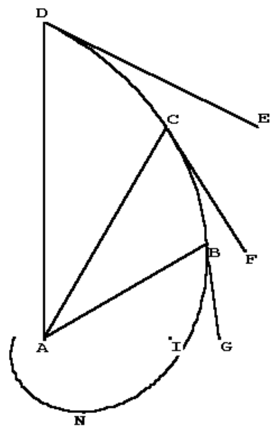
LES SPIRALES (2^e partie)

André STOLL

5. La spirale de Descartes



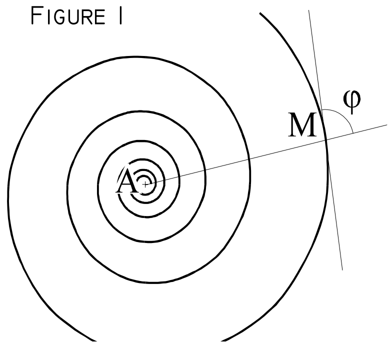
Elle est aussi appelée spirale de Bernoulli, spirale de Gregory, spirale équiangle, spirale proportionnelle, spirale logarithmique, spirale exponentielle …[1]

1. La spirale de René DESCARTES.

Dans une lettre datant du 12 septembre 1638 et adressée au père Mersenne en réponse à une question de celui-ci, Descartes écrit : *« …pour cete spirale, elle a plusieurs proprietez qui la rendent assez reconnoissable. Car si A est le centre de la terre & que ANBCD soit la spirale, ayant tiré les lignes droites AB, AC, AD, & semblables, il y a mesme proportion entre la courbe ANB & la droite AB, qu'entre la courbe ANBC & la droite AC ou ANBCD & AD, & ainsi des autres. Et si on tire les tangentes DE, CF, BG etc., les angles ADE, ACF, ABG etc. seront egaux »*.

Il est très remarquable que Descartes connaisse la proportionnalité de l'arc de la spirale à son rayon. C'est d'autant plus remarquable que celui-ci était convaincu qu'il n'était pas possible de rectifier une courbe quelconque.

En langage actuel, la propriété caractéristique que donne Descartes de cette spirale est : $\dfrac{s}{\varrho} = a$ (*) où s désigne l'abscisse curviligne du point générique M (s est la longueur de l'arc ANBM), ϱ le rayon vecteur (ϱ=AM) et a une constante.



Spirale logarithmique d'équation $\varrho(\theta) = \mathbf{e}^{\alpha\theta}$ avec α=0,088, soit l'angle $\varphi \approx 85°$.

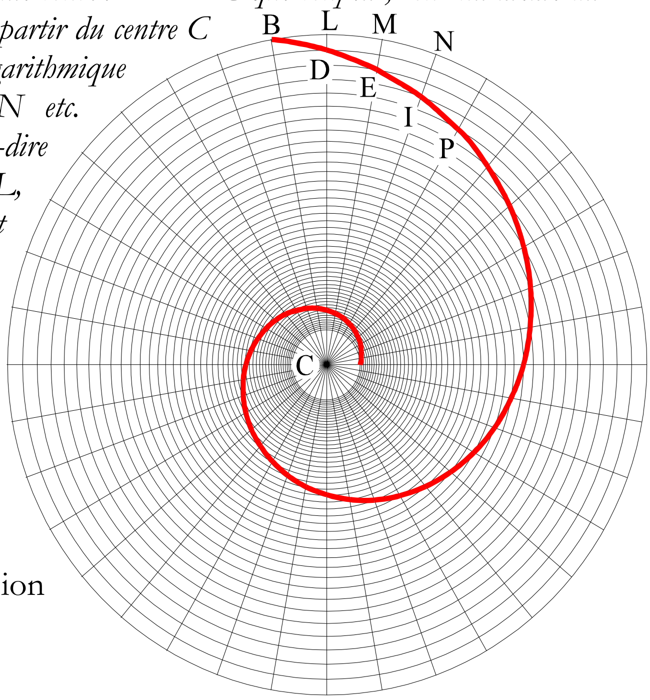
Avec les outils mathématiques dont nous disposons, l'équation (*) s'intègre facilement en : $\varrho = k \, . \, \mathbf{e}^{\alpha\theta}$ où θ est l'angle polaire, k une constante et $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

On en déduit facilement que l'angle φ formé par le vecteur $\overrightarrow{AM}$ et la tangente vérifie : $\tan\varphi = \dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{a^2 - 1}$ soit $\varphi = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{a}\right)$ et par suite, cet angle ne dépend pas de M.

[1] C'est le mathématicien Pierre VARIGNON (1654-1722) qui dénomma cette spirale « spirale logarithmique », nom sous lequel elle est connue à l'heure actuelle.
J. BERNOULLI l'appela « la spirale admirable » pour ses nombreuses propriétés (voir la conclusion)

2. Une propriété de la spirale logarithmique énoncée par J. BERNOULLI.

« Si sur le plan du cercle BCH se trouve une courbe BDEIPC que coupent, sous un même angle oblique, les rayons CB, CL, etc. menés à partir du centre C du cercle, cette courbe est dite spirale logarithmique puisque si on choisit des arcs LM, MN etc. infiniment petits et égaux c'est-à-dire arithmétiquement proportionnels aux arcs BL, BM, BN, les rayons DC, EC, IC sont géométriquement proportionnels par les triangles semblables DCE, ECI etc. »



Cette propriété de la spirale logarithmique nous permet de la construire géométriquement. (voir la figure ci-contre).

Les angles sont égaux :

$\widehat{BCL} = \widehat{LCM} = \widehat{MCN} = \dots$

Les côtés sont en progression géométriques :

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE} = \frac{CE}{CI} = \frac{CI}{CP} = \dots$$

3. La rectification de la spirale logarithmique par Torricelli.

Soit à rectifier l'arc de spirale logarithmique $\overset{\frown}{AI}$ de centre O et tel que OA > OI; (voir la figure 2 pour les notations)

Sur cet arc, reportons les points, en nombre pair, B, C, D,E… de telle sorte que :

$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \dots = \widehat{HOI}$

et sur les segments [OA] et [OB] les points I' et J tels que : OI' = OJ = OI .

Appelant R le point d'intersection des droites (I'J) et (AB), la longueur du segment [AR] est la somme des longueurs des segments [AB], [BC], [CD],…, [HI] :

AR = AB + BC + CD + DE + … + HI .

En effet, reportons alternativement sur les segments [OB] et [OA] les points C', D', E',… tels que :

OC'=OC, OD'=OD, OE'=OE,…,OH'=OH .

Par définition de la spirale logarithmique, les triangles (AOB), (BOC), (COD), (DOE),…,(HOI) sont semblables. En particulier, en écrivant les rapports de similitude de (AOB) et (COD), on a : $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OC'}{OD'}$.

Et, par suite, les droites (AB) et (D'C') sont parallèles.

De la même manière, on démontre que les droites (BC'), (D'E'),…,(H'I') sont parallèles ainsi que les droites (AB), (D'C'), (F'E'), …

Appelant P le point d'intersection des droites (I'H') et (AB), on en déduit que :
I'P = I'H' + … + E'D' + C'B et AP = AB + D'C' + E'F' + …

Or, les triangles (C'OB) et (COB) sont égaux. D'où BC = BC'.
De même, on a : C'D' = CD, D'E'= DE, …
Et :
I'P = IH + … + ED + CB et AP = AB + DC + EF + …

Enfin, le triangle (RPI') est isocèle car :

(*) $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OBC'} = \widehat{OH'I'}$

(**)le triangle (OJI') est isocèle donc $\widehat{OI'J} = \widehat{OJI'}$ et aussi : $\widehat{H'JI'} = \widehat{JI'A}$

(*) et (**) impliquent que les deux triangles (H'JI') et (AI'R) sont semblables et par suite, l'égalité des angles $\widehat{RI'P} = \widehat{PRI'}$ et des longueurs I'P =PR . Finalement :
AR = AP + AR = AB + BC + CD + DE + … + HI .
Si à présent on augmente indéfiniment le nombre de points sur l'arc $\overset{\frown}{AI}$, la droite (AB) devient la tangente à la spirale en A et la droite (I'J) la perpendiculaire à (OA) en I'.

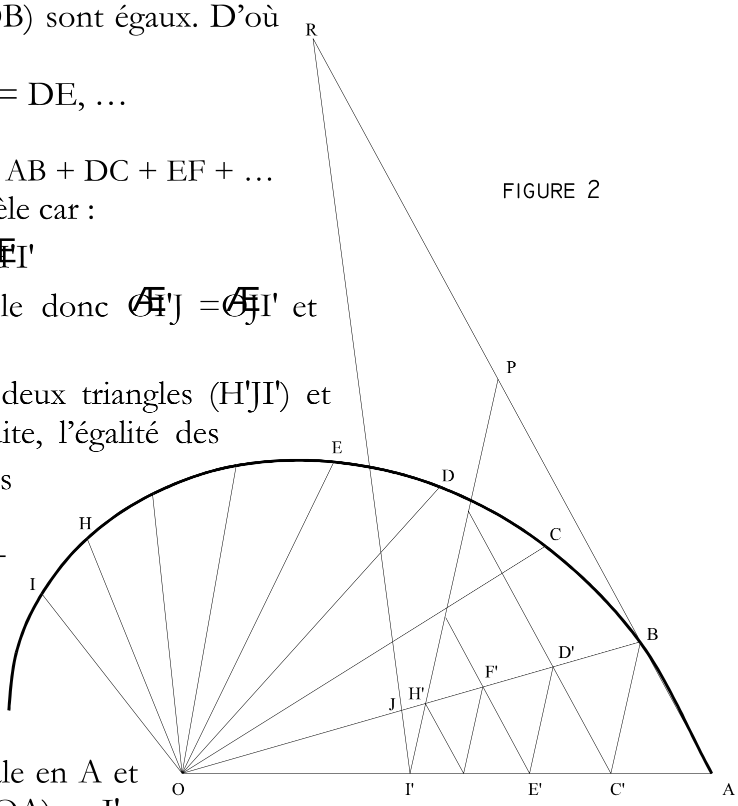
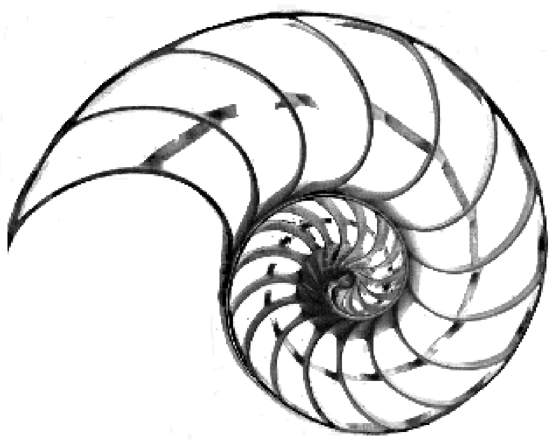


FIGURE 2

<u>Théorème</u> : la longueur de l'arc de spirale logarithmique $\overset{\frown}{AI}$ est égale à la longueur du segment [AR] de la tangente à la spirale en A où R est le point d'intersection de la tangente avec la perpendiculaire à (OA) en I' tel que OI' = OI.

4. Une spirale logarithmique dans la nature : le nautile.



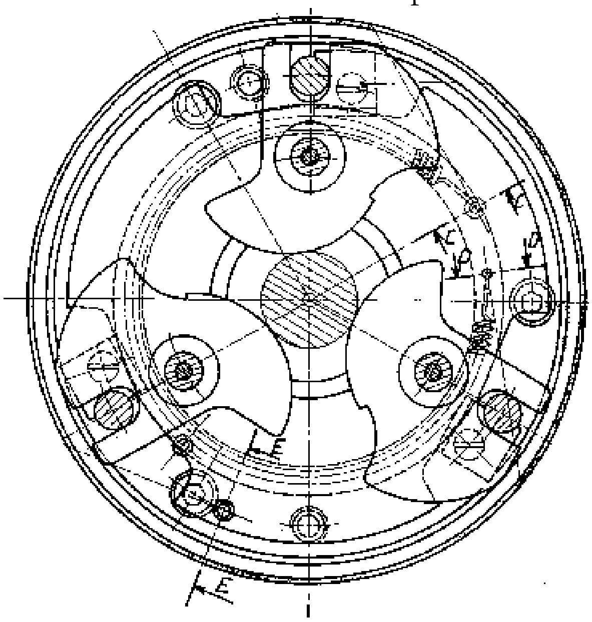
Petit nautile deviendra grand : Quand la chambre qu'il occupe est trop petite, le nautile en secrète une nouvelle qu'il sépare de la précédente par une cloison. Sa coquille qui est symétrique par rapport à son plan médian, dessine une spirale logarithmique parfaite.

EXERCICE I :

Reproduisez la coquille ci-contre en l'agrandissant ou en la réduisant (dans le rapport k); moyennant une rotation (d'angle ψ), cette reproduction se superposera avec l'original. Trouvez une relation entre k et ψ.

5. Une spirale logarithmique en mécanique : une roue libre.

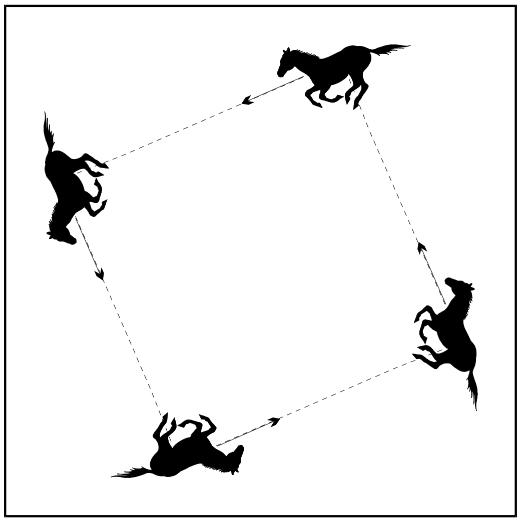
Une roue libre est un accouplement directionnel qui peut transmettre un moment par friction dans une direction en autorisant une marche à vide dans l'autre direction.



Le principe de la roue libre ci-contre est le suivant : lorsque l'axe central (hachuré sur la figure) tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, il entraîne les trois galets qui basculent. La courbure de ces galets est en forme de spirale logarithmique : le rayon augmente, l'angle de contact avec l'axe reste identique.

6. Un problème :

Galopin, Trotine, Marco et Plubelle sont quatre chevaux disposés, dans cet ordre, aux quatre sommets d'un carré de 1 kilomètre de côté.



Les chevaux courent tous les quatre à la même vitesse constante v=54 km/h.

Galopin est attiré par Trotine, Trotine par Marco, Marco par Plubelle et Plubelle par Galopin.

À chaque instant, chacun se dirige vers son (ou sa) préféré(e).

Le but du problème est de trouver les trajectoires des quatre chevaux et de calculer la distance parcourue par un des chevaux à la fin de la course.

Celle-ci s'arrêtant lorsque la distance séparant deux chevaux est inférieure à deux mètres.

<u>Remarque préliminaire :</u> Pour des raisons de symétries, il suffit de trouver l'une des quatre trajectoires. Les autres s'en déduisent par des rotations de centre O, le centre du carré initial, et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

<u>Choix d'un repère :</u> le point O s'impose naturellement comme origine. Comme axe des abscisses, nous pouvons, par exemple, prendre un axe perpendiculaire à un des côtés du carré

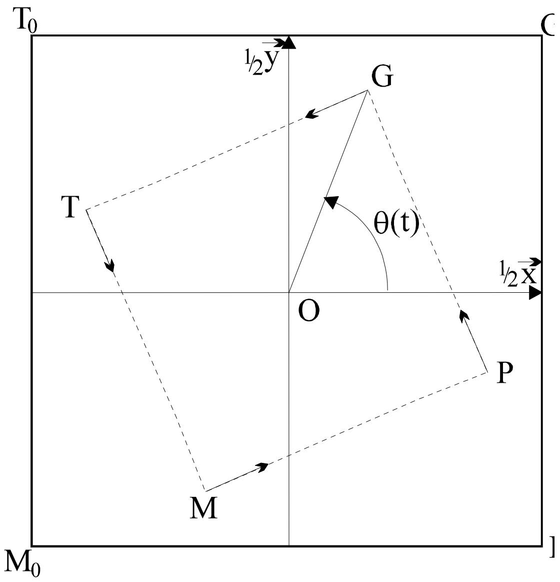
Désignons, pour simplifier les notations, par G, T, M et P les quatre chevaux et posons $\varrho(t)$la distance OG et $\theta(t)$l'angle orienté $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{OG}\right)$ à l'instant t.

Quelle est en fonction de t et sous forme trigonométrique, l'affixe z du point G ?

Montrer que l'affixe z_T de T est iz.

Calculer la dérivée $\dot{z}(t) = \dfrac{dz}{dt}$.

Par définition, $\dot{z}(t)$ est l'affixe du vecteur vitesse de G dans le repère $R = (O\,; \overrightarrow{x}\,; \overrightarrow{y}\,)$.



Expliquer pourquoi la phrase : « À chaque instant t, G se dirige vers T » peut se traduire par : « il existe une fonction k(t), à valeurs réelles, telle que :

$$\dot{z}(t) = k(t)\,[z_T(t) - z(t)] \quad (*1) \text{ ».}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires dans (*1), montrer que : $\dot{\varrho}(t) = -k(t)\varrho(t)$ (*2) et

$$\varrho\dot{\theta}(t) = k(t)\;\varrho(t) \quad (*3).$$

En déduire : $\dot{\varrho}(t) = -\;\varrho(t)\dot{\theta}(t)$ (*4) ou encore $\dfrac{\dot{\varrho}}{\varrho} = -\,\dot{\theta}$ (*4a).

Intégrer l'équation différentielle (*4a). Calculer $\varrho(0)$ et $\theta(0)$.

En déduire que l'équation de la trajection du cheval Galopin est :

$$\varrho = \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \quad (*5)$$

Représenter graphiquement cette trajectoire pour $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, 2\pi\right]$.

L'expression (*5) exprime le module ϱ en fonction de l'argument θ. Dans cette question, nous cherchons à exprimer ϱ et θ en fonction du temps t.

Calculer le module de $\dot{z}(t)$et en déduire : $[\dot{\varrho}(t)]^{2} + \varrho(t)\dot{\theta}(t = v^{2}$.

À l'aide de (*4) et (*5), montrer que la fonction ϱ est solution de l'équation différentielle : $e^{-\theta}\,\dot{\theta} = e^{-\frac{\pi}{4}}\,v$(*6).

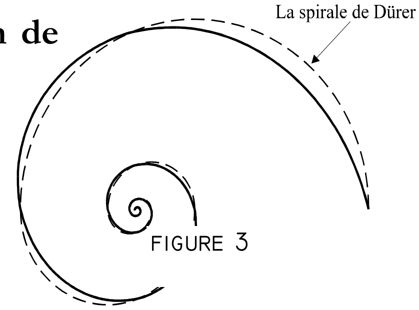
Intégrer cette équation différentielle et en déduire :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} - \ln(1-vt) \quad \text{et} \quad \varrho(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1-vt) \quad (*7)$$

Exprimer en fonction de t, le module de $z_T(t) - z(t)$. Que représente ce nombre ?

En déduire à quel instant cesse la course et la distance parcourue par chaque cheval.

7. Bref retour à la spirale sans début ni fin de Albrecht Dürer.



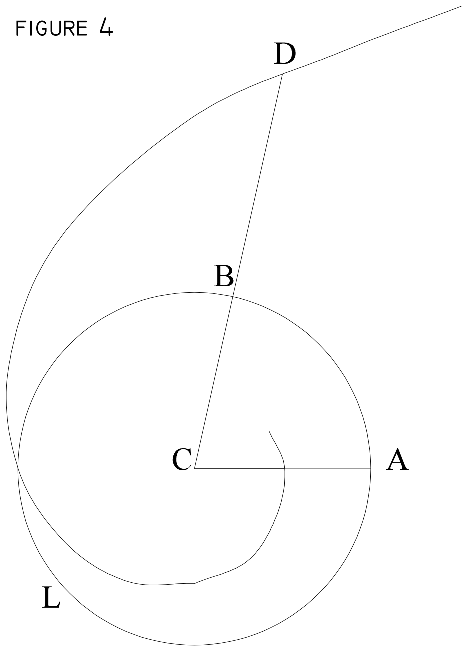
Sur la figure 3, nous avons représenté simultanément la spirale de Dürer (voir 4.3.) et une certaine spirale logarithmique – le lecteur se fera un plaisir de trouver l'équation polaire de cette spirale –.

6. La spirale hyperbolique.

1. Jean Bernoulli et le problème des forces centrales.

1 De quel problème s'agit-il précisément ?

Rappelons, pour commencer, qu'on dit qu'un corps mobile M est soumis à une force centrale lorsque à chaque instant la force qui s'applique au point M et qui donne naissance au mouvement du point M est dirigée vers un point fixe O de l'espace. Cette propriété peut aussi se traduire par : l'accélération du point M est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Le problème des forces centrales consiste à trouver de quelle manière un mobile M doit décrire une courbe (C) donnée de telle sorte que l'accélération du point M soit, à chaque instant, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Dans le problème inverse, la force centrale est donnée et il s'agit de trouver la courbe décrite par le corps soumis à cette force.

L'origine de ce problème est la détermination de la trajectoire des planètes. En effet, le point fixe est le soleil, le corps mobile est une planète et la force centrale est inversement proportionnelle au carré de la distance de cette planète au soleil. Bien entendu, cette force est dirigée à chaque instant vers le soleil. Nous savons que dans ce cas la trajectoire est une ellipse.

J. Bernoulli, pour montrer l'efficacité des nouvelles méthodes de calcul inventées par Leibniz, généralise le problème au cas des forces centrales inversement proportionnelles au cube de la distance du point M au point O.

Dans une lettre datée du 28 octobre 1710 et adressée à Pierre VARIGNON, Jean BERNOULLI écrit : *« [mes] lettres contenant mes solutions du probleme inverse des forces, dont il ne paroit encore aucune solution dans le public. Mr Newton luy même suppose bien que, comme une section conique fait les forces centrales vers le foyer en raison reciproque des quarrés des distances, ainsi toute courbe où les forces centrales se trouvent dans cette raison, sera une section conique […] car de même que de ce que dans la spirale logarithmique, les forces centrales vers le centre de la* *spirale sont en raison reciproque des cubes des distances, il ne s'en suit pas que toute courbe où cette loy des forces se trouve soit une spirale logarithmique, pouvant y avoir d'autres courbes et même d'algebraiques qui ont la même loy des forces… »*

Ultérieurement, s'étant rendu compte qu'il avait « oublié » une solution, il écrit à nouveau à Pierre VARIGNON (lettre du 10 janvier 1711) : *« … un corps pour se mouvoir dans une spirale logarithmique requiert les forces centrales, en raison réciproque des cubes des distances, il ne s'en suit pas que cette loy des forces etant supposée, la courbe trajectoire sera de necessité une spirale logarithmique, vu qu'une autre spirale d'une nature toute differente, repond aussy à la même loy des forces; c'est la spirale que l'on peut appeller hyperbolique, dont voici la construction : Du centre C d'un cercle ABL, soit tiré par quelque point de la circonference B la droite CBD, en sorte que le rectangle entre la droite CD et l'arc AB commençant d'un point fixe A, soit toujours constant, le point D sera dans la spirale Hyperbolique DEF, la quelle a cela de commun avec la spirale logarith. que l'une et l'autre repond à la raison reciproque des cubes des distances pour les forces centrales… »*

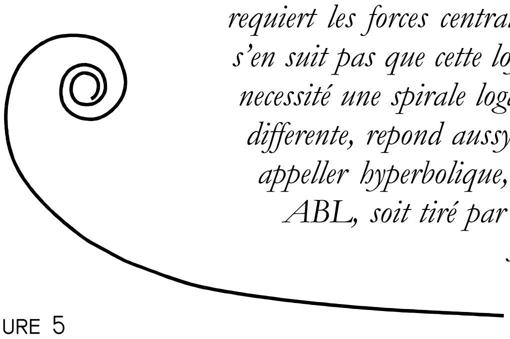


FIGURE 5

Ainsi, Jean Bernoulli est amené à introduire une courbe qu'il appelle « spirale hyperbolique ». Il la définit par la relation : $CD \times \overset{\frown}{AB} = \lambda$ (*) où λ est une constante.[2]

Actuellement, nous traduisons la relation (*) par $\varrho = \frac{\lambda}{r} \times \frac{1}{\theta}$ où θ désigne l'angle polaire $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right)$ et ϱ la distance CD.

2 Recherche de la trajectoire lorsque la force centrale est inversement proportionnelle au cube de la distance.

On démontre dans un premier temps que la trajectoire d'un point M soumis à une force centrale est nécessairement plane. $\overrightarrow{a}$

Désignons par $\overrightarrow{V}$ le vecteur vitesse de M et $\overrightarrow{a}$ son accélération :

$$\overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \text{ et } \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt}.$$

Posons $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{OM}$.

Par dérivation, on trouve : $\frac{d\overrightarrow{\Gamma}}{dt} = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

[2] Remarquons que Pierre Varignon avait déjà étudié cette courbe dans un mémoire publié en 1704. Toutefois, J. Bernoulli est probablement le premier à utiliser la loi des aires pour définir et construire la spirale hyperbolique.

En effet, comme la force centrale est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, il en est de même de l'accélération .

Par conséquent, $\overrightarrow{\Gamma}$ est constant.

Le cas où $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{0}$ est laissé au lecteur et nous supposerons par la suite que $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{0}$.

Il est clair que dans ce cas la trajectoire du point M est incluse dans le plan (P) passant par O et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\Gamma}$. De plus, le point O n'appartient pas à la trajectoire.

Soit $R = (O\,;\overrightarrow{x}\,;\overrightarrow{y}\,;\overrightarrow{z}\,)$ un repère orthonormé direct tel que $R_1 = (O\,;\overrightarrow{x}\,;\overrightarrow{y}\,)$ soit un repère du plan (P) ;

Posons $\varrho = OM$, $\theta = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{OM}\right)$ et $z(t) = \varrho\, e^{i\theta}$ l'affixe du point M à l'instant t

En dérivant, nous obtenons :

(la notation $\dot{\varrho}$ désigne la dérivée de ϱ par rapport à la variable t)

$$\dot{z}(t) = \left(\dot{\varrho} + i\varrho\dot{\theta}\right) e^{i\theta}$$

Et, en dérivant une deuxième fois :

$$\ddot{z}(t) = \left(\left(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\theta}^2\right) + \left(2\dot{\varrho}\,\dot{\theta} + \varrho\ddot{\theta}\right)\right) e^{i\theta}$$

Par suite :

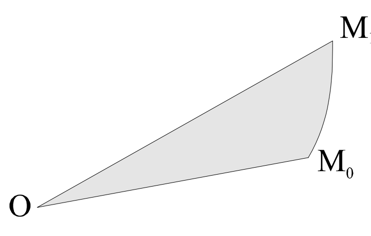
$$\left(2\dot{\varrho}\,\dot{\theta} + \varrho\ddot{\theta}\right) = 0$$

Comme $\varrho \neq 0$, on peut multiplier cette égalité par ϱ. On reconnaît alors la dérivée de $\varrho^2\dot{\theta}$.

Par conséquent : $\varrho^2\dot{\theta} = \alpha$ où α est une constante (*).

Ce résultat, connu sous « la loi des aires » exprime le fait que l'aire balayée par le rayon vecteur OM est proportionnelle à t (voir la figure ci-contre) :

$$\textbf{aire}(OM_0M_1) = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \varrho^2 d\theta = \frac{\alpha}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt = \frac{\alpha}{2}(t_1 - t_0)$$



Supposons à présent que la force centrale soit inversement proportionnelle au cube de la distance OM.

Dans ces conditions : $\left(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\theta}^2\right) = \dfrac{\lambda}{\varrho^3}$ où λ est une constante (**)

Pour intégrer le système d'équations différentielles (*) et (**), on pose $r = \dfrac{1}{\varrho}$ (c'est possible car $\varrho \neq 0$) et on cherche r en fonction de θ.

L'équation (**) devient :

$$r'' + \frac{\lambda+\alpha^2}{\alpha^2}\, r = 0$$

Suivant les valeurs de $\frac{\lambda+\alpha^2}{\alpha^2}$, on obtient une spirale logarithmique, une spirale hyperbolique qui correspond à $\frac{\lambda+\alpha^2}{\alpha^2} = 0$ (c'est le cas que J. Bernoulli avait oublié dans un premier temps) ou d'autres courbes que le lecteur se fera un plaisir de découvrir tout seul.

2. Trois autres situations où l'on rencontre une spirale hyperbolique.

1 La projection stéréographique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une spirale hyperbolique (voir photo ci-contre).

2 L'image d'une spirale d'Archimède par inversion est une spirale hyperbolique.

3 Sur un stade d'athlétisme, au départ d'une course de 200 m ou de 400 m, les coureurs sont disposés suivant une spirale hyperbolique.

La représentation ou la photo d'un escalier hélicoïdal est une spirale hyperbolique. (tableau de Bernard Sanna dit « Ben » , professeur au lycée Louis Couffignal de Strasbourg)

7. La développante du cercle et la spirale de Norwich

1. La développante du cercle.

Cette courbe s'obtient très simplement de la manière suivante : prendre une bobine de fil, attacher un crayon au bout du fil, fixer solidement la bobine sur le plan de travail, dérouler le fil en prenant soin de laisser tendu. Le crayon marquera une superbe spirale que l'on appelle habituellement « développante du cercle »

Léonard de VINCI préconisa de donner cette forme aux dents des engrenages.

2. Équation de la développante du cercle.

Prenons l'unité comme rayon du cercle (c'est à dire de la bobine) et un repère orthonormé d'origine le centre du cercle. P un point quelconque du cercle d'affixe est : $z_P = e^{i\varphi}$ (voir figure 6). Sur la tangente au cercle, on prend le point M de telle sorte que la longueur PM soit égale à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{PA}$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{PM}$ est : $z_{\overrightarrow{PM}} = -i\,\varphi\, e^{i\varphi}$.

On en déduit l'affixe du point M : $z_M = z_P + z_{\overrightarrow{PM}} = e^{i\varphi} - i\,\varphi\, e^{i\varphi} = (1-i\varphi)e^{i\varphi}$.

En coordonnées polaires, la développante du cercle a pour équations :

$$\begin{cases} \varrho(\varphi) = |z_M| = \sqrt{1+\varphi^2} \\ \theta(\varphi) = \arg(z_M) = \varphi - \operatorname{Arctan}(\varphi) \end{cases}$$

3. Rectification de la développante du cercle.

Il est aisé de calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ de cette développante.

En effet :

$z_M' = -i\, e^{i\varphi} + (1-i\varphi)i\, e^{i\varphi} = \varphi\, e^{i\varphi}$

D'où : $|z_M'| = \varphi$ et

$$\overset{\frown}{AM} = \int_0^{\varphi} \varphi d\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2 .$$

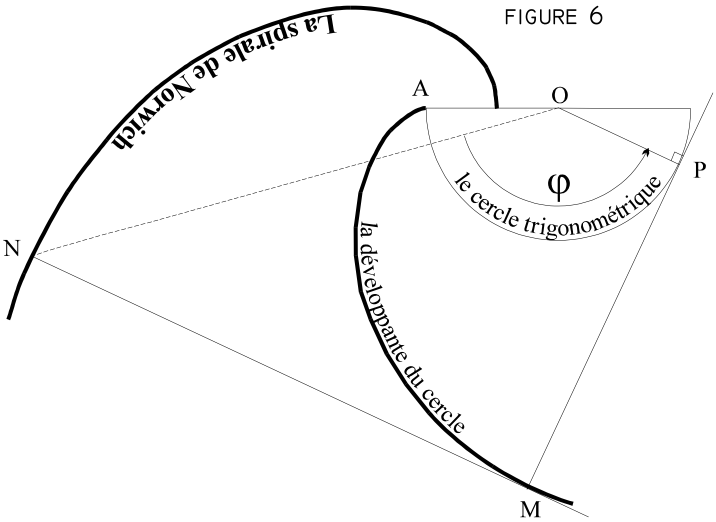


FIGURE 6

4. La développante de la développante du cercle : la spirale de Norwich.

Enroulons à présent notre fil sur la développante du cercle. En le déroulant (prendre soin de laisser tendu), nous obtenons une nouvelle spirale appelée « **spirale de Norwich** ». Celle-ci doit son nom au mathématicien anglais J.J. SYLVESTER qui l'a dénommée ainsi suite à un meeting qui eu lieu en 1868 dans la ville de Norwich.

<u>Une propriété remarquable de cette spirale</u> : en tout point de cette spirale, le rayon vecteur est égal au rayon de courbure. Sur le dessin ci-dessus, cette propriété se traduit par : NO = NM.

5. Équation de la spirale de Norwich.

Soit N le point de la tangente en M à la développante qui vérifie :

$$MN = \frac{1}{2} + \overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2}(1+\varphi^2) .$$

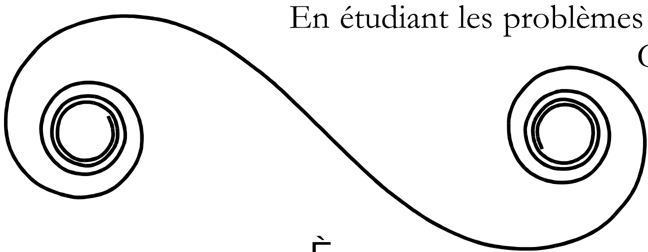
Par un calcul de même type que le calcul ci-dessus, on montre que l'affixe de N est : $z_N = \frac{1}{2}(1+\varphi^2)\, e^{i(\varphi - 2\operatorname{Arctan}\varphi)}$ (*)

Lorsque φ décrit l'ensemble des nombres réels positifs, le point N décrit la spirale de Norwich.

En posant $\varphi = \tan(t)$, on obtient à l'aide de (*) une équation de cette spirale en coordonnées polaires : $\begin{cases} r(t) = \dfrac{1}{2\cos^2(t)} \\ \theta(t) = \tan(t) - 2t \end{cases}$

ou encore : $\boxed{\theta(r) = \sqrt{2r-1} - 2\text{Arccos}\frac{1}{\sqrt{2r}}}$

8. La spirale de CORNU ou clothoïde.



En étudiant les problèmes de la diffraction de la lumière, Alfred CORNU (1841-1902), un physicien français, fut amené à introduire une courbe dont le rayon de courbure en un point quelconque M est inversement proportionnel à l'abscisse curviligne $\overset{\frown}{OM}$.

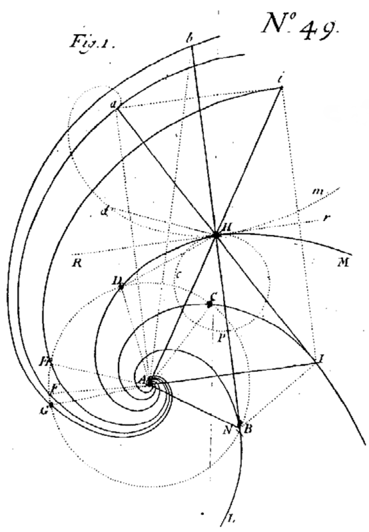
Cette courbe qui est une spirale et qui porte désormais son nom a pour équations, en coordonnées paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(u^2)du \\ y(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(u^2)\, du \end{cases}$$

Cette courbe est utilisée actuellement dans les travaux publics – dessin des bretelles de raccordement d'autoroutes par exemple – ; elle permet de négocier les virages à vitesse constante en tournant le volant à vitesse constante.

Conclusion

Pour finir, je ne peux résister au plaisir de donner la conclusion du chapitre XLIX que Jacques Bernoulli consacre à la spirale logarithmique dans son ouvrage « Acta eruditorum » .



Après avoir montré de nombreuses propriétés de cette courbe – qu'il appelle « la spirale admirable » –-, J. Bernoulli conclut de la manière suivante :

Puisqu'en effet cette spirale engendre une spirale toujours semblable à elle-même, quelle que soit la façon dont elle s'enroule, se déroule, rayonne; elle pourrait aussi bien être pour tous un emblème semblable aux descendants des parents; La Fille Très Semblable à la Mère. Ou bien (s'il est permis d'appliquer cette chose aux mystères de l'éternelle Vérité de la Foi) elle est comme une esquisse quelconque de l'éternelle Génération du Fils, semblable à l'image du Père, et de ce fait comme la Lumière issue de la Lumière et identique à elle. Ou bien si vous préférez, parce que notre courbe admirable dans sa révolution demeure toujours semblable à elle-même, de façon très constante et en rapport, elle pourrait être le symbole du courage et de la constance dans l'adversité ; et même le symbole de la résurrection de notre chair après de multiples altérations, la *même pourtant après la mort. D'ailleurs si l'usage s'était maintenu de nos jours d'imiter AR-CHIMÈDE, j'ordonnerai volontiers que fût gravée sur ma tombe cette spirale avec l'épigraphe:* « Eadem numero mutata sesurgo » *c'est-à-dire : « Elle ressuscitera identique à elle-même ».*

9. Annexes : corrigé de quelques exercices

ANNEXE 1 : CORRIGÉ DE L' EXERCICE 2

Voici un programme de construction de la spirale de Théodore à l'aide du logiciel de calcul formel « Maple » (il faudra bien sûr donner une valeur à n)

```
> restart:Digits:=15:A[n]:=[x(n),y(n)]:
> calculpoints:=proc(n)
> global A,S,z; local k;
> A[0]:=[0,0];A[1]:=[1,0]; z:=1.0;
> for k from 2 to n do z:=z+I*z/abs(z);A[k]:=[Re(z),Im(z)] od;
> S:=[seq(A[k] , k=0..n)];end:
> n:=   ;
> calculpoints(n):
>plot(S,scaling=constrained,color=black,axes=none);
```

ANNEXE 2 : CORRIGÉ DE L' EXERCICE 3

```
> Transformation: z->z(1+i/abs(z));
> restart:with(plots):
> Theo:=proc(x,y)
> evalhf(x-y/sqrt(x^2+y^2)),evalhf(y+x/sqrt(x^2+y^2));
> end:
> x:=t->evalhf(1+2*t*(1-t)):
> y:=t->evalhf(t):
> n:=17:
> c[0]:=[seq([x(i/100),y(i/100)],i=0..100)]:
> for k from 1 to n do c[k]:=[seq([Theo(op(c[k-1][i]))],i=1..101)]: od:
> display({plot(c[0],color=red),seq(plot(c[i],color=blue),i=1..n)},
> scaling=constrained);
```

ANNEXE 3 : RECHERCHE D'UNE COURBE "RÉGULIÈRE" PASSANT PAR TOUS LES POINTS DE LA SPIRALE DE THÉODORE[3]

Les notations sont les mêmes que dans l'exercice 1.

Pour n, nombre entier naturel, on a :$\varrho(n) = OA_n = \sqrt{n}$

$$\text{et} \begin{cases} \theta(n) = \arg(z_n) = \sum_{p=1}^{n-1} \text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{p}} \text{ si } n \geq 2 \\ \theta(1) = 0 \end{cases}$$

Le problème consiste donc à prolonger à l'intervalle $[1, +\infty[$ les fonctions ϱ et θ.

La fonction ϱ se prolonge naturellement en : $x \in [1, +\infty[\quad \varrho(x) = \sqrt{x}$.

Quant à θ, remarquons que : $\theta(n+1) - \theta(n) = \text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

[3] Je remercie mon collègue Philippe AUSCHER qui m'a aidé à élaborer cette solution.

Si on veut généraliser cette relation, il nous faut résoudre l'équation fonctionnelle suivante : $\theta(x+1) - \theta(x) = \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{x}}$ si $x \in [1, +\infty[$ et $\theta(1) = 0$.

Soit f une solution quelconque de $\theta(x+1) - \theta(x) = 0$ vérifiant $f(1) = 0$ (f est une fonction 1-périodique) et g une solution particulière de (E), il est aisé de vérifier que $\theta = f + g$ est solution de (E) – Remarquons d'ailleurs que toute solution de (E) est de cette forme –.

Il suffit donc de trouver UNE solution de l'équation (E). Posons $h(x) = \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{x}}$ et dérivons : $$g'(x+1) - g'(x) = h'(x)$$

En remplaçant x par x+p, nous obtenons :
$$g'(x+p+1) - g'(x+p) = h'(x+p)$$

En sommant de p=0 à n : $$g'(x+n+1) - g'(x) = \sum_{p=0}^{n} h'(x+p) \quad (*)$$

Or $h'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$ et la série de terme général $h'(x+p)$ est convergente ; en effet, pour x fixé et p au voisinage de $+\infty$, $h'(x+p)$ est équivalent à $-2p^{-\frac{3}{2}}$.

Faisons tendre n vers $+\infty$ dans (*) et prenons la solution g de (E) qui vérifie $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, pour en déduire que : $g'(x) = -\sum_{p=0}^{+\infty} h'(x+p)$

Il suffit à présent de remarquer que :
$$g(x) = g(x) - g(1) = \int_1^x g'(t)dt = -\int_1^x \sum_{p=0}^{+\infty} h'(t+p)dt = -\sum_{p=0}^{+\infty}\int_1^x h'(t+p)dt$$

(Le lecteur aura bien sûr pris soin de justifier l'inversion des signes $\sum$ et $\int$)

pour conclure que la fonction $g : x \longrightarrow g(x) = -h(x) + \sum_{p=1}^{+\infty}\big(h(p)-h(p+x)\big)$ est une solution de l'équation (E).

<u>Conclusion :</u>

En coordonnées polaire une équation de la courbe cherchée est :

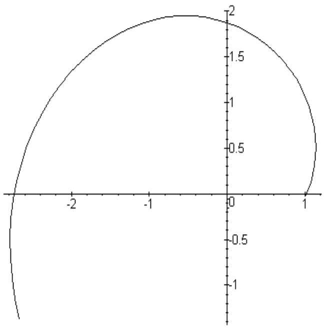
$\theta : \varrho \longrightarrow f(\varrho^2) + g(\varrho^2)$

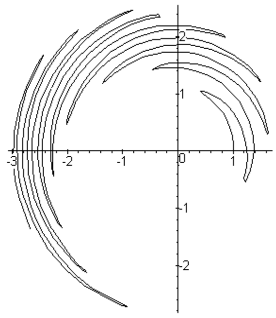
où f est une fonction 1-périodique vérifiant :

$f(1) = 0$ et $g(x) = -h(x) + \sum_{p=1}^{+\infty}\big(h(p)-h(p+x)\big)$

Remarque : La solution $\varrho \longrightarrow \theta(\varrho) = g(\varrho^2)$ est croissante et dérivable. Est-ce la seule ?

Les figures suivantes sont obtenues en prenant $f(t) = 0$ puis $f(t) = \sin(2\pi t)$.





Annexe 4 : corrigé de l'exercice 4

Posons $f(x) = \mathrm{Arctan}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; il s'agit de calculer $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ avec une erreur inférieure à 2π. En remarquant que la fonction f est décroissante sur l'intervalle [0 , +∞ [on a :

$$\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^{n-1} f(x)dx \quad (1)$$

Appelons F une primitive de f , l'inégalité (1) s'écrit :

$$F(n) - F(1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq F(n-1) - F(0) \qquad (2)$$

Le calcul de F ne pose pas de problème :

$$F(x) = (x+1)\ \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \ = (x+1)\ \left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\sqrt{x}\ \right] + \sqrt{x}\ .$$

En particulier $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $F(1) = \dfrac{\pi}{2} + 1$.

Par conséquent : $\dfrac{F(n)}{2\,\pi} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2\,\pi} \leq \dfrac{1}{2\,\pi} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \dfrac{F(n-1)}{2\,\pi} - \dfrac{1}{4}$

Finalement, lorsque $n > 17$, le nombre de tours complets est égal à la partie entière de $\dfrac{F(n-1)}{2\,\pi} - \dfrac{1}{4}$.

Exemple : $n = 10^9$, le nombre de tours complets est 10 065.

Bibliographie

Brochure APMEP n°65, Fragments d'histoire des mathématiques II, 1987. Les deux articles suivants : — François DE GANDT, Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique : la géométrie des indivisibles en Italie.

— Évelyne BARBIN, Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVII^{e} siècle.

ARCHIMÈDE, (Traduction Charles MUGLER) Tome II, Édition « Les Belles Lettres » 1971.

ARCHIMÈDE, (Traduction P. Ver Eecke), Œuvres complètes 2 vol, Paris, 1961.

Albrecht DURER, (Traduction Jeanne PEIFFER)Géométrie Éditions du Seuil 1995.

Blaise PASCAL, Œuvres Complètes , Bibliothèque de la Pléade , Éditions Gallimard 1954.

P. J. DAVIS, Spirals from Theodorus to chaos, Éditions A. K PETERS Wellesley, Massachusetts 1993.

Brochure IREM de Strasbourg, Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique, 1996.

Dr Gino LORIA, Spezielle algebraische und transscendente Ebene Kurven., LEIPZIG 1902.

René DESCARTES , Œuvres de René DESCARTES, Tome 2 , Éditions Vrin 1996.

Jacob BERNOULLI, (Traduit du latin par Marga BUFFARD/André STOLL), Opera, Acta eruditorum, vol XLII et vol XLIX 1692

Bernard BETTINELLI (IREM de Besançon) : Intuition et démonstration chez Archimède in « Repères–IREM » N°2 janvier 1991.

PLATON , Théétète, Tome VIII, Édition « Les Belles Lettres » 1963.

Revue du Palais de la découverte, numéro spécial 45, Courbes mathématiques 1995.

Jean CHEVALIER et Alain GHEERBRANT, Dictionnaire des symboles, Collection Bouquins, Éditions Robert Laffont/Jupiter 1993.

Détail de la pierre tombale de J. Bernoulli à Bâle. Remarquez que, contrairement au souhait de J. Bernoulli, le sculpteur a gravé une spirale d'Archimède et non une spirale admirable.

(photo André Stoll)