L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 92 – SEPTEMBRE 1998 I.S.S.N. 0290 - 0068

NOTRE COUVERTURE :

Elle présente un portrait d'Abel (1802-1829) qui nous accompagne déjà depuis plusieurs numéros, par l'intermédiaire des lettres reproduites dans la rubrique *L'Histoire des mathématiques par correspondance.*

SOMMAIRE

N° 92 – SEPTEMBRE 1998

◇ *Notre couverture : Portrait d'Abel* i

◇ *Un travail interdisciplinaire en français et en mathématiques*
par le groupe math-français 1

◇ *Lemniscatomie, ou comment découper une lemniscate en parties égales,*
◇ *à la règle et au compas.*
par J.-P. FRIEDELMEYER 20

◇ *Fiabilité du lanceur Ariane*
par J. LEFORT 33

◇ *Une classe bousculée par les nouvelles technologies relate son expérience*
par G. KUNTZ 39

◇ *Rallye Mathématique d'Alsace 1998* 44

◇ *L'Histoire des Mathématiques par correspondance*
par J.-P. FRIEDELMEYER 51

◇ *A vos stylos*
par D. DUMONT 60

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03-88-41-64-40
Fax : 03-88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
http ://irma.u-strasbg.fr/irem
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
◇ *Prix du numéro* : 35.– F

UN TRAVAIL INTERDISCIPLINAIRE EN FRANCAIS ET EN MATHEMATIQUES

Par le groupe math-français de l'Irem de Strasbourg

D. Kremer, M. Vaillant, I. Beck, G. Didierjean, C. Dupuis, M.A. Egret, G. Robert, M. Ziegler

INTRODUCTION

Passant longtemps pour être opposées, comme semblaient l'être les matières, les démarches pédagogiques des enseignants de français et de mathématiques se sont fortement rapprochées au cours de cette dernière décennie.

En effet en raison de l'accès le plus large de classes d'âge entières au collège, le professeur de mathématiques s'est vite trouvé confronté à une difficulté nouvelle pour lui et qui dépasse largement son champ habituel d'intervention : dans les problèmes qu'il propose, le premier écueil que rencontrent les élèves est celui de la lecture du texte de l'énoncé.

En mathématiques comme en français, l'importance d'un apprentissage spécifique de la lecture, mais aussi de l'écriture s'impose. Plus généralement, apparaît avec acuité la difficulté que les élèves ont à aborder au collège et même encore au lycée des textes autres que narratifs : textes scientifiques (en biologie, en économie, en géographie, en mathématiques), textes argumentatifs *etc.* (en français, en philosophie, notamment).

A partir de la quatrième apparaissent d'autres difficultés, liées à l'abstraction grandissante des notions enseignées, des écrits rencontrés et à produire, ainsi qu'aux premiers pas dans la démonstration et dans l'argumentation.

Conscients de la nécessité d'affronter ensemble et dans une démarche commune ce problème, des professeurs de français et de mathématiques se sont retrouvés sous la direction de R. Duval, depuis 1990 à l'I.R.E.M. de Strasbourg afin de mener une réflexion alimentée par les sensibilités et les points de vue différents des enseignants des deux matières.

Une démarche commune

Notre réflexion nous a conduits à mener notre travail selon deux axes :

— un travail sur l'activité de compréhension de textes

— un travail sur l'activité de raisonnement proprement dite (à propos de la démonstration en mathématiques et de l'argumentation en français).

Nous ne pensons pas que l'option choisie parfois en mathématiques de simplifier à l'extrême la prise d'information dans les énoncés de problèmes en écrivant des phrases les plus courtes possible et ne contenant qu'une seule information soit de nature à faire progresser l'élève et à lui permettre d'aborder dans le futur des textes plus complexes.

Nous estimons au contraire que l'élève doit, dans ses apprentissages, acquérir les outils permettant d'aborder, de façon autonome, un texte dans toute sa complexité, de relever et d'organiser les informations qui s'y trouvent, de les hiérarchiser, d'établir les liens logiques qui les relient.

La collaboration entre enseignants de mathématiques et de français trouve ici toute sa spécificité. Faire des mathématiques suppose coordonner plusieurs registres (figures, langue naturelle, calculs...). Nous avons cherché en quoi le passage par un changement de registre permet d'aider ces apprentissages.

Conditions d'une expérimentation en 4^{e} et 3^{e}

Une plage horaire d'une heure hebdomadaire était prévue dans l'emploi du temps des élèves et assurée par les professeurs de français et de mathématiques de la classe. Les deux professeurs intervenaient simultanément et la gestion de la classe était prise en charge par l'un ou par l'autre selon l'activité proposée, chacun intervenant selon sa compétence propre. Le travail plus spécifique à chacune des matières se poursuivait dans les cours, avec réutilisation et prolongement de ce qui avait été fait dans l'heure commune.

Ce travail pourrait également être mené de façon séparée dans la classe de français et de mathématiques, mais nécessiterait alors une concertation indispensable entre les deux professeurs afin de permettre une mise en commun et une analyse des résultats obtenus.

I. LA COMPREHENSION DE TEXTES

A l'entrée au collège beaucoup d'élèves ne pratiquent qu'une seule forme de lecture : celle qui consiste à parcourir le texte des yeux une fois et sans retour en arrière. Cette forme de lecture est efficace quand il s'agit simplement de reconnaître des connaissances que le lecteur possède déjà, ou d'appréhender un récit simple pour lequel la succession des phrases correspond à la succession des événements rapportés. Dans les autres cas elle est insuffisante.

Il faut entraîner les élèves à rechercher l'organisation propre aux faits présentés dans le texte. « Comprendre un texte c'est élaborer une représentation de la situation qu'il décrit. » [1], c'est-à-dire non seulement repérer les éléments de cette situation, mais aussi leurs relations et leur organisation globale. Comme le texte ne peut donner ces éléments que l'un après l'autre, l'activité de lecture comporte un double mouvement de repérage des informations et de réorganisation de ces informations. Ce travail permet au lecteur de se construire une « représentation de la situation ».

Il faut aussi inciter les élèves à toujours revenir au texte pour compléter ou corriger la construction qu'ils sont en train d'élaborer.

La séquence d'activités présentée ici se situe dans cette double perspective :

Par le choix des textes:

Nous avons cherché des documents qui ne supposent pas de savoir préalable afin que chacun puisse par la seule lecture du texte construire une représentation de la situation décrite, et aussi des documents qui n'aient pas de rapport immédiat avec les connaissances propres aux

[1] R. Duval, « Pour une description quantitative des caractéristiques rédactionnelles d'un texte : contribution à l'étude de la lecture » I.R.E.M. de Strasbourg, avril 1981.

élèves afin qu'ils ne puissent pas remplacer une relecture attentive par un recours à ce qu'ils savent pas ailleurs.

Nous avons choisi des textes dont l'objet est une classification, c'est à dire où l'organisation propre à la situation décrite est particulièrement soulignée, ce qui peut représenter une première étape avant de travailler sur des textes où l'organisation sera moins évidente.

D'autre part une classification représente une hiérarchisation des informations clairement différente de leur simple succession linéaire dans le texte, et peut par là être l'occasion de comprendre la nécessité de la réorganisation des informations dans une activité de lecture.

La séquence se termine par un exemple qui porte sur des termes mathématiques et qui permet d'associer à cette méthodologie de lecture, la mise en ordre de connaissances mathématiques. C'est l'occasion d'expliciter des relations qu'on suppose le plus souvent établies par l'élève lui-même, seul. Enfin nous donnons un exemple de travail de compréhension portant sur des définitions mathématiques.

Par l'activité proposée :

En demandant aux élèves de traduire, par un schéma, l'organisation des informations d'un texte ou d'un corpus afin de matérialiser la représentation élaborée lors de la lecture, on se donne la possibilité d'observer où se situent les difficultés qu'ils rencontrent dans la démarche de réorganisation propre à l'activité de lecture et de les travailler avec eux.

A) Les Hominidés

Le texte proposé, l'introduction d'un article de *l'Encyclopædia Universalis*, portait volontairement sur des connaissances que n'ont pas les élèves. Il comporte une description d'un groupe, les Hominidés, et la composition de ce groupe. De plus il replace ce groupe dans un groupe plus large, celui des Primates.

Il permettait donc de retraduire les informations concernant la composition de ce groupe sous la forme d'un schéma hiérarchisé : nous entendons par là un schéma qui retrace la classification énoncée dans le texte et qui fasse apparaître groupes et sous-groupes.

D'autre part, pour établir ce schéma, il n'y avait nul besoin de connaissances préalables, toutes les informations nécessaires étant données dans le texte. De plus, les mots savants comme « diastème » étaient accompagnés de leur définition.

L'avantage de ce texte était qu'il nécessitait une lecture active et précise, puisque les élèves, en principe, ne pouvaient s'appuyer sur aucune connaissance personnelle, même floue, ce qui n'a pas été sans les dérouter.

Les deux questions proposées renvoyaient aux deux types d'informations données par le texte : celles qui concernaient la classification et celles qui portaient sur les caractéristiques du groupe. Ceci devait entraîner deux relectures, ciblées chacune en fonction du travail demandé.

TEXTE

Les Hominidés forment un ensemble de Primates supérieurs, fossiles et récents, dont le terme ultime est l'homme actuel. Connus à partir de l'ère quaternaire, ils sont représentés par les Australopithèques, les Archantropiens, les Paléanthropiens, tous fossiles, et par les Néanthropiens, fossiles et actuels. Un ensemble de dispositions anatomiques particulières caractérise les Hominidés : une attitude verticale (ou station érigée) et un mode de déplacement bipède libèrent le membre antérieur de toute fonction dans le soutien normal du corps, permettent à la main de n'avoir qu'un rôle préhenseur et entraînent un allongement remarquable des membres postérieurs par rapport à la longueur du tronc ; les mâchoires, de volume modéré, portent des dents de faible hauteur, égales entre elles, sans que le moindre vide (diastème) ne les sépare ; la formule dentaire, qui comporte deux incisives, une canine, deux prémolaires et trois molaires à chaque demi-mâchoire, est identique à celle des Singes de l'Ancien Monde, mais les deux prémolaires inférieures des Hominidés sont de même type (broyeur) ; on dit qu'il y a homomorphie des prémolaires inférieures ; un cerveau très développé aux points de vue quantitatif et surtout qualitatif, avec une boîte crânienne volumineuse, permet la manifestation de capacités nouvelles dues à l'intelligence élevée du sujet, à l'apparition de la pensée réfléchie, origine du phénomène de l'hominisation.

Les tendances anatomiques qui correspondent à ces différents caractères apparaissent chez les Hominidés les plus anciens, mais leur achèvement ne s'est produit que récemment et dans l'ordre suivant : dentition, bipédie, grand cerveau. Ces deux derniers caractères n'ont atteint leur plénitude qu'au cours du Quaternaire, période géologique qui a commencé il y a plus de trois millions d'années et dont les sédiments contiennent les restes fossilisés des Hominidés, ainsi que les témoignages de leur esprit industrieux, sous forme d'outils de pierre, préparés intentionnellement. On nomme Paléolithique la période où l'homme fossile a utilisé les outils de pierre taillée[2]

QUESTIONNAIRE

1) Par un schéma, traduire les informations données dans le texte sur les Primates et les espèces qui composent ce groupe.
2) Relevez, en les classant, les éléments qui caractérisent les Hominidés.

COMMENTAIRE

Les informations données établissent une classification qui semble facile à représenter par un schéma et le texte présente un certain nombre de mots difficiles ou rares qui sont définis dans le texte.

Le questionnaire suivait l'ordre du texte : la classification à partir des Primates supérieurs puis la caractérisation de l'ensemble des Hominidés.

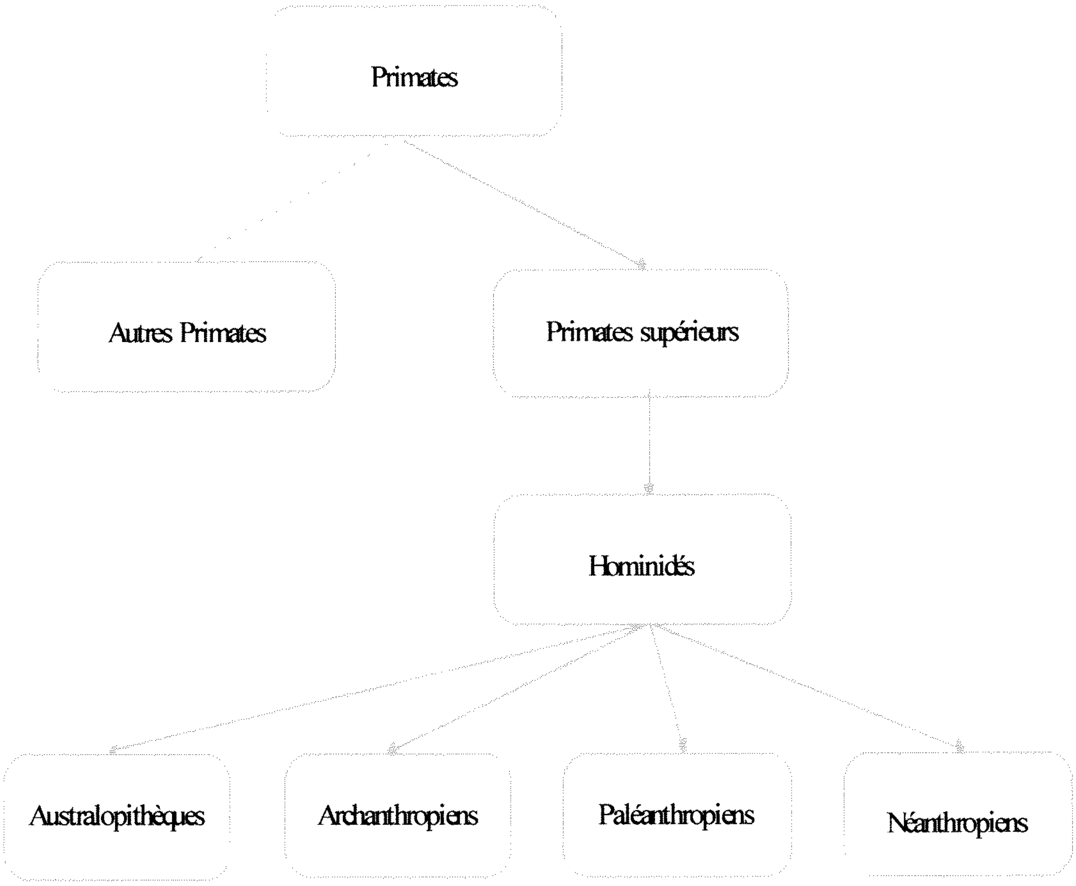
Les élèves ont été laissés seuls devant le questionnaire, qui a été ramassé à la fin de la séance puis corrigé lors de la séance suivante.

---

[2] « Hominidés », *Encyclopædia Universalis,* volume 8, dixième publication, 1976, page 496.

Le schéma (première question)

Les représentations attendues devaient, sous la forme d'ensembles et de sous-ensembles ou d'arbres généalogiques par exemple mettre en évidence la classification suivante — on pouvait ne pas tenir compte du caractère "fossile" :



Nous n'attendions pas vraiment des élèves que, pour un premier travail, ils saisissent les informations implicites du texte, à savoir que les termes **Primates supérieurs** présupposent des Primates inférieurs, ces deux catégories étant des subdivisions de l'ensemble **Primates** ou encore que, à côté des **Hominidés**, il y ait une ou d'autres subdivisions dans les **Primates supérieurs** eux-mêmes (sont en effet évoqués plus loin les **Singes de l'ancien monde**).

Cependant, à notre grande surprise, sur les vingt-huit élèves de cette classe de troisième, aucune réponse entièrement satisfaisante n'a été donnée. De plus, seuls douze d'entre eux ont compris la question.

Les réactions des élèves font bien sûr apparaître que le texte est difficile parce que non narratif, mais aussi parce que son contenu est, généralement, éloigné de leurs intérêts. De plus ils ont été déroutés par le texte lui-même qui leur paraissait sans aucun rapport avec les mathématiques ou le français. Ce fut donc l'occasion ; au début de la séance suivante, d'expliquer les objectifs du travail et de l'expérimentation que nous désirions mener avec eux.

Différentes difficultés sont donc apparues, liées généralement à des erreurs de compréhension, soit de l'énoncé des questions, soit du texte lui-même.

Les erreurs de compréhension sur la question :

Le mot « schéma »

En ce qui concerne l'énoncé des questions, c'est, principalement, le mot « schéma » ou l'idée qu'ils s'en font qui a posé les plus grands problèmes aux élèves.

Voici les définitions du dictionnaire sous l'entrée *schéma* :

> Figure donnant une représentation simplifiée et fonctionnelle (d'un objet, d'un mot, d'un processus)
> Représentation figurée, souvent symbolique (de réalités non perceptibles et de relations).[3]

Certains élèves ont dessiné une représentation d'un homme préhistorique tel qu'ils se l'imaginaient : face prognathe, bras descendant au-dessous des genoux, aspect velu. Ce qui montre que pour eux un schéma n'est qu'un dessin. Ils s'approchent ainsi du premier sens donné par le dictionnaire, cependant il n'était pas possible d'admettre ce premier sens et cela pour deux raisons : la question demandait explicitement d'établir la <u>composition</u> du groupe des Primate et, d'autre part, il n'y avait rien dans le texte mentionnant les éléments qu'ils ont dessinés. D'autres élèves n'ont pas fait de schéma du tout mais ont proposé des définitions des Hominidés ou des Primates, tout en se trompant dans la classification. Il est possible qu'ils n'aient pas compris le terme « schéma » ou encore qu'ils ne soient pas parvenus à l'établir par manque de compréhension du texte proposé.

Il nous est donc apparu nécessaire que les élèves travaillent différentes formes de représentations.

L'énoncé de la question

Ce qui a également embarrassé les élèves, c'est la compréhension de l'énoncé d'une question car ils ne voient pas toujours l'importance des termes employés. En effet plusieurs élèves, au lieu de donner un schéma de la <u>composition</u> du groupe des Primates ont donné une représentation des caractéristiques de ce groupe, ce qui était certes dans le texte mais ne répondait pas à la question posée.

La compréhension du texte de l'article

Comme certains élèves n'ont pas établi de schéma mais ont donné des définitions des Hominidés ou des Primates, avec des erreurs dans la classification, telles que : « Les Primates sont des Hominidés supérieurs aux autres Hominidés », il apparaît nécessaire de faire travailler un autre point aux élèves : le fait qu'une affirmation ne comporte pas sa réciproque si elle n'est pas clairement énoncée. En effet, dire que les Hominidés sont des Primates ne signifie pas que les Primates sont des Hominidés ; on peut trouver de nombreux exemples de ce type et ce

---

[3] *Le Grand Robert de la langue française*, tome 8, deuxième édition, Paris, 1986, page 628.

point sera retravaillé lors d'autres exercices de classification ainsi que dans les exercices sur le raisonnement.

De plus, le fait que des élèves, outre leur mauvaise compréhension du mot « schéma », aient produit un dessin reprenant tous les clichés sur les hommes préhistoriques montre qu'il est important de travailler la prise d'informations dans un texte pour corriger le défaut fréquent qui consiste à aller chercher dans ce qu'on croit savoir de quoi remplacer la réflexion. Et ce dernier point doit attirer toute l'attention des enseignants car, quelle que soit la matière, une telle attitude de lecture est fréquente et pernicieuse.

Enfin, les douze élèves qui ont compris ce qui était attendu d'eux n'ont pas su trouver ou comprendre toutes les informations contenues dans le texte. Par exemple, aucun d'eux n'a vu que les Hominidés étaient un sous-ensemble des Primates supérieurs : soit ces élèves font des Primates supérieurs un sous-ensemble des Hominidés, soit ils les mettent sur le même plan, soit encore ils suppriment l'un ou l'autre de ces groupes dans leur schéma. Il s'agit donc ici de comprendre la façon dont sont hiérarchisées les informations, ce qui mérite d'être travaillé et sera repris plus tard dans les activités sur le raisonnement.

En fin de séance, nous avons levé toutes les ambiguïtés sur le mot schéma, indiqué plusieurs représentations possibles et enfin proposé d'autres textes nécessitant le même genre de travail.

Deuxième question

La question ne posait pas de problème en elle-même, sauf dans les termes « en les classant ». Nous retrouvons ainsi le même problème que celui qu'avait en partie posé le schéma, c'est-à-dire la nécessité de hiérarchiser les informations.

Beaucoup d'élèves ont relevé un catalogue des caractéristiques sans opérer aucun regroupement.

Il était également souhaitable dans ce texte de suivre l'ordre des informations. Mais classer suppose non seulement regrouper des informations de même nature, mais aussi nommer les groupes qu'on crée ; les noms de ces groupes pouvant être en partie tirés du texte à travers une ou plusieurs lectures attentives. Deux grands regroupements pouvaient ainsi être faits, le premier étant le seul explicitement nommé dans le texte ; il s'agit des caractéristiques anatomiques et des capacités intellectuelles.

Enfin, on aborda plus spécifiquement au cours de français la manière dont les éléments de cette classification sont organisés entre eux, ainsi que la façon dont le texte donne des définitions des termes spécialisés.

B) Les dictionnaires

Nous proposons ici un autre travail sur la classification et sa représentation par un schéma. Le but était de pouvoir réinvestir les compétences acquises à propos de telles représentations de classification, mais aussi d'aller plus loin : d'une part, pour que le schéma soit cohérent avec les informations données, il fallait déduire des éléments de classification implicites du texte et ne pas seulement suivre l'ordre du texte ; d'autre part, pour établir un schéma reprenant toutes les informations données, il fallait opérer sans cesse un aller-retour entre le schéma tel qu'il semblait devoir s'établir et les nuances proposées par la dernière partie du texte.

Ce travail a donc permis de montrer que certaines informations peuvent être implicites, et, d'autre part, qu'elles ne se trouvent pas nécessairement énoncées dans la linéarité d'un texte c'est-à-dire dans l'ordre où elles apparaissent.

TEXTE

dictionnaire

Le dictionnaire constitue certainement l'objet culturel le plus familier auprès du grand public, pour lequel il est censé représenter un répertoire : celui des mots de la langue, accompagnés de tout ce qu'il convient de savoir à leur propos. Cette image est à la fois illusoire et incomplète, dans la mesure où elle promeut un modèle qui n'a qu'un rapport lointain avec la diversité de ses réalisations concrètes. C'est pourquoi il est plus juste dans un premier temps, de parler des dictionnaires, plutôt que du dictionnaire. Les dictionnaires sont, avant tout, des objets empiriques, résultats d'une activité pratique (la lexicographie), et conçus à des fins utilitaires ; comme tels, ils sont tributaires de nombreux impératifs — souvent contradictoires — liés à leur destination : nécessité d'une présentation conventionnelle, d'une adaptation à un ou plusieurs publics, recherche de l'exhaustivité et de la simplicité, souci pédagogique et didactique, etc.

A. Les types de dictionnaires

Outre les dictionnaires bilingues, qui constituent l'outil essentiel de la traduction, il existe aujourd'hui quantité d'ouvrages monolingues qui se caractérisent par leur spécialisation : dictionnaires décrivant un état ancien de la langue (le français du XVI^{e} siècle, le français classique, etc.), dictionnaires de mots nouveaux, de mots à la mode, etc., dictionnaires de parlers régionaux, d'argot, dictionnaires techniques (cuisine, médecine, informatique, etc.) ; ou encore dictionnaires qui limitent leurs informations à des propriétés spécifiques du vocabulaire : dictionnaires de prononciation, dictionnaires étymologiques, dictionnaires de synonymes, etc.

Parmi les plus fidèles au modèle couramment admis, il convient encore de faire une distinction entre les dictionnaires encyclopédiques et les dictionnaires de langue, les premiers étant censés traiter des choses, les seconds des mots. Ainsi, les dictionnaires encyclopédiques s'efforcent surtout de rassembler des connaissances que l'on possède sur les objets, les individus, les espèces, les concepts ; ils accueillent un grand nombre de noms propres et font un grand usage de l'illustration, alors que les dictionnaires de langue s'attachent à décrire le sens des mots et leur fonctionnement dans le discours.

Encore cette distinction n'est-elle pas absolue ; alors qu'il existe de véritables encyclopédies, c'est-à-dire des ouvrages d'où l'information linguistique est totalement absente (sinon comme contenu des articles visant spécifiquement la linguistique), il est difficile de concevoir un dictionnaire de langue qui échappe totalement à la description des choses ; bien que réduite à son strict minimum, elle apparaît nécessairement au détour de certaines définitions (espèces naturelles, objets manufacturés), ainsi qu'à la lecture des objets destinés à illustrer les termes définis. En outre, certains dictionnaires tentent d'échapper à cette dichotomie dans la mesure où ils proposent de cumuler les deux types d'information (les ouvrages donnant lieu à des développements importants s'efforcent de maintenir la distinction : définitions en langue/notices encyclopédiques).[4]

EXERCICE

Proposez un schéma qui établira une classification des dictionnaires

COMMENTAIRE

Le texte et le libellé de l'exercice ont été donnés en même temps. Cependant, les élèves sont guidés, au cours de la séance, par plusieurs étapes.

Nous rappelons ici que le but n'est pas le schéma, mais qu'il n'est qu'une forme de retraduction des informations données par le texte ; ainsi, il peut, à son tour, devenir un intermédiaire pour comprendre le texte.

Etape 1

Cette étape est celle du repérage des informations nécessaires à l'établissement d'un schéma, ainsi que de la première subdivision de la classification.

Les élèves ont étés invités à lire individuellement le contenu de la feuille qui leur avait été distribuée. Puis on leur a demandé où ils peuvent trouver, dans le texte, les informations nécessaires pour établir le schéma. Il s'agit, évidemment, de la deuxième partie, qui porte le titre « **Les types de dictionnaires** ». Oralement toujours, l'introduction a été analysée et ont été inscrites au tableau les deux façons d'entendre le terme « dictionnaire », qui sont évoquées dans ce premier paragraphe :

— dans le sens le plus courant : répertoire des mots de la langue et ce qu'il faut en savoir
— dans les faits : il y a une diversité de dictionnaires, selon leurs destinations.

Ceci devait aider les élèves à trouver la première étape de la classification : « modèle couramment admis » (ce qui était explicite dans le texte mais ne se trouvait pas au début du texte) et « autres dictionnaires », ce qui est implicite dans la partie « A. Les types de dictionnaires », mais devait être déduit de l'introduction, d'après les termes « la diversité de ses réalisations concrètes ».

Etape 2

Elle est celle du temps de la réflexion personnelle, et on s'attend à ce que des difficultés apparaissent, car les élèves auront tendance à suivre l'ordre selon lequel apparaissent les différentes informations.

---

[4] M. Arrivé, F. Gadet, M. Galmiche, *La Grammaire d'aujourd'hui, Guide alphabétique de linguistique française*, Flammarion, Paris, 1986, pages 225-226.

Les élèves, par groupes de deux, sont invités à établir leur classification, sous la forme d'un schéma, du même type que celui qui a été réalisé à propos du texte sur les Hominidés.

Etape 3

Il s'agit maintenant de monter que les renseignements nécessaires pour établir une classification ne sont pas toujours donnés dans la linéarité d'un texte ou d'un énoncé.

Une classification commune est établie au tableau, en suivant une lecture linéaire du texte. Les renseignements pris dans l'ordre du texte permettent d'établir une première classification, les élèves étant invités, au fur et à mesure, à faire les regroupements nécessaires et à nommer les groupes ainsi créés :

I. dictionnaires bilingues
II. dictionnaires monolingues
  1) état ancien de la langue *(titre donné par rapport au précédent et permettant de grouper « de mots nouveaux, de mots à la mode, etc. »)*
  2) parlers spéciaux *(titre regroupant « dictionnaires de parlers régionaux, d'argot, dictionnaires techniques »)*
  3) propriétés spécifiques du vocabulaire
III. modèle couramment admis
  1) dictionnaires de langue
  2) dictionnaires encyclopédiques

Cette classification n'a pas encore la forme d'un schéma mais la forme ci-dessus. Etablie d'après l'ordre où les renseignements apparaissent dans le texte, elle permettra de réfléchir à sa cohérence avec le texte.

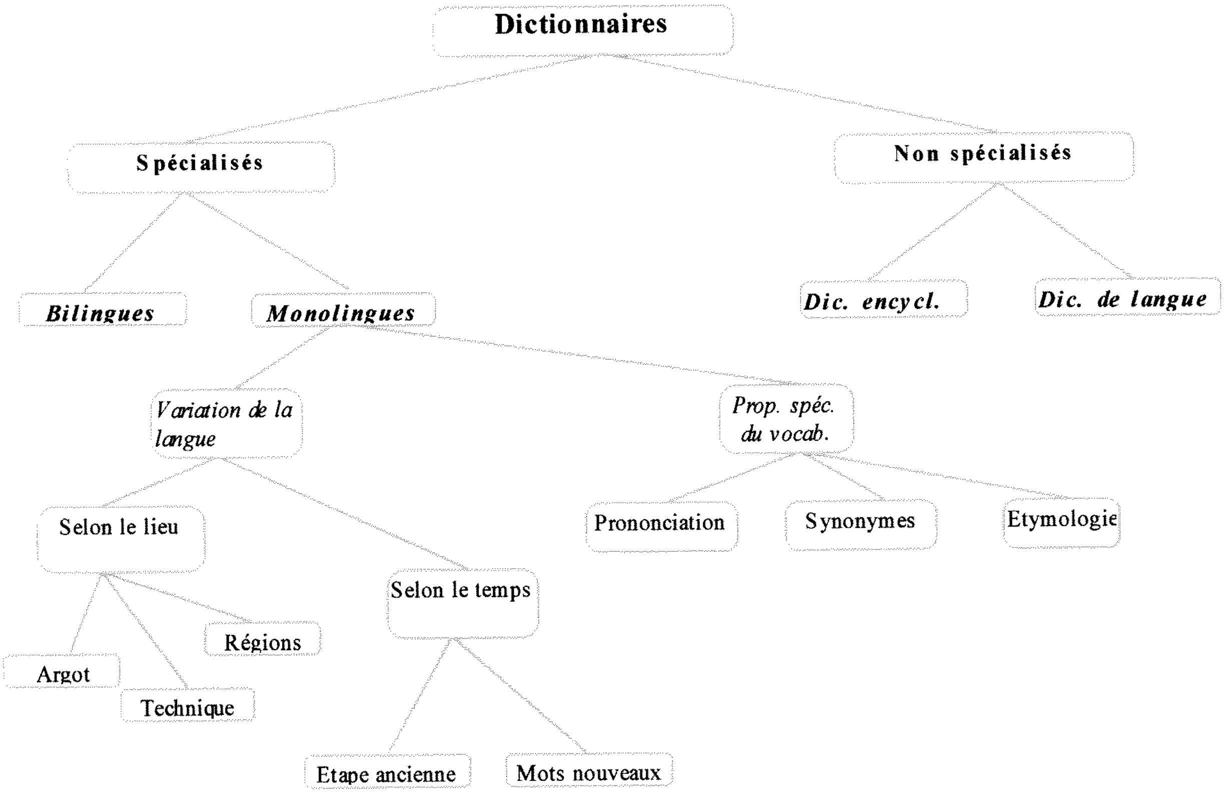
Etape 4

Dans cette étape il s'agit de vérifier, par des aller-retour entre le texte et la première classification établie dans l'étape 3, si cette dernière retransposition est cohérente avec ce que le texte dit. Le but premier est ici non le schéma lui-même mais sa construction.

Une fois cette classification au tableau, les élèves ont eu à y réfléchir, afin de voir si les groupes I, II et III leur paraissent pertinents. On fait ainsi apparaître, après avoir fait préciser le sens des termes « bilingue » et « monolingue », que les dictionnaires du « modèle couramment admis » sont aussi des dictionnaires monolingues et que ce qui apparaît sous les rubriques I et II peut constituer un seul groupe, qui s'oppose au groupe « modèle couramment admis ». En retournant à ce qui a été dégagé de l'introduction, la première étape de la classification est énoncée, et le schéma organisé au tableau, tout en laissant de côté la dernière partie du texte, qui comporte des nuances : « Encore cette distinction n'est-elle pas absolue... »

Au fur et à mesure de l'avancée du schéma, d'autres regroupements ont été faits et nommés comme celui des dictionnaires concernant des variations de la langue, selon le lieu (ou le milieu) et selon le temps (ou l'époque) ; il a fallu également définir les parlers régionaux comme étant du français et non d'autres langues telles que le basque, le breton ou l'alsacien, qui apparaîtraient naturellement dans les dictionnaires bilingues.

Voici le schéma tel qu'il apparaît à cette étape :

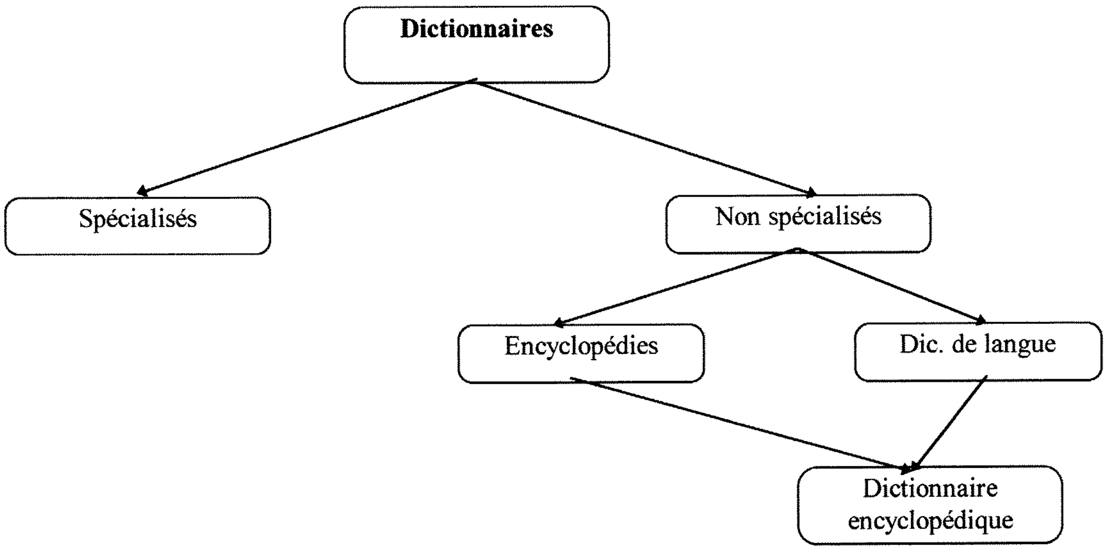


Etape 5

Cette dernière étape permettra d'être tout à fait complet dans la retransposition de l'ensemble des données du texte : il faut, à présent, prendre en compte les nuances exprimées dans le dernier paragraphe, ce qui amènera à une modification partielle du schéma tel qu'il vient d'être établi.

On aborde enfin le problème créé par le groupe « dictionnaires encyclopédiques » et par sa place dans la classification. En effet, la dernière partie du texte indique une différenciation entre les véritables encyclopédies et les dictionnaires de langue, en les opposant par le terme « dichotomie ». Il apparaît alors que les dictionnaires encyclopédiques ne font partie exclusivement ni d'un groupe ni de l'autre, mais participent des deux : « ils proposent de cumuler les deux types d'informations ». Le schéma final aboutit ainsi à une refonte de la sous-classification du groupe « dictionnaires non spécialisés ». Il a également été tenu compte de la double nature des dictionnaires encyclopédiques, et une traduction de cette double nature est matérialisée dans le schéma.

Voici le schéma final, dont nous ne reproduisons que la partie modifiée :



En conclusion, nous voudrions préciser que, dès la lecture, les élèves ont trouvé ce texte plus facile, sans doute parce que le sujet traité leur est plus familier. Ils se sont cependant rendu compte que le schéma demandé est plus complexe, parce qu'une lecture linéaire ne permet pas d'organiser un schéma cohérent et aussi parce que plusieurs groupes de la classification n'étaient pas nommés explicitement ; de plus une modification finale s'impose à cause des nuances introduites dans le dernier paragraphe.

C) Les quadrilatères.

Avec les séances consacrées au thème des quadrilatères, s'opère un retour vers les mathématiques, ce qui permettra de faire réutiliser les notions de compréhension de texte ou d'énoncés et leur retraduction sous une autre forme de représentation, en l'occurrence par un schéma retraçant une classification hiérarchisée.

Certes les élèves ne sont plus en terrain inconnu, mais cela ne les dispense pas de prêter une attention soutenue à la lecture des énoncés, pour éviter qu'ils se fient aux notions plus ou moins floues qu'ils possèdent.

Deux séances ont été consacrées à des travaux sur le thème des quadrilatères, la première étant un réinvestissement des exercices sur les schémas de classification, et la deuxième demandant une autre approche de la compréhension de textes : il s'agit, en se servant entre autres du schéma préalablement établi, de vérifier la validité des affirmations données dans un corpus de phrases concernant les quadrilatères. Ce dernier exercice consistera également en une transition avec la deuxième partie de l'expérimentation, qui porte plus spécifiquement sur le raisonnement.

LE SCHEMA D'APRES UN CORPUS

Il ne s'agit plus ici de textes comportant les éléments d'une classification, mais d'un corpus de définitions issues de divers manuels.

Un travail interdisciplinaire en français et en mathématiques.

On retrouve dans ce travail la représentation sous forme de schéma de classification ainsi que la nécessité d'opérer des aller-retour entre les définitions et le schéma, comme entre les différentes définitions, étant donné que les informations sont exposées dans un ordre aléatoire, empêchant ainsi de construire le schéma en suivant la numérotation des divers énoncés.

Exercice

Voici neuf définitions tirées de livres de mathématiques:

1. Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles s'appelle un **parallélogramme**.
2. Un **trapèze** est un quadrilatère non croisé dont au moins deux côtés sont parallèles. (On les appelle les « bases » du trapèze)
3. Un **carré** est un quadrilatère qui a quatre angles droits, et quatre côtés de même longueur.
4. Un **polygone** est une ligne brisée fermée.
5. Un trapèze ayant un angle droit est un **trapèze rectangle**.
6. Un quadrilatère dont les côtés ont tous la même longueur est un **losange**.
7. Un polygone à quatre côtés s'appelle un **quadrilatère**.
8. Un trapèze dont les deux côtés autres que les bases ont la même longueur est un **trapèze isocèle**.
9. Un quadrilatère ayant quatre angles droits est un **rectangle**.

Etablir une classification, sous forme de schéma, dans laquelle on retrouve tous les mots soulignés.

Commentaire

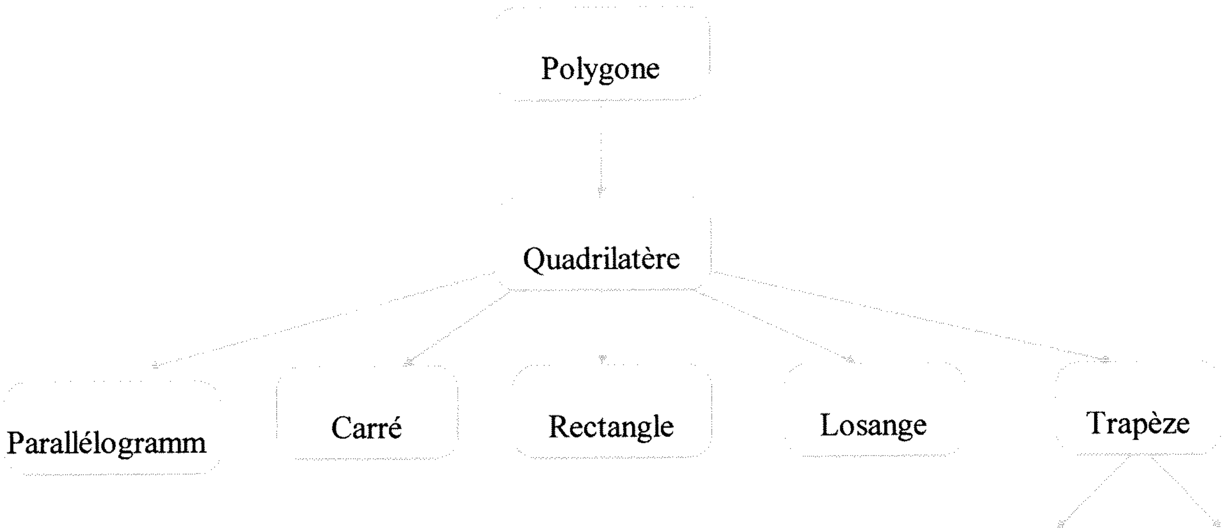
Les élèves ont pour consigne de classer les différents quadrilatères et de fournir une représentation, la plus explicite possible, qui traduise les liens existant entre eux. La représentation d'informations par un schéma ne pose pas de problèmes, puisque c'est le troisième travail de ce type. Une séance entière a été consacrée à la réalisation d'un schéma qui satisfasse l'ensemble de la classe.

Ce travail s'est révélé être beaucoup plus difficile que nous ne l'avions prévu — les élèves étant *a priori* en pays de connaissance —, car ils ont été déstabilisés par la présence des trapèzes, des trapèzes isocèles et des trapèzes rectangles (figures moins familières que les quadrilatères "classique").

On a pu voir huit élèves sur vingt-deux [5] produire un schéma de type "étoilé" comme ci-dessous et qui comporte la subdivision des trapèzes en trapèzes isocèles et trapèzes rectangles ; cependant il faut remarquer que cette dernière subdivision s'imposait très fortement par la répétition du mot « trapèze » dans le corpus, puisque, dans les définitions, les trapèzes isocèles et rectangles sont d'abord identifiés comme des trapèzes. Ce type de schéma "en étoile", où toutes les branches ont la même valeur, traduit l'absence de perception des liens hiérarchiques pouvant exister entre les branches de "l'étoile". Comme pour le travail sur les dictionnaires, l'élaboration d'une hiérarchie n'est pas une tâche évidente pour les élèves.

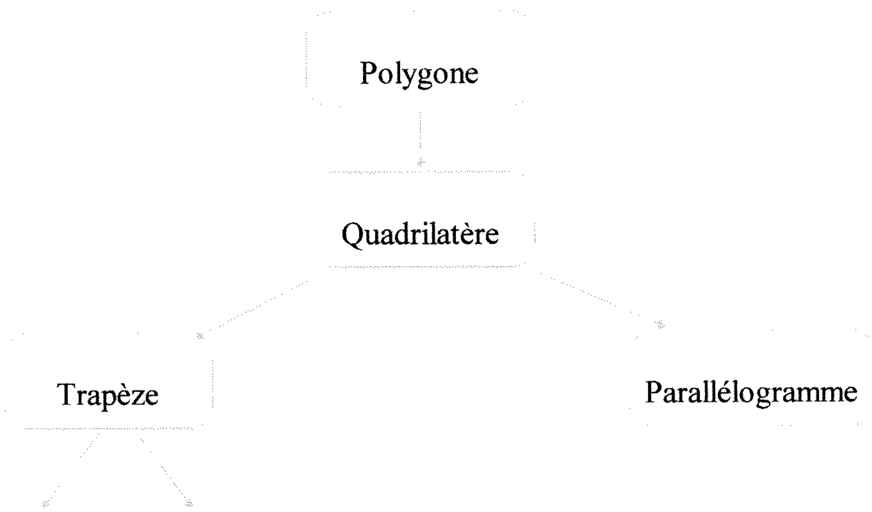
---

[5] Ce nombre correspond au nombre des travaux ramassés.

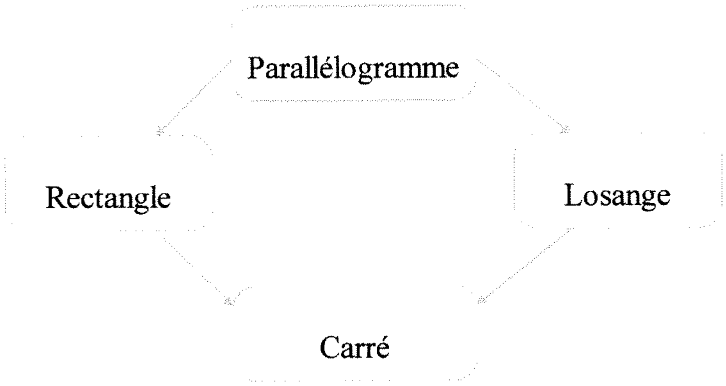


Si les quadrilatères sont bien perçus comme des polygones particuliers et les parallélogrammes, les carrés, les rectangles, les losanges et les trapèzes comme des quadrilatères particuliers, ce schéma traduit également une vision pour le moins peu satisfaisante des catégories de quadrilatères puisque ceux-ci sont vus comme des entités disjointes.

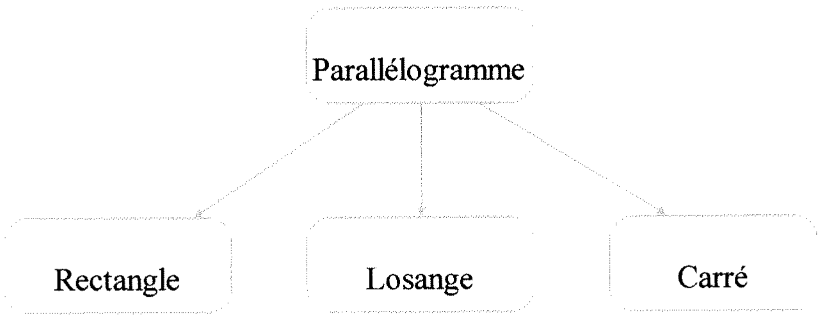
Un deuxième groupe d'élèves (dix élèves) a produit un schéma de type hiérarchisé plus ou moins élaboré où l'on pouvait voir qu'ils n'établissaient pas de lien entre les trapèzes et les parallélogrammes :



Si, parmi ces élèves, certains produisent un schéma satisfaisant concernant les parallélogrammes, rectangles, losanges et carrés, schéma qui se présentait sous la forme "classique" suivante :



beaucoup d'autres en revanche traduisent à nouveau par une position en “étoile” une mauvaise compréhension de la structure et des inclusions des différents ensembles :



A noter quelques rectangles comme cas particuliers de carrés, des rectangles comme cas particuliers de losanges, et des carrés comme cas particuliers de rectangles mais pas de losanges.

Bilan

Une moitié de la classe (treize élèves) ne maîtrise pas les notions d'inclusion de certains de ces ensembles dans d'autres. A ceux-là il faut encore ajouter cinq élèves qui maîtrisent la partie « parallélogramme » du schéma (mieux connue) mais n'ont pas su la replacer par rapport aux trapèzes (à tirer des définitions qui étaient données).

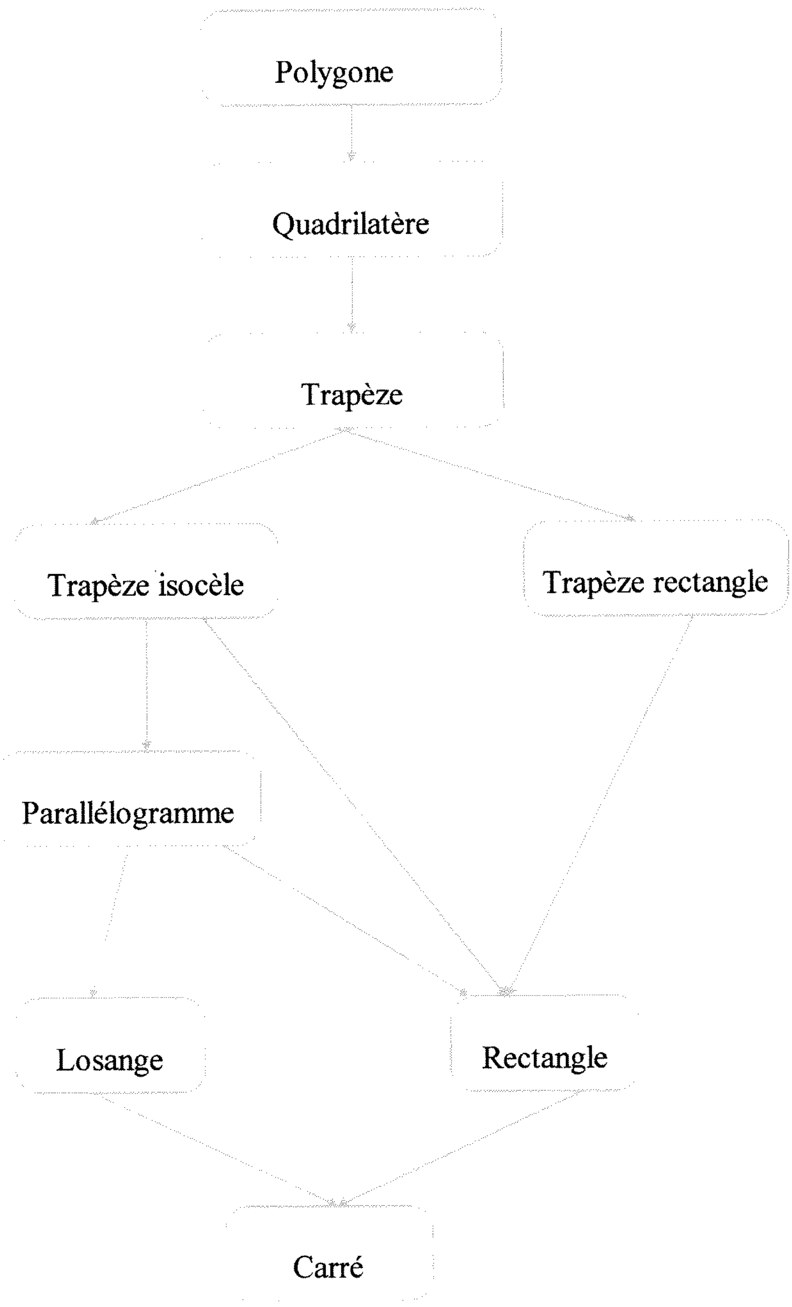
On doit encore noter qu'un élève a tenté de réaliser un diagramme sous forme d'ensembles et de sous-ensembles emboîtés, mais qu'il n'a pas réussi à aller au bout, son schéma traduisant la même vision disjointe des rectangles, losanges et carrés que celle qui est apparue dans les schémas “étoilés”.

Seuls deux schémas de type hiérarchisé étaient parfaits et traduisaient de la part de leurs auteurs une vision correcte de la structure ensembliste sous-jacente.

La fin de la séance a été consacrée à la mise au point collective d'un schéma de type hiérarchisé qui puisse satisfaire à l'ensemble des définitions figurant dans le corpus proposé et qui traduise le plus fidèlement possible les différentes propriétés des figures.

Voici le schéma final établi collectivement :

Schéma final



Le choix de partir du général (les polygones) pour aller vers des cas de plus en plus particuliers s'est imposé majoritairement dans la classe. Les flèches du schéma ont été pour beaucoup perçues comme étant chargées d'une signification à savoir ; « a pour cas particulier ». Les élèves ont toutefois remarqué qu'on aurait pu aussi bien choisir le sens inverse pour les flèches ; elles auraient alors comme signification : « est un cas particulier » ou « est un sous-ensemble ».

Un élève a tenté de produire un schéma formé d'ensembles emboîtés. Cette représentation n'a pas pu être menée jusqu'à terme vu la complexité et la lisibilité difficile du schéma produit. Cependant cette tentative est intéressante parce qu'elle montre qu'il n'y a pas un seul type de schéma. Par ailleurs il faut retenir que le schéma par emboîtements peut être plus signifiant pour certains élèves que le schéma "en arbre"[6], car il permet de mieux visualiser les situations d'inclusion et d'intersection ; la réalisation d'un tel type de schéma est cependant limité par le nombre des informations à traduire.

EXERCICE D'APPLICATION

Un certain nombre d'affirmations sont données aux élèves. Elles reformulent, de façon erronée ou non, les propositions du corpus de l'exercice précédent. et surtout celles de la classification hiérarchisée qui avait été mise en évidence lors de la séance précédente par un schéma.

Il s'agit de faire fonctionner le schéma, ce qui équivaut à faire remettre en cause les conceptions erronées à propos des quadrilatères qui subsisteraient encore dans l'esprit des élèves.

Le but est que les élèves puissent décider si les reformulations proposées sont exactes ou non. Pour pouvoir en décider, ils peuvent utiliser la hiérarchie des notions données par le schéma, qui devient un instrument. Il y deux attitudes possibles de la part de l'enseignant : soit il dit explicitement que le schéma peut leur apporter de l'aide, soit il n'en fait rien, et c'est aux élèves de découvrir l'aide que le schéma peut leur apporter.

Les propositions du corpus actuel sont des reformulations de celles du corpus qui avait été donné lors de la séance précédente dans le but d'établir le schéma.
Ces reformulations, pour la plupart, utilisent les quantificateurs (tout, aucun *etc.*). Mais elles ne visent, en aucun cas, à un travail sur les quantificateurs. Il s'agit d'un travail sur les notions (les quadrilatères) et sur leurs relations, éventuellement d'inclusion.

Pour bien vérifier l'exactitude des propositions du corpus, l'utilisation du schéma est nécessaire. Le but est ici d'inciter les élèves à se servir du schéma pour vérifier chacune des phrases du corpus, ce qui signifie un aller-retour entre les deux objets, le corpus et le schéma.

Ici le schéma n'a donc pas le même statut que dans l'exercice précédent où il en était le but. Dans celui-ci, au contraire, il a le statut d'un outil que l'on utilisera en cas de difficulté : il permettra à l'élève de bien saisir la structure ensembliste et les liens existant entre les différents types de quadrilatères ; quant au professeur, le schéma lui sera utile pour agir sur les conceptions erronées des élèves.
Il faut préciser que cet outil a un caractère essentiellement transitoire puisque son rôle principal est un rôle d'intégrateur des connaissances ; une fois sa fonction remplie, il deviendra donc inutile.

[6] Il est bien évident que les deux types de schéma sont aptes à retranscrire une hiérarchisation.

Exercice

VRAI ou **FAUX ?** Justifier à l'aide de phrases.

1. Un carré est un trapèze rectangle.
2. Tout polygone est un quadrilatère.
3. Il existe des rectangles qui sont des losanges.
4. Tous les parallélogrammes sont des polygones.
5. Aucun trapèze n'est un losange.
6. Chaque losange est un trapèze isocèle.
7. Tous les quadrilatères sont des parallélogrammes.
8. Certains quadrilatères sont des losanges.
9. Certains trapèzes isocèles et rectangles sont des carrés.
10. Aucun losange n'est un rectangle.

Commentaire

Les élèves devaient répondre sur une feuille séparée, sans aucune contrainte de temps, et sans le souci d'un contrôle noté.

Une grosse minorité (30 à 40%) s'est servie du schéma (on les y incitait fortement). Les justifications qui sont apparues y faisaient référence de façon plus ou moins claire. C'est ce que montre l'emploi du terme *vient* dans les exemples suivants de phrases d'élèves : *« le carré **vient** du parallélogramme et le parallélogramme **vient** du trapèze isocèle »,* pour traduire les inclusions, ou bien la formulation explicite de la signification des flèches du diagramme par les termes : *« est un cas particulier de ».*

Quelques-uns ont répondu directement aux questions en s'appuyant sur le corpus de définitions mais souvent avec des erreurs surtout pour les trapèzes, mais aussi pour les rectangles, les losanges, ou les carrés (en fait les élèves qui n'ont pas utilisé le schéma se sont trompés plus souvent que les autres).

Les erreurs les plus courantes provenaient :
— **de la mauvaise compréhension de la structure ensembliste emboîtée** (la conception d'ensembles disjoints réapparaît ; celle-ci s'était initialement traduite par des schémas de type “étoilé”) : ainsi en est-il par exemple d'affirmations du type : *« le carré n'est pas un trapèze rectangle car le trapèze n'a pas les quatre côtés égaux »*(Corpus : « un carré est un trapèze rectangle ») ou *« un rectangle a quatre angles droits alors que le losange n'en a pas »*(Corpus : Il existe des rectangles qui sont des losanges) *;* il en est de même lorsqu'à la phrase du corpus : « Tous les quadrilatères sont des parallélogrammes. », on répond : *« non, puisqu'il existe aussi des carrés, des rectangles.»* Ces erreurs traduisent la difficulté qu'ont les élèves à considérer deux objets, pourtant figuralement différents, du point de vue de leurs propriétés communes.
De plus se trouve également posé le problème de l'inclusion et de la capacité de voir une réciproque : cette difficulté avait déjà été perçue dans le travail de compréhension de textes où

certains élèves ne distinguaient pas clairement une affirmation de sa réciproque : en effet dire que les Hominidés étaient des Primates ne signifiait pas nécessairement que les Primates étaient des Hominidés : c'est ce qu'on voit notamment dans la réponse : « *c'est faux car un trapèze rectangle n'est pas un carré* » pour décider de l'exactitude de la phrase du corpus : « Un carré est un trapèze rectangle », il en est de même lorsqu'à phrase du corpus : « Tous les parallélogrammes sont des polygones. » la réponse de l'élève est : « *c'est vrai car un polygone est un parallélogramme.* » ($A \subset B$ ne signifie pas que $B \subset A$ ni que A et B soient identiques).

— **d'une difficulté à distinguer le sens générique et le sens particulier de *le* et *un* :** une grande rigueur était nécessaire dans l'utilisation des termes (l'article indéfini *un* avec son sens générique, les adjectifs indéfinis *tous, certains, chaque, aucun,* les locutions comme *il existe...)*

— **de la non reconnaissance des informations** apportées par une phrase — il y avait essentiellement des inclusions dans notre corpus —, alors que cette reconnaissance est une tâche essentielle de toute activité de lecture.

Conclusion

Une bonne connaissance des quadrilatères étant un objectif de base pour les élèves du collège, un travail de ce type est particulièrement utile en quatrième avant d'aborder le raisonnement déductif et la démonstration en géométrie, mais il est rarement fait en raison des difficultés que connaît l'enseignant à gérer le volumineux programme de quatrième, ce qui conduit à considérer bien souvent ces notions comme acquises à l'issue de la classe de cinquième. Or notre expérimentation a monté qu'il n'en était rien et que ce travail, loin d'être superflu gardait tout son intérêt en permettant une meilleure intégration de connaissances.

Le recours au schéma s'est révélé particulièrement précieux en nous permettant d'une part de mieux comprendre les conceptions floues ou erronées qu'ont les élèves, et d'autre part il a été indispensable dans la phase d'explication et dans notre façon d'apporter une réponse adaptée aux erreurs de chacun.

Lemniscatomie, ou comment découper une lemniscate en parties égales, à la règle et au compas.

Jean-Pierre Friedelmeyer

Dans ses *Recherches arithmétiques*, section VII, intitulée *Des équations qui déterminent les sections circulaires*[1], Gauss fait la remarque que :

les principes de la théorie que nous entreprenons d'exposer, s'étendent bien plus loin que nous ne le faisons voir ici ; ils peuvent en effet s'appliquer non seulement aux fonctions circulaires, mais aussi avec autant de succès à beaucoup d'autres fonctions transcendantes, par exemple à celles qui dépendent de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$.[2]

Cette remarque n'échappe pas à Abel qui dans ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* annonce :

entre autres théorèmes je suis parvenu à celui-ci : On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate en m *parties égales* <u>*par la règle et le compas seuls*,</u> *si* m *est de la forme* 2^n *ou* 2^n+1, *ce dernier nombre étant en même temps premier ; ou bien si* m *est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes. Ce théorème est, comme on le voit, précisément le même que celui de M. Gauss, relativement au cercle.*[3]

Dans l'article qui suit, nous nous proposons de dégager les idées principales d'Abel pour réaliser cette « lemniscatomie »,de façon suffisamment élémentaire pour ne pas avoir à mettre en place l'immense arsenal de la théorie des fonctions elliptiques. Nous nous appuierons sur le texte d'Abel cité ci-dessus, principalement les paragraphes I à V et le paragraphe VIII, mais limités et adaptés à ce qui concerne la lemniscate. Cette adaptation nous obligera quelquefois à faire appel à d'autres auteurs lorsque les méthodes développées par Abel sont trop compliquées ou générales. Les textes utilisés seront précisés au moment opportun.

1. La lemniscate.

La lemniscate se rencontre pour la première fois dans un article célèbre des *Acta eruditorum* de septembre 1694,[4] sous la dénomination de *curva quatuor dimensionum quæ hac aequatione exprimitur* $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$, *quaeque circum axe GG [2a] constitua formam refert jacentis notae octonarii ∞ seu complicitae in nodum fasciae, sive* ***lemnisci***, *d'un noeud de ruban Gallis.* [du grec ληµνισκος qui signifie bandelette ou ruban]. Nous renvoyons au livre de Loria : *Spezielle ebene algebraische Kurven*[5], dont ces informations sont extraites, pour

[1] Voir *L'Ouvert* n° 46 et 47, mars et juin 1987.

[2] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, traduites par A. C. M. Poullet Delisle, Paris 1807.

[3] N. H. Abel, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, p. 314. Voir aussi la correspondance d'Abel citée dans ce numero de *L'Ouvert*, dans l'article *L'histoire des mathématiques par correspondance..*

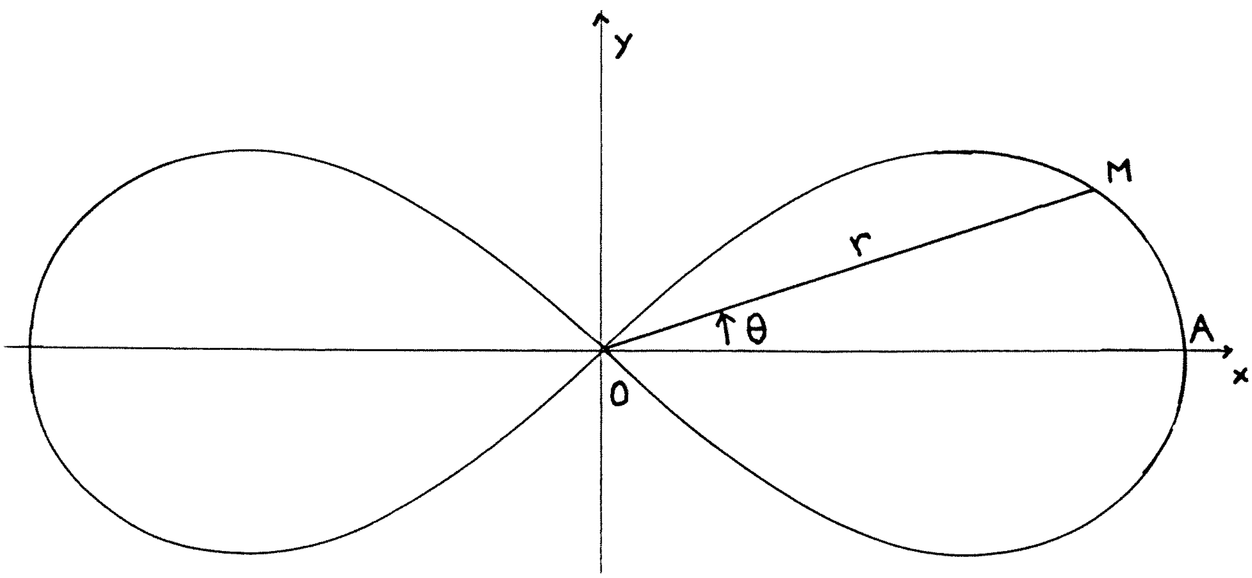
[4] Jacobi Bernoulli, *Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae cujusdam algebraicae, addenta nuperae solutionis mensis Junii.*

[5] G. Loria, *Spezielle algebraische und transcentente ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, Leipzig, Teubner p. 199.

une étude détaillée des propriétés géométriques de cette courbe. Nous nous limiterons ici à celles qui concernent directement sa division en n parties égales, à la règle et au compas.

La lemniscate est donc la courbe d'équation cartésienne : $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$, ou d'équation polaire : $r^2 = \cos 2\theta$, que l'on peut également paramétrer en posant : $x^2+y^2=t^2 ; x^2-y^2=t^4$ donc : $x = \mp t\sqrt{\frac{1+t^2}{2}} ; y = t\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$ pour $t \in [-1;+1]$.

Le fait essentiel qui nous intéresse ici est que la longueur s d'un arc $\overset{\frown}{OM}$ tel que le segment OM mesure r est donné par : $s = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, comme le montre le calcul de $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.



Pour bien mettre en place l'analogie existant entre la « cyclotomie » et la « lemniscatomie », et pour prendre la mesure exacte des méthodes et des articulations liées à ce problème, il peut être utile de faire un détour afin de montrer comment on peut définir les fonctions circulaires et leurs propriétés principales uniquement à partir de l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

2. Définition purement analytique des fonctions circulaires.

L'intégrale $\alpha = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ définit une fonction réelle continue de la variable réelle x, impaire, strictement croissante, de [-1 ; +1] sur [$-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}$], en posant par définition $\frac{\pi}{2}=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Il existe donc une fonction réciproque continue, impaire, strictement croissante que nous appellerons sinus, définie par l'équivalence :

$$x=\sin\alpha \Leftrightarrow \alpha=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ pour } \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right] \text{ et } x\in[-1;+1].$$

De même on peut définir une fonction cosinus continue, strictement décroissante, par l'équivalence : $y=\cos\beta \Leftrightarrow \beta=\int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, pour $\beta\in[0;\pi]$ et $y\in[-1;+1]$.

Le changement de variable $u=\sqrt{1-t^2}$ dans l'intégrale $\alpha=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ donne $\alpha=\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$; autrement dit : si $x=\sin\alpha$, alors $\sqrt{1-x^2}=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. D'où la relation $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ permettant de prolonger la définition de $\sin\alpha$ et de $\cos\alpha$ à l'intervalle $[-\pi;+\pi]$.

La fonction sinus est dérivable en tant que réciproque d'une fonction dérivable, à dérivée non nulle $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $|x|\neq 1$; donc $(\sin\alpha)'=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\cos\alpha$; relation que nous pouvons étendre à l'intervalle fermé [$-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}$] , puis $[-\pi;+\pi]$. De même on démontre que $(\cos\alpha)'=-\sin\alpha$.

Il reste à mettre en place les formules d'addition, c'est-à-dire les formules

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha.\cos\beta\pm\sin\beta.\cos\alpha.$$

Un moyen simple consiste à effectuer le développement en série de Taylor de $\sin(\alpha+\beta)$ sous la forme $\sin(\alpha+\beta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\beta^n}{n!}(\sin\alpha)^{(n)}$. On a : $(\sin\alpha)^{(2n)}=(-1)^n\sin\alpha$ et $(\sin\alpha)^{(2n+1)}=(-1)^n\cos\alpha$ pour tout entier naturel n. De sorte que $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.V_1+\cos\alpha.V_2$, où V_1 et V_2 sont des fonctions de β seul. En dérivant cette relation par rapport à α puis en faisant α = 0, on trouve bien $V_1=\cos\beta$ et $V_2=\sin\beta$ Malheureusement cette méthode s'applique difficilement à d'autres cas tels que les fonctions elliptiques par exemple. C'est pourquoi nous donnons également une autre démonstration, que nous pourrons adapter plus facilement.

Si nous posons $u=\sin\alpha$; $v=\sin\beta$, $r=\sin\gamma$ il faut déterminer la fonction r(u, v) telle que : $\int_0^u\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+\int_0^v\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^r\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ce qui équivaut à $\alpha+\beta=\gamma$. Considérant là aussi α comme variable et β comme constant, on a : $\frac{du}{d\alpha}=\cos\alpha$; $\frac{d^2u}{d\alpha^2}=-\sin\alpha$; $\frac{dr}{d\alpha}=\frac{dr}{d\gamma}=\cos\gamma$; $\frac{d^2r}{d\alpha^2}=-\sin\gamma$; de sorte que : $\frac{d}{d\alpha}\left[r\frac{du}{d\alpha}-u\frac{dr}{d\alpha}\right]=\sin\gamma.(-\sin\alpha)-\sin\alpha.(-\sin\gamma)=0$. Donc

$r\dfrac{du}{d\alpha}-u\dfrac{dr}{d\alpha}=\sin\gamma.\cos\alpha-\sin\alpha.\cos\gamma$ est constant , égal à k. Avec $\alpha = 0$, on trouve $k = \sin\beta$; d'où la relation : $\sin\beta=\sin(\gamma-\alpha)=\sin\gamma.\cos\alpha-\sin\alpha.\cos\gamma \Leftrightarrow v=r\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{1-r^2}$, puis : $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\sin\beta.\cos\alpha \Leftrightarrow r=u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}$.

En appliquant ces formules avec $\beta=\dfrac{\pi}{2}$, nous pouvons étendre de proche en proche la définition des fonctions sinus et cosinus à l'ensemble des réels, et mettre en évidence la période 2π pour chacune d'elles.
Nous sommes maintenant en mesure de comprendre la démarche d 'Abel pour définir la fonction elliptique utilisée pour la division de la lemniscate.

3. Fonction sinus lemniscatique.[6]

Soit s la fonction : $x \mapsto s(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ donnant la longueur de l'arc $\overset{\frown}{OM}$ sur la lemniscate, pour une distance OM=x donnée ; posons $s(1)=\dfrac{\varpi}{2}$; (longueur du quart de lemniscate : $s(1)\cong 1{,}31$). Cette fonction est continue, impaire, strictement croissante de $[-1;+1]$ sur $\left[-\dfrac{\varpi}{2};+\dfrac{\varpi}{2}\right]$, ce qui permet de définir la fonction réciproque φ continue, impaire, strictement croissante, de $\left[-\dfrac{\varpi}{2};+\dfrac{\varpi}{2}\right]$ sur $[-1;+1]$. En remarquant que le changement formel u= - it dans $\displaystyle\int_0^{ix}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\int_0^x\frac{idu}{\sqrt{1-u^4}}$ donne la relation s(ix) = is(x), Abel définit φ également sur $\left[-\dfrac{i\varpi}{2};+\dfrac{i\varpi}{2}\right]$ en posant $\varphi(is) = i\varphi(s)$ et introduit par ailleurs les fonctions f et F définies par $f(s)=\sqrt{1-\varphi^2(s)}$ et $F(s)=\sqrt{1+\varphi^2(s)}$. Le principal problème est alors de mettre en place les formules d'addition **(1)** :

$$\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varphi(\alpha)f(\beta)F(\beta)+\varphi(\beta)f(\alpha)F(\alpha)}{1+\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)}=\frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}\ ;\text{ où } u=\varphi(\alpha) \text{ et } v=\varphi(\beta).$$

$$f(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}-uv\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}}{1+u^2v^2}$$

$$F(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}+uv\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}}{1+u^2v^2}.$$

[6] Terme utilisé par Gauss dans des papiers qu'il a laissés à sa mort : Gauss Nachlass, Werke III p. 404. Nous n'utiliserons pas ce terme dans la suite.
[7] Méthode proposée par Darboux in *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, t.IV, p. 85, Paris 1867.Cf. A. Enneper, *Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte*, p. 140.

4. Démonstration.[7]

On a $\frac{du}{d\alpha} = \sqrt{1-u^4}$; $\frac{d^2u}{d\alpha^2} = -2u^3$. De même, si $r = \varphi(\gamma)$ avec $\gamma = \alpha + \beta$ et en considérant β comme fixé, $\frac{dr}{d\alpha} = \sqrt{1-r^4}$; $\frac{d^2r}{d\alpha^2} = -2r^3$; donc $\frac{d}{d\alpha}\left[r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha}\right] = 2ru(r^2-u^2)$ et $\left(r\frac{du}{d\alpha}\right)^2 - \left(u\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 = (r^2-u^2)(1+r^2u^2)$. De sorte que $\dfrac{\frac{d}{d\alpha}\left(r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha}\right)}{\left(r\frac{du}{d\alpha}\right)^2 - \left(u\frac{dr}{d\alpha}\right)^2} = \frac{2ru}{1+r^2u^2}$, ou encore : $\dfrac{\frac{d}{d\alpha}\left(r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha}\right)}{r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha}} = \left(\frac{2ru}{1+r^2u^2}\right)\frac{d}{d\alpha}(ru)$. En conséquence $r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha} = k(1+r^2u^2)$, où k est une constante, ce qui s'écrit également : $\frac{\varphi(\alpha+\beta)\varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha)\varphi'(\alpha+\beta)}{1+\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\alpha+\beta)} = k$.

Prenons $\alpha = 0$; alors $\varphi'(\alpha) = 1$, ce qui donne $k = \varphi(\beta)$. Finalement : $v = \frac{r\sqrt{1-u^4} - u\sqrt{1-r^4}}{1+u^2r^2}$, et par permutation et changement de signe : $r = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}$. Les égalités pour $f(\alpha+\beta)$ et $F(\alpha+\beta)$ s'en déduiront à partir de leurs définitions.

Ces relations permettent de définir la fonction φ sur le carré $\left[-\frac{\varpi}{2};+\frac{\varpi}{2}\right] \mathrm{x} \left[-\frac{i\varpi}{2};+\frac{i\varpi}{2}\right]$ par

(2) $\varphi(\alpha+i\beta) = \frac{u\sqrt{1-v^4} + iv\sqrt{1-u^4}}{1-u^2v^2}$ avec $u = \varphi(\alpha)$; $\varphi(i\beta) = i\varphi(\beta) = iv$, sauf pour $uv = \mp 1$. D'autre part on a également $f(i\beta) = F(\beta)$ et $F(i\beta) = f(\beta)$.

5. Un peu d'histoire : le grand théorème d'Abel.

La formule d'addition **(1)** a été découverte, un peu par tâtonnement, par Euler en 1752 et généralisée un peu plus tard sous une forme que nous pouvons écrire:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$$, pour un polynôme $P(t) = A + Bt^2 + Ct^4$, avec

$$r = A\frac{x\sqrt{P(y)} + y\sqrt{P(x)}}{A - Cx^2y^2}.$$

Cette formule d'addition sera le point de départ d'une des plus fécondes théories initiée par Abel qui a tenté de traiter le cas plus général des intégrales que l'on appelle aujourd'hui

Intégrales abéliennes dans un grand mémoire composé en 1826 pour être soumis à l'Académie des Sciences de Paris. Il y énonce un théorème qui généralise le résultat d'Euler ci-dessus :

Si l'on a plusieurs fonctions dont les dérivées peuvent être racines d'une même équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une même variable, on peut toujours exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, pourvu qu'on établisse entre les variables des fonctions en question un certain nombre de relations algébriques.

Abel avait beaucoup misé sur ce mémoire intitulé : *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes,* dont il parle à plusieurs reprises dans ses lettres[8] : *J'ai achevé un grand mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendantes pour le présenter à l'Institut. Cela aura lieu lundi. Je l'ai montré à Cauchy ; mais c'est à peine s'il a voulu y jeter les yeux. Et j'ose dire sans me vanter qu'il est bon. Je suis curieux d'entendre le jugement de l'Institut.* L'Institut avait désigné Cauchy et Legendre comme juges , et le premier également comme rapporteur, mais apparemment le mémoire a été mis de côté et oublié ! On imagine Abel attendant la réponse de l'Institut à un ouvrage qu'il jugeait excellent ; d'abord avec patience et confiance, sachant bien que son mémoire nécessitait un travail important de lecture et d'appropriation ; puis avec une anxiété croissante lorsqu'il dut quitter Paris sans avoir aucune nouvelle, après Noël 1826. En fait Abel mourra le 6 avril 1829 sans avoir reçu de réponse. Jacobi qualifiera ce théorème de *peut-être la plus importante découverte de ce qu'a fait dans les mathématiques le siècle dans lequel nous vivons.* Quant à Legendre, il l'appellera *monumentum aere perennius.* Il ne sera publié qu'en 1841[9].

6. Périodes.

Comme $f(\frac{\varpi}{2}) = F(\frac{i\varpi}{2}) = 0$, la fonction φ n'est pas définie pour $uv = \mp 1$, c'est-à-dire pour $\mp\frac{\varpi}{2}(1\mp i)$. Par contre on obtient $\varphi(\alpha + \frac{\varpi}{2}) = \sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \varphi(-\alpha + \frac{\varpi}{2})$ par les relations **(1)**. Ce qui donne : $\varphi(\varpi + \alpha) = \varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha)$ et $\varphi(2\varpi + \alpha) = \varphi(\alpha)$.

La fonction φ ainsi prolongée au moyen des relations **(1)** est périodique de période 2ϖ. On met de même en évidence la période imaginaire $2i\varpi$ et plus généralement les périodes $2(m\varpi + in\varpi)$, $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$. L'outil principal de la division de la lemniscate est maintenant en place.

7. Bissection d'un arc de lemniscate.

Soient $\alpha = \beta = \frac{s}{2}$; $v = u = \varphi(\frac{s}{2})$; alors $\varphi(s) = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$;

$$f(s) = \frac{1-2u^2-u^4}{1+u^4} \quad ; \quad F(s) = \frac{1+2u^2-u^4}{1+u^4}.$$

En nous limitant à $0 \le s \le \varpi$, et en posant $x = \varphi(\frac{s}{2})$; $y = f(\frac{s}{2})$; $z = F(\frac{s}{2})$ nous avons :

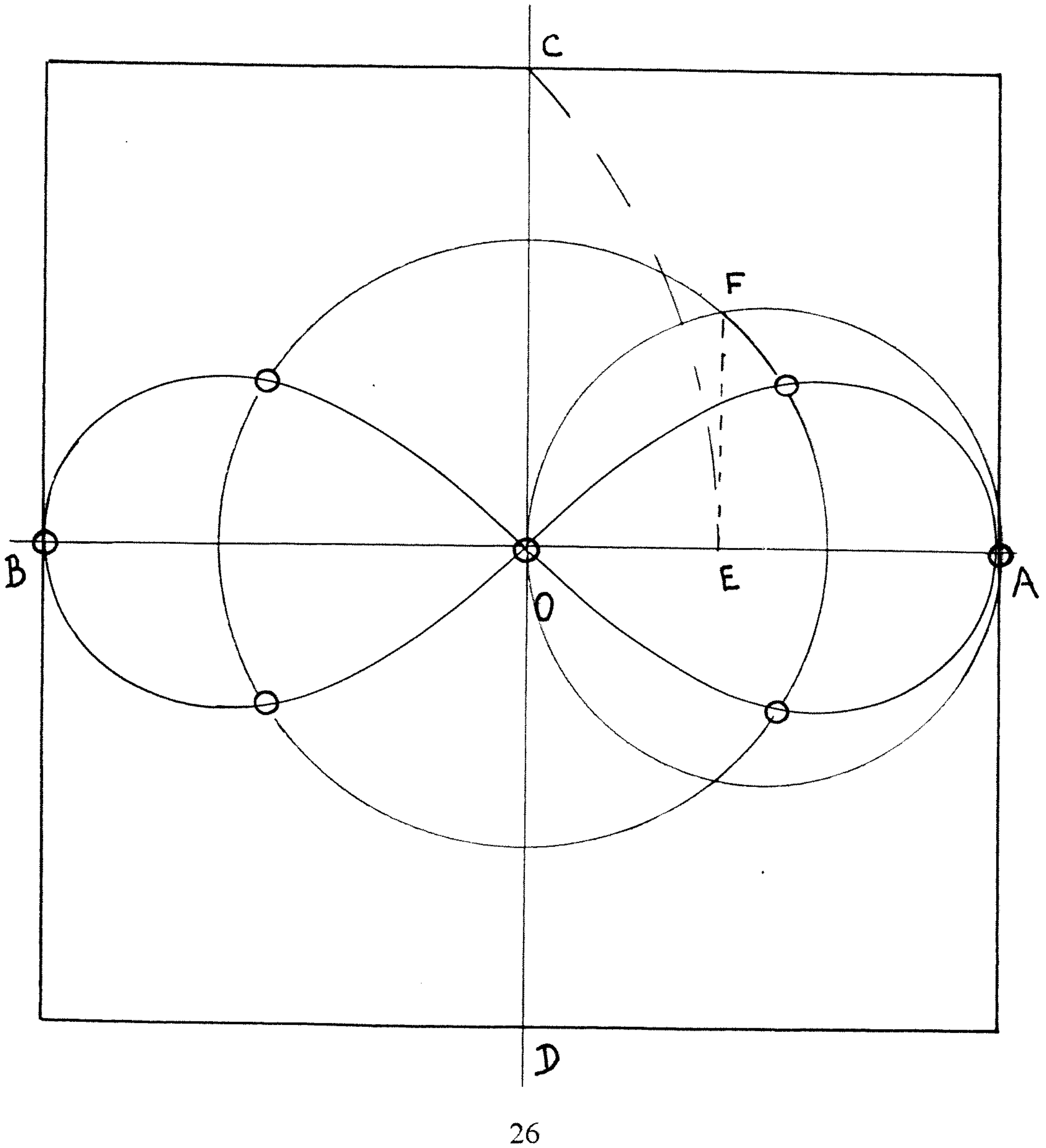
[8] Voir l'article dans ce n° de l'Ouvert :*Histoire des mathématiques par correspondance.*

[9] Houzel Ch., *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes,* in Abrégé d'histoire des mathématiques, t. II, p.74.

$f(s)=\dfrac{1-2x^2-x^4}{1+x^4}$; $F(s)=\dfrac{1+2x^2-x^4}{1+x^4}$. D'où l'on tire $x^2=\dfrac{F(s)-1}{f(s)+1}=\dfrac{1-f(s)}{1+F(s)}$ et comme $y^2=1-x^2$ et $z^2=1+x^2$ on a aussi : $y^2=\dfrac{F(s)+f(s)}{1+F(s)}$ et $z^2=\dfrac{F(s)+f(s)}{1+f(s)}$.

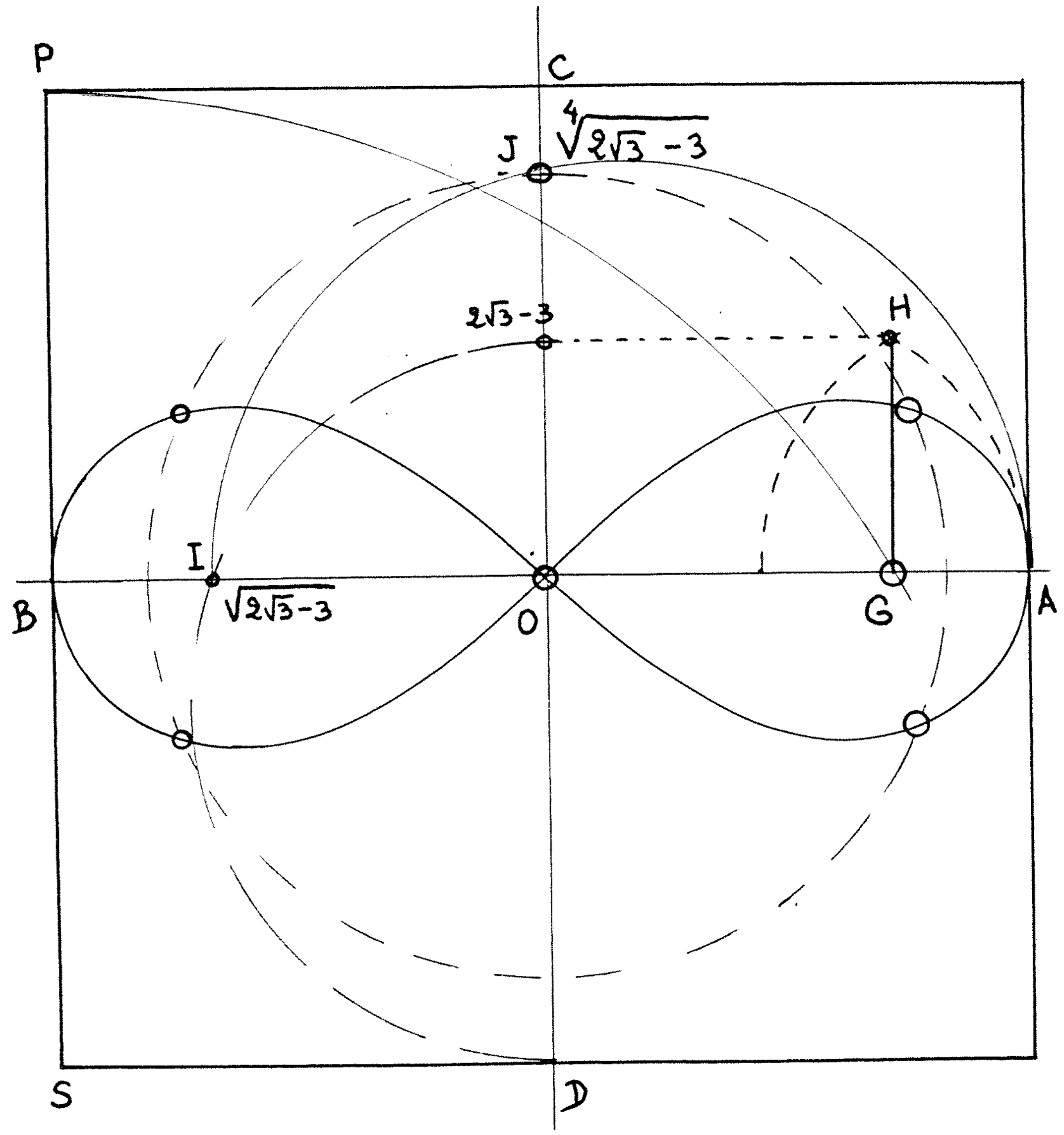
En particulier pour $s=\dfrac{\varpi}{2}$, le quart de lemniscate est partagé en deux. Dans ce cas : $f(s)=0$; $F(s)=\sqrt{2}$ donc $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Cette longueur est constructible à la règle et au compas, de la manière suivante : la lemniscate étant inscrite dans le carré d'axes de symétrie (BOA) et (COD), tracer l'arc de cercle de centre B et de rayon BC= $\sqrt{2}$, qui coupe (OA) en E. La perpendiculaire en E à (OA) coupe le cercle de diamètre [OA] en F. OF est la longueur $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ cherchée . (Rappelons que OA = 1).
D'une manière plus générale, pour s fixé, l'arc moitié, d'origine O est obtenu en construisant

$$x=\sqrt{\frac{F(s)-1}{f(s)+1}}=\sqrt{\frac{1-f(s)}{1+F(s)}} \text{ avec } F(s)=\sqrt{1+\varphi^2(s)} \text{ et } f(s)=\sqrt{1-\varphi^2(s)}.$$



8. Trisection d'une demi lemniscate.

En appliquant**(1)** à $\alpha = 2s$ et $\beta = s$ on obtient : $\varphi(3s) = \dfrac{u(3-6u^4-u^8)}{1+6u^4-3u^8}$ avec $u = \varphi(s)$. Prenant $3s = \varpi$, on obtient $u = \varphi(s) = \varphi(\frac{\varpi}{3})$ comme racine de l'équation **(3)** : $u^8 + 6u^4 - 3 = 0$, soit $u = \sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}$, constructible comme suit : le cercle de centre S de rayon SP=2 coupe [BA] en G tel que AG = $2-\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}-3$ = GH est la hauteur d'un triangle équilatéral de demi base AG. Il est alors facile de construire successivement les longueurs OI = $\sqrt{2\sqrt{3}-3}$ puis $u = \sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}$ = OJ. Remarquons que les huit solutions de l'équation **(3)** correspondent aux huit valeurs de $\varphi\left[\frac{\varpi}{3}(1+2m+2in)\right]$ déterminées par les solutions de $3s = \varpi + 2\varpi(m+in)$ m et n entiers : $0 \le m \le 2$; $0 \le n \le 2$; le couple (1,0) correspondant à la solution u=0 étant laissé de côté., donc : $(m,n) \in [(0,1);(0,2);(0,0);(1,1);(1,2);(2,0);(2,1);(2;2)]$.



Nous laissons au lecteur le soin de calculer $\varphi(\frac{\varpi}{6})$ pour la division de la demi lemniscate en six.

Indication : $x = \varphi(\frac{\varpi}{6}) = \varphi(\frac{1}{3}.\frac{\varpi}{2}) \Leftrightarrow \varphi(3s) = 1$, (avec $s = \frac{\varpi}{2}$)

$\Leftrightarrow u(3-6u^4-u^8) = 1+6u^4-3u^8 \Leftrightarrow (u+1)(t^2-2t-2)^2 = 0$ avec $t = u+\frac{1}{u}$.

(Réponse : $\varphi\left(\frac{\varpi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}+1-\sqrt{2\sqrt{3}}\right]$).On peut aussi réaliser la bissection de $s=\frac{\varpi}{3}$ par la méthode du § 7, qui donne $\varphi\left(\frac{\varpi}{6}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\sqrt{2\sqrt{3}-3}}-1}{\sqrt{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}+1}}$, dont on vérifiera l'égalité avec l'autre expression ci-dessus.

9. Division de la lemniscate en N parties égales.

Appliquons la relation **(2)** au cas où $\alpha = md$ et $\beta = \mu d$, avec m et μ entiers naturels tels que $m+\mu$ soit impair. Les relations **(1)** nous montrent facilement que $\varphi(kd)$, $f(kd)$, $F(kd)$ sont, pour k entier, des fractions rationnelles en $x = \varphi(d)$, $y = f(d)$, $z = F(d)$, avec en plus les relations $y^2 = 1-x^2; z^2 = 1+x^2$. On a en effet les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} \varphi[(n+1)d] = -\varphi[(n-1)d] + \dfrac{2\varphi(nd)f(d)F(d)}{1+\varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \\[2ex] f[(n+1)d] = -f[(n-1)d] + \dfrac{2f(nd)f(d)}{1+\varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \\[2ex] F[(n+1)d] = -F[(n-1)d] + \dfrac{2F(nd)F(d)}{1+\varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \end{cases}$$

Pour les premières valeurs de n on a de cette façon : $\varphi(2d) = \frac{2xyz}{1+x^4}$; $\varphi(3d) = \frac{x(3-6x^4-x^8)}{1+6x^4-3x^8}$;

$$\varphi(4d) = 4xyz\frac{1-5x^4-3x^8+x^{12}}{1+20x^4-26x^8+20x^{12}+x^{16}}\ ^{10},$$

$$\varphi(5d) = \frac{x(5-2x^4+2x^8)(1-12x^4-26x^8+52x^{12}+x^{16})}{(1-2x^4+5x^8)(1+52x^4-26x^8+12x^{12}+x^{16})}$$

On peut montrer en particulier que pour n impair $\varphi(x)/x$ est une fraction rationnelle en x^4. On calculera alors $\varphi[(m+\mu i)d]$ par les formules **(1)** qui donnerons une expression de la forme

[10] Calculés par Gauss, in Gauss Nachlass, Werke III, p. 405.

$x\psi(x^2)$; où ψ est une fonction rationnelle. En changeant d en id , $\varphi(d)$ deviendra $\varphi(id) = i\varphi(d) = ix$ et $\varphi[(m+\mu i)d] = x.\psi(-x^2)$. Par conséquent $\psi(x^2) = T(x^4)$ où T est une fonction rationnelle de x. Le lecteur pourra par exemple vérifier que :

(4) $\varphi[(2+i)d] = x\dfrac{2-2x^8+i(1-6x^4+x^8)}{1-2x^4+5x^8}$, qui se simplifie en $xi\dfrac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}$ par le facteur commun $1-(1+2i)x^4$.

Comme le cas de la division par deux a déjà été traité, on peut supposer dans la suite que N est impair. De plus, lorsque N est de la forme N = 4n+1, on sait que N se décompose en somme de deux carrés : N = $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)$. Comme N est impair, il en est de même de $\alpha+\beta$, de sorte que **(5)** : $\varphi[(\alpha+i\beta)d] = x\dfrac{T}{S}$ où T et S sont des polynômes en x^4. En prenant $d = \dfrac{\varpi}{\alpha+i\beta}$ le premier membre de (5) est nul, et par conséquent $x = \varphi\left(\dfrac{\varpi}{\alpha+i\beta}\right)$ sera une racine de l'équation : T = 0. Abel démontre que cette équation est en fait de degré $4n = \alpha^2+\beta^2-1$, que ses racines sont les nombres $\pm\varphi\left(\dfrac{k\varpi}{\alpha+i\beta}\right)$, avec $1 \le k \le 2n$ et qu'elle est résoluble par les mêmes méthodes que Gauss a mises en place pour la division du cercle. En particulier si N=4n+1 est de la forme $1+2^n$, alors l'expression de $\varphi\left(\dfrac{\varpi}{4n+1}\right)$ ne contient que des racines carrées et donc est constructible à la règle et au compas. Voyons en l'illustration avec le cas N = 5 = 2^2+1.

Les égalités **(4)** nous fournissent les valeurs de $\varphi\left(\dfrac{k\varpi}{2+i}\right)$ pour $1 \le k \le 4$ comme racines de l'équation $1-2i-x^4 = 0$, c'est-à-dire comme racines quatrièmes de 1-2i. L'une de celle-ci s'écrit : $x_0 = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}} - i\sqrt{2\sqrt[4]{5}-\sqrt{2\sqrt{5}+2}}\right] = \dfrac{1}{2}(u-iv)$. Alors :

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{5}\right) = \varphi\left(\frac{\varpi}{2+i}+\frac{\varpi}{2-i}\right) = \varphi\left(\frac{4\varpi}{5}\right) = \varphi\left(\varpi-\frac{4\varpi}{5}\right).$$

Par les formules **(1)** avec $\alpha = \dfrac{\varpi}{2+i}$ et $\beta = \dfrac{\varpi}{2-i}$, on a alors :

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{5}\right) = \frac{u-v}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}} - \sqrt{2\sqrt[4]{5}-\sqrt{2\sqrt{5}+2}}}{\sqrt{5}+1} \text{ ; et de même :}$$

$$\varphi\left(\frac{2\varpi}{5}\right) = \frac{u+v}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}} + \sqrt{2\sqrt[4]{5}-\sqrt{2\sqrt{5}+2}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Remarque . L'équation T = 0 correspondant à $\varphi(\varpi)=0$, donne le partage de la demi lemniscate en cinq parties égales. Mais lorsqu'on a ce partage là, on a immédiatement aussi le partage de la lemniscate entière, en prenant un point sur deux. Cependant le cas N = 5 est trop immédiat au niveau de la résolution de l'équation T = 0 pour manifester toute la puissance de l'outil algébrique mis en place par Abel. Voyons celle-ci à l'œuvre dans le cas N = 17.

10. Partage de la lemniscate en dix-sept parties égales.

Il s'agit de déterminer les valeurs de $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$; $1\le k\le 16$. Or $\frac{2k\varpi}{17}=\frac{k\varpi}{1-4i}+\frac{k\varpi}{1+4i}$, de sorte qu'il suffit de calculer les $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{1+4i}\right)$ qui, combinés avec leurs conjugués, donneront les $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$. Définissons s par la relation :

(6) $\varphi(s)=\pm\varphi(4is)=\pm i\varphi(4s)\Leftrightarrow s=\pm 4is+2(\lambda\varpi+i\mu\varpi)$, ou $s=\frac{\varpi(\lambda+i\mu)}{1\pm 4i}$. Mais l'ensemble des valeurs $s_k=\frac{k\varpi}{1\pm 4i}$ coïncide avec l'ensemble des solutions de l'équation **(6).** En effet, cette dernière a pour solutions les nombres $s_{(\lambda,\mu)}=\frac{\varpi}{1\pm 4i}(\lambda+i\mu)$, mais on peut toujours trouver k,λ et μ de telle façon que $\frac{\varpi}{1+4i}(\lambda+i\mu)=\frac{k\varpi}{1+4i}+2\varpi(\lambda'+i\mu')$. Il suffit de vérifier les égalités $\begin{cases}\lambda=k+\lambda'-4\mu'\\ \mu=4\lambda'+\mu'\end{cases}$ ce qui se réalise avec $k=\lambda+4\mu$ [mod. 17] ; $\lambda'=\frac{\lambda+4\mu-k}{17}$ et $\mu'=\mu-4\lambda'$. De même avec $\frac{\varpi}{1-4i}(\lambda+i\mu)$.

Il y a donc 32 valeurs du type $s_k=\frac{k\varpi}{1\pm 4i}$; $1\le k\le 16$. Mais à cause de **(6)** on a : $\varphi^2(s_k)=-\varphi^2(s_{4k})=\varphi^2(s_{17-k})=-\varphi^2(s_{17-4k})$ pour k = 1 ; 2 ; 3 ; 6. Il n'y a par conséquent que huit valeurs distinctes de $\varphi^4(s)$. Cherchons en l'équation qui les admet comme racines.

Si $\varphi(s)=u$ alors $\varphi(2s)=\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$; $\varphi^2(2s)=\frac{4u^2(1-u^4)}{(1+u^4)^2}$; $\varphi^2(4s)=\frac{4\varphi^2(2s)(1-\varphi^4(2s)}{[1+\varphi^4(2s)]^2}$.

La relation $\varphi^2(4s)$ = - $\varphi^2(s)$ donne alors :

$$u^2+\frac{16u^2(1-u^4)\left[(1+u^4)^4-16u^4(1-u^4)^2\right](1+u^4)}{\left[(1+u^4)^4+16u^4(1-u^4)^2\right]^2}=0$$; soit, en posant $u^4=x$:

(7) $x^8+24x^7+524x^6-1400x^5+886x^4-408x^3+748x^2-136x+17=0$

Cette équation se décompose, comme on le verra un peu plus bas, en les deux suivantes à coefficients et racines conjuguées :

$$\begin{cases} x^4+(12-20i)x^3+(-10+28i)x^2+(-20-12i)x+1+4i=0 \text{ ; équation (8)} \\ x^4+(12+20i)x^3+(-10-28i)x^2+(-20+12i)x+1-4i=0 \text{ ; équation (9)} \end{cases}$$

Soit donc $x_1 = \varphi^4(s)$ l'une des racines de l'équation **(7).** Alors $x_2 = \varphi^4(2s)$ est aussi une racine.

Or $\varphi^2(2s)=\dfrac{4\varphi^2(s)\left(1-\varphi^4(s)\right)}{\left(1+\varphi^4(s)\right)^2}$ et $\varphi^2(4s)=\dfrac{4\varphi^2(2s)\left(1-\varphi^4(2s)\right)}{\left(1+\varphi^4(2s)\right)^2}=-\varphi^2(s)$. D'où :

$\dfrac{\varphi^2(2s)}{\varphi^2(s)}=\dfrac{4(1-x_1)}{(1+x_1)^2}=-\dfrac{(1+x_2)^2}{4(1-x_2)}$ et $\varphi^2(s).\varphi^2(2s)=\dfrac{4x_1(1-x_1)}{(1+x_1)^2}=-\dfrac{4x_2(1-x_2)}{(1+x_2)^2}$. En posant

$x_1+x_2=y$ et $x_1.x_2=z$, on obtient y et z par élimination de z entre les deux équations :

$\begin{cases} 16(1-y+z)+(1+y+z)^2=0 \\ y-y^2+6z-yz-2z^2=0 \end{cases}$ qui nous donne $z=\dfrac{-y^2+27y-34}{3y+42}$ et

$y^4+24y^3+488y^2-1632y+1360=0$, laquelle se décompose en $\begin{cases} y^2+(12-20i)y+(-28+24i)=0 \\ y^2+(12+20i)y+(-28-24i)=0 \end{cases}$

En posant $r=\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}$ l'une des racine carrée de 1+4i, on aura pour y les quatre valeurs suivantes : $\begin{cases} y_1=-6+10i+6ir\,; & y_2=-6+10i-6ir \\ y_3=-6-10i-6i\bar{r}\,; & y_4=-6-10i+6i\bar{r} \end{cases}$, où $\bar{r}$ est le conjugué de r.

Les valeurs correspondantes de z sont $\begin{cases} z_1=9+2i+(4-2i)r\,; & z_2=9+2i-(4-2i)r \\ z_3=9-2i+(4+2i)\bar{r}\,; & z_4=9-2i+(4+2i)\bar{r} \end{cases}$

Les deux équations $x^2 - y_1x + z_1 = 0$ et $x^2 - y_2x + z_2 = 0$ donnent par leur produit :

$x^4 - (y_1 + y_2)x^3 + (y_1y_2 + z_1 + z_2)x^2 - (y_1z_2 + y_2z_1)x + z_1z_2 = 0$, soit justement l'équation **(8)** :

$$x^4 + (12 - 20)x^3 + (-10 + 28i)x^2 + (-20-12i)x + 1+4i = 0$$

Les racines de cette dernière sont donc données par $\begin{cases} \dfrac{y_1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{y_1^2}{4}-z_1} \\ \dfrac{y_2}{2}\pm\sqrt{\dfrac{y_2^2}{4}-z_2} \end{cases}$; mais

$\dfrac{y_1^2}{4}-z_1=-34-68i+(-34-16i)r=[-34-16i+(-18+4i)r]r=[-1+4i+(1+2i)r]^2.r$.

De sorte que, en désignant par ρ une racine quatrième de 1+4i :

$\rho = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\sqrt{17}+\sqrt{2\sqrt{17}+2}} + i\sqrt{2\sqrt{17}-\sqrt{2\sqrt{17}+2}}\right]$, les racines de l'équation **(8)** sont alors

données par $\begin{cases} x_1 = -3+5i+3ir+\rho[-1+4i+(1+2i)r] \\ x_2 = -3+5i+3ir+\rho[-1+4i+(1+2i)r] \\ x_3 = -3+5i-3ir+i\rho[-1+4i-(1+2i)r] \\ x_4 = -3+5i-3ir-i\rho[-1+4i-(1+2i)r] \end{cases}$ et celles de l'équation **(9)** par leur conjuguées.

Il reste maintenant à déterminer les expressions des $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$ à partir de la formule $\varphi(\alpha+\beta) = \frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}$, avec $u = \varphi\left(\frac{2k\varpi}{1+4i}\right)$ et $v = \varphi\left(\frac{2k\varpi}{1-4i}\right)$; donc si x est l'une quelconque des racines de (8) et $\bar{x}$ sa conjuguée, alors $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right) = \frac{\sqrt[4]{x}\sqrt{1-\bar{x}}+\sqrt[4]{\bar{x}}\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x\bar{x}}}$

Ces expressions n'ont évidemment qu'un intérêt tout théorique. Elles ont été calculées par L. Kiepert dans le *Journal de Crelle*, tome LXXV, en 1873. Abel lui-même n'a jamais publié de calcul effectif pour le partage de la lemniscate, se contentant d'énoncer sa possibilité, et donnant la méthode générale. Celle-ci est un peu différente de celle de Kiepert et généralise la méthode que Gauss avait développée pour la division du cercle, en s'appuyant sur ses propres recherches concernant la résolution des équations algébriques et développées dans le mémoire *Sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*[11].

Exercice. Montrer que la division de la lemniscate en 13 parties égales se ramène à la résolution de deux équations du troisième degré : $x^3-(11\pm10i)x^2+(7\pm4i)x+3\mp2i=0$

Bibliographie.

Abel N.H., *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, Oeuvres complètes , (Sylow, Lie éd.s), Christiania, 1881, vol. I , p. 478-507.

Abel N.H., *Recherches sur les fonctions elliptiques*, Journal für die reine und angew.Mathematik, Bd. 2, p.101-181, Bd.3, p.160-190. 1827-1828. Oeuvres complètes (Sylow, Lie éd.s), Christiania, 1881, vol. I, p.263-388.

Cooke R., *Abel's Theorem*, in *The history of modern mathematics*, vol. I, p. 389-424, ed. D. Rowe, J. McCleary, Academic Press, 1989.

Enneper A., *Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte*, Halle, 1876.

Friedelmeyer J-P., *Des équations qui déterminent les sections circulaires*, in *L'Ouvert*, n° 46 et 47, mars et juin 1987, Revue de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg.

Friedelmeyer J-P., *Emergence du concept de groupe*, Fragments d'histoire des mathématiques III, Brochure A.P.M.E.P. n° 83, 1991.

Gauss C.F., *Recherches arithmétiques*, traduites par A. C. M. Poullet Delisle, Paris, 1807.

Gauss C.F., *Elegantiores integralis* $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ *proprietates*, Gauss Nachlass, Werke, Göttingen, 1870-1927, Vol III.

Houzel Ch., *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*, in *Abrégé d'histoire des mathématiques*, t. II, Paris Hermann, 1978, p.1-113.

Kiepert L., *Siebzehntheilung des Lemniscatenumfangs durch alleinige Anwendung von Lineal und Cirkel*, Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd.75, p.255-263, 1873.

Loria G., *Spezielle algebraische und transcentente ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, Leipzig, Teubner 1902.

[11] Pour une étude de ce mémoire, cf .Friedelmeyer J-P, *Emergence du concept de groupe*, p.85 à 97.

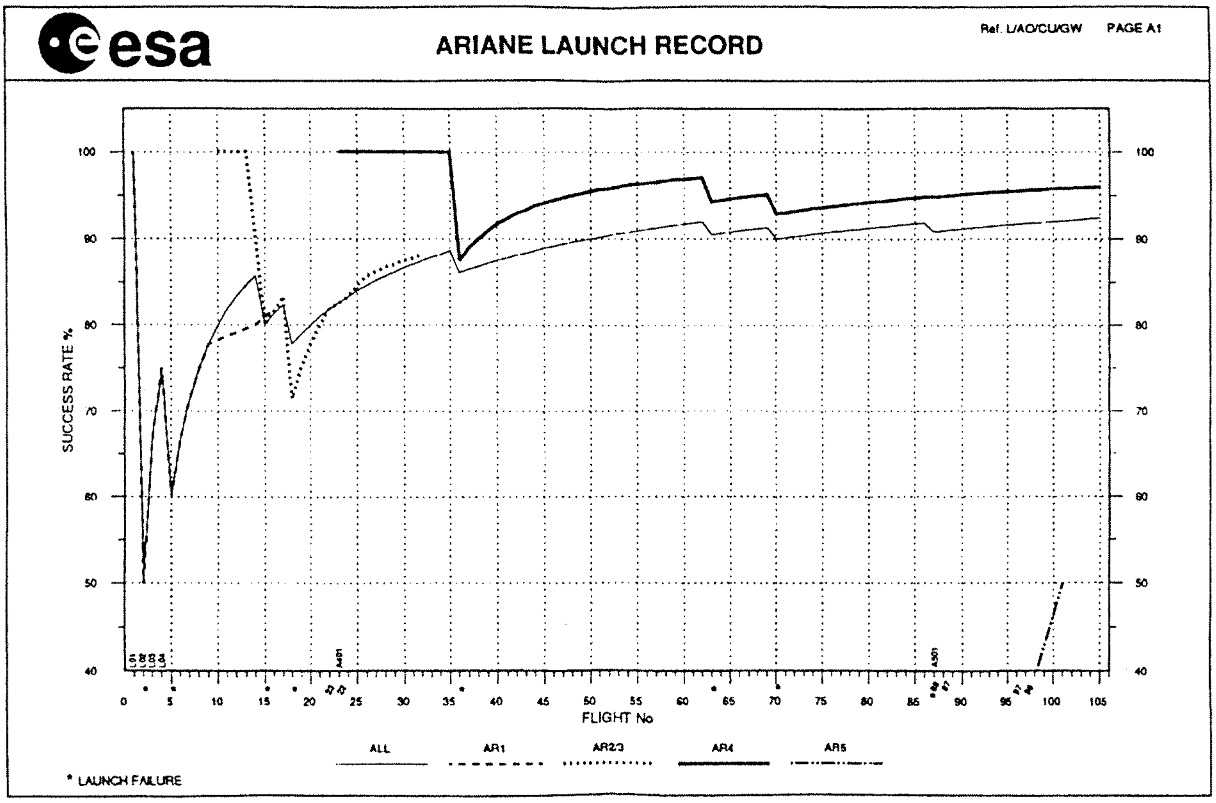
Fiabilité du lanceur Ariane

Jean LEFORT

Il y a quelque temps, après le lancement réussi de la 100ᵉ fusée Ariane, les différents journalistes se sont extasiés à grand renfort de cocorico, sur le taux élevé de succès de notre lanceur de satellites. Et d'avancer le nombre de 96,2 % . Bizarre ! je pense qu'en divisant par 100 on obtient un nombre entier en pourcentage. J'ai voulu en avoir le cœur net et j'ai été me renseigner du côté de l'Agence Spatiale Européenne (ESA).
D'énormes intérêts financiers sont en jeu (entre autre le marché de l'assurance). Le lancement d'un satellite coûte une petite fortune. Le marchandage dans tous les domaines est de rigueur et tous les arguments doivent être utilisés pour diminuer ce coût afin de rester compétitif sur un marché concurrentiel. Tout le monde sait qu'un échec bien analysé est source de progrès puisque le risque de panne correspondant est fortement diminué. Il est donc normal de s'attendre à une augmentation du taux de réussite. Mais comment évaluer le taux de réussite du prochain lancement et en tirer un argument de vente ? Sans entrer dans une théorie complexe et sans surtout justifier mathématiquement les propositions, je donne quelques indications sur les méthodes d'évaluation.

Évolution du taux de réussite

Le **taux de réussite** est tout simplement le rapport du nombre de lancements réussis au nombre total de lancements. La figure ci-dessous donne l'évolution du taux de réussite en fonction du nombre de lancements pour Ariane 1, 2, 3, 4 et 5 jusque et y compris le 105ᵉ vol.



Après le 100^e vol le taux de succès est de (100–7)/100 = 93 . (Après le 105^e vol il est de 93,1). L'objectif que s'était fixé les concepteurs d'Ariane 4 d'un taux supérieur à 90% est largement atteint puisque pour ce seul lanceur le taux est de 95%. Pour Ariane 5, les concepteurs se fixe un but à 98,5 %, mais les vols de qualification n'entrent pas en compte pour ce calcul.
Les échecs concernent les vols L02, L5, V15, V18, V36, V63 et V70 (ainsi que le vol 88 qui est le premier vol de qualification d'Ariane 5). Il est toutefois faux de considérer qu'à l'avenir le taux de réussite restera aux environs de 95%. En effet, ce taux concerne les vols réalisés et n'est rien d'autre que la moyenne des réussites passées. Or ce qui intéresse l'utilisateur est la probabilité de réussite du prochain vol et non pas celle des vols antérieurs. Ce taux de réussite moyen ne tient pas compte du fait que les faiblesses qui ont entraîné l'échec sont corrigées et que par conséquent la fiabilité du lanceur augmente.

La figure ci-dessus montre que le taux de réussite de la fusée Ariane augmente, bien que les débuts n'aient pas été des plus faciles. Cela confirme le fait que les échecs ne sont pas distribués uniformément sur l'ensemble des vols. Le tableau ci-dessous montre d'une autre manière la fiabilité de plus en plus grande d'Ariane. Il s'agit des taux de succès d'Ariane 1, d'Ariane 2 ou 3 et d'Ariane 4. Au fur et à mesure que le lanceur augmentait en puissance et en dépit du fait que cela impliquait une complexité croissante de la fusée, le taux de succès passait de moins de 82% à plus de 94 %. Cette comparaison n'est valable que parce qu'il s'agit de la même population de lanceurs, utilisant la même technologie dans le même environnement industriel.

	Lancements	Échecs	% de réussite
Ariane 1	11	2	81,8
Ariane 2 ou 3 [1]	17	2	88,2
Ariane 4	53	3	94,4

Évaluation de la fiabilité

La **fiabilité** est la probabilité de réussite du prochain vol. Il s'agit là d'une prévision voire d'une prédiction. Le calcul repose sur de nombreuses hypothèses. Nous en avons vu quelques unes dans le paragraphe précédent. Nous allons en donner d'autres ici. Ce qui est important c'est que ces hypothèses sont suffisamment simples pour être admises par tous et en particulier par les clients ce qui permet de négocier convenablement les prix de vente et d'essayer d'avoir des assurances moins chères.
Les hypothèses que nous développons conduisent au modèle de Weibüll qui est le plus courant.

Soit $e(n)$ le nombre d'échec après le n^e lancement. Le taux d'échec vaut $t(n) = \frac{e(n)}{n}$. Nous allons supposer que ce taux décroît vers zéro quand n augmente indéfiniment. La famille de fonctions la plus simple qui permet de décrire un tel phénomène est $t(n) = \frac{e(n)}{n} = \alpha\, n^{\beta}$ où β est négatif , ce qui conduit à $e(n) = \alpha\, n^{\beta+1}$. Il n'est pas illogique de supposer que le nombre

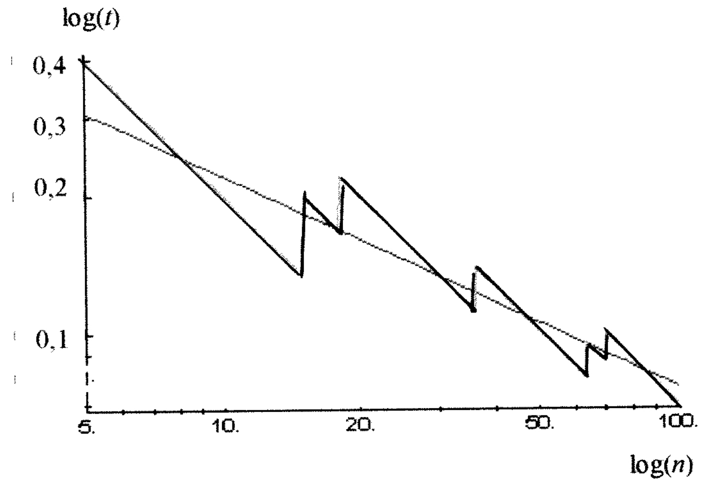
[1] Le regroupement s'explique car Ariane 3 n'est autre qu'Ariane 2 équipée de 2 propulseurs d'appoint à poudre.

d'échecs augmente avec n et par suite il se peut que β+1 soit positif. De plus nous n'accepterons cette formule qu'après un nombre suffisant de lancements de façon que $t(n)$ soit inférieur à 40 % . Toute la question est de déterminer les paramètres α et β . En fait, seul ce dernier nous intéresse comme nous allons le voir.

Ce que nous voulons calculer c'est le risque d'échec du prochain vol. Or le risque sur p vols consécutifs à partir du n^e est $\dfrac{e(n+p) - e(n)}{p}$. Par conséquent le risque sur le prochain vol est tout simplement la quantité $e(n+1) - e(n)$, quantité qui n'a aucune raison d'être entière dans le modèle adopté ; c'est même un nombre strictement plus petit que 1 . En utilisant la formule des accroissements finis, nous pouvons remplacer $e(n+1) - e(n)$ par la dérivée en n de e : α $(\beta + 1)\, n^{\beta} = (\beta + 1)\, \dfrac{e(n)}{n} = (\beta + 1)\, t(n)$. Ce remplacement n'est pas rigoureux, mais ce que nous cherchons ce sont des ordres de grandeurs et nous ne voulons pas ici justifier tous les calculs par des encadrements fins.

Nous posons $R = (\beta + 1)\, t(n)$ et nous admettons que R est **le risque** sur le prochain vol. Le taux d'échecs étant connu, il nous suffit de connaître β .
Pour évaluer β nous utilisons une régression linéaire. Pour cela il nous faut trouver une transformation simple qui permette de passer de la loi $e = \alpha\, n^{\beta+1}$ à une loi affine. Le logarithme répond à la question. Nous avons $\log(e) = (\beta + 1) \log(n) + \log(\alpha)$ ou encore $\log(t) = \beta \log(n) + \log(\alpha)$. La quantité β est donc intimement liée à la pente de la droite de régression obtenue. En fait suivant la méthode de calcul de cette droite, moindre carré, axe principal d'inertie, ... chacune des deux formules ne donnera pas tout à fait le même résultat ce qui n'est pas très important puisque nous ne nous intéressons qu'à des ordres de grandeur.

Dans le modèle de Weibüll on utilise la deuxième formule qui donne directement β . Sur le graphique ci-dessous, nous avons représenter $\log(t)$ en fonction de $\log(n)$ à partir de $n = 5$, pour avoir $t < 40$ % , jusqu'à $n = 100$ et tracer la droite de régression (les calculs ont été fait à l'aide du logiciel Maple). La pente est très voisine de $-0{,}464$. Le risque sur le 101^e vol était donc de $0{,}536 \times \frac{7}{100}$ voisin de $0{,}038$ soit une fiabilité de 96,2 % . C'est bien le taux annoncé par les journalistes. Au 105^e vol le risque est descendu aux environs de $0{,}526\, t(n)$ (et une fiabilité de 96,5 %) ce qui veut dire que le risque sur le prochain vol est sensiblement moitié moindre que ne le laisse supposer la simple valeur $t(n)$.



Conclusion mathématique

Nous venons d'évaluer la fiabilité d'une production industrielle. Cette évaluation correspond-elle à la réalité, autrement dit, les simplifications et les hypothèses faites sont-elles justifiées après coup par l'adéquation des prévisions à la réalité ? Malheureusement nous ne pouvons répondre à cette question, car si le modèle de Weibüll a fait ses preuves dans de nombreux domaines industriels où l'on sort des milliers de pièces identiques, il est impossible de le justifier dans le présent cas sur moins d'une centaine d'expériences. Les lois statistiques sont telles qu'on ne peut conclure à la pertinence de ce modèle sur un tel nombre car l'écart n'est que d'environ 3 % [2].

Le seul intérêt de ce modèle est sa simplicité et le fait que tout les acteurs sont d'accord pour admettre que la fiabilité augmente avec le nombre de lancers. Le modèle de Weibüll fonctionne un peu comme une note qui permet de classer différents objets d'une même classe sans que l'on ait pu toujours expliciter tous les critères qui entrent en jeu.

Aspects économiques et techniques

On pourrait penser que les calculs précédents sont pris en compte par les assureurs. Le risque sur le prochain lancement étant sensiblement la moitié du taux d'échec, les frais d'assurance devraient être divisés par presque 2 ce qui n'est pas négligeable. En fait, il y a trois types d'assurance : L'assurance sur le lanceur, dont nous venons d'évaluer les risques, l'assurance sur le satellite et l'assurance responsabilité civile pour couvrir d'éventuels dommages créés par la

[2] À titre de comparaison, une pièce de monnaie qui, lancée 100 fois, indique pile 56 fois est-elle plus juste que celle qui indique pile 49 fois dans ce même type d'expérience ? Les lois statistiques ne permettent pas de répondre.

retombée du lanceur au sol. En fait le marché des lanceurs est relativement étroit et pratiquement la concurrence ne se joue encore qu'entre américains, européens et russes.
Ariane 4 existe en plusieurs versions. La version de base (Ariane 40) est capable de placer 2,6 T en orbite de transfert géostationnaire[3] ; La version la plus puissante (Ariane 44L avec 4 boosters d'appoints) permet d'emporter 4,8 T dans les mêmes conditions. Le lancement d'un satellite coûte environ 170 millions de francs la tonne, tarif auquel il faut ajouter le prix du satellite lui-même qui est du même ordre de grandeur. Ainsi les satellites commerciaux de télécommunication coûtent de 500 millions à 1 milliard de francs, mais les satellites de recherche ou expérimentaux sont bien plus chers. Par exemple SPOT revient à 3 milliards, Hubble à 8 milliards, etc.

Actuellement les assureurs ont tendance à considérer globalement l'ensemble des lanceurs (russes, américains ou européens)[4] et proposent d'assurer les vols et le matériel européen pour 17 % du prix. C'est un tarif peu avantageux (même par rapport au taux d'échec de 7 %) pour Arianespace qui dispose, comme nous l'avons vu, d'une très grande fiabilité (la meilleure ?). C'est pourquoi cette société négocie actuellement une baisse des taux sur la base des calculs précédents en essayant de mettre en place un système de bonus-malus. Pour appuyer sa démarche, elle propose aux clients une assurance sur le seul lancement à un tarif nettement plus avantageux. Rappelons que le risque est inférieur à 4 %. Le client doit toutefois trouver un assureur autre pour la charge utile.
Notons qu'aucun assureur ne prend en charge les vols de qualification. Le premier vol d'Ariane 5 qui s'est achevé par une perte de contrôle au bout de 37 secondes et une explosion à la 42^e seconde à la suite d'une prise d'incidence trop importante, n'était pas assuré. Les satellites de recherche qui étaient à bord ont été perdus et le coût de remplacement est à la charge des organismes qui les avaient fait construire (finalement à la charge des états). Le deuxième vol d'Ariane 5 emportait deux maquettes de satellites instrumentées permettant de connaître l'environnement vu par les satellites, la maquette supérieure à été mise à poste, la seconde, nominalement est restée sur l'étage supérieur. De plus ce vol a embarqué un satellite expérimental entièrement conçu par l'université de Delft permettant de faire différentes mesures et photographies durant le vol et une expérience avait pour objectif de mesurer la concentration de l'oxygène atomique ; l'ensemble de ces expériences a parfaitement fonctionné à la grande satisfaction des opérateurs.

Il est donc indispensable d'avoir une fiabilité maximum et de mettre tout en œuvre pour que cette fiabilité augmente. Cela implique :

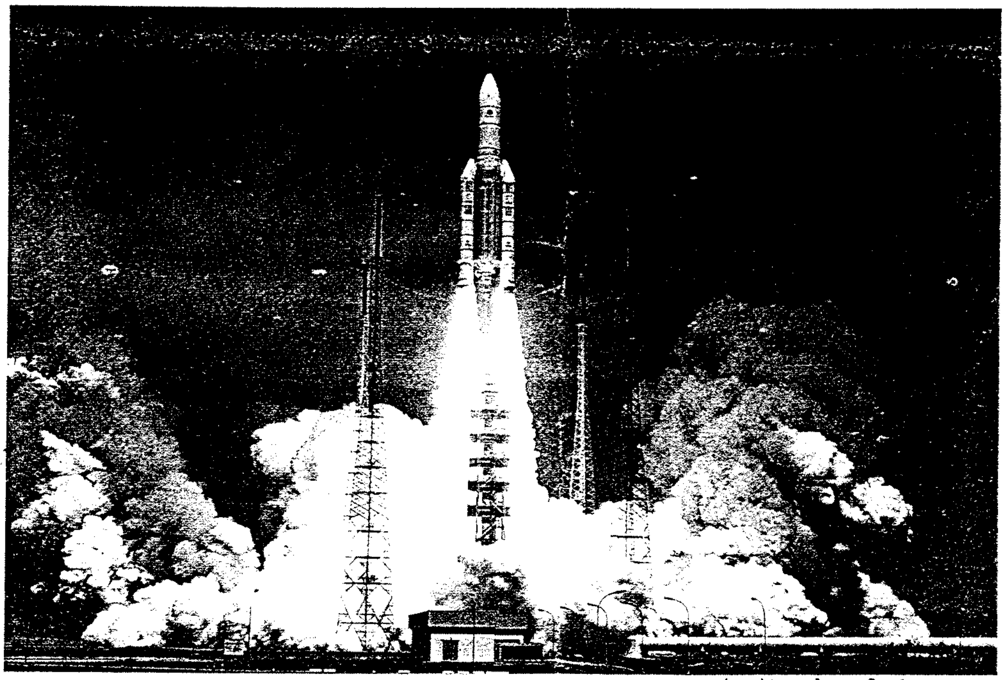
- un suivi régulier auprès des industriels qui fabriquent le lanceur tant en ce qui concerne le cahier des charges qui est régulièrement précisé, qu'en ce qui concerne les contrôles en fabrication et les tests de recette,
- une analyse détaillée et sans complaisance des moindres incidents en vol, bien sûr, mais aussi dans les différentes phases de préparation du lanceur,
- des tests simulés ou en vraie grandeur à tous les stades,

[3] C'est-à-dire une orbite elliptique dont l'apogée (le point le plus haut) est à 36 000 km. C'est au satellite de disposer d'un moteur (dit moteur d'apogée) lui permettant de circulariser l'orbite à l'altitude de 36 000 km où son mouvement propre est exactement compensé par la rotation de la Terre.
[4] Peut-être d'autres, mais je ne sais si quelqu'un est prêt à assurer un lanceur chinois ? Si les chinois ont lancé un Intelsat, ce n'est qu'à la suite d'une forte pression politique. Rappelons qu'il y a eu quelques centaines de morts lorsque le lanceur est retombé sur un hôtel qui n'avait pas été évacué (mais 7 morts officiels !).

– une coordination de toutes les activités,...

Le risque nul n'existe pas ne serait ce qu'en raison de la difficulté à quantifier certaines causes ou à effectuer certains tests ou enfin à évaluer correctement certains effets. Dans la bataille commerciale qui s'engage l'Europe part avec un avantage évident, mais elle ne doit pas se reposer sur ses lauriers si elle veut continuer à dominer un marché en plein développement. Ainsi Arianespace négocie actuellement un deuxième contrat auprès des industriels européens en recherchant une économie de 30% sur la fabrication du lanceur. La recherche d'un abaissement des coûts et d'une augmentation de la fiabilité sont une nécessité vitale dans ce type d'entreprise.

Bibliographie : Eric Lefort (ESA, Paris) : *Increase in Ariane's Reliability*, Bulletin de l'ESA.



Ariane 502, 30.10.1997

UNE CLASSE BOUSCULEE PAR LES NOUVELLES TECHNOLOGIES RELATE SON EXPERIENCE.

Gérard Kuntz

Rien dans cette expérience ne dépasse le niveau de Terminale S. Aucune des activités qu'elle propose ne s'écarte vraiment du programme de la classe. Et pourtant, tout y est si différent. D'abord l'esprit qui l'anime : les élèves qu'elle met en scène suivent des chemins peu orthodoxes et à peine balisés. Ils travaillent en binômes ou en groupes plus importants. Ils discutent et débattent librement. Et surtout, ils commentent et prolongent les activités proposées, au point de participer largement à la rédaction de l'ouvrage qui en rend compte. L'enseignant ensuite : il n'est pas le distributeur d'un savoir codifié qu'il est seul à maîtriser, mais le chef d'un orchestre remuant, travaillant d'arrache-pied, plein de vie et du plaisir de découvrir.
Cette expérience peut troubler ou irriter par son originalité. Elle peut aussi inspirer des changements nécessités par l'usage des technologies nouvelles et par les besoins d'une formation scientifique solide pour un monde en profonde mutation.

A l'issue d'une année de travail, Luc Trouche et les 37 élèves de la Terminale 5S du lycée Joffre de Montpellier ont conçu et rédigé un ouvrage passionnant de 310 pages publié par l'Irem de Montpellier. Il relate le travail d'une classe expérimentale de Terminale S dans un environnement informatique (une TI-92 pour chaque élève, une TI-92 rétroprojetable pour la classe). Il offre des éléments de réponse à une question que bien des enseignants se posent : comment faire *des mathématiques vivantes et formatrices* tout en préparant les élèves aux épreuves du baccalauréat ?

LES CINQ VOLETS DE L'EXPERIENCE.

1°) Les travaux pratiques.

Une heure par semaine, prise sur l'emploi du temps, leur est consacrée. Il s'agit de questions généralement brèves, comme celles qu'affectionnent les rallyes mathématiques. Elles sont conçus pour que la calculatrice soit une aide, *pour peu qu'on sache reformuler le problème* et utiliser ses potentialités. Les élèves travaillent en binômes, en toute liberté.
En voici deux exemples :
a) Quel est le nombre de zéros qui sont à la fin de l'écriture décimale des nombres suivants : 10!, 100!, 1000!, 1997! ?
b) Soit l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = 100\sin(x)$.
A-t-elle un nombre fini ou infini de solutions?
-Si c'est un nombre fini, combien et pourquoi?
-Si c'est un nombre infini, pourquoi?
Pouvez-vous donner un encadrement à 10^{-5} *près de la* $10^{ième}, 100^{ième}, 1997^{ième}$ *solution?*
Dans les deux cas, l'utilisation naïve de la calculatrice ne fournit aucune indication. De même, l'approximation d'une probabilité donnée par $p(E) = 1-(1-2.10^{-22})^{3.10^{22}}$ se heurte aux limites de la machine et exige de solides connaissances théoriques pour aboutir (p 159 et suivantes).

Les solutions proposées par les élèves sont *d'une grande variété.* Elles n'aboutissent pas toutes, loin de là, mais elles manifestent *une imagination* qui s'exprime difficilement dans un cadre classique.
Les quatorze TP sont prolongés (pour les élèves volontaires) par une « question du lendemain ». Différentes solutions sont indiquées par l'enseignant et par les élèves qui proposent leurs remarques et suggestions à propos de chaque problème. Ces réflexions soulignent *leur profonde implication* dans l'expérience.

2°) Les défis.

Au nombre de cinq, les défis sont proposés à la classe sans limitation de durée. Ceux qui le souhaitent s'en emparent, communiquent des élément de solutions à la classe, en débattent, remettent l'ouvrage sur le métier jusqu'à l'obtention d'une solution globale. Il s'agit d'un travail de recherche, où les élèves s'investissent *en fonction de leur intérêt et du temps disponible.* Cette activité modifie profondément la perception qu'ils ont des mathématiques.
En voici un exemple très riche et largement développé dans la brochure :
On définit la fonction Prox (« plus proche entier de »). Ceci permet-il de définir la suite u telle que u(n)=Prox($n+\sqrt{n}$*) ? Existe-t-il une commande permettant de l'écrire sur la TI-92 ? Qu'est-ce que l'observation des premiers termes permet de conjecturer ? Peut-on le prouver ?*

3°) Les pochettes surprises.

Ces activités, proches des défis, *relèvent de la seule initiative des élèves.* Elles naissent d'une curiosité historique et culturelle (nombre d'or, approximation de π), d'une potentialité de la calculatrice peu exploitée (fractales) ou d'une réponse étrange ou paradoxale de la calculatrice (l'astroïde).

4°) Les devoirs surveillés.

Ils sont conçus de manière à mettre en évidence les compétences mathématiques de l'élève et son aptitude à utiliser la calculatrice dans sa démarche intellectuelle. C'est à ce prix que l'évaluation prend son sens : le seul usage de la calculatrice ne procure aucun avantage à un élève mathématiquement incompétent.

5°) (Auto) Evaluation.

Cette partie est particulièrement intéressante : on y rencontre des élèves qui réfléchissent au processus d'apprentissage qu'ils sont en train d'expérimenter. On relève l'évolution (très nette) de leurs points de vue d'Octobre à Mars. On se réjouit de leur enthousiasme. Mais on est frappé par certaines résistances (certes minoritaires, mais révélatrices) : « J'aimerais savoir à quoi servent des problèmes *hors programme pour le bac.* Ne serait-il pas souhaitable de passer du temps sur des points précis du bac, *même si on doit les refaire plusieurs fois?* ». D'une façon générale, la tonalité est positive et la notion de plaisir est souvent évoquée.

6°) Les aspects saillants de l'expérience.

Deux facettes de l'expérience méritent d'être soulignées :

-*L'aspect collectif du travail* (en binôme lors des TP, en équipe pour les « pochettes surprises »). Ce dispositif de co-tutelle a permis de *bousculer les hiérarchies* habituelles dans la classe, de remettre en question les « bons élèves », de redonner confiance aux autres. C'est aussi l'effet du dispositif de rétroprojection de la calculatrice d'un élève qui fait de celui-ci une sorte de porte-parole et de stimulant du débat dans la classe.
-*L'explicitation des démarches :* l'élaboration d'un rapport de recherche lors de chaque TP a permis la rédaction commune de la brochure et la présentation par la classe d'un atelier au colloque de la Grande Motte.

Défricher en commun, élaborer des solutions, les rédiger et les communiquer à d'autres, expliquer la perception qu'on a de sa propre démarche (métaréflexion), n'est-ce pas ainsi que l'on travaille aujourd'hui dans les entreprises et dans la société toute entière?

UNE EXPERIENCE QUI DONNE A REFLECHIR[1].

On l'aura compris, le travail de Luc Trouche et de sa Terminale m'a vivement intéressé. Mais il pose des questions qu'on ne saurait esquiver. Pour réussir une expérience *de cette ampleur*, il faut *des conditions rarement réunies.*

Une classe brillante, ouverte et disponible.

Il suffit de lire les solutions, les remarques et les réflexions (souvent drôles) de ces élèves pour se convaincre *qu'on est en terrain d'exception.* Leur activité dépasse largement celle qu'exige la seule préparation du bac. Leur travail éditorial révèle une capacité de réflexion et d'expression rares (ils ont su présenter leur expérience au colloque de la Grande Motte). De plus, les parents d'élèves ont laissé faire.... Ces conditions sont rarement réunies dans les Terminales scientifiques.
Mais si l'expérience ne paraît pas reproductible <u>telle quelle</u> dans une classe habituelle, des travaux <u>plus limités qui s'en inspirent</u> peuvent y être proposés. Les brochures « enseigner en TS avec des calculatrices graphiques et formelles » relatent une expérimentation menée il y a deux ans par Luc Trouche dans une classe beaucoup moins tonique, avec des résultats intéressants.

Un enseignant en formation permanente depuis de longues années.

Luc Trouche prend part depuis de nombreuses années *à l'intense réflexion des Irem au sujet des nouvelles technologies.* Il a participé à l'animation des colloques, des universités d'été et des stages consacrés à ces sujets. Sa thèse de doctorat porte sur ces mêmes thèmes. On ne s'improvise pas expert en ce domaine sans un travail acharné, en équipe et sur la longue durée. Ce profil est rare parmi les enseignants de mathématiques...
Cependant, chaque enseignant peut puiser dans la brochure des éléments pour une expérimentation limitée, hic et nunc, avec sa classe habituelle. On peut s'essayer à de courtes ballades avant de tenter des excursions plus importantes. Le choix de l'activité, son développement, les conditions de sa réalisation peuvent être adaptés à tous les contextes. Même

[1]On pourra mettre ces réflexions en parallèle avec celles qui sont développées dans l'article « Point de vue sur l'enseignement des mathématiques » (G. Kuntz, bulletin de l'Apmep, Avril-Mai 1998, pages 193 à 200).

brève et ponctuelle, l'activité peut introduire dans une classe traditionnelle l'état d'esprit qui a séduit et conquis la Terminale S5 de Montpellier.

Préparer au baccalauréat ou former les élèves?

Cette question iconoclaste s'impose quand on lit la brochure. Elle est soulignée par les réticences de l'élève qui conteste ces problèmes « hors programme » et réclame la « répétition » d'exercices d'examen. Elle exprime l'attente *de nombreux élèves actuels et de leurs parents* (de plus en plus puissants dans les lycées). Former des élèves à la réflexion personnelle, à la démarche scientifique, pour une meilleure insertion sociale et professionnelle, ce projet affiché par l'institution se heurte à une demande insistante de bachotage en vue de la seule « réussite » à l'examen. Un enseignant d'exception peut, dans une classe brillante, mener à bien les deux projets. Qu'en est-il dans une situation plus courante ?
Mais là encore, il convient de nuancer : le bachotage n'est-il pas une réaction de « sauve qui peut » des élèves dépassés par les événements, accablés par la masse de connaissances qu'ils n'ont pas le temps de comprendre et d'assimiler? Un redoublant exprime (page 300) à ce sujet des idées fort intéressantes : «La méthode de travail mise en place cette année m'a beaucoup plu. Elle m'a permis de m'intéresser un peu plus aux maths du fait d'un travail moins scolaire (du genre on copie au tableau et on part). Je pense que cela devrait être étendu à d'autres matières car cela permet un dialogue et un échange élève/prof qui est selon moi très appréciable. De plus, le fait de nous mettre au pied du mur (en TP) permet de s'interroger vraiment sur un problème, d'explorer. <u>C'est cet aspect qui a été plus ou moins mon moteur</u>. »

Une formation scientifique à repenser à partir de l'école élémentaire.

A lire les élèves, ils ont découvert dans cette Terminale particulière que les mathématiques pouvaient être une science *« vivante » !* Ils en avaient une vision figée, celle d'une science achevée qu'il convenait d'ingurgiter pour réussir. Comment expliquer qu'un corps enseignant de grande qualité, animé d'un projet généreux et ambitieux arrive à un tel fiasco ? Il faudrait repenser l'enseignement scientifique depuis le départ pour que les élèves s'y impliquent et développent leur rationalité, plutôt que de mémoriser des notions qui les dépassent et qui sont fortement volatiles. Mais cette école de la vraie réussite se heurte à celle de la réussite statistique réclamée par la société...
Les remarques subtiles exprimée à la fin du paragraphe précédent contiennent des clés pour redonner à de nombreux élèves le goût d'apprendre et de réussir vraiment, dès l'école élémentaire.

Les mathématiques sont-elles une science expérimentale ?

Luc Trouche l'affirme en page 1. Cela mérite réflexion. Des collègues spécialistes de l'histoire des mathématiques *ont vivement contesté cette affirmation.* Le débat sur le fond est ouvert.
La brochure n'a pas le projet de définir *la nature profonde* des mathématiques. Elle se contente de présenter l'enseignement de la discipline qui repose *sur une dialectique* d'observation, de conjecture, de preuve, de réfutation, *sur le balancement* essentiel entre l'expérimentation et la preuve.

Les calculatrices actuelles permettent à l'élève qui en connaît les potentialités *d'expérimenter* : simuler un phénomène et en dégager des propriétés, réaliser des figures et y déceler d'éventuels invariants. Il génère ainsi des idées, des propriétés qu'il s'emploie à démontrer par la suite. Les problèmes proposés dans ce cadre sont beaucoup plus brefs et moins directifs que les énoncés habituels. L'outil informatique permet à l'élève de trouver certaines pistes qu'il fallait baliser auparavant.

Mais qu'on ne s'y trompe pas : l'expérimentation n'est pas une démarche élémentaire. Un physicien interroge la nature au moyen des expériences qu'il réalise : il faut *une question préalable, l'idée de liens possibles* pour que l'expérience puisse être envisagée et prenne sens.

Quand on suit l'expérimentation des élèves, on y trouve *d'abord une bonne dose d'imagination et d'intuition* qui permet d'interroger utilement la calculatrice. Laurent Schwartz en souligne l'importance (p 145). L'échange à propos de ces idées et le débat en constituent un autre temps fort. Dommage que cet aspect, qui traverse le livre et lui donne force et vie, soit absent du titre : « *Imaginer, débattre,* expérimenter et prouver » aurait mieux rendu compte du projet et du contenu de la brochure.

Mais le sous-titre « 38 variations sur un thème imposé », qui fait un parallèle entre une classe et un orchestre (avec son travail, ses improvisations, son harmonie... et ses couacs) traduit bien l'esprit de l'expérience de Montpellier.

Je souhaite à cet excellent ouvrage une très large diffusion. Les collègues et les élèves y trouveront de multiples sources d'inspiration. Chacun pourra y puiser les aspects adaptables à sa propre situation. Le Petit Prince les conduira dans une exploration multiforme où le mot « apprivoiser » prend tout son sens.

G. Kuntz

Expérimenter et prouver. Faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques. 38 variations sur un thème imposé.

Auteurs : Luc Trouche et les 37 élèves d'une classe Terminale S du Lycée Joffre de Montpellier.

Date : Mai 1998. Editeur : Irem de Montpellier, Université Montpellier 2, place Eugène Bataillon cc 040, 34095 Montpellier cedex 05.
310 pages en format A4. Prix : 100 francs.
ISBN 2-909916-286.

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 1998

En 1998, nous célébrons la 25ème édition du Rallye Mathématique d'Alsace. Cette compétition est la plus ancienne de ce type en France. Directement inspirée des Olympiades Internationales et créée par Monsieur le Professeur Glaeser, son succès ne s'est pas démenti depuis 1973.

Elle a réuni cette année 1160 candidats. La participation est très légèrement inférieure à celle de l'année précédente. Les élèves de Première ont composé le 18 mars et ceux de Terminale le 25 mars.

En Première, 14 binômes sont primés, dont 5 premiers prix et 9 seconds. Les candidats ont dans l'ensemble été très inspirés par les exercices proposés, mais beaucoup d'entre eux conduisent mal leur raisonnement et arrivent à des conclusions non démontrées. Les premiers prix sont décernés aux candidats qui ont résolu parfaitement deux problèmes et presque complètement le troisième. Pour les seconds prix, nous avons sélectionné des copies qui proposent une solution excellente de deux exercices et un début rigoureux du troisième.

En Terminale, 16 binômes se voient récompensés. Les 6 premiers prix reviennent aux élèves qui ont proposé de bonnes solutions à deux exercices et des idées très intéressantes sur le troisième. Pour les 4 seconds prix et les 5 troisièmes prix, nous avons retenu des copies qui développent toutes - sans toujours aboutir à une conclusion - des raisonnements bien formalisés sur les trois problèmes. Un prix spécial récompense deux candidats ayant proposé une excellente résolution du sujet sur les soldats.

Corrigé des Epreuves de Terminale

Sujet 1 :

Est-il possible de trouver quatre nombres réels tels que, pris deux à deux, leurs sommes soient égales à 3 , 4 , 4 , 5 , 6 , 8 ?

Sujet 2 :

Déterminer le dernier chiffre du plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{10^{1998}}{10^{54} - 7}$

Sujet 3 :

1998 soldats sont alignés côte à côte face à leur général. Celui-ci leur donne l'ordre d'effectuer un quart de tour vers la gauche. Certains obéissent, les autres tournent d'un quart de tour vers la droite.

Ensuite s'effectue à chaque seconde le processus suivant : ceux qui se retrouvent face à face tournent d'un demi tour ; les autres restent immobiles.

Montrer qu'il arrive un moment où tous restent immobiles.

Sujet 1

Notons a, b, c et d les quatre réels cherchés. On peut supposer que $a \leq b \leq c \leq d$. On a donc $a + b = 3$ (la plus petite somme) et $c + d = 8$ (la plus grande somme). Ainsi $a + b + c + d = 11$. L'une des sommes proposées vaut 4, donc il existe deux réels dont la somme vaut $11 - 4 = 7$, qui ne figure pas dans la liste. Finalement on conclut que quatre tels réels ne peuvent exister.

Sujet 2

Nous avons $\dfrac{10^{1998}}{10^{54} - 7} = \dfrac{\lambda^{37}}{\lambda - 7}$, avec $\lambda = 10^{54}$. De plus

$$\frac{\lambda^{37}}{\lambda - 7} = \lambda^{36} \cdot \frac{1}{1 - \frac{7}{\lambda}} = \lambda^{36}\left(\sum_{k=0}^{36}(\frac{7}{\lambda})^k + \frac{(\frac{7}{\lambda})^{37}}{1 - \frac{7}{\lambda}}\right) = \sum_{k=0}^{35} 7^k \lambda^{36-k} + 7^{36} + \frac{7^{37}}{\lambda - 7}.$$

Remarquons qu'alors $0 < \dfrac{7^{37}}{\lambda - 7} < \dfrac{7^{37}}{10^{37}} < 1$ et, pour tout entier k entre 0 et 35, l'entier $7^k \lambda^{36-k}$ est strictement positif et multiple de 10. Le chiffre cherché est donc le chiffre des unités de 7^{36}. Le chiffre des unités de 7^4 étant 1, par périodicité, comme $9 \cdot 4 = 36$, on en déduit que 7^{36} se termine par 1.

Remarque : On a utilisé la formule utile suivante, valable pour tout n naturel et tout x complexe différent de 1:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Sujet 3

1) Remarquons d'abord que si les p premiers soldats sont tournés vers la droite et le $p + 1^{ième}$ vers la gauche, alors à la seconde suivante les $p - 1$ premiers soldats sont tournés vers la droite et le $p^{ième}$ vers la gauche :

$$\underbrace{\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow}_{p \text{ soldats}} \quad \longleftarrow \quad \cdots$$

$$\text{(1 seconde après)} \qquad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \cdots$$

En appliquant ce raisonnement p fois, on en déduit que, partant de la situation précédente, le premier soldat regarde vers la gauche après p secondes.
2) Ajoutons que, si le premier soldat regarde vers la gauche, il reste définitivement immobile.
3) Montrons par récurrence, sur le nombre n de soldats, qu'il arrive un moment où tous les soldats sont immobiles.

<u>Cas $n = 2$</u>. Il y a quatre situations possibles

$$\begin{array}{cc} \longrightarrow & \longrightarrow \\ \longleftarrow & \longleftarrow \\ \longleftarrow & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \longleftarrow \end{array}$$

Les trois premières sont stables et la dernière $\longrightarrow \quad \longleftarrow$ se transforme au bout d'une seconde l'avant-dernière $\longleftarrow \quad \longrightarrow$.

<u>Hypothèse de récurrence au rang n</u>. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et supposons le résultat vrai au rang n.

<u>Démonstration au rang $n+1$</u>.
- Premier cas : Tous les soldats regardent vers la droite. Le processus s'arrête.
- Deuxième cas : Le premier soldat regarde vers la gauche. Il reste donc immobile et ne se retrouve par conséquent plus jamais face à un autre soldat et n'intervient plus dans le processus. On applique alors l'hypothèse de récurrence aux n soldats suivants. Le processus s'arrête.
- Troisième cas : Le premier soldat regarde vers la droite et il existe un soldat qui regarde vers la gauche. Soit p le numéro du premier soldat regardant vers la gauche. D'après la remarque préalable 1, le premier soldat regardera au bout de p secondes vers la gauche. On est ramené au deuxième cas. Le processus s'arrête.

Corrigé des Epreuves de Première

Sujet 1 :

Depuis trois jours, Roméo attend Juliette au terminus du Tram de Vérone. La première fois, il a attendu 12 minutes et a vu arriver 5 rames. Le lendemain, 20 minutes se sont écoulées et 6 rames sont arrivées. Le surlendemain, combien a-t-il vu de rames durant ses 30 minutes d'attente, sachant qu'elles arrivent à intervalles réguliers ?

Sujet 2 :

La société RMA 25 produit la calculatrice révolutionnaire GG1998. Très simple d'utilisation, elle n'effectue que deux opérations : la multiplication habituelle notée **.** et une mystérieuse opération *. Des tests approfondis ont montré que pour tout entier non nul a, on a :

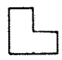
$$a*1 = a \quad \text{et} \quad a*a = 1.$$

Le mode d'emploi précise que si l'on prend quatre entiers naturels non nuls a, b, c et d, on a :

$$(a*b).(c*d) = (a.c)*(b.d)$$

où **.** désigne la multiplication habituelle. Quel est le résultat de $349650 * 7$?

Sujet 3 :

Le célèbre archéologue Émile Jones a découvert un coffret contenant 208 triminos  identiques, un unique monomino □ et le message suivant :

Celui qui avec toutes ces pièces
Un carré construira
De la main de la Déesse
Sacré géomètre sera.
Sinon rongé par la tristesse
Viticulteur deviendra
Et chaque jour à la Déesse
Du vin d'Alsace offrira.

Émile Jones peut-il devenir géomètre ?

Sujet 1

Soit t l'intervalle de temps séparant deux rames et t' le temps qui s'écoule entre l'arrivée de Roméo et celle de la première rame. On a alors $0 \leq t' < t$. Soit t'' le temps qui sépare le départ de la dernière rame du départ de Roméo, alors $0 \leq t'' < t$. Le premier jour, Roméo reste 12 minutes et voit passer 5 rames, donc $t' + 4t + t'' = 12$ et

$$4t \leq 12 < 6t.$$

Avec un raisonnement analogue pour le deuxième jour, on obtient

$$5t \leq 20 < 7t.$$

On déduit de ces deux résultats les inégalités

$$\frac{20}{7} < t \leq 3.$$

Le troisième jour, Roméo attend 30 minutes. Notons r le nombre de rames qu'il voit passer. On a alors, de la même manière que précédemment

$$(r-1)t \leq 30 < (r+1)t,$$

ce qui équivaut à $r \leq \frac{30}{t} + 1$ et $r > \frac{30}{t} - 1$. Or $t > \frac{20}{7}$, donc $r < 11.5$ et $t \leq 3$, donc $r > 9$. Finalement

$$9 < r < 11.5$$

et donc $r = 10$ ou 11.

On peut rapidement vérifier qu'avec $t = 3$ minutes, les deux cas sont possibles selon que Roméo arrive en même temps qu'une rame ou juste après qu'elle soit partie.

Commentaires :
- Il fallait justifier que les deux valeurs trouvées correspondaient bien à des situations réalisables.
- On relève de nombreuses confusions entre inégalités strictes et larges.
- Il n'y avait pas lieu de multiplier le nombre des inconnues.

Sujet 2

En utilisant les propriétés de l'opération $*$ indiquées, on obtient :

$$349650 * 7 = (49950 \cdot 7) * (1 \cdot 7) = (49950 * 1) \cdot (7 * 7) = 49950 \cdot 1 = 49950 = 25 \cdot 1998.$$

Commentaires :

• On peut remarquer que l'opération $*$ est la division usuelle : en effet,

$$b \cdot (a * b) = (b * 1) \cdot (a * b) = (b \cdot a) * (1 \cdot b) = (a \cdot b) * (1 \cdot b) = (a * 1) \cdot (b * b) = a \cdot 1 = a$$

et donc, b étant non nul, $a * b = \frac{a}{b}$.

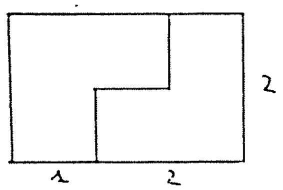
• Beaucoup d'élèves ont remarqué que la division vérifiait les propriétés de l'opération $*$ et en ont hâtivement déduit que $*$ était alors forcément la division.

• Certains élèves ont utilisé l'opération $*$ avec des nombres décimaux, alors que l'énoncé imposait des entiers non nuls.

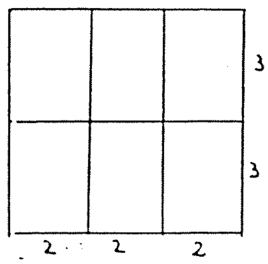
Sujet 3

Si la construction est possible, alors le carré est recouvert par $3 \times 208 + 1 = 625$ monominos, donc c'est un carré 25×25. Montrons que l'on peut effectivement recouvrir le carré comme demandé.

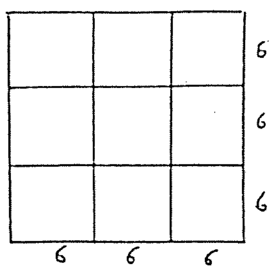
1) On peut faire un rectangle 2×3 avec 2 triminos :



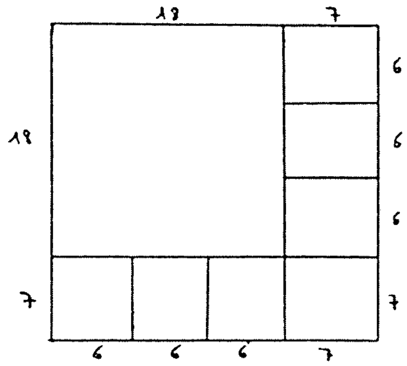
2) On peut faire un carré 6×6 avec 6 de ces rectangles :



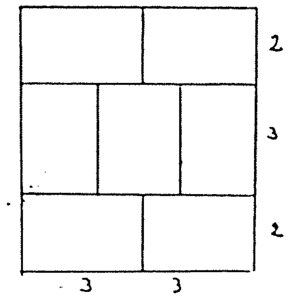
3) On peut faire un carré $6 \cdot 3 \times 6 \cdot 3$ avec 9 carrés 6×6 précédents :



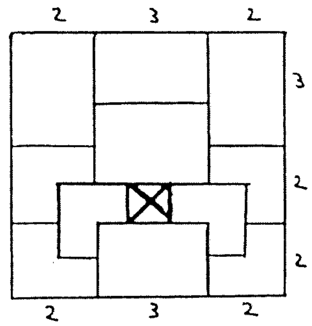
4) On recouvre un carré 25×25 de la manière suivante :



Les rectangles 6×7 sont recouverts avec 7 rectangles de type 1 comme suit :



Le carré 7×7 restant est obtenu ainsi :



Ainsi, on utilise exactement 208 triminos et 1 monomino. Emile Jones peut donc devenir géomètre.

Commentaires :

• De manière analogue , on peut aisément prouver qu'un carré $n \times n$ (avec n entier naturel non nul) peut être recouvert avec des triminos et un unique monomino si et seulement si n n'est pas multiple de 3. Il suffit d'examiner les différents cas $n = 6k + 1$, $n = 6k + 2$, $n = 6k + 4$ et $n = 6k + 5$.

• Dans un problème de ce type, un brouillon représentant (peut-être) un pavage possible, charge au correcteur de dénombrer lui-même les monomino et triminos, n'est pas une solution acceptable. Une fois un pavage trouvé, il s'agit d'exposer rigoureusement la démarche utilisée pour arriver au résultat.

• Le problème admet un grand nombre de solutions, plus ou moins astucieuses.

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Connaître la personnalité des mathématiciens célèbres n'est pas chose aisée. Leur oeuvre publiée a gommé toute trace d'émotion et de sentiment pour présenter les résultats mathématiques dans toute leur rigueur et leur vérité. Vérité souvent très belle sans doute et admirable, "honneur de l'esprit humain", mais abstraite et froide, figée dans son éternité comme un ciel étoilé par une nuit d'hiver glacée. Ce qui en a éloigné plus d'un, curieux de sciences mais rebuté par son aridité. A tort : les lettres écrites par les mathématiciens à leurs amis ou collègues nous révèlent des personnalités sensibles et passionnées, essayant de résoudre au mieux, non seulement les problèmes scientifiques qu'ils se sont posés mais aussi les mille et un tracas de leur vie quotidienne et les difficultés causées par les événements politiques et sociaux. Cette rubrique vous présente des lettres, ou de larges extraits que nous pensons représentatifs et révélateurs de la personnalité profonde, mais quelquefois méconnue, de nos illustres savants. Dans ce numéro :

Le voyage d'Abel en Europe (suite) : aujourd'hui, Abel à Paris

Arrivé le 10 juillet 1826 à Paris, c'est une existence toute nouvelle qui commence pour Abel, bien différente des heureuses rencontres faites à Berlin et de l'insouciante gaieté de son voyage. D'abord parce que, pour la première fois, il se retrouve seul, sans ses amis Boeck, Möller ou Keilhau, et dans un pays dont il maîtrise encore mal la langue. Ensuite, parce que c'est l'été et que l'activité est ralentie et les institutions en vacances. Alors Abel écrit, à ses amis, à sa famille, à ses professeurs, faisant part de sa nostalgie du pays, mais aussi de ses impressions et de son travail. Laissons lui la parole, car ses lettres sont tellement évocatrices de sa situation, de sa personnalité, de sa sensibilité, que rien d'autre ne saurait mieux les décrire. De plus, elles nous donnent un portrait caustique et plein de verve des savants parisiens du début du XIXe siècle.

Abel à Hansteen

[Paris, 12 août 1826]

Me voici enfin arrivé au foyer de tous mes voeux mathématiques, à Paris. J'y suis déjà depuis le 10 juillet. Vous trouvez que c'est un peu tard et que je n'aurais pas dû faire le long détour par Venise. Cher M. Le Professeur, cela me fait beaucoup de peine d'avoir fait quelque chose qui n'a pas votre approbation; maintenant que c'est fait, il faut que je me réfugie dans votre bonté, j'espère que Vous avez assez de confiance en moi pour croire qu'en somme j'emploirai bien mon voyage.

*Certes, je le ferai. Pour mon excuse je n'ai rien d'autre à dire, sinon que mon désir était grand de regarder un peu autour de moi ; voyage-t-on uniquement pour étudier ce qui est étroitement scientifique ? Après cette excursion je travaille avec d'autant plus d'ardeur. A Botzen j'ai quitté Möller, Boeck et Keilhau, et je suis parti pour Paris le plus vite possible. (...) Pour me mettre mieux au français, je me suis logé dans une famille où j'ai tout pour 120 francs par mois. Le mari et la femme son très aimables, et je suis bien, sauf que la chambre est très mauvaise et que je ne mange pas plus de deux fois par jour. J'ai eu beaucoup de peine à trouver cette installation ; et je ne m'en serais peut-être pas tiré si par bonheur je ne m'étais rappelé le peintre Gorbitz dont vous avez parlé. Il s'est montré à mon égard aussi prévenant et obligeant qu'on peut le désirer. Je vais le voir souvent. Il vous présente ses compliments empressés. Il ira en Norvège l'été prochain. - J'ai été chez le Directeur de l'observatoire, M. Bouvard, et je lui ai remis une lettre de recommandation de Littrow. Il a été "très amical", * m'a montré l'observatoire, qui naturellement est excellent, et s'est offert pour me présenter aux mathématiciens les plus remarquables quand je voudrais me rendre à l'institut. Je n'ai cependant pas encore profité de cette offre, parceque j'aimerais d'abord pouvoir parler un peu français. En outre je veux avant tout avoir achevé un mémoire auquel je travaille, et que je veux présenter à l'Institut. Quand il sera fini, ce qui arrivera bientôt j'irai. J'ai très bien réussi dans ce mémoire, qui contient beaucoup de choses nouvelles, et qui mérite, je crois, d'être remarqué. C'est la première ébauche d'une théorie d'une infinité de fonctions transcendantes.** - J'ai l'espoir que l'Académie le fera imprimer dans les Mémoires des Savants étrangers. Sinon, je le ferai imprimer moi-même, ou je l'enverrai à Gergonne à Montpellier pour être inséré dans les Annales de mathématiques. - je lui enverrai bientôt autre chose. J'ai toute une série de mémoires prêts, dont les uns paraîtront dans lesdites Annales etc., d'autres dans le "journal der Mathematik" de Crelle, d'autres dans les "Annalen der Wiener-Sternwarte" de Littrow, et enfin quelques uns seront présentés à l'Institut. Vous pouvez voir que je fais de mon mieux. - Du Journal de Crelle les trois premiers fascicules ont paru, et il semble qu'il marche bien, ce qui me fait grand plaisir, puisque j'ai une certaine part dans son succès. Dans ces trois fascicules il se trouve 6 articles de moi, si je ne me trompe pas ; car je n'ai encore reçu que le premier numéro. Je recevrai bientôt de Crelle les deux autres. J'ai envoyé le premier de Trieste à Bohr par un bateau à poisson de Bergen, mais il ne sera pas de retour avant longtemps. - J'ai été chez Legendre avec mon hôte, qui est un brigand autodidacte en mathématiques. Il était sur le point de sortir en voiture, en sorte que je ne lui dit que quelques mots. Il paraît que c'est un vieillard tout-à-fait distingué. Comme mathématicien il est assez connu. - Une fois par semaine il y a des soirées chez lui. Je pense y être invité. J'ai été chez le baron de Ferussac, l'éditeur du Bulletin etc. il n'était pas chez lui. Je peux y aller en soirée une fois par semaine, et j'y ai l'occasion de voir toutes les revues possibles et les livres nouvellement parus, ce qui est une bonne chose en cette saison où toutes les*

* En allemand dans le texte; gar freundlich

** En français dans le texte

bibliothèques possibles sont fermées. Je n'ai vu Poisson que sur une promenade publique ; il m'a paru très épris de lui-même. Il paraît pourtant qu'il ne l'est pas. - "Voilà toutes mes connaissances" ; mais ce ne sera pas long avant que j'en fasse davantage, maintenant que j'ai mis un peu en mouvement ma langue française. Les français me paraissent très difficiles à comprendre. (...) Möller rentrera bientôt au pays, il est fatigué de voyager, et je ne peux pas dire autrement : je commence à sentir fortement la nostalgie. D'autant plus que Paris ne sera certainement pas le séjour le plus agréable : il y est si difficile de faire sérieusement connaissance avec les gens. Ce n'est pas comme en Allemagne. -

J'ai acheté pas mal de livres mathématiques, et j'ai pensé à en acheter davantage, surtout des mémoires séparés que l'on ne peut pas avoir si l'on n'est pas sur place ; mais comme cela coûtera assez cher, j'ai pensé à proposer à Holmboe de les acheter ensemble. Entre autres il est nécessaire que j'aie la partie mathématique du Bulletin de Ferussac. -
Cela me sera extrêmement agréable, M. le Professeur, s'il y a quelque chose que je puisse faire pour vous ici à Paris. Je ferai certes de mon mieux. - Mon adresse est

Mr de Cotte Rue Ste Marguerite No 41. Faub. St. Germain

Abel à Holmboe

[Paris, 24 octobre]

*Tu t'y entends à garder le silence, il faut le reconnaître. Il m'a tant tardé de recevoir quelques mots de toi, tu ne peux pas t'en faire une idée. La seule raison pour que tu n'aies pas écrit doit être que tu n'as pas reçu ma dernière lettre datée de Botzen (Bolzano). Il y a déjà 4 mois et plus qu'elle a été envoyée. Voyons, mon ami, ne me cause plus de déception, et envoie moi quelques mots qui me consolent et me réconfortent dans ma solitude. Car, bien que je sois dans la ville la plus bruyante du continent, je me trouve comme si j'étais dans un désert. - Je ne connais presque personne. Cela tient à ce que tout le monde pendant l'été habite à la campagne, et est par suite invisible. - Jusqu'à présent je n'ai fait connaissance qu'avec Legendre, Cauchy et Hachette, plus quelques mathématiciens secondaires, mais fort habiles, Monsieur Saigey, directeur du "Bulletin des sciences etc." et Herr Le-Jeune Dirichlet, un prussien, qui l'autre jour est venu me trouver, me considérant comme un compatriote. C'est un mathématicien très sagace. Il a démontré en même temps que Legendre l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^5 + y^5 = z^5$ et d'autres jolies choses. - Legendre est un homme extrêmement aimable, mais par malheur "vieux comme les pierres". * Cauchy est fou ** et il n'y a rien à faire avec lui, bien qu'il soit en ce moment le mathématicien qui sait comment il faut traiter les mathématiques. Ses travaux sont excellents,*

---

* *Steinalt*, en allemand, dans le texte
** En français dans le texte.

*mais il écrit d'une manière très confuse. Au commencement je ne comprenais presque rien à ce qu'il écrit, maintenant ça va mieux. Il fait imprimer à présent une série de mémoires sous le titre "Exercises des mathématiques".** Je les achète et les lis assidûment. 9 fascicules ont paru depuis le commencement de l'année. Cauchy est extrêmement catholique, chose bien étrange pour un mathématicien. Il est d'ailleurs le seul qui travaille aujourd'hui dans les mathématiques pures. Poisson, Fourier, Ampère etc.etc. ne s'occupent absolument que de magnétisme et d'autres affaires de physique. Laplace n'écrit plus guère. La dernière chose qu'il ait faite était un supplément à la "Théorie des probabilités". Il dit que c'est son fils, mais en réalité c'est bien lui. Je l'ai vu souvent à l'Institut. Il a l'air alerte et petit, mais il a le défaut que le diable boiteux reproche à Zambullo, c'est à dire "la mauvaise habitude de couper la langue aux gens".** Poisson est un petit homme avec un joli petit ventre. Il porte son corps avec dignité. De même Fourier. Lacroix est effroyablement chauve et remarquablement vieux. Lundi je serai présenté à la plupart de ces messieurs par Hachette. D'ailleurs je n'aime pas autant le français que l'allemand : le français est extrêmement réservé à l'égard des étrangers. Il est très difficile d'arriver à des relations intimes avec lui. Et je n'ose espérer y parvenir. Chacun travaille à part sans s'occuper des autres. Tous veulent instruire et personne ne veut apprendre. L'égoïsme le plus absolu règne partout. La seule chose que le français recherche chez les étrangers est le côté pratique; personne ne sait penser en dehors de lui. Il est le seul qui sache produire quelques chose de théorique. Telles sont ses idées, et dès lors tu peux comprendre qu'il est difficile d'attirer l'attention, surtout pour un débutant. - J'ai achevé un grand mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendantes pour le présenter à l'Institut. Cela aura lieu lundi. Je l'ai montré à Cauchy : mais c'est à peine s'il a voulu y jeter les yeux. Et j'ose dire sans me vanter qu'il est bon. Je suis curieux d'entendre le jugement de l'Institut. Tu en seras informé quand le moment sera venu. - J'ai écrit plusieurs autres mémoires particulièrement pour le Journal de Crelle dont 3 numéros ont paru. De même pour les Annales de Gergonne qui tombent de jour en jour. Il devient trop vieux. Il en est de lui comme de v. Zach, il est vrai que celui-ci n'a jamais rien valu. Un résumé de mon mémoire sur l'impossibilité de résoudre les équations algébriques est inséré dans le bulletin de Ferussac. Je l'ai écrit moi-même. J'ai fait et je continuerai à faire d'autres articles pour ce bulletin. - C'est un travail diablement ennuyeux quand on n'a pas écrit soi-même le mémoire, mais je le fait à cause de Crelle, le plus brave homme que l'on puisse imaginer. - Je corresponds régulièrement avec lui, et j'ai de lui une masse de lettres, autant que j'en ai reçu de ma fiancée. Aujourd'hui j'ai écrit à un mathématicien, Kulp, de Darmstadt, qui m'a demandé des éclaircissements sur plusieurs passages de mes mémoires. Une relation par correspondance. - Je travaille à présent à la théorie des équations, mon sujet favori, et je suis enfin parvenu à ce point que je vois le moyen de résoudre le problème général suivant.* "Déterminer la forme de toutes les équations algébriques qui peuvent être résolues algébriquement "* *J'en ai trouvé des quantités innombrables des 5ème, 6ème, 7ème degrés etc. qu'on*

* En français dans le texte.

n'a pas encore flairées jusqu'à présent. En même temps j'ai la solution la plus directe des équations des 4 premiers degrés, d'une manière qui met clairement en évidence pourquoi précisément celles-ci peuvent-être résolues, et pas d'autres. En ce qui concerne l'équation du 5ème degré, j'ai trouvé que si une telle équation est résoluble algébriquement, la racine doit avoir la forme suivante

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''}$$

où R, R', R'', R''' *sont les 4 racines d'une équation du 4ème degré, et qui peuvent être exprimées par des racines carrées seulement. - J'y ai éprouvé des difficultés pour les expressions et les signes.- En outre je m'occupe des quantités imaginaires pour lesquelles il y a beaucoup à faire, du calcul intégral et surtout de la théorie des séries infinies dont la base est si peu établie. - Je ne pourrai rien en tirer de développé avant d'avoir achevé mon voyage à l'étranger et d'être revenu au calme chez nous, si cela arrive. Je regrette d'avoir demandé une bourse de 2 ans, un an et demi aurait grandement suffi. J'ai fortement la nostalgie, et beaucoup moins d'avantage, à partir de maintenant, à rester ici et ailleurs, que l'on ne pourrait peut être croire. J'ai pris connaissance de tout ce qui existe d'important et d'insignifiant dans les mathématiques pures, et mon désir est maintenant de pouvoir consacrer mon temps à mettre en oeuvre ce que j'ai amassé. Il y tant de choses que j'ai en projet, mais tant que je serai à l'étranger, cela n'ira pas comme il faudrait. Si j'étais dans la peau de Keilhau pour le professorat ! Je ne suis pas tranquille, mais je n'ai pas peur non plus ; car si ça casse d'un côté, ça tiendra bon d'un autre. Quels appointements as-tu ? Vas tu te marier, est-tu fiancé et avec qui, il faut me répondre à toutes ces questions ; car mes pensées se reportent souvent vers toi et tout ce qui te concerne. Je n'ai pas une telle abondance d'amis que je courre le risque d'oublier ceux que j'ai.*

Je mène d'ailleurs une existence très sage. Je travaille, je mange, je bois, je dors, et je vais parfois à la Comédie ; c'est de tout ce qu'on appelle plaisir le seul que je m'accorde, mais c'en est un grand. Je ne connais pas de plus grand plaisir que de voir une pièce de Molière où joue Mlle Mars. Alors, je suis tout à fait ravi ; elle a 40 ans, mais elle joue tout de même des rôles très jeunes. Talma le grand tragédien célèbre est mort il y a quelques jours. Le théâtre français a été fermé 2 soirs à cette occasion, et les autres théâtres aussi. - Une foule immense a suivi son cercueil. Celui-ci a été porté directement au cimetière sans passer d'abord par l'église, selon l'usage ordinaire ; en qualité d'acteur il est exclu "de la communion des fidelles". Ridicule mais indifférent. Il a fait élever ses enfants, qui sont tous naturels, dans la religion protestante. - Il eut de son vivant trois grands défauts. Il se laissait entraîner par le jeu, les femmes, et la manie de bâtir, les trois choses poussées très loin. - Les acteurs lui font élever un monument pour 12 000 fr. Je vais ausi de temps en temps au Palais royal que les parisiens appellent "un lieu de perdition".* On y voit en assez grand nombre "des femmes de bonne volonté".* Elles ne sont nullement indiscrètes. Tout ce qu'on entend est "Voulez vous monter*

* En français dans le texte, écrit tel quel.

avec moi mon petit ami ; petit méchant". Naturellement, en ma qualité de fiancé etc. je ne les écoute pas et je quitte le Palais royal "sans la moindre tentation".* Il y en a beaucoup de fort jolies.-*

L'autre jour j'ai été à un dîner diplomatique chez son Ex. le comte Löwenhjelm, où je me suis un petit peu grisé, ainsi que Keilhau, mais très légèrement. Il est marié avec une jeune française. Il a raconté que tous les ans le 24 décembre il fait rouler sous la table tous les compatriotes. - Notre "Monsieur" Skramstad est ici maintenant. Il habite avec 3 Suédois un faubourg de la ville. Il circule, vêtu en paysan du Hedemarken, bas de laine bleue et veste rayée. Je ne l'ai pas vu, mais on me l'a décrit. Il parle suédois. - J'habite ici dans une famille où j'ai "la chambre et la table et la blanchisseuse"* pour 120 fr par moi. Le mari est un peu mathématicien mais très bête, et la femme très brouillonne, de 35 ans et plus. On parle toujours à table par équivoques, sur "les secrets du ménage etc."* L'autre jour ça a été si loin qu'une dame a dit que l'oie qui était sur la table serait transformée le lendemain en un "étron".* - Parler de pots de chambre etc. est parmi les choses les plus convenables. Je bois toujours le café dans "mon petit pot de nuit".* - D'ailleurs je mange très bien, mais 2 fois par jour seulement. Le matin "un déjeuner à la fourchette"* et l'après-midi à 5 heures 1/2 un long dîner. Entre 1 bouteille de vin et 1 bouteille 1/2 tous les jours.-*

*Je suis maintenant absolument seul, Keilhau étant parti depuis peu (16 octobre) pour rentrer au pays par mer. Je l'ai chargé d'une quantité de livres dans une grande malle rouge adressée à toi, je te prie de me la garder avec le contenu. J'ai acheté ce que j'ai pensé que l'on n'avait pas chez nous. J'en ai d'autres que j'enverrai au printemps. Parmi les livres il y a le 5ème "Tome" de la "Mecanique céleste". Il est destiné au professeur Hansteen, parce que je sais qu'il a les 4 premiers volumes. Tu auras peut-être la bonté de le lui remettre avec tous mes compliments. - voilà donc la "Mécanique" achevée. Celui qui a écrit un pareil livre peut avec plaisir jeter un regard en arrière sur sa vie scientifique. - Legendre a fait imprimer un remaniement de ses "Exercises" (sic) mais cela n'a pas encore paru en librairie. - Les mathématiques subissent un vilain recul en France. - Les jésuites veulent gouverner et les journaux sont pleins de polémiques à propos d'eux. C'est une vermine du diable. Il y a quelques jours un jeune jésuite a dénoncé un grand nombre d'entres eux et va encore en dénoncer 300 autres. D'après ce qu'il raconte ils doivent être les gens les plus affreux de la terre. On a voulu l'assassiner tout récemment, mais il a échappé. - J'ai prêté à Keilhau 180 marcs banco. ** - Je l'ai prié de te les remettre. Tu auras la bonté de les recevoir. Peut-être serai-je obligé de t'importuner en te priant de me les envoyer en une traite sur Hambourg ; Encore ceci, rien qu'une humble question : pourrais-tu me prêter 220 marcs, *** en sorte que ça ferait 400 en tout. Tu me rendrais un très grand service. Car j'aurais diablement envie de passer par Berlin avant de rentrer au pays, et d'acheter ici plusieurs choses que je ne pourrais avoir chez nous, ou qui coûteraient trois fois*

** Environ 225 f.
*** Environ 275 f.

plus cher. Ne te fâche pas de ma question, et réponds y tout de suite. N'oublie pas : le plus vite possible. Une longue lettre avec beaucoup de nouvelles. Salue tous les bons amis et n'oublie pas ton ami.

N. Abel

Abel à Holmboe

[Paris décembre 1826]

*Cher ami ! Mille remerciements pour tes deux lettres, les biens venues, et aussi parceque tu as été si exact. Si j'avais su que tu avais écrit, je n'aurais pas osé demander un grand sacrifice. - Ne te fâche pas de ma demande d'argent. J'ai deux véritables amis, et je suis bien obligé de les importuner malgré moi. - Peut-être je pourrai t'épargner, mais il est probable que je ferai appel à ta bonté. Pas tout de suite, mais quand j'arriverai à Berlin. Je vais en effet d'ici peu quitter Paris où je n'ai rien à pêcher, et j'irai tout d'abord à Göttingen pour faire le blocus de Gauss s'il n'est pas trop fortifié d'orgueil. Et je préfère être maintenant en Allemagne pour y apprendre un peu plus d'allemand, ce qui sera pour moi de la plus grande importance plus tard. - Je me tire d'affaire avec le français autant qu'il faut pour écrire un Mémoire et je voudrais bien pouvoir en faire autant en allemand. Tu écris que tu as lu les deux premiers fascicules du Journal de Crelle. Les mémoires que j'y ai publiés, "excepté" * celui sur les équations, n'ont pas grande importance, mais tu verras, cela viendra. J'espère que tu seras content d'un mémoire sur une intégrale, qui se trouve dans le troisième fascicule, un long mémoire ; mais surtout je suis content d'un qui s'imprime en ce moment pour le 4ème fascicule, sur la simple série* $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots$. *J'ose dire que c'est la première démonstration parfaitement rigoureuse de la formule du binôme dans tous les cas possibles, en même temps que d'une quantité d'autres formules en partie connues, mais insuffisamment établies. Dans le prochain numéro (janvier) des Annales de Gergonne paraîtra un petit mémoire de moi sur l'élimination. C'était un essai pour voir s'il voudrait imprimer. J'en enverrai ces jours-ci un meilleur sur le développement de fonctions ("continues ou discontinues) selon des cos. ou sin. d'arcs multiples.* J'y démontre une formule connue que l'on a juqu'ici démontrée d'une manière inexacte. Item j'envoie à Gergonne un grand mémoire sur les "fonctions elliptiques"* où sont exposées beaucoup de choses curieuses qui, je m'en flatte, vont piquer la curiosité de plus d'un. -*

J'ai trouvé que l'on peut partager la lemniscate avec la règle et le compas en $2^n + 1$ *parties lorsque ce nombre est premier. La division dépend d'une équation dont le degré est* $(2^n + 1)^2 - 1$. *Mais j'en ai trouvé la solution complète par des radicaux carrés. J'ai découvert du même coup le mystère qui enveloppait la théorie de Gauss sur la division du cercle. Je vois clair comme le jour comment il y est parvenu. - Ce que je dis là de la lemniscate est un des résultats que j'ai tirés de mes études sur*

---

* En français dans le texte.

*la théorie des équations. Tu ne peux pas t'imaginer combien de jolies propositions j'y ai trouvées, par ex. : Si une équation $P = 0$, dont le degré est $\mu\nu$ où μ et ν sont des nombres premiers entre eux, est résoluble d'une manière quelconque par des radicaux, P est ou bien "décomposable en μ facteurs du degré ν" * dont les coefficients dépendent d'une équation du μ degré, ou en "ν facteurs de degré μ"* dont les coefficients dépendent d'une équation du degré ν.*

---

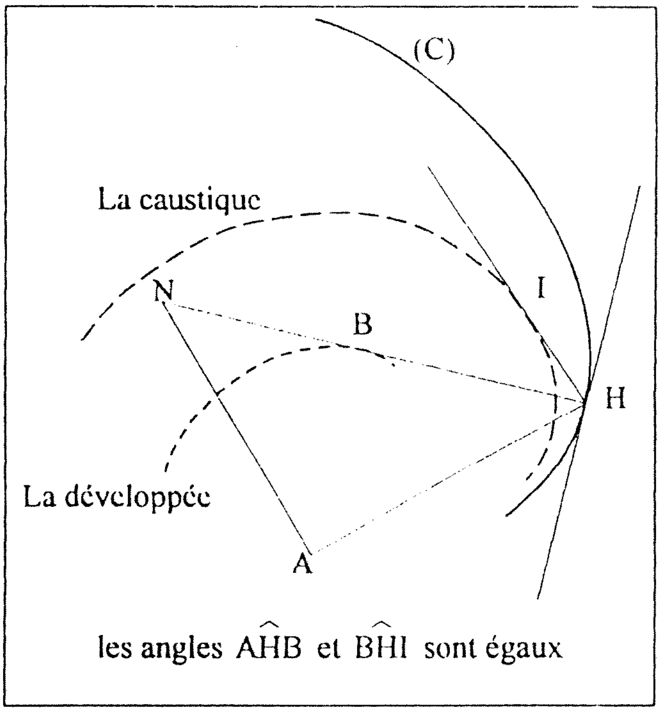
* En français dans le texte.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 50

Énoncé (proposé par A. Stoll, IREM de Strasbourg) :

Données :
• Une courbe plane (C) "suffisamment régulière"
• un point A dans le plan de la courbe (C)



Notations : (cf. figure)

• H un point de la courbe (C)
• B désigne le centre de courbure correspondant à H
• N le point de la normale à (C) en H tel que (AN) soit perpendiculaire à (AH)
• I est le point de la caustique issue de A

Montrer que :

$$\boxed{\frac{|2HN - HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}}$$

Applications :

1. En déduire une construction géométrique du centre de courbure d'une parabole en un point quelconque.
2. Montrer que la caustique d'une spirale logarithmique par rapport à son centre est une spirale logarithmique identique.
3. Trouver d'autres applications de la formule ci-dessus.

Etat de ce problème :

Nous avons reçu deux solutions, l'une de Marguerite Ponchaux et l'autre de Pierre Renfer, et André Stoll nous en prépare une synthèse pour notre prochain numéro.

PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$tg\, x = \frac{x - \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{1.3}{1.2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \frac{a(a+2)(a+4)}{a(a+1)(a+2)}\frac{x^3}{3!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{a(a+2)}{a(a+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Indication (par P. Renfer) :

On montre d'abord que la fonction $f(z)$ définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n-2)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\frac{z^n}{n!}$$

est entière, car son rayon de convergence est infini.
On pose $g(z) = e^{-z}f(z)$; on montre que g est solution de l'équation différentielle

$$zg''(z) + ag'(z) - zg(z) = 0,$$

puis que c'est une fonction paire, enfin que pour x réel, $g(ix)$ est réel. On en déduit l'expression en fonction de g du numérateur et du dénominateur de la fraction donnée dans l'énoncé du problème, ce qui conduit au résultat.

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des $2-$mélanges réguliers (pour la définition d'un $2-$mélange, voir l'article sur les tours de cartes dans le numéro 90 de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

PROBLÈME 54

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Montrer que si x, y et z sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.
2°) Soit n un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1}$$

est égal au nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$xy + yz + zx = n. \tag{2}$$

Exemple.— n=35. L'équation (1) possède six solutions : $(1,3,5)$, $(1,5,3)$, $(3,1,5)$, $(3,5,1)$, $(5,1,3)$ et $(5,3,1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1,5,5)$, $(5,1,5)$, $(5,5,1)$, $(1,1,17)$, $(1,17,1)$ et $(17,1,1)$.