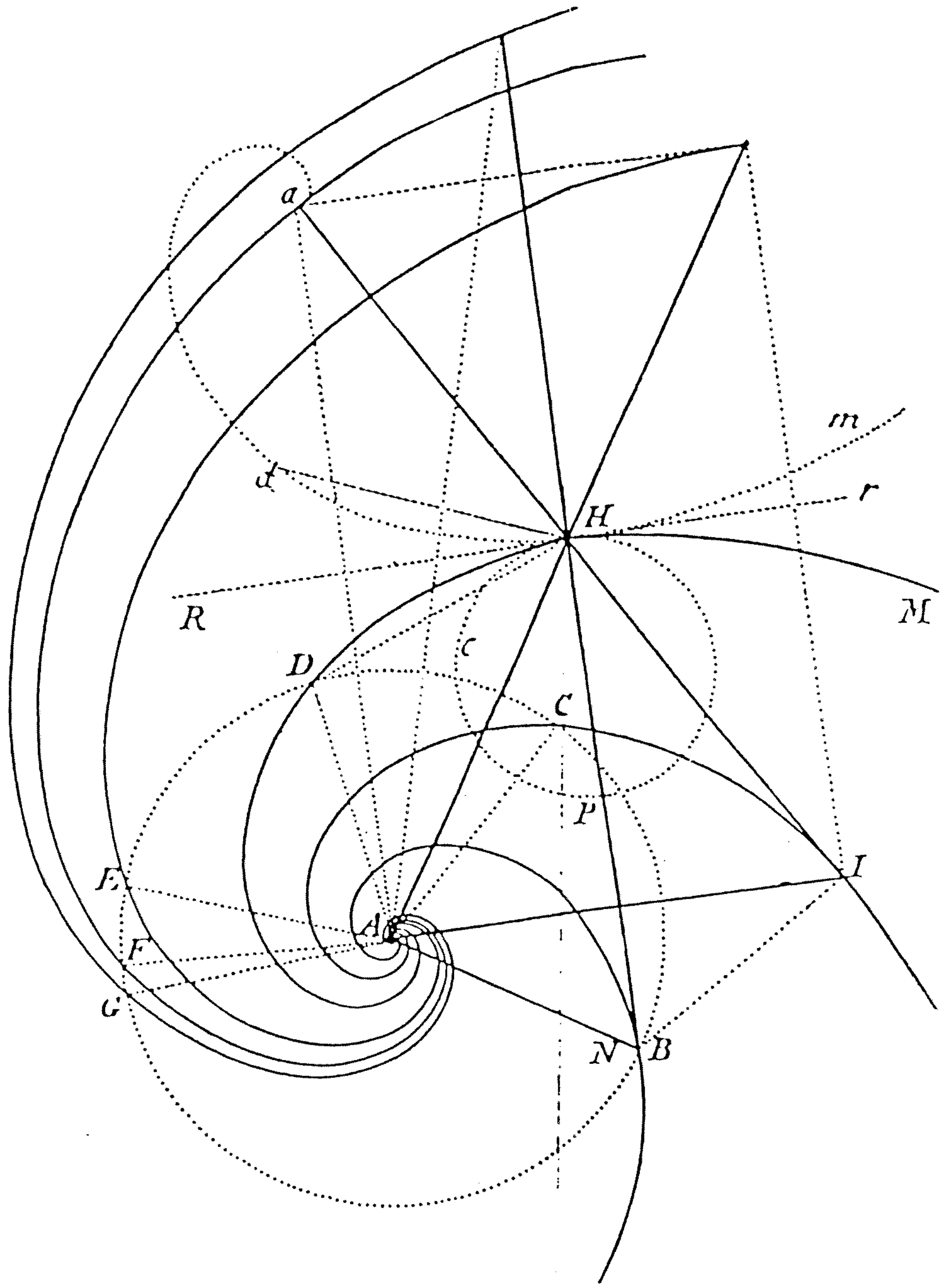
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 93 – DÉCEMBRE 1998 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE

Elle nous est suggérée par la solution du problème n°50 de la rubrique "A vos stylos" p. 57 et représente la "Spirale Admirable" étudiée par J. Bernoulli (spirale logarithmique) et qu'il décrit en termes lyriques :

De cette propriété aussi singulière qu'étonnamment admirable, il m'a plu d'appeler cette courbe la Spirale Admirable, de sorte que je peux à peine parler de sa contemplation -, j'ai pensé que son application pouvait donner naissance à des figures adroitement représentées. Puisqu'en effet cette spirale engendre une spirale toujours semblable à elle-même, quelle que soit la façon dont elle s'enroule, se déroule, rayonne ; elle pourrait aussi bien être pour tous un emblème semblable aux descendants des parents ; La Fille Très Semblable à la Mère. Ou bien (s'il est permis d'appliquer cette chose aux mystères de l'éternelle Vérité de la Foi) elle est comme une esquisse quelconque de l'éternelle Génération du Fils, semblable à l'image du Père, et de ce fait comme la Lumière issue de la Lumière et identique à elle. Ou bien si vous préférez, parce que notre courbe admirable dans sa révolution demeure toujours semblable à elle-même, de façon très constante et en rapport, elle pourrait être le symbole du courage et de la constance dans l'adversité ; et même le symbole de la résurrection de notre chair après de multiples altérations, la même pourtant après la mort. D'ailleurs si l'usage s'était maintenu de nos jours d'imiter Archimède, j'ordonnerai volontiers que fût gravée sur ma tombe cette spirale avec l'épigraphe : "eadem numero mutata resurgo" c'est-à-dire : "Elle ressuscitera identique à elle-même".

(Acta eruditorum - chapitre XLIX - 1962)

EDITORIAL

Arithmétique 2 : le retour

Belle récompense ! Les programmes de terminales scientifiques en vigueur depuis la rentrée de septembre 1998 ont été pensés à Strasbourg. Michel de Cointet et François Pluvinage, membres du Groupe Technique Disciplinaire, ont mis en place, il y a quelques années, une commission de réflexion essentiellement composée d'animateurs de l'IREM de Strasbourg. Elle avait pour but d'élaborer de nouveaux programmes de terminales scientifiques. Notre proposition, après avoir sommeillé, a été légèrement modifiée puis adoptée.
Les élèves de terminales S suivent un tronc commun qui comprend six heures de mathématiques hebdomadaires. Ils le complètent par un enseignement de spécialité, choisi par eux, parmi les trois disciplines scientifiques : mathématiques, physique et biologie. La spécialité se déroule sur 60 heures annuelles environ, cours, exercices, contrôles compris.
La spécialité mathématiques est formée de deux grands thèmes : l'arithmétique et la géométrie. L'arithmétique, plus faible en volume, balaye la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, l'existence de la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers, l'existence d'une infinité de nombres premiers, la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide, le p.g.c.d. et le p.p.c.m. de deux entiers naturels, le théorème de Bezout, le théorème de Gauss. Les travaux pratiques (inclus dans l'horaire imparti) explorent le crible d'Erathostène, les critères de divisibilité, les changements de base de numération, les équations diophantiennes.
Mais les livres scolaires qui viennent de paraître nous semblent très ambitieux. Nous y trouvons des exercices, proposés dans les années 1975-1980, à des élèves qui avaient reçu une formation plus solide et plus poussée tout au long de leur scolarité. Arriver à cette performance nous paraît illusoire, et même si nous disposions du temps nécessaire à de tels apprentissages, elle ne correspondrait pas aux objectifs que nous nous donnions lors des propositions de programmes.
Ces objectifs sont les suivants :
- Réfléchir aux ensembles de nombres.

Ne perdons pas de vue que pour ces élèves, un nombre n'est guère plus que la valeur affichée par la calculatrice. L'entier n'a pas de statut particulier. L'arithmétique du collège ayant disparu, aucun travail sur le p.g.c.d. et le p.p.c.m, décomposition en produit de facteurs premiers n'a été fait pour induire une réflexion dans $\mathbb{N}$.

En arithmétique, ils vont être amenés à réfléchir sur des ensembles finis et à produire des raisonnements exhaustifs. C'est la première fois dans leur cursus que réaliser un certain nombre d'essais constitue une preuve dans une démonstration. C'est aussi une nouveauté de déduire une égalité à partir d'une inégalité : un multiple de n strictement compris entre - n et n est nul. Par ailleurs, ils vont prendre conscience que toutes les opérations ne sont pas internes dans IN : pour montrer qu'un nombre entier est multiple de 19, il ne suffit pas de factoriser 19 par n'importe quoi!

- Comprendre des définitions, les théorèmes, c'est-à-dire d'une manière générale le cours.

A partir de la définitions suivante : *un nombre entier* a *est multiple d'un nombre entier* b *si et seulement si il existe un entier* k *tel que* $a = kb$, demander aux élèves quel est le plus petit entier positif multiple de b (b élément de $\mathbb{N}^*$) donne lieu à une grande effervescence dans la classe : est-ce 0, est-ce 1, est-ce b? Transformer le débat d'opinion en un retour sur la définition est une tâche difficile.

- Travailler le raisonnement.

L'enseignement de l'analyse essentiellement algorithmique et les moyens (calculatrices graphiques, ordinateurs) mis à la disposition des élèves favorisent une certaine appréhension des mathématiques, mais ne les préparent peut-être pas à entrer dans un cours de l'enseignement supérieur. L'arithmétique élémentaire permet de travailler le raisonnement. En voici une illustration, anecdote vécue dans la classe de Claudine :

« J'avais proposé lors d'un devoir en classe l'exercice suivant : *existe-t-il une base* b *de numération telle que* $\overline{72}^b + \overline{58}^b = \overline{141}^b$? Les élèves ont écrit $12b + 10 = b^2 + 4b + 1$, puis ont résolu l'équation $b^2 - 8b - 9 = 0$, ont trouvé les solutions -1 et 9. Pour la plupart, ils ont écarté la solution -1 et ont conclu que 9 est LA solution de l'exercice. Car bien sûr tout problème de mathématiques du secondaire a UNE solution ! Cet exercice a suscité un véritable débat dans le groupe lycée de l'IREM qui travaille actuellement sur l'arithmétique; ces discussions ont été étoffées lors du stage que nous avons organisé le 5 novembre. Elles m'ont amenée à réfléchir différemment à la correction orale du devoir.

D'entrée de jeu un élève a proposé : « Comme il y 8 dans l'écriture, b est supérieur à 9. J'essaie 9 ; ça marche ; est-ce que c'est une démonstration ? »

Nous voilà d'emblée au coeur du débat : qu'est-ce qu'une démonstration ?

Au milieu des autres, mi-admiratifs, mi- pensifs, un doigt s'est levé pour exprimer : « mais on n'est pas sûr qu'il n'y a qu'une solution ! ». Etonnement : peut-on démontrer que ce problème admet une ou au plus une solution ?

J'écris au tableau la question évoquée lors de notre stage : *existe-t-il une base* b *de numération telle que* $\overline{10}^b \times \overline{10}^b = \overline{100}^b$ *?* Très vite, les murmures se transforment en voix : ça fait $b^2 = b^2$. Que se cache-t-il derrière ça fait et que peut-on conclure ? Je répète ma question et la classe se divise en deux parties :

- on a tourné en rond, c'est comme lorsqu'on obtient 0=0, on ne peut rien conclure, il faut changer de méthode.

- mais si, on peut conclure. $b^2 = b^2$ est toujours vrai. Tous les nombres, et pourquoi pas tous les réels, sont solutions.

Le but atteint dépasse mes espérances ! L'exercice initial, que j'aurais pu ne pas corriger (presque tout le monde avait déjà trouvé *9*) donne lieu à un débat dans la classe. Bien sûr ces jeunes ont un vécu mathématique qui ressort clairement lors de leurs réponses. Mais ils manquent de raisonnement, ils se précipitent pour résoudre le problème qu'ils ne posent pas. Et c'est bien pour pallier à ces manques que nous souhaitions le retour de l'arithmétique.
Le ton du débat monte mais aucune conclusion n'apparaît. Le recours à la DEFINITION de base de numération, au RAISONNEMENT PAR EQUIVALENCE, s'impose et le calme revient.

Puis j'écris au tableau :*existe-t-il une base de numération* b *telle que* $\overline{20}^b \times \overline{20}^b = \overline{400}^b$ *?*Ils sont ravis. Maintenant ils savent tous répondre, mais un seul d'entre eux pense que b est supérieur à *5*.
Je ne corrige plus l'exercice initial. Tout ce que je voulais dire est passé mais une heure s'est écoulée quasiment... et je dispose de 25 heures pour toute l'arithmétique.»
Nous avons pourtant l'intime conviction que ce temps n'est pas du temps perdu !

Claudine Kahn et Marie-Agnès Egret

SOMMAIRE

N° 93 – DÉCEMBRE 1998

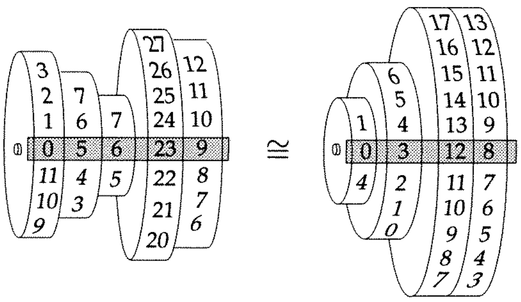
L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03-88-41-64-40
Fax : 03-88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
http ://irma.u-strasbg.fr/irem
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges Reeb (66 F port compris).
Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
◇ *Prix du numéro* : 35.– F

CES GROUPES OU CES ANNEAUX SONT-ILS ISOMORPHES ?

Raymond SÉROUL



Parmi les trois groupes ou anneaux

$$A = \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{35} \oplus \mathbb{Z}_{45}, \quad B = \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{1260}, \quad C = \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{630},$$

lesquels sont isomorphes ? et comment construire un isomorphisme explicite ?

1. L'ANNEAU DES ENTIERS MODULO N

• Soient $a, n > 0$ deux entiers. L'équation homogène

$$ax = 0, \quad x \in \mathbb{Z}_n,$$

possède $d = \text{pgcd}(a, n)$ solutions. En effet, si on pose $a = da'$ et $n = dn'$, on sait que a' et n' sont premiers entre eux. La condition $ax = kn$ équivaut à $a'x = kn'$, d'où l'on déduit $x = hn'$ en vertu du lemme de Gauss. En revenant dans $\mathbb{Z}_n$, cela donne les solutions $x_1 = n', x_2 = 2n', \ldots, x_d = dn' = 0$.

Soient $a, b > 0$ et λ des entiers ; intéressons-nous aux applications de $\mathbb{Z}_a$ dans $\mathbb{Z}_b$.

• La formule $\Phi(x) = \lambda x$ définit une application $\Phi : \mathbb{Z}_a \to \mathbb{Z}_b$ si et seulement si on a $\Phi(x + ak) = \Phi(x)$, ce qui équivaut à $\lambda a \equiv 0$ modulo b.

• Lorsque a, b, λ vérifient la congruence précédente, $\Phi : \mathbb{Z}_a \to \mathbb{Z}_b$ respecte la multiplication si et seulement si λ est un *idempotent* de $\mathbb{Z}_b$, c'est-à-dire $\lambda^2 = \lambda$.

• Considérons les applications $\Phi_i : \mathbb{Z}_a \to \mathbb{Z}_b$ définies par $\Phi_i(x) = \lambda_i x$, les λ_i satisfaisant bien entendu les relations $\lambda_i a \equiv 0 \bmod b$. Alors l'application

$$\Phi = \Phi_1 + \cdots + \Phi_k : \mathbb{Z}_a \longrightarrow \mathbb{Z}_b$$

est un homomorphisme d'anneaux si et seulement si les λ_i sont des idempotents de $\mathbb{Z}_b$ deux à deux orthogonaux :

$$\lambda_i^2 = \lambda_i, \quad \lambda_i\lambda_j = 0, \quad 1 \leq i,j \leq k,\ i \neq j.$$

Plus généralement, on peut associer à un homomorphisme de groupes additifs

$$\Phi : \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{a_p} \longrightarrow \mathbb{Z}_{b_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{b_q}$$

une matrice

$$\mathcal{M}_\Phi = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{q1} & m_{q2} & \dots & m_{qp} \end{pmatrix}$$

dont les coefficients satisfont les conditions $a_j m_{ij} \equiv 0$ modulo b_i. On remarquera que la i-ième ligne de cette matrice n'est définie que modulo b_i puisque, en posant $y = Mx$, on trouve

$$y_i = m_{i1}x_1 + m_{i2}x_2 + \cdots + m_{ip}x_p \in \mathbb{Z}_{b_i}.$$

L'application Φ est un homomorphisme d'anneaux (*i.e.* Φ respecte la multiplication) si et seulement si, pour $i = 1, \ldots, q$, la i-ième ligne de M contient des idempotents deux à deux orthogonaux de $\mathbb{Z}_{b_i}$.

Théorème chinois. — *Soient $a, b > 1$ deux entiers étrangers. Alors l'application canonique*

$$\Phi : \mathbb{Z}_{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$$

définie par $\Phi(z) = (z, z)$ est un isomorphisme d'anneaux. En outre, si u, v sont choisis tels que $au + bv = 1$, l'isomorphisme réciproque est

$$\Phi^{-1}(x, y) = bvx + auy.$$

Démonstration. — Commençons par montrer que

$$\Psi(x, y) = bvx + auy$$

définit un homomorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$ dans l'anneau $\mathbb{Z}_{ab}$.

- Cette application est bien définie puisque $a(bv) \equiv b(au) \equiv 0$ modulo ab.
- Il est clair que bv et au sont orthogonaux dans $\mathbb{Z}_{ab}$.
- Si nous multiplions $au+bv = 1$ par au ou bv, nous obtenons aussitôt $(au)^2 = au$ et $(bv)^2 = bv$ dans $\mathbb{Z}_{ab}$, ce qui prouve que au et bv sont deux idempotents de $\mathbb{Z}_{ab}$.

On déduit immédiatement de $\Psi(\Phi(z)) = bvz + auz = z$ que Φ et Ψ sont des isomorphismes réciproques. $\square$

2. LES MÉTAMORPHOSES D'UNE SOMME DIRECTE

Le théorème chinois est l'outil rêvé pour répondre aux questions d'isomorphisme qui nous préoccupent. Il est facile de prouver que les anneaux A et B du début sont isomorphes :

$$\begin{aligned} A = \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{35} \oplus \mathbb{Z}_{45} &\cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{45} \\ &\cong (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5) \oplus (\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{45}) \\ &\cong \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{1260} = B. \end{aligned}$$

En outre, la seconde partie du théorème chinois nous offre la possibilité de rendre explicite cet isomorphisme.

En revanche, et bien qu'ayant le même nombre d'éléments, les anneaux B et C ne sont pas isomorphes car on trouve dans B un élément d'ordre 1260 alors que l'on a $630x = 0$ pour tout élément de C.

Nous allons voir comment généraliser ces idées de manière à déboucher sur un algorithme que nous pourrons programmer.

2.1. Forme réduite d'une somme directe

Il est facile de modifier l'aspect d'une somme directe grâce au théorème chinois. Pour inhiber ces métamorphoses, il faut considérer des groupes dont les ordres ne sont jamais étrangers, ce qui conduit naturellement à la définition suivante.

Définitions

- *Nous dirons que les entiers positifs $d_1, d_2, \ldots, d_n$ vérifient la condition $(\mathcal{D})$ si d_i divise d_{i+1} pour $i = 1, \ldots, n-1$, soit en symboles :*

$$(\mathcal{D}) \qquad d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n.$$

- *Nous dirons que la somme $\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_n}$ est* réduite *lorsque $d_1, d_2, \ldots, d_n$ vérifient la condition $(\mathcal{D})$.*

Théorème. — *Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots\ldots b_m$ des entiers > 1 et considérons les groupes ou les anneaux*

$$A = \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{a_n}, \quad B = \mathbb{Z}_{b_1} \oplus \mathbb{Z}_{b_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{b_m}.$$

Si les suites $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots\ldots b_m)$ vérifient la propriété $(\mathcal{D})$, on a l'équivalence

$$A \cong B \iff (a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots\ldots b_m).$$

(L'isomorphisme est, au choix, un isomorphisme de groupes ou d'anneaux.)

Démonstration. — Supposons A et B isomorphes ; alors :

- ils ont même cardinal, ce qui s'écrit $a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_m$;

- l'équation $\alpha x = 0$ possèdent le même nombre de racines dans A et dans B ; sachant que cette équation possède $(\alpha, \beta) = \mathrm{pgcd}(\alpha, \beta)$ racines dans $\mathbb{Z}_\beta$, nous avons ici

$$(\alpha, a_1)(\alpha, a_2) \cdots (\alpha, a_n) = (\alpha, b_1)(\alpha, b_2) \cdots (\alpha, b_m). \tag{1}$$

Supposons un instant que l'on ait $n < m$. Le dénombrement des racines de l'équation $b_1 x = 0$ montre que l'on a

$$b_1^m = (b_1, a_1) \cdots (b_1, a_n) \leq b_1^n, \tag{2}$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse $b_1 > 1$. La symétrie du problème interdisant $n > m$, nous concluons que $n = m$.

Nous pouvons aller un peu plus loin : la relation (2) nous apprend que la majoration $(b_1, a_i) \leq b_1$ est en fait une égalité pour $i = 1, \ldots, n$; en particulier, $(b_1, a_1) = b_1$ montre que b_1 divise a_1. Comme les a_i et les b_i jouent le même rôle, on en déduit que l'on a $a_1 = b_1$.

Le dénombrement des racines de l'équation $b_2 x = 0$ montre que l'on a

$$b_2^{n-1} = (b_2, a_1) \cdots (b_2, a_n). \tag{3}$$

Les majorations $(b_2, a_i) \leq b_2$ et (3) exigent alors $(b_2, a_i) = b_2$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. En particulier, $(b_2, a_2) = b_2$ montre que b_2 divise a_2. On montre pareillement que a_2 divise b_2, ce qui prouve que $a_2 = b_2$.

On prouve ainsi de proche en proche que l'on a $a_i = b_i$ pour tous les indices. ∎

Remarque

Décomposons chaque d_i en facteurs premiers

$$d_i = p_1^{\varepsilon_{i1}} p_2^{\varepsilon_{i2}} \cdots p_k^{\varepsilon_{ik}}, \quad \varepsilon_{i_j} \geq 0,$$

et considérons la matrice des exposants

$$\begin{array}{cccccc}
\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1k} & & (\text{exposants de } d_1) \\
\varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2k} & & (\text{exposants de } d_2) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \cdots & \varepsilon_{nk} & & (\text{exposants de } d_n).
\end{array}$$

La condition $(\mathcal{D})$ impose aux colonnes de cette matrice d'être des suites croissantes.

Lorsque $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (2, 12, 120, 1800)$, les ε_{ij} sont par exemple

2	3	5	$d_i = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$
1	0	0	$d_1 = 2$
2	1	0	$d_2 = 12$
3	1	1	$d_3 = 120$
3	2	2	$d_4 = 1800$

2.2. Un algorithme de décomposition-recomposition

Pour répondre à la question de l'isomorphisme des groupes

$$A = \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{a_n} \quad \text{et} \quad B = \mathbb{Z}_{b_1} \oplus \mathbb{Z}_{b_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{b_m},$$

il ne nous reste plus qu'à apprendre à mettre ceux-ci sous forme réduite

Isomorphisme d'une somme directe de deux groupes

Théorème d'échange. — *Soient $a, b > 1$ deux entiers quelconques, $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$ et $m = \operatorname{ppcm}(a, b)$. On a un isomorphisme de groupes (et même d'anneaux)*

$$\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \cong \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_m.$$

Démonstration. — Commençons par fixer les notations.

• Les lettres grecques $\alpha, \beta, \lambda, \ldots$ désignent des multi-indices, c'est-à-dire des éléments $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots \alpha_k)$ de $\mathbb{N}^k$.

• Si α, β sont deux multi-indices de $\mathbb{N}^k$, on dit que l'on a $\alpha < \beta$ (resp. $\alpha \leq \beta$) si l'on a $\alpha_i < \beta_i$ (resp. $\alpha_i \leq \beta_i$) pour $i = 1, \ldots, k$

• Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots \alpha_k)$ et $p = (p_1, \ldots, p_k)$, on note enfin $p^\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

Décomposons maintenant a et b en facteurs premiers (notations condensées) :

$$a = p^{\alpha'} q^{\alpha''} r^\lambda, \quad b = p^{\beta'} q^{\beta''} r^\lambda, \quad \alpha' > \beta', \quad \alpha'' < \beta''.$$

Leur pgcd et leur ppcm sont

$$d = p^{\beta'} q^{\alpha''} r^\lambda, \quad m = p^{\alpha'} q^{\beta''} r^\lambda.$$

On arrive au résultat en appliquant deux fois de suite le théorème chinois :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b &= \mathbb{Z}_{p^{\alpha'} q^{\alpha''} r^\lambda} \oplus \mathbb{Z}_{p^{\beta'} q^{\beta''} r^\lambda} \\ &\cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha'} r^\lambda} \oplus \mathbb{Z}_{q^{\alpha''}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{\beta'} r^\lambda} \oplus \mathbb{Z}_{q^{\beta''}} \\ &\cong \mathbb{Z}_{p^{\beta'} q^{\alpha''} r^\lambda} \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha'} q^{\beta''} r^\lambda} = \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_m. \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire. — *Les groupes ou les anneaux* $\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{b_1}$ *et* $\mathbb{Z}_{a_2} \oplus \mathbb{Z}_{b_2}$ *sont isomorphes si et seulement si on a* $a_1 b_1 = a_2 b_2$ *et* $\operatorname{pgcd}(a_1, b_1) = \operatorname{pgcd}(a_2, b_2)$.

Isomorphisme d'une somme directe de plusieurs groupes

Commençons par examiner le cas particulier d'une suite $(d_1, \ldots, d_{n-1})$ qui vérifie $(\mathcal{D})$; on se donne $\delta = d_n \geq 2$ et on cherche à définir la nouvelle suite $(d'_1, \ldots, d'_n,)$ qui satisfait encore la condition $(\mathcal{D})$ et

$$\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_{n-1}} \oplus \mathbb{Z}_\delta \cong \mathbb{Z}_{d'_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d'_{n-1}} \oplus \mathbb{Z}_{d'_n}.$$

• Le théorème d'échange appliqué aux entiers d_{n-1} et δ nous garantit qu'en posant $d'_n = \operatorname{ppcm}(d_{n-1}, \delta)$ et $\delta' = d'_{n-1} = \operatorname{pgcd}(d_{n-1}, \delta)$, nous avons

$$\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_{n-1}} \oplus \mathbb{Z}_\delta \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_{n-2}} \oplus \mathbb{Z}_{\delta'} \oplus \mathbb{Z}_{d'_n}$$

• Nous sommes ainsi ramenés à la même situation avec la suite $(d_1, \ldots, d_{n-2})$ et l'entier δ'. En posant $d'_{n-1} = \operatorname{ppcm}(d_{n-2}, \delta')$ et $\delta'' = d'_{n-2} = \operatorname{pgcd}(d_{n-2}, \delta')$, nous avons l'isomorphisme

$$\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_{n-1}} \oplus \mathbb{Z}_\delta \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_{n-3}} \oplus \mathbb{Z}_{\delta''} \oplus \mathbb{Z}_{d'_{n-1}} \oplus \mathbb{Z}_{d'_n}.$$

Nous sommes certains que $d'_{n-1} = \operatorname{ppcm}(d_{n-2}, \delta')$ divise $d'_n = \operatorname{ppcm}(d_{n-1}, \delta)$ parce que d_{n-2} divise d_{n-1} et δ' divise δ.

La nouvelle suite $(d'_1, \ldots, d'_n, d'_{n+1})$ s'obtient de proche en proche, ce qui revient à employer l'algorithme :

(A_1)

```
for i := n downto 2 do begin
  | a := d[i] ;
  | b := d[i − 1] ;
  | d[i] := ppcm(a, b) ;
  | d[i − 1] := pgcd(a, b)
end
```

Lorsque $n = 2$, cet algorithme se réduit au théorème d'échange.

Si nous partons maintenant d'une suite $(d_1, \ldots, d_n)$ *quelconque*, nous commençons par appliquer le théorème d'échange au couple (d_1, d_2) de manière que d_1 divise d_2 ; cela fait, nous appliquons l'algorithme précédent à (d_1, d_2) et d_3, puis nous recommençons avec (d_1, d_2, d_3) et d_4, et ainsi de suite.

L'algorithme employé est donc :

(A_2)

```
for k := 2 to n do begin
  for i := k downto 2 do begin
    a := d[i] ;
    b := d[i − 1] ;
    d[i] := ppcm(a, b) ;
    d[i − 1] := pgcd(a, b)
  end
end
```

Voici une trace de cet algorithme avec la suite $(36, 70, 120, 150)$:

k	i	36	70	120	150
2	2	2	1260	120	150
3	3	2	60	2520	150
3	2	2	60	2520	150
4	4	2	60	30	12600
4	3	2	30	60	12600
4	2	2	30	60	12600

Exemple

L'algorithme (A_2) transforme $(4, 6, 15, 21)$ en $(1, 3, 6, 420)$ et $(15, 21, 24)$ en $(3, 3, 840)$. On a donc les isomorphismes

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{21} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{420}, \\ B &= \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{24} \qquad \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{840}. \end{aligned}$$

On notera que l'on a éliminé le groupe $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$ de la forme réduite de A. On conclut que les groupes (ou les anneaux) A et B, bien qu'ayant le même cardinal, ne sont pas isomorphes puisque leurs formes réduites ne sont pas identiques.

3. RECHERCHE EXPLICITE DES ISOMORPHISMES

Nous nous sommes contentés jusqu'à présent de répondre par *oui* ou par *non* à la question : «les sommes directes A et B sont-elles isomorphes ?» Mais lorsque la réponse à cette question est positive, nous sommes bien en peine d'exhiber un isomorphisme...

L'examen de la démonstration du théorème d'échange, $\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \cong \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_m$, montre qu'il est possible d'expliciter l'isomorphisme au prix de la décomposition en facteurs premiers de a et b. Mais comme cette opération est algorithmiquement très coûteuse, nous allons apprendre à la contourner.

Définition. — Soient a_1, a_2, b_1, b_2 quatre entiers > 0. Nous dirons que (a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont *bi-étrangers* si tout entier d'indice 1 est étranger à tout entier d'indice 2, c'est-à-dire si

$$\begin{aligned} \mathrm{pgcd}(a_1, a_2) = \mathrm{pgcd}(a_1, b_2) = 1, \\ \mathrm{pgcd}(b_1, a_2) = \mathrm{pgcd}(b_1, b_2) = 1. \end{aligned}$$

Une application immédiate du théorème chinois fournit le résultat suivant.

Théorème d'échange (deuxième version). — *Si les factorisations $a = a_1 a_2$ et $b = b_1 b_2$ sont bi-étrangères, on a des isomorphismes d'anneaux*

$$\mathbb{Z}_{a_1 a_2} \oplus \mathbb{Z}_{b_1 b_2} \longrightarrow \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \mathbb{Z}_{b_1} \oplus \mathbb{Z}_{b_2} \longrightarrow \mathbb{Z}_{a_1 b_2} \oplus \mathbb{Z}_{b_1 a_2}.$$

Plus précisémment, si les entiers u, v, w, t sont choisis tels que l'on ait

$$a_1 u + b_2 v = 1, \quad a_2 w + b_1 t = 1,$$

le composé des deux isomorphismes est l'application

$$(x, y) \longmapsto (b_2 v x + a_1 u y, b_1 t x + a_2 w y).$$

3.1. Détermination d'une factorisation bi-étrangère

Nous allons maintenant apprendre à calculer les factorisations $a = a_1 a_2$ et $b = b_1 b_2$ telles que $d = \mathrm{pgcd}(a, b) = a_1 b_2$, $m = \mathrm{ppcm}(a, b) = a_2 b_1$ et (a_1, a_2), (b_1, b_2) bi-étrangers sans être obligés de décomposer a et b en facteurs premiers.

Définition. — Nous dirons que la boucle

(A_3)

```
d := pgcd(a,b) ;
while d > 1 do begin
  | a := a/d ;
  | b := b * d ;
  | d := pgcd(a,b)
end
```

réalise le *transfert des diviseurs communs* de a vers b.

Exemple

Soient p, q, r trois nombres premiers distincts et α, β deux entiers non divisibles par l'un des nombres p, q ou r ; considérons les entiers

$$a = p^6 q^4 r^2 \alpha, \quad b = p q^2 r^5 \beta.$$

La boucle (A_3) transfère des diviseurs communs de a vers b de la manière suivante (la troisième colonne contient le diviseur commun d qui se déplace de a vers b) :

$$\begin{array}{lll} a = \alpha p^6 q^4 r^2, & b = pq^2 r^5 \beta, & d = pq^2 r^2, \\ a = \alpha p^5 q^2, & b = p^2 q^4 r^7 \beta, & d = p^2 q^2, \\ a = \alpha p^3, & b = p^4 q^6 r^7 \beta, & d = p^3, \\ a = \alpha, & b = p^7 q^6 r^7 \beta, & d = 1. \end{array}$$

Insistons : l'algorithme de transfert n'utilise que la fonction pgcd ; les nombres premiers ne figurent ici que pour faciliter la compréhension de la dynamique des calculs.

Soient $a, b > 1$ deux entiers, $m = \mathrm{ppcm}(a, b)$ et $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$; posons

(1) $$a = da_2, \quad b = db_2.$$

Nous savons que a_2 et b_2 sont étrangers ; cependant, ces décompositions en facteurs ne conviennent pas encore car (d, a_2) d'une part et (d, b_2) d'autre part ne sont pas étrangers en général.

C'est pour cette raison que nous transférons les diviseurs communs de d vers a_2 et de d vers b_2 à l'aide de boucle (A_3), ce qui donne

(2) $$a = a_1 a_2', \quad b = b_1 b_2'.$$

Si $d_1, \ldots, d_k$ sont les diviseurs communs qui se déplacent de d vers a_2, nous avons $a_1 = d/(d_1 \cdots d_k)$ et $a_2' = d_1 \cdots d_k a_2$. Les notations b_1, b_2' sont analogues (on notera toutefois que ce ne sont pas forcément les mêmes diviseurs qui se déplacent de d vers b_2). Comme a_2 a reçu des nombres qui le divisent et comme il en est de même de b_2, nous sommes certains que a_2' et b_2' sont étrangers. En outre, a_1 est étranger à a_2' et b_1 est étranger à b_2'.

Mais il ne s'agit pas encore d'une factorisation bi-étrangère car, si nous échangeons les facteurs a_2' et b_2' dans a et b, nous obtenons les entiers $a_1 b_2'$ et $b_1 a_2'$; or a_1 et b_2' n'ont aucune raison d'être étrangers. Pour remédier à ce dernier défaut, posons $\delta = \mathrm{pgcd}(a_1, b_1)$, ce qui permet d'écrire

(3) $$a = a_1' \delta a_2', \quad b = b_1' \delta b_2'.$$

Lemme. — *Avec les notations précédentes, les décompositions*

$$a = a_2'(a_1'\delta), \quad b = b_1'(\delta b_2')$$

sont bi-étrangères. En outre, après échange des derniers facteurs dans a et b, l'un des entiers $a_2'(\delta b_2')$ ou $b_1'(a_1'\delta)$ est le pgcd de a et b, l'autre étant leur ppcm.

Démonstration. — Décomposons a et b en facteurs premiers (notations condensées)

$$a = p^{\alpha'} q^{\alpha''} r^{\lambda}, \quad b = p^{\beta'} q^{\beta''} r^{\lambda}, \quad \alpha' > \beta', \quad \alpha'' < \beta''.$$

Leur pgcd est $d = p^{\beta'} q^{\alpha''} r^{\lambda}$ et (1) devient

$$(1') \qquad a = (p^{\beta'} q^{\alpha''} r^{\lambda})(p^{\alpha'-\beta'}), \quad b = (p^{\beta'} q^{\alpha''} r^{\lambda})(q^{\beta''-\alpha''}).$$

Comme $\alpha' - \beta' > 0$, les diviseurs communs qui passent de $p^{\beta'} q^{\alpha''} r^{\lambda}$ dans $p^{\alpha'-\beta'}$ sont ceux du produit $p^{\beta'}$; de manière analogue, le transfert déplace $q^{\alpha''}$ du premier facteur de b au second facteur

$$(2') \qquad a = (q^{\alpha''} r^{\lambda})(p^{\alpha'}), \quad b = (p^{\beta'} r^{\lambda})(q^{\beta''}).$$

Le pgcd des premiers facteurs de a et b étant r^{λ}, il vient

$$(3') \qquad a = (q^{\alpha''})(r^{\lambda})(p^{\alpha'}), \quad b = (p^{\beta'})(r^{\lambda})(q^{\beta''}).$$

Il résulte alors de ce calcul que les décompositions

$$a = p^{\alpha'}(q^{\alpha''} r^{\lambda}), \quad b = p^{\beta'}(r^{\lambda} q^{\beta''}).$$

sont bi-étrangères. Le pgcd et le ppcm s'obtiennent bien par échange des derniers facteurs $q^{\alpha''} r^{\lambda}$ et $r^{\lambda} q^{\beta''}$ puisque $m = p^{\alpha'}(r^{\lambda} q^{\beta''})$ et $d = p^{\beta'}(q^{\alpha''} r^{\lambda})$. $\square$

Exemple

Considérons les entiers

$$a = 1\,792\,929\,600 = 2^6 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^3 \times 11^2,$$
$$b = 32\,683\,612\,500 = 2^2 \times 3^2 \times 5^5 \times 7^4 \times 11^2,$$

les décompositions en facteurs premiers facilitant la compréhension des calculs. Le pgcd de a et b est $d = 37\,352\,700 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 11^2$, d'où les décompositions

$$a = 37\,352\,700 \times 48 = (2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 11^2)(2^4 \times 3),$$
$$b = 37\,352\,700 \times 7 = (2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 11^2)(7).$$

Transférons les diviseurs 2 et 3 du pgcd vers le second facteur de a et les diviseurs 7 du pgcd vers le second facteur de b :

$$a = 1\,037\,575 \times 1\,728 = (5^2 \times 7^3 \times 11^2)(2^6 \times 3^3),$$
$$b = 108\,900 \times 2\,401 = (2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11^2)(7^4).$$

Isolons enfin le pgcd $3\,025 = 5^2 \times 11^2$ des premiers facteurs de a et b :

$$a = 343 \times 3\,025 \times 1\,728 = (7^3)(5^2 \times 11^2)(2^6 \times 3^3),$$
$$b = 36 \times 3\,025 \times 2\,401 = (2^2 \times 3^2)(5^2 \times 11^2)(7^4).$$

Les factorisations bi-étrangères recherchées s'obtiennent en échangeant le premier et le dernier facteur de a puis en effectutant le produit des deux derniers facteurs :

$$a = 1\,728 \times (343 \times 3\,025) = 1\,728 \times 1\,037\,575 = (2^6 \times 3^3)(5^2 \times 7^3 \times 11^2),$$
$$b = 36 \times (3\,025 \times 2\,401) = 900 \times 7\,263\,025 = (2^2 \times 3^2)(5^2 \times 7^4 \times 11^2).$$

Vérification : nous obtenons bien le pgcd et le ppcm en échangeant les derniers facteurs :

$$12\,550\,507\,200 = 1\,728 \times 7\,263\,025 = (2^6 \times 3^3)(5^2 \times 7^4 \times 11^2),$$
$$37\,352\,700 = 36 \times 1\,037\,575 = (2^2 \times 3^2)(5^2 \times 7^3 \times 11^2).$$

3.2. Implémentation du théorème d'échange pour deux anneaux

Le programme qui construit explicitement l'isomorphisme entre $\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$ et $\mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_m$ est donc le suivant :

• On calcule $d = \text{pgcd}(a, b)$, ce qui définit $a = d \times a_2$ et $b = d \times b_2$, puis on transfère les diviseurs communs de d vers a_2 et b_2 (nous avons à la sortie $a = \delta a_1 \times a_2$ et $b = \delta b_1 \times b_2$) :

```
d := pgcd(a, b) ;
da := d ; a2 := a div da ;
transfert_diviseurs_communs(da, a2) ;
db := d ; b2 := b div db ;
transfert_diviseurs_communs(db, b2) ;
```

• On isole ensuite le pgcd δ de da et db de manière à obtenir les factorisations $a = a_1 \times \delta \times a_2$ et $b = b_1 \times \delta \times b_2$. Cela fait, on échange les contenus de a_1 et a_2, de sorte que les factorisation bi-étrangères désirées sont maintenant $a = a_1 \times \delta a_2$ et $b = b_1 \times \delta b_2$:

```
delta := pgcd(da, db) ;
a1 := da div delta ; b1 := db div delta ;
swap(a1, a2) ;
a2 := delta * a2 ; b2 := delta * b2 ;
```

• On définit $d = a_1 b_2$ et $m = a_2 b_1$, qui sont, à transposition près, le pgcd et le ppcm de a de b; on recherche u, v, w, t tels que $a_1 u + b_2 v = a_2 w + b_1 t = 1$, ce qui permet de définir la matrice (m_{ij}) de l'isomorphisme $\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \to \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_m$:

```
d := a1 * b2 ; m := b1 * a2 ;
Bezout(a1, b2, u, v) ; Bezout(b1, a2, w, t) ;
m11 := b2 * v ; m12 := a1 * u ;
m21 := b1 * w ; m22 := a2 * t ;
```

• Lorsque d ne divise pas m, ce qui correspond au cas $d = \text{ppcm}(a, b)$ et

$m = \text{pgcd}(a, b)$, on échange les contenus de d et m, ce qui a pour effet d'échanger les lignes de la matrice des (m_{ij}) :

```
if m mod d > 0 then transposition := true else transposition := false ;
if transposition then begin
| swap(d, m) ;
| swap(m11, m21) ;
| swap(m12, m22) ;
end ;
```

L'isomorphisme d'anneaux cherché est

$$\Phi : \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \longrightarrow \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_m,$$

$$(x, y) \longmapsto (m_{11}x + m_{12}y, m_{21}x + m_{22}y)$$

- L'isomorphisme réciproque

$$\Psi = \Phi^{-1} : \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$$
$$(x, y) \longmapsto (M_{11}x + M_{12}y, M_{21}x + M_{22}y)$$

s'obtient en déterminant u, v, w, t tels que $a_1u + a_2v = b_1w + b_2t = 1$:

```
Bezout(a1, a2, u, v) ; Bezout(b1, b2, w, t) ;
M11 := a2 * v ; M12 := a1 * u ;
M21 := b1 * w ; M22 := b2 * t ;
if transposition then begin
| swap(M11, M12) ;
| swap(M21, M22)
end
```

Exemple

Lorsque $a = 350$ et $b = 980$, on obtient les isomorphismes d'anneaux :

$$\Phi : \mathbb{Z}_{350} \oplus \mathbb{Z}_{980} \longrightarrow \mathbb{Z}_{70} \oplus \mathbb{Z}_{4900},$$
$$(x, y) \longmapsto (15x - 14y, 1176x - 1175y)$$

$$\Psi = \Phi^{-1} : \mathbb{Z}_{70} \oplus \mathbb{Z}_{4900} \longrightarrow \mathbb{Z}_{350} \oplus \mathbb{Z}_{980},$$
$$(x, y) \longmapsto (-125x + 126y, 196x - 195y)$$

3.3. Isomorphisme entre deux sommes directes quelconques

Nous savons maintenant que deux sommes directes de groupes ou d'anneaux sont isomorphes si et seulement si leurs formes réduites le sont. Ce résultat nous autorise donc à nous contenter d'expliciter les isomorphismes (direct et réciproque) entre une somme directe et sa forme réduite. Considérons par exemple l'anneau

$$\mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{120} \oplus \mathbb{Z}_{150}.$$

L'algorithme (A_2) tranforme la suite $(36, 120, 150)$ en la suite $(6, 60, 1800)$ en passant par les suites intermédiaires $(12, 360, 150)$ et $(12, 30, 1800)$ et le théorème d'échange fournit les isomorphismes

$$\begin{aligned} \Phi_A &: \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{120} \oplus \mathbb{Z}_{150} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{360} \oplus \mathbb{Z}_{150}, \\ \Phi_B &: \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{360} \oplus \mathbb{Z}_{150} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{1800}, \\ \Phi_C &: \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{1800} \longrightarrow \mathbb{Z}_{6} \oplus \mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{1800}, \end{aligned}$$

de matrices respectives

$$\Phi_A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -80 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -575 & 576 \end{pmatrix}, \quad \Phi_C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -15 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'isomorphisme composé

$$\Phi = \Phi_C \circ \Phi_B \circ \Phi_A : \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{120} \oplus \mathbb{Z}_{150} \longrightarrow \mathbb{Z}_{6} \oplus \mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{1800}$$

a donc pour matrice associée

$$\Phi = \Phi_C \Phi_B \Phi_A = \begin{pmatrix} -1434 & 1450 & -15 \\ -7635 & 7716 & -80 \\ 46000 & -46575 & 576 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 45 & 36 & 40 \\ 1000 & 225 & 576 \end{pmatrix}$$

puisque, la première ligne est définie modulo 6, la seconde modulo 60 et la troisième modulo 1800.

Interlude

Comme les calculs deviennent compliqués, rassurons-nous en vérifiant *directement* que cette matrice définit bien un isomorphisme d'anneaux :

• Les congruences $a_j m_{ij} \equiv 0$ modulo b_i sont respectées, ce qui montre que Φ est une application.

• L'application Φ est un homomorphisme d'anneaux puisque :

— 4 et 3 sont des idempotents orthogonaux de $\mathbb{Z}_6$;

— 45, 36 et 40 sont des idempotents deux à deux orthogonaux de $\mathbb{Z}_{120}$;

— 1000, 225 et 576 sont des idempotents deux à deux orthogonaux de $\mathbb{Z}_{1800}$.

• Comme $\mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{120} \oplus \mathbb{Z}_{150}$ et $\mathbb{Z}_{6} \oplus \mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{1800}$ ont le même cardinal, nous pouvons nous contenter de vérifier que Φ est injective pour nous assurer que c'est un isomorphisme d'anneaux. Si $\Phi(x, y, z) = (0, 0, 0)$, on voit facilement que :

— $4y + 3z = 6k$ implique $y \equiv 0 \pmod 3$ et $z \equiv 0 \pmod 2$;

— $45x + 36y + 40z = 60h$ implique $x \equiv 0 \pmod 4$, $y \equiv 0 \pmod 5$ et $z \equiv 0 \pmod 3$;

— $1000x + 225y + 576z = 1800\ell$ implique $x \equiv 0 \pmod 9$, $y \equiv 0 \pmod 8$ et $z \equiv 0 \pmod{25}$.

Par conséquent, on a $x \equiv 0 \pmod{36}$, $y \equiv 0 \pmod{120}$ et $z \equiv 0 \pmod{150}$.

Le théorème d'échange nous fournit aussi, en même temps que les isomorphisme directes Φ_A, Φ_B, Φ_C, les isomorphisme réciproques

$$\begin{aligned} \Psi_A &: \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{360} \oplus \mathbb{Z}_{150} \longrightarrow \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{120} \oplus \mathbb{Z}_{150}, \\ \Psi_B &: \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{1800} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{360} \oplus \mathbb{Z}_{150}, \\ \Psi_C &: \mathbb{Z}_{6} \oplus \mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{1800} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{1800}, \end{aligned}$$

dont les matrices associées sont

$$\Psi_A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 0 \\ 40 & -39 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \Psi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -144 & 145 \\ 0 & 25 & -24 \end{pmatrix}, \ \Psi_C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 15 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'isomorphisme composé est donc

$$\Psi = \Psi_A \Psi_B \Psi_C : \mathbb{Z}_{6} \oplus \mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{1800} \longrightarrow \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{120} \oplus \mathbb{Z}_{150}$$

et sa matrice est

$$\Psi = \Psi_A \Psi_B \Psi_C \equiv \begin{pmatrix} 0 & 9 & 28 \\ 40 & 96 & 105 \\ 75 & 100 & 126 \end{pmatrix}.$$

Pour contrôler ce résultat, on vérifie que l'on a $\Psi\Phi \equiv I$ ainsi que $\Phi\Psi \equiv I$ (ne pas oublier que les lignes de la matrice $\Psi\Phi$ sont définies modulo 36, 120 et 150 alors que celles de la matrice $\Phi\Psi$ sont définies modulo 6, 60 et 1800).

3.4. Le programme

La transformation en programme de l'exemple que nous venons de traiter ne présente pas de difficulté particulière. On commence par saisir le nombre n de facteurs puis le vecteur $d_1, \ldots, d_n$. La détermination des isomorphismes s'obtient en greffant à l'intérieur de l'algorithme (A_2), qui transforme la suite $d_1, \ldots, d_n$, le calcul de la matrice (a_{ij}) de la matrice de l'isomorphisme d'échange

$$\mathbb{Z}_\alpha \oplus \mathbb{Z}_\beta \longrightarrow \mathbb{Z}_\delta \oplus \mathbb{Z}_\mu,$$

avec $\alpha = d_{i-1}$, $\beta = d_i$, $\delta = \text{pgcd}(a, b)$, $\mu = \text{ppcm}(a, b)$ et celle de la matrice (aa_{ij}) de l'isomorphisme réciproque.

On enchasse ensuite les matrices (a_{ij}) et (aa_{ij}) dans des matrices unités de dimension n pour trouver les matrices Φ_A et Ψ_A des isomorphismes partiels

$$\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \mathbb{Z}_\alpha \oplus \mathbb{Z}_\beta \oplus \cdots \mathbb{Z}_{d_n} \underset{\Psi_A}{\overset{\Phi_A}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \mathbb{Z}_\delta \oplus \mathbb{Z}_\mu \oplus \cdots \mathbb{Z}_{d_n}.$$

On compose ces isomorphismes partiels, en multipliant au fur et à mesure les matrices correspondantes. Il y a un petit piège à éviter : si nous examinons notre exemple, nous constatons que nous obtenons les couples de matrices (Φ_A, Ψ_A), (Φ_B, Ψ_B), (Φ_C, Ψ_C) *dans cet ordre*; comme nous désirons calculer $\Phi_C \Phi_B \Phi_A$ et $\Psi_A \Psi_B \Psi_C$, nous devons réfléchir un peu à l'ordre des multiplications.

Les boucles terminées, on affiche les matrices trouvées modulo les valeurs initiales *init_d* et finales d.

```
init_d := d ; Phi := unite(n) ; Psi := unite(n) ;
for k := 2 to n do begin
  for i := k downto 2 do begin
    α := d[i − 1] ; β := d[i] ;
    δ := pgcd(a, b) ; μ := ppcm(α, β) ;
    d[i] := μ ; d[i − 1] := δ ;
    {— théorème d'échange —}
    echange(α, β, δ, μ, a11, a12, a21, a22, aa11, aa12, aa21, aa22) ;
    {— insertion des (aij) dans une matrice unité —}
    Phi_A := unite(n) ;
    Phi_A[i − 1, i − 1] := a11 ; Phi_A[i − 1, i] := a12 ;
    Phi_A[i, i − 1] := a21 ; Phi_A[i, i] := a22 ;
    {— insertion des (aaij) dans une matrice unité —}
    Psi_A := unite(n) ;
    Psi_A[i − 1, i − 1] := aa11 ; Psi_A[i − 1, i] := aa12 ;
    Psi_A[i, i − 1] := aa21 ; Psi_A[i, i] := aa22 ;
    {— composition des isomorphismes —}
    Phi := mult_mat(Phi_A, Phi) ;
    Psi := mult_mat(Psi, Psi_A) ;
  end
end ;
afficher_iso(Phi, init_d, d) ;
afficher_iso(Psi, d, init_d)
```

Exemple

Considérons les anneaux

$$\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{40} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{45} \oplus \mathbb{Z}_{100}.$$

Le programme précédent fournit les isomorphismes

$$\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{40} \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{1800} \xrightarrow{\Psi_2} \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{45} \oplus \mathbb{Z}_{100}$$

de matrices respectives

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 0 & 36 \\ 1000 & 0 & 576 & 225 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ 36 & 10 \\ 25 & 76 \end{pmatrix}.$$

L'isomorphisme composé

$$\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{40} \xrightarrow{\Psi_2 \circ \Phi_1} \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{45} \oplus \mathbb{Z}_{100}$$

a donc pour matrice

$$\Psi_2\Phi_1 = \begin{pmatrix} 9000 & 400 & 5184 & 2601 \\ 10000 & 900 & 5760 & 3546 \\ 76000 & 625 & 43776 & 18000 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 & 9 \\ 10 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 25 & 76 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve de même les isomophismes d'anneaux

$$\mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{45} \oplus \mathbb{Z}_{100} \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{1800} \xrightarrow{\Psi_1} \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{40}$$

de matrices respectives

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 16 & 25 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 = \begin{pmatrix} 40 & 36 & 45 \\ 225 & 1000 & 576 \end{pmatrix},$$

ce qui donne l'isomorphisme composé

$$\mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{45} \oplus \mathbb{Z}_{100} \xrightarrow{\Psi_1 \circ \Phi_2} \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{40}$$

de matrice

$$\Psi_1\Phi_2 = \begin{pmatrix} 225 & 1000 & 576 \\ 40 & 36 & 45 \\ 225 & 1000 & 576 \\ 6265 & 25576 & 15120 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 25 & 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarques

• On peut facilement contrôler que les matrices définissent des homomorphismes d'anneaux à l'aide des résultats suivants :

anneau	*idempotents*	*anneau*	*idempotents*
$\mathbb{Z}_9$	$0, 1$	$\mathbb{Z}_{24}$	$0, 1, 9, 16$
$\mathbb{Z}_{12}$	$0, 1, 4, 9$	$\mathbb{Z}_{45}$	$0, 1, 10, 36$
$\mathbb{Z}_{25}$	$0, 1$	$\mathbb{Z}_{100}$	$0, 1, 25, 76$
$\mathbb{Z}_{40}$	$0, 1, 16, 25$		

• Il est facile de s'assurer que les matrices $\Psi_2\Phi_1\Psi_1\Phi_2$ et $\Psi_1\Phi_2\Psi_2\Phi_1$ sont des matrices unités.

TOURS DE CARTES AVEC MÉLANGES RÉGULIERS

Dominique DUMONT

Deuxième partie : théorie et démonstrations

Dans une première partie de cet article, parue en mars dernier dans le numéro 90 de l'Ouvert, des tours de cartes ont été présentés aux lecteurs. Nous revenons à présent sur les démonstrations de ces tours, en citant en italiques des extraits de la première partie de l'article.

Rappel.— On se munit d'un jeu de 52 cartes et on en retire les rois. On répartit le jeu en ses quatre *couleurs*, qui comportent donc chacune 12 cartes, celles-ci ayant pour *valeurs* y les nombres entiers de 1 à 12, en convenant que le valet vaut 11 et la dame 12.
Dans un paquet de 12 cartes les cartes sont toujours faces contre table, et la *position* x d'une carte est alors son rang dans le paquet en comptant à partir du dessus.
Soit P un paquet de 12 cartes, k un diviseur de 12, h le diviseur complémentaire ($hk = 12$). Le $k-$*mélange régulier* de P en k piles de hauteur h s'opère de la manière suivante :
- étape 1 : on pose sur la table, de gauche à droite, les k premières cartes, de positions $1, 2, \ldots, k$ dans P;
- étape 2 : on pose sur elles les k suivantes, de positions $k+1, k+2, \ldots, 2k$ dans P;
- et ainsi de suite, en respectant, à chaque étape, la règle suivante : on pose la carte de position $k+i$ sur la carte de position i (il s'agit des positions dans P);
- après h étapes, on obtient k piles de hauteur h, qu'on ramasse dans l'ordre, de gauche à droite : la pile 1 au-dessus, puis la pile 2, etc. jusqu'à la pile k.

On obtient ainsi un paquet P', transformé de P à l'issue du $k-$mélange.

L'explication des tours de cartes sera basée sur un résultat essentiel, qui est le suivant :

Théorème fondamental.— *La carte de position x dans le paquet P occupera, après mélange en k piles de hauteur h, une position x' dans le paquet P' donnée par la formule suivante :*

$$x' = hx \pmod{13}.$$

Démonstration.— Considérons, pour toute carte de position x dans P, le nombre x défini par $x' = hx \pmod{13}$, et montrons que x' est bien la position de cette carte dans P'.

Les k premières cartes de P, de positions $x = 1, 2, \ldots, k$ se retrouvent à l'issue du mélange en bas des piles, et occuperont donc les positions respectives $h, 2h, \ldots kh$ dans P', positions qui sont données par $x' = hx$.
A chacune des étapes suivantes, on pose sur la carte de position $x_1 = i$ la carte de position $x_2 = k + i$. Il suffit de vérifier que $x_2' = x_1' - 1$ car cela implique, par récurrence sur le numéro de l'étape, que les x' sont bien les positions des cartes dans P'.
Or on a $x_1' = hi \pmod{13}$, d'où

$$x_2' = hx_2 = h(k + i) = hk + hi = 12 + x_1' = x_1' - 1 \pmod{13},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème nous conduit donc à faire les calculs dans le corps $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, plus précisément dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$.
C'est ce qui n'allait pas de soi : a priori, la plupart des spectateurs mathématiciens de ces tours de cartes ont tendance à croire que le présentateur calcule modulo 12 puisqu'il y a 12 cartes...

1) Paquets linéaires : calculer la position ou la valeur d'une carte

Voici un tour décrit dans notre précédent article :

Le présentateur part d'un paquet de piques rangé dans l'ordre normal $1, 2, 3, ..., 11, 12$, *et il opère sur ce paquet un certain nombre de $k-$mélanges, pour des valeurs de k choisies arbitrairement par les spectateurs.*
A l'issue d'une étape quelconque, le présentateur est toujours en mesure de répondre aux questions des spectateurs :

- *"Quelle est la valeur de la carte située en position x ?"*
- *"Quelle est la position de la carte de valeur y ?"*

Exemple.— Ci-dessous, on considère à gauche un paquet P d'équation $x = y$ (dans lequel positions et valeurs coincident), on lui fait subir un $3-$mélange en 3 piles de hauteur 4. La carte de position x dans P occupe alors dans P' une position x' donnée par $x' = 4x \pmod{13}$. Par conséquent l'équation du paquet transformé P' est $x' = 4y' \pmod{13}$, ou, ce qui revient au même, $y' = 10x' \pmod{13}$ puisque 4 et 10 sont inverses dans le corps $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

1				10
2				7
3				4
4				1
5				11
6				8
7				5
8				2
9	10	11	12	12
10	7	8	9	9
11	4	5	6	6
12	1	2	3	3

Supposons que l'on fasse ensuite subir à P' un 6−mélange en piles de hauteur 2. On obtient :

10							5
7							10
4							2
1							7
11							12
8							4
5							9
2							1
12							6
9							11
6	5	2	12	9	6	3	3
3	10	7	4	1	11	8	8

On a $x'' = 2x' \pmod{13}$ d'où l'équation du paquet P'' : $x'' = 8y'' \pmod{13}$, ou $y'' = 5x'' \pmod{13}$.

En itérant des mélanges réguliers à partir du paquet dans l'ordre initial ($x = y$), on reste à l'intérieur de l'ensemble des 12 paquets linéaires, si l'on entend par "paquet linéaire" un paquet qui a pour équations $y = ax \pmod{13}$ et $x = by \pmod{13}$, a et b désignant deux éléments inverses du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$: $ab = 1 \pmod{13}$.

Un k−mélange en k piles de hauteur h fait passer du paquet d'équation $x = by \pmod{13}$ au paquet $x = hby \pmod{13}$.

Par conséquent, si l'on part du paquet d'équation $x = y$ et qu'on fait des mélanges réguliers en piles de hauteurs respectives h_1, h_2, $\cdots$ h_n, on aboutit au paquet d'équation $x = by \pmod{13}$ où $b = h_1 h_2 \cdots h_n \pmod{13}$. Le présentateur doit simplement multiplier mentalement modulo 13 les hauteurs des piles des mélanges successifs pour calculer b. Il sera ainsi en mesure de répondre à la question de déterminer la position x d'une carte de valeur y donnée par les spectateurs.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10
4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9
5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8
6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7
7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5
9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4
10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Table de multiplication modulo 13

Puis en calculant l'inverse a de b (le présentateur doit donc avoir préalablement mémorisé la table des inverses), il déduit l'équation équivalente $y = ax \pmod{13}$ et peut répondre à la question inverse, celle de déterminer la valeur d'une carte de position désignée par les spectateurs.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x^{-1}	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12

Table des inverses modulo 13

2) Paquets exponentiels : un mélange par ici, une coupe par là

Voici un autre tour proposé dans la première partie :

Le présentateur présente un paquet de piques rangé dans l'ordre normal $1, 2, 3, ..., 11, 12$, *qu'il garde en main, et un paquet de coeurs rangé dans l'ordre inverse* $12, 11, ...3, 2, 1$, *qu'il pose sur la table.*
Puis il procède comme suit :
- étape 1 : il pose la première carte du paquet de piques (l'as) face contre table, puis il prend la première carte du paquet de coeur (la dame) et la pose sur le paquet de piques, puis il fait un $2-$*mélange du paquet obtenu et le reprend en main.*
- étape 2 : il pose la première carte du paquet en main (le valet de pique) sur l'as de pique (sur la table), puis il prend la carte suivante du paquet de coeur (le valet de coeur) et la pose sur le paquet qu'il a en main, il fait à nouveau un $2-$*mélange et reprend le paquet en main.*
Et ainsi de suite. Le présentateur fait observer à l'assistance qu'au début de chaque étape c'est toujours un pique qu'il dépose sur le paquet en formation sur la table (en dépit du fait qu'il a en main un paquet comportant des cartes des deux couleurs).

La douzième étape s'achève elle aussi sur un 2−mélange. Le paquet de coeurs est alors le suivant :

$$12, 5, 8, 10, 9, 1, 7, 3, 4, 2, 11, 6,$$

tandis que sur la table, le paquet de piques est

$$6, 10, 8, 9, 2, 12, 7, 3, 5, 4, 11, 1.$$

Le présentateur fait constater la réciprocité des deux paquets.

Nous allons démontrer que l'équation du paquet de coeurs ainsi construit est $x = 6^y \pmod{13}$ et celle du paquet de piques $y = 6^x \pmod{13}$.
Quand nous écrirons dans ce qui suit une égalité du type $x = 6^y$, nous supposerons toujours implicitement qu'elle est vraie *modulo 13* tandis que l'exposant (dans le cas présent, y) est défini *modulo 12.*
Au début de l'étape 1 on pose le 1 de pique sur la table, en position 12 du paquet de piques en construction. A l'issue de l'étape 1, le 12 de coeur (la dame) se trouve en position 6 dans le paquet mixte, les piques occupent les autres positions selon les équations $x = 6y$, $y = 11x$.
Au début de l'étape 2 on pose le 11 de pique sur la table, en position 11 du paquet de piques en construction. A l'issue de l'étape 2, dans le paquet mixte le 12 de coeur occupe la position 6^2 et le 11 de coeur la position 6. Les piques occupent les autres positions selon les équations $x = 6^2y = 10y$, $y = 11^2x = 4x$.
Et ainsi de suite : à la fin de l'étape $(k-1)$, dans le paquet mixte les piques sont d'équation $y = 11^{k-1}x$. Donc au début de l'étape k c'est le pique de valeur 11^{k-1} qu'on pose en position $(12 - k + 1)$ du paquet de piques en construction. A l'issue de l'étape k, dans le paquet mixte le 12 de coeur occupe la position 6^k, le 11 la position 6^{k-1}, etc. et le coeur de valeur $(12-k+1)$ occupe la position 6. Les piques occupent les positions restantes, selon l'équation $y = 11^kx$.
Enfin, au début de l'étape 12 c'est le pique de valeur $11^{11} = 6$ qu'on pose en position 1 du paquet de piques ainsi achevé. A l'issue de l'étape 12, le paquet en main ne comporte plus que des coeurs, le 12 de coeurs occupe la position $6^{12} = 1$, le 11 de coeur la position 6^{11}, et plus généralement le coeur de valeur y occupe la position 6^y. L'équation de ce paquet est donc $x = 6^y$.
Dans le paquet de piques, la carte de position x a pour valeur $y = 11^{12-x} = 6^{x-12} = 6^x$, ce qu'il fallait démontrer.
Remarque.— Cette remarquable construction du paquet "exponentiel" et de son paquet réciproque est due au philosophe et logicien américain Charles Peirce. Il faut choisir un générateur du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, ici nous avons choisi la base 6. En itérant des 6−mélanges on aurait abouti au paquet exponentiel de base 2. On ne peut pas prendre 3 ou 4, car ce ne sont pas des générateurs.
La suite du tour consiste simplement à utiliser l'isomorphisme entre d'une part les mélanges, qui correspondent aux homothéties sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, et d'autre part les coupes, correspondant aux translations sur le groupe additif $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

- *à un 2−mélange des coeurs correspond une coupe d'une carte des piques (la première carte passe en dernière position);*
- *à un 3−mélange des coeurs correspond une coupe de 10 cartes des piques (les deux dernières cartes passent au-dessus du paquet);*
- *à un 4−mélange des coeurs correspond une coupe de 8 cartes des piques;*
- *à un 6−mélange des coeurs correspond une coupe de 5 cartes des piques.*

Montrons le premier et le dernier cas : un 2−mélange des coeurs fait passer à un paquet d'équation $x = 6.6^y = 6^{y+1}$. Or ce paquet est réciproque de $y = 6^{x+1}$, qui se déduit du paquet de piques $y = 6^x$ par une coupe de une carte;
le dernier cas : un 6−mélange des coeurs fait passer le paquet $x = 6^y$ à un paquet d'équation $x = 2.6^y = 6^5.6^y = 6^{y+5}$, qui est réciproque du paquet d'équation $y = 6^{x+5}$, lequel se déduit du paquet de piques $y = 6^x$ par une coupe de cinq cartes.

3) Paquets puissances : auto- et anti-réciprocité

Nous avions inauguré la première partie comme suit :

Le présentateur a rangé préalablement les piques dans un paquet de la manière suivante (de haut en bas, donc, faces non visibles) :

$$1, 7, 9, 10, 8, 11, 2, 5, 3, 4, 6, 12.$$

Il a rangé les coeurs comme suit :

$$1, 6, 9, 10, 5, 2, 11, 8, 3, 4, 7, 12.$$

Il a rangé enfin les carreaux comme suit (et de même, les trèfles) :

$$1, 11, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 2, 12.$$

Rappelons que, x étant un élément du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, on a toujours $x^{12} = 1$. Par suite, $x^{11} = x^{-1}$.
L'équation des piques est $y = x^{11}$, ou $y = x^{-1}$, celle des coeurs $y = x^5$, celle des carreaux et des trèfles $y = x^7$.
Les seules fonctions puissances $x \mapsto y = x^\alpha$ de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ qui sont des bijections sont celles pour lesquelles α est premier avec 12, ce sont donc $y = x$, $y = x^5$, $y = x^7$ et $y = x^{11}$. Les valeurs de α sont, dans l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, le groupe des éléments inversibles formé des éléments $\{1, 5, 7, 11\}$.
C'est un groupe de Klein : on a $5^2 = 7^2 = 11^2 = 1 \pmod{12}$, et $5.7 = 11 \pmod{12}$, $7.11 = 5 \pmod{12}$, $5.11 = 7 \pmod{12}$. Ceci a deux conséquences :
a) les fonctions bijectives $x \mapsto y = x^\alpha$ sont aussi involutives, on a par exemple $y = x^5 \Leftrightarrow x = y^5$. Par conséquent les paquets sont ici autoréciproques.
b) On a la propriété de composition suivante :

on peut trouver la valeur d'une carte dans un paquet quelconque par consultation des deux autres paquets, en "composant" dans l'ordre qu'on veut.
Exemple.— Quelle est la valeur de la carte en deuxième position dans les piques? Cherchons la deuxième carte chez les coeurs : c'est le 6; cherchons alors la sixième carte chez les carreaux, c'est le 7. Par conséquent, c'est le 7 qui se trouve en deuxième position dans les piques.

Avant d'étudier l'effet des mélanges sur ces paquets, rappelons qu'on appelle *résidus (quadratiques)* les éléments du groupe $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ qui sont des carrés. Il y a six résidus : $1, 3, 4, 9, 10, 12$, et six non-résidus : $2, 5, 6, 7, 8, 11$. On a les caractérisations suivantes :
- si a est résidu, $a^6 = 1$, d'où $a^5 = a^{-1}$ et $a^7 = a$;
- si a est non-résidu, $a^6 = -1$, d'où $a^5 = -a^{-1}$ et $a^7 = -a$.
D'autre part, rappelons qu'on a toujours $a^{12} = 1$ et $a^{11} = a^{-1}$.

Le présentateur fait faire un mélange régulier quelconque (avec $k = 2, 3, 4$ ou 6) sur les piques. On constate alors que le paquet de piques reste auto-réciproque. On fait encore plusieurs mélanges : le paquet reste toujours auto-réciproque.

En effet, mélanger une ou plusieurs fois le paquet de piques, c'est passer de l'équation $x = y^{-1}$ à une équation $x = ay^{-1}$ équivalente à $xy = a$, qui est clairement symétrique en x et y.

Le présentateur fait faire un 3−mélange sur les coeurs, ce qui conduit au paquet

$$4, 11, 10, 1, 7, 8, 5, 6, 12, 3, 2, 9$$

qui est, comme on s'y attend, auto-réciproque. Puis il fait faire un 2-mélange, et on obtient :

$$2, 12, 5, 7, 10, 4, 9, 3, 6, 8, 1, 11$$

qui est un paquet, ô surprise, antiréciproque, car l'as n'est pas en deuxième position à partir du haut du paquet, mais à partir du bas du paquet et, de même, le 3 est en cinquième position à partir du bas du paquet!
On s'aperçoit alors que si un 3−mélange ou un 4−mélange n'affecte pas l'auto ou l'antiréciprocité, en revanche un 2−mélange ou un 6−mélange fait passer de l'auto à l'anti et réciproquement.

En effet, on part du paquet de coeurs d'équation $x = y^5$ et on passe après mélange(s) à un paquet d'équation $x = ay^5$, ce qui est équivalent à $x^5 = a^5 y$, d'où aussi à $y = a^7 x^5$. Si a est résidu quadratique, comme 3 ou 4, on a $a^7 = a$, le paquet est autoréciproque. Mais si a n'est pas résidu, comme 2 ou 6, on a $a^7 = -a$ et le paquet est antiréciproque.

Rappelons qu'au départ les paquets de carreaux et de trèfles sont identiques, et réciproques l'un de l'autre (puisqu'auto-réciproques). Le présentateur demande au spectateur de faire un mélange régulier sur les carreaux. Supposons que celui-ci choisisse un 2−mélange, ce qui conduit à

$$2, 9, 6, 8, 3, 1, 12, 10, 5, 7, 4, 11.$$

Le présentateur fait alors un 6−mélange sur les trèfles, ce qui donne

$$6, 1, 5, 11, 9, 3, 10, 4, 2, 8, 12, 7,$$

qui est bien le paquet réciproque des carreaux.

Après mélange(s), le paquet de carreaux a pour équation $x = ay^7$, ce qui est équivalent à $y = a^5x^7$. Or si $a = 6$, on a $a^5 = 2$, d'où le résultat.
Nous laisserons en exercice le rétablissement de la réciprocité après des 3− ou des 4−mélanges.

Remarques finales.— Les rares exposés dont j'ai eu connaissance sur cette question (cf. bibliographie) présentent essentiellement l'algorithme de Peirce pour construire un paquet exponentiel et son réciproque, puis exposent le tour de cartes qui en découle (mélange rétabli par coupe). Seul l'article de K. Eisemann donne une démonstration.
La présentation donnée ici diffère essentiellement sur trois points, et cela par souci de simplicité :
- introduction des paquets linéaires, qui constituent la manière la plus naturelle de se familiariser avec l'action des mélanges réguliers;
- introduction des paquets puissances, qui montrent d'autres liens avec l'arithmétique élémentaire des congruences, et notamment avec les résidus quadratiques.
- restriction au cas particulier de 12 (qui est de la forme $p - 1$, avec p premier, ce qui n'est évidemment pas sans conséquences) et au cas particulier des k−mélanges réguliers où k est diviseur de 12. Mais on peut évidemment généraliser à d'autres valeurs.

Bibliographie

K. Eisemann, "The most fantastical card trick ever invented", *Amer. Math. Monthly* 91 (1978), 284 – 289.
Martin Gardner, *Scientific American,* July 1978, 20 – 21.
Charles Peirce, "Collected Works", vol. IV

UN TRAVAIL INTERDISCIPLINAIRE EN FRANCAIS ET EN MATHEMATIQUES (SUITE)

Par le groupe math-français de l'IREM de Strasbourg :
D. Kremer, M. Vaillant, I. Beck, G. Didierjean, C. Dupuis, M.A. Egret, G. Robert, M. Ziegler.

Dans le n° 92 de septembre 1998 de L'Ouvert a été publiée la première partie de cet article, sans que, par erreur, la deuxième partie ne soit annoncée. Il s'agissait du premier aspect d'un travail interdisciplinaire en mathématiques et en français, concernant la compréhension de textes. La seconde partie de l'article, ci-dessous, propose des activités de raisonnement menées conjointement par un professeur de français et un professeur de mathématiques, à la suite du premier travail sur la compréhension de textes.

II. LE RAISONNEMENT

Le travail présenté, étendu sur plusieurs séances, s'est inscrit dans un travail plus général sur les démarches de raisonnement en français et en mathématiques. Avant d'aborder le raisonnement déductif en géométrie ou l'argumentation en français, il nous a paru utile de faire réfléchir les élèves sur l'activité qui consiste à tirer une conclusion et sur les questions que cela soulève.

Nous avons pris le parti de nous limiter, dans les séances communes aux deux matières, à travailler un pas de raisonnement. Pour cela, nous avons choisi comme outils un certain nombre de syllogismes. Ce travail sur les syllogismes permettra de sensibiliser les élèves à l'existence de tâches parallèles mais fondamentalement différentes dans une activité de raisonnement en mathématiques et en français.

Pour le raisonnement en mathématiques, nous avons pris le parti de ne présenter que le pas élémentaire de déduction, constitué des données, de l'énoncé-tiers — définition ou théorème ayant un statut théorique — et de la conclusion, qui résulte de l'application de l'énoncé-tiers aux données. Il permet aussi d'insister sur le statut théorique de l'énoncé-tiers en mathématiques qui donne à la conclusion son caractère de conclusion **obligatoire**.
Notre objectif premier a été de faire percevoir aux élèves ce qu'était un pas de raisonnement déductif et d'insister sur la différence entre « valide » et « vrai ».

En français en revanche, le but de l'argumentation est de convaincre l'interlocuteur ou le lecteur, c'est-à-dire de parvenir à ce que l'interlocuteur attache un degré de conviction suffisant à la conclusion. Mais la seule valeur de l'énoncé-tiers est la valeur de conviction que lui attachent les interlocuteurs et il peut à tout moment être réfuté et ne pas être accepté par l'interlocuteur ou le lecteur. La conclusion du pas d'argumentation n'a donc plus de caractère obligatoire. Le raisonnement repose essentiellement sur des contraintes de **pertinence**.

Les constituants d'un pas de déduction :

Un premier exemple est proposé :

> Dans un triangle ABC (dont je ne connais pas la taille) je sais que :
> $\hat{A} = 60°$ et $\hat{B} = 50°$
> Que puis-je affirmer ?
> Qu'est-ce qui me permet de l'affirmer ?

Il a été choisi comme illustration du pas de raisonnement déductif à cause de sa simplicité de formulation de la situation proposée, de son aspect de familiarité pour les élèves, dès la cinquième, en raison du caractère obligatoire de la conclusion qui s'impose très clairement aux élèves, et enfin de la règle utilisée (ou énoncé-tiers) qui a un statut théorique bien marqué et non susceptible d'être discuté. L'attention des élèves est attirée sur le statut différent de ces trois "constituants de base" d'un pas de raisonnement déductif :

—Les hypothèses : $\hat{A} = 60°$ et $\hat{B} = 50°$
—La règle générale : « Dans un triangle, la somme des trois angles vaut 180°».
—La conclusion obligatoire : $\hat{C} = 70°$

Validité et réciproque

On travaille sur l'exemple suivant :

> Règle : Si un élève est en 4e C, alors il a M. Ixe en français.
> Donnée : Pierre a M. Ixe en français
> Conclusion : ?

Ici la règle générale n'a pas le statut de théorème : elle ne s'inscrit pas dans une théorie générale, c'est une règle d'expérience ; on pourrait tout aussi bien lui conférer le statut de donnée. En revanche, là encore, l'exemple proposé a été choisi parce qu'il est bien compris des élèves. Ceux-ci réfutent immédiatement la conclusion hâtive : « Pierre est en 4e C » par un contre-exemple.

Les élèves ont spontanément créé les conditions permettant d'obtenir un raisonnement valide, soit en modifiant les données (« Pierre est en 4e C »), soit en modifiant la règle générale (« M. Ixe n'a que les 4e C en français ») ce qui revient à énoncer une règle générale réciproque de celle qui était proposée : « Si un élève a M. Ixe en français, alors il est en 4e C »
La notion de validité d'un raisonnement a été particulièrement bien comprise : le passage des données à la conclusion ne peut se faire que si les conditions d'application de la règle générale sont remplies ; les élèves ont également bien saisi le caractère obligatoire de la conclusion.

Validité et vérité

Afin de permettre de distinguer les notions de validité et de vérité, on propose le troisième exemple suivant :

1. Strasbourg est en Lorraine.
2. Alain habite Strasbourg.

   Conclusion : ?

Celui-ci n'a pas posé de problème pour les élèves même si la conclusion unique qui s'est imposée était contraire à leur vécu. La situation d'inclusion était perçue par les élèves comme évidente. La conclusion qui s'impose : « Alain habite en Lorraine » est peut-être fausse, mais le raisonnement n'en est pas moins valide.

Le raisonnement déductif, tel qu'il apparaît dans cet exemple, est sensiblement le même que celui qui apparaît en mathématiques. Mais alors qu'en mathématiques on fait référence à une règle générale théorique (axiome, définition, théorème...), dans notre exemple on utilise la donnée « Strasbourg est en Lorraine »comme un postulat qui jouera le rôle d'énoncé-tiers.

Validité et inclusion

Exemple :

1. Donnée ou règle d'expérience : Tous les chats ont des griffes...
2. Donnée : Hamilcar a des griffes.

   Conclusion : Donc Hamilcar est un chat.

Pour cet exemple, les élèves, en majorité, n'ont pas rencontré de difficultés. Beaucoup ont donné un contre-exemple pour montrer la non-validité du raisonnement. Comme pour l'exemple précédent, la situation d'inclusion de l'ensemble des chats dans l'ensemble des animaux à griffes était parfaitement perçue.

Cas particulier du pas de déduction mathématique

1. Règle générale : Dans tout losange les diagonales sont perpendiculaires
2. Donnée : Le quadrilatère ABCD a ses diagonales perpendiculaires.

   Conclusion : Donc ABCD est un losange.

Dans cet exemple, les élèves étaient à nouveau confrontés à un pas de raisonnement en mathématiques.
On peut constater que cet exemple est très voisin du précédent (« Hamilcar ») et qu'il fonctionne comme ce dernier. Mais en mathématiques, la règle générale n'est pas une règle d'expérience.

Il faut remarquer que le niveau de difficulté était plus élevé que dans les exemples précédents où les données d'expérience permettaient de trouver immédiatement des contre-exemples, et de s'apercevoir ainsi de la non-validité du raisonnement. Or, ici, donner un contre-exemple nécessitait la mobilisation de connaissances sur le losange et ses propriétés, sur les notions de diagonales et de perpendiculaires.
La difficulté majeure pour les élèves a été de pouvoir transcrire la formulation de la règle générale en un formulation de type « si...alors ».
Pour beaucoup, ce n'est qu'après avoir réussi ce passage que la non-validité du raisonnement s'est imposée à eux et qu'ils ont compris que la donnée « le quadrilatère ABCD a ses diagonales perpendiculaires » ne permet pas de rendre la règle générale opératoire puisque ses conditions d'application n'étaient pas remplies.

Prolongements

Pour la séance suivante une fiche de travail du même type a été distribuée aux élèves.
Le but des exercices était de permettre un réinvestissement des acquisitions précédentes puis d'introduire de nouvelles raisons de non-validité.

Dire si les raisonnements suivants sont valides ou non en justifiant la réponse.

1. Deux nombres égaux ont des carrés égaux.
   Deux nombres x et y sont tels que $x^2 = y^2$.
   Donc $x = y$.

2. Tous les souverains régnants de l'ancienne Egypte portaient une barbe postiche.
   Or Hatchepsout fut reine d'Egypte.
   Donc Hatchepsout portait une barbe postiche.

3. Les cétacés sont des mammifères marins.
   L'orque s'attaque aux baleines.
   Donc l'orque est un cétacé.

4. L'auxiliaire « être » est toujours employé lorsque on met un verbe au passif.
   Or « il était venu » comporte l'auxiliaire « être ».
   Donc « il était venu » est un passif.

5. La mésange a des ailes.
   Un oiseau a des ailes.
   Donc la mésange est un oiseau.

6. Le yaourt est un médicament dangereux.
   Les médicaments dangereux sont en vente dans tous les supermarchés.
   Donc le yaourt est en vente dans tous les supermarchés.

Les élèves rencontrent des exercices où l'on joue sur la validité ou la non-validité du raisonnement, indépendamment du caractère "vrai ou faux " de la règle générale, des données et de la conclusion.
Ainsi les raisonnements dans les exercices 2 et 6 sont valides. Mais dans le premier cas, où les trois propositions du pas de raisonnement sont vraies, les élèves montrent par leurs questions que s'ils perçoivent bien le caractère « obligatoire » de la conclusion (Hatchepsout portait une barbe postiche), ils restent interloqués par la nature de cette conclusion. Aussi s'interrogent-ils sur la donnée « une reine est-elle un souverain ? » et d'autre part « était-elle bien reine de l'ancienne Egypte ? », prouvant qu'ils testent l'ensemble des conditions d'application de la règle pour s'assurer qu'elles sont bien remplies.
En revanche dans l'exercice 6, le raisonnement est valide mais avec une règle générale et des données pour le moins " farfelues" et défiant le vécu des élèves !
Les autres raisonnements ne sont pas valides, mais les situations sont très diverses :
– Les exercices 1 et 4 sont du même type : les deux données sont vraies mais on ne peut tirer aucune conclusion. Nous sommes dans les deux cas dans une situation où la règle logique est mal appliquée : dire que A est inclus dans B (deux nombres égaux ont des carrés égaux dans un cas et les verbes au passif sont conjugués avec *être* dans l'autre) ne veut pas dire que B est inclus dans A ("carrés égaux" n'implique pas forcément "nombres égaux", et la présence de l'auxiliaire *être* n'implique pas nécessairement le passif). Nous avons la même erreur de raisonnement, l'une en grammaire et l'autre en mathématiques. Notons toutefois que la conclusion dans l'exercice 4 est fausse alors que celle de l'exercice 1 est indécidable.
– Pour l'exercice 5 nous avons une situation de deux ensembles A et B inclus dans un troisième (l'ensemble des oiseaux et l'ensemble des mésanges sont inclus dans l'ensemble des animaux à ailes), mais cela ne permet pas de d'affirmer que B est inclus dans A.
Dans cet exercice la règle générale, les données et la conclusion sont vraies, mais à l'aide d'un contre-exemple les élèves montrent que le caractère obligatoire de la conclusion n'est pas respecté (il existe d'autres animaux à ailes que les oiseaux). Là encore en l'absence de connaissances "extérieures" la conclusion est indécidable.
– Dans l'exercice 3 en revanche, la raison de non-validité est radicalement différente puisque la non-validité ne repose plus sur des relations entre des ensembles. La règle générale et les données sont encore vraies, mais les trois propositions n'ont aucun lien logique entre elles. Pour convaincre ses camarades une élève s'est contentée de déclarer : « je peux bien m'attaquer aux baleines et je ne suis pourtant pas un cétacé ! ». C'est donc de prime abord pour une question de non-pertinence des différentes propositions que le raisonnement ne peut pas être valide.

Ce travail a permis de consolider chez les élèves le sens de validité d'un raisonnement, indépendamment de leurs connaissances concernant la situation évoquée. Ils distinguent alors validité de vérité et comprennent que la validité ne dépend pas de la vérité. Par ailleurs ce travail a permis d'introduire de nouvelles raisons de non-validité, en particulier celle de la contrainte de pertinence des données.

Approfondissement

Une troisième séance a été consacrée de façon plus spécifique à un travail sur le pas de raisonnement déductif. En l'absence de l'un des trois éléments constituant un pas de raisonnement, les élèves doivent déterminer la proposition manquante qui permet, lorsque cela est possible, de rendre le raisonnement valide.
Ce travail s'est révélé particulièrement motivant pour les élèves, a donné lieu à des discussions animées dans la classe et est allé jusqu'à troubler la quiétude des familles qui se sont prises au jeu...
Par ailleurs en raison de son caractère plus ouvert (non-unicité de la réponse), il permet d'avantage à l'élève de s'impliquer dans cette tâche.
Enfin les exemples proposés permettent de faire prendre conscience aux élèves de l'importance de la quantification qui reste une difficulté importante dans l'apprentissage du raisonnement mathématique.

Compléter, lorsque cela est possible, les raisonnements suivants en les rendant valides ou bien expliquer pourquoi on ne peut pas les rendre valides.

1. a. ....
b. Or ce champignon est une amanite.
c. Donc il est mortel.

2. a. Parmi les champignons mortels se trouvent les amanites.
b. Or..
c. Donc c'est une amanite.

3. a. ....
b. Or Pierre a 17 ans et demi.
c. Donc Pierre a l'autorisation de conduire une automobile.

4. a. ....
b. Or ce champignon n'est pas mortel.
c. donc ce n'est pas un cortinaire orellanus

5. a. Tout quadrilatère....................................
b. Or (AC) et (BD) sont perpendiculaires, et le milieu de [AC] est aussi le milieu de [BD].
c. Donc le quadrilatère ABCD est un losange.

L'attention des élèves est attirée sur le fait qu'il n'est pas nécessaire de posséder des connaissances particulières sur les champignons pour pouvoir compléter les exercices 1 et 4. Une fois encore le raisonnement ne dépend pas du vécu de l'élève.
La règle générale « les amanites sont des champignons mortels » rend valide le raisonnement de l'exercice 1. En effet la donnée « ce champignon est une amanite » aboutissant à la conclusion obligatoire « ce champignon est mortel » ne pourra être réalisée que si l'amanite est caractérisée comme étant mortelle, même si ce n'est pas vrai dans la réalité, car les amanites comportent aussi des espèces comestibles voire savoureuses.

De même dans l'exercice 4 il est inutile de procéder à des recherches concernant le cortinaire orellanus, la question n'étant pas de connaître sa dangerosité réelle, mais uniquement de se rendre compte que la donnée « ce champignon n'est pas mortel » associée à la conclusion obligatoire « ce n'est pas un cortinaire orellanus » implique nécessairement d'associer le caractère « mortel » au cortinaire orellanus.
Pour l'exercice 5 on se retrouve dans le domaine des mathématiques et le théorème qu'il s'agit de retrouver est celui qui permet de caractériser un losange par ses diagonales.
Notons que là encore il n'est pas indispensable d'en avoir une connaissance préalable pour être en mesure de rendre le raisonnement valide.
Pour l'exercice 2 enfin il n'est pas possible de rendre valide le raisonnement. On peut ainsi vérifier que la notion de validité a été comprise.

Ouverture

Pour clore ce travail, et au cours d'une dernière séance, les quatre raisonnements suivants ont été proposés aux élèves :

Pour chaque raisonnement dire s'il est valide ou non en expliquant la réponse.

1e raisonnement: a. s'il pleut alors je prends un parapluie
b. or il pleut
c. donc je prends un parapluie

2e raisonnement: a. s'il pleut alors je prends un parapluie
b. or il ne pleut pas
c. donc je ne prends pas de parapluie

3e raisonnement: a. s'il pleut alors je prends un parapluie
b. or je prends un parapluie
c. donc il pleut

4e raisonnement: a. s'il pleut alors je prends un parapluie
b. or je ne prends pas de parapluie
c. donc il ne pleut pas

Plusieurs élèves ont remarqué que l'ordre des propositions n'était pas celui rencontré habituellement et que l'énoncé-tiers apparaissait en premier sous la forme "classique" en mathématiques : **si... alors...** Cette propriété générale peut encore se traduire par des expressions utilisant les mots **tout, tous les, toujours, chaque fois que.** La donnée était introduite par l'indicateur **or**, qui aurait pu être remplacé par **comme, puisque** *etc.*.

Les élèves ont eu peu de difficultés concernant les deux premiers raisonnements, et la référence au schéma de base du pas de déduction s'est assez facilement imposée pour apporter une justification concernant la validité ou la non-validité d'un raisonnement.

En revanche pour le troisième raisonnement, et surtout pour le quatrième, les discussions ont été animées ! Il faut dire que se cachait là un raisonnement par l'absurde et notre objectif n'était évidemment pas d'en faire une étude rigoureuse d'autant plus que ce type de raisonnement a été totalement banni de l'enseignement en collège. Pour autant, certains, probablement plus mûrs, ont pu par eux-mêmes arriver à être convaincus de la validité de ce raisonnement très particulier En effet la conclusion unique (il ne pleut pas) s'imposait puisque, s'il pleuvait...

CONCLUSION

Il nous semble que le travail proposé conjointement par un enseignant de français et un enseignant de mathématiques s'inscrit parfaitement dans une démarche commune visant à l'apprentissage du raisonnement au collège.

La complémentarité dans la façon d'aborder ce type de raisonnement par les enseignants des deux matières, dans des situations qui ne reposant pas, pour la plupart des exercices proposés, sur des théorèmes mathématiques, nous a paru particulièrement enrichissante et profitable pour les élèves. A l'issue de ce travail, les élèves paraissent prêts à aborder le raisonnement déductif en mathématiques et l'argumentation en français, et le travail spécifique à chacune des deux matières peut alors commencer.

En particulier en mathématiques il est important de souligner que la plupart des pas de déduction se distinguent du fonctionnement des syllogismes non seulement parce que la règle de passage a un statut théorique, ce qui a déjà été abordé, mais parce que le théorème a souvent plusieurs conditions d'entrée, ce qui n'est pas le cas pour les syllogismes.

Exemple : Données : (1) ABCD est un quadrilatère de centre O.
(2) O est le milieu de [AC]
(3) O est le milieu de [BD]
(4) (AC) est perpendiculaire à (BD)
Théorème : Dans un quadrilatère, si les diagonales sont perpendiculaires et se coupent
en leur milieu, alors ce quadrilatère est un losange.
Conclusion : ABCD est un losange

En français il conviendra de réfléchir plus avant sur les relations de pertinence entre argument et conclusion et sur la place de l'implicite.

Bien entendu on ne saurait oublier qu'argumentation et démonstration ne peuvent être réduites à un seul pas de raisonnement. Les façons (radicalement différentes) dont s'enchaînent et s'organisent les pas de raisonnement dans les deux disciplines doivent aussi être l'objet d'un apprentissage, ce qui dépasse les limites de cet article.

Mais notre expérience nous a prouvé que ce travail de départ permet de s'appuyer sur des bases plus claires et évite bien des erreurs et des confusions qui perturbent les apprentissages ultérieurs.

ANNIVERSAIRE :
il y a deux cents ans naissait
Pierre Frédéric SARRUS (1798-1861)
Doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg entre 1839 et 1852.

Connu de tous les étudiants de mathématiques pour la règle de calcul d'un déterminant d'ordre trois, Sarrus est en réalité l'auteur d'une oeuvre scientifique considérable et très variée. Michel Guillemot, professeur de mathématiques et d'histoire des mathématiques à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, a fait travailler deux de ses étudiants de maîtrise sur cet auteur, qui avant de devenir doyen de la faculté des Sciences de Strasbourg, s'était déjà fait remarquer dans son Aveyron natal. Ces étudiants : Alban DELMOULY et Georges Martial MVONDO ont rédigé un mémoire dont nous publions ci-après quelques extraits, intitulé : Sarrus : un mathématicien généraliste.

Mais auparavant, voici l'Eloge Historique prononcé par M. Bach en 1866.

ÉLOGE HISTORIQUE
DE
M. LE PROFESSEUR SARRUS

Membre de la Société des sciences naturelles de Strasbourg
ancien Doyen de la Faculté des Sciences
PRONONCÉ
PAR M. BACH

Messieurs,

Le savant, l'homme de bien dont j'ai à vous raconter la vie et les travaux, était une de ces organisations d'élite qui n'attendent, pour briller au premier rang, que des circonstances favorables. S'il eût recherché un plus vaste théâtre, s'il eût mis au service d'une légitime ambition les éminentes facultés dont il était doué, il aurait, sans aucun doute, en donnant un corps et la vie à plus d'une conception féconde, réalisé dans le domaine des sciences exactes des progrès dont ses oeuvres nous laissent entrevoir la mesure, et son nom, devenu célèbre dans l'histoire des mathématiques, eût passé à la postérité associé à ceux de nos grands géomètres.

Bien qu'il n'ait pas eu tout l'éclat auquel il semblait destiné, ce nom, une des gloires les plus pures de l'Université, doit être pour nous un objet de vénération.

Il doit être aussi un précepte et un exemple, car il veut dire honneur, science et travail, et résume à lui seul les qualités qu'on est en droit d'exiger de tous ceux qui embrassent la noble carrière de l'enseignement.

Pierre-Frédéric Sarrus naquit à Sainte-Affrique le 10 mars 1798. Son père, officier de marine, mourut la même année, et sa mère dût veiller seule à son éducation, ce qu'elle fit avec une tendre et intelligente sollicitude. Disons à ce propos que la Providence récompensa cette digne mère de son dévouement, et lui permit de jouir pendant une heureuse vieillesse de l'amour de ce fils dont elle avait vu grandir le talent et la renommée.

Dès son plus jeune âge, Sarrus se fit remarquer par son esprit éveillé et une mémoire qui tenait du prodige : pour le reste, il fut, de son propre aveu, un médiocre écolier. Au collège ses succès n'eurent rien de remarquable, il se pliait avec répugnance à la discipline sévère de la classe, et les professeurs de Sainte-Affrique le regardaient comme un sujet assez ordinaire. Hâtons-nous de dire cependant que le professeur de mathématiques ne partageait pas l'opinion de ses collègues, qu'il finit même par prendre son élève en affection, mais alors l'élève avait déjà dépassé le maître.

A dix-sept ans Sarrus se rendit à Montpellier dans le but de compléter ses études, et surtout de se perfectionner dans les mathématiques, afin de se vouer plus tard à l'enseignement de cette science pour laquelle il avait en mainte occasion manifesté une remarquable aptitude. A peine était-il à Montpellier, qu'arrivait le désastre de Waterloo. Quoique bien jeune encore, Sarrus était signalé comme bonapartiste, il professait de plus la religion réformée : c'étaient, sous la Restauration, des titres peu favorables pour entrer dans l'enseignement public : il renonça donc à son premier projet et résolut d'étudier la médecine. Mais la fatalité le poursuivait, et lorsqu'il réclama le certificat de bonnes vie et moeurs qui lui était nécessaire, ce certificat lui fut refusé; je transcris textuellement les termes du refus :

"Le maire pense qu'un jeune homme auteur et propagateur de chansons séditieuses, outrageantes pour le roi et la famille royale, qui avant l'interrègne se permit d'arracher et de fouler aux pieds le ruban blanc que portait à la boutonnière un de ses camarades, et qui, dans une autre circonstance, lui prend la fleur de lys et fait semblant de la conspuer, ne peut être un bon citoyen, et ne mérite pas le certificat qu'il demande. Sainte-Affrique, 12 novembre 1815.
Signé : ROCQUES"

Déclaré mauvais citoyen par arrêté du maire de Sainte-Affrique, Sarrus dut aussi renoncer à la médecine. Que fit-il alors? Il revint à sa science de prédilection. Il avait déjà, en faisant connaître ses premiers essais, su mériter la bienveillance de Gergonne, professeur de mathématiques à la Faculté, et fondateur d'un journal, auquel de 1810 à 1831 les géomètres les plus distingués confièrent leurs travaux. Le savant professeur qui tenait en haute estime les heureuses dispositions et le noble caractère du jeune étudiant, fut vivement touché de sa situation pénible dans laquelle le mettait le refus de certificat, il voulut être son protecteur, et lui facilita les moyens de rester à Montpellier.

Encouragé par les conseils de Gergonne, confiant dans ses forces, Sarrus s'adonna à l'étude avec une ardeur infatigable, et convaincu que le savant vraiment digne de ce nom ne doit pas se confiner exclusivement dans sa spécialité, il chercha par des lectures variées et par la fréquantation des cours à s'instruire dans les différentes branches des connaissances humaines. Ce n'étaient là pourtant que les délassements de travaux plus sérieux, car dans le même temps, il poursuivait l'initiation aux oeuvres des grands maîtres, initiation pénible, abordable seulement pour les fortes intelligences, mais indispensable à celui qui veut marcher d'un pas ferme dans la voie de la science. Il passa cinq laborieuses années dans la contemplation des monuments impérissables dont les architectes se nomment Bernoulli, Euler, Lagrange et Laplace, puis, inspiré par ces grands modèles, il se mit à l'oeuvre; il avait alors vingt-deux ans.

De 1820 à 1828 il publia dans les *Annales de Gergonne* une suite d'articles et de mémoires dont les titres figurent à la liste complète de ses travaux. Il nous suffira de dire qu'on y trouve sur *les développements de certaines fonctions en séries, sur l'intégrabilité des fonctions différentielles, sur les intégrales définies*, des recherches dont chacun reconnaîtra l'originalité et la valeur, surtout s'il se reporte à l'époque où elles on vu le jour. Mentionnons aussi, parmi ses productions les plus importantes de cette époque, un Mémoire sur les *lois du mouvement des fluides* et un autre sur *les oscillations des corps flottants.*

Il s'occupa également de la pratique de la science, il étudia la question des engrenages, fit connaître un procédé aussi simple qu'ingénieux pour la construction des cadrans solaires, dota l'industrie d'une turbine qui fonctionne encore avec avantage dans plusieurs établissements du Midi et de l'Alsace. Je ne parlerai pas de ses nombreuses inventions sur les sujets les plus divers, tous ceux qui l'ont connu ont pu admirer ses productions dans ce genre, et savent que ces inventions, il ne se contentait pas les concevoir, mais qu'il en éxécutait lui-même les modèles, aussi habilement que l'aurait pu faire un ouvrier consommé.

Nous avons laissé Sarrus absorbé dans l'étude, et débutant avec bonheur dans la carrière de géomètre. Une modique pension et le produit de quelques leçons suffisaient à ses goûts modestes; mais songeant à choisir une compagne, il dut chercher à acquérir une position moins précaire. Il se tourna de nouveau vers l'instruction publique et prit ses grades universitaires à la Faculté de Montpellier. Ils furent bientôt conquis : nous le voyons en effet en moins de trois mois bachelier es lettres, bachelier, licencié et docteur es sciences. Ses thèses, soutenues le 17 février 1821, ont pour titre : - *Essai sur la théorie du son.*
- *Essai sur le mouvement des planètes autour du soleil.*

Les succès obtenus dans ses examens firent oublier en partie les peccadilles de 1815, et en 1822 il fut nommé régent de mathématiques et de physique à Pezenas ou il se maria la même année. Pendant son séjour dans cette petite ville, il se lia avec M. Reboul, ancien préfet de l'Empire. Mad. Reboul, émule de Mad. Dacier, était versée dans l'étude des langues anciennes. Il apprit le grec sous la direction de cet aimable maître, qui aujourd'hui plus qu'octogénaire, survit à son éleve.

Doué d'une rare facilité pour l'étude des langues, Sarrus parvint en peu de temps à comprendre et à apprécier les chefs-d'oeuvre que nous a légués l'antiquité.

Néanmoins, ni le grec ni les soins de la famille ne lui font négliger la science. Il continue ses publications dans les *Annales de Gergonne*, et en 1823 il emporte au concours le titre d'agrégé. Ce titre, qu'il méritait mieux que tout autre par l'étendue et la solidité de ses connaissances, il faillit ne pas l'obtenir. Bien qu'admis à l'inscription, son nom, au moment décisif, avait disparu de la liste. Fort de sa valeur et de son droit, il se rend à Paris, va trouver le président du concours. Le Président, c'etait Poisson. Tous ceux qui ont connu l'illustre géomètre savent avec quel soin, quelle impartialité il veillait à cette importante épreuve de l'agrégation qui lui la force de l'enseignement universitaire. Indigné de la mesure unique qui frappait un homme honorable à tous égards, Poisson fit rétablir Sarrus sur la liste des candidats; il est inutile d'ajouter qu'admis à concourir, il fut reçu avec distinction.

L'administration aurait dû oublier complètement ses vieilles rancunes et lui donner une position en rapport avec le titre qu'il venait d'acquérir; il n'en fut pas ainsi; au lieu de chercher à employer utilement un fonctionnaire des plus capables, elle le laissa encore pendant quatre ans au collège de Pezenas.

Bien d'autres, à sa place, eussent perdu courage; quant à lui, en attendant des temps meilleurs, il cherchait dans le travail, dans la vie de famille et dans les douces relations de l'amitié, l'oubli de l'espèce d'ostracisme auquel semblaient le condamner ses affections politiques et peut-être aussi ses croyances religieuses. Enfin, en 1827, il fut nommé régent de mathématiques au collège de Perpignan. La ville avait créé, depuis quelques années, un cours public de physique. Sarrus en fut chargé, et bientôt réunit autour de lui de nombreux auditeurs attirés par le talent du maître, et surtout par la variété des expériences dont un grand nombre étaient de son invention, dont d'autres, exécutées d'ordinaire avec des appareils couteux, étaient réalisées par lui à peu de frais, grâce à son génie particulier pour la mécanique.

Les succès qu'il obtint dans ce cours lui procurèrent de vives satisfactions d'amour-propre, et contribuèrent à effacer de sa mémoire le souvenir de ses tribulations d'autrefois. Il est juste aussi de dire que Sarrus commençait à être mieux apprécié par l'autorité universitaire. Quand, après un temps de crise, un homme d'intelligence et de coeur arrive aux affaires, les rancunes s'apaisent,l'intrigue se dissimule, le mérite méconnu se fait jour, tout, en un mot, se transforme. Cette transformation, nous la voyons s'accomplir dans le moment sous les auspices de l'homme d'État auquel l'Empereur a confié, depuis quelques années, la direction de l'instruction publique; mais ceux qui nous ont précédés dans la carrière, assistèrent, il y a plus de trente ans, à pareil spectacle, et prononcent avec reconnaissance et respect le nom de Vatisménil.

M. de Vatisménil, en effet, venait d'entrer au ministère : Sarrus, comme tant d'autres, ressentit l'heureuse influence de ce bienfaiteur de l'Université; il fut immédiatement rangé parmi les fonctionnaires les plus dignes, et designé pour recevoir, à la prochaine occasion, un avancement que réclamaient ses bons services et ses nombreux titres scientifiques.

Cette occasion ne se fit pas longtemps attendre, et le 21 décembre 1829, il fut nommé professeur de mathématiques à la Faculté de Strasbourg, sous le ministère de M. de Guernon-Ranville.

De cette époque date pour Sarrus une ère nouvelle. Désormais à l'abri des vexations qu'il avait eu à subir, délivré des fatigues inséparables de l'enseignement secondaire, il tourna tous ses efforts vers les progrès et la propagation de la science; il y contribua par ses paroles et par ses écrits.

Dès le début, il s'associa au mouvement scientifique de notre ville, en se faisant admettre dans nos deux sociétés savantes, la Société des sciences, agriculture et arts du Bas-Rhin, et celle du Muséum. Il en fut, pendant vingt ans, un des membres les plus actifs et les plus assidus; il enrichit leurs annales de remarquables travaux.

Au journal de Gergonne avait succédé celui de M. Liouville. Sarrus inséra au tome VI de ce recueil un long mémoire sur la *résolution des équations numériques à une ou plusieurs inconnues.* Ce mémoire avait été précédé d'une brochure ayant pour titre : *Essai sur la résolution des équations.* L'impartialité nous fait un devoir de dire que les travaux de Sarrus sur cette matière n'ont pas eu la complète approbation des géomètres et que ses méthodes peu pratiques n'ont pas pénétré dans nos écoles.

En 1834, il publiait sur *l'élimination par le plus grand commun diviseur* un travail qui, plus que tous les autres, contribua à rendre son nom populaire. L'élimination d'une inconnue entre deux équations de degré quelconque, faisait partie de l'ancien programme d'admission à l'École polytechnique; et sa méthode, qui répondait à un besoin réel, fut de 1835 à 1851 enseignée dans les classes de mathématiques spéciales.

Nous le trouvons quelques années plus tard s'occupant de médecine, et écrivant, en collaboration avec M. Rameaux, un mémoire sur *les applications des sciences accessoires à la physiologie* qui mérita l'approbation de l'Académie de médecine de Paris.

Le décanat de la Faculté des sciences étant devenu vacant en 1839, Sarrus y fut nommé, et le 1^er^ janvier 1840, il recevait la croix de chevalier de la Légion d'honneur.

Ses connaissances en théorie jointes à la rare aptitude dont il était doué pour les combinaisons mécaniques, lui avaient donné dans la science des machines une supériorité incontestable. Il entra, dès son arrivée en Alsace, en relation avec les grands manufacturiers des deux départements, et, en 1841, la Societé industrielle de Mulhouse l'associa à ses travaux.

Ainsi la vie de Sarrus, depuis son arrivée à Strasbourg, était bien remplie, il soutenait dignement la réputation de la Faculté des sciences, et bientôt il devait par ses triomphes académiques lui donner un nouveau relief.

Dès sa jeunesse il avait songé sans relâche à l'une des questions les plus épineuses de l'analyse ; je veux parler du *calcul des variations.* Ce calcul, dont nous trouvons les premières traces dans le problème de la *Brachistochrone*, posé, en 1696, par Jean Bernoulli, eut le privilège d'exercer le génie d'Euler et de Lagrange, et l'on peut dire que les efforts réunis de ces deux illustres géomètres constituèrent une méthode à peu près complète, quand la solution de la question ne dépend que d'intégrale simples ; mais le cas des intégrales multiples présentait encore de grandes difficultés, sur lesquelles s'exercèrent, c'est tout dire, Gauss et Poisson. Le calcul des variations en était là, lorsqu'en 1840 l'Académie des sciences proposa pour le concours du grand prix de mathématiques la question suivante : *Trouver les équations aux limites que l'on doit joindre aux équations indéfinies pour déterminer complètement le maximum et le minimun des intégrales multiples.*

Sarrus était à la hauteur du sujet, et quoiqu'il n'eût encore rien écrit sur la matière, son plan était parfaitement arrêté dans sa tête. Il se met à l'oeuvre et adresse à l'Institut un mémoire intitulé : *Recherches sur le calcul des variations*; il porte la devise : *A force d'étudier un sujet sous toutes ses faces, on finit par en déduire quelque chose.*

Ce mémoire, inséré au tome X du *Recueil des savants étrangers*, obtint le grand prix en 1843. Il nous est impossible d'analyser cet important ouvrage. Contentons-nous de dire que Sarrus eut l'heureuse idée d'introduire un signe particulier pour indiquer les substitutions à faire dans une fonction quelconque, et par ce simple artifice parvint à surmonter les obstacles qui avaient arrêté ses devanciers. Ajoutons encore que cette innovation, l'introduction de ce signe, éveilla puissamment l'attention des géomètres. Cauchy, dès 1844, s'empressa d'en faire le point de départ d'un nouvel exposé du calcul des variations ; et si les travaux de Sarrus ont été l'objet des attaques d'un savant allemand, ils viennent de trouver, dans MM. Moigno et Lindelof, des vulgarisateurs habiles et de vaillants défenseurs.

Le rapport de la commission chargée d'examiner les pièces présentées au concours se trouve au tome XVII des comptes rendus. Dans le même volume, à propos de la belle comète qui apparut en 1843, Sarrus publia l'annonce d'un mémoire sur la détermination des orbites cométaires.

Lauréat de l'Institut, auteur d'une oeuvre considérable, il eût pu sans trop de présomption frapper aux portes de l'illustre compagnie. Les encouragements, d'ailleurs, lui arrivaient de toutes parts, il était spontanément, et à deux reprises, présenté par la Faculté des sciences et par le Conseil académique de Paris pour une chaire à la Sorbonne, et bientôt après il était nommé associé correspondant de l'Académie royale des sciences de Turin. Mais il n'ignorait pas les déceptions réservées au savant de province qui tourne ses regards vers la capitale. Il s'abstint, en conséquence, de toute démarche dans un but d'avancement, et resta dans notre ville où le tenaient attaché de nombreuses et de vives sympathies, et à laquelle aussi il paya constamment son tribut de bon citoyen.

Versé dans les questions d'utilité publique se rattachant à la science, il prêta aux différentes administrations qui se sont succédé le concours de ses lumières et de son expérience. Appelé en 1848 à siéger dans la commission municipale, il s'y fit remarquer par la sagesse de ses conseils.

Bien qu'ayant mis toute ambition de côté, Sarrus ne se livra pas pour cela aux douceurs du repos. Il était de ceux qui cultivent la science pour elle-même, et non pour les bénéfices que l'on peut en tirer. Il n'entreprit plus, à la vérité, de grands travaux d'analyse, mais cet esprit d'élite s'occupa des choses les plus diverses, toujours avec un égal succès.

En 1853, il résolut victorieusement un des problèmes les plus ardus de la cinématique, dont je vais essayer de faire comprendre la portée. Dans un grand nombre de machines, il est nécessaire de transformer les mouvements rectilignes alternatifs en mouvements circulaires continus. On connaît de ce problème plusieurs solutions déja fort anciennes parmi lesquelles se trouve compris le parallélogramme articulé que Watt a appliqué au balancier des machines à vapeur. Mais ce genre de solution n'est pas entièrement rigoureux, et de là des influences fâcheuses amenant des déformations, et causant une perte notable de travail. Il restait à découvrir une solution véritablement mathématique exempte des inconvénients que nous venons de signaler.

C'est à Sarrus que revient le mérite de cette découverte. Il la fit connaître dans un mémoire intitulé :*De la transformation réciproque, rigoureusement exacte, des mouvements rectilignes et circulaires.* Ce mémoire obtint les honneurs de l'insertion au *Recueil des savants étrangers et au Comptes rendus de l'Académie des sciences.* Le texte était accompagné d'un modèle mais hélas! la main déjà tremblante de l'inventeur n'avait plus sa dextérité d'autrefois, et c'est M. Stridbeck, habile amateur des sciences physiques, qui se chargea de l'exécution.

La santé de Sarrus commençait effectivement à éprouver de sérieuses atteintes, il n'était plus cet homme que nous avions connu si vigoureux et si actif. Aussi de 1852, fatigué des doubles fonctions de professeur et de doyen, il renonça au décanat qu'il avait exercé pendant douze ans.

Cependant l'affaiblissement des forces physiques n'avait point encore amené chez lui l'affaiblissement des facultés intellectuelles, et nous arrivons à l'un des traits les plus remarquables de sa vie scientifique, à l'un de ces traits qui révèlent l'aptitude pour ainsi dire universelle dont il était doué.

En parcourant un jour l'ouvrage du savant orientaliste Sédillot, intitulé : *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux*, il y rencontre la description d'un astrolabe ayant appartenu au baron Larrey, il se souvient qu'il en existe un semblable parmi les instruments au rebut de nos collections. Il retire notre astrolabe de la poussière sous laquelle il était enseveli, il l'examine, le trouve remarquable par la beauté de la matière et par le fini du travail : il lui prend fantaisie de l'étudier.

Ce n'était pas chose facile, l'instrument se compose de pièces diverses sur lesquelles sont tracés une multitude de lignes et de caractères de forme bizarre. Sarrus suppose que ce sont des caractères arabes; il s'entoure de grammaires, de dictionnaires, il apprend l'arabe, dans le but de comparer notre astrolabe à celui qui est décrit par M. Sédillot. Malheureusement les caractères qui y sont gravés, diffèrent tellement de ceux de l'arabe ordinaire, que tout rapprochement semble impossible. Il ne perd pas courage, et à force de recherches, il finit par découvrir qu'ils appartiennent à une espèce particulière d'écriture coufique, dont il trouve la clef en procédant à la manière de ceux qui veulent déchiffrer une lettre écrite en caractères mystérieux, mais dont le sens leur est à peu près connu.

Dans un mémoire imprimé au tome IV des *Annales de la Société du Muséum* Sarrus donne la description complète de l'instrument; il établit qu'il date de l'an 605 de l'hégire, et qu'il est dû au même artiste que celui du baron Larrey. A la lecture de ce mémoire, on peut suivre pas à pas les progrès de l'auteur, et apprécier ce qu'il lui a fallu de sagacité et de patience pour mener son oeuvre à bonne fin.

Ce fut pour Sarrus le chant du cygne; car bientôt les infirmités l'assaillirent de toutes parts, et l'empêchèrent de se livrer à un travail suivi. Nous espérions pourtant qu'il pourrait mettre au jour les nombreux trésors accumulés dans sa tête plus encore que dans ses cartons, mais nos espérances furent déçues.

Las de l'enseignement, atteint d'une affection laryngée qui par intervalles le privait complètement de l'usage de la parole, il demanda et obtint la retraite en 1858, après trente-six ans de glorieux services. Il demeura encore trois ans parmi nous, ne refusant jamais à ceux qui venaient le consulter les ressources de son immense savoir, cherchant même par ses manières affables et par son humeur toujours égale à leur laisser ignorer ses souffrances. Dans les courts moments de répit que la maladie lui laissait, il travaillait encore. Il s'occupa, dans les derniers temps, de l'inégalité de la lune appelée *variation*, et les recherches historiques qu'il fit sur ce sujet l'amenèrent à se ranger à l'opinion de Biot, en restituant à Tycho-Brahé l'honneur d'une découverte que M. Sédillot et tout récemment M. Chasles ont fait remonter à Aboul-Wefa, astronome arabe, qui vivait six cents ans avant Tycho.

Les études qu'avait exigées son travail sur l'astrolabe lui avaient facilité l'accès des langues orientales. Il apprit l'hébreu, et sur la fin de sa vie, il lisait la Bible dans cette langue, discutant et commentant les textes originaux ainsi que l'aurait pu faire un théologien.

Vers le milieu de 1861, la Société des sciences de Montpellier, voulant donner un tardif témoignage de sympathie et d'estime au géomètre qui avait chez elle droit de cité, lui fit savoir par une lettre flatteuse qu'elle tenait à honneur de le compter parmi ses membres. Cette démarche de la Société de Montpellier fut le dernier hommage rendu à notre savant collègue. A cette époque, déjà miné par la maladie qui devait bientôt l'enlever, il dit adieu à sa fille, à ses amis, et alla demander au ciel du Midi un climat plus favorable.

L'air du pays natal et les soins dévoués d'une épouse, aussi distinguée par le coeur que par l'esprit, semblèrent d'abord lui procurer quelque soulagement, mais l'amélioration n'était, hélas! que passagère, et le 20 novembre 1861 il rendait son âme à Dieu.

Sa fin fût celle du sage qui envisage la mort avec calme et l'attend de pied ferme. Qu'est-ce, en effet, pour le sage que la mort ? La dernière étape d'un pénible voyage, après lequel, quittant son enveloppe périssable et prenant son essor vers un monde meilleur, il contemple à loisir l'oeuvre infinie de la création, et voit se révéler les sublimes mystères dont il essaya de soulever le voile durant sa vie terrestre.

SARRUS : REPERES BIBLIOGRAPHIQUES

Ensemble des publications de Sarrus

Annales de Mathématiques Pures et Appliquées (Annales de Gergonne)

Tome X (1819-1820) :
- Application du calcul aux différences partielles à la résolution de quelques problèmes d'analise - N °II, Août 1819 pp. 33-51

- Démonstration de la fausseté du théorème énoncé à la page 320 du IXe volume de ce recueil [Un nombre impair $2n+1$ est ou n'est pas premier, suivant que l'un des deux nombres $2n \pm 1$ est ou n'est pas divisible par n] - N°VI, Décembre 1819, pp. 184-187.
- Essai sur le développement en fractions continues des racines des équations du 3e degré et sur l'approximation graphique du problème de la trisection de l'angle - N°VII, Janvier 1820, pp. 189-201.
- Recherche de diverses séries - N°$VIII$, Février 1820, pp. 217-227.
- Recherches d'analise, relatives au développement des fonctions N°IX, Mars 1820, pp. 245-254.
- Problème général des engrenages à axes fixes - N°X, Avril 1820, pp. 299-314.

Tome XI (182-1821) :
- Exposition des principes fondamentaux de la théorie des fonctions circulaires, pp. 323-325.

Tome XII (1821-1822) :
- Recherches sur les intégrales définies, pp. 36-39.
- Note sur les équations différentielles partielles et sur les intégrales définies, pp.254-257.
- Essai sur le développement des fonctions en séries, pp. 289-309.

Tome XIV (1823-1824) :
- Recherches sur les conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles, pp. 197-205.
- Recherches sur les lois générales du mouvement des fluides, pp.229-267.

Tome XV (1824-1825) :
- Traité abrégé de gnomonique graphique, pp. 219 - 227.

Tome XVI (1825-1826) :
- Sur les surfaces caustiques, p. 13.
- Note sur les axes, plans et centres radicaux, pp. 378-380

Tome XVII (182-1827) :
- Note sur le tracé graphique des cadrans solaires, pp. 257-262.

Tome XIX (1828-1829) :
- Mémoire sur les oscillations des corps flottants, pp.185-210.

Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Journal de Liouville)

Tome VI (1841) :
- Essai sur la résolution des équations numériques à une ou plusieurs inconnues et de forme quelconque, pp. 171-190.

Tome XIV (1849) :
- Sur l'intégration des différentielles exactes, pp. 131-134.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France et imprimés par son ordre (Section Sciences mathématiques et physiques) :

Tome X (1848) :
- Recherches sur le calcul des variations, pp. 1-128. (Pièce pour le concours sur la question relative au maxima et minima des intégrales multiples)

Comptes rendus de l'Académie des Sciences

Tome I (1835) :
- Théorie des différentielles exactes, PP. 115-117.
Tome X (1840) :
- Théorie des différentielles exactes de tous les ordres,.
Tome XVII (1843) :
- Note à l'occasion du mémoire de M. Reech ayant pour titre : "Principes et théorèmes généraux de mécanique industrielle", pp. 83-84.
Tome XXVIII (1849) :
- Méthode pour trouver les conditions d'intégrabilité d'une fonction différentielle, pp. 439-442.

Tome XXXVI (1853) :
- Note sur la transformation des mouvements rectilignes alternatifs en mouvements circulaires et réciproquement, pp.1036-1038.

Dans les mémoires de la Société de Sciences Agriculture et Arts du Bas-Rhin

Tome II des nouveaux mémoires (1834) :
- Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur, p.192.

- Sur l'interpolation par des fonctions d'une variable, p. 203.

Dans les mémoires de la Société du Muséum d'histoire naturelle de Strasbourg

Tome IV (1852) :
- Description d'un astrolabe construit au Maroc en l'an 1208 (32 p.), Strasbourg, Imp. De Vve Berger-Levrault - Réf. B.N. : V.17328.

Publications séparées

- Essai sur la théorie du son, tribut académique présenté à la Faculté des sciences de Montpellier pour obtenir le grade de Docteur ès-sciences (14 p.), Montpellier, impr. De I. Tournel aîné, 1821 - Réf. B.N. : V.17327.

- Essai sur le mouvement des planètes autour du soleil, tribut académique présenté à la Faculté des sciences de Montpellier pour obtenir le grade de Docteur ès-sciences (15 p.), Montpellier, impr. De I. Tournel aîné, 1821. - Réf. B.N. : V.17326.

- Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur (15 p.), Paris, Bachelier, 1834 - Réf. B.N. : Vp.5693.

- Maître Pierre ou le Savant de village. Entretiens sur la géométrie (191 p.), Paris, F.- G. Levrault, 1835 - Réf. B.N. : Z.12116.

- Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques (31 p), Paris, Bachelier, 1833 - Réf. B.N. : Vp.6137.

- Eléments d'arithmétique décimale (144 p.), Strasbourg, F.- G. Levrault, 1838, Réf. B.N. : V.52371.

- Traité d'arithmétique décimale pour les écoles primaires (1839).

- Instructions de maître Pierre sur la géométrie (1849).

- Préface de L'Astronomie illustrée de M. Smith, Strasbourg, 1854 - Réf. B.N. : V.17472.

- Tableau du système métrique décimal, 1840.

- Discours prononcé le 23 février 1843, pour rendre les derniers honneurs académiques à J.L.A. Herrenschneider, professeur honoraire à la Faculté des sciences ... par M. J. Willm suivi des discours prononcés par M. Sarrus et par M. Fargeau (36 p.), Strasbourg, Impr. De F. C. Heitz - Réf. B.N. : 8° Ln27. 9756)

Recherches effectuées sur :

- Poggendorff "Biographisch-Literarisches Handwörterbuch", Tome 1-2 - Réf.B.U. : 103847.

- "Royal society catalogue of scientific papers", Vol. v, 1871, [PRA-11;G] - Réf. B.U. : 160069.

- "Eloge historique de Monsieur le Professeur Sarrus", prononcé par M. Bach, Mémoires de la Société des sciences naturelles de Strasbourg, 1866-1870.

- Catalogue général des livres imprimés de la bibliothèque nationale, Tome CLXIII, Réf. B.U. : A13-163 E.

Des kilos, de l'alcool et des chapeaux

Marie-Agnès Egret et Claudine Kahn, Irem de Strasbourg

Le sujet du baccalauréat d'enseignement scientifique (épreuve de mathématiques) des terminales littéraires de juin 1998 nous a fait réagir. Nous avons décidé d'exprimer notre désarroi à propos des exercices proposés.

Les élèves de première et terminale littéraires bénéficient d'un enseignement obligatoire de mathématiques d'une durée de 45 minutes hebdomadaires destiné à consolider leurs bases pour aborder la vie quotidienne. Ils étudient pendant ces deux années les pourcentages, les suites arithmétiques et géométriques, la lecture graphique et les probabilités simples. Certains d'entre eux suivent un enseignement de spécialité de quatre heures hebdomadaires qui les conduit à l'étude de fonctions type logarithme ou exponentielle.

Notre but n'est pas d'émettre un avis sur ces programmes. Nous ne sommes pas étonnées du faible contenu mathématique de cette épreuve. Par contre, nous trouvons inadmissible la forme de ces exercices.

L'enseignement en collège et en lycée ne cesse d'évoluer. Petit à petit, nous avons été confrontées à de nouvelles idées adaptées à la problématique contemporaine : « un collège unique pour tous », « l'égalité des chances », « 80% d'une classe d'âge au niveau du baccalauréat »...afin que les enseignants contribuent à la lutte contre le chômage et pour l'intégration.

En Mathématiques le message depuis quelques années est clair : ouvrir des classes scientifiques et convaincre les jeunes filles d'y entrer. Mais il ne suffit pas de déployer beaucoup d'énergie et de persuasion pour aboutir au résultat souhaité. Ainsi, anecdote significative, 25ème Rallye Mathématique d'Alsace et nous nous en réjouissons, 25ème constat du faible taux de réussite des candidates. Changer les mentalités : une mission difficile pour des enseignants peu formés sur ce plan, d'autant plus délicate que la crise économique renvoie des images d'exclusion.

Alors, nous professeurs sur le terrain, face à ces réalités quotidiennes qui souvent nous dépassent, nous espérons être soutenus, encouragés dans nos démarches, ce qui explique notre déception, voire notre amertume, devant le sujet d'enseignement scientifique des terminales littéraires.

En quatre pages de sujet national, la femme est réduite à un objet futile, soucieuse de son poids *(maigrir de 2% par an, quelle originalité mais quelle perturbation pour des jeunes filles souvent mal dans leur peau, parfois anorexiques ou boulimiques)* et de la couleur de ses vêtements *(où est cachée celle qui en 1998 assortit son sac à son chapeau?)* ; puis elle est présentée comme celle qui boit *(cinquante kilos, trois verres de vin à 11% d'alcool, des données inutiles à la résolution de l'exercice : pourquoi donc si ce n'est pour déstabiliser des candidats qui ont reconnu leur faiblesse en Mathématiques?)*.

Tandis que l'homme, lui, trouve sa place dans la société : il gagne de l'argent, il le gère, il sait le faire fructifier, il maîtrise même les intérêts simples et composés *(lui raisonne avec des lettres, des n, des* u_n *et des* v_n *, des 1998+n..., aurait-il des aptitudes pour les sciences ou pour l'économie?).*
Nous aurions pu opter pour le mode de l'humour et diffuser dans les classes des sujets type « sujet de remplacement ». Nous aurions pu choisir d'écrire à la presse toujours ravie de se gausser de l'école et des Mathématiques. Mais pour nous le problème soulevé est trop grave et nous atteint profondément, car il touche des valeurs que nous cherchons à défendre.
Nous avons préféré écrire à l'Inspection Générale qui nous a assuré de sa vigilance future à l'égard du sexisme dans les sujets d'examen.
Il nous paraît important de faire connaître aux lecteurs de l'Ouvert cette épreuve et les réflexions auxquelles elle nous a amenées.

« Sujet de remplacement » suggéré :
Arthur, né le 2 décembre 1970, mesurant 1 m 80, possède un téléphone noir portable. A la suite d'un pari fait avec Emile un soir dans un bar, il se fait offrir quatre autres téléphones portables, chacun de couleur différente.
Il range ses cinq téléphones portables (un noir, un rouge, un jaune, un bleu et un gris) dans le même tiroir que ses chaussettes (il possède huit paires de chaussettes de couleur différente dont une paire noire).
Le 2 décembre 1998, au matin, il constate que l'ampoule éclairant son placard à vêtements, a claqué. Il remarque alors qu'aucune des 12 ampoules à baïonnette qu'il avait achetées au prix de 8, ne peut lui servir pour rétablir la lumière. Dans l'obscurité, il choisit donc au hasard dans son tiroir un portable et une paire de chaussettes pour ne pas être en retard au petit déjeuner anniversaire organisé par ses secrétaires.
Calculer la probabilité que ni les chaussettes, ni le téléphone portable, ne soient noirs.

Voici le sujet de l'épreuve de mathématique pour les élèves de terminale L session 1998 qui comporte six exercices, parmi lesquels les candidats en choisissent quatre à traiter.
Durée de l'épreuve : 1 heure.

EXERCICE 1

A 16 ans, Julie pesait 50 kg.
Depuis, son poids a augmenté de 2 % chaque année par rapport à celui de l'année précédente.

1) Combien pesait-elle à 17 ans ? A 18 ans ?

2) Actuellement elle a 21 ans. Quel est son poids ?

3) Elle décide de faire un régime et de perdre désormais chaque année, pendant 5 ans, 2 % du poids qu'elle avait l'année précédente.
Quel sera, si elle tient son engagement, son poids à 26 ans ?

EXERCICE 2

1) Le 1/1/1998 Pierre a placé 20 000 F au taux de 4% l'an, avec intérêts capitalisés chaque année. On note u_1 la somme dont Pierre disposera le 1/1/1999, u_2 la somme dont Pierre disposera le 1/1/2000 et u_n la somme dont Pierre disposera le 1/1/ (1998 + n).
Calculer la somme dont Pierre disposera le 1/1/2005.

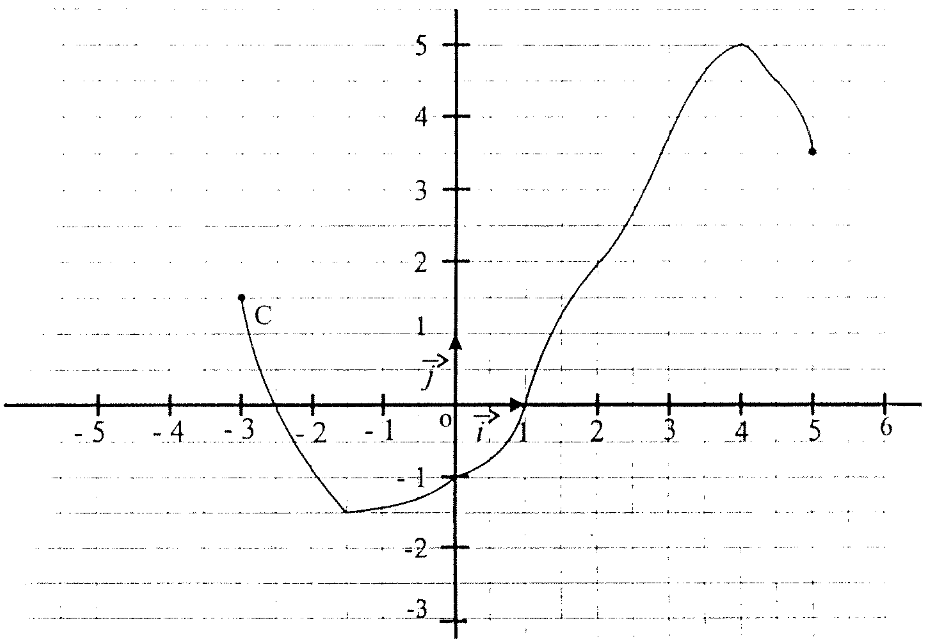
2) Le 1/1/ 1998 Eric a placé 20 000 F à intérêts simples au taux de 4,5% l'an. On note v_1 la somme dont Eric disposera le 1/1/1999, v_2 la somme dont Eric disposera le 1/1/2000 et v_n la somme dont Eric disposera le 1/1/(1998 + n).
Exprimer v_n en fonction de n.

3) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n > v_n$?

EXERCICE 3

La fonction f est définie sur l'intervalle [-3 ; 5].

Sa courbe représentative est tracée ci-dessous.



1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Quel est le maximum de f sur l'intervalle [-3 ; 5] ?

3) Quel est le minimum de f sur l'intervalle [0 ; 5] ?

4) En vous aidant du tracé de la droite d'équation y = x et avec la précision permise par le graphique, déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$x \in [-3 ; 5] \quad f(x) \geq x .$$

Expliquer

(Le graphique n'est pas à rendre)

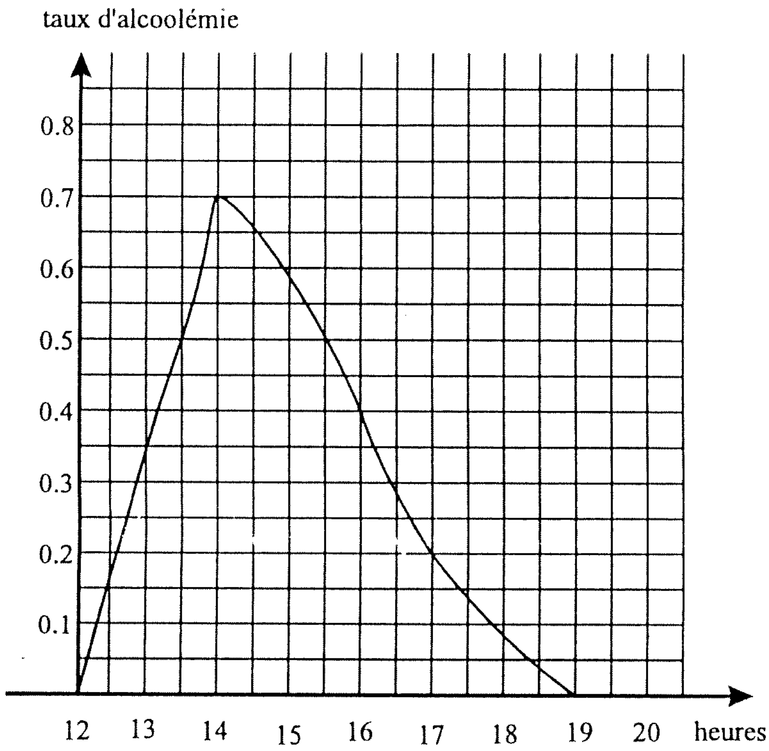
EXECICE 4

Le taux d'alcoolémie d'un individu est la quantité d'alcool pur que contient un litre de sang (en grammes par litre).

En France lorsqu'un conducteur a :

un taux compris entre 0,5 g/l et 0,8 g/l, il est en infraction,
un taux supérieur ou égal à 0,8 g/l, il commet un délit.

Une femme pesant 50 kg prend son repas à partir de 12 heures. Au cours de ce repas qui se termine à 13 heures 15 minutes, elle consomme trois verres de vin à 11% d'alcool. Le graphique ci-dessous représente le taux d'alcoolémie de cette personne en fonction de l'heure.



1) A quelle heure le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors cette valeur maximale ?

2) A partir de quelle heure, le taux d'alcoolémie de cette personne redevient-il tolérable au regard de la loi ?

3) On appelle « phase de détoxication » l'intervalle de temps pendant lequel le taux d'alcoolémie décroît. Quel est cet intervalle ?

EXERCICE 5

AH !.....Pour être dévôt, je n'en suis pas moins homme.

Une classe comporte seize garçons et vingt filles, parmi eux Loïc et Marie. Lors de l'étude du « Tartuffe » de Molière, le professeur de Français veut faire jouer la scène III de l'acte III comportant deux personnages : Elmire et Tartuffe. Il demande à tous les garçons d'apprendre le rôle de Tartuffe et à toutes les filles d'apprendre le rôle d'Elmire. La semaine suivante, il tire au sort les noms des élèves qui constitueront la « distribution ».

1) Combien y-a-t-il de « distributions » possibles ?

2) Quelle est la probabilité de l'événement :
« ni Loïc, ni Marie ne font partie de la distribution» ?

3) Quelle est la probabilité de l'événement :
« l'un au moins des deux élèves Loïc ou Marie fait partie de la distribution » ?

EXERCICE 6

Elisabeth a quatre chapeaux (un noir, un blanc, un rouge et un vert) et trois sacs (un noir, un rouge et un jaune). Dans l'obscurité, elle prend au hasard un sac et un chapeau.

1) Quelle est la probabilité pour que le chapeau et le sac soient de la même couleur ?

2) Quelle est la probabilité pour que ni le chapeau ni le sac ne soient noirs ?

PUBLICITÉ

Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle

Marie-Paule ROMMEVAUX - Thèse de doctorat
soutenue le 9 juillet1997 - IREM de Strasbourg

Peut-on apprendre aux élèves à voir dans l'espace? C'est à cette question que le travail présenté essaie d'apporter une réponse. Cette réponse - si elle existe - ne peut se construire qu'à partir d'une analyse des difficultés que les élèves rencontrent dans cette partie des mathématiques. Le premier chapitre entièrement consacré à cette analyse met en évidence les spécificités de la géométrie tridimensionnelle et la complexité de la coordination des types de représentation présents dans cette activité. Les outils d'analyse mis en place dans ce chapitre permettent de mettre en lumière certains aspects "concrets" de l'élaboration du savoir mathématique au cours des siècles et de comprendre les résultats décevants de certaines expérimentations antérieures. Elle met en lumière l'indispensable discernement des plans dans la compréhension d'une situation tridimensionnelle ainsi que l'apport des praticiens du dessin ou de la construction aux théories de la représentation. Il apparaît donc que l'introduction d'un objet matériel peut, dans certaines conditions, favoriser l'apprentissage. Une séquence didactique a été construite prenant en compte ces résultats. Le chapitre III en donne le contenu, la progression et l'analyse *a priori*.

Cette séquence qui se déroule en trois phases a pour objectif l'apprentissage du discernement des plans dans une situation tridimensionnelle que celle-ci soit représentée par un objet matériel ou par une figure géométrique plane - représentation en perspective parallèle - et pour sujet les **sections planes du cube**. Elle s'articule autour des variations concomitantes sur les deux types de représentation utilisés. La première phase met en concurrence puis en synergie les espaces bi- et tri-dimensionnels, la seconde s'articule autour de l'apprentissage des règles de la géométrie tridimensionnelle et du traitement figural des représentations en perspective parallèle, enfin, la dernière phase "de transfert" complète l'apprentissage en présentant des situations plus générales. Deux expérimentations, dans des situations "normales" de classe ont été nécessaires pour parvenir à coordonner de façon satisfaisante les types de représentation en présence. En effet, ces expérimentations ainsi que d'autres faites dans d'autres conditions d'apprentissage montrent que les objets matériels ne peuvent faciliter cet apprentissage que s'ils sont introduits à un moment précis du cursus. Trop tôt ils n'apportent aucune amélioration.

Les chapitres IV et V sont consacrés aux évaluations. Une épreuve a été proposée aux deux classes expérimentales et à deux classes témoins. Celle-ci est analysée dans le quatrième chapitre à l'aide d'un **tableau à double entrée montrant les interactions entre complexité mathématique et cognitive**. Trois degrés de complexité mathématique et trois degrés de complexité cognitive ont été retenus dont le croisement a permis de construire *a priori* la progression des activités et des exercices de l'épreuve finale.

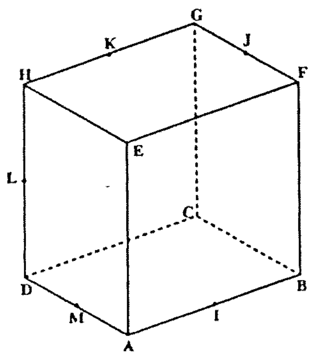
Les résultats montrent que cet apprentissage donne aux élèves la capacité de déceler, sur des représentations bidimensionnelles, des sections planes et de les utiliser dans leur déduction, d'utiliser l'appréhension perceptive support d'une appréhension opératoire. Si tous n'ont pas franchi ce seuil, le plus grand nombre a compris qu'il était essentiel de commencer par bien identifier les plans.

Gérard KUNTZ

Voici, sur un exemple reproduit dans le volume 6 des Annales de Didactique dont la publicité suit, un aperçu des analyses faites dans cette thèse. L'exercice exploité ne venait qu'en fin de parcours de l'expérimentation faite dans la classe.

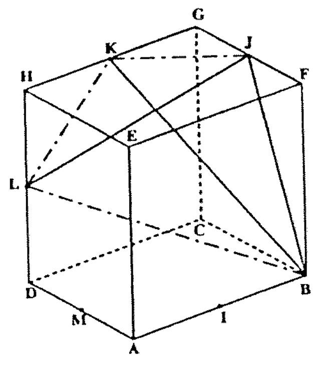
Deuxième exemple :

Un cube *ABCDEFGH* est représenté ci-contre en projection parallèle sur le plan *BDHF* . Les points I, *J, K, L* et *M* sont les milieux respectifs des arêtes *[AB], [GF], [GH], [HD]* et *[AD]* .



Les points L, J, B, K sont-ils dans un même plan ?

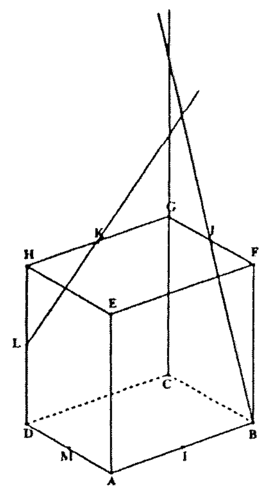
Les lois de la Gestalt, qui ont pu être renforcées par l'apprentissage, amènent à *regrouper les stimulis* [*Palmer & Rock*, 1991] : à joindre sur le papier ou mentalement les points donnés - ce qui est fait en trait gras sur la figure -, la forme obtenue constitue la figure-source.



Celle-ci est une forme ouverte, elle ne permet pas comme l'indiquent les lois du regroupement ou de clôture de *détacher une forme du fond*. Tentant, toujours selon les mêmes lois, de *percevoir la forme la plus simple avec l'information disponible*, on cherche à joindre les points donnés pour obtenir une forme fermée qui, dans les meilleurs cas peut suggérer la réponse : la figure dessinée en trait pointillé. Nous voyons ici que les figures obtenues en traits plein ou pointillé ne suggèrent aucune piste. Il est alors nécessaire pour répondre à la question de **dissocier** les points et de les regrouper : les sept possibilités de regroupement sont ici ouvertes. Nous allons donner quatre solutions effectivement trouvées dans les productions d'élèves, chacune répond à une reformulation du problème proposé.

a) Les droites *(LK)* et *(BJ)* sont-elles dans un même plan ?

Dans la figure-source associée à cette nouvelle question les droites seront tracées qu'il faudra *plonger* dans des plans permettant de répondre. Chacune d'elles est située dans une face du cube - **plans directement discernables** -, ces faces, adjacentes, se coupent suivant une arête. Il faut ensuite trouver l'intersection de deux droites dans un plan et, **interpréter en dimension trois** ce que permet de *lire* la figure : les points d'intersection des deux droites avec l'arête sont distincts.

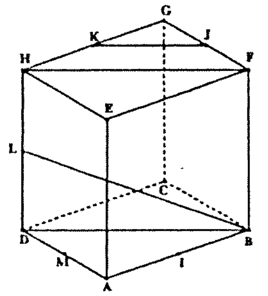


La démonstration, de géométrie bidimensionnelle, est calquée sur cette appréhension. L'obstacle ne réside pas ici dans l'action de «sortir» du plan, ce que les élèves apprennent sans trop de difficulté, mais dans les changements constants de dimension : montée en dimension : choix des plans, puis descente en dimension : arête commune etc., qui conditionnent la maîtrise de cette «sortie» hors du monde fermé des solides [16]. Ces différents changements lorsqu'ils deviennent conscients peuvent tout à fait être réussis par des élèves de seconde. La représentation figurale permet une interaction productive entre **appréhension perceptive** et **appréhension opératoire** [*Duval*, 1995b].

b) Les droites *(LB)* et *(JK)* sont-elles dans un même plan ?

La résolution de cette question reformulée va faire intervenir des éléments de dimension disparate, ce qui peut paraître simple pour des esprits exercés à la géométrie tridimensionnelle mais ne l'est pas pour les débutants. Comme précédemment, il est nécessaire de plonger chacune des droites dans un plan qui la contient : l'un est une face du cube, l'autre le plan diagonal *DBFH*, ils sont **directement discernables**.

Après avoir résolu un problème plan très simple dans *EFGH*, il faut, pour répondre, associer la droite *(JK)* et le plan *DBFH* et «oublier» la droite *(LB)*. Comme précédemment appréhension perceptive et appréhension opératoire sont étroitement associées et peuvent permettre une démonstration presque immédiate.

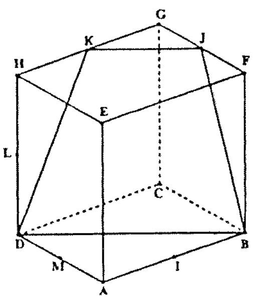


Nous allons maintenant étudier deux des regroupements déterminant un plan, ceux que nous avons rencontré dans les productions des élèves. Les deux autres donnent des pentagones difficiles à déterminer pour des élèves de ce niveau. Nous donnerons ensemble les deux formulations qui relèvent d'une même analyse.

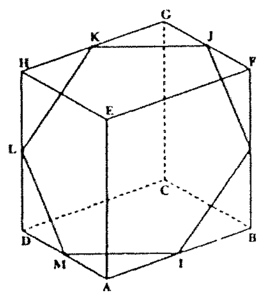
c) Le point *L* est-il dans le plan *(KJB)* ?

d) Le point *B* est-il dans le plan *(LKJ)* ?

Dessiner sur la représentation en perspective parallèle du cube les plans *(KJB)* ou *(LKJ)* demande la résolution d'un problème d'intersection de plans. La droite *(BD)* - ci-contre -, ou *(LM)*, *(MI)* etc. -ci-dessous - ne peuvent être créées qu'après un raisonnement.

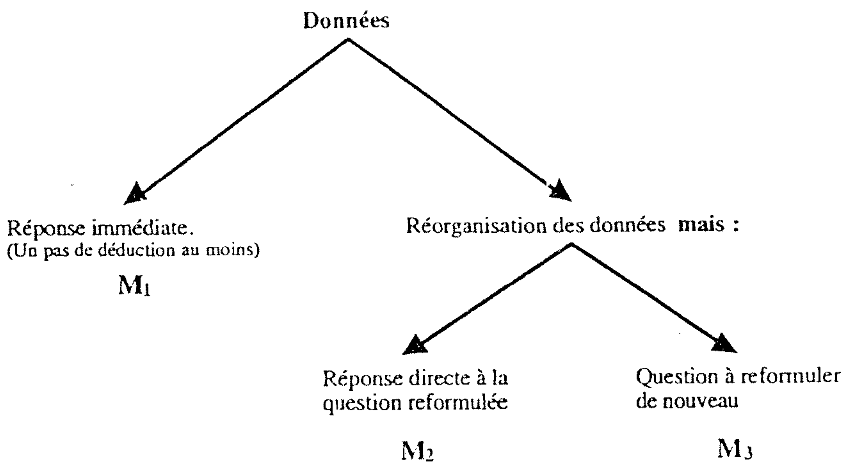


Nous dirons que dans ce cas la figure n'a pas, intrinsèquement, de qualités heuristiques, elle permet seulement une meilleure prise en compte des divers éléments entrant dans la démonstration. Le plan pertinent pour la résolution est, dans la figure-source, **non visuellement accessible**. Le problème d'intersection résolu la solution est immédiate.



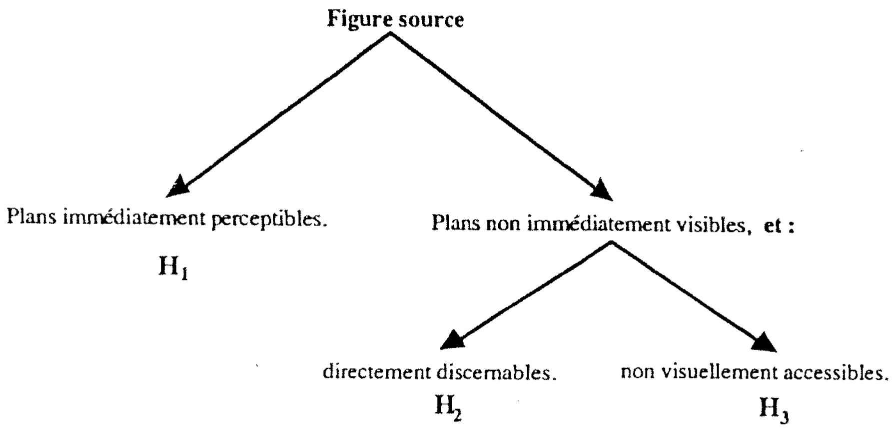
Mais, toute la difficulté est dans ce problème non explicitement posé. Il semble clair que seuls les élèves ayant déjà rencontré ces sections du cube, donc en concevant *a priori* l'existence, peuvent produire ces solutions.

Les deux complexités que nous avons définies :
-- complexité mathématique liée aux différentes définitions d'un plan, donc impliquant un choix,
-- complexité heuristique liée aux formes qui peuvent sur la figure-source suggérer l'existence d'un plan pertinent pour la résolution,
ont été déclinées en trois degrés que nous allons donner séparément puis combiner en un tableau croisé. Ce tableau nous a permis de gérer les différentes étapes de l'apprentissage et de graduer les exercices de l'évaluation. Associés, à l'origine, à la détermination des plans dans les problèmes de géométrie tridimensionnelle, nous les avons adapté à d'autres types de problèmes pour lesquels ils peuvent aussi permettre d'analyser des démarches complexes.



Indice de «complexité mathématique»

Lorsque les données de la question doivent être réorganisées, les éléments de la figure interviennent pour orienter le choix, c'est pour cette raison que les deux indices doivent être croisés.



Indice de «complexité heuristique»

Lorsque les plans ne sont pas immédiatement perceptibles - c'est-à-dire déjà représentés sur la figure : plans de référence ou plans ayant été définis dans des réponses précédentes -, les éléments de la figure-source représentés **et** la reformulation de la question vont intervenir conjointement dans la recherche de la solution.

Heuristique / Mathématique	Plans immédiatement perceptibles H_1	Plans directement discernables H_2	Plans non visuellement accessibles H_3
Réponse immédiate M_1			
Réponse immédiate à la question reformulée, M_2			
Question à reformuler au moins une seconde fois M_3			

Prise en compte simultanée des deux indices.

Ce tableau est destiné à recevoir les pourcentages de réussite aux questions d'un problème analysé en fonction des indices précédemment définis. Il nous permet, dans l'analyse préalable des questions, de mesurer la difficulté prévue et, dans l'analyse des productions effectives, de confirmer certains points. Ce tableau a été mis à l'épreuve pour un problème classique de géométrie tridimensionnelle, il a répondu à notre attente [*Rommevaux*, 1997 p. 256-264].

Après une synthèse des éléments issus de l'analyse précédente nous donnerons les étapes de la séquence d'apprentissage expérimentée.

Prix sur place 160 F - 190 F en cas d'envoi - Règlement à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.

PUBLICITÉ

Volume 6 des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives (IREM de Strasbourg)

Annales de didactique et de sciences cognitives. Volume 6. 1998.ULP.IREM de Strasbourg, 10 rue Zimmer 67084 Strasbourg Cedex . ISSN 0987-7576.

Ceux qui lisent des thèses, des articles de didactique ou des mémoires d'IUFM connaissent bien la publication de l'Irem de Strasbourg, que Raymond Duval a dirigée depuis sa création : elle figure en effet dans la plupart des bibliographies. Après un long silence, qui laissait craindre sa disparition, la parution du volume 6 rassure tous ceux qui y trouvaient des analyses approfondies, source d'un meilleur enseignement.
La force des Annales réside dans le fait que tous les articles **sont à la fois "d'application et d'explication"**, comme l'écrit François Pluvinage, son nouveau directeur (1). Elles reposent sur le pari qu'une meilleure compréhension de l'acte d'enseigner lui donne davantage d'efficacité. Claire Dupuis et Suzette Rousset-Bert mettent en évidence les gains qualitatifs obtenus par une *meilleure utilisation des représentations (arbres et tableaux)* dans le concept d'indépendance en probabilités. Werner Damm présente les "résultats spectaculaires" obtenus au Brésil (classes de Troisième et de Seconde) en introduisant des *représentations non-discursives* dans les problèmes de pourcentage (conversion proportion-quantité). Marie-Paule Rommevaux analyse les difficultés des élèves liées aux *représentations en perspective* des situations tridimensionnelles. Le discernement des plans est la clé pour "voir dans l'espace".
Les représentations sémiotiques des objets mathématiques, l'articulation cohérente des différents registres sémiotiques constituent une des difficultés majeures de l'apprentissage des mathématiques. Raymond Duval présente deux articles sur *les rapports entre les représentations (les signes) et les objets.* Fernando Hitt-Espinosa analyse les systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. François Pluvinage s'intéresse à *la nature des objets* mathématiques dans le raisonnement.
Deux textes rapprochent l'apprentissage du français et des mathématiques. Isabelle Beck et Michèle Vaillant se penchent sur les difficultés à *comprendre un texte argumentatif.* François Pluvinage et Anne Mallier repèrent les (graves) *difficultés de lecture de certains élèves à l'aide du français et des mathématiques.*
On voit la richesse de ce nouveau numéro. Son ambition est considérable : "Lorsqu'un tel type de travail est proposé (2), on constate une modification complète dans les initiatives et dans les démarches des élèves pour effectuer des traitements mathématiques, pour les contrôler, pour la rapidité d'exécution et aussi pour l'intérêt pris à la tâche. Il n'y a pas simplement réussite, mais modification de la qualité des productions" (R. Duval).

Gérard KUNTZ

---

(1) Le départ de Raymond Duval à Lille est à l'origine de ce changement de direction.
(2) Un travail d'apprentissage spécifique centré sur la diversité des systèmes de représentation.

A noter : les volumes 1 et 2 sont épuisés.
Prix sur place du volume 6 : 80 F - 100 F en cas d'envoi.
Prix sur place des volumes 3, 4 et 5 : 70 F - 90 F en cas d'envoi.
Règlement à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.

A VOS STYLOS

PROBLEME NUMERO 50 : commentaires historiques et solution des lecteurs

par A. STOLL (IREM de Strasbourg)

1. Rappel de l'énoncé

Données :

- Une courbe plane (C) "suffisamment régulière"
- Un point A dans le plan de la courbe (C)

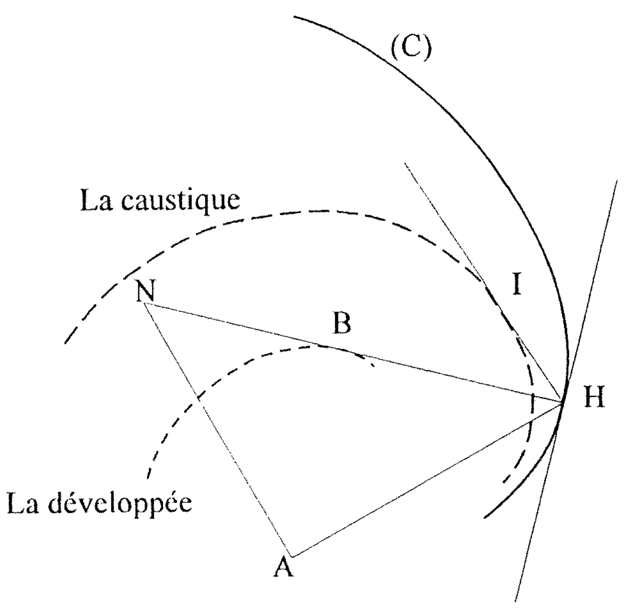
Notations : (voir figure 1)

- H un point de la courbe (C)
- B désigne le centre de courbure correspondant à H
- N le point de la normale à (C) en H tel que (AN) soit perpendiculaire à (AH)
- I est le point de la caustique issue de A

Montrer que :

$$\boxed{\frac{|2HN - HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}}$$

figure 1



les angles $\widehat{AHB}$ et $\widehat{BHI}$ sont égaux

Applications :

1. En déduire une construction géométrique du centre de courbure d'une parabole en un point quelconque.
2. Montrer que la caustique d'une spirale logarithmique par rapport à son centre est une spirale logarithmique identique.
3. Trouver d'autres applications de la formule ci-dessus.

2. Quelques commentaires.

Ce problème m'a été inspiré par la lecture du chapitre XLIX de "Acta eruditorum" de Jacob Bernoulli (1692)[1]. Ce chapitre s'intitule :

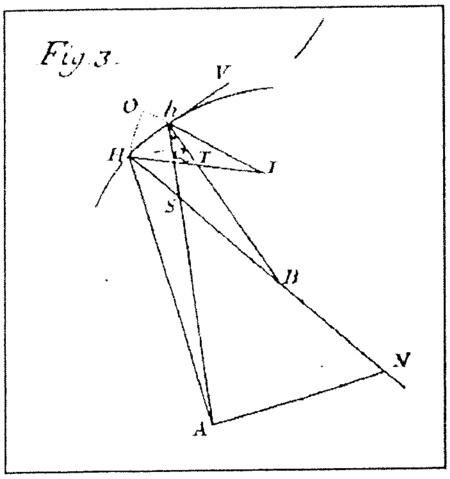
LIGNES CYCLOÏDALES,
DEVELOPPEES, ANTI-DEVELOPPEES, CAUSTIQUES, ANTI-CAUSTIQUES, PERI-CAUSTIQUES.

De leur usage et de leur simple relation mutuelle.
La spirale admirable. Et autres spirales.

Voici quelques extraits de ce texte :

La cycloïde mécanique (qui naît de la révolution d'un cercle sur une ligne droite) est communément connue depuis déjà un siècle. La cycloïde géométrique, qui naît de la rotation d'un cercle sur un autre cercle a commencé d'abord à être étudiée par les très illustres TSCHIRNHAUS et NEWTON. Nous avons connaissance des cycloïdes développées, grâce à l'illustre HUYGENS. De même on reconnaît comme auteur des premières études des cycloïdes caustiques le très noble TSCHIRNHAUS.

[...] il n'existe personne qui se soit intéressé aux dépendances et à la relation mutuelle entre les courbes développées et les caustiques. Il y a quelques jours, alors que je m'appliquais un peu plus attentivement encore à l'étude de la découverte de Tschirnhausius, je l'ai découverte et à cause de l'efficacité de cette chose et de son utilité j'ai pensé qu'il convenait de la rendre publique [...]



Le plus remarquable de ce que j'ai décidé d'exposer concerne la relation de beaucoup la plus simple entre les Caustiques et les Développées que je détermine comme suit : Si en un point rayonnant A on trace une perpendiculaire AN au rayon incident AH, perpendiculaire coupant le rayon du cercle osculateur HB (prolongé s'il le faut) en N, nous aurons 2HN -HB sur HB, comme AH sur HI. Le point I sera sur la caustique issue de A.

(Pour les notations, voir la figure ci-contre de J. Bernoulli, la figure 1 ou la figure 2)

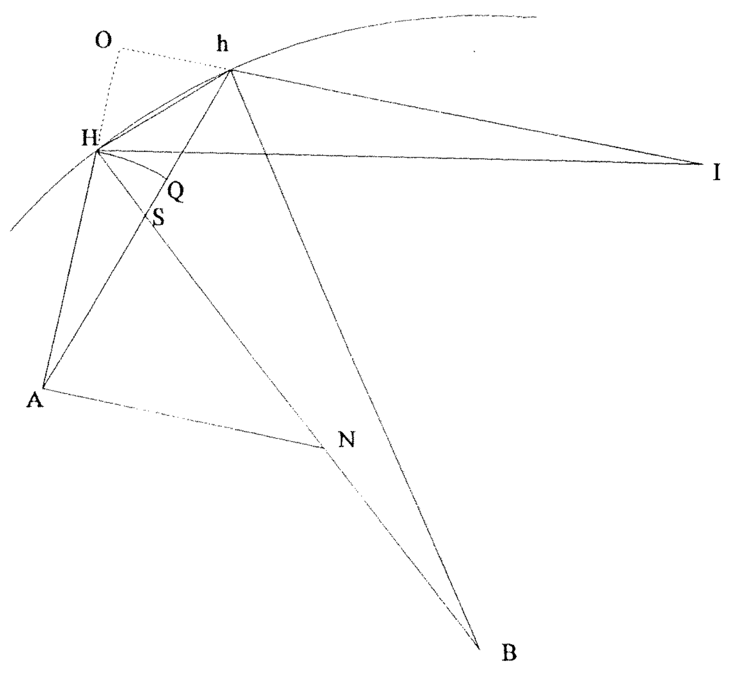
J. Bernoulli démontre cette proposition de la manière suivante :

[1] Traduit du latin par M. Buffard et A. Stoll

Soient H, h *(Fig.3)* [deux] *points très voisins de la courbe développante ;* HB, hB *sont des rayons du cercle osculateur qui a généré la courbe* Hh ; AH, Ah *sont des rayons incidents ;* HI, hi *des rayons réfléchis. La somme des angles* AHB *et* HAh *est égale à l'angle* ASB, *qui est égal à la somme des angles* AhB, hBH. *Donc la somme des angles* AHB, HAh *est égale à la somme des angles* AhB, hBH *; et donc la différence entre les angles* AHB, AhB, *est égale à la différence entre les angles* A *et* B. *Pareillement l'angle* BTI *est égal à la somme des angles* BHI, HBh, *comme à la somme de* BhI, HIh. *Ces sommes sont égales et donc la différence entre les angles* BHI *et* BhI *est égale à la différence entre les angles* B *et* I. *Mais par la loi de la réflexion, on peut dire que les angles* AHB, AhB *sont égaux aux angles* BHI, BhI *car la différence entre eux est égale. C'est pourquoi la différence entre les angles* A *et* B *est égale à la différence entre les angles* B *et* I. B *est en conséquence la moyenne arithmétique des angles* A *et* I, *et le double de l'angle* B *est égal à la somme des angles* A *et* I. *Les mesures des angles* A, I, B *sont les arcs* HQ, HO, Hh *(décrits par* H, *de centres* A, I, B*), divisés par leurs rayons respectifs,* HA, HI, HB. *Mais (comme* HhO = IhV = HhQ, *car* O *et* Q *sont droits par l'hypothénuse commune* Hh*) les triangles* HOh, HQh *sont égaux et* HO= HQ. *De même le triangle* hHQ *et le triangle* HAN *à cause des angles droits* Q *et* A *ayant des angles égaux* hHQ *et* AHN *(l'un et l'autre en effet font un droit avec l'angle* QHS*) sont des triangles semblables de sorte que* HA :HN = HQ :Hh *d'où* $\mathrm{Hh} = \frac{\mathrm{HN}}{\mathrm{HA}}\mathrm{HQ}$. *Les mesures des angles* A, I, B, *sont donc* HQ, HQ, $\frac{\mathrm{HN}}{\mathrm{HA}}\mathrm{HQ}$ *ou bien* HA, HA, HN *divisés par les rayons* HA, HI, HB. *C'est pourquoi puisque* A+I =2B *ou bien* I = 2B- A *nous aurons* $\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HI}} = \frac{2\mathrm{HN}}{\mathrm{HB}} - \frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HA}}$ *ou bien encore (en multipliant par* HB.HI) HA.HB = 2HN.HI - HB HI *laquelle équation résolue par l'analogie donne :* 2HN - HB sur HB *comme* HA sur HI.

Dans cette démonstration, nous pouvons apprécier la façon dont J. Bernoulli manipule "les infiniment petits". Pour le lecteur qui n'aurait pas l'habitude de lire des textes anciens, voici quelques commentaires qui peuvent l'aider à comprendre cette démonstration.

figure 2



Dans un premier temps, J. Bernoulli identifie la portion de courbe voisine du point H avec l'arc de cercle osculateur, c'est-à-dire le cercle de centre B et de rayon BH. Il identifie également les points I et i avec le point d'intersection des deux rayons réfléchis en H et h. (Rappelons que les points I et i sont les points de contact des rayons réfléchis en H et h avec la caustique).

Il démontre ensuite que la différence des angles $\hat{B} = h\hat{B}H$ et $\hat{A} = h\hat{A}H$ est égale à la différence des angles $A\hat{H}B$ et $A\hat{h}B$:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AHB}+\widehat{HAh}=\widehat{ASB}\\ \widehat{AhB}+\widehat{hBH}=\widehat{ASB}\end{array}\right\}\quad \text{d'où : } \widehat{AHB}+\widehat{HAh}=\widehat{AhB}+\widehat{hBH}$$

De la même manière, il montre que la différence des angles $\hat{I}=\widehat{hIH}$ et $\hat{B}=\widehat{hBH}$ est égale à la différence des angles $\widehat{BHI}$ et $\widehat{BhI}$.

Par la loi de la réfraction de la lumière, on a les égalités d'angles suivantes :

$$\widehat{AHB}=\widehat{BHI} \quad \text{et} \quad \widehat{AhB}=\widehat{BhI}$$

De toutes ces égalités, J. Bernoulli déduit que : $2\hat{B}=\hat{A}+\hat{I}$.

Soit Q le point d'intersection de Ah avec le cercle de centre A passant par H, et O le point d'intersection de Ih avec le cercle de centre I passant par H; En identifiant l'arc et le segment du même nom et en exprimant l'angle en radians, on a :

$$\hat{A}=\frac{HQ}{HA} \quad , \quad \hat{I}=\frac{HO}{HI} \quad , \quad \hat{B}=\frac{Hh}{HB}$$

Comme les points h et H sont très voisins, (Hh) est tangente au cercle et par suite l'angle HhB est droit. De même, les angles HQh et HhB sont droits. J. Bernoulli en déduit l'égalité des deux triangles rectangles HOh et HQh.

En effet Hh est commun aux deux triangles et $\widehat{HhO}=1\,\text{droit}-\widehat{IhB}=1\,\text{droit}-\widehat{BhQ}=\widehat{HhQ}$.
De cette égalité découle l'égalité des deux côtés HO et HQ.

Comme Hh est perpendiculaire à HN et AH est perpendiculaire à HQ, les angles HhQ, QHS et AHN sont égaux. Par suite, les triangles rectangles HQh et HAN sont semblables et : $\frac{HQ}{HA}=\frac{Hh}{HN}$ ou encore : $Hh=HN\frac{HQ}{HA}$ et $\hat{B}=\frac{HN.HQ}{HA.HB}$

Finalement: $\frac{HQ}{HI}=\frac{HO}{HI}=\hat{I}=2\hat{B}-\hat{A}=\frac{2.HN.HQ}{HA.HB}-\frac{HQ}{HA}$

On multiplie par HA et on divise par HQ :

$$\frac{HA}{HI}=\frac{2.HN}{HB}-1 \quad \text{et} \quad \frac{2.HN-HB}{HB}=\frac{HA}{HI}$$

Dans la deuxième partie de son traité, J. Bernoulli applique le résultat ci-dessus à différentes courbes, dont la spirale logarithmique, Il montre entr'autres que la caustique de celle-ci est une spirale "*tout à fait identique*"

Suite à la découverte des nombreuses propriétés de cette courbe, J. Bernoulli la qualifie de "*Spirale Admirable*". Il souhaite que celle-ci soit gravée sur sa tombe avec l'épigraphe : "*Eadem numero mutata resurget*" c'est à dire : "Elle ressuscitera identique à elle-même ".[2]

3. La solution des lecteurs

Depuis J. Bernoulli, presque trois siècles se sont écoulés. Le calcul différentiel s'est structuré atteignant une maturité certaine.
Les deux lecteurs - Pierre RENFER 67540 Ostwald et Marguerite PONCHAUX 59000 Lille - qui nous ont envoyé la solution du problème ont évidemment utilisé cet outil. Tous deux travaillent dans le repère mobile de Frenet associé à la courbe.
Marguerite PONCHAUX choisit de paramétrer la courbe en coordonnées polaires. Pierre RENFER préfère conserver les vecteurs. Voici sa solution détaillée

1. Notations (voir figure 3)

On choisit A comme origine du repère orthonormé fixe $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On suppose la courbe paramètrée par une abscisse curviligne s .

Soit $\left(H, \vec{\tau}, \vec{v}\right)$ le repère mobile de Frenet.

Soit φ l'angle polaire de $\vec{\tau}$

Soit $\vec{u} = \dfrac{\vec{AH}}{AH}$ (c'est un vecteur directeur unitaire du rayon incident)

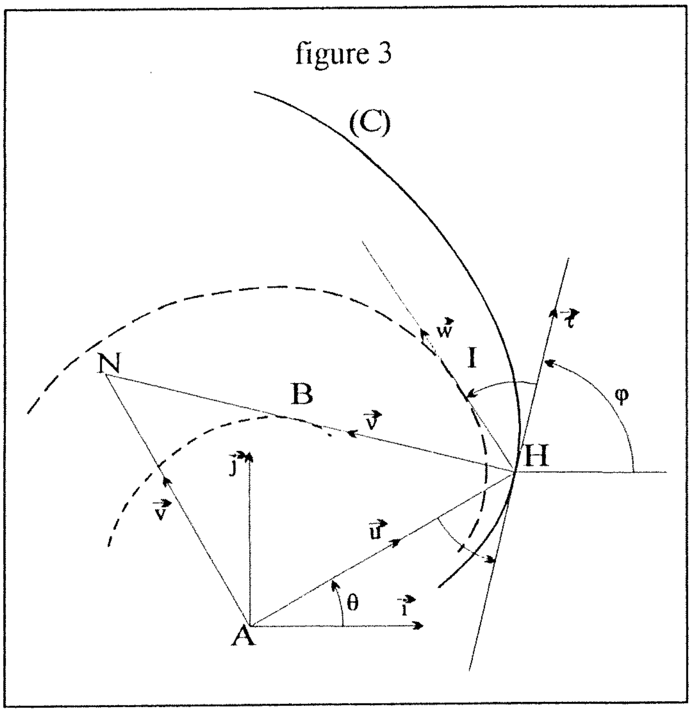
Soit θ l'angle polaire de $\vec{u}$.

Soit $\vec{w}$ le vecteur directeur unitaire du rayon réfléchi (HI) tel que :

$$\text{angle}\left(\vec{\tau}, \vec{w}\right) = \text{angle}\left(\vec{u}, \vec{\tau}\right)$$

Soient r=AH et λ tel que $\vec{HI} = \lambda \vec{w}$

soit ρ tel que $\vec{HB} = \rho \vec{v}$ ($\rho = \varepsilon\, HB$, où ε est le signe de la courbure algébrique)



2. Démonstration de la formule

Comme

$$\text{angle}\left(\vec{\tau}, \vec{w}\right) = \text{angle}\left(\vec{u}, \vec{\tau}\right) = \varphi - \theta$$

$$\vec{w} = \cos(\varphi - \theta)\, \vec{\tau} + \sin(\varphi - \theta)\, \vec{v}$$

et :

$$\frac{d\vec{w}}{ds} = -\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\theta}{ds}\right)\sin(\varphi-\theta)\,\vec{\tau} + \frac{1}{\rho}\cos(\varphi-\theta)\,\vec{v} + \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\theta}{ds}\right)\cos(\varphi-\theta)\,\vec{v} - \frac{1}{\rho}\sin(\varphi-\theta)\,\vec{\tau}$$

$$= \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{2}{\rho}\right)\sin(\varphi-\theta)\,\vec{\tau} + \left(\frac{2}{\rho} - \frac{d\theta}{ds}\right)\cos(\varphi-\theta)\,\vec{v}$$

$$I = H + \lambda \vec{w}, \text{ donc } \frac{d\vec{I}}{ds} = \vec{\tau} + \frac{d\lambda}{ds}.\vec{w} + \lambda.\frac{d\vec{w}}{ds}$$

La colinéarité de $\dfrac{d\vec{I}}{ds}$ et $\vec{w}$ s'exprime par la nullité du déterminant suivant :

---

[2] Le lecteur curieux pourra voir la pierre tombale de J. Bernoulli en la cathédrale de Bâle Il y trouvera effectivement une spirale. Mais celle-ci n'est pas logarithmique mais d'Archimède.

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{2}{\rho}\right)\sin(\varphi-\theta) & \cos(\varphi-\theta) \\ -\lambda\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{2}{\rho}\right)\cos(\varphi-\theta) & \sin(\varphi-\theta) \end{vmatrix} = \lambda\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{2}{\rho}\right)+\sin(\varphi-\theta)=0 \quad (1)$$

On peut choisir l'abscisse curviligne s dans le sens des θ croissants.

Alors : $\alpha = \text{angle}\left(\vec{\nu},\vec{u}\right) = \text{angle}\left(\vec{\nu},\vec{\tau}\right) + \text{angle}\left(\vec{\tau},\vec{u}\right) - \frac{\pi}{2} - (\varphi-\theta)$

Et : $HA = HN.|\cos\alpha| = HN.\sin(\varphi-\theta)$

D'autre part : $\vec{AH} = r\,\vec{u}$

Et : $\frac{d\vec{H}}{ds} = \frac{dr}{ds}.\vec{u} + r.\frac{d\theta}{ds}.\frac{d\vec{u}}{ds} = \vec{\tau} = \cos(\varphi-\theta).\vec{u} + \sin(\varphi-\theta).\frac{d\vec{u}}{ds}$

Donc : $r.\frac{d\theta}{ds} = \sin(\varphi-\theta)$

Dans la formule (1), on remplace $\sin(\varphi-\theta)$ par $\frac{HA}{HN}$ et $\frac{d\theta}{ds}$ par $\frac{1}{HN}$.

On obtient alors : $\frac{2.HN-\rho}{\rho} = \frac{HA}{\lambda}$ (2)

En égalant les valeurs absolues des deux membres , on trouve :

$$\frac{|2HN-\varepsilon HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}$$

La formule de l'énoncé n'est vraie que si la courbure est positive.
Si la courbure est négative, on obtient :

$$\frac{2HN+HB}{HB} = \frac{HA}{HI}$$

3. Application à la parabole (figure 4)

On choisit A = F , où F est le foyer de la parabole.
La propriété optique classique de la parabole montre que le point I est le point à l'infini sur l'axe de la parabole
La courbure est positive.

La formule donne donc :

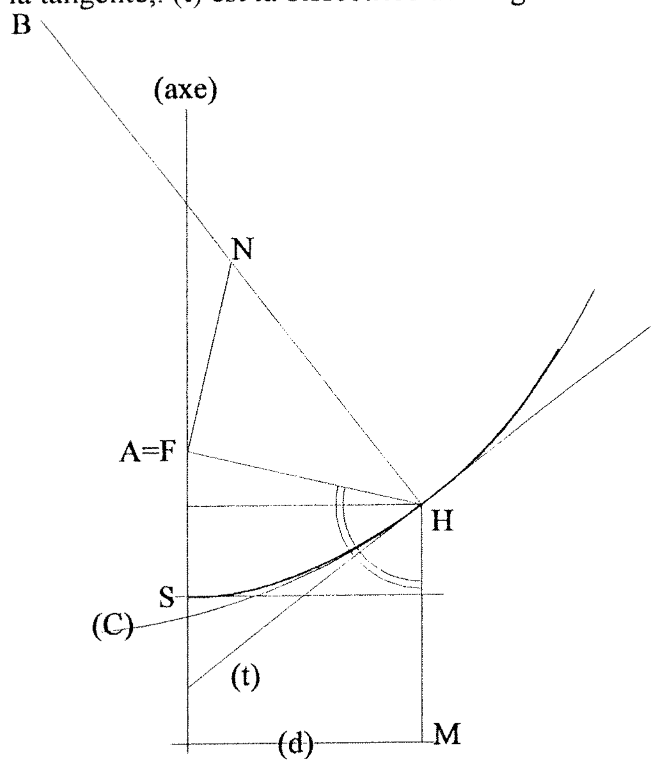
2HN - HB = 0

La construction de la normale en H à la parabole est classique.

On place facilement le point N et on construit B tel que HB=2HN

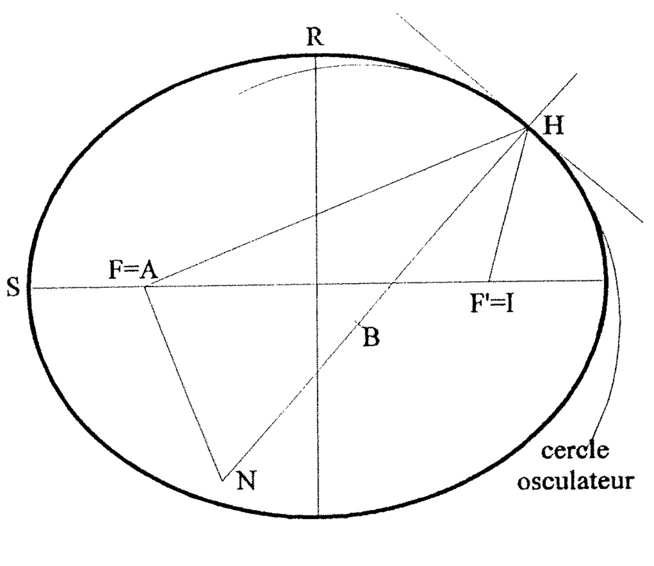
figure 4

(d) la directrice , (C) le cercle osculateur en H, (t) la tangente,: (t) est la bissectrice de l'angle FHM.



4. Application à l'ellipse (figure 5)

figure 5



On choisit A=F , où F est l'un des foyers de l'ellipse, de demi-grand axe a.

La propriété optique classique de l'ellipse montre que le point I est alors le deuxième foyer F'.
Les nombres ρ et λ sont positifs.
La formule (2) donne alors :

$$\frac{2HN - HB}{HB} = \frac{HF}{HF'}$$

et :

$$HB = \frac{2.HN.HF'}{HF + HF'} = \frac{HN.HF'}{a}$$

On peut ainsi construire le centre de courbure B.

5. Application à l'hyperbole

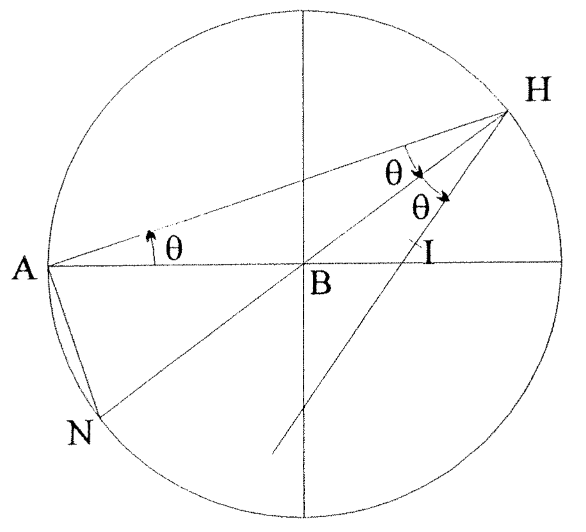
On choisit A = F , où F est l'un des foyers de l'hyperbole, de grand axe a. La propriété optique classique de l'hyperbole montre que le point I est alors le deuxième foyer F'.
Si H appartient à la branche d'hyperbole proche de F, alors $\rho>0$ et $\lambda<0$.
La formule (2) donne alors : $\dfrac{HB - 2HN}{HB} = \dfrac{HF}{HF'}$ et $HB = \dfrac{2.HN.HF'}{HF - HF'} = \dfrac{HN.HF'}{a}$
Si H appartient à l'autre branche d'hyperbole, alors $\rho<0$ et $\lambda<0$.
La formule (2) donne alors : $\dfrac{HB + 2HN}{HB} = \dfrac{HF}{HF'}$ et $HB = \dfrac{2.HN.HF'}{HF - HF'} = \dfrac{HN.HF'}{a}$
On peut ainsi construire le centre de courbure B.

6. Application à la spirale logarithmique.
L'application de la formule de J. Bernoulli à la spirale logarithmique donne $\dfrac{HA}{HI} = 1$. Par suite, I est le symétrique de A par rapport à la normale (HB).
On en déduit facilement que la caustique est une spirale logarithmique identique.

7. Deux applications au cercle.

7a. Pierre RENFER étudie la caustique d'un cercle, issue d'un point du cercle. (figure 6)

figure 6



Soit (C) un cercle et A un point de ce cercle.

Le point B est le centre du cercle. Le point N est diamétralement opposé à H, sur le cercle.

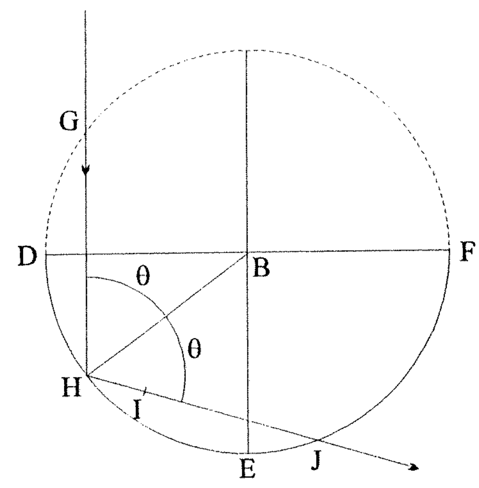
La formule de J. Bernoulli donne :

$$\frac{HA}{HI} = \frac{2HN - HB}{HB} = 3$$

La relation $HI = \frac{1}{3} HA$ permet une construction point par point de la caustique (figure 9).

7b. <u>Marguerite PONCHAUX étudie la caustique d'un demi-cercle, issue d'un point à l'infini. (figures 7 et 8)</u>

figure 7



Supposons que la courbe (C) soit un demi-cercle (DEF) (E milieu de l'arc DF) de centre B.
Prenons pour A le point à l'infini dans la direction de la demi-droite [EB).Soit H le point où une droite parallèle à [EB] rencontre le demi-cercle. On notera G le deuxième point où cette droite coupe le cercle (C). Le rayon réfléchi en H coupe le cercle (C) en J, symétrique de G par rapport au diamètre (BH)

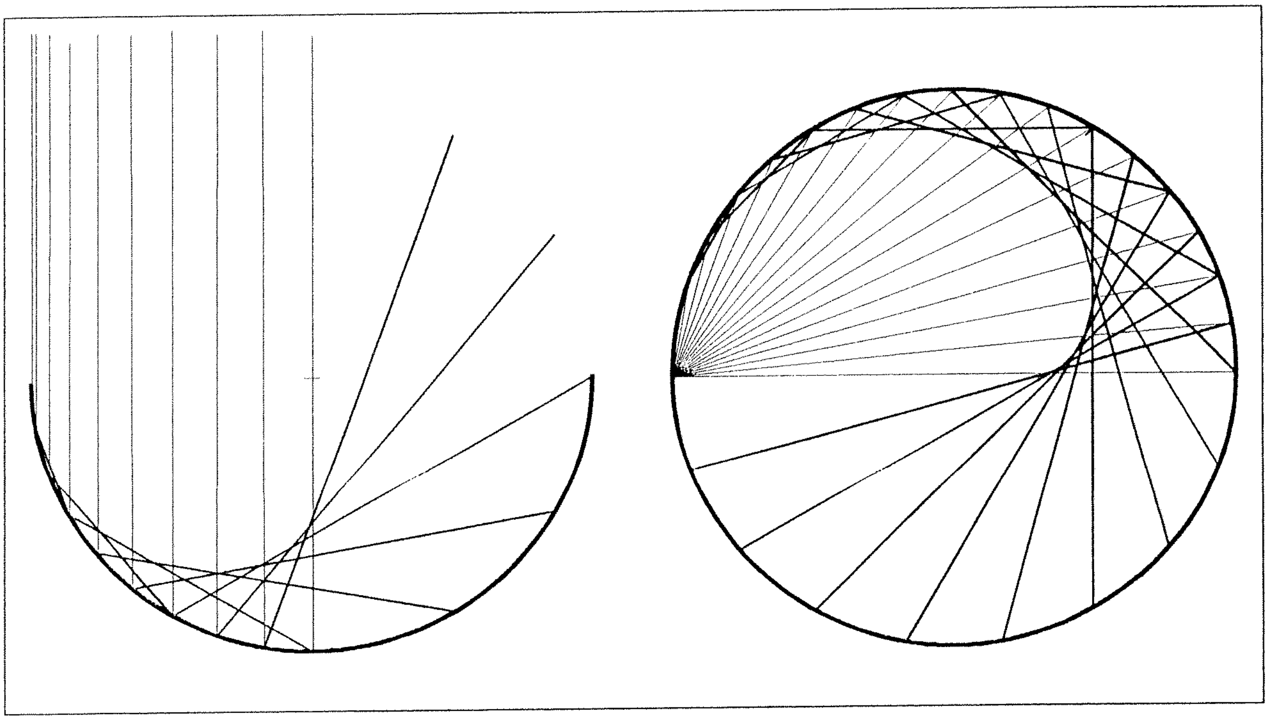
Ecrivons la formule de J. Bernoulli sous la forme : $\frac{HB}{HI} = \left| 2\frac{HN}{HA} - \frac{HB}{HA} \right|$

avec : $\frac{HB}{HA} = 0$ et $\frac{HA}{HN} = \cos(A\hat{H}B) = \frac{\frac{1}{2}HJ}{HB}$.

De sorte que : $HI = \frac{1}{4} HJ$.

Cette relation permet une construction de la caustique d'un demi-cercle, issue d'un point à l'infini; (On reconnaîtra une demi-néphroïde).

figure 8 et figure 9



PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$tg\,x = \frac{x - \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{1.3}{1.2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \frac{a(a+2)(a+4)}{a(a+1)(a+2)}\frac{x^3}{3!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{a(a+2)}{a(a+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Indication (par P. Renfer) :

On montre d'abord que la fonction $f(z)$ définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n-2)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\frac{z^n}{n!}$$

est entière, car son rayon de convergence est infini.
On pose $g(z) = e^{-z}f(z)$; on montre que g est solution de l'équation différentielle

$$zg''(z) + ag'(z) - zg(z) = 0,$$

puis que c'est une fonction paire, enfin que pour x réel, $g(ix)$ est réel. On en déduit l'expression en fonction de g du numérateur et du dénominateur de la fraction donnée dans l'énoncé du problème, ce qui conduit au résultat.

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des 2−mélanges réguliers (pour la définition d'un 2−mélange, voir l'article sur les tours de cartes dans le numéro 90 de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

PROBLÈME 54

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Montrer que si x, y et z sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.
2°) Soit n un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1}$$

est égal au nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$xy + yz + zx = n. \tag{2}$$

Exemple.— n=35. L'équation (1) possède six solutions : $(1, 3, 5)$, $(1, 5, 3)$, $(3, 1, 5)$, $(3, 5, 1)$, $(5, 1, 3)$ et $(5, 3, 1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1, 5, 5)$, $(5, 1, 5)$, $(5, 5, 1)$, $(1, 1, 17)$, $(1, 17, 1)$ et $(17, 1, 1)$.

A DIFFUSER AUX PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES ET A AFFICHER DANS LES ETABLISSEMENTS

Association des professeurs de mathématiques (APMEP)
Régionale de Strasbourg
10 rue du Général Zimmer
67000 Strasbourg
tel 0388392407

La régionale d'Alsace de l'association des professeurs de mathématiques organise cette année sa rencontre régionale le samedi après-midi **27 mars 1998** à Strasbourg. **Tous les professeurs de mathématiques** de l'académie, adhérents ou non, inscrits ou non , **sont cordialement invités** à participer à un des ateliers et à la table-ronde, à s'informer ou à proposer des idées, à consulter quelques brochures APMEP ou IREM parues récemment, à discuter avec des collègues d'autres établissements.

SAMEDI 27 mars 1998 au Lycée Charles FREY 3 quai Charles Frey 67000 Strabourg de 14h à 18h

Programme :

Des ateliers par niveau (collège ou lycée) seront suivis d'une table ronde autour du thème : faire des mathématiques en environnement informatique ou avec des calculatrices symboliques.

Le collègue Luc Trouche , co-auteur de la brochure de l'IREM de Montpellier « faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques » animera un atelier et participera à la table ronde.

Il est également prévu une pause café, avec consultation de brochures, et une assemblée générale de l'association .

Un programme plus détaillé sera communiqué ultérieurement.