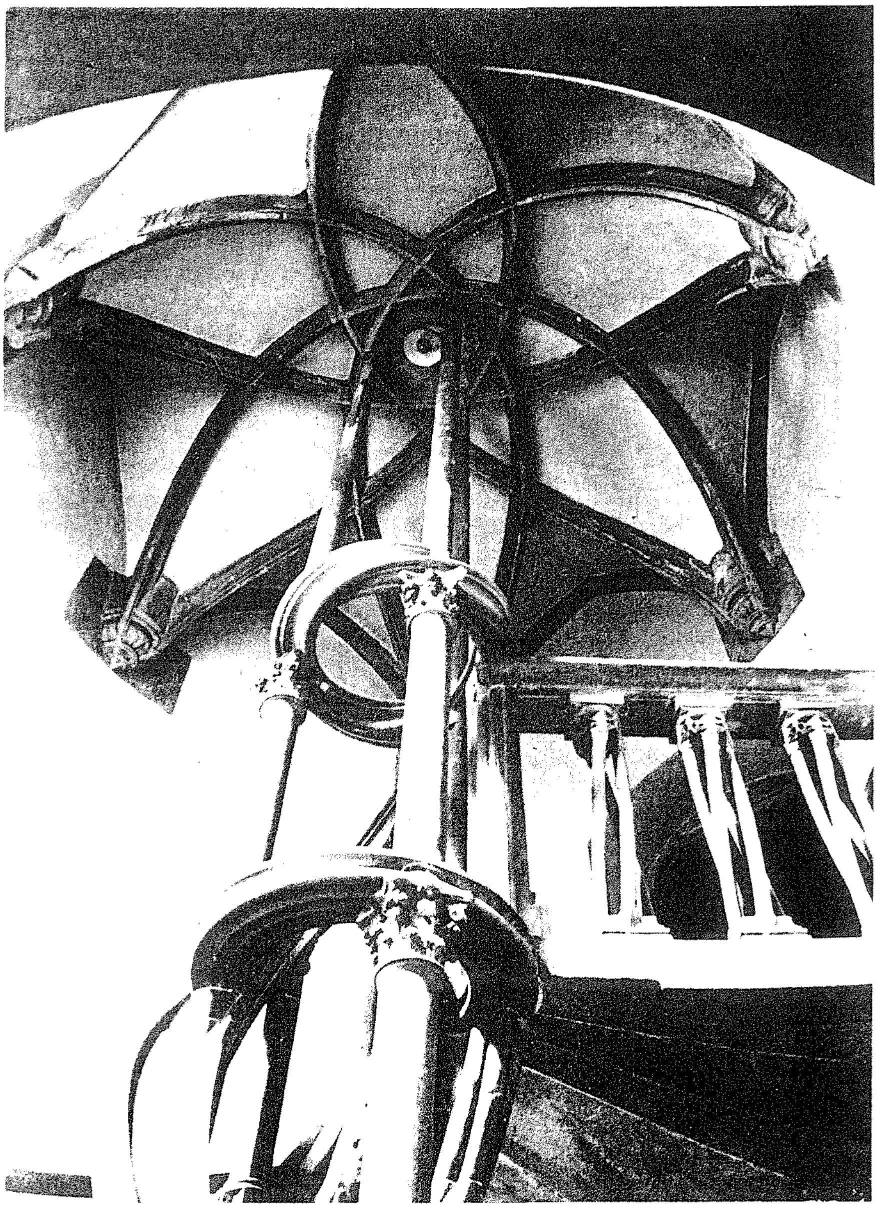
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 91 – JUIN 1998 I.S.S.N. 0290 - 0068

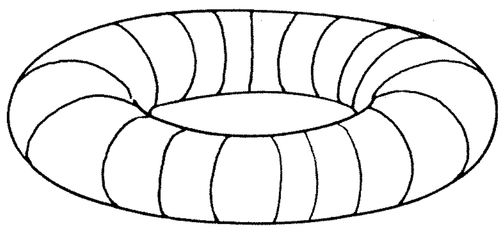


NOTRE COUVERTURE

Elle nous est suggérée par Marcel Berger qui l'utilise pour illustrer plusieurs paragraphes de sa *Géométrie* (Editions NATHAN 1990), en particulier 10.12.1, tome 1 p. 368.

10.12.1 Soit T un *tore*, c'est-à-dire la surface engendrée par un cercle tournant autour d'une droite de son plan, ne le rencontrant pas. Ce tore contient deux familles de cercles, les parallèles et les méridiens. Le premier point surprenant est que T contient d'autres cercles, dits parfois de Villarceau par les mathématiciens, mais connus bien avant lui (1848), comme on peut le vérifier par exemple en visitant à Strasbourg le musée de l'Oeuvre-Notre-Dame, où le haut de la colonne de l'escalier à vis est couronné par un tore sculpté précisément en sorte que ses arêtes vives soient de tels cercles. On peut aussi les trouver en coupant T par un plan bitangent, figure 10.12.1.3.

Figure 10.12.1.1



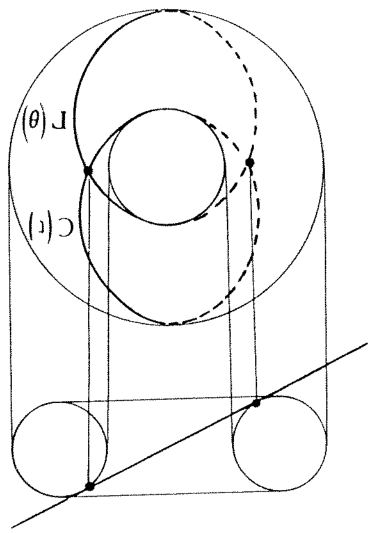


Figure 10.12.1.3

DES PROGRAMMES SANS CONTINUITÉ

Il est bien difficile de trouver un titre qui n'amène pas une ambiguïté sur le sujet dont il va être question. Si, à la place, je mettais "plus de continuité dans les programmes" alors l'ambiguïté ne serait pas seulement sur la continuité mais aussi sur le "plus" : est-ce "plus du tout" ou "encore plus" ? Ou si je choisissais "Exit la continuité" on prendrait alors cela comme un souhait de ma part alors qu'il s'agit d'une réalité à laquelle je vais me trouver confrontée pour l'enseignement des mathématiques en Terminale l'année prochaine. Mais je ne serai pas la seule puisque la notion de continuité de fonction a été retirée des programmes de mathématiques du Lycée. Est-ce un bien, est-ce un mal?

En fait, le concept de continuité ne passait pas bien auprès des élèves. C'est curieux puisqu'il est associé à une image mentale simple. Mais, au niveau du Lycée les élèves sont trop convaincus par l'usage qu'une fonction définie sur un intervalle I est continue sur l'intervalle I - malgré les (rares) contre-exemples qu'on peut leur présenter - pour trouver une utilité à ce "vocabulaire" supplémentaire. Ainsi, quand il s'agissait d'utiliser le théorème qui dit qu'une fonction f (définie) continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur $f(I)$, ce n'était que mon acharnement qui me permettait de trouver dans leur rédaction la continuité en plus de la stricte monotonie, et non l'image mentale que je croyais leur avoir fournie. Désormais, je n'aurai qu'à réclamer la dérivabilité à la place de la continuité, puisque le théorème impose maintenant les conditions de dérivabilité et de stricte monotonie sur I.

Mais il est un autre point du programme qui m'inquiétait en relation avec la suppression de la continuité : c'est celui du calcul intégral. Nous avions un théorème disant qu'une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. Allons-nous remplacer continue par dérivable? savoir qu'on peut dériver la fonction pour savoir qu'on peut l'intégrer c'est regarder à la fois en arrière et en avant avec des dangers pour le calcul lui-même. Et, comme les nouveaux livres sont en train de paraître, je suis allée voir le langage choisi par leus auteurs. Les uns ont simplement remplacé "continue" par "dérivable" dans les théorèmes. Et après tout, tant qu'à donner une condition suffisante, on peut en donner une autre, suffisante elle aussi. Mais d'autres auteurs ont sans doute eu les mêmes réticences que moi et leurs théorèmes commencent par : Soit f une fonction définie sur I et admettant une primitive sur I ...". Quelles sont celles qui admettent des primitives? direz-vous. D'abord il y a celles pour lesquelles on sait en trouver une (F telle que $F' = f$). Et il est signalé dans le chapitre sur les primitives qu'une fonction dérivable sur I admet des primitives sur I, ce qui élargit le champ d'action.

Eh bien, voilà qui va m'arranger dans mon travail avec les élèves; plus besoin de réclamer une continuité. Pour l'intervalle $[a; b]$ sur lequel je demande un calcul intégral, c'est à moi de bien le choisir. Il ne leur reste plus qu'à chercher une primitive et ça, ils veulent bien le faire.

Ainsi, une analyse du problème m'amène à me satisfaire de la suppression de la continuité en classe de terminale, libre à moi d'en parler un peu par nostalgie. Mais que les professeurs de l'enseignement supérieur s'en avisent pour les étudiants qui viendront dans un an. Continuité? connais-pas. Ces changements soulèvent des questions. N'hésitez pas à nous envoyer vos réactions à ce sujet.

O. Schladenhaufen

SOMMAIRE

N° 91 – JUIN 1998

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
Rédacteur en chef : Jean-Pierre FRIEDELMEYER

◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03-88-41-64-40
Fax : 03-88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
http ://irma.u-strasbg.fr/irem

◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.

◇ N° spécial Georges REEB (66 F port compris).

◇ Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.

◇ *Prix du numéro* : 35.– F

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE DU SECOND DEGRÉ (SUITE ET FIN)

III. Formes irréductibles à discriminant positif

Éric KERN

Nous ne considérerons plus désormais que des formes quadratiques irréductibles à discriminant $D > 0$, donc $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$ et par suite $D \geq 5$.

A. Formes réduites :

Définition :
On dit qu'un nombre quadratique réel x est réduit si :

$$-1 < x^\sigma < 0 < 1 < x$$

On dira qu'une forme primitive irréductible de discriminant positif est réduite si sa première racine est un quadratique (réel) réduit.

Remarque : *Si x et y sont réduits et si $\partial x = \partial y$, on a $x = y$.*

En effet on a $y = x + a$, avec $a \in \mathbb{Z}$ donc $a = 0$, puisque $-1 < x^\sigma < 0$ et $-1 < y^\sigma < 0$.

Proposition :
Si x est un quadratique réel réduit alors $x_1 = \partial x$ est aussi réduit (et de même discriminant que x).

On a $x_1 = 1/(x - a) = \partial x > 1$ avec $a = [x] \geq 1$. Or $x^\sigma - a < -a \leq -1$, donc $-1 < x_1^\sigma < 0$, de sorte que x_1 est réduit.

Soient x un nombre quadratique réel et $f = [A, B, C]$ la forme primitive associée. Posons $P(t) = At^2 + Bt + C = f(t, 1)$. Si x est réduit, x est la plus grande racine de f, donc $A > 0$. La condition $-1 < x^\sigma < 0$ s'écrit donc $P(-1) > 0$ et $P(0) < 0$, soit $A - B + C > 0$ et $C < 0$. La condition $1 < x$ s'écrit $P(1) < 0$ soit $A + B + C < 0$. Ces deux dernières conditions s'écrivent aussi $B < A + C < -B$, ce qui signifie que $B < 0$ et que $|A + C| < |B|$. Donc :

Pour qu'une forme primitive irréductible $f = [A, B, C]$ de discriminant $D > 0$ soit réduite il faut et il suffit que l'on ait :

$$A > 0 \ , \ C < 0 \ , \ B < 0 \ , \ |A + C| < |B|$$

Si f est réduite on a donc $D = B^2 + 4A|C| \leq B^2 + 4$, donc $B^2 \leq D - 4$. On en déduit donc que pour un discriminant $D > 0$ donné il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour B et pour chacune de ces valeurs de B il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour A et pour C. Donc :

Il n'y a qu'un nombre fini de réduites de discriminant $D > 0$ donné.

Comme le nombre de réduits de discriminant donné D est fini, ∂ est donc une permutation de l'ensemble de ces réduites, qui les décompose donc en cycles disjoints. Si x est réduit il existe donc un entier $p > 0$ tel que $\partial^p x = x$. Le plus petit de ces entiers s'appellera la période de x.

Proposition :
Pour qu'un quadratique réel x soit réduit il faut et il suffit que son développement en fractions continues soit périodique, i.e. $x = [\overline{b_1, \cdots, b_p}] = [b_1, \cdots, b_p, b_1, \cdots]$.

Si x est réduit, il existe un $p > 0$ tel que $x = \partial^p x$, d'où $x_n = \partial^n x = \partial^{n+p} x = x_{n+p}$ et par suite $a_{n+p} = a_n$ car $a_n = [x_n]$.
Réciproquement (Euler) supposons que $x = [\overline{b_1, \cdots, b_p}] = [b_1, \cdots, b_p, b_1, \cdots]$ et montrons que x est réduit. Comme $b_i \geq 1$ on a $x > 1$. D'autre part si on pose $G = T(b_1, \cdots, b_p) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a $G \cdot x = x$ donc aussi $cx^2 + (d-a)x - b = 0$. Or on a $c > 0$ et $b > 0$,donc le produit des racines de cette dernière équation est < 0. On a donc $x^\sigma < 0$. Si on pose $y = [\overline{b_p, b_1, \cdots, b_{p-1}}]$, les mêmes considérations s'appliquent à y et on a $\partial y = x$, en particulier on aura $y^\sigma - [y] < -1$ donc $-1 < 1/(y^\sigma - [y]) = x^\sigma < 0$, de sorte que x est réduit.

Les conditions ci-dessus montre que $f = [A, B, C]$ est réduite si et seulenent si $g = [-C, B, -A]$ est réduite. Or si x est la première racine de f, alors $-1/x^\sigma$ est la première racine de g donc :

Un nombre quadratique réel x est réduit si et seulement si $-1/x^\sigma$ est réduit et ces deux nombres ont même discriminant.

Proposition :
Si x est un quadratique réel réduit posons $x^* = -1/x^\sigma$, qui est donc aussi un réduit. Si $y = \partial x$, on a $\partial(y^*) = x^*$ et $a = [x] = [y^*]$

On a $y = 1/(x - a)$ avec $a = [x] \geq 1$. D'où $a < y^* = -x^\sigma + a < a + 1$, donc $a = [y^*]$. En outre $\partial(y^*) = -1/(y^* - a) = -1/x^\sigma = x^*$.

Proposition :
Soit $x = [\overline{a_0, \cdots, a_r}]$, un réduit. Alors $y = -1/x^\sigma = [\overline{a_r, \cdots, a_0}]$.

Posons $x_n = \partial^n x$ et $y_n = \partial^n y$. On a la situation suivante, la flèche représentant l'opération ∂ :

$$x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \cdots \longrightarrow x_{r-1} \xrightarrow{a_{r-1}} x_r \xrightarrow{a_r} x_0$$

donc aussi, d'après la proposition précédente :

$$(x_0)^* \xleftarrow{a_0} (x_1)^* \xleftarrow{a_1} \cdots \longleftarrow (x_{r-1})^* \xleftarrow{a_{r-1}} (x_r)^* \xleftarrow{a_r} (x_0)^*$$

d'où la conclusion puisque $(x_0)^* = x^* = y$.

Remarque : Ce résultat a d'importantes conséquences, que nous n'exploiterons pas dans cet article (c'était pour le plaisir du codage en TEXde la démonstration).

B. Théorème de périodicité de Lagrange :

Soient $f = [A, B, C]$ une forme primitive irréductible de discriminant $D > 0$ et x la première racine de f. On posera : $f_n = \partial^n f = [A_n, B_n, C_n]$ et $x_n = \partial^n x$ de sorte que x_n est la première racine de f_n. On désignera par $x = [a_0, \cdots, a_n, \cdots]$ le développement en fraction continue de x, de sorte que $a_n = [x_n]$.

Théorème de périodicité de Lagrange :
Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, il existe un r tel que x_r soit réduit. Le développement en fraction continue de x est donc périodique à partir de r, c'est à dire, $x = [a_0, \ldots, a_{r-1}, \overline{b_1, \cdots, b_p}]$.

Comme $x_m = a_m + 1/x_{m+1}$ et $x_m^\sigma = a_m + 1/x_{m+1}^\sigma$, dire que $x_{m+1}^\sigma < 0$ signifie que que $x_m^\sigma < a_m < x_m$, autrement dit que les entiers séparent les racines de f_m et que x_m est la plus qrande racine de f_m. Montrons que s'il en est ainsi, il en est de même pour x_{m+1} et que x_{m+2} est réduit. Comme $a_{m+1} \geq 1$ on a $1/x_{m+2}^\sigma = x_{m+1}^\sigma - a_{m+1} < 0 - 1 = -1$, donc $-1 < x_{m+2}^\sigma < 0 < 1 < x_{m+2}$ et par suite x_{m+2} est réduit. De plus comme $x_{m+1}^\sigma < 0$, on a bien $x_{m+1}^\sigma < a_{m+1} < x_{m+1}$. Montrons qu'il existe effectivement un m tel que $x_{m+1}^\sigma < 0$. Supposons $x_{m+1}^\sigma > 0$ pour tout m. On ne peut avoir $0 < x_{m+1}^\sigma < 1$, car alors $x_{m+2}^\sigma = 1/(x_{m+1}^\sigma - a_{m+1}) < 0$. Comme $x_m^\sigma = a_m + 1/x_{m+1}^\sigma > 1$ pour tout m on a donc $[x_m^\sigma] = a_m = [x_m]$ pour tout m donc $x = [a_0, a_1, \cdots] = x^\sigma$, ce qui est contradictoire.

Remarque :

(i) $sgn(A_{n+2}) = -sgn(x_{n+2}^\sigma.sgn(A_n)$

(ii) Si s est le plus petit entier $t.q.x_s$ soit réduit alors si $1 \leq n < (s-1)$ on a $sgn(A_{n+2} = -sgn(A_n)$, $B_n \neq 0$ etc...

Théorème :
Avec les notations ci-dessus, soit p la période du développement en fractions continues de x, i.e. p est le plus petit entier positif tel que $a_n = a_{n+p}$ pour n assez grand. Soit $r \geq 0$ un indice dans la partie périodique de x. Posons

$$T_1 = T(a_0, \cdots, a_{r-1}) \quad et \quad H = T(a_r, \cdots, a_{r+p-1})$$

Pour que $G \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ soit tel que $G \cdot x = x$, i.e. $f * G = f$, il faut et il suffit que l'on ait $G = \epsilon T_1 H^n T_1^{-1}$ avec $\epsilon = \pm 1$ et $n \in \mathbb{Z}$ qui sont déterminés de façon unique par ces conditions. En outre on a $\det(G) = (-1)^{n+p}$.

Démontrons d'abord le résultat si x est réduit et si l'on prend $r = 0$ i.e. $T_1 = I$. Il faut donc montrer que tout $G \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ tel que $G \cdot x = x$ s'écrit de façon unique sous la forme $G = \epsilon H^n$ avec $\epsilon = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, $H = T(a_0, \cdots, a_{p-1})$, et réciproquement. On a $x = x_p = \partial^p x$, donc $H \cdot x = x_p = x$ et on a donc aussi $(\epsilon H^n) \cdot x = x$ si $\epsilon = \pm 1$ et $n \in \mathbb{Z}$, d'où la réciproque dans le cas considéré. Montrons

d'abord l'unicité. Si $\epsilon_1 H^n = \epsilon_2 H^m$, quitte à échanger n et m on peut supposer $n \leq m$ et alors $I = \epsilon_1\epsilon_2 H^{m-n}$. Or si on pose $H^{m-n} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a $\gamma > 0$ si $(m-n) > 0$ (ceci est une propriété des $T(a_0, \cdots, a_k)$), donc $n = m$ et par suite aussi $\epsilon_1 = \epsilon_2$.
Montrons maintenant l'existence. Soit $G \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ tel que $G \cdot x = x$. Si $\det(G) = -1$, on sait que p est impair donc que $\det(H) = -1$. Or G est de la forme ϵH^n si et seulement si il en est ainsi pour GH et on a $\det(GH) = 1$. On peut donc désormais supposer que $\det(G) = 1$. Or on sait que G s'écrit de façon unique $G = G(t,u) = \begin{pmatrix} (1/2)(t - Bu) & -Cu \\ Au & (1/2)(t + Bu) \end{pmatrix}$, où t et u sont solutions entières de $t^2 - Du^2 = 4$. Si $u = 0$ on a $t = \pm 2$, donc $G = \pm I$ ce qui démontre l'existence dans ce cas. Supposons maintenant $u \neq 0$, donc $t \neq 0$. Vérifions d'abord que l'une des matrices $G, G^{-1}, -G, -G^{-1}$ est de la forme $G_1 = G(t_1, u_1)$ avec $t_1 > 0$, $u_1 > 0$. En effet comme $\det(G) = 1$ et $G = G(t,u)$ on a $G^{-1} = G(t,-u)$, donc aussi $-G = G(-t,-u)$ et $-G^{-1} = G(-t,u)$, d'où le résultat. Il suffit donc de démontrer le résultat lorsque $t > 0$ et $u > 0$. Comme f est réduite on a $A > 0$, $B < 0$ et $C < 0$, donc $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ En outre $\alpha\delta = 1 + \beta\gamma > 0$, donc $\delta > 0$. On sait que l'on peut écrire $G = T(b_0, \cdots, b_s)\Delta(a)$, avec $b_i \geq 1$ si $i \geq 1$. Si on pose $G_2 = T(b_0, \cdots, b_s) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$ on a $G = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 + a\alpha_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 + a\gamma_2 \end{pmatrix}$. Comme $\delta > 0$ on a $a \geq 0$, car $\gamma_2 > 0$ et $\gamma_2 \geq \delta_2 \geq 0$. Or $\Delta(a) \cdot x = [a + a_0, a_1, \cdots]$ et comme $a + a_0 \geq 1$ on a aussi $G \cdot x = [b_0, \cdots b_s, a + a_0, a_1, a_2, \cdots] = [\overline{a_0, \cdots, a_{p-1}}]$ ceci n'est possible que si $a = 0$ et s'il existe un $n \geq 1$ tel que $(b_0, \cdots, b_s) = (a_0, \cdots, a_{np-1})$, autrement dit on a $G_2 = T(a_0, \cdots, a_{np-1}) = H^n$ et on a $G = G_2 \cdot \Delta(0) = G_2$. Le résultat est donc démontré lorsque x est réduit et si $r = 0$. Passons au cas général. On a $x = T_1 \cdot x_r$. Dire que $G \cdot x = x$ équivaut à dire que $(T_1^{-1} G T_1) \cdot x_r = x_r$, donc que $T_1^{-1} G T_1 = \epsilon H^n$ ou encore que $G = \epsilon T_1 H^n T_1^{-1}$.

On en déduit aussi la structure du groupe $\mathcal{G} = \{G \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \mid f * G = f\}$. Posons, en reprenant les notations ci-dessus, $H_+ = H$ si $\det(H) = 1$ i.e. si p est pair et $H_+ = H^2$ si $\det(H) = -1$ i.e. si p est impair. On remarquera que si q est la plus petite période paire du développement en fraction continue de x, on a : $H_+ = T(a_r, \cdots, a_{r+q-1})$. On posera en outre $G_+ = T_1 H_+ T_1^{-1}$.

On a $G \in \mathcal{G}$ si et seulement si G est de la forme $G = \epsilon T_1 H_+^n T_1^{-1} = \epsilon G_+^n$ avec $\epsilon = \pm 1$ et $n \in \mathbb{Z}$, cette écriture étant unique. En particulier $(\epsilon, n) \mapsto \epsilon G_+^n$ est un isomorphisme du groupe $\{1,-1\} \times \mathbb{Z}$ sur $\mathcal{G}$.

On a :

$$G_+ = T(a_0, \cdots, a_{r+q-1}) T(a_0, \cdots, a_{r-1})^{-1} = T(a_0 \cdots, a_{r+q-1}, 0, -a_{r-1}, \cdots, -a_0, 0)$$

En outre il est aisé de vérifier que G_+ ne dépend que de f et pas de l'indice particulier r choisi. On aura intérêt à prendre le plus petit r tel que x_r soit réduit.

C. Résolution pour les formes de discriminant positif :

Soient $f = [A, B, C]$ une forme irréductible de discriminant $D > 0$, $R \in \mathbb{Z}$, $R \neq 0$. On sait que l'on est ramené à chercher les solutions propres avec f primitive. Nous nous placerons désormais dans cette situation.

Soit x la première racine de f et $x = [a_0, a_1, \cdots]$ le développement en fraction continue de x. On posera $x_n = \partial^n x$ et $f_n = [A_n, B_n, C_n] = [A_n, B_n, -A_{n-1}] = \partial^n f$. On sait comment calculer les f_n et les a_n qui sont périodiques à partir d'un certain rang et l'on sait comment déterminer le début de la partie périodique ainsi que la période.

Soit G_+ défini par la méthode exposée ci-dessus. Si (X, Y) est une solution en entiers de $f(X, Y) = R$, les solutions de la classe de (X, Y) sont donc les $\pm(X_n, Y_n)$ définis par $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = G_+^n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Contrairement au cas du discriminant négatif, les classes de solutions sont donc infinies. Posons $\tau = \mathrm{tr}(G_+)$. Comme $\det(G_+) = 1$ on a $G_+^2 - \tau G_+ + I = 0$, donc aussi $G_+^{n+2} - \tau G_+^{n+1} + G_+^n = 0$, de sorte que l'on a aussi $(X_{n+2}, Y_{n+2}) - \tau(X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_n, Y_n) = 0$, ce qui permet de calculer par une récurrence double les (X_n, Y_n) quand on connaît (X_0, Y_0) et (X_1, Y_1).

Soit $g = [R, S, L]$ obtenu par la méthode générale du principe de résolution de l'équation du second degré (voir partie II B).

Il s'agit de savoir si f et g sont strictement équivalentes et, lorsqu'il en est ainsi de trouver un $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ tel que $f * T = g$, ce qui permet de trouver une solution propre (X, Y) de $f(X, Y) = R$, par $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soient y la première racine de g et $y = [b_0, b_1, \cdots]$ le développement en fractions continues de y. On posera $y_n = \partial^n y$ et $g_n = [R_n, S_n, L_n] = [R_n, S_n, -R_{n-1}] = \partial^n g$.

Or on sait que f et g sont strictement équivalentes si et seulement si il existe un $r \geq 0$ et un $s \geq 0$ tels que $r + s$ soit pair et $f_r = g_s$ (condition de Scheffler) (partie I E). Lorsqu'il en est ainsi posons $T_1 = T(a_0, \cdots, a_{r-1})$ et $T_2 = T(b_0, \cdots, b_{s-1})$. On a donc $f * T_1 = f_r = g_s = gT_2$, donc aussi $f * T = g$ avec $T = T_1 T_2^{-1}$ et on a

$$T = T(a_0, \cdots, a_{r-1}) T(b_0, \cdots, b_{s-1})^{-1} = T(a_0, \cdots, a_{r-1}, 0, -b_{s-1}, \cdots, -b_0, 0)$$

En outre comme $r + s$ est pair on a $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Expliquons comment on peut déterminer si la condition de Scheffler est vérifiée ou non. On commence par déterminer le plus petit r_0 tel que f_{r_0} soit réduite, ainsi que la période p de f, ce qui implique le calcul de la partie périodique $f_{r_0}, \cdots, f_{r_0+p-1}$ de f. On désigne par s le plus petit indice tel que g_s soit réduite. On regarde alors s'il existe un indice r avec $r_0 \leq r < r_0 + p$ tel que $f_r = g_s$. Si ce n'est pas le cas il n'y a pas de solution associée à g. Sinon on distingue deux cas.

- Si $r + s$ est pair on a trouvé r et s qui donne une solution associée à g.

• Si $r+s$ est impair on doit distinguer suivant la parité de la période p de f. Si p est pair il n'y a pas de solution associée à g, sinon en remarquant que $r+p+s$ est alors pair, il suffit de remplacer r par $r+p$ pour obtenir une solution associée à g.

Remarque : L'idéal est de posséder un logiciel de calcul formel tel que MAPLE ou autre pour programmer l'algorithme. J'ai toutefois, il y a un certain nombre d'années programmé l'algorithme sur une calculette programmable en Basic (bon courage).

Avant de donner (quand-même) un exemple numérique, terminons par une remarque qui n'est pas sans intérêt. Il arrive assez souvent que au lieu d'être amené à résoudre $f(X,Y) = R$, on soit ammené à résoudre $f(X,Y) = \pm R$. Avec ce qui a été dit jusqu'à présent on devrait, en toute logique, résoudre séparément les équations $f(X,Y) = R$ et $f(X,Y) = -R$. Or dans chacun de ces cas on est amené à chercher d'abord les S vérifiant $-|R| < S \leq |R|$ et $S^2 = D \bmod 4|R|$. Ceci donne donc les mêmes S pour chacun des cas et en outre, si $g = [R,S,L]$ dans un cas, on devra examiner $g_1 = [-R,S,-L]$ dans l'autre cas. Ceci n'est pas très gratifiant.

Une remarque assez simple permet de traiter simultanément les deux cas. N'oublions pas que pour trouver la classe des solutions de $f(X,Y) = R$ associées à $g = [R,S,L]$, il suffit d'en trouver une et que ceci se fait en cherchant **un** $T \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. La méthode exposée ci-dessus nous permet (s'il existe) de trouver un tel $T = T_1 T_2^{-1}$ lorsque la condition de Scheffler $r+s$ pair est vérifiée. On peut alors espérer et c'est ce que nous allons monter, que si $r+s$ est impair, la même constuction donne une solution de la classe des solutions de $f(X,Y) = -R$ associée à $g_1 = [-R,S,-L]$.

Si T_1 et T_2 sont construits par la méthode exposée ci-dessus et si $T = T_1T_2^{-1}$ on a donc $f * T = g$ et $\det(T) = -1$. On a donc aussi $f \cdot T = -g = [-R,-S,-L]$. Posons alors $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de sorte que $\det(J) = -1$ et $g \cdot J = [-R,S,-L] = g_1$. On a donc det(TJ)=1, donc $TJ \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et $g \cdot J = g_1$, de sorte que

$$f * (TJ) = f \cdot (TJ) = (f \cdot T) \cdot J = g_1$$

Donc $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = TJ\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ fournit une solution de la classe des solutions (propres) associée à g_1.Or on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, fournit bien une solution (propre) de $f(X,Y) = -R$ associée à $g_1 = [-R,S,-L]$. On a donc bien trouvé une méthode qui résout simultanément $f(X,Y) = R$ et $f(X,Y) = -R$.

Toujours en reprenant les notations ci-dessus, posons $G_0 = T_1 H T_1^{-1}$ et soit p la période de f, de sorte que $G_+ = G_0$ si p est pair et $G_+ = G_0^2$ si p est impair. On sait que $f * G_0 = f$.

Exemple numérique : (Calculs effectués par MAPLE)

On cherche les solutions entières de :

$$f(x,y) = 12x^2 - 26xy + 11y^2 = \pm 81 = \pm R$$

On a $f = [12, -26, 11]$ et $D = 4.(13^2 - 12 \cdot 11) = 4 \cdot 37 = 148$.

Effectuons le développement de $f = [12, -26, 11]$. On posera $f_n = [A_n, B_n, C_n] = \partial^n f$. On obtient :

n	A_n	B_n	C_n	a_n
0	12	-26	11	1
1	3	2	-12	1
2	7	-8	-3	1
3	4	-6	-7	2
4	3	-10	-4	3
5	7	-8	-3	1

La période $p = 3$ de f est donc impaire. On obtient donc :

$$G_0 = T(1,1,1,2,3,0,-1,-1,0) = \begin{pmatrix} 19 & -11 \\ 12 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_+ = G_0^2 = \begin{pmatrix} 229 & -132 \\ 144 & -83 \end{pmatrix}$$

Les $a \geq 1$ tels que $a^2 | R$ sont $a = 1$,$a = 3$ et $a = 9$.

1) Solutions (X, Y) avec $\text{pgcd}(X, Y) = 1$. On doit résoudre $(R = 81)$

$$S^2 = D \bmod 4R, -R < S \leq R$$

On trouve $S = \pm 38$.

- $S = -38$ donc $g = [R, S, L] = [81, -38, 4]$ et $\text{pgcd}(R, S, L) = 1$.

n	R_n	S_n	L_n	b_n
0	81	-38	4	0
1	-4	38	-81	3
2	3	-14	4	4
3	4	-10	-3	

Donc pas de solution associée à g (et à $g_1 = [-R, S, -L]$).

- $S = 38$ donc $g = [R, S, L] = [81, 38, 4]$ et $\text{pgcd}(R, S, L) = 1$.

n	R_n	S_n	L_n	b_n
0	81	38	4	-1
1	-47	124	-81	1
2	4	-30	47	5
3	3	-10	-4	

Donc $r = 4$, $s = 3$ est une condition de Scheffler pour f et g avec $r + s = 7$ impair. $T(1,1,1,2,0,-5,-1,1,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}$. Donc $(X,Y) = (10,7)$ est une solution associée à g_1 donc $f(X,Y) = -R$. Si on pose $\begin{pmatrix}X_n\\Y_n\end{pmatrix} = G_+^n\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ alors $\pm(X_n, Y_n)$ la classe des solutions associées à g_1. On a donc $f(X_n,Y_n) = -R = -81$.
On a $G_0\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}113\\71\end{pmatrix}$. Donc si on pose $(X,Y) = (113,71)$ alors (X,Y) est une solution associée à g donc $f(X,Y) = R$. Si on pose $\begin{pmatrix}X_n\\Y_n\end{pmatrix} = G_+^n\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ alors $\pm(X_n,Y_n)$ la classe des solutions associées à g_1. On a donc $f(X_n,Y_n) = R = 81$.
Tableau des premières valeurs :

	$f(X_n,Y_n)=81$			$f(X_n,Y_n)=-81$	
n	X_n	Y_n	n	X_n	Y_n
4	51358576625	32296315511	4	4250565754	2672924791
3	351787577	221218019	3	29114830	18308563
2	2409617	1515263	2	199426	125407
1	16505	10379	1	1366	859
0	113	71	0	10	7
-1	-7	-13	-1	94	163
-2	-1135	-1969	-2	13714	23791
-3	-165703	-287461	-3	2002150	3473323
-4	-24191503	-41967337	-4	292300186	507081367

2) Solutions (X,Y) avec $\mathrm{pgcd}(X,Y) = 3$.
On remplace R par $R/3^2 = 9 = R'$. On doit résoudre $(R = 9)$

$$S^2 = D \bmod 4R, -R < S \leq R$$

On trouve $S = \pm 2$.

- $S = -2$ donc $g = [R,S,L] = [9,-2,-4]$ et $\mathrm{pgcd}(R,S,L) = 1$.

n	R_n	S_n	L_n	b_n
0	9	-2	-4	0
1	4	2	-9	1
2	3	-10	-4	

Donc $r = 4$, $s = 2$ est une condition de Scheffler pour f et g avec $r + s = 6$ pair. $T(1,1,1,2,0,-1,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$. Donc $(X,Y) = 3\cdot(5,3) = (15,9)$ est une solution avec $\mathrm{pgcd}(X,Y) = 3$ associée à g donc $f(X,Y) = R = 81$.
Si on pose $\begin{pmatrix}X_n\\Y_n\end{pmatrix} = G_+^n\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ alors $\pm(X_n,Y_n)$ la classe des solutions associées à g. On a donc $f(X_n,Y_n) = R = 81$.

On a $G_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 186 \\ 117 \end{pmatrix}$. Donc si on pose $(X,Y) = (186,117)$ alors (X,Y) est une solution avec $\text{pgcd}(X,Y) = 3$ associée à g_1 donc $f(X,Y) = -R = -81$.
Si on pose $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = G_+^n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ alors $\pm(X_n, Y_n)$ la classe des solutions associées à g_1. On a donc $f(X_n, Y_n) = R = -81$.
Tableau des premières valeurs :

	$f(X_n,Y_n) = 81$			$f(X_n,Y_n) = -81$	
n	X_n	Y_n	n	X_n	Y_n
4	6991993743	4396843737	4	84482600010	53126018757
3	47892615	30116781	3	578675094	363893913
2	328047	206289	2	3963714	2492541
1	2247	1413	1	27150	17073
0	15	9	0	186	117
-1	-57	-99	-1	6	9
-2	-8337	-14463	-2	690	1197
-3	-1217145	-2111499	-3	100734	174753
-4	-177694833	-308264391	-4	14706474	25512741

• $S = 2$ donc $g = [R,S,L] = [9,2,-4]$ et $\text{pgcd}(R,S,L) = 1$.

n	R_n	S_n	L_n	b_n
0	9	2	-4	0
1	4	-2	-9	1
2	7	-6	4	

Donc pas de solution associée à g (et à $g_1 = [-R, S, -L]$).

3) Solutions (X,Y) avec $\text{pgcd}(X,Y) = 9$.
On remplace R par $R/9^2 = 1 = R'$. On doit résoudre $(R = 1)$

$$S^2 = D \bmod 4R, -R < S \leq R$$

On trouve $S = 0$.

• $S = 0$ donc $g = [R,S,L] = [1,0,-37]$ et $\text{pgcd}(R,S,L) = 1$.

n	R_n	S_n	L_n	b_n
0	1	0	-37	6
1	1	-12	-1	

Donc pas de solution associée à g (et à $g_1 = [-R, S, -L]$).

K.E.

PETITE HISTOIRE DE LA TRIGONOMETRIE

Jean LEFORT

Comme de très nombreux utilisateurs des fonctions trigonométriques je me suis souvent demandé d'où venaient leurs noms. La tangente se mesure bien sur la tangente au cercle trigonométrique, cosinus et cotangente sont logiquement associés au sinus et à la tangente. Mais d'où vient donc le sinus et quelle relation a-t-il avec les sinus que tout un chacun possède en arrière du nez ? Certains enseignants, plus facétieux que d'autres ou soucieux d'une bonne pédagogie, n'avaient pas hésité à me donner une sorte d'étymologie populaire, assimilant l'angle et le côté opposé à un nez stylisé dont justement le sinus correspond à la partie antérieure. Curieusement si j'avais apprécié le côté mnémotechnique du procédé, je n'avais jamais cru à cette origine. Voici donc la véridique histoire du sinus.

1 - SUMER ET BABYLONE

Quoi de plus effrayant que l'absence de repère ! Quoi de plus effrayant qu'une obscurité totale ! Comment alors mesurer les heures de la nuit ? On retrouve cette perte de la notion du temps dans diverses histoires, dans divers mythes où le héros s'endort plusieurs jours ou plusieurs mois selon les caprices des dieux. Ainsi Gilgamesh à la recherche de son ami Enkidu au pays de la mort [1]. Les sumériens sont historiquement à la naissance de la mesure des angles puisque c'est eux qui ont la plus ancienne écriture connue. Qu'y a-t-il de plus important que la prévision du retour des saisons pour une civilisation agricole ? Essayer de comprendre la volonté des dieux qui se manifestent aux humains par le mouvement apparent des étoiles, l'apparition des comètes, le déplacement des planètes, le retour des éclipses,... Ce sont des phénomènes réguliers, mesurables dirions-nous, contrairement aux aléas du cours et du régime des deux fleuves, le Tigre et l'Euphrate, qui assure la vie des peuples riverains. Astronomie, astrologie, religion sont alors intimement mêlés, régentant la vie de la société et la société mésopotamienne est dure, car les dieux sont mauvais. Ils n'ont créé les hommes que comme des outils servant leur vengeance personnelle [2].

Noter la position des étoiles sur la voûte céleste ne se fait correctement qu'au moyen des angles. Qui inventa la notion d'angle ? Cette notion apparaît déjà dans les premiers écrits sumériens qui nous sont parvenus. Quelle unité choisir pour mesurer des angles ? Chaque jour les étoiles se décalent légèrement, faisant un tour complet en une année. N'est-il pas logique de choisir le jour comme unité d'angle ? En fait les sumériens vont choisir la trois cent soixantième partie du cercle pour des raisons qui tiennent à la fois à la durée de l'année (environ 365 jours) et à leur système de numération qui s'établit très vite sur une base 60, le nombre 10 jouant un

1) Épopée de Gilgamesh, texte sumérien datant de 2800 avant notre ère et racontant la légende du bâtisseur des remparts de la ville d'Uruk.

2) On opposera les dieux mésopotamiens aux dieux égyptiens qui sont bons et qui assurent régulièrement les crues fertilisantes du Nil.

rôle particulier [3]. Il est alors logique de choisir une division du cercle en 360 parties, nombre qui de plus à l'avantage d'être divisible par 12, ce qui donne un compte rond aux lunaisons. Le degré était né. En base 60, il est naturellement divisé en 60 minutes valant chacune 60 secondes. Bien évidemment les mots "degré", "minute" et "seconde" ne sont pas ceux utilisés par les sumériens ni par les akkadiens, civilisation sémitique qui prit la relève de la civilisation sumérienne vers ~ 2400. Avec ce système les étoiles se déplacent d'environ 1° par jour.

Les empires naissent, les empires meurent. Or il est très utile d'utiliser de longues périodes d'observation pour déterminer la période de phénomènes périodiques. Ainsi une erreur d'une journée (24 heures) sur la date de la nouvelle lune permet de déterminer la lunaison avec une précision d'une heure en deux ans (environ 24 lunaisons donc 24 h / 24 lunes = 1 h), d'une minute en moins de 120 ans (24 h / 1440 lunes = 1 min), ... C'est pourquoi les civilisations intelligentes conservent les archives de leurs prédécesseurs. Les akkadiens à leur tour seront vaincus. Amorrites, assyriens (avec le célèbre Hamourabi qui établit la première constitution), hittites, hourrites, kassites se succédèrent ou s'entrecroisèrent, dominant tour à tour Babylone ou sa région. Et chacun de s'approprier le pouvoir et les éléments du pouvoir en récupérant la science de ses prédécesseurs.

2 - LA SCIENCE GRECQUE

Mais déjà les grecs se développent. Héritiers, dans un premier temps de la civilisation crétoise, ils empruntent leur écriture aux phéniciens, peuple sémite, et vont créer une civilisation originale à partir du huitième siècle avant notre ère. Il n'a pas fallu attendre Alexandre le grand (~356 – ~323) pour que des échanges aient lieu avec les peuples environnant. Mais les conquêtes d'Alexandre, de l'Égypte à l'Inde, vont asseoir la renommée de leurs savants et feront d'Alexandrie la capitale culturelle du monde méditerranéen. C'est Hipparque (environ ~190 – ~125) qui va fonder la trigonométrie (mot forgé sur des racines grecques et signifiant "mesure des triangles") en empruntant aux babyloniens le partage du cercle en 360 degrés, en empruntant leurs tables astronomiques ce qui lui permettra de découvrir et de calculer la précession des équinoxes, l'inclinaison de l'écliptique, certaines irrégularités du mouvement de la Lune. Mais c'est surtout sa *table des cordes* qui nous intéresse ici [4]

Passer de l'arc de cercle au segment de droite est un redoutable problème qui va mobiliser les mathématiciens pendants des siècles et le simple calcul de π n'est qu'une retombée de ce vaste domaine de recherche. Si la mesure des angles en astronomie se fait avec une bonne précision (à titre d'information le diamètre apparent de la Lune ou du Soleil est d'environ 30 minutes d'arc), c'est souvent la longueur de la corde qui est accessible à l'observation. Pour établir des relations dans les triangles sphériques, notions obligatoires en astronomie de position, le passage par les cordes est indispensable.

Nous connaissons les méthodes utilisées par Hipparque grâce à Ptolémée (128 - 168, ses écrits datant des années 140 à 160). Deux théorèmes sont nécessaires pour cela : un premier qui permet de passer de la longueur d'une corde à celle de la corde sous-tendue par un arc double et un deuxième qui a pris depuis le nom de Ptolémée et qui assure que dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des

3) Il semble que la numération savante de base 60 soit née d'un désir d'unification des systèmes de poids et mesures avec le système décimal de compte pour les petits nombres. (cf. : J. Ritter dans *Le Courrier de l'Unesco* de novembre 1993).

4) Il est regrettable qu'à l'exception d'un ouvrage mineur, aucun texte d'Hipparque ne nous soit parvenu et que les seules connaissances que nous en ayons soient dues à des commentaires d'auteurs postérieurs.

produits des longueurs des côtés opposés. Il est facile de démontrer que ce théorème est équivalent au théorème donnant le sinus d'une somme ou d'une différence, mais il n'est pas encore question de sinus. Ptolémée complète les travaux d'Hipparque et construit une table des cordes de demi degré en demi degré. Cette table des cordes apparaît dans son ouvrage l'*Almageste*. Le nom même de ce traité prouve qu'il nous est parvenu par l'intermédiaire des arabes puisque c'est une déformation du mot grec signifiant "le très grand" et qui était le surnom de Ptolémée ("Al" est l'article arabe et "megistos" signifie "très grand" en grec). Le traité s'intitulait "*He mathematike syntaxis*".

Une autre notion va être développée par les mathématiciens "alexandrins", c'est-à-dire travaillant à Alexandrie ou en liaison avec les écoles de cette ville. C'est la notion de *flèche* qui est la distance entre le milieu d'une corde et le milieu de l'arc soustendu. Mais cette notion est moins accessible à l'observation que la notion de corde et sera moins utilisée.

3 - L'APPORT DE L'INDE

Dans le nord de l'Inde, vers les années 400, sont publiés divers ouvrages appelés *Siddhânta* (ce qui veut dire "solutions"). Le seul qui nous soit parvenu est le *Sûrya-Siddhânta* c'est-à-dire les solutions données par le Soleil. Cet ouvrage est un poème donnant de très grands nombres relatifs au mouvement des astres. Les nombres y sont écrits à l'aide de "chiffres-mots" selon une numération de position classique (on commence par les unités) et le zéro y fait son apparition [5]. En voici un exemple, cité par Geneviève Guitel :

"Les révolutions de l'apogée de la Lune dans l'espace d'un *yuga* (4 320 000 années solaires) sont au nombre de 488 203, et les révolutions rétrogrades du nœud au nombre de 232 238".
Le nombre 488 203 y est écrit *feu* (3), *vide* (0), *Aŝvin* (2) [6], *Vasu* (8), *serpent* (8), *océan* (4).

Un siècle plus tard, le grand mathématicien hindou Âryabhata (Kusumapura, état du Bihar, 476 - 550) écrira vers 498 un ouvrage dont ne nous sont parvenues que des copies tardives sous le titre *Âryabhatiya* ou *Âryasiddhânta*. Il cherche bien sûr à dépasser les ouvrages précédents mais la numération qu'il y utilise est assez originale. Pour ce qui nous intéresse ici, Âryabhata va développer la notion de demi-corde qui était déjà présente dans le *Sûrya-Siddhânta* et reprendre une table permettant de calculer le sinus d'un certain nombre d'angles. Comme l'étude des angles est intimement liée à l'astronomie, on peut imaginer que si la "distance" entre deux étoiles se mesure assez facilement avec la corde, la hauteur d'une étoile au dessus de l'horizon se mesure tout aussi facilement avec une demi-corde. Ceci pourrait expliquer l'apparition de la notion de demi-corde. Dans son ouvrage, Âryabhata utilise, dans ce sens technique, le mot *jîva* qui veut tout simplement dire "corde" ce qui est parfaitement naturel. La table de sinus que donne l'auteur est plus exactement une table de différences finies des sinus des angles de 3° 45 ' en 3° 45 '. Cette table était apprise par cœur et permettait évidemment de reconstruire la table des sinus en faisant la somme des termes successifs. On trouvera page suivante, en notation actuelle, cette table à laquelle nous avons adjoint trois autres colonnes comme il est indiqué.

Le choix des multiples successifs de l'angle 3° 45 ' se comprend aisément, puisque cet angle est le huitième de 30°. Or il est relativement facile de passer de la valeur d'un sinus à la valeur du sinus de l'angle moitié, exactement comme Hipparque l'a fait pour les cordes. Il est d'ailleurs

5) Pour plus de détail, consulter *Histoire comparée des numérations écrites* de G. Guitel (Flammarion), pages 559 et suivantes.

6) Aŝvin et Yama sont des dieux jumeaux.

tout à fait possible que cette table soit une adaptation de celle d'Hipparque ; le choix même des unités d'angle prouve le lien avec la tradition babylonienne et grecque. La question est de savoir pourquoi, dans notre langage d'aujourd'hui, l'auteur utilise un cercle de rayon 3438 ? C'est à très peu près l'expression du radian en minutes d'angles. En effet :

$$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ degrés} = \frac{180\times60}{\pi} \text{ minutes} \approx 3437,\ 75 \text{ minutes}$$

Table d'Âryabhata	Somme des termes successifs	Angles x correspondants	3438 sin x
		0	0
225	225	3° 45 '	224, 86
224	449	7° 30 '	448, 75
222	671	11° 15 '	670, 72
219	890	15°	889, 82
215	1105	18° 45 '	1105, 11
210	1315	22° 30 '	1315, 67
205	1520	26° 15 '	1520, 59
199	1719	30°	1719, 00
191	1910	33° 45 '	1910, 05
183	2093	37° 30 '	2092, 92
174	2267	41° 15 '	2266, 83
164	2431	45°	2431, 03
154	2585	48° 45 '	2584, 83
143	2728	52° 30 '	2727, 55
131	2859	56° 15 '	2858, 59
119	2978	60°	2977, 40
106	3084	63° 45 '	3083, 45
93	3177	67° 30 '	3176, 30
79	3256	71° 15 '	3255, 55
65	3321	75°	3320, 85
51	3372	78° 45 '	3371, 94
37	3409	82° 30 '	3408, 59
22	3431	86° 15 '	3430, 64
7	3438	90°	3438, 00

Notons enfin l'égalité du sinus de 3° 45 ' avec l'angle, puisque 3° 45 ' = 225 '. La façon dont cette table a été obtenue et les formules utilisées restent conjecturales.

La numération indienne va progressivement s'améliorer et devenir une véritable numération de position avec un zéro qui joue exactement le rôle que nous lui connaissons aujourd'hui. Parallèlement, la science indienne se développe et en particulier l'astronomie et par suite la trigonométrie. Les tables de sinus deviennent de plus en plus précises, atteignant le quart de degré.

4 - LA CIVILISATION ARABE

En 622 a lieu un événement anodin qui va marquer le début de la formidable expansion du monde arabe ; il s'agit de la fuite du prophète Mahomet à Yathrib qui est devenu Médine, c'est-à-dire "la Ville (du prophète)" [7]. Cette expansion s'arrêtera à Poitiers en 732 mais continuera vers l'orient. L'empire musulman se scindera rapidement et la branche orientale, avec la

[7] On comparera cette dénomination avec celle de Rome pour les catholiques : Urbs, c-à-d. la Ville. (cf. la bénédiction Urbi et orbi : pour Rome et pour le monde).

dynastie des Abbassides à partir de 750, installera sa capitale à Bagdad en 762 sous le règne du calife al-Mansûr. Cette ville deviendra très vite un centre culturel et commercial très important grâce à la politique très ouverte du calife. Toutes les cultures, de tous les pays et de toutes les religions, étaient les bienvenues, et ces cultures étaient recueillies et intégrées à la culture arabe. Le calife al-Mansûr pour favoriser les arts et les sciences avait créé une sorte de "CNRS" qui allait devenir la maison de la sagesse (*Bayt al-hikma*) au début du IX^e siècle. De l'Espagne à l'Inde, l'arabe va devenir la langue scientifique tout en empruntant largement des vocables au persan, au sanskrit,... et la traduction et les commentaires des œuvres vont donner un essor considérable à la science en général et aux mathématiques en particulier.

"C'est ainsi qu'en l'an 156 de l'Hégire (773) arriva de l'Inde à Bagdad un savant fort instruit dans les doctrines de son pays. Cet homme connaissait la méthode du *sindhid* relative aux mouvements des astres et aux équations calculées au moyen de sinus de quart de degré en quart de degré [...]. Le calife ordonna qu'on traduisit la traité indien en arabe afin d'aider les musulmans à acquérir une connaissance exacte des étoiles. Le soin de la traduction fut confié à Muhammad Ibn Ibrahim al-Fazzârî".[8]

Traduire c'est trahir. Comment traduire un terme qui n'a aucun équivalent dans la langue de destination. Al-Fazzârî va se trouver confronté à ce problème face au mot *jîva* qu'il ne peut traduire par *corde* qui serait le sens littéral puisque ce mot à déjà une signification bien précise en trigonométrie. Il opte donc pour une arabisation de ce terme sous la forme *jîba* puisque le son "v" n'existe pas en arabe. Par ailleurs il découvre avec intérêt le système de numération indien et sa supériorité sur la numération arabe alphabétique. Cette numération indienne va donc être adoptée par les savants qui lui donneront le nom de "figures indiennes".
Á partir des apports grecs et indiens, la science arabe, c'est-à-dire écrite en arabe, va se développer de façon autonome.

Le grand mathématicien d'origine ouzbek, al-Khwârizmî, au IX^e siècle, dont le nom latinisé en Algorismi nous a donné le mot "algorithme" et dont l'ouvrage le plus célèbre *al jabr w'al muqâbâlâ* (du rétablissement et de la confrontation) nous a laissé le mot "algèbre" [9], ne pouvait que s'intéresser à la trigonométrie. C'est lui qui donnera les premières tables de sinus sous la forme habituelle, mais ce n'est bien sûr pas ce qui le rendit si célèbre.

L'astronome al-Battâni (855-929) publie un traité de trigonométrie et de trigonométrie sphérique, *Perfectionnement de l'Almageste* dans lequel il cite en particulier la formule reliant les angles d'un triangle sphérique à l'aire de ce triangle : Sur une sphère de rayon 1, la somme des angles est supérieure à π et son excès sur π est égale à son aire.

C'est le mathématicien Abû l-Wafâ al-Buzadjani (940-997) qui va introduire pour la première fois la notion de tangente, sous le nom d'ombre en 980. Ce terme est assez logique puisqu'il s'agit d'étudier la longueur de l'ombre du stylet d'un cadran solaire. C'est lui qui va établir les premières relations trigonométriques telles que celle donnant $\sin(a \pm b)$ et les principales relations entre les lignes trigonométriques (sinus, cosécante, cosinus, sécante, tangente et cotangente). Il établit également le théorème du sinus pour les triangles sphériques. Rappelons que ce théorème énonce que dans un triangle sphérique ABC dont les côtés sont les arcs de

---

8) D'après le *Dictionnaire des savants* d'Abu'l Hassan al-Qifti (1172 - 1288). Le mot *sindhid* est la transcription arabe de *siddhânta.*

9) En espagnol le mot "algebrista" désigne le rebouteux, celui qui est capable de redresser un membre. Álgebra est aussi un terme médical qui concerne l'art de remettre les membres disloqués. Il y a un peu plus d'un siècle on trouvait des boutiques à l'enseigne "Algebrista y sangrador" (sangrador = saignée) et qui correspondaient à nos "barbier-chirurgiens".

mesure a, b, c on a : $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$. Abû l-Wafâ va surtout découvrir des méthodes beaucoup plus rapidement convergentes pour le calcul des sinus ce qui lui permettra de construire une table des sinus par pas de $30'$ avec huit décimales exactes.

La civilisation arabe continuera à se développer, mais son extension même engendrera des tensions internes amenant schismes et émiettement des pouvoirs. Á l'ouest la reconquête de l'Espagne et à l'est l'invasion turque au XIII^e siècle achèveront de disloquer le monde musulman. Cela n'empêchera pas de nouvelles avancées dans les sciences et l'apparition de grands savants comme Nasîr Addin al-Tusi (1201-1274) qui publiera un traité sur les triangles rectangles. La réalité de la recherche scientifique est alors en train de changer de camp. La science européenne va prendre le relais.

5 - LE DEVELOPPEMENT DE LA SCIENCE EUROPEENNE

Les contacts entre le monde chrétien et le monde musulman ont été nombreux, soit par l'intermédiaire des marchands, soit par l'intermédiaire des universités espagnoles. C'est ainsi que le savant et théologien Gerbert d'Aurillac (938-1003) milite en vain pour l'adoption de la numération de position et l'introduction des chiffres dits arabes. Les musulmans sont des infidèles et leurs œuvres ne peuvent être que celles du diable ! Cela vaut quelques accusations de sorcellerie à Gerbert d'Aurillac mais ne l'empêche pas de devenir Pape en 999 sous le nom de Sylvestre II. Ses méthodes autoritaires le contraindront à démissionner en 1001. Il n'empêche que la numération de position, en raison de sa supériorité même, pénétra en Europe chrétienne sous la forme de jetons, les "apices", que l'on manipulait sur une table à compter.

Les progrès décisifs vont être l'œuvre des traducteurs, le moine anglais Adelhard de Bath vers 1120 et surtout Gérard de Crémone (1114-1187). Ce dernier s'installe à Tolède, apprend l'arabe et entreprend de traduire en latin les principaux textes scientifiques de l'époque. Environ soixante dix ouvrages sont ainsi traduits dont dix-sept de géométrie et douze d'astronomie, sans oublier l'Almageste de Ptolémée dont le texte grec avait été perdu.

Traduire c'est trahir. On n'écrit pas habituellement les voyelles brèves en arabe et quand Gérard de Crémone rencontra le mot *jîba* utilisé pour le sinus, il le confondit avec le mot *jaîb* qui signifie "poche, cavité" (la lettre *a* est la seule voyelle brève dans les deux mots) [10]. En latin cela se traduit naturellement par *sinus* qui a exactement ce sens. Et voilà comment un magnifique contresens est passé à la postérité ! [11]

Ce n'est qu'à partir du 14ème siècle que la trigonométrie se répandit en Europe. Les premières tables ont été calculées par Peurbach vers 1460 et surtout par son élève l'astronome et mathématicien allemand Regiomontanus(1436-1476) à qui l'on doit les premiers livres imprimés de trigonométrie en particulier *Tabula directionum* (1485).

Si l'on doit à Viète à la fin du 16ème siècle d'avoir perfectionné la trigonométrie en lui appliquant les règles du calcul littéral. Ce n'est qu'avec les travaux de l'anglais Newton (1642-1727) et de l'écossais Gregory (1638-1675) que l'on considéra que sinus, cosinus et tangente pouvaient être des fonctions et pas seulement des "lignes", c'est-à-dire des segments dans une figure géométrique (d'où l'expression "lignes trigonométriques"). Cela permet d'introduire ce qui deviendra les fonctions réciproques, arcsinus, arccosinus, arctangente, et c'est d'ailleurs Gregory qui donne le développement en série entière de notre fonction arctangente.

---

10) En arabe dialectal d'Afrique du nord le mot *jib* signifie "poche".

11) Histoire conjecturale (N.D.L.R.).

Parallèlement le calcul des tables s'améliore grâce à la mise en œuvre d'algorithmes plus rapidement convergents, utilisant les séries. L'astronome allemand Rheticus (1514-1576), dirigeant une équipe de calculateurs durant une douzaine d'années, calcula une table de quinze décimales de sinus avec un pas de 10 ". Il mourut avant d'avoir achevé celle des tangentes et des sécantes. Son disciple Othon termina l'œuvre du maître et la publia en 1596 sous le titre *Opus palatinum de triangulis* mais avec dix décimales seulement. Pitiscus retrouva un exemplaire original des sinus avec quinze décimales et après correction le publia en 1613 dans *Thesaurus mathematicus.*

C'est le mathématicien anglais Williams Jones (1675 - 1749) qui utilise pour la première fois en 1706 la notation π pour le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. C'est la première lettre du mot grec "périmètre". Euler (Bâle 1707 - Saint-Petersbourg 1783) la reprendra (et introduira aussi e pour la base des logarithmes) dans un grand ouvrage assez didactique publié en 1748 sous le titre *Introductio in analysis infinitorum* (Introduction à l'analyse infinitésimale). On y trouve un exposé systématique de la théorie des fonctions circulaires (fonctions trigonométriques directes et inverses), exposé basé sur le lien qui avait été établi avec la fonction exponentielle par Jean Bernoulli en 1702 puis Moivre et Cotes en 1707. D'où les fameuses formules : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{ix} + 1 = 0$, $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, etc...

Avec l'invention des logarithmes au début du XVII^e siècle par Napier et Briggs, le calcul des tables va prendre un nouvel essor. Ce seront souvent des tables des logarithmes des sinus et tangentes qui seront publiées. Citons celles réalisées après la révolution française par l'ingénieur français Marie Riche baron de Prony (1755-1839) avec un pas de 0,01 grade .

Aujourd'hui, l'avènement des machines à calculer, des ordinateurs et des calculatrices programmables a rendu caduc l'usage des tables. Le problème de la précision reste entier même s'il est masqué ne serait-ce que par l'ignorance où se trouve l'utilisateur de l'algorithme utilisé pour l'affichage des valeurs numériques.

BIBLIOGRAPHIE

Le texte qui précède n'est pas un texte d'histoire des maths. Il n'a que la prétention de resituer historiquement un certain nombre d'évolutions des notions de trigonométrie dont la plupart sont accessibles à un élève de lycée. En particulier les dates de certains auteurs sont approximatives, les différentes sources ne fournissant pas les mêmes dates et parfois un même texte se contredit d'une page à l'autre. Les écarts ne sont pas bien grands et j'ai souvent choisi une date arbitrairement sans chercher à la justifier. Le travail que j'ai accompli résulte essentiellement d'une compilation d'ouvrages facilement disponibles dont on trouvera les principaux ci-après.

Des mathématiciens de A à Z , B. HAUCHECORNE et D. SURATTEAU, Éditions Ellipses 1996.

Analyse mathématique , Ch. HOUZEL, Éditions Belin, collection sciences-sup 1996.

Histoire comparée des numérations écrites , G. GUITEL, Éditions Flammarion 1975.

Histoire universelle des chiffres , G. IFRAH, Éditions Seghers 1981.

Dictionnaire des mathématiques , A. BOUVIER, M. GEORGE, F. LE LIONNAIS, PUF 1993.

Nombre, mesure et continu , J. DHOMBRES, Éditions Cédic/Nathan 1978.

Différents articles de l'Encyclopaedia Universalis, en particulier :
L'islam : Les sciences dans l'islam.
L'astronomie : Histoire de l'astronomie.
Les notices sur différents savants.

MATHEMATIQUES DANS UN LYCEE ALLEMAND

par Richard CABASSUT,
lycée international de Strasbourg.

Une délégation de professeurs français de mathématiques a rendu visite en 1997 , dans le cadre du Groupe Europe de l'IREM de Strasbourg, à un Gymnasium du Bade-Wurtemberg , en Allemagne. Elle a rencontré des collègues allemands de mathématiques et assisté à différents cours de mathématiques. Nous donnons ici un compte-rendu de cette visite.

Quelques éléments généraux sur l'enseignement des mathématiques au Gymnasium :

Rappelons d'abord que les indications que nous donnons concernent le Gymnasium que nous avons visité. Des variations de structures (durée des études et organisation du Gymnasium) et de programmes (notamment le programme de mathématiques) existent entre les différentes régions allemandes (les Länder) puisque l'éducation secondaire est sous la totale responsabilité de chaque région.

Rappelons ensuite que le Gymnasium allemand est un établissement secondaire qui regroupe le collège et le lycée français. Les élèves scolarisés ont été orientés dès la fin de l'école primaire dans cette filière dont la partie lycée correspond au lycée d'enseignement général français. On n'y trouve donc pas en principe des élèves se destinant à l'enseignement secondaire professionnel ou technique.

Les classes de ce Gymnasium se succèdent de la classe 5 à la classe 13, dans l'ordre numérique inverse de l'ordre français des collèges-lycées, en débutant une année plus tôt qu'en France, avec la tranche d'âge 10-11 ans en classe 5 , et en terminant une année plus tard qu'en France , avec la tranche 18-19 ans en classe 13.

L'enseignement des mathématiques n'est pas différencié jusqu'à la classe 11, tandis que pour les classes 12 et 13 l'élève peut choisir entre un enseignement de base (Grundkurs) et un enseignement approfondi (Leistungkurs).

Quelques exemples de séquences de cours :

Nous avons assisté à des séquences de cours de 45mn.

En classe 9 : L'âge des élèves correspond à celui d'une classe 3^{ième} française. L'effectif de la classe est de 20 élèves. Nous assistons à une séance de résolution d'équations se ramenant au second degré , utilisant les formules du trinôme du second degré avec le discriminant .

Commentaire :

Le traitement des résolutions algébriques est effectué avec un rituel rédactionnel que nous retrouverons pour d'autres équations , dans d'autres classes et dans les livres de classe. Chaque traitement à venir est annoncé après le signe «) » : détermination du dénominateur commun, réduction au même dénominateur, addition, soustraction, multiplication, division. Le résultat du traitement apparaît à la ligne suivante. L'ensemble de définition de l'équation est analysé dès qu'apparaît un dénominateur.

On remarquera enfin l'introduction des formules du trinôme du second degré dès la classe 9.

Extrait de la résolution au tableau :

$2\times\frac{x-2}{5}+\frac{5}{x-2}=3 \quad \Big) \quad DP = 5(x-2)$ (DP pour Dénominateur Principal)

$D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ (D pour Ensemble de définition de l'équation)

$2\times\frac{(x-2)(x-2)}{5(x-2)}+\frac{25}{5(x-2)}=3 \quad \Big) \times DP$

$2\times(x^2-4x+4)+25=15x-30 \quad \Big)-15x \quad \Big)+30$

$2x^2-23x+63=0$

$x_{1/2}=\frac{23\pm\sqrt{529-504}}{4}=\frac{23\pm5}{4}$

En classe 10 : L'âge des élèves correspond à celui d'une classe de 2^nde^ française. L'effectif de la classe est de 28 élèves. Nous assistons à une séance de détermination de la circonférence d'un cercle alors que la séance précédente avait été consacrée à une détermination de l'aire d'un disque. Indiquons la démarche adoptée.

Détermination de l'aire d'un disque.

La détermination de l'aire d'un disque vient après celles de différents polygones.

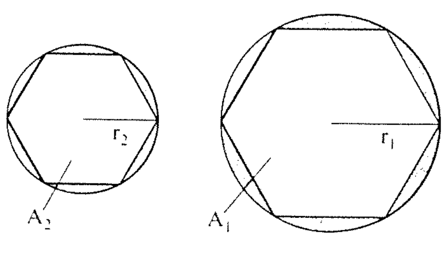
On inscrit dans un cercle de rayon r_1 un polygone régulier d'aire A_1 et dans un cercle de rayon r_2 un polygone régulier de même nombre de côtés que le précédent et d'aire A_2. On montre alors que, comme le premier cercle est semblable au second dans le rapport des rayons, il en est de même des polygones précédents ; puis on en déduit que le rapport des aires des polygones précédents est égal au carré du rapport de l'homothétie, soit le carré du rapport des rayons : $\frac{A_1}{A_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}$.

On en déduit que le rapport entre l'aire du polygone inscrit dans un cercle et le carré du rayon du cercle est le même pour tous les polygones réguliers de même nombre n de côtés : $\frac{A_1}{r_1^2}=\frac{A_2}{r_2^2}$.

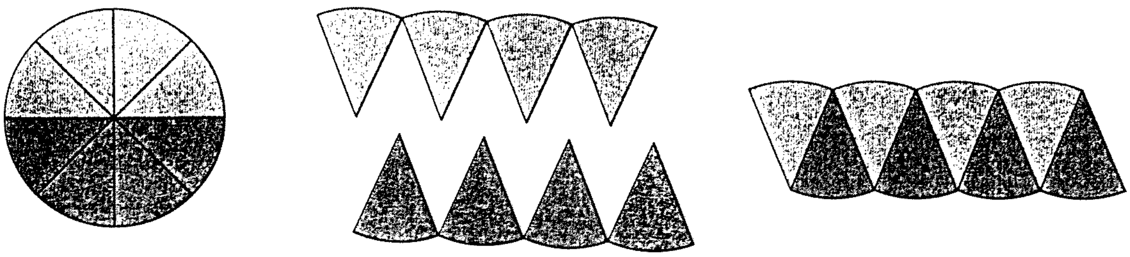
En choisissant un nombre de côtés n suffisamment important , on peut obtenir que l'aire du polygone inscrit dans un cercle est aussi proche que l'on veut de l'aire du disque.

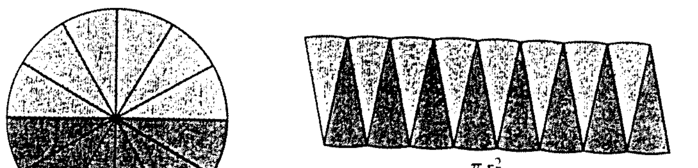
On en déduit le résultat analogue : le rapport de l'aire d'un disque au carré du rayon du disque est le même pour tous les disques. On appelle π ce rapport constant. D'où le théorème :

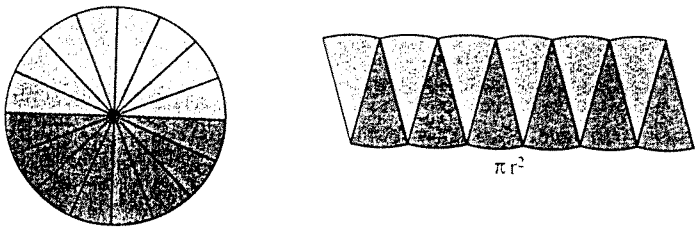
" L'aire A d'un disque de rayon r vaut : $A = \pi r^2$."



Détermination de la circonférence d'un cercle à partir de la formule de l'aire.
On divise un disque en secteurs réguliers et on les réassemble comme suggéré par la figure ci-jointe.
Si l'on choisit le nombre de secteurs suffisamment grand alors l'aire de ces secteurs est aussi proche que l'on veut de l'aire d'un rectangle de largeur r rayon du disque et de longueur ½ u où u est la longueur de la circonférence du cercle. Comme l'aire des secteurs réassemblés est π r^2 et l'aire du rectangle est ½ u.r on en déduit que :
$u = 2\pi$ r .







Commentaire :
L'idée est d'introduire , dès la classe 10 qui correspond à notre seconde, la structure de la démonstration de résultats importants. Les parties délicates , comme le passage à la limite, ne sont pas détaillées avec précision et formalisme : le plus important est de vulgariser les idées de la démonstration sans se laisser arrêter par l'aspect technique.

En classe 11 : L'âge des élèves correspond à celui d'une classe de 1ère française. L'effectif de la classe est de 15 élèves.
La une séance d'exercices à laquelle nous assistons porte sur l'étude de fonctions polynômes. Notons les particularités suivantes par rapport à une étude dans une classe française. La dérivée première est calculée. Ses zéros donnent les abscisses des éventuels extrema. La dérivée seconde est calculée. Le signe positif de la dérivée seconde en l' abscisse d'un éventuel extremum confirme l'existence d'un maximum, et le signe négatif celle d'un minimum. Les zéros de la dérivée seconde déterminent les points d'inflexion. Il n'y a pas de tableau de variations.

En classe 12, spécialité mathématiques : L' âge des élèves correspond à celui d'une classe de terminale française. L'effectif de la classe est de 18 élèves dont une seule fille.
Nous assistons à une séance de calcul intégral. On démontre la propriété :

Si f est une fonction intégrable sur [a,b], minorée par m et majorée par M sur [a,b], alors:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

La démonstration s'appuie sur la définition de l'intégrale comme limite d'une somme de Riemann et sur la minoration (respectivement majoration) de cette somme puis sur un passage à la limite.

Annexe :
Programme des classes 12 et 13 spécialité mathématiques :
Chaque partie du programme comprend un chapeau introductif suivi de deux colonnes : la colonne de gauche énonce les contenus du programme, celle de droite contient les commentaires correspondants.

Partie 1 : Suites, limites et applications.
Par l'étude des suites , les élèves font l'expérience de la nécessité de préciser leur conception des limites. Ils apprennent à connaître et à comprendre une description formelle de l'infinitésimal , ce qui est fondamental pour l'analyse. Maintenant ils sont dans la situation de produire des énoncés approfondies sur les suites et sur les fonctions.

	Possibilité d'interdisciplinarité : $\rightarrow$ allemand, cours d'approfondissement, méthodologie 1: méthodes de préparation et de présentation d'un exposé.
Suite, suite récurrente	L'étude des processus dynamiques ou d'exemples de la géométrie fractale peuvent être intéressants.
(suite de Fibonacci) Raisonnement par récurrence.	(Leonardo de Pise (vers 1180-1250))
Limite d'une suite.	Définition avec ε et n_0.
Théorèmes des limites. Convergence des suites monotones et bornées.	Un traitement détaillé n'est pas prévu. En relation avec les intervalles emboîtés et la complétude de IR .
Le nombre d'Euler : e.	
Limite d'une fonction quand $x \longrightarrow x_0$, quand $x \longrightarrow \infty$ et quand $x \longrightarrow -\infty$.	
Théorème des zéros d'une fonction. Lien entre dérivabilité et continuité. Règle de l'Hospital.	Une démarche intuitive suffit. Guillaume de l'Hospital (1661-1704) Johann Bernoulli (1667-1748)

Partie 2 : Introduction au calcul intégral.

Le concept intuitif et motivant du cycle précédent (Mittelstufe) va être précisé. Ainsi est renouvelé chez les élèves la pratique de l'importance du concept de limite. Ils s'aperçoivent que la relation entre le calcul intégral et le calcul différentiel permet dans bien des cas le calcul simple d'intégrales. Ils peuvent maintenant calculer également l'aire d'une surface délimitée par des courbes .

Primitive.	En fonction de la façon dont sont introduites les intégrales, le programme peut être traité dans un ordre différent.
Primitives de $c \times f$ et de $f + g$. Primitive de fonctions rationnelles.	
Définition d'intégrales et de fonctions intégrales, interprétation géométrique.	Bernhard Riemann (1826-1866)
Propriétés des intégrales.	Addition des intervalles, approximation, linéarité et monotonie.
Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.	

Partie 3 : Approfondissement du calcul différentiel et intégral dans le cas de fonctions particulières :

Les méthodes du calcul différentiel et intégral continuent à être développées . Ainsi les élèves accèdent à de nouvelles classes de fonctions et apprennent à connaître leurs propriétés caractéristiques. Ils mettent en pratique de manière sure dans des études élargies de fonctions leurs connaissances acquises et présentent leurs traitements de manière claire, logiquement exact et linguistiquement correct.

	La poursuite du calcul différentiel et intégral s'effectue graduellement en relation avec l'étude des fonctions et de leurs courbes.
Fonctions rationnelles : Fractions rationnelles, comportement par approximation aux zéros du dénominateur, et pour $x \longrightarrow +\infty$ et $x \longrightarrow -\infty$. Approximations pour $x \longrightarrow +\infty$ et $x \longrightarrow -\infty$, asymptotes.	$\rightarrow$ Physique, cours d'approfondissement , partie 3 : loi de Coulomb.
Règle du produit et du quotient Primitive de f pour $f(x) = x^n$, $n \in Z - \{-1\}$.	$\rightarrow$ Physique, cours d'approfondissement , partie 3 : Travail dans un champ radial.
Composition de fonctions, règle de composition. Intégration par changement de variables	

Fonctions exponentielle et logarithme: Fonction exponentielle avec $f(x) = e^x$ et fonction logarithme avec $f(x) = \ln x$, leurs représentations graphiques et leurs propriétés. Fonction réciproque, existence de fonctions réciproques. Dérivées et primitives.	La règle générale de la dérivée de la fonction réciproque n'est pas au programme.
Intégration par parties.	
Fonctions trigonométriques : Les fonctions trigonométriques avec f(x)=sinx, f(x)=cosx et f(x)=tanx leurs propriétés et leurs courbes Dérivée de la fonction tan Primitive de sin et cos Les fonctions f(x)=asin(bx+c)	→ Physique, cours d'approfondissement , partie 1 : oscillations mécaniques → Physique, cours d'approfondissement , partie 6 : induction électromagnétique → Physique, cours d'approfondissement , partie 7: oscillations et ondes électromagnétiques
Etude de fonctions composées	

Partie 4: Mathématiques en pratique: applications du calcul différentiel et intégral.

Les méthodes du calcul infinitésimal jouent un rôle important dans le traitement de problèmes de différents domaines comme par exemple les sciences, les techniques, la société et l'environnement. A l'aide de nombreux exemples les élèves acquièrent une vision dans les domaines d'application des mathématiques et découvrent la signification fondamentale des méthodes et des traitements pour résoudre beaucoup de problèmes concrets. Les traitements numériques leur permettent maintenant de donner des réponses également dans des cas qu'on ne peut résoudre de manière générale. Pour compléter les possibilités passées, ils déduisent des dépendances fonctionnelles à partir des relations entre grandeurs. Les méthodes de travail appliquées , également avec l'utilisation d'aides correspondantes , amenant les élèves aux bases du travail scientifique.

[Approximation par la fonction linéaire tangente] Approximation de Newton. [Méthodes itératives générales] Règle de Simpson.	Cette unité d'enseignement n'est pas conçue pour être traitée isolément.

Valeur moyenne d'intégrales Calcul de surfaces et de volumes de corps de révolution.	→ Physique, cours d'approfondissement , partie 6 : valeur effective Le cas échéant calcul de valeurs approchées, également avec un calculateur. → Physique, cours d'approfondissement , partie 3 :Energie des champs électriques.
[Travail physique] Fonctions dans des contextes réels.	Egalement dans l'environnement et la circulation
Croissance et processus de désintégration Equations différentielles pour des croissances naturelles, limitées, et logistiques [Superposition de deux sinusoïdes] [Equation différentielle des oscillations harmoniques]	[Egalement à l'aide de l'oscilloscope : → Physique, cours d'approfondissement , partie 6 : courant alternatif]

Partie 5 : système d'équations linéaires.

Avec les systèmes d'équations linéaires, les élèves apprennent à connaître une partie centrale des mathématiques qui, dans beaucoup de domaines des sciences, de l'économie et de la société est un outil indispensable. Ils appliquent avec sûreté et adresse l'algorithme de Gauss pour calculer l'ensemble des solutions d'un systèmes d'équations linéaires. L'écriture matricielle leur permet une représentation claire de faits mathématiques et économiques. La connaissance acquise se met en œuvre par le traitement de problèmes réels de différents domaines.

Systèmes d'équations linéaires (SEL) homogènes et non homogènes.	Relation entre l'ensemble des solutions d'un SEL non homogène et du SEL homogène correspondant.
Représentation d'un SEL par une écriture matricielle. Transformations équivalentes	Pour plus de 3 variables : exemples simples. Pour 2 ou 3 variables une représentation géométrique est possible.
Méthode d'élimination de Gauss. [Règle et déterminant de Cramer] Structure de l'ensemble des solutions d'un SEL	Traiter également le cas où le nombre d'équations est inférieur au nombre de variables. Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Multiplication de matrices.	Seulement en relation avec le traitement des procédés à plusieurs étapes.
Procédé à plusieurs étapes.	Egalement l'évolution des populations. Evaluation d'un état d'équilibre.
Autres applications.	Problème de mélange, réseau électrique, Interdépendance matérielle. Pour des applications, il suffit souvent de résoudre le SEL à l'aide d'un calculateur.

Partie 6 : espace vectoriel.

Comme exemple de notion d'espace vectoriel les élèves apprennent comment on peut résoudre des problèmes mathématiques issus de modèles concrets en généralisant et en axiomatisant. Ils comprennent également , comment à travers l'introduction d'une base, le calcul se réduit clairement à quelques éléments.

Vecteurs dans l'espace réel. Addition et multiplication scalaire, règles de calcul Comparaison de la structure de l'ensemble des solutions d'un SEL homogène avec la structure d'un ensemble de vecteurs de l'espace réel.	
Espace vectoriel réel.	
[Conséquences simples des axiomes d'espace vectoriel]	
$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$et $\mathbb{R}^n$ comme exemples d'espaces vectoriels. [Espace des polynômes] Combinaison linéaire, dépendance et indépendance linéaire Base et dimension	
Coordonnées de vecteurs dans une base [Rang d'une matrice] [Critère du rang pour la résolution d'un SEL]	Lié au choix de la base

Partie 7 : Géométrie affine dans l'espace réel.

Les élèves apprennent comment droites et plans de l'espace se laissent représenter par des équations simples. L'utilisation de vecteurs leur permet de résoudre des problèmes géométriques de parallélisme, d'incidence ou de positions relatives , avec l'aide d'un système de coordonnées bien choisi, au travers de traitements calculatoires simples. Ils doivent pouvoir représenter une situation spatiale en géométrie descriptive. Ils connaissent sur des exemples l'élégance des méthodes de démonstrations vectorielles de théorèmes de la géométrie affine , et apprennent à trouver de telles démonstrations et à les conduire.

Relation entre les vecteurs et les points d'un espace réel , représentation de vecteurs Système de coordonnées affines représentation paramétrique d'une droite et d'un plan Parallélisme Positions relatives de points, droites et plans. Détermination de relations entre parties. Représentation en descriptive Traces	Egalement sous forme analytique.
Méthodes de démonstration de théorèmes de géométrie affine	Famille de vecteurs liés. On pourra penser au théorème du centre de gravité, aux théorèmes de Thalès, Ceva ou Ménélaus.

Partie 8 : géométrie métrique dans l'espace réel :

Pendant que quelques lieux et incidences apparaissent au premier plan des observations, on s'intéresse maintenant au problèmes métriques. Les élèvent conçoivent le produit scalaire comme un remarquable outil qui réussit grâce à sa simplicité et permet beaucoup d'applications en mathématiques et en physique. Ils voient à travers l'utilisation de méthodes vectorielles comment la géométrie de l'espace est décrite convenablement et peut être explorée. Ils apprennent ainsi à se servir de manière sûre et adéquate des aides mises à leur disposition. Leur capacité à conduire des démonstrations autonomes sera étendue aux théorèmes de la géométrie métrique.

Norme d'un vecteur Produit scalaire et ses propriétés [Introduction axiomatique du produit scalaire, spécialisation sur une base orthonormée] Expression analytique du produit scalaire Calcul de longueurs et d'angles Equation normale d'un plan	

Forme normale de Hesse d'une droite et d'un plan, représentation vectorielle et représentation analytique	
[Produit vectoriel]	
Calcul de distances et d'angles d'intersection	Egalement distance de droites
Equations de cercles et de sphères, représentation vectorielle et représentation analytique	
Equation d'une tangente à un cercle	
Equation d'un plan tangent à une sphère	
[Pôle, polaire, plan polaire]	
Problèmes d'intersection et calculs de distances pour des cercles, sphères, droites et plans	représentation en descriptive
Théorème du cosinus	
Méthodes de démonstration par des théorèmes de la géométrie euclidienne	On pense notamment aux théorèmes sur les triangles et quadrilatères, aux théorèmes d'intersections et au théorème d'addition.

Partie 9 : thèmes au choix.

Les élèves approfondissent leurs connaissances et se retrouvent sur un thème choisi qui rencontrent leurs intérêts et leurs préférences. Ils prennent conscience des méthodes et des idées mathématiques, ressentent ainsi la beauté des mathématiques et découvrent là une signification renouvelée des mathématiques. Le traitement d'un thème au choix est effectué après les épreuves écrites du baccalauréat (Abitur).

Exemples de thèmes au choix :	
Distribution normale	Ou d'autres distributions probabilistes.
Intervalle de confiance pour une estimation	
Chaîne de Markoff	Andrej Markoff (1856-1922)
Applications affines	
Intersection d'un cône	
Cryptographie	
Chaos et fractales	
Equations différentielles usuelles	
Mathématiques numériques	
nombres complexes	
Courbes algébriques	
Théorie élémentaire des nombres	
Logique	
Structures algébriques	
Points essentiels de l'histoire des mathématiques	Egalement lectures de textes historiques
Epreuves de compétitions mathématiques	Stratégies de résolutions

IMAGES MATHÉMATIQUES ET COMMUNICATION ENTRE MATHÉMATICIENS

Muriel LEFEBVRE

Le texte qui suit est basé sur le mémoire de D.E.A[1] auquel ont conduit les multiples entretiens réalisés entre avril et juin 1997, dans les locaux de l'IRMA et du département de mathématiques. Nombre d'entre vous avaient alors accepté de s'y prêter, et certains vont sans nul doute se retrouver dans les citations qui sont extraites de ces entretiens. J'espère avant tout ne pas avoir trahi leurs propos.

Cette étude se poursuit dans le cadre d'une thèse, au GERSULP. Aussi, ne soyez pas étonné(e)s de m'apercevoir à nouveau déambulant dans les couloirs, et éventuellement être admise dans vos bureaux ou participer à vos séminaires. Encore une fois, merci à tou(te)s, pour le travail que vous m'avez permis de réaliser.

Quelques heures passées dans un département de mathématiques suffisent à nous rappeler l'importance des images dans cette discipline. En effet, que ce soit graphiquement (par l'intermédiaire de figures, dessins, et diagrammes divers) ou verbalement (utilisation d'un vocabulaire analogique, ou métaphorique emprunté au langage commun), lorsque les mathématiciens travaillent, ils utilisent fréquemment des images. Ces images sont présentes à différentes étapes des activités de recherche en mathématiques, qui correspondent par ailleurs à de multiples modes d'interaction entre chercheurs. Figures et diagrammes sont manipulés de manière tout à fait explicite lorsque les "mathématiques sont en train de se faire"[2], mais aussi lors de la construction de conventions dans la formalisation des savoirs mathématiques. Enfin, il est possible d'observer la présence répétée d'images au cours de la diffusion des connaissances mathématiques entre chercheurs, et lorsque celle-ci est destinée à l'extérieur de la communauté mathématique (enseignement, vulgarisation). Il nous a paru intéressant d'étudier les va-et-vient des images mathématiques à travers les quatre étapes citées précédemment, de façon à mettre en évidence le statut d'intermédiaire dont dispose l'image. En effet, des fonctions très diverses lui sont reconnues : support à l'imaginaire dans une visée heuristique, dans la communication et les échanges mathématiques, comme alternative à un formalisme parfois réducteur, ou encore en tant qu'instrument incontournable dans certaines démonstrations. L'observation met en évidence la grande diversité des pratiques iconiques, fonction des domaines mathématiques, mais aussi des individus... Or les objets mathématiques ont une nature bien singulière, puisqu'ils ne sont pas saisissables comme tels par une expérience sensible et immédiate. Du fait de leur degré d'abstraction, l'appréhension de ces objets soulève de nombreuses questions concernant leur représentabilité. Il fallait alors s'interroger sur les modes de construction de ces images. Font-elles partie de la culture mathématique ? A quel titre ? En quoi participent-elles à un système de conventions, et à la formalisation des connaissances mathématiques ? Est-il possible de construire un consensus dans une démonstration mathématique sur la base de ces images ? L'image mathématique, nous semble t-il,

[1] Ce mémoire peut être consulté à la bibliothèque du GERSULP (Groupe d'Etude et de Recherche sur la Science de l'Université Louis Pasteur), 7 rue de l'Université, Strasbourg.

[2] pour reprendre l'expression "la science en train de se faire", in Latour, B. (1995). *La science en action.* Folio.

constitue un terrain de recherche particulièrement révélateur des pratiques de communication de la communauté des mathématiciens.

De manière à répondre à ce questionnement, il a paru indispensable d'aller sur le terrain, à la rencontre d'une communauté de mathématiciens, afin d'observer, d'interroger les chercheurs et de questionner leurs pratiques. Aussi, la première partie est-elle une entrée en matière anthropologique[3], comprenant notamment une présentation de la communauté au sein de laquelle la plupart des observations ont été réalisées. J'y retrace ma démarche méthodologique, pour décrire ensuite les techniques d'observation utilisées et le déroulement des entretiens.

Une seconde partie est consacrée à la dimension communautaire de l'utilisation des images mathématiques. La lecture d'une image ne s'improvise pas, il existe des conventions graphiques qui réservent son interprétation à des spécialistes à même de la décoder convenablement. On peut faire l'hypothèse qu'une telle éducation, si elle existe, transmet implicitement d'une génération de mathématiciens à l'autre, une sorte de mode d'emploi de ces images mathématiques, assorti de conventions d'usage. Aussi, nous nous sommes interrogée sur l'existence d'une opposition entre deux modes distincts d'utilisation des images : l'un public, reconnu par l'ensemble de la communauté ; l'autre, privé, dont l'utilisation reste très individuelle.

A la rencontre d'une communauté de mathématiciens

1. Démarche méthodologique

Dans la perspective d'une observation participante, durant les quelques semaines passées à l'IRMA, il était essentiel d'assister à des séminaires, congrès, présentations, cours, rencontres informelles, discussions professeur/élève, chercheur/chercheur, etc. C'est d'ailleurs à l'occasion de séminaires que la plupart des éléments présentés ici ont été observés. Les notes prises en ces diverses occasions comprennent bien sûr de nombreux schémas et graphiques, relevés lors des séminaires, et qui sont accompagnés d'une description détaillée du contexte de leur observation ainsi que place dans la démonstration, dans le discours, etc. Quelques photographies de tableaux sont venues compléter l'ensemble.

A l'IRMA de Strasbourg et au département de mathématiques de l'ULP, 23 entretiens ont été réalisés, auprès de mathématiciens de spécialités relativement variées, mais toujours dans le champ de ce qu'on appelle les "mathématiques fondamentales" : arithmétique, géométrie-arithmétique, géométrie, géométrie algébrique, théorie des nœuds, topologie, algèbre, théorie des nombres, probabilités, analyse, etc. Ces mathématiciens sont en majorité des universitaires, mais aussi des étudiants en fin de thèse de doctorat. J'ai également rencontré trois chercheurs en didactique de mathématiques, toujours à Strasbourg, ainsi que deux physiciens-théoriciens ayant eu, à l'occasion de leur activité de recherche, des contacts privilégiés avec une communauté de mathématiciens. Enfin, deux étudiants de Toulouse ont accepté d'éclaircir certaines de ces questions sur la base de leur expérience mathématique.

---

[3] au sens de Latour, *ibid.*

La plupart des entretiens ont été enregistrés, puis retranscrits. Leur durée moyenne est d'une heure. Le plus souvent les rendez-vous ont été pris à l'avance, de façon à laisser un temps de réflexion à chaque interviewé. Ces entretiens étaient tous de type semi-directif, c'est-à-dire que si j'ai tenu à aborder quelques questions essentielles concernant le travail et la communication en mathématiques, j'ai néanmoins été attentive à l'ouverture de mes interlocuteurs pour des sujets adjacents. Les premiers entretiens sont restés très généraux dans leur approche de la communication entre mathématiciens. Ils ont progressivement évolué, pour se centrer sur les différentes perspectives des objets mathématiques, dans l'intention d'analyser l'influence de ces divergences sur la communication entre chercheurs. Les entretiens commençaient le plus souvent par une présentation de leur domaine de travail. Les mathématiciens étaient ensuite invités à préciser la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent, à décrire la représentation qu'ils en ont, la manière dont ils en parlent avec leurs collègues - surtout lorsque ces discussions mélangent les disciplines et les perspectives, etc. Souvent, de leur propre initiative, les chercheurs ont fait appel à des diagrammes et à des dessins afin d'exposer aussi bien leur domaine de recherche que les objets utilisés. Les entrevues se terminaient en général sur une manifestation de curiosité naturelle de leur part, concernant l'utilisation qui serait faite des données recueillies.[4]

Certains chercheurs mentionnèrent des titres d'ouvrages, souvent des autobiographies de mathématiciens, ou des articles de vulgarisation mathématique. Nombreux sont ceux qui ont fait mention de l'essai de J. Hadamard[5] ou des autobiographies de mathématiciens comme Laurent Schwartz ou André Weil, traduisant ainsi leur intérêt pour les questions concernant la psychologie de l'invention en mathématiques, ou le point de vue d'autres chercheurs dans cette discipline.

Parallèlement à mon travail de terrain (observations et entretiens), j'ai consulté de la littérature consacrée à l'appréhension des objets mathématiques ou scientifiques, au rôle des images dans les sciences,... afin de confronter le matériau recueilli à une analyse plus théorique. Mais, mener simultanément lecture et observation de terrain s'est parfois avéré difficile.

A plusieurs reprises, au cours des entretiens, certains mathématiciens se sont interrogés sur mon niveau d'études, en mathématiques, ou dans une autre discipline scientifique. Cette question survenait généralement avec l'introduction d'un détail plus technique (liée à la présentation de leur spécialité ou à la nécessité d'illustrer leur propos par un exemple, alors suivi d'un dessin). Ébauchant une explication de nature purement mathématique, les chercheurs prenaient conscience qu'ils étaient sur le point de s'engager dans une discussion sur les mathématiques avec quelqu'un qui pouvait être totalement étranger à leur domaine.

Ma maîtrise de mathématiques me donnait l'impression de partager un peu leur culture. Le fait d'avoir des connaissances de base m'a sans doute donné accès à un niveau d'informations que je n'aurais pas pu obtenir sans cela, grâce au langage spécialisé. Aussi, cela m'a-t-il permis d'observer les mathématiciens en situation de "communication mathématique", et non pas de communication limitée à l'aspect sociologique.

Il s'est avéré difficile mais essentiel de conserver à la fois le recul du "sociologue" indispensable à toute étude de nature anthropologique, tout en restant "marginale sur le

---

[4] Voici, peut-être un peu tardivement, une tentative de réponse à ces interrogations.

[5] Hadamard, J. (1949). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris. Librairie Scientifique Albert Blanchard. Trad. J. Hadamard. (1959).

terrain". Comme l'a souligné S. Traweek[6] : "*Clairement, une enquête par observation participante ne peut pas maintenir la distinction entre les connaissances subjectives et celles objectives.*" Cette difficulté est d'autant plus réelle que l'on a entrepris, comme c'est mon cas, des études universitaires dans le domaine observé.

2. Le poids des images dans la communication

> "*La première proposition de mon anthropologie philosophique est que les êtres humains sont créateurs d'images.*"
>
> I. Hacking[7]

L'observation réalisée sur le terrain a confirmé l'importance des représentations iconiques et graphiques comme moyen de communication dans les mathématiques, quoi qu'en disent parfois les mathématiciens. Les entretiens ont confirmé et précisé ce point : les chercheurs ont très fréquemment recours aux images mathématiques aussi bien à titre explicatif, descriptif, qu'à titre d'exemple. Néanmoins, si dessins et images mathématiques sont omniprésents lors des contacts entre mathématiciens, ce sujet n'est jamais abordé explicitement par eux, et ils semblent même ressentir un certain malaise à s'exprimer sur ce point.

Par exemple, ils ne parlent pas entre eux des images mentales, des représentations d'objets mathématiques auxquels ils se réfèrent, de ce qu'ils "imaginent". Un physicien-théoricien, qui, un moment, fit partie de la communauté des mathématiciens de Strasbourg, déclarait notamment : "*On ne parle pas de ça. Les types ne parlent pas de ça. Je n'ai jamais vu des types venant me demander dans une discussion "Tiens, comment est-ce que tu imagines cette bête là ?" et que je lui dise "J'imagine qu'elle a 6 pattes, comme ça, une fourrure épaisse, et trois cornes", et que l'autre me dise "C'est marrant, parce que moi, je l'imagine le poil complètement ras, aucune corne, mais par contre une très longue queue".(...) Tels que je connais les mathématiciens, ils auraient surtout honte si on leur demandait de décrire exactement ce qu'ils voient.*" Ce type d'images sont le plus souvent exclues des échanges entre chercheurs, et considérées comme relevant du domaine privé.

Cette étude nous a conduit à nous interroger sur la constante confrontation entre ce qui résultait d'une démarche d'observation - l'omniprésence des images en mathématiques -, et ce que rapportaient les mathématiciens lors des entretiens. Ce constat de la présence répétée d'images et de dessins dans la communication entre ces scientifiques, suscite une série de remarques et de questions. Si les mathématiques comprennent des spécialités différentes, supposant des rapports spécifiques aux objets mathématiques et des perspectives distinctes, il existe néanmoins une activité de communication importante entre ces divers domaines. Quel rôle les images jouent-elles dans ces différents cas ? Favorisent-elles l'échange d'informations, le transfert de connaissances ? Selon les spécialités, comment s'effectue le recours aux images, quelles en sont les pratiques ? Comment se réalisent alors les collaborations interdisciplinaires ? Quels sont les enjeux de la communication visuelle en mathématiques, j'entends ici par l'intermédiaire des "images mathématiques" ? Derrière une fonction instrumentale, qui n'est jamais discutée, et dont

---

[6] Traweek, S. (1988). *Beamtimes and lifetimes. The world of high energy physicists.* Cambridge. Harvard University Press.

[7] Hacking, I. (1983). *Concevoir et expérimenter.* Paris. Ed. Christian Bourgeois. Trad. B. Ducrest. (1989).

on considère qu'elle fait partie de la culture mathématique, mais n'a pas de réelle importance (alors que la communication visuelle est présente à tous les niveaux), n'y a-t-il pas un enjeu social primordial, qui régule, gère, cette communication visuelle ?

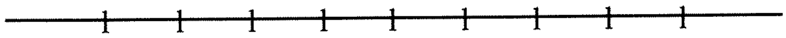
Dimension communautaire de l'usage des images mathématiques

Comme l'a souligné cette étude, les images font véritablement partie de la culture des mathématiciens. Cependant, il fallait se demander si ce qui est généralement considéré comme relevant de la perception intuitive, c'est-à-dire l'appréhension «spontanée» des objets mathématiques par les images, n'est pas en réalité une construction élaborée selon des normes et des règles communes à l'ensemble de la communauté des mathématiciens. Nous commencerons ce paragraphe en abordant la question de la lecture et de l'interprétation des images.

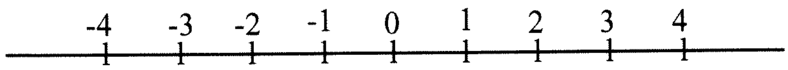
1. Une éducation visuelle

"L'oeil innocent ne voit rien."
E.H. Gombrich.

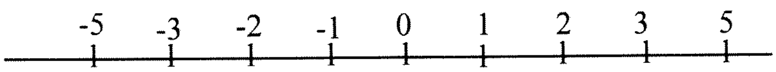
La lecture d'une image ne s'improvise pas de façon arbitraire : elle s'accompagne toujours d'une interprétation. Un même dessin peut en avoir plusieurs distinctes selon le contexte dans lequel il s'inscrit. Prenons par exemple une ligne droite hachurée régulièrement.



En analyse, elle a toutes les chances de représenter l'ensemble **R** des nombres réels (figuré par la droite), et son sous-ensemble **Z** des nombres entiers relatifs (...-6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6...).



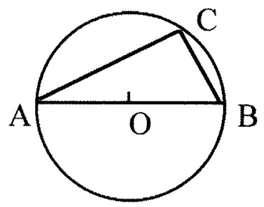
En géométrie arithmétique, par contre, la droite figure **Z** (ensemble des nombres entiers relatifs), et les encoches son sous-ensemble des nombres premiers (... -7 ; -5 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ...).



De fait, une image mathématique n'est compréhensible que par une minorité de spécialistes, à même de décoder, de déchiffrer la représentation en analysant convenablement les symboles utilisés. Par spécialiste, nous entendons tout d'abord un mathématicien ; mais, de façon plus précise, il s'agit d'un spécialiste dans un domaine extrêmement précis et spécifique. Certains mathématiciens supposent en effet que l'ensemble de la communauté mathématique a une base culturelle commune, ce qui leur permettrait de comprendre et de participer au travaux de leurs collègues. Mais d'autres reconnaissent sans détour que, dès qu'ils s'éloignent des domaines qu'ils ont l'habitude d'explorer - en dehors des concepts et des dessins assimilés pendant les deux premiers cycles universitaires - ils ne parviennent plus à saisir le sens de ces recherches, ni parfois le langage utilisé.

Il importe d'être un "spécialiste" pour décoder une image, afin de s'emparer de l'information qui y est contenue, mais aussi pour déterminer ce qui est, ou n'est pas important dans cette image : jusqu'à quel point peut-on se fier à l'image même ? De quelle façon les exigences de rigueur doivent-elles être prises en compte ? une ligne un peu plus recourbée qu'une autre occasionne-t-elle une quelconque différence de sens ? Jusqu'où de simples modifications de forme n'entraînent-elles pas des modifications notables de sens ? Il faut savoir s'approprier une image, un dessin pour pouvoir ensuite l'utiliser, c'est-à-dire l'interpréter et le redessiner. "*Voir, c'est une éducation.*" me dira ainsi une chercheuse en didactique des mathématiques.

Les témoignages suivants confirment que la plupart des mathématiciens reconnaissent la nécessité d'une éducation visuelle pour pouvoir développer une culture de l'image. Un algébriste déclarait ainsi : "*Moi, je n'arrive pas à lire des dessins géométriques, parce qu'il s'agit d'objets de dimensions importantes. Mais je pense que si on étudie la géométrie, on finit par savoir lire ce dessin. Il suffit de développer une certaine habitude.*" Un autre ajoutait, tout en traçant la figure ci-dessous sur un brouillon : "*Sur ce dessin, je vois l'angle droit du triangle, culturellement, mais quelqu'un qui ne serait pas géomètre ne le verrait pas*".



Comme on vient de le voir, toute lecture d'image s'accompagne d'un décodage et d'une interprétation qui obéissent à certaines conventions, lesquelles s'acquièrent au cours d'une sorte d'éducation visuelle. N. Goodman écrit : "*La perception et l'interprétation ne sont pas des opérations distinctes; elles sont au contraire complètement interdépendantes.*" De nombreux auteurs comme J.P. Changeux[8], I. Hacking, J. Hadamard ou encore A. Sauvageot[9], soulignent l'importance d'une telle éducation dans l'interprétation des images. En mathématiques, cette éducation commence dès les premiers cours de l'enseignement primaire (avec, par exemple en géométrie, le cercle ou le carré ; les "patates" pour la théorie des ensembles, etc.). Mais elle peut varier considérablement d'un mathématicien à l'autre, en fonction de son parcours personnel et scientifique, de la culture mathématique dans laquelle il est immergé, de sa plus ou moins grande ouverture à des disciplines adjacentes, de sa spécialité... Il existe des différences essentielles entre les spécialités mathématiques, et il est possible d'observer des comportements nettement différenciés, selon les domaines. Bien sûr, géomètres et topologues - qui s'intéressent avant tout aux formes - sont-ils amateurs de dessins de toutes sortes, tandis qu'algébristes - plus soucieux de l'étude des structures -et analystes leur préfèrent souvent des diagrammes, voire une écriture entièrement formalisée. Comme l'écrit I. Hacking : "*Il existe différents styles de représentations. Il n'y a pas de représentation sans style.*" Mon observation m'a déjà amenée à souligner que ces comportements différenciés, associés aux différents domaines mathématiques, semblent se maintenir au cours des collaborations entre domaines adjacents : les chercheurs restent attachés à leur affinité d'origine «avec ou sans dessins». A.Sauvageot parle ainsi d'un "*habitus perceptif et mental*", et P.Virilio de "*générations visuelles*".

---

[8] Changeux, J.P., Connes, A.(1989). *Matière à pensée*. Paris. Collection Points. Ed. Odile Jacob. (1992)

[9] Sauvageot, A. (1994). *Voirs et Savoirs. Esquisse d'une sociologie du regard.* Paris. P.U.F.

A travers l'analyse ci-dessus, on perçoit l'existence d'une sphère "d'intuition dirigée". En effet, les images mathématiques, tout en se rapprochant davantage d'un mode intuitif plutôt que formel - elles sont appréhendées, manipulées comme des éléments concrets, malléables, transformables, subjectifs, voire ambigus -, nécessitent une éducation visuelle spécifique pour pouvoir être interprétées et utilisées correctement. Contrairement à ce que l'on aurait pu penser, elles relèvent d'une construction obéissant à certaines normes et conventions communautaires qui définissent leur usage comme un véritable langage.

2. La normalisation des images

Ainsi que nous venons de le souligner, il existe un processus de normalisation qui tend à éviter ou, du moins, à limiter l'ambiguïté dans la lecture des images. Est-il possible de réellement normaliser les images ? Pour répondre à cette question, nous nous sommes à nouveau intéressée à l'origine et à la construction des images mathématiques. Il est en effet possible de distinguer deux catégories d'images : celles qui sont normalisées et formalisées, et celles dont l'utilisation est plus personnelle, plus intuitive. Les images normalisées font partie des représentations reconnues et acceptées par l'ensemble de la communauté. Au contraire, les images intuitives sont utilisées dans une perspective plus personnelle et individuelle ; les mathématiciens y recourent de façon privée ou dans un domaine spécifique. Elles sont, de ce fait, manipulées avec une certaine souplesse : il est toujours possible de les modifier sans contraintes, hors des règles figées qui codifient les images normalisées. En contrepartie, elles ne sont pas toujours reconnues par l'ensemble de la communauté.

Il existe aussi des images qui sont "dans la norme" pour certains domaines, mais sont rejetées dans d'autres où elles sont considérées comme insuffisamment "rigoureuses". C'est un phénomène que l'on peut observer plus particulièrement au cours des collaborations interdisciplinaires. En effet, si nous prenons l'exemple topologique[10] de la déformation d'un tore privé d'un point en un 8, cette démonstration n'est pas acceptée par les algébristes ou les analystes, qui exigeront une argumentation nettement plus formalisée. Les conventions peuvent varier considérablement d'un domaine à un autre ainsi que la notion même de rigueur, ce qui conduit parfois à des malentendus. Un géomètre me rapportait ainsi que : "*Si l'on confronte un arithméticien classique à une représentation de **Z** comme une droite avec des encoches représentant les nombres premiers, cela risque fort de le perturber.*" Le risque de voir nombre de dessins mal compris ou mal interprétés reste grand. L'utilisation d'une représentation plutôt que d'une autre est donc avant tout une question de choix.

D'après un chercheur, "*Il y a 2 ou 3 dessins qui reviennent tout le temps, toujours les mêmes. (...) Les mathématiciens sont très conventionnels : on utilise tous les mêmes dessins.*" A partir du moment où de nombreux mathématiciens font usage d'une image, celle-ci se normalise. En effet, la communauté - il peut s'agir de l'ensemble de la communauté ou des spécialistes d'un domaine déterminé - s'accorde alors sur son sens, réalisant, en quelque sorte, un consensus communautaire autour de cette image, en lui attribuant le statut d'image-standard[11], "d'image-normée", selon l'expression de A.

[10] Voir chapitre III, p.38 du mémoire.

[11] La représentation du nœud topologique dessiné au chapitre II, p.28 du mémoire, a été introduite récemment par un chercheur d'un institut anglo-saxon. Elle fut progressivement adoptée par plusieurs de

Sauvageot. Cette dernière écrit : "*La perception des objets est indissociablement liée aux images-normées assimilées au cours des expériences antérieures, à l'échelle tant individuelle que collective, et en ce sens on peut sans doute parler d'un véritable 'habitus' perceptif et mental.*" Progressivement, ces codes visuels instituent une normalisation du monde mathématique. Ce sont alors de véritables pressions sociales qui imposent les représentations.

L'existence d'un véritable *langage de représentations* obéissant à certaines conventions qui en définissent la construction et l'usage, apparaît clairement, tout comme il existe des normes régissant l'écriture mathématique formelle. Les représentations qui ont la propriété d'être communicables et transmissibles d'un individu à un autre deviennent, selon l'expression de J.P. Changeux, des "*représentations publiques*". En effet, les images-standard font désormais partie du domaine normalisé, reconnu par l'ensemble de la communauté et, en tant que tel, considéré comme public. Une chercheuse en didactique des mathématiques parlait ainsi de «*règles d'admissibilité*", de "*règles du milieu*", c'est-à-dire de règles gérées par la communauté des mathématiciens, qui reconnaissent à certaines images un statut "public". Du fait de leur normalisation, les images-strandard constituent une partie du langage mathématique formel.

Toutefois, il existe un rapport ambigu entre la démarche formelle, et l'utilisation des images. En effet, la mathématique formelle ne nécessite aucune interprétation intuitive, laquelle est considérée comme une démarche extra-mathématique. Tout ce que le formalisme requiert, c'est un principe de non-contradiction logique. Il tend donc à s'éloigner de l'appréhension intuitive d'un objet, de façon à supprimer toute ambiguïté dans son interprétation. "*Une équation est comprise par tout le monde de la même façon.*" rappelle un chercheur. M. Serres[12] écrit par ailleurs que : "*L'acte d'éliminer la cacophonie, la tentative d'éliminer le bruit - le bruit est l'ensemble des phénomènes de brouillage qui font obstacle à la communication - est à la fois la condition de l'appréhension de la forme abstraite, et la condition de la réussite de la communication. (...) Formaliser, c'est éliminer le bruit de manière optimale.*" Il ajoute : "*Le formalisme est la langue de la description. Mais cette langue obéit à des lois de langue : alors l'intention descriptive se double de l'intention normative.*" Les mathématiques, comme toute discipline qui se revendique exacte, cherche à prendre une certaine distance avec la perception, de façon à donner un fondement totalement "objectif" à ses recherches. Or, le "voir" est une activité qui relève incontestablement du domaine du sensible, car elle reste subjective, ce qui l'oppose à un mode formaliste supposé "neutre".

Compte tenu de ces différents éléments, il devient particulièrement difficile d'évaluer ce qui est acceptable - et accepté - dans le domaine des images, en mathématiques. Dans un tel contexte, les images sont-elles réellement autorisées ? Peut-on considérer qu'elles font toujours partie des mathématiques ? Selon l'avis d'un physicien-théoricien : "*Le contenu scientifique est ce qui reste quand on a supprimé les images.*" Un étudiant me rapportait les propos d'un enseignant en analyse qui commentait l'utilisation des images, à des fins argumentaires, par les topologues : "*Faire une démonstration avec des dessins, ce n'est*

ses collègues. En franchissant les frontières de l'institut, elle a semble t-il été reprise par l'ensemble des mathématiciens de la spécialité.

[12] Serres, M. (1969). *Hermès I, la communication*. Paris. Editions de Minuit.

plus faire des mathématiques." On peut aussi citer P.J. Davis et R. Hersh[13] : "*L'utilisation de dessins, de diagrammes ou même d'images mentales est considérée comme non-mathématique. En principe, ils ne devraient pas être nécessaires. Par conséquent, le mathématicien les juge inappropriés dans un texte mathématique, voire dans un cours de mathématiques.*"

Néanmoins,le formalisme pourrait-il suffire, à lui seul, à l'appréhension et à la compréhension d'objets mathématiques ? Aucune démonstration n'est jamais entièrement formalisée. On se contente, s'il y a doute, de produire une formalisation partielle. A plusieurs reprises, il est advenu que des démonstrations partiellement formalisées, mais néanmoins considérées comme valides, soit reconnues incomplètes après une longue période de consensus général autour de leur prétendue exactitude. Parfois, c'est la validité du théorème lui-même qui se trouve remise en question. Une démonstration formelle est avant tout un instrument de contrôle et un moyen de consensus.

Surtout, on peut se demander si le formalisme, tel que nous l'avons décrit jusqu'à présent, n'est pas, comme l'a suggéré Feyerabend, trop rigide et inhibant, constituant par là-même un véritable frein aux activités de création et de communication des mathématiciens. La position formaliste est très souvent énoncée comme allant de soi. Mais un physicien-théoricien déclarait par exemple : "*L'algèbre peut cacher des choses que la 'visualisation'- par l'intermédiaire de diagrammes ou de schémas - fait apparaître plus facilement.*" Un chercheur en algèbre a ajouté : "*Il y a une tendance des mathématiciens français en général à rechercher une espèce de perfection formelle* [14]*; ce qui fait qu'il y a beaucoup d'articles français qui sont parfois d'un tel formalisme, que moi, c'est ce que j'appelle du complètement abstrait, dans le sens où l'on ne voit pas quel peut en être l'intérêt mathématique.*" Cette tendance à l'hyper formalisation est considérée par certains chercheurs comme une caractéristique de l'"École française". Le rôle des images n'est il pas aussi de donner davantage de liberté aux mathématiciens ?

Une telle orthodoxie existe dans tous les domaines scientifiques, mais pas nécessairement avec les mêmes exigences. L'orthodoxie mathématique tend à normaliser l'écriture des théorèmes et démonstrations, mais aussi celle des contenus et significations mathématiques. On peut rappeler à ce propos les difficultés qu'ont rencontré Lobatchevski et Riemann pour diffuser l'idée d'une nouvelle géométrie, non-euclidienne, rejetée par les défenseurs de la géométrie standard, d'obédience euclidienne. Le mode de représentation des mathématiques influe donc aussi sur les pratiques conceptuelles.

A ce stade de notre réflexion, il est nécessaire de considérer l'attitude des mathématiciens face à l'utilisation des images, en reprenant la distinction faite précédemment entre les images «normées» et les images «intuitives».

3. Le malaise des mathématiciens sur la question des images

[13] Davis, P.J., Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. London. Penguin Books.

[14] Il semble important de souligner ce point, afin de rappeler la très forte influence qu'a eu le Bourbakisme sur l'école mathématique française, aussi bien dans les contenus mathématiques que dans l'écriture reflétant de très fortes exigences de rigueur : le formalisme. Mais il est bon de garder à l'esprit que ces exigences de rigueur ont eu une emprise considérable sur la manière avec laquelle on *a fait*, et on *fait* encore de nos jours des mathématiques en France.

L'orthodoxie mathématique, dont nous avons parlé précédemment, exige une argumentation et des démonstrations "rigoureuses" - c'est-à-dire sans aucune ambiguïté dans l'interprétation - qui devraient suffire à la compréhension et à l'élaboration de travaux de recherche mathématique. En effet, selon les dires de nombreux algébristes, "*en mathématiques, tout est formalisable.*" En outre, il est clairement apparu qu'il existe une véritable normalisation des images mathématiques, ayant pour effet de standardiser les dessins et représentations utilisées tout comme l'écriture mathématique formalisée obéit à des normes très précises.

L'étude que nous avons réalisée a cependant révélé la présence d'un incontestable malaise dès que l'on aborde la question des images mathématiques avec les chercheurs. C'est un sujet qui nous a semblé particulièrement sensible.

Dans une large mesure, les images sont utilisées par les chercheurs comme un support individuel à l'imaginaire, au cours d'activités heuristiques ou de compréhension. Les dessins réalisés par les mathématiciens dans ces moments-là sont davantage des esquisses qui rappellent qu'il ne s'agit que d'un travail en cours, non achevé et qui, par conséquent, obéit moins aux exigences de rigueur qu'un texte formalisé diffusé à travers la communauté des mathématiciens. Alors que les résultats scientifiques sont généralement publiés au moyen d'une démonstration formalisée tout à fait linéaire, le fait de montrer ses images est assimilé au fait de révéler ses brouillons : sont ainsi affichés tous les cheminements qui ont été nécessaires à la pensée pour produire tel ou tel résultat. Cela est peut-être perçu comme particulièrement dévalorisant, car une image est loin d'être aussi "esthétique" - au sens mathématique du terme - qu'une démonstration linéaire formalisée, qui peut donner l'impression d'avoir été construite avec un «éclair de génie». Or, on connaît l'importance de l'esthétisme en mathématiques, qui exige d'une "belle" démonstration qu'elle soit courte, et surtout la plus formalisée possible, tout en restant si possible "compréhensible".

Il est nécessaire de s'arrêter ici un instant pour discuter de la réaction de scientifiques non-mathématiciens, comme par exemple les physiciens-théoriciens, face aux images. La physique théorique est un domaine qui est sans doute peu éloigné des mathématiques, si ce n'est, que ces scientifiques ont particulièrement conscience de travailler sur de la matière. Il nous ont paru en général beaucoup moins méfiants à l'égard des manipulations de dessins et de schémas que leurs collègues mathématiciens. Ainsi, un étudiant en physique-mathématique, décrivait-il les physiciens-théoriciens comme des chercheurs qui "*savent calculer des intégrales représentées par des dessins parce qu'ils en connaissent la signification physique. Ils jonglent beaucoup plus facilement avec les images sans s'encombrer d'un formalisme inhibant. Tandis que les mathématiciens interprètent un dessin au pied de la lettre, sans donner de sens à la suite de dessins qui leur est présentée.*"

Mais les images ne peuvent pas toujours être aussi rigoureuses que les mathématiciens le souhaiteraient. Les déchiffrer, c'est toujours faire appel à une interprétation et, comme le rappelle I. Hacking , "*une interprétation est toujours intentionnelle.*" Or, nous l'avons déjà noté, les interprétations tendent à se multiplier en fonction de divers critères : domaine mathématique considéré, personnalité du chercheur, éducation, etc. On retrouve donc, dans chaque domaine ou spécialité - à côté des images-standard qui sont plus ou moins connues de l'ensemble des mathématiciens parce qu'elles sont utilisées dès les deux premiers cycles universitaires - des séries d'images beaucoup plus intuitives et personnelles qui, hors de leur contexte mathématique spécialisé, ne sont pas acceptées comme telles par l'ensemble de la communauté. Ces dernières sont même désignées avec méfiance, car non normalisées et censées ne pas être nécessaires aux mathématiciens. On peut alors se demander quels sont, parmi ces dessins, ceux qui sont considérés comme standard et ceux qui sont jugés plus intuitifs.

Afin d'expliquer davantage le sentiment de malaise que semblent éprouver les mathématiciens lorsqu'ils s'expriment au sujet des dessins, il nous faut souligner ici le fait que parmi tous les scientifiques, les mathématiciens sont sans doute les seuls dont l'activité de recherche ne fasse pas explicitement référence à la matière. Il est relativement fréquent d'entendre les chercheurs travaillant sur des concepts abstraits procéder par ailleurs à une dépréciation du sensible. Un mathématicien disait à ce propos que : "*Les mathématiques sont singulières parmi les sciences car leur lien avec le réel n'est pas clair... mes collègues hurleraient car cela fait des années qu'ils disent que ce qu'ils font est très concret, afin d'obtenir des crédits!!!*", ce qui est aussi l'avis d'un physicien-théoricien : "*Je crois que les mathématiciens, dès le départ, vivent l'absence totale de contact avec le réel, qu'ils en éprouvent au fond d'eux-mêmes une certaine honte. Ils exorcisent leur honte en faisant semblant de s'en vanter.*"

Les mathématiciens s'expriment très rarement au sujet des images, et cela malgré l'utilisation incessante qu'ils en font. Ils n'en parlent pas entre eux et manifestent une certaine réticence à s'expliquer sur l'usage qu'ils font des images auprès de personnes extérieures à leur communauté scientifique. Confronter plusieurs chercheurs autour du thème des images mathématiques est une expérience surprenante : une gêne s'installe parmi les interlocuteurs, comme si aucun consensus n'existait réellement autour du rôle et de l'usage des images en mathématiques. Cette gêne nous semble pouvoir s'expliquer ainsi : dès que les mathématiciens sont amenés à discuter <u>ensemble</u> de leurs manières d'appréhender <u>individuellement</u> les objets mathématiques, ils ont l'impression d'être mis à nu, peut-être même jugés par les autres mathématiciens. Les images font partie de la culture mathématique ; pourtant, il s'avère difficile d'en parler, à la fois avec des non-initiés, c'est-à-dire vers l'extérieur de la communauté, mais aussi à l'intérieur de celle-ci, puisqu'elles n'ont aucun statut véritable.

On peut alors s'interroger sur la signification réelle du "bricolage" des images dans l'activité mathématique. En effet, il existe une contradiction entre d'une part, un certain accommodement des images à des fins individuelles[15], et d'autre part une normalisation sociale de celles-ci. Outre une difficulté à définir des normes relatives aux images mathématiques, se pose ici un réel problème de communication, puisque, par l'intermédiaire des images, deux formes d'interrelation sont en jeu et coexistent en permanence.

4. La coexistence de deux modes d'expression par l'intermédiaire des images

Il semblerait que les images constituent un support de négociation entre deux dimensions très différentes de l'activité de communication en mathématiques : une dimension psychologique, privée et individuelle, opposée à une dimension communautaire

---

[15] On peut se référer ici à la partie III du mémoire, qui souligne le rôle des images au cours d'activités heuristiques, pédagogiques ou communicationnelles.

publique et sociale. Peut-être faudrait-il parler ici d'un espace "pri-blic", c'est-à-dire un espace à la fois privé et public.

La dimension publique s'inscrirait dans une communication mathématique explicite, reconnue comme participant à l'élaboration des connaissances mathématiques mais qui reste toujours dépendante du contexte d'utilisation : une image peut être considérée comme mathématique par les topologues, mais non par les algébristes. La normalisation des images et le formalisme fonctionnent de pair dans une activité collective.

La dimension privée serait présente dès que l'on s'éloigne un tant soit peu de la rigoureuse orthodoxie exigée par la communauté des mathématiciens. Par dimension privée, nous entendons aussi bien un usage restreint à un domaine spécifique et non reconnu ailleurs... qu'un usage strictement personnel et individuel. Ce fragment tacite des connaissances mathématiques serait transmis au cours d'une communication implicite, pendant une activité de recherche personnelle, sans être nécessairement mis en avant comme tel : on peut rappeler à ce propos que les nombreux petits dessins réalisés sur les tableaux sont rarement achevés, mais délaissés dans un coin. L'éducation mathématique crée cependant un implicite commun puisque, très rapidement, l'étudiant s'habitue à utiliser les images aussi bien dans ses activités individuelles de compréhension que dans une perspective didactique, tout en considérant certaines images comme plus "acceptables" que d'autres, conformément aux normes en vigueur. Une partie des connaissances ne peut donc pas être rendue explicite tant qu'elle n'est pas reconnue d'utilité mathématique et conforme aux exigences de l'orthodoxie, donc acceptable par la communauté.

Conclusion

La présente étude a volontairement privilégié une dimension anthropologique dans son approche de la communication entre mathématiciens, de façon à mettre en évidence la présence des images dans la culture mathématique et à souligner leur rôle pourtant controversé dans le fonctionnement des collectifs de mathématiciens.

Nous y avons établi que les images font pleinement partie de la culture et du langage mathématique, à côté de l'écriture formalisée. Elles participent ainsi à constitution d'une identité commune à l'ensemble des mathématiciens. En effet, les images constituent une sorte d'intermédiaire à usages multiples, par exemple entre des concepts de nature abstraite et des objets plus concrets. Un passage en revue des différentes images observées nous a conduit à repérer d'une part, leur nature extrêmement diversifiée, et d'autre part, la variété de leurs utilisations, en fonction des domaines mathématiques considérés, que ce soit dans les activités de compréhension, de création, ou encore de communication. Tous les mathématiciens ne recourent pas aux images de la même façon. Cette différence dans l'utilisation des images et de l'écriture formelle autorise à parler de "pratiques iconiques" différentes, spécifiques à chaque spécialité mathématique.

L'emploi des images nécessite véritablement une éducation visuelle, obéissant à des normes qui seules standardisent leur interprétation et leur utilisation, selon une certaine "orthodoxie" ; celle-ci, du même coup, invalide tout usage intuitif.

L'examen plus approfondi de la notion d'"image mathématique", a mis en évidence l'existence d'une opposition flagrante entre deux modes d'appréhension et de traitement des objets : le premier, de nature surtout intuitive, s'appuie sur de très nombreuses images dont l'interprétation reste parfois ambiguë, tandis que le second se contente d'une écriture formalisée ; ce dernier est considéré comme le seul langage véritablement rigoureux et dont l'utilisation ne prête pas à équivoque. L'image constitue donc un support de négociation entre ces deux dimensions distinctes de la communication en mathématiques : celle de nature intuitive, privée, individuelle, spécialisée, employée comme support de réification de concepts mathématiques, comme support à l'imaginaire, ou dans les activités heuristiques ; l'autre, de nature formelle, publique, sociale, pluridisciplinaire, utilisée comme support didactique aussi bien que rhétorique. Les enjeux de la communication visuelle en mathématiques me semblent donc avant tout liés à l'opposition entre l'appréhension intuitive des objets et l'analyse formelle, entre une logique de bricolage personnel et une logique d'utilisation collective. Les images appartiennent à ce qu'on pourrait alors appeler un domaine "pri-blic", c'est-à-dire à la fois privé et public. Elles constituent de fait ce que l'on nomme parfois des "objets-frontière", c'est-à-dire des objets qui, malgré des points de vue très divers posés sur eux, permettent de faire lien entre différentes communautés, différents groupes ou individus, et leurs différentes utilisations. L'image est un véritable objet de médiation à plusieurs dimensions, auquel ont recours les mathématiciens entre eux, ou dans leurs échanges avec la société, et qui participe ainsi à la construction d'espaces de socialisation.

Ce mémoire ne constituait qu'un examen préliminaire à une recherche plus approfondie, actuellement entreprise dans le cadre d'une thèse, et qui s'appuie sur un matériau théorique plus consistant. La notion "d'image" telle que nous l'avons présentée ici est excessivement simplifiée, et il conviendra de la nuancer au regard d'une analyse sémiotique. Des recherches ultérieures devraient en effet nous permettre d'examiner plus attentivement le processus dynamique de construction et de validation (ou d'invalidation) des images en mathématiques. Nous étudierons dans quelle mesure les images jouent un rôle dans la recherche mathématique, au niveau de la formalisation des connaissances, mais aussi de leur diffusion hors de la communauté scientifique (enseignement, vulgarisation).

Bibliographie

Bastide, F. (1985). Iconographie des textes scientifiques. *Culture technique. n°14.* Paris. CRCT. Diffusion P.U.F.

Davis, P.J., Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. London. Penguin Books.

Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM Strasbourg.

Fleck, L. (1935). *Genesis and development of scientific fact.* University of Chicago Press. Trad. F. Bradley. (1979).

Goodman, N. (1968). *Languages of art*. Bobbs-Merrill Company. USA.

Hadamard, J. (1949). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris. Librairie Scientifique Albert Blanchard. Trad. J. Hadamard. (1959).

Kuhn, T.S. (1970).*La structure des révolutions scientifiques.* Paris. Champs Flamarion. (1983).

Latour, B. (1995). *La science en action.* Folio.

Lynch, M., Woolgar, S. (1990). *Representation in scientific practice*. Cambridge. MIT Press.

Mandelbrot, B. (1985). La galaxie Mandelbrot. *Culture technique. n°14.* Paris. CRCT. Diffusion P.U.F.

Pickering, A. (1992). *Science as practice and culture*. University of Chicago Press.

Sauvageot, A. (1994). *Voirs et Savoirs. Esquisse d'une sociologie du regard.* Paris. P.U.F.

Serres, M. (1969). *Hermès I, la communication.* Paris. Editions de Minuit.

Traweek, S. (1988). *Beamtimes and lifetimes. The world of high energy physicists.* Cambridge. Harvard University Press.

Rallye Mathématique de Première 1998

Sujet 1 :

Depuis trois jours, Roméo attend Juliette au terminus du Tram de Vérone. La première fois, il a attendu 12 minutes et a vu arriver 5 rames. Le lendemain, 20 minutes se sont écoulées et 6 rames sont arrivées. Le surlendemain, combien a-t-il vu de rames durant ses 30 minutes d'attente, sachant qu'elles arrivent à intervalles réguliers ?

Sujet 2 :

La société RMA 25 produit la calculatrice révolutionnaire GG1998. Très simple d'utilisation, elle n'effectue que deux opérations : la multiplication habituelle notée **.** et une mystérieuse opération *. Des tests approfondis ont montré que pour tout entier non nul a, on a :

$$a*1 = a \quad \text{et} \quad a*a = 1.$$

Le mode d'emploi précise que si l'on prend quatre entiers naturels non nuls a, b, c et d, on a :

$$(a*b).(c*d) = (a.c)*(b.d)$$

où **.** désigne la multiplication habituelle. Quel est le résultat de $349650 * 7$?

Sujet 3 :

Le célèbre archéologue Émile Jones a découvert un coffret contenant 208 triminos  identiques, un unique monomino □ et le message suivant :

Celui qui avec toutes ces pièces
Un carré construira
De la main de la Déesse
Sacré géomètre sera.
Sinon rongé par la tristesse
Viticulteur deviendra
Et chaque jour à la Déesse
Du vin d'Alsace offrira.

Émile Jones peut-il devenir géomètre ?

Rallye Mathématique de Terminale 1998

Sujet 1 :

Est-il possible de trouver quatre nombres réels tels que, pris deux à deux, leurs sommes soient égales à 3, 4, 4, 5, 6, 8 ?

Sujet 2 :

Déterminer le dernier chiffre du plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{10^{1998}}{10^{54}-7}$

Sujet 3 :

1998 soldats sont alignés côte à côte face à leur général. Celui-ci leur donne l'ordre d'effectuer un quart de tour vers la gauche. Certains obéissent, les autres tournent d'un quart de tour vers la droite.

Ensuite s'effectue à chaque seconde le processus suivant : ceux qui se retrouvent face à face tournent d'un demi tour ; les autres restent immobiles.

Montrer qu'il arrive un moment où tous restent immobiles.

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Connaître la personnalité des mathématiciens célèbres n'est pas chose aisée. Leur oeuvre publiée a gommé toute trace d'émotion et de sentiment pour présenter les résultats mathématiques dans toute leur rigueur et leur vérité. Vérité souvent très belle sans doute et admirable, "honneur de l'esprit humain", mais abstraite et froide, figée dans son éternité comme un ciel étoilé par une nuit d'hiver glacée. Ce qui en a éloigné plus d'un, curieux de sciences mais rebuté par son aridité. A tort : les lettres écrites par les mathématiciens à leurs amis ou collègues nous révèlent des personnalités sensibles et passionnées, essayant de résoudre au mieux, non seulement les problèmes scientifiques qu'ils se sont posés mais aussi les mille et un tracas de leur vie quotidienne et les difficultés causées par les événements politiques et sociaux. Cette rubrique vous présente des lettres, ou de larges extraits que nous pensons représentatifs et révélateurs de la personnalité profonde, mais quelquefois méconnue, de nos illustres savants. Dans ce numéro :

Le voyage d'Abel en Europe. (suite)

Dans le précédent numéro, nous avions laissé Abel avec ses amis Boeck et Moller à Berlin, durant l'hiver de 1826. Cette étape n'était pas prévue, mais elle fut la chance du jeune mathématicien norvégien à cause de Crelle et de son Journal.

Abel à Hansteen - Dresde 20 mars 1826

Très honoré monsieur le Professeur. Je vous remercie vivement, monsieur le Professeur, de vos salutations amicales dans la lettre de Boeck. Vraiment j'avais peur de m'être exprimé dans ma dernière lettre d'une manière un peu singulière, et peut-être l'ai-je fait. En général il faut que je vous prie de passer avec moi sur bien des choses, surtout en ce qui regarde la forme. - Vous m'avez complètement rassuré pour ce qui est de mon avenir, et vous m'avez par là rendu un vrai service, car j'avais quelques craintes, trop, peut-être. - J'éprouve une joie infinie de rentrer au pays, et de pouvoir être en mesure de travailler tranquillement. J'espère que tout ira bien, je ne manquerai pas de sujets d'ici plusieurs années, et il m'en viendra encore pendant le voyage car justement il me passe en ce moment beaucoup d'idées par la tête. La mathématique pure dans son sens le plus strict doit être à l'avenir mon étude exclusive. Je veux m'appliquer de toutes mes forces à apporter un peu plus de clarté dans la prodigieuse obscurité que l'on trouve incontestablement aujourd'hui dans l'analyse. Elle manque à tel point de plan et d'ensemble, qu'il est vraiment tout à fait merveilleux qu'elle puisse être étudiée par tant de gens, et le pis est qu'elle n'est pas du tout traitée avec rigueur. Il n'y a que très peu de propositions, dans l'analyse supérieure, qui soient démontrées avec une rigueur décisive. Partout *on trouve la malheureuse manière de conclure du particulier au général, et il est très singulier qu'avec une pareille méthode, il ne se trouve malgré tout que peu de ce qu'on appelle paradoxes. Il est vraiment très intéressant d'en rechercher la raison. - A mon avis cela provient de ce que les fonctions dont l'analyse s'est occupée jusqu'ici peuvent, la plupart, être exprimées au moyen de puissances. Aussitôt que d'autres interviennent, ce qui, il est vrai, n'arrive pas souvent, alors ça ne va plus, et de conclusions fausses découlent une foule de propositions incorrectes qui s'enchaînent. - J'en ai examiné plusieurs, et j'ai été assez heureux pour les tirer au clair [la plupart]. Pourvu qu'on emploie une méthode générale, ça va encore ; mais j'ai dû être extrêmenent circonspect, car les propositions une fois admises sans démonstration rigoureuse (c'est à dire, sans démonstration) se sont si fortement enracinées en moi, que je suis à chaque instant exposé à m'en servir sans y regarder de plus près. Ces menus travaux figureront dans le Journal publié par Crelle. - J'ai vraiment fait en cet homme une connaissance tout-à-fait excellente, et je ne puis assez louer mon heureuse étoile qui m'a conduit à Berlin. En vérité, je suis au fond un homme chanceux. Il y a peu de gens, il est vrai, qui s'intéressent à moi, mais ceux-là me sont infiniement précieux, parce qu'ils m'ont témoigné une si extrême bonté. Pourvu que je réponde en quelque mesure aux espérances qu'ils ont en moi ; car ce doit être dur de voir la peine qu'on se donne en faveur de quelqu'un perdue. - Il faut que je vous raconte une offre que m'a faite Crelle avant mon départ de Berlin. Il voulait absolument me persuader de rester à Berlin pour toujours, et me décrivait les avantages que j'en pourrais avoir. Si je voulais, il m'offrait la direction du Journal, qui réussit bien, même pécuniairement. Il semblait vraiment que cela lui tint à coeur, mais naturellement je refusai. Cependant je dus exprimer mon refus sous une forme voilée, disant que je le ferais si je ne trouvais pas de quoi vivre dans mon pays (ce que je ferais en effet). Comme conclusion, il dit qu'il renouvellerait son offre n'importe quand je voudrais. Je ne peux nier que cela m'a beaucoup flatté, mais n'étais-ce pas aussi bien joli ? Je dus au moins lui promettre une chose très formellement, savoir, de revenir à Berlin avant la fin de mon voyage à l'étranger, et je peux en retirer du reste le plus grand profit. Il m'a donné en effet promesse tout-à-fait sûre de me procurer un éditeur pour mes mémoires plus étendus, et même, croiriez vous ? avec des honoraires importants. Nous avons d'abord examiné entre nous si nous publierons ensemble de temps en temps une suite de travaux étendus, et cela devait commencer tout de suite ; mais après un plus mûr examen, et après consultation avec un libraire à qui l'édition fut offerte, on considéra comme le mieux d'attendre jusqu'à ce que le Journal fût tout-à-fait lancé. Quand je reviendrai à Berlin, j'espère que notre plan pourra se réaliser. N'est-ce pas magnifique ? et n'ai-je pas raison de me féliciter d'être venu à Berlin ? Il est vrai que je n'ai rien appris des autres pendant mon séjour, mais je n'ai pas non plus considéré cela comme le but véritable de mon voyage. Les relations doivent être l'affaire principale en vue de l'avenir ? N'est ce pas votre avis ? (...).*

Vous écrivez dans votre lettre à Boeck, que vous vous demandez ce que je veux faire à Leipzig et aux bords du Rhin, mais j'aimerais savoir ce que vous direz si je vous *raconte maintenant que je vais aller à Vienne et en Suisse ? J'avais d'abord pensé aller directement de Berlin à Paris, ce que j'espérais faire en compagnie de Crelle, mais il a eu des empêchements, et j'aurais donc voyagé seul. Or je suis ainsi fait que je ne supporte pas du tout, ou du moins très difficilement, d'être seul. Je deviens alors tout triste, et ne je suis pas alors dans la meilleure disposition pour faire quelque chose. Je me suis donc dit que le mieux était de partir avec Boeck etc. pour Vienne, et je peux aussi justifier cela, ce me semble, puisqu'à Vienne il y a Littrow, Burg et d'autres. Ce sont vraiment des mathématiciens distingués, et à cela s'ajoute que je ne voyagerai guère qu'une fois dans ma vie. Peut-on me reprocher de désirer aussi voir quelque chose de la vie et des manières du sud. Je peux aussi travailler assez bien pendant ce voyage. Une fois à Vienne, pour aller à Paris, la ligne droite traverse presque la Suisse. Pourquoi n'en verrais-je pas aussi quelque chose ? Pardieu ! Je ne suis pourtant pas tout-à-fait denué du sens des beautés de la nature. Le voyage entier me fera arriver à Paris deux mois plus tard, et cela n'a pas d'importance. Je rattraperai bien cela. Ne croyez vous pas qu'un tel voyage me fera du bien ? De Vienne à Paris je voyagerai probablement en compagnie de Keihlau. Alors nous nous mettrons furieusement au travail. - Je pense que ça ira bien...*

Comme on le voit, Abel continue à n'en faire qu'à sa tête, alors que la bourse de voyage qui lui était offerte par l'Université de Christiania devait le mener en priorité chez Gauss et à Paris. Gauss était à ce moment là au sommet de sa gloire. Installé à Göttingen, il y vivait, admiré mais assez isolé et sans doute peu compris des mathématiciens allemands de l'époque qu'il dépassait de très loin par son génie. Gauss n'éprouvait aucun désir de s'entourer d'élèves, préférait entretenir une correspondance scientifique avec quelques amis choisis et publiait de temps en temps, après des années de mise au point un de ses chefs-d'oeuvres incomparables de clarté et de profondeur.

Le jeune Abel était sûrement décidé à respecter la demande de l'Université de Christiania pour lui rendre visite, mais en même temps, il appréhendait beaucoup une telle rencontre. Gauss ne s'était pas manifesté après la publication d'Abel sur l'équation du 5e degré. De plus, le jeune étudiant avait eu le malheur de faire parvenir à l'ami et correspondant de Gauss, Schumacher, à Altona près de Hambourg, un petit article "*Sur l'influence de la lune sur le mouvement du pendule*" qui contenait une grossière erreur que Schumacher releva aussi tôt, et lui fit refuser la publication dans sa revue les "*Astronomische Nachrichten*". Schumacher en avait informé son collègue Gauss ajoutant néamoins que "*quiconque aurait jugé Abel sur la base de cet article, aurait commis une grossière erreur*". On comprend que le jeune homme ne pouvait se sentir à l'aise en face du "princeps mathematicorum" et que tous les prétextes furent bons pour retarder le plus possible sa visite, peut être dans l'espoir secret que Gauss manifeste tôt ou tard son intérêt pour l'un ou l'autre article qu'Abel publiait maintenant régulièrement, dans chaque livraison du Journal de Crelle. Il n'en fut rien, non pas sans doute, que Gauss fut indifférent aux travaux d'Abel, on le verra, mais de tempérament réservé et prudent, il ne se manifestait guère en public. Toujours est-il que, jeune et inexpérimenté, Abel se laissa effrayer par des récits sur son orgueil et son caractère inabordable. Longtemps et régulièrement, il écrivit aux professeurs de Christiania son intention prochaine d'accomplir sa visite.

"Göttingen a, il est vrai, une bonne bibliothèque, mais c'est tout; car Gauss y est le seul qui sache quelque chose, et il est absolument inabordable. Pourtant je dois aller à Göttingen, bien entendu."(1)

"Il est probable que je reste ici à Berlin jusqu'à la fin de février ou jusqu'en mars, et que je passe ensuite par Leipzig et Halle pour aller à Göttingen (non pas pour Gauss car il est, paraît-il, insupportablement orgueilleux, mais pour la bibliothèque qui est, dit-on magnifique)."(2)

un peu plus tad, de nouveau à Hansteen :

"A Göttingen je ne resterai que peu de temps, puisqu'il n'y a rien à y gagner. Gauss est inabordable, et la bibliothèque ne peut être meilleure qu'à Paris."

Finalement Abel ira à Paris sans passer par Göttingen, remettant cette visite au voyage de retour.

"Je vais en effet bientôt quitter Paris où je n'ai plus rien à pêcher, et j'irai tout d'abord à Göttingen faire le siège de Gauss s'il n'est pas trops cuirassé d'orgueil."(3)

Mais il était trop tard, il lui restait juste assez d'argent de sa bourse pour atteindre Berlin, retrouver Crelle, son seul véritable soutien.

"L'imagination, dira Mittag-Leffler, se plaît à se représenter les résultats possibles d'un échange personnel de vues entre un Abel et un Gauss. Cependant, comme il devait mourir si jeune, une visite à Göttingen aurait probablement diminué sa place dans l'histoire des mathématiques. Il aurait trouvé Gauss depuis des années en possession de quelques-unes de ses propres découvertes (...) et la postérité n'aurait pu, après cela, savoir ce qui appartenait primitivement à Abel, et ce qu'il aurait appris de Gauss".

Lorsque Gauss eut connaissance de l'article d'Abel : "*Recherches sur les fonctions elliptiques*", il répondit à Crelle qui lui proposait de publier ses propres recherches sur le sujet :

"Abel m'a devancé pour un bon tiers de mon travail. Il a suivi exactement la même voie où je suis entré en 1798. Aussi ne suis-je pas surpris qu'il soit parvenu, pour la plus grande part, au même résultat. Comme de plus il montre dans sa composition une acuité, une profondeur et une élégance extrêmes, je me vois délié de l'obligation de rédiger mes propres recherches."

(1) Première Lettre à Hansteen; Berlin; fin 1825
(2) Lettre à Hohmboe; Berlin; 16 janvier 1826
(3) Lettre à Hohmboe; Paris; 24 octobre 1826

Courrier des lecteurs

Maths, physique,... informatique

Jean Lefort

L'article de Jean-Luc Gasser dans le numéro 88 de l'Ouvert m'inspire les remarques suivantes. Il n'est pas question pour moi de mettre en cause le bien fondé de la réflexion menée dans le groupe maths-physique de l'irem de Strasbourg. Je ne peux que louer une telle démarche visant à modifier le comportement un peu sectaire de chaque discipline en l'ouvrant à la réalité et aux exigences de l'autre. Je voudrais seulement montrer que les problèmes posés dans l'article de notre collègue transcendent largement les deux disciplines citées, qu'au sein même des mathématiques certains problèmes existent et qu'il pose d'une façon plus général la difficulté de savoir ce que l'on entend par culture scientifique que le Ministère, à travers les programmes et en particulier ceux des sections littéraires, semble vouloir promouvoir.

1) Classement

L'usage de plus en plus répandu de l'informatique montre que l'organisation des ensembles de nombres n'est pas la même en informatique et en mathématique. Les exemples simples ci-dessous empruntés à MAPPLE montrent qu'un entier n'est pas un nombre à virgule mais... qu'on peut le transformer en nombre à virgule (ou nombre décimal) alors qu'un nombre à virgule entier ne peut pas être transformé en entier !

```
> whattype(5);
                              integer
> whattype(5.);
                              float
> is(5,float);
                              false
> convert(5,float);
                              5.
> convert(5.,integer);
Error, unable to convert
```

Le problème est voisin avec les nombres fractionnaires (ou rationnel), mais comme les simplifications sont automatiques, il y a reconnaissance des entiers et les conversions se font dans les deux sens :

```
> whattype(22/10);
                              fraction
> whattype(50/10);
                              integer
> convert(22/10,float);
                              2.200000000
> convert(2.2,fraction);
```

$$11/5$$

Ceci nous permet de transformer un nombre à virgule entier en un entier, mais il faut aider le logiciel en lui indiquant les étapes :

```
> x:=convert(5.0,fraction);
```

$$x := 5$$

```
> whattype(x);
```

integer

Peut-on conclure que le type "integer" ($\mathbb{N}$) est inclu dans le type "float" ($\mathbb{D}$) et que le type "float" ($\mathbb{D}$) est inclu dans le type "fraction" ($\mathbb{Q}$) ? Ce n'est pas tout à fait ça et il apparaît des subtilités de notation qui font que les réponses informatiques (pour ce logiciel, mais aussi pour bien d'autres) sont fausses alors que les réponses mathématiques sont vraies !
Quant à la définition des réels, l'informatique ne sait pas ce que c'est. On s'en doute puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres représentables en machine. Au moins pourrait-on penser que les nombres algébriques (qui sont dénombrables comme les rationels) et que certains classiques comme π ou e pourraient apparaître comme tels. Il n'en est rien :

```
> whattype(sqrt(2));
```

^

```
> evalf(sqrt(2));
```

1.414213562

```
> whattype(Pi);
```

string

```
> evalf(Pi);
```

3.141592654

```
> whattype(exp(1));
```

function

```
> evalf(exp(1));
```

2.718281828

```
> whattype(sin(2));
```

function

```
> evalf(sin(2));
```

.9092974268

```
> whattype(sin(x));
```

function

```
> a:=solve(x^5-3*x+1);
```

$$a := \mathrm{RootOf}(\_Z^5 - 3\,\_Z + 1)$$

```
> whattype(a);
```

function

```
> evalf(a);
```

-1.388791984

Nous voyons donc que si un certain nombre d'expressions sont bien reconnus comme des nombres en ce sens que le logiciel peut leur attribuer des valeurs numériques approchées, leur statut n'est pas, à vraiment parler, celui de nombres comme l'indique leur "type" qui prend différentes formes que rien, d'un point de vue ensembliste ne permet de justifier. De plus, il est impossible de les classer par ordre croissant quand il s'agit de réels (sauf à utiliser les valeurs approchées).

```
> sort([sqrt(2),Pi,exp(1),a]);
```

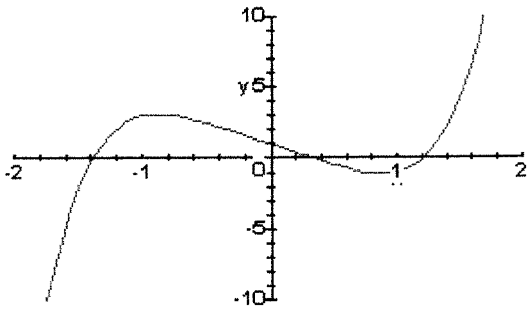
$$[\pi, \exp(1), \sqrt{2}\ , \mathrm{RootOf}(\_Z^5 - 3\,\_Z + 1)]$$

```
> sort([evalf(sqrt(2)),evalf(Pi),evalf(exp(1)),evalf(a)]);
```

[-1.388791984, 1.414213562, 2.718281828, 3.141592654]

Plus difficile à faire passer pédagogiquement, l'équation du cinquième degré semble n'avoir qu'une solution a , alors qu'elle en a manifestement 3 réelles (et 2 complexes) !

```
> plot(x^5-3*x+1,x=-2..2,y=-10..10);
```



Nous pouvons conclure provisoirement en disant que le logiciel ne connait pas vraiment la structure emboîtée des ensembles de nombres. Nous nous en doutions. Mais quelle peut être l'approche qu'en ont nos élèves possesseurs d'une T.I. 92 ?

2) Langage

Il m'a toujours paru important d'exercer les élèves à la recherche. Or un chercheur ne connaît pas, en mathématiques les hypothèses exactes du théorème qu'il veut démontrer, en physique les paramètres qu'il pourra négliger pour une étude prédictive de tel phénomène. Bien sûr le bac, pour ne citer que cet examen, n'a pas pour but de recruter des chercheurs. Mais l'esprit de recherche, de curiosité, de questionnement systématique n'est-il pas à valoriser chez nos élèves pour en faire des citoyens pleinement responsables de leurs actes et non pas des personnes qui font leur petit travail sans s'occuper des incidences ou de ce qui se passe à côté ? Imaginons dans la vie professionnelle une séance de travail entre plusieurs collaborateurs. Quelqu'un lance une phrase qui pourrait être importante, mais elle n'est bien évidemment pas formulée de façon rigoureuse, il y a, dans un premier temps, beaucoup de non-dits, beaucoup d'à-peu-près. C'est celui qui saura la reprendre, la reformuler, la repréciser qui apparaîtra comme le leader incontesté du groupe. Que faisons nous dans notre enseignement, à travers l'ensemble des disciplines, pour former nos élèves à cet aspect de la socialisation au sens le plus large possible ?

Le problème de physique parle de "phase de démarrage", et sous-entend que cette phase de démarrage commence à l'instant t=0 . Certes, c'est du non-dit ; et alors ? Bien sûr, nous sommes dans une société multiculturelle, or le non-dit varie d'une culture à l'autre et c'est pourquoi il faut essayer de préciser au maximum toutes les données. Mais la quête de l'absence de non-dit est infinie. N'est-ce pas le rôle du professeur d'enseigner une certaines culture scientifique (mathématique ou physique, ce n'est pas la même), culture unificatrice de celle des élèves, et où certains non-dits devraient être évidents ?

Il me gêne beaucoup plus de bâtir tout un problème autour de la suite 0 , 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 (distance parcourue au bout d'un nombre entier de secondes d'après la figure 1) pour finir par démontrer que la fonction sous-jacente est $y = x^2$. Où sont les maths et la physique ? Et ceci est indépendant du choix de la définition de la dérivée (dérivée ordinaire ou dérivée symétrique). À trop vouloir simplifier les valeurs numériques on finit par poser des problèmes dont l'intérêt physique est nul. N'oublions pas qu'un physicien (mais aussi un mathématicien, par exemple dans une phase de recherche d'une formule de dénombrement) doit établir des lois, et des lois qui doivent être les plus simples possibles pour l'explication et la prédiction du phénomène étudié. N'importe quel chercheur et n'importe quel candidat bachelier n'a pas besoin d'une étude de dérivation pour aboutir à la fonction "carrée" à partir de la suite précédente ! Si le problème posé n'a pour but que de vérifier la connaissance d'une certaine formule, alors autant la demander à l'aide d'un questionnaire !

Je rejoins tout à fait notre collègue J.L. Gasser dans sa troisième partie. Mais autant je suis d'accord avec sa conclusion relative à l'approximation du nombre dérivé, car ces différentes approximations sont utilisées en analyse numérique dont les enseignants de physique devraient avoir des notions (et ceux de maths aussi mais c'est peut-être moins urgent), autant je ne suis pas d'accord avec celle relative aux fonctions linéaires et affines. Chaque métier a son jargon. Il me paraît souhaitable de savoir jongler avec ces divers jargons, de ne pas confondre les sens d'un même mot. C'est une situation classique en français courant (cf annexe) mais c'est surtout un signe de maturité et de respect d'autrui. Par suite cela veut dire aussi que les enseignants de chaque discipline sont au courant de ces autres sens au moins dans les disciplines voisines. On ne peut pas demander à nos élèves de respecter la diversité des cultures si nous-mêmes ne respectons pas celles très proches des autres disciplines scientifiques. Je remercie les membres du groupe maths-physique d'oeuvrer en ce sens.

3) Annexe

Voici dix phrases utilisants le mot "mouton" et que le contexte éclaire suffisamment. Si nous devions traduire ces phrases en anglais il faudrait utiliser dix mots différents qui sont indiqués entre parenthèses.
1) Le berger garde ses moutons (*sheep*).
2) Il fait froid, je vais mettre mon mouton (*sheepskin*).
3) Les moutons parsemaient la mer (*white horses*).
4) Le ménage n'avait pas été fait et des moutons trainaient ça et là (*fluff*).
5) La police avait placé un mouton dans la cellule du truand (*mouton*).
6) Ce type est un mouton, il gobe n'importe quoi ("*une périphrase*").
7) J'ai demandé au boucher s'il avait du mouton (*mutton*).
8) Le mouton vermoulu avait cédé entraînant la chute de la cloche (*stock*).
9) Il enfonçait les pilotis à l'aide d'un mouton (*beetle*).
10) Revenons à nos moutons (*subject*).

A VOS STYLOS

PROBLÈME 49

Énoncé (proposé par R. Kern) :

Dans un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB, et α, β, γ les mesures respectives des angles en A, B et C.

1) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 2\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 2\beta$.

2) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 3\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 3\beta$.

Solution (par J. Dautreveaux) :

On se propose de rechercher tous les triangles ABC à côtés entiers, caractèrisés par une certaine relation entre leurs angles.

Soient, selon l'usage, a, b, c les mesures des côtés respectivement opposés aux sommets A, B, C : ils satisfont aux inégalités $0 < |a-b| < c < a+b$ (et à trois autres analogues), ou encore $c > 0$ et $(a-b)^2 < c^2 < (a+b)^2$.

Soient d'autre part α, β, γ les mesures des angles ayant respectivement pour sommets A, B, C . Inversement, trois nombres réels α, β, γ peuvent représenter les mesures des trois angles intérieurs d'un triangle si et seulement si on a :

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ et $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ou, ce qui est équivalent,

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha + \beta < \pi$, avec $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$.

On observe que, de par ces conditions, on a (conditions surabondantes) :

$0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, $0 < \alpha + \beta < \pi$.

Dans la question posée, existent en fait deux problèmes indépendants, que l'on traitera donc de façon distincte.

<u>*1er cas*</u>. Condition $\cos\alpha = \cos 2\beta$

Cette condition se traduit par : $\alpha = 2\beta + 2k\pi$ ou $\alpha = -2\beta + 2k\pi$ En vertu des conditions précédemment énoncées, la première solution conduit à $k = 0$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{3}$, la seconde à $k = 1$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ (pour $0 < \alpha < \pi$) qui est incompatible avec $\pi < \beta < 2\pi$ (provenant de $\alpha + \beta < \pi$) , ce qui fait que la contrainte $\cos\alpha = \cos 2\beta$ n'admet que la seule solution :

<u>$\alpha = 2\beta$, $\gamma = \pi - 3\beta$,</u> avec $0 < \beta < \frac{\pi}{3}$.

La relation $\alpha = 2\beta$ équivaut donc dans ce cas à $\cos\alpha = \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$, soit en revenant aux côtés grâce aux relations classiques entre côtés et angles d'un triangle : $\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{\left(a^2 - b^2 + c^2\right)^2}{2a^2c^2} - 1$, soit

$$b\left[a^4 - 2a^2b^2 + \left(b^2 - c^2\right)^2\right] - a^2c\left(b^2 + c^2 - a^2\right) =$$

$$a^4(b + c) - a^2\left[c\left(b^2 + c^2\right) + 2b^3\right] + b\left(b^2 - c^2\right)^2 = 0 \quad , \quad \text{soit :}$$

$$a^2c\left(b^2 + c^2 - a^2\right) = b\left[\left(a^2 - b^2 + c^2\right)^2 - 2a^2c^2\right] =$$

$$= b\left[a^4 - 2a^2\left(b^2 - c^2\right) + \left(b^2 - c^2\right)^2 - 2a^2c^2\right]$$

ou encore, en ordonnant par rapport à a et divisant par b + c :

$a^4 - a^2\left(2b^2 - bc + c^2\right) + b(b - c)^2(b + c) = 0$, qui se factorise aisément en :

$\left[a^2 - b(b + c)\right]\left[a^2 - (b - c)^2\right] = 0$ et, puisque $a > |b - c|$, le second facteur est non nul et la seule solution est : $a^2 = b(b + c)$; la condition $|b - c| < a < b + c$ se traduit alors par : $(b - c)^2 < b(b + c) < (b + c)^2$.

L'inégalité de droite se réduit à $b < b + c$ et est certainement vérifiée , celle de gauche s'écrit alors :

$b^2 - 2bc + c^2 < b^2 + bc$, soit $c^2 < 3bc$ ou $c < 3b$.

On se trouve par suite ramené à résoudre en entiers l'équation $a^2 = b(b + c)$ avec la condition $c < 3b$.

On ne restreint pas la généralité du problème en supposant que les entiers a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble , car si (a,b,c) est une solution du problème , (λa,λb,λc) en est une autre, pour tout entier $\lambda \geq 1$. Dans cette hypothèse, b et c sont nécessairement premiers entre eux car sinon ils admettraient un diviseur premier commun autre que 1, lequel diviserait a . Dès lors, b et b + c sont eux aussi premiers entre eux, de sorte qu'il existe deux entiers m et n premiers entre eux , tels que :

$b + c = m^2$, $b = n^2$ d'où $a^2 = m^2n^2$, soit $a = mn$.

et la condition $c < 3b$ se traduit par $m^2 < 4n^2$, soit $m < 2n$.

Dès lors la solution réside dans les formules :

$a = mn$, $b = n^2$, $c = m^2 - n^2$, où m et n sont deux entiers premiers entre eux vérifiant la double inégalité $n < m < 2n$.

<u>Exemples :</u> $m = 3$, $n = 2$ $(a = 6$, $b = 4$, $c = 5)$
$m = 4$, $n = 3$ $(a = 12$, $b = 9$, $c = 7)$

<u>Remarque 1</u> . Existe-t'il des triangles rectangles satisfaisant à la condition $\alpha = 2\beta$?

Là on a la solution $0 < \beta < \dfrac{\pi}{3}$, $\alpha = 2\beta$, $\gamma = \pi - 3\beta$, et il est clair que le triangle ne saurait être rectangle en B ; s'il l'est en A on a $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{4}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$, soit un triangle rectangle isocèle qui ne peut être à côtés entiers ; s'il l'est en C on aura $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, soit un demi-triangle équilatéral qui, ici aussi, ne saurait être à côtés entiers. Il n'existe donc aucun triangle rectangle solution du problème .

Remarque 2 . La condition $\alpha = 2\beta$ équivaut à $\cos\alpha = \cos 2\beta$ et $\sin\alpha = \sin 2\beta$. En utilisant $\sin\alpha = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$ on obtient aisément entre les côtés la relation $a = 2b\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$, soit $a^2c = b(c^2+a^2-b^2)$, ou encore $a^2(b-c) = b(b^2-c^2)$, soit $a^2 = b(b+c)$ sous réserve que $b \neq c$: or, on ne peut avoir $b = c$, équivalent à $\beta = \gamma$ que si $\beta = \frac{\pi}{4}$, soit un triangle rectangle isocèle dont on sait qu'il ne peut être solution du problème posé . D'ailleurs on vérifie aisément que la relation $a^2 = b(b+c)$ est néammoins vraie .

Remarque 3 . Réciproquement que dire d'un triangle vérifiant la relation $a^2 = b(b+c)$?

On a facilement : $a^2 = b^2 + bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, d'où $\cos\alpha = \frac{c-b}{2b}$;

par ailleurs $\cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \frac{c^2+b^2+bc-b^2}{2ac} = \frac{c+b}{2a}$, de sorte que :

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{(c+b)^2}{2a^2} - 1 = \frac{(c+b)^2}{2b(b+c)} - 1 = \frac{b+c}{2b} - 1 = \frac{c-b}{2b} = \cos\alpha \ .$$

Et de même on aura aussi :

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha \ , \quad \cos\beta = \frac{b+c}{2a} \quad \text{d'où} \quad \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{2b(b+c)}{2a^2}\sin\alpha = \sin\alpha \ .$$

2ème cas : $\cos\alpha = \cos 3\beta$

Cette condition se traduit par $\alpha = 3\beta + 2k\pi$ ou par $\alpha = -3\beta + 2k\pi$. La première hypothèse , compte tenu de $0 < \beta < \pi$, donne $2k\pi < \alpha < 3\pi + 2k\pi$, de sorte qu'il existera α tel que $0 < \alpha < \pi$ si $]0,\pi[\cap]2k\pi, 2k\pi + 3\pi[\neq \emptyset$, ce qui ne peut se produire que si $k = 0$ ou $k = -1$. On a donc les deux possibilités :

(1) $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 3\beta$, $\gamma = \pi - 4\beta$, et

(2) $\frac{2\pi}{3} < \beta < \frac{3\pi}{4}$, $\alpha = 3\beta - 2\pi$, $\gamma = 3\pi - 4\beta$.

Dans la deuxième hypothèse , on aura $2k\pi - 2\pi < \alpha < 2k\pi$, ce qui avec $0 < \alpha < \pi$ n'est possible qu'avec $k = 1$, et donne la solution :

(3) $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{2\pi}{3}$, $\alpha = 2\pi - 3\beta$, $\gamma = 2\beta - \pi$.

Il existera donc trois types de triangles satisfaisant à la condition proposée. Cette condition s'écrit encore $\cos\alpha = \cos 3\beta = \cos\beta(4\cos^2\beta - 3$, soit comme précédemment en revenant aux côtés a, b, c du triangle

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}\left[\frac{4(a^2-b^2+c^2)^2}{4a^2c^2} - 3\right]$$, soit encore

$$a^3c^2(b^2+c^2-a^2) = b(a^2-b^2+c^2)\left[(a^2-b^2+c^2)^2 - 3a^2c^2\right]$$, ou

$$b(a^2-b^2+c^2)\left[c^4 - c^2(a^2+2b^2) + (a^2-b^2)^2\right] - a^3c^2\left[c^2 - (a^2-b^2)\right] = 0$$, soit

aussi en développant par rapport à c : :

$$bc^6 - (a^3+3b^3)c^4 + (a^2-b^2)(a^3-3b^3)c^2 + b(a^2-b^2)^2 = 0 \ .$$

Ce polynôme se factorise immédiatement en :

$\left[bc^2 - (a+b)(a-b)^2\right]\left[c^2 - b(b-a)\right]\left[c^2 - (a+b)^2\right] = 0$. Comme $c < a + b$, le troisième facteur est certainement non nul, et il reste entre les côtés l'une ou l'autre des deux relations : $bc^2 = (a+b)(a-b)^2$ et $c^2 = b(b-a)$, avec la restriction supplémentaire $(a-b)^2 < c^2 < (a+b)^2$ et $c > 0$ qui conditionne l'existence d'un triangle dont les mesures des côtés sont précisément a, b, c . Il reste à relier ces deux conditions aux solutions obtenues pour les valeurs des angles .

On remarque que l'ensemble des cas (1) et (2) est caractèrisé (compte tenu de $\cos\alpha = \cos 3\beta$) par $\sin\alpha = \sin 3\beta$, le cas (3) l'étant par $\sin\alpha = -\sin 3\beta$. Comme $\frac{\sin 3\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}(3 - 4\sin^2\beta) = \frac{b}{a}(4\cos^2\beta - 1)$, on se trouve ramené à étudier

$$4\cos^2\beta - 1 = \frac{4(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2c^2} - 1 = \frac{c^4 + 2c^2(a^2-b^2) + (a^2-b^2)^2 - a^2c^2}{a^2c^2} =$$

$$= \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2-2b^2}{a^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2c^2}$$

1°) Avec $c^2 = \frac{(a+b)(a-b)^2}{b}$ la condition $c^2 > (a-b)^2$ est satisfaite car $a + b > b$ mais $c^2 < (a+b)^2$ s'écrit

$(a-b)^2 < b(a+b)$, soit $a^2 < 3ab$, ou $a < 3b$; on doit avoir aussi $c < 0$ et , évidemment $a \neq b$ (sinon on aurait $c = 0$) . On a alors :

$$4\cos^2\beta - 1 = \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b} + \frac{a^2-2b^2}{a^2} + \frac{b(a^2-b^2)^2}{a^2(a+b)(a-b)^2} =$$

$$= \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^2b} + 1 - \frac{2b^2}{a^2} + \frac{b(a+b)}{a^2} = 1 + \frac{b(a-b)}{a^2} + \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^2b}$$

$$= 1 + \frac{a^2(a-b)}{a^2 b} = \frac{a}{b} \quad \text{de sorte que} \quad \frac{\sin 3\beta}{\sin\alpha} = 1 \quad , \quad \text{ou} \quad \sin\alpha = \sin 3\beta \ .$$

Cette solution correspond donc aux cas (1) et (2) . Pour discriminer les cas (1) et (2), on écrit $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = 4\cos^2\beta - 1$: dans le cas (1) on a $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ d'où

$$\cos\beta > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2\beta > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad 2\cos^2\beta > 1 \quad \text{et} \quad 4\cos^2\beta - 1 > 1 \quad \text{d'où}$$

$a > b$; dans le cas (2) on aura $\frac{2\pi}{3} < \beta < \frac{3\pi}{4}$ d'où

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\beta < -\frac{1}{2}$ soit $\cos^2\beta < \frac{1}{2}$ ou $2\cos^2\beta < 1$ et $4\cos^2\beta - 1 < 1$ donc $a < b$. On obtient donc ainsi la distinction entre les cas (1) et (2) . Il en résulte que :

Lorsque $c^2 = \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{b}$, on obtient un triangle du type (1) $(\alpha = 3\beta)$ lorsque $b < a < 3b$, un triangle du type (2) $(\alpha = 3\beta - 2\pi)$ lorsque $a < b$.

Avec $c^2 = b(b-a)$, nous devons avoir $(a-b)^2 < c^2 < (a+b)^2$, et nous voyons que $c^2 > (a-b)^2$ ou $(b-a)^2$ est vrai si $a < b$ car $b > b - a$; d'autre part $c^2 < (a+b)^2$ est vrai aussi car $b(b-a) < a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 > -3ab$ est vrai. Alors aussi on calcule $4\cos^2\beta - 1$:

$$4\cos^2\beta - 1 = \frac{b(b-a)}{a^2} + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2 b(b-a)} = \frac{a^2 - ab - b^2}{a^2} - \frac{(a+b)^2(a-b)}{a^2 b}$$

$$\frac{b(a^2 - ab - b^2) - (a-b)(a^2 + 2ab + b^2)}{a^2 b} = -\frac{a^3}{a^2 b} = -\frac{a}{b} \quad \text{d'où} \quad \frac{\sin 3\beta}{\sin\alpha} = -1 \quad \text{et}$$

enfin $\sin 3\beta = -\sin\alpha$ d'où le cas (3) .

Lorsque $c^2 = b(b-a)$ on obtient un triangle du type (3) avec $a < b$.

Il ne reste plus qu'à trouver les triangles de l'espèce à côtés entiers ; on ne restreint pas la généralité du problème en supposant a, b, c premiers entre eux dans leur ensemble , car si (a,b,c) est une solution , $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ en est aussi une pour tout entier $\lambda \geq 1$.

<u>Types (1) et (2).</u> On a $c^2 = \frac{(a+b)(a-b)^2}{b}$, soit aussi: $\frac{a+b}{b} = \left(\frac{c}{|a-b|}\right)^2$.

Alors , il existe une fraction irréductible $\frac{m}{n}$ telle que $\frac{c}{|a-b|} = \frac{m}{n}$, m et n étant premiers entre eux, avec m > n (il en est de même de m^2 et n^2) et on pourra écrire : $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{m^2}{n^2}$ soit : $a+b = \lambda m^2$, $b = \lambda n^2$, soit $a = \lambda(m^2 - n^2)$ et $c = \mu m$, $|a-b| = \mu n = \lambda|m^2 - 2n^2|$; m et n étant premiers entre eux, il en est de même de n et $|m^2 - 2n^2|$, de sorte que nécessairement n divise λ : $\lambda = kn$, ce qui en définitive nous donnera :

$a = kn|m^2 - 2n^2|$, $b = kn^3$, $c = km|m^2 - 2n^2|$, et l'hypothèse que a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble nous imposera alors $k = 1$.

La discrimination entre les types (1) et (2) reposant sur les inégalités respectives $b < a < 3b$ et $a < b$, on obtient aisément dans les deux cas les conditions respectives $2n^2 < m^2 < 4n^2$ et $n^2 < m^2 < 2n^2$. Les solutions sont donc :

Pour le type (1) $(\alpha = 3\beta)$ (m et n premiers entre eux) :
$a = n(m^2 - n^2)$, $b = n^3$, $c = m(m^2 - 2n^2)$ avec $n\sqrt{2} < m < 2n$

Pour le type (2) $(\alpha = 3\beta - 2\pi)$ (m et n premiers entre eux) :
$a = n(m^2 - n^2)$, $b = n^3$, $c = m(2n^2 - m^2)$ avec $n < m < n\sqrt{2}$.

Type (3). On a $c^2 = b(b-a)$ (ce qui suppose évidemment $a < b$) . Ici, a et b sont nécessairement premiers entre eux, car tout diviseur premier commun à a et b, donc aussi à b et b - a diviserait c , ce qui est contraire à l'hypothèse que a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble. b et b - a sont alors premiers entre eux , leur produit étant un carré, chacun d'eux est lui-même un carré, de sorte qu'il existe deuxentiers m et n premiers entre eux tels que $b = m^2$, $b - a = n^2$ avec $m > n$. Alors on a bien sûr c = mn. Les solutions sont donc :

Pour le type (3) $(\alpha = 2\pi - 3\beta)$ (m et n premiers entre eux) :
$a = m^2 - n^2$, $b = m^2$, $c = mn$ avec $m > n$.

On a ainsi obtenu toutes les solutions .

Exemples :

Type (1) :	m = 3 , n = 2	(a = 10 , b = 8 , c = 3)
	m = 5 , n = 3	(a = 48 , b = 27 , c = 35)
Type (2) :	m = 4 , n = 3	(a = 21 , b = 27 , c = 8)
	m = 5 , n = 4	(a = 36 , b = 64 , c = 35)
Type (3) :	m = 2 , n = 1	(a = 3 , b = 4 , c = 2)
	m = 3 , n = 2	(a = 5 , b = 9 , c = 6)

Remarque : Existe-t'il des triangles rectangles solutions de ce problème ? Certainement pas pour les types (2) et (3) pour lesquels on sait par avance que l'angle β est obtus. Il reste pour le type (1), qui ne saurait être rectangle en B car $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$, que le cas du triangle rectangle en A ($\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{6}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$), demi-triangle équilatéral qui ne saurait être à côtés entiers , et celui du triangle rectangle en C ($\alpha = \frac{3\pi}{8}$, $\beta = \frac{\pi}{8}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$) qui lui non plus ne peut être à côtés entiers puisque $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel . Le cas des triangles isocèles apporte également une réponse négative car $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{7}$ sont irrationnels, les seules possibilités étant , $\alpha = \frac{3\pi}{5}, \beta = \frac{\pi}{5}, \gamma = \frac{\pi}{5}$ et $\alpha = \frac{3\pi}{7}, \beta = \frac{\pi}{7}, \gamma = \frac{3\pi}{7}$ pour le type (1) ; $\alpha = \frac{\pi}{7}, \beta = \frac{5\pi}{7}, \gamma = \frac{\pi}{7}$ pour le type (2) ; et enfin $\alpha = \frac{\pi}{5}, \beta = \frac{3\pi}{5}, \gamma = \frac{\pi}{5}$ pour le type (3) .

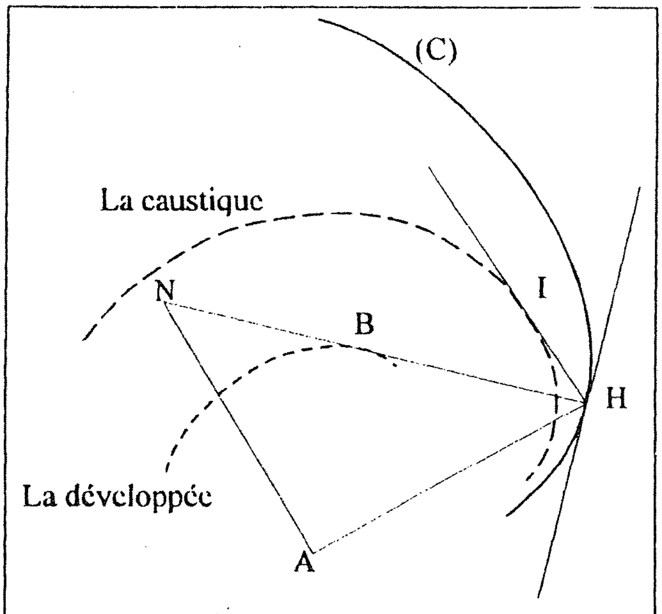
PROBLÈME 50

Énoncé (proposé par A. Stoll, IREM de Strasbourg) :

<u>Données</u> :
- Une courbe plane (C) “suffisamment régulière”
- un point A dans le plan de la courbe (C)

<u>Notations</u> : (cf. figure)

- H un point de la courbe (C)
- B désigne le centre de courbure correspondant à H
- N le point de la normale à (C) en H tel que (AN) soit perpendiculaire à (AH)
- I est le point de la caustique issue de A



les angles $\widehat{AHB}$ et $\widehat{BHI}$ sont égaux

<u>Montrer que</u> :

$$\boxed{\frac{|2HN - HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}}$$

Applications :

1. En déduire une construction géométrique du centre de courbure d'une parabole en un point quelconque.
2. Montrer que la caustique d'une spirale logarithmique par rapport à son centre est une spirale logarithmique identique.
3. Trouver d'autres applications de la formule ci-dessus.

PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$tg\,x = \frac{x - \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{1.3}{1.2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \frac{a(a+2)(a+4)}{a(a+1)(a+2)}\frac{x^3}{3!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{a(a+2)}{a(a+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des 2−mélanges réguliers (pour la définition d'un 2−mélange, voir l'article sur les tours de cartes dans le présent numéro de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.