$ est une représentation propre de 50 par f.

Si f est une forme quadratique et si $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, f et $f \cdot T$ représentent les mêmes nombres

En effet $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est une bijection de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{Z}^2$.

Proposition :
Soient $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $\operatorname{pgcd}(x_1, y_1) = \operatorname{pgcd}(x, y)$.

Comme $x_1 = ax + by, y_1 = cx + dy$ a $x_1\mathbb{Z} + y_1\mathbb{Z} \subset x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$. Mais on a aussi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ donc $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} \subset x_1\mathbb{Z} + y_1\mathbb{Z}$ et par suite $x_1\mathbb{Z} + y_1\mathbb{Z} = x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$.

Théorème des représentations propres :
Soient f une forme quadratique irréductible et $R \in \mathbb{Z}, R \neq 0$. Alors R est proprement représenté par f si et seulement si il existe $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ tel que :

$$(*) \qquad f * T = [R, S, L]\ , \ \text{avec} \quad -|R| < S \leq |R|$$

En outre $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ est alors une bijection entre l'ensemble des $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ vérifiant $(*)$ et l'ensemble des représentations propres de R par f.

Tout d'abord remarquons que si $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ vérifie $g = f * T = [R, S, L]$ et si on pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $R = g(1, 0) = f(x, y)$. Comme $\operatorname{pgcd}(x, y) = \operatorname{pgcd}(1, 0) = 1$, (x, y) est une représentation propre de R par f.

Réciproquement soit (α, γ) une représentation propre de R par $f = [A, B, C]$. Comme $\mathrm{pgcd}(\alpha, \gamma) = 1$ il existe $\beta, \delta \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, donc $T_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et si on pose $g_1 = [A_1, B_1, C_1] = f * T_1$ on a $A_1 = g_1(1, 0) = f(\alpha, \gamma) = R$, donc $g_1 = [R, B_1, C_1]$. Si $a \in \mathbb{Z}$ on a

$$g_2 = f * T_1\Delta(a) = f * T_2 = g_1 * \Delta(a) = [R, B_1 + 2Ra, Ra^2 + B_1 a + C_1]$$

Il existe donc un unique $a \in \mathbb{Z}$ tel que $-|R| < B_1 + 2Ra \leq |R|$ et si pour cette valeur de a on pose $S = B_1 + 2Ra, L = Ra^2 + B_1 a + C_1$ on a trouvé on forme quadratique $g = [R, S, L]$, avec $-|R| < S \leq |R|$ et un $T = T_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ tels que $g = f * T$. En outre on a $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Montrons enfin que si

$$g_i = [R, S_i, L_i] = f * T_i \; , T_i \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), -|R| < S_i \leq |R| \text{ pour } i = 1, 2$$

et si $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = T_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $T_1 = T_2$. On a $T_i = \begin{pmatrix} \alpha & \beta_i \\ \gamma & \delta_i \end{pmatrix}$ pour $i = 1, 2$ et comme $\det(T_1) = \det(T_2) = 1$ on a aussi $\alpha(\delta_1 - \delta_2) - \gamma(\beta_1 - \beta_2) = 0$. Puisque $\mathrm{pgcd}(\alpha, \gamma) = 1$ on a $\delta_2 = \delta_1 + a\gamma, \beta_2 = \beta_1 + a\alpha$ avec $a \in \mathbb{Z}$, i.e. $T_2 = T_1\Delta(a)$. On a donc aussi

$$g_2 = g_1 * \Delta(a) = [R, S_1 + 2Ra, Ra^2 + S_1 a + L_1] = [R, S_2, L_2]$$

donc $a = 0$ car $-|R| < S_i \leq |R|$ pour $i = 1, 2$, de sorte que $T_1 = T_2$. $\square$

Remarque : Si $g = [R, S, L] = f * T = [A, B, C] * T$ avec $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, on a aussi $\mathrm{pgcd}(A, B, C) = \mathrm{pgcd}(R, S, L)$. En outre f et g ont alors même discriminant $D = B^2 - 4AC = S^2 - 4RL$. En particulier on aura : $S^2 = D \mod 4|R|$.

Principes pour la résolution de l'équation du second degré :

Soient $f = [A, B, C]$ une forme quadratique irréductible, $R \in \mathbb{Z}$, $R \neq 0$.On cherche les représentations de R par f, autrement dit on cherche les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$(*) \qquad f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = R$$

Si $a = \mathrm{pgcd}(A, B, C)$, quitte à diviser par a, ce qui remplace R par R/a qui doit donc être entier, on peut supposer que f est primitive : c'est ce que nous supposerons désormais.

Si on pose $a = \mathrm{pgcd}(x, y)$ et $(x, y) = (ax_1, ay_1)$, l'équation $(*)$ s'écrit aussi $f(x_1, y_1) = R/a^2$, de sorte que R/a^2 doit être un entier. En cherchant tous les entiers $a > 0$ tels que $R/a^2 \in \mathbb{Z}$, on est donc ramené à chercher les représentations propres de R par f, i.e. on se ramène au cas $\mathrm{pgcd}(x, y) = 1$.

Le problême des représentations propres sera résolu de la manière suivante :

Soit $D = B^2 - 4AC$ le discriminant de f, donc $\sqrt{D} \notin \mathbb{Z}$. On cherche d'abord les $S \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$(**) \qquad S^2 = D \mod 4|R| \ , \ -|R| < S \leq |R|$$

Si S est une solution on pose $L = \dfrac{S^2 - D}{4R}$ et on ne garde que les S vérifiant en outre $\mathrm{pgcd}(R, S, L) = 1$. On pose alors $g = [R, S, L]$, qui est donc une forme quadratique primitive de discriminant D.

On cherche alors si f et g sont strictement équivalentes. Dans ce cas on cherche un $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ tel que $f * T = g$. Alors si on pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (la première colonne de T), (x, y) est une représentation propre de R par f, deux valeurs distinctes de S donnant deux solutions distinctes de $(*)$.

Si (x, y) est une solution (non nécessairement propre) de $(*)$ obtenue par le procédé ci-dessus, on détermine le groupe $\mathcal{G} = \{G \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid f = f * G\}$. Alors si $G \in \mathcal{G}$ et si on pose $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, (x_1, y_1) est encore une solution de $(*)$, puisque $(f * G) * T = f * T = g$. On dira d'ailleurs que (x_1, y_1) et (x, y) sont deux solutions de même classe.

Par ce procédé on obtient toutes les solutions de $(*)$, réparties en classes disjointes. On peut n'avoir qu'une seule classe (ou aucune si $(*)$ n'a pas de solution).

Remarques :

1) Si (x, y) est une solution alors $(-x, -y)$ est dans la classe de (x, y). En effet $-I \in \mathcal{G}$.

2) Si $D < -4$ une classe contient exactement deux solutions $\pm(x, y)$. En effet on sait que dans ce cas on a $\mathcal{G} = \{I, -I\}$.

3) Si $D = -4$ donc $B = 2b$, une classe contient quatre solutions :

$$\pm(x, y) \ , \ \pm(-bx - Cy, Ax + by)$$

En effet dans ce cas on a $\mathcal{G} = \{I, -I, G, -G\}$ avec $G = \begin{pmatrix} -b & -C \\ A & b \end{pmatrix}$

4) Si $D = -3$ donc $B = 2b + 1$, une classe contient six solutions :

$$\pm(x, y) \ , \ \pm(-bx - Cy, Ax + (b + 1)y) \ , \ \pm(-(b + 1)x - Cy, Ax + by)$$

En effet dans ce cas on a $\mathcal{G} = \{I, -I, G, -G, G^2, -G^2\}$ ($G^3 = -I$) avec

$$G = G(1,1) = \begin{pmatrix} -b & -C \\ A & b+1 \end{pmatrix} \text{ et } G^2 = G(-1,1) = \begin{pmatrix} -(b+1) & -C \\ A & b \end{pmatrix}$$

D. Formes de discriminant négatif

Soient $f = [A, B, C]$ une forme à discriminant négatif, $R \in \mathbb{Z}$, $R \neq 0$. On sait que l'on est ramené à chercher les solutions propres avec f primitive. En outre quitte à changer de signe on peut supposer que $A > 0$, i.e. f définie positive donc $R > 0$ s'il y a au moins une solution. Nous nous placerons désormais dans cette situation.

On calcule d'abord $n \geq 0$ tel que $r = \partial^n f$ soit réduite. Ceci donne $a_0, \cdots, a_{n-1}$ tels que $T_1 = \Theta(a_0) \cdots \Theta(a_{n-1}) = \Theta(a_0, \cdots, a_{n-1})$ vérifie $f * T_1 = r$.

Soit $g = [R, S, L]$ obtenue par la méthode générale exposée ci-dessus. Soit $m \geq 0$ tel que $r_1 = \partial^m g$ soit réduite. On sait que f et g sont strictement équivalentes ssi $r = r_1$. Lorsqu'il en est ainsi ceci donne $b_0, \cdots, b_{m-1}$ tels que $T_2 = \Theta(b_0, \cdots, b_{m-1})$ vérifie $g * T_2 = r$.

En posant $T = T_1 T_2^{-1}$ on obtient donc un $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ tel que $f * T = g$, et on sait comment en déduire une solution (x, y). En outre on a déjà vu comment on en déduisait (suivant la valeur du discriminant D de f) la classe de solutions de (x, y).

La partie la plus délicate (sans logiciel de calcul formel) est la recherche des solutions de $S^2 = D \mod 4R$ vérifiant $-R < S \leq R$.

Exemple numérique : (Calculs effectués par MAPLE)

On cherche les solutions entières de :

$$f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 2y^2 = 1850 = 2 \cdot 5^2 \cdot 37 = R$$

On a $f = [5, 6, 2]$ et $D = 6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -4$.

Rappelons que si (x, y) est une solution alors la classe des solutions de (x, y) est l'ensemble à 4 éléments $\{\pm(x, y), \pm(-3x - 2y, 5x + 2y)\}$. En outre si $g = [R, S, L]$ est une forme de discriminant D alors g est primitive. En effet si $a = \mathrm{pgcd}(R, S, L)$ on a $-4 = a^2 D_1$ où D_1 est un discriminant. Or $D_1 = -4/a^2$. Si $a \neq 1$ on a $a = 2$ et $D_1 = -1$ qui n'est pas un discriminant.

Remarquons aussi que $[1, 0, 1]$ est l'unique réduite $r = [A, B, C]$ de discriminant $D = -4$ avec $A > 0$ (à titre purement indicatif). En effet on a $|B| \leq A \leq C$, donc $4A^2 \leq 4AC = B^2 + 4 \leq A^2 + 4$ donc $3A^2 \leq 4$, donc $A = 1$. Or B est pair et $|B| \leq 1$, donc $B = 0$ et par suite $C = 1$. Toute forme $[A_1, B_1, C_1]$ de discriminant -4 avec $A_1 > 0$ sera donc strictement équivalente à $[1, 0, 1]$, donc aussi à $[5, 6, 2]$.

Effectuons la réduction de $f = [5, 6, 2]$. On posera $f_n = [A_n, B_n, C_n] = \partial^n f$. On obtient :

n	A_n	B_n	C_n	a_n
0	5	6	2	1
1	2	-2	1	-1
2	1	0	1	

$$T_1 = \Theta(1, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les $a \geq 1$ tels que $a^2 | R$ sont $a = 1$ et $a = 5$.

1) Solutions (x, y) avec $\operatorname{pgcd}(x, y) = 1$. On doit résoudre ($R = 1850$)

$$S^2 = D \bmod 4R, -R < S \leq R$$

On trouve $S = \pm 86, \pm 1714$.

• $S = 86$ ce qui donne $L = 1$.

n	R_n	S_n	L_n	a_n
0	1850	86	1	43
1	1	0	1	

$$T_2 = \Theta(43) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 43 \end{pmatrix}, \quad T = T_1 T_2^{-1} = \begin{pmatrix} -44 & -1 \\ 45 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où la classe de solutions : $\{\pm(-44, 45), \pm(42, -85)\}$
• $S = -86$ ce qui donne $L = 1$.

n	R_n	S_n	L_n	a_n
0	1850	-86	1	-43
1	1	0	1	

$$T_2 = \Theta(-43) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -43 \end{pmatrix}, \quad T = T_1 T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & -1 \\ -41 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où la classe de solutions : $\{\pm(42, -41), \pm(-44, 87)\}$
• $S = 1714$ ce qui donne $L = 397$.

n	R_n	S_n	L_n	a_n
0	1850	1714	397	2
1	397	126	10	-6
2	10	-6	1	3
3	1	0	1	

$$T_2 = \Theta(2, -6, 3) = \begin{pmatrix} 6 & 19 \\ -13 & -41 \end{pmatrix}, \quad T = T_1 T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 54 & 25 \\ -67 & -31 \end{pmatrix}$$

D'où la classe de solutions : $\{\pm(-54,-67),\pm(-28,69)\}$
• $S=-1714$ ce qui donne $L=397$.

n	R_n	S_n	L_n	a_n
0	1850	-1714	397	-2
1	397	126	10	6
2	10	-6	1	-3
3	1	0	1	

$$T_2=\Theta(-2,6,-3)=\begin{pmatrix}-6 & 19\\ -13 & 41\end{pmatrix},\quad T=T_1T_2^{-1}=\begin{pmatrix}-28 & 13\\ 15 & 7\end{pmatrix}$$

D'où la classe de solutions : $\{\pm(-28,15),\pm(54,-95)\}$

2) Solutions (x,y) avec $\operatorname{pgcd}(x,y)=5$.
On remplace R par $R/5^2=74=R'$. On doit résoudre ($R=74$)

$$S^2=D \bmod 4R, -R<S\leq R$$

On trouve $S=\pm 62$.
• $S=62$ ce qui donne $L=13$.

n	R_n	S_n	L_n	a_n
0	74	62	13	2
1	13	-10	2	-3
2	2	-2	1	-1
3	1	0	1	

$$T_2=\Theta(2,-3,-1)=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -7 & 5\end{pmatrix},\quad T=T_1T_2^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -9 & -4\end{pmatrix}$$

D'où la classe de solutions : $\{\pm5\cdot(2,-9),\pm5\cdot(12,-17)\}=\{\pm(10,45),\pm(60,-85)\}$
• $S=-62$ ce qui donne $L=13$.

n	R_n	S_n	L_n	a_n
0	74	-62	13	-2
1	13	10	2	2
2	2	-2	1	-1
3	1	0	1	

$$T_2=\Theta(2,2,-1)=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -5 & 7\end{pmatrix},\quad T=T_1T_2^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

D'où la classe de solutions : $\{\pm5\cdot(-2,-3),\pm5\cdot(12,-19)\}=\{\pm(10,45),\pm(60,-95)\}$

Il y a donc 24 solutions réparties en 6 classes de 4 éléments chacune.

K.E.

Tours de cartes avec mélanges réguliers

Dominique DUMONT

Première partie : recettes de tours

Dans ce premier article, on propose des recettes pour faire des tours de cartes peu connus, basés sur les mélanges réguliers de certains paquets. Dans un second article, on donnera des démonstrations mathématiques de ces tours. Entre-temps, une conférence sera donnée avec "démonstration" des tours, dans les deux sens de ce mot.
On se munit d'un jeu de 52 cartes et on en retire les rois. On répartit le jeu en ses quatre *couleurs*, qui comportent donc chacune 12 cartes, celles-ci ayant pour *valeurs* les nombres entiers de 1 à 12, en convenant que le valet vaut 11 et la dame 12.
Dans un paquet de 12 cartes les cartes sont toujours faces contre table, et la *position* d'une carte est alors son rang dans le paquet en comptant à partir du dessus.
Le $k-$*mélange régulier* d'un paquet, k désignant un diviseur de 12, s'opère de la manière suivante :
- on forme d'abord k piles comme suit : on pose faces contre table, de gauche à droite, les k premières cartes, puis, sur elles, toujours de gauche à droite, les k suivantes, et ainsi de suite jusqu'à épuisement du paquet;
- puis on ramasse les piles, de gauche à droite, la première au-dessus de la seconde, puis les deux premières au-dessus de la troisième etc. jusqu'au ramassage de la dernière pile.

Premier tour : trois paquets qui vont ensemble

Le présentateur a rangé préalablement les piques dans un paquet de la manière suivante (de haut en bas, donc, faces non visibles) :

$$1, 7, 9, 10, 8, 11, 2, 5, 3, 4, 6, 12.$$

Il a rangé les coeurs comme suit :

$$1, 6, 9, 10, 5, 2, 11, 8, 3, 4, 7, 12.$$

Il a rangé enfin les carreaux comme suit (et de même, les trèfles) :

$$1, 11, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 2, 12.$$

Le présentateur confie chacun des trois premiers paquets à un spectateur différent, gardant pour lui les trèfles. Les spectateurs seront chargés tant de vérifier par la suite les valeurs et positions des cartes quand on les annoncera que d'opérer les mélanges réguliers de manière scrupuleuse.

1°) Le présentateur fait d'abord constater que chaque paquet est *autoréciproque* (positions et valeurs sont en permutation involutive), ce qui permet de trouver la position d'une carte de valeur donnée.
Exemple.— Où se trouve le 6 ? On regarde la carte en sixième position, et sa valeur (qui est 11 dans les piques, 2 dans les coeurs, 7 dans les carreaux) donne dans chaque cas la position du 6 dans le paquet considéré.

2°) Le présentateur fait ensuite observer qu'on peut trouver la valeur d'une carte dans un paquet quelconque par consultation des deux autres paquets, en "composant" dans l'ordre qu'on veut.
Exemple.— Quelle est la valeur de la carte en deuxième position dans les piques ? Cherchons la deuxième carte chez les coeurs : c'est le 6 ; cherchons alors la sixième carte chez les carreaux, c'est le 7. Par conséquent, c'est le 7 qui se trouve en deuxième position dans les piques.

3°) Le présentateur fait faire un mélange régulier quelconque (avec $k = 2, 3, 4$ ou 6) sur les piques. On constate alors que le paquet de piques reste auto-réciproque. On fait encore plusieurs mélanges : le paquet reste toujours auto-réciproque.

4°) Le présentateur fait faire un 3–mélange sur les coeurs, ce qui conduit au paquet

$$4, 11, 10, 1, 7, 8, 5, 6, 12, 3, 2, 9$$

qui est, comme on s'y attend, auto-réciproque. Puis il fait faire un 2-mélange, et on obtient :

$$2, 12, 5, 7, 10, 4, 9, 3, 6, 8, 1, 11$$

qui est un paquet, ô surprise, *antiréciproque*, car l'as n'est pas en deuxième position à partir du haut du paquet, mais à partir du *bas* du paquet et, de même, le 3 est en cinquième position à partir du bas du paquet !
On s'aperçoit alors que si un 3–mélange ou un 4–mélange n'affecte pas l'auto ou l'antiréciprocité, en revanche un 2–mélange ou un 6–mélange fait passer de l'auto à l'anti et réciproquement.

5°) Rappelons qu'au départ les paquets de carreaux et de trèfles sont identiques, et réciproques l'un de l'autre (puisqu'auto-réciproques). Le présentateur demande au spectateur de faire un mélange régulier sur les carreaux. Supposons que celui-ci choisisse un 2–mélange, ce qui conduit à

$$2, 9, 6, 8, 3, 1, 12, 10, 5, 7, 4, 11.$$

Le présentateur fait alors un 6–mélange sur les trèfles, ce qui donne

$$6, 1, 5, 11, 9, 3, 10, 4, 2, 8, 12, 7,$$

qui est bien le paquet réciproque des carreaux.
Et si le spectateur choisit un $3-$mélange sur les carreaux, que fera le présentateur ? un $4-$mélange sur les trèfles ? non, ce serait trop simple... A un $3-$mélange sur les carreaux le présentateur répliquera par deux $2-$mélanges successifs sur les trèfles, et à un $4-$mélange sur les carreaux le présentateur rétorquera par deux $4-$mélanges sur les trèfles pour, à chaque fois, rétablir la réciprocité carreaux-trèfles.

Deuxième tour : un mélange par ici, une coupe par là

Le présentateur présente un paquet de piques rangé dans l'ordre normal $1, 2, 3, ..., 11, 12$, qu'il garde en main, et un paquet de coeurs rangé dans l'ordre inverse $12, 11, ...3, 2, 1$, qu'il pose sur la table.
Puis il procède comme suit :
- étape 1 : il pose la première carte du paquet de piques (l'as) face contre table, puis il prend la première carte du paquet de coeur (la dame) et la pose sur le paquet de piques, puis il fait un $2-$mélange du paquet obtenu et le reprend en main.
- étape 2 : il pose la première carte du paquet en main (le valet de pique) sur l'as de pique (sur la table), puis il prend la carte suivante du paquet de coeur (le valet de coeur) et la pose sur le paquet qu'il a en main, il fait à nouveau un $2-$mélange et reprend le paquet en main.

Et ainsi de suite. Le présentateur fait observer à l'assistance qu'au début de chaque étape c'est toujours un pique qu'il dépose sur le paquet en formation sur la table (en dépit du fait qu'il a en main un paquet comportant des cartes des deux couleurs).
La douzième étape s'achève elle aussi sur un $2-$mélange. Le paquet de coeurs est alors le suivant :

$$12, 5, 8, 10, 9, 1, 7, 3, 4, 2, 11, 6,$$

tandis que sur la table, le paquet de piques est

$$6, 10, 8, 9, 2, 12, 7, 3, 5, 4, 11, 1.$$

Le présentateur fait constater la réciprocité des deux paquets.
Puis il confie le paquet de coeurs à un spectateur et lui demande de faire un $k-$mélange. Pour rétablir la réciprocité des deux paquets, il lui suffit alors d'opérer discrètement une coupe sur le paquet de piques.
Cette règle restera vraie pour les paquets transformés, on pourra à nouveau mélanger les coeurs et couper les piques.
Voici la règle précise :
- à un $2-$mélange des coeurs correspond une coupe d'une carte des piques (la première carte passe en dernière position) ;
- à un $3-$mélange des coeurs correspond une coupe de 10 cartes des piques (les deux dernières cartes passent au-dessus du paquet) ;
- à un $4-$mélange des coeurs correspond une coupe de 8 cartes des piques ;
- à un $6-$mélange des coeurs correspond une coupe de 5 cartes des piques.

Par exemple, un 6−mélange du paquet de coeurs donne le paquet :

$$7, 12, 3, 5, 4, 8, 210, 11, 9, 6, 1$$

et une coupe de 5 cartes à pique donne le paquet

$$12, 7, 3, 5, 4, 11, 1, 6, 10, 8, 9, 2,$$

qui est réciproque du paquet de coeurs.

Troisième tour : on mélange et on devine

Le présentateur part d'un paquet de piques rangé dans l'ordre normal $1, 2, 3, ..., 11, 12$, et il opère sur ce paquet un certain nombre de $k-$mélanges, pour des valeurs de k choisies arbitrairement par les spectateurs.
A l'issue d'une étape quelconque, le présentateur est toujours en mesure de répondre aux questions des spectateurs :
- "Quelle est la valeur de la carte située en position x ?"
- "Quelle est la position de la carte de valeur y ?"
Le présentateur peut répondre rapidement parce qu'il n'a qu'un petit calcul mental à faire, un calcul mental qui ne requiert qu'un peu d'entraînement et aucunement des qualités de calculateur prodige.
En quoi consiste ce calcul mental ? En trouvant la réponse à cette question, non seulement vous saurez réaliser ce troisième tour, mais vous serez sur la piste qui conduit à la compréhension des mécanismes des deux premiers.
Les réponses à ces questions seront données au cours de la conférence de "démonstrations" et dans notre prochain article.

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Connaître la personnalité des mathématiciens célèbres n'est pas chose aisée. Leur oeuvre publiée a gommé toute trace d'émotion et de sentiment pour présenter les résultats mathématiques dans toute leur rigueur et leur vérité. Vérité souvent très belle sans doute et admirable, "honneur de l'esprit humain", mais abstraite et froide, figée dans son éternité comme un ciel étoilé par une nuit d'hiver glacée. Ce qui en a éloigné plus d'un, curieux de sciences mais rebuté par son aridité. A tort : les lettres écrites par les mathématiciens à leurs amis ou collègues nous révèlent des personnalités sensibles et passionnées, essayant de résoudre au mieux, non seulement les problèmes scientifiques qu'ils se sont posés mais aussi les mille et un tracas de leur vie quotidienne et les difficultés causées par les événements politiques et sociaux. Cette rubrique vous présente des lettres, ou de larges extraits que nous pensons représentatifs et révélateurs de la personnalité profonde, mais quelquefois méconnue, de nos illustres savants. Dans ce numéro :

Le voyage d'Abel en Europe.

Niels Henrik Abel est né le 5 août 1802 dans Finnö, petite île de la côte sud-ouest de la Norvège. Son père, pasteur, était un homme distingué, actif comme représentant élu aux deux premiers parlements de Norvège. Sa mère était louée pour son exceptionnelle beauté, bonne vivante, mais très tôt portée sur l'abus d'alcool. Niels Henrik était le second d'une famille de six enfants : cinq garçons et une fille. Leur enfance se situe dans la période la plus critique de l'histoire de la Norvège. Celle-ci avait à ce moment là son destin lié à celui du Danemark, ce qui l'entraîna dans les guerres napoléoniennes aux côtés de la France, subissant ainsi le blocage de ses côtes par la flotte britannique. Durant la guerre, un mouvement nationaliste se développa, dont l'un des premiers soucis était le ravitaillement du pays, mais qui fut aussi à l'origine de la création de l'Université de Christiania (aujourd'hui Oslo) grâce à une souscription nationale. L'épisode napoléonien tirant à sa fin au moment où la famille régnante en Suède s'éteignait, le gouvernement y choisit un des généraux de Napoléon pour assurer la succession : le maréchal Bernadotte qui, en bon émule de son empereur, envahit aussitôt le Danemark. Celui-ci dut céder la Norvège à son victorieux adversaire suédois, mais l'élection rapide d'une assemblée nationale, le *Storting*, permit de limiter la sujétion : le roi de Suède occupera le trône de Norvège, mais en lui accordant un gouvernement autonome. Le père d'Abel avait été élu représentant au *Storting* et y joua un rôle non négligeable pour garantir la liberté par un certain nombre d'articles inscrits dans la Constitution d'Eidsvoll, reconnue par Bernadotte.

C'est dans ce contexte difficile et agité que Abel passa son enfance à Gjerrestad la nouvelle paroisse de son père; celui-ci lui donna la première éducation, avant de l'envoyer, en 1815 à l'Ecole cathédrale de Christiania. Depuis l'ouverture de l'Université, en 1811, cette école était assez médiocre, ses meilleurs professeurs l'ayant quitté pour l'Université. Leurs remplaçants étaient moins qualifiés, souvent abrutis par l'alcool. Le professeur de mathématiques dû même donner sa démission après avoir cogné un de ses élèves tellement fort qu'il en mourut. A sa place fut nommé un jeune homme, ancien élève de l'Ecole, qui n'avait que sept ans de plus qu'Abel mais qui restera dans l'histoire comme celui qui a su éveiller le génie d'Abel : Berndt Michael Holmboe. Sans être lui-même un mathématicien de grand talent, il était cependant un excellent pédagogue, passionné de littérature et de musique, s'attachait à rendre son enseignement attrayant et laissant ses élèves travailler selon leur rythme. Voici comment lui-même évoque son rôle dans la formation mathématique qu'il procura à son élève, durant ses premières années :

"Il ne s'attira aucune attention particulière, jusqu'à ce qu'en 1818, époque d'où date ma nomination de professeur de mathématiques à ladite école, on accorda aux disciples quelques heures exprès pour les exercer à résoudre des problèmes algébriques ou géométriques. Ce fut alors que le talent d'Abel se développa d'une manière éclatante. Il fallut bientôt lui réserver des problèmes tout-exprès. Depuis ce temps il se voua aux mathématiques avec ardeur, et y fit des progrès énormes, et avec une rapidité qui n'appartient qu'au génie. Ayant rapidement passé le cours élémentaire, je lui donnais, sur sa demande, des leçons en particulier sur le calcul infinitésimal. Après l'avoir initié dans les éléments de cette science, je parcourus avec lui l'introduction et les institutions du calcul différentiel et intégral d'Euler. Dès-lors il commença à marcher seul. Il étudia les ouvrages de Lacroix, Francoeur, Poisson, Gauss et surtout ceux de Lagrange, et fit déjà lui-même quelques essais."

Lorsqu'en automne 1821 Abel entre à l'Université de Christiania il connaît l'essentiel des mathématiques de son temps et les problèmes que celles-ci posent aux mathématiciens d'alors. Encouragé par Holmboe mais sans ressources depuis la mort de son père en 1820, il obtient une place gratuite au dortoir de l'Université, et quelques professeurs se sont même concertés pour lui fournir, à leurs frais, une subvention, afin de "*préserver ce rare talent pour les sciences, talent d'autant plus digne d'attention qu'il s'accompagne de persévérance et de bonne conduite.*" L'Université n'avait rien à lui apprendre en mathématiques, mais favorisait le développement de ses propres recherches, quelque fois au détriment des autres cours. La tradition rapporte qu'un jour, pendant la leçon d'un certain professeur Sverdrup, il se leva brusquement, au grand étonnement de l'auditoire, et se précipita vers la porte en criant "*Jeg har det*" ("Je la tiens", sous entendu : la solution)

Les professeurs de l'université de Christiania où étudiait Abel avaient bien compris que les capacités extraordinaires de celui-ci avaient besoin d'une stimulation qu'eux-mêmes étaient incapables de lui donner. Aussi deux d'entre eux, Hansteen et Rasmusen écrivirent au Conseil de l'université afin qu'il finance un voyage à l'étranger :

"Nous considérons qu'il est de notre devoir de recommander ce jeune homme, dont la moralité est au dessus de tout soupçon, pour une aide qui lui permette de continuer à cultiver une science où bien peu, à son âge, ont fait des progrès aussi remarquables que ceux dont il a donné des preuves. Le Conseil sait qu'il ne possède rien, et que c'est dans des conditions très précaires, et uniquement grâce aux souscriptions mensuelles de quelques uns, qu'il a pu vivre depuis son entrée à l'Université. Maintenant il lui faut une aide plus importante, afin qu'il puisse acquérir à son pays l'honneur que ses dons et ses progrès permettent d'espérer d'un tel savant. Nous estimons qu'un séjour à l'étranger dans les villes où se trouvent les mathématiciens les plus éminents contribuera de la manière la plus heureuse à son éducation scientifique. A Paris, il trouvera probablement l'occasion de faire insérer son travail sur l'intégration dans les Mémoires de l'Institut, et nous croyons que ce sera le moyen le plus rapide de le faire connaître."

Après quelques tergiversations, Abel obtient une bourse de 600 thalers pour un an de voyage, en même temps que trois autres camarades et amis de l'université : Christian Peter Boeck pour visiter les écoles vétérinaires afin de prendre la direction d'une telle école créée par le Storting sous l'impulsion du père d'Abel ; les deux autres, Nicolas Benjamin Moller et Niels Otto Tank tous deux géologues, qui devaient faire des mesures du champ magnétique terrestre partout ou ils se rendraient, et communiquer les résultats au professeur Hansteen. Abel avait dû envoyer un itinéraire détaillé de son voyage lequel devait se limiter à deux destinations : Göttingen pour y rencontrer Gauss; Paris qui représentait à ce moment là le pôle le plus important de la recherche mathématique avec Cauchy, Legendre, Lacroix, Fourier, Poisson, Laplace.

Mais Abel était trop dépendant de ses amis pour supporter l'idée de travailler seul à Paris. Boeck et Moller devaient passer tout l'hiver à Berlin, il décida de les y accompagner prenant ainsi dès le départ de sérieuses libertés avec l'itinéraire prévu. Ce fut sans aucun doute une des initiatives les plus heureuses que son caractère indépendant put prendre, car il y rencontra Crelle.

Avec ses amis, il passa la plus grande partie de l'hiver, y menant joyeuse vie au bal, au théâtre, en fêtes nocturnes au point de gêner leur locataire du dessus au n°4 Kupfergraber dans le voisinage de la Sprée. Un jour que le tapage devenait vraiment trop violent, celui-ci demanda à la logeuse quelle espèce de gens pouvaient bien faire un boucan pareil. "Des étudiants danois" lui répondit-elle. "Des danois, que non ! des ours russes oui !" répliqua-t-il furieux ! Il faut dire, à la décharge du locataire ainsi dérangé qu'il était philosophe et s'appelait... Hegel !

Voici trois lettres d'Abel, l'une écrite à Copenhague - les deux autres à Berlin.

ABEL A HOLMBOE - Copenhague (4 août 1823)
Année $\sqrt[3]{6.064.321219}$ Prends aussi les décimales

Cher ami !
Tu dois avoir reçu la lettre que je t'ai écrite aussitôt arrivé. - Je vais te faire part maintenant des observations que j'ai faites. Les mathématiques, ici ne sont pas précisément florissantes. j'ai eu beau demander, je n'ai pas encore pu découvrir un seul étudiant qui soit un peu solide, et encore bien moins quelqu'un qui cultive les math. ex. professo. - Le seul qui sache des math. ici est Degen, mais aussi c'est un diable d'homme. Il m'a montré plusieurs de ses petits mémoires, et ils témoignent d'une grande finesse. Je lui ai montré quelques uns des miens, il les a trouvé bons, il a surtout été tout à fait saisi devant une formule qui indique combien un nombre a de facteurs impairs, et il ne pouvait comprendre comment je l'avais trouvée. Ce petit travail traitait, tu te rappelles, des fonctions inverses des Transcendantes elliptiques, (*)*et j'y avais démontré une chose impossible ; je l'ai prié de le lire d'un bout à l'autre ; mais il ne put découvrir aucune fausse conclusion, ni comprendre où était la faute ; Dieu sait comment je m'en tirerai.*
J'ai étudié depuis que je suis ici deux ouvrages importants. Application de l'Analyse à la géométrie par Monge, *et* Essai sur la théorie des nombres par Legendre. *Ce dernier est extrêmement intéressant, et c'est grand dommage qu'il ne se trouve pas à Christiania. - Je ne peux m'empêcher de transcrire le théorème suivant qui s'y trouve, et qui est certes le plus merveilleux de toutes les mathématiques :*

Théorème. — *Si y désigne le nombre des nombres premiers compris entre* 1 *et x, on a*

$$y = \frac{x}{\log x - 1,08366}$$

Naturellement le logarithme est népérien.

La formule, comme on peut bien le comprendre, n'est qu'approximative, mais elle se

(*) En français dans le texte

rapproche beaucoup de la vérité, ce que tu pourras voir d'après le tableau suivant :

x	d'après	y la vraie
	la formule :	valeur :
10000	1230	1230
100000	9588	9592
200000	13844	13849
300000	26023	25998
400000	33854	33861
1000000	78543	78527

Tu peux t'exciter sur la démonstration jusqu'à mon retour, alors je te communiquerai la démonstration qu'on trouve dans Legendre.
Un autre beau théorème est que $a^2 + a + 41$ *est un nombre premier, si a est un des nombres* $0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ *juqu'à 39. - et bien d'autres. Les bibliothèques ne sont pas bien pourvues de livres mathématiques ; mais elles possèdent bon nombre de revues de sociétés savantes. Entre autres les* Philosophical transactions, *où se trouvent beaucoup de très bonnes choses ; en sorte que les anglais ne sont pas aussi mauvais mathématiciens que je l'avais cru. Herschel et Young sont très habiles. Ivory est parmi les meilleurs mathématiciens vivants (s'il n'est pas mort). j'ai lu trois mémoires de V. Schmidten, ils ne sont pas aussi bons que j'aurais cru ; il reste quand même un math. très habile, il faut dire que c'étaient ses premiers travaux. J'ai lu une masse de Gruson (verjagen (*)) ; c'est un affreux rodomont ; pourtant il a démontré que e est irrationnel. - Croirais tu qu'il a eu l'impudence de voler un mémoire de Parseval et de le présenter à la Société des Sciences de Berlin. Il est traduit mot pour mot. En même temps que je lis, je travaille aussi moi-même. Ainsi j'ai cherché à démontrer l'impossibilité de résoudre l'équation* $a^n = b^n + c^n$ *en nombres entiers lorsque n est plus grand que 2 ; mais je suis resté en route. Je n'ai pu aller au delà des théorèmes ci-joints, qui sont pourtant assez curieux. j'ai résolu l'équation suivante :*

$$\psi(a) = \int \varphi(ax)\dot{f}(x)dx \quad (x = k, x = k')$$

où ψ *et* f *sont deux fonctions données, et où l'on cherche* φ. *En outre j'ai intégré l'expression*

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{(a - (m+2)x^{m+1} + (m+1)x^{x+2})(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + mx^{m-1} + (m+1)x^m)}}$$

(*) En allemand dans le texte

où a est une constante quelconque, ce qu'il faut bien remarquer. Peux tu intégrer cette expression ? - Ce n'est pas difficile.
Le 1er juillet on a fêté solennellement le jubilé de Regentsen (**). J'y ai été. On a bu ferme 800 bouteilles de vin. On a eu deux fois la Comédie. J'y ai été les deux fois. La dernière fois une pièce a été sifflée. Je rentrerai à la fin d'août, et je te montrerai ma moisson, qui est très bonne. Si tu veux m'honorer de quelques mots, mon adresse est : Christianshavn, Store Strandgade, 30. Tous mes compliments à tes frères. Ton N. ABEL.

ABEL A HANSTEEN - Berlin (5 décembre 1825)

Professeur Hansteen !
J'aurais bien pu, et j'aurais dû, peut-être, vous écrire plus tôt, monsieur le Professeur; mais je désirais d'abord prendre quelques dispositions afin d'être en mesure de vous dire quel profit je tire et je tirerai de mon séjour ici. Voua aurez peut-être été surpris de ce que je suis venu d'abord en Allemagne; je l'ai fait, en partie parce qu'il se trouve que j'y vis avec des connaissances, et aussi parce que j'y suis moins exposé à ne pas employer mon temps le mieux possible, puisque je peux quitter l'Allemagne n'importe quand pour aller à Paris, qui doit être pour moi le lieu le plus important. Ici à Berlin, je n'ai pas trouvé grande ressource dans les bibliothèques publiques, car en ce qui concerne les mathématiques, elles sont étonnamment médiocres; il n'y a presque rien des travaux récents, et ce qui s'y trouve est très incomplet. Notre bibliothèque, si j'ose dire, est mieux pourvue. j'ai été assez heureux pour faire la connaissance de deux mathématiciens distingués : le conseiller privé Crelle, et le professeur Dirksen. V. Schmidten m'avait parlé du premier comme d'un homme excellent à tous égards, et lorsque je suis arrivé à Berlin, je me suis rendu chez lui sans perdre de temps. Ce fut long, avant que je puisse lui faire bien comprendre le but de ma visite, et le résultat semblait devoir être lamentable, lorsque je pris courage à sa question sur ce que j'avais déjà étudié en mathématiques. Quand je lui eu cité quelques travaux des mathématiciens les plus éminents, il devint tout à fait empressé, et parut vraiment enchanté. Il engagea une longue conversation sur diverses questions difficiles qui n'étaient pas encore résolues, et nous en vimes à parler des équations de degré supérieur; lorsque je lui dis que j'avais démontré l'impossibilité de résoudre l'équation générale du 5ème degré, il ne voulut pas le croire, et dit qu'il y ferait des objections. Je lui remis donc un exemplaire; mais il dit qu'il ne pouvait comprendre la raison de plusieurs de mes conclusions. Plusieurs autres m'ont dit la même chose, j'ai entrepris une refonte de ce travail.

Il parla beaucoup aussi du faible niveau des mathématiques en Allemagne, et dit que les connaissances de la plupart de mathématiciens se réduisaient à un peu de géométrie, et à quelque chose qu'ils appelaient Analyse, mais qui n'était rien d'autre que la théorie des combinaisons. Pourtant il semblait, à son avis, qu'une

(**) Ancien internat d'étudiants à Copenhague *période plus heureuse pour les mathématiques allait commencer maintenant en Allemagne. Lorsque je lui exprimai mon étonnement qu'il n'existait pas ici de Journal de mathématiques, comme en France, il dit qu'il avait eu depuis longtemps l'intention d'entreprendre un pareil journal, et qu'il n'allait pas tarder à le lancer. Tout est prêt maintenant, et j'en suis très enchanté; car j'ai ainsi où faire paraître tel ou tel de mes petits travaux. - j'en ai déjà rédigé 4, qui doivent prendre place dans le premier fascicule, et comme je les ai écrits en français, Crelle est assez aimable pour les traduire. Mon peu de français m'est ainsi bien utile. Crelle, au sujet de la forme de mes articles, m'a dit qu'à son avis ils sont très clairs et bien écrits, ce qui me fait grand plaisir, car j'ai toujours craint d'avoir de la peine à développer mes idées d'une manière convenable. Mais il m'a conseillé de m'étendre davantage, surtout ici, en Allemagne. il m'a aussi offert des honoraires pour mes articles, ce sur quoi je n'avais naturellement pas compté, aussi ai-je refusé; pourtant j'ai cru remarquer qu'il aurait préféré me voir accepter. Ce même Crelle a aussi une bibliothèque mathématique tout à fait remarquable, dont je me sers comme si elle était à moi, et qui m'est très utile, car elle contient toutes les choses les plus nouvelles, qu'il a aussi vite que possible. Il a entre autres la revue publiée à Paris sous la direction du baron de Ferrussac, le* "Bulletin universel des sciences et de l'industrie", *qui m'est d'une extrême utilité, car j'y trouve annoncés tous les livres et découvertes mathématiques. - Je suis invité chez Crelle une fois pour toutes le lundi soir. Il y a chez lui une sorte d'assemblée, et l'on s'y occupe principalement de musique, à quoi malheureusement je ne comprends pas grand chose. Je m'y amuse bien tout de même, car j'y rencontre toujours quelques jeunes mathématiciens avec qui je cause. Cela m'exerce aussi à l'allemand, ce dont j'ai grand besoin, et ce qui ne va guère bien. Chez Crelle il y avait aussi auparavant une réunion hebdomadaire de mathématiciens, mais il a été obligé de les interrompre, parcequ'il y avait un nommé Ohm avec qui personne ne pouvait s'entendre à cause de son effroyable arrogance. C'est vraiment une chose pénible qu'un seul homme se mette ainsi en travers, quand il s'agit de science. C'est extraordinaire à quel point les jeunes mathématiciens, ici à Berlin, et à ce que j'entends dire, partout en Allemagne, portent Gauss aux nues, pour ainsi dire. Il est pour eux la substance de toute perfection mathématique, mais, s'il est en effet certainement un grand génie, il est tout aussi sûr qu'il rédige mal. Crelle dit que tout Gauss écrit est une horreur (*), car c'est tellement obscur qu'il n'est presque pas possible de le comprendre. - Gauss travaille maintenant à un grand ouvrage sur l'astronomie physique, dont les trois premières parties sont prêtes à imprimer (à ce que me dit un de ses élèves qui est ici, à Berlin). Il s'y trouvera beaucoup de choses nouvelles. - Lorsque j'étais à Hambourg, j'ai rendu visite au Professeur Schumacher, qui m'a reçu avec beaucoup d'empressement, mais il ne se portait pas bien à ce moment là. J'y ai fait aussi connaissance avec T. Clausen, qui a certainement des dispositions remarquables pour les mathématiques; mais, autant que j'en ai pu juger, il n'avait pas étudié beaucoup. Le Professeur Encke, qui est maintenant nommé ici à l'Académie de Berlin, était aussi alors, à Hambourg, mais je ne l'ai pas vu. Il est bizarre qu'il n'y*

(*) Gräuel en allemand, dans le texte

ait ici, à Berlin, aucune chaire d'astronomie. Encke ne donnera pas de leçons.

Je vois que je vais passer tout l'hiver à Berlin, et je n'ai pas encore bien décidé l'époque à laquelle je partirai. A cause de Crelle et du Journal, je resterais volontiers ici aussi longtemps que possible, et d'après ce que j'entends dire, il n'y a aucun autre endroit en Allemagne qui me sera plus profitable. Göttingen a, il est vrai, une bonne bibliothèque, mais c'est tout; car Gauss y est le seul qui sache quelque chose, et il est absolument inabordable. Pourtant, je dois aller à Göttingen, bien entendu. En somme, je voudrais visiter le plus d'universités que je pourrai, car je dois pouvoir récolter un peu dans chacune. -

Je vous prie, monsieur le Professeur, de saluer le professeur Rasmusen et B. Holmboe, et de dire à celui-ci que je lui écrirai bientôt une longue lettre mathématique.

Je souhaite de tout mon coeur que vous vous portiez bien, et je vous prie de continuer à me traiter avec la bonté que vous m'avez constamment témoignée. Je m'efforcerai de m'en rendre aussi digne que possible.
Respectueusement.
N. Abel.

ABEL A HOLMBOE - Le 16 janvier 1826

Cher ami !

Après la promesse que je t'ai faite en quittant Christiania, tu dois depuis longtemps attendre une lettre de moi, et il faut que je te prie de m'excuser de ne pas t'avoir écrit plus tôt. C'est que je désirais ne pas te raconter seulement ce qui m'est arrivé dès le début de ma tournée, mais aussi comment se dessine mon voyage dans l'ensemble. En outre, je désirais encore t'informer de telle ou telle de mes recherches sur plusieurs sujets intéressants dont je me suis occupés. - Je ne vais pas te faire de récit de mon voyage, qui au total a été très dénué d'aventures, et dont peut-être, d'ailleurs, tu auras entendu parler par le professeur Hansteen. Je l'ai prié de te saluer dans la lettre que je lui ai écrite il y a quelque temps. Je suis enchanté qu'il me soit arrivé de venir en Allemagne, surtout à Berlin, avant d'aller à Paris; car, ainsi que tu l'as peut-être appris par ma lettre à Hansteen, j'ai fait ici une merveilleuse connaissance dans la personne du conseiller privé Crelle. Tu ne peux pas t'imaginer l'homme excellent qu'il est; justement ce qu'il me faut, prévenant sans être cuirassé de cette effroyable politesse dont se couvrent bien des gens, d'ailleurs fort honnêtes. Je le fréquente aussi aisément que toi ou d'autres de mes meilleures relations. Il travaille très assidûment les mathématiques, ce qui est d'autant plus méritoire qu'il a énormément à faire comme fonctionnaire. Il a publié dans ces dernières années plusieurs livres mathématiques, qui me paraissent très bons. Il m'a fait l'honneur de me donner la plupart, savoir : une traduction des oeuvres mathématiques de Lagrange, comprenant : Théorie des fonctions analytiques, Leçons sur les fonctions analytiques *et* théorie des équations numériques, *accompagnées de notes excellentes; j'ai reçu également la* Theorie der analytischen Facultäten, *de Crelle. (Elle se trouve à la bibliothèque de Christiania, et si tu ne l'a pas lue, il faut que tu la lises. c'est à beaucoup d'égards un livre remarquable, surtout sous le rapport de la forme)*; Lehrbuch der Arithmetik und Algebra *et* Lehrbuch der Elemente der geometrie *3 volumes, de Crelle. En outre, je me suis procuré sa* "Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Grössen" *et je me procurerai aussi plusieurs petits mémoires qu'il a fait imprimer. Au printemps j'enverrai tous ces livres et plusieurs autres en Norvège, et je les confierai à ta garde. Naturellement je ne peux pas les emporter avec moi. Je vais chez Crelle toutes les semaines le lundi soir, et de plus nous nous promenons ensemble tous les vendredis dans l'après-midi pendant quelques heures. Tu peux penser si l'on s'en donne, des mathématiques, aussi vite que mon mauvais allemand me le permet. Je m'y débrouille tout de même passablement. Il ne peut pas se mettre dans la tête que je peux comprendre tout ce qu'on dit, sans savoir bien parler moi-même. - La langue de Berlin n'est d'ailleurs pas précisément la meilleure, d'une part assez dure, et d'autre part excessivement molle et effacée. Ainsi on prononce toujours au commencement des mots j pou g, ce qui est diablement drôle à entendre, par exemple* O! Jot! *que l'on entend à chaque instant. On a la phrase suivante pour se moquer des Berlinois sous ce rapport* : "Eine jute jebratene Jans ist eine jute Jabe Jottes". *Une autre chose qui produit un effet bizarre est qu'ils intervertissent mir et mich, dir et dich : et aussi on dit constamment sind pour seyn. Mon garçon dit* : Wollen Sie so jut sind mich Jeld zu jeben; ich werde jleich hier sind. -

Comme Hansteen te l'a peut-être raconté, un Journal mathématique paraîtra ici à dater du commencement de l'année, ce dont je suis bien content, comme tu penses. Il ne contiendra certainement pas beaucoup de mauvais, un peu est inévitable, car il y aura probablement beaucoup de gens à y écrire. Dans chaque numéro paraîtront deux ou trois mémoires de moi, tu peux y compter, et je ferai tous mes efforts pour produire ce que je pourrai de mieux, tu peux m'en croire. J'en ai déjà terminé 6. Il en paraîtra 1 ou 4 dans le premier numéro, qui paraîtra bientôt, dans un mois environ. L'un de ces mémoires est la démonstration de l'impossibilité de la résolution générale des équations, que j'ai développée plus amplement que je ne l'avais fait dans le mémoire que j'ai fait imprimer à Christiania. Crelle disait de ce mémoire qu'il était honorable, mais qu'il ne pouvait pas encore le comprendre tout à fait. J'ai tant de peine à m'exprimer d'une manière claire dans ces sujets que l'on a encore si peu étudiés à ma façon. - Depuis que je suis arrivé ici à Berlin, j'ai cherché aussi à résoudre le problème général suivant : "Trouver toutes les équations que l'on peut résoudre algébriquement". *Je ne suis pas encore au bout, mais autant que je comprends, ça ira bien : Tant que le degré de l'équation est un nombre premier, il n'y a pas trop de difficulté, mais lorsque c'est un nombre composé, c'est le diable. J'ai appliqué aux équations du 5ème degré, et j'ai heureusement résolu le problème dans ce cas. J'ai trouvé un grand nombre d'équations, outre celle déjà connues, que l'on peut résoudre. Lorsque j'aurai achevé le mémoire comme je le désire, je me flatte qu'il sera bon. Au moins c'est quelque chose de général, et il y aura de la méthode, c'est là, je trouve, le plus important. - Un autre problème* *dont je me suis beaucoup occupé est la sommation de la série :*

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \ldots$$

Si m est un nombre entier positif, la somme de cette série, comme tu sais, est $(2\cos x)^m$, mais si m n'est pas un nombre entier, il n'en est plus de même, à moins que x soit plus petit que $\frac{\pi}{2}$. - Il n'y a aucun problème qui ait occupé les mathématiciens autant que celui-là dans ces derniers temps. Poisson, Poinsot, Plana, Crelle, et une quantité d'autres ont cherché à le résoudre, et Poinsot est le premier qui ait trouvé une somme exacte, mais son raisonnement est tout à fait faux, et personne encore n'a pu en venir à bout. J'y ai réussi avec une entière rigueur. Un mémoire là-dessus prendra place dans le Journal, et j'en enverrai bientôt un autre en France pour être inséré dans les Annales de mathématiques *de Gergonne. - j'ai trouvé*

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \ldots = (2+2\cos 2x)^{\frac{m}{2}}.\cos mk\pi$$
$$\sin mx + m\sin(m-2)x + \ldots = (2+2\cos 2x)^{\frac{m}{2}}.\sin mk\pi$$

m est une grandeur comprise entre -1 et $+\infty$, k un nombre entier, et x une grandeur comprise entre $(k-\frac{1}{2})\pi$ et $(k+\frac{1}{2})\pi$. Si tu fais dans la seconde égalité $k=0$, tu as la curieuse formule :

$$\sin mx + m\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\sin(m-4)x + \ldots = 0$$

pour toutes valeurs de x comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si m est compris entre -1 et $-\infty$, les deux séries sont divergentes, et par suite n'ont aucune somme. Les séries divergentes sont en bloc une invention du diable, et c'est une honte que l'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut en tirer tout ce qu'on veut quand on les emploie, et ce sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant de paradoxes. Peut-on penser quelque chose de plus affreux que de dire que

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + etc.$$

où n est un nombre positif. Risum tencatis amici. *Je suis devenu prodigieusement attentif à tout cela; car si l'on excepte les cas de la plus extrême simplicité, par exemple : les séries géométriques, il n'y a presque pas, dans toutes les mathématiques, une seule série infinie dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse; en d'autres termes, ce qu'il y a de plus important dans les mathématiques est sans fondement. La plupart des choses sont exactes; cela est vrai; et c'est extraordinairement surprenant. Je m'efforce d'en chercher la raison. Sujet excessivement intéressant. - Je ne crois pas que tu puisses me présenter beaucoup de propositions ou entrent des séries infinies, contre la démonstration desquelles je ne puisse faire des objections fondées. Fais-le, je te répondrai. Même la formule du binôme n'est pas encore démontrée rigoureusement. -*

j'ai trouvé que l'on a

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots$$

pour toutes les valeurs de m lorsque x est plus petit que 1. Si x est égal à +1, on a la même formule dans le cas où m > −1, et seulement alors, mais si x = −1, la formule n'a pas lieu, à moins que m soit positif. Pour toutes les autres valeurs de x et de m la série 1 + mx+ etc. est divergente. Le théorème de Taylor, la base de toutes les mathématiques supérieures, est tout aussi mal fondé. Je n'en ai trouvé qu'une démonstration rigoureuse, et elle est de Gauchy dans son Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal. *Il y démontre que l'on a :*

$$\varphi(x+a) = \varphi x + a\varphi' x + \frac{a^2}{2}\varphi'' x + \ldots$$

toutes les fois que la série est convergente (mais on a bientôt fait de s'en servir dans tous les cas). Pour montrer par exemple général (sit venia verbo) *combien on raisonne mal et combien il faut être prudent, je choisirai l'exemple suivant : - J'en étais là lorsque Maschmann est entré, et comme depuis longtemps je n'ai pas reçu de lettre de chez nous, je me suis arrêté pour m'informer s'il n'en avait pas une pour moi (c'est lui en effet qui nous les apporte toujours), mais il n'y avait rien. Par contre il avait lui-même reçu une lettre, et entre autres nouvelles, il a raconté que toi, mon ami, tu es nommé lecteur à la place de Rasmusen. Reçois mes félicitations les plus sincères, et sois assuré qu'aucun de tes amis ne s'en réjouit autant que moi. j'ai souvent souhaité un changement dans ta situation, tu peux me croire, car être professeur dans une école doit être quelque chose d'affreux pour quelqu'un comme toi, qui t'intéresses tant à ta science. - A présent il va falloir que tu t'occupes de trouver une fiancée, n'est-ce pas. J'entends dire que ton frère le doyen (*) en a trouvé une. Je ne puis nier que cela m'a vivement frappé. Salue-le bien de ma part, et félicite le "très-chaudement" (**)*

Et maintenant je reviens à mon exemple. Soit une série infinie quelconque

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + etc.$$

tu sais qu'une manière très courante d'en faire la sommation, est de chercher la somme de :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

et de faire ensuite $x = 1$ dans le résultat. C'est juste : mais il me semble qu'on ne peut l'accepter sans démonstration; car si l'on prouve que

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

(*) Degré dans la hiérarchie ecclésiastique luthérienne, au dessus des prêtres et au dessous de l'évêque

(**) Am meisten, en allemand, dans le texte *pour toutes les valeurs de x inférieurs à 1, il n'est pas dit pour cela qu'il en soit de même lorsque $x = 1$. Il serait très possible que la série $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ s'approchât d'une valeur toute différente de $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ à mesure que x tends vers 1. Cela est clair dans le cas général où la série $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ est divergente, car elle n'a alors aucune somme. j'ai démontré que c'est exact lorsque la série est convergente. l'exemple suivant montre combien on peut se tromper. On peut démontrer rigoureusement que l'on a pour toutes les valeurs de x inférieures à π*

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 3x - etc$$

Il semble que par suite la même formule devrait avoir lieu pour $x = \pi$; mais cela donnerait :

$$\pi = \sin \pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi + \frac{1}{2}\sin 3\pi - etc. = 0(absurde).*$$

On peut trouver d'innombrables exemples de ce genre. - En général la théorie des séries infinies, jusqu'à présent, est très mal établie. - On fait toute espèce d'opérations sur les séries infinies, comme si elles étaient finies, mais est-ce permis ? Jamais de la vie. Où cela est-il démontré que l'on obtient la dérivée d'une série infinie en prenant la dérivée de chaque terme ? Il est facile de citer des exemples où cela n'est pas exact, par ex. :

$$x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 3x - \ldots **$$

En prenant les dérivées on a :

$$x = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - etc. **$$

Résultat absolument faux, car cette série est divergente. - Il en est de même pour la multiplication, la division, etc. des séries infinies. - j'ai commencé à passer en revue les règles les plus importantes qui sont admises (aujourd'hui) sous ce rapport, et à montrer dans quels cas elles sont justes ou non. - Cela va très bien et m'intéresse extrêmement. -

Il est probable que je resterai ici à Berlin jusqu'à la fin de février ou jusqu'en mars, et que je passerai ensuite par Leipzig et Halle pour aller à Göttingen (non pas pour Gauss, car il est , paraît-il, insupportablement orgueilleux, mais pour la bibliothèque, qui est, dit-on, magnifique).

Vers la fin de l'été, j'irai à Paris. Je voudrais bien être chez nous, car j'ai une terrible nostalgie. Et maintenant écris-moi une longue lettre sur toutes sortes de choses. Fais- le, je te prie, sitôt ma lettre reçue. - Demain j'irai à la Comédie voir Die schöne Müllerinn. Adieu, et salue mes connaissances.
Ton ami N. H. ABEL.

* Abel a par incurie mis au premier membre π au lieu de $\frac{1}{2}\pi$
** Abel a par incurie mis au premier membre x au lieu de $\frac{1}{2}x$
** Abel a mis x au lieu de $\frac{1}{2}$

A VOS STYLOS

PROBLÈME 46

Énoncé (proposé par R. Schäfke) :

Soit la matrice carrée $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où $a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$ (coefficient binomial).
Montrer que M est définie positive, de déterminant égal à 1, et que si λ est valeur propre de M alors $1/\lambda$ est également valeur propre de M.

Solution (par P. Renfer) :

1) Lemme 1 : Formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$$

(la formule est valable même si $n > a$ ou $n > b$, à condition de poser $C_n^p = 0$ si $p > n$)

Démonstration algébrique : Le second membre est le coefficient de n^n dans $(1+X)^{a+b}$. Le premier membre s'obtient comme coefficient de x^n dans le produit $(1+x)^a(1+x)^b$.

Démonstration combinatoire : Le second membre est le nombre de façons de choisir simultané ment n boules dans une urne contenant a blanches et b noires. Dans le premier membre on calcule ce nombre, en distingant suivant le nombre k de blanches choisies.

2) Lemme 2 :

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(R)$ alors les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Démonstration : I désignant la matrice unité de $\mathcal{M}_n(R)$ et X l'indéterminé des polynômes, il suffit de comparer les déterminants des deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_{2n}(R)$:

$$\begin{pmatrix} X.I & A \\ B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X.I-AB & A \\ O & I \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} X.I & A \\ B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A \\ O & X.I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X.I & O \\ B & X.I-BA \end{pmatrix}$$

3) Résolution du problème : stricte positivité de la matrice

Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n R$, avec $a_{i,j} = C_{i+j-2}^{i-1}$
Posons : $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n R$, avec $t_{i,j} = C_{i-1}^{j-1}$ (en utilisant la convention $C_n^p = 0$ si $p > n$)
On montre, grâce au lemme 1, que : $M = T.{}^tT$.
La matrice T est triangulaire inférieure, avec des coefficients 1 sur la diagonale. Son déterminant est donc égal à 1, ainsi que celui de sa transposée et celui de M.
Si X et Y désignent des vecteurs colonnes de R^n, M est la matrice de la forme bilinéaire :

$$(X, Y) \mapsto \varphi(X, Y) = {}^tY.MX = {}^tY.T.{}^tT.X = {}^t({}^tT.Y)({}^tT.X).$$

Donc :

$$\varphi(X, X) = {}^t({}^tT.X).({}^tT.X) = \|{}^tT.X\|^2 \geq 0$$

Et $\varphi(X, X) = 0$, seulement si ${}^tT.X = O$, c'est-à-dire $X = O$ (car ${}^tT$ est inversible).
M est donc définie positive.

4) Etude du spectre de la matrice

On va montrer que M et M^{-1} ont même polynôme caractéristique, ce qui prouvera que l'ensemble des valeurs propres de M coïncide avec l'ensemble de leurs inverses.
Pourtoute matrice $N = (b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{p,q}(R)$, posons $\overline{N} = \left((-1)^{i+j} b_{i,j}\right)$ On vérifie que si $N_1 \in \mathcal{M}_{p,q}(R)$ et $N_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(R)$, alors $\overline{N_1.N_2} = \overline{N_1}.\overline{N_2}$.
La formule du binôme de Newton montre que T transforme les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ (1+X) \\ (1+X)^2 \\ \vdots \\ (1+X)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc T^{-1} transforme les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 : cr(-1+y) \\ (-1+y)^2 \\ \vdots \\ (-1+y)^{n-1} \end{pmatrix}$$

et $\overline{T}$ fait de même, d'après Newton.
Comme R^n admet une base de vecteurs du type ci-dessus (d'après le classique déterminant de Vandermonde), on conclut que : $T^{-1} = \overline{T}$.
D'après le lemme 2, $M^{-1} = {}^tT^{-1}.T^{-1} = {}^t\overline{T}.\overline{T}$ a le même polynôme caractéristique que $\overline{M} = \overline{T}.{}^t\overline{T}$.

Et $\overline{M}$ a le même polynôme caractéristique que M, car M et $\overline{M}$ ont les mêmes valeurs propres, puisque : si $M.X = \lambda X$ alors $\overline{M}.\overline{X} = \lambda\overline{X}$.

PROBLÈME 48

Énoncé (proposé par R. Garin) :

Pour quel(s) entier(s) naturel(s) n la somme

$$\sum_{k=0}^{n} k^2(n-k)^2$$

est-elle un carré parfait ?

Indication (indépendamment, par R. Garin et P. Renfer) :

On commence d'abord par montrer que la somme est un polynôme $P(n)$ de degré cinq. On le calcule et on trouve :

$$P(n) = \frac{1}{30}(n^5 - n) = \frac{1}{30}n(n-1)(n+1)(n^2+1).$$

On constate que pour $n = 0, 1, 2$, c'est un carré parfait. En discutant selon les congruences de n modulo 2, modulo 3, et modulo 5, on parvient à démontrer que ce sont là les seules valeurs de n pour lesquelles c'est un carré parfait.

PROBLÈME 49

Énoncé (proposé par R. Kern) :

Dans un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB, et α, β, γ les mesures respectives des angles en A, B et C.

1) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 2\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 2\beta$.

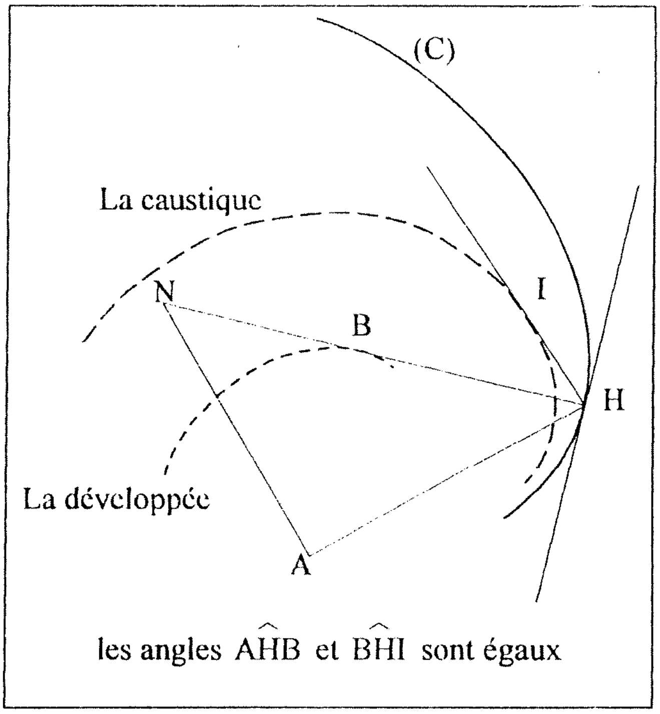
2) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 3\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 3\beta$.

PROBLÈME 50

Énoncé (proposé par A. Stoll, IREM de Strasbourg) :

Données :
- Une courbe plane (C) "suffisamment régulière"
- un point A dans le plan de la courbe (C)

Notations : (cf. figure)
- H un point de la courbe (C)
- B désigne le centre de courbure correspondant à H
- N le point de la normale à (C) en H tel que (AN) soit perpendiculaire à (AH)
- I est le point de la caustique issue de A



Montrer que :

$$\boxed{\frac{|2HN - HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}}$$

Applications :

1. En déduire une construction géométrique du centre de courbure d'une parabole en un point quelconque.
2. Montrer que la caustique d'une spirale logarithmique par rapport à son centre est une spirale logarithmique identique.
3. Trouver d'autres applications de la formule ci-dessus.

PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$tg\,x = \frac{x - \dfrac{1.3.5}{1.2.3}\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{1.3}{1.2}\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \dfrac{a(a+2)(a+4)}{a(a+1)(a+2)}\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}\dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{a(a+2)}{a(a+1)}\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{a(a+2)(a+4)(a+6)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}\dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des 2−mélanges réguliers (pour la définition d'un 2−mélange, voir l'article sur les tours de cartes dans le présent numéro de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

C'EST NOTÉ ?
Un CD de chansons du collège d'Erstein.

Peut-on rire avec les mathématiques ?

Sûrement lorsqu'on est expert en la matière (par exemple professeur) et qu'on domine le sujet. Moins évidemment lorsqu'on est élève, et qu'aux difficultés bien connues de l'apprentissage, s'ajoutent les délicates pressions de l'entourage (« *Gérard ! T'as eu combien à ton interro de maths* ? »).

Un professeur de mathématiques du collège d'Erstein, Arnaud Chatirichvili, a eu envie de partager avec ses élèves une vision humoristique de sa discipline, ainsi que de la vie au collège. Au fil des années, des événements et des classes, il a écrit une dizaine de chansons sur ces sujets. Entre autres, « *Le rock des Maths* » (où l'idole est Johnny Pythagore et Jésus un as en multiplication), « *C'est noté ?* » (l'histoire du gars qui pose toujours la même question), « *Le Rap des maths* » (les mathématiques considérés comme une maladie), « *j'ai les boules* » (la préparation de l'interrogation de mathématiques), « *Bavardage* », « *Rire en musique* », etc...

Ces chansons vont figurer sur un CD avec celles de Patrick Hecklen, professeur d'allemand à Erstein, qui aborde sous le même angle l'enseignement de l'allemand (« *Zeit, Zeit, keine Zeit* », « *Sommerhitze* »...).

Les musiques sont rock, jazz, volkslied, ou simplement chanson française.

Le disque, enregistré par les auteurs, avec de jeunes musiciens, sortira le 28 avril 1998 à l'occasion d'un concert donné à Erstein.

Il est proposé en souscription à un tarif réduit (100 francs et en prime les textes des chansons) jusqu'à la date du 11 avril.

BON de SOUSCRIPTION
CD des chansons du Collège d'ERSTEIN
à retourner au :
Foyer du Collège Romain Rolland, 1 rue de Wissembourg 67150 ERSTEIN

NOM.. ....PRENOM.......................................
Adresse..
....
Téléphone (facultatif) : ....

1 - Je commande ..... CD au prix unitaire de 100 francs, soit .... francs.
Les disques seront à retirer auprès des auteurs ou au foyer du collège d'Erstein.
2 - Je commande ..... CD au prix unitaire de 100 francs
J'ajoute les frais de port, soit 20 francs par tranche de 5 disques, soit : .... francs

Ci-joint un chèque bancaire ou postal à l'ordre du Foyer Coopératif du collège d'Erstein.