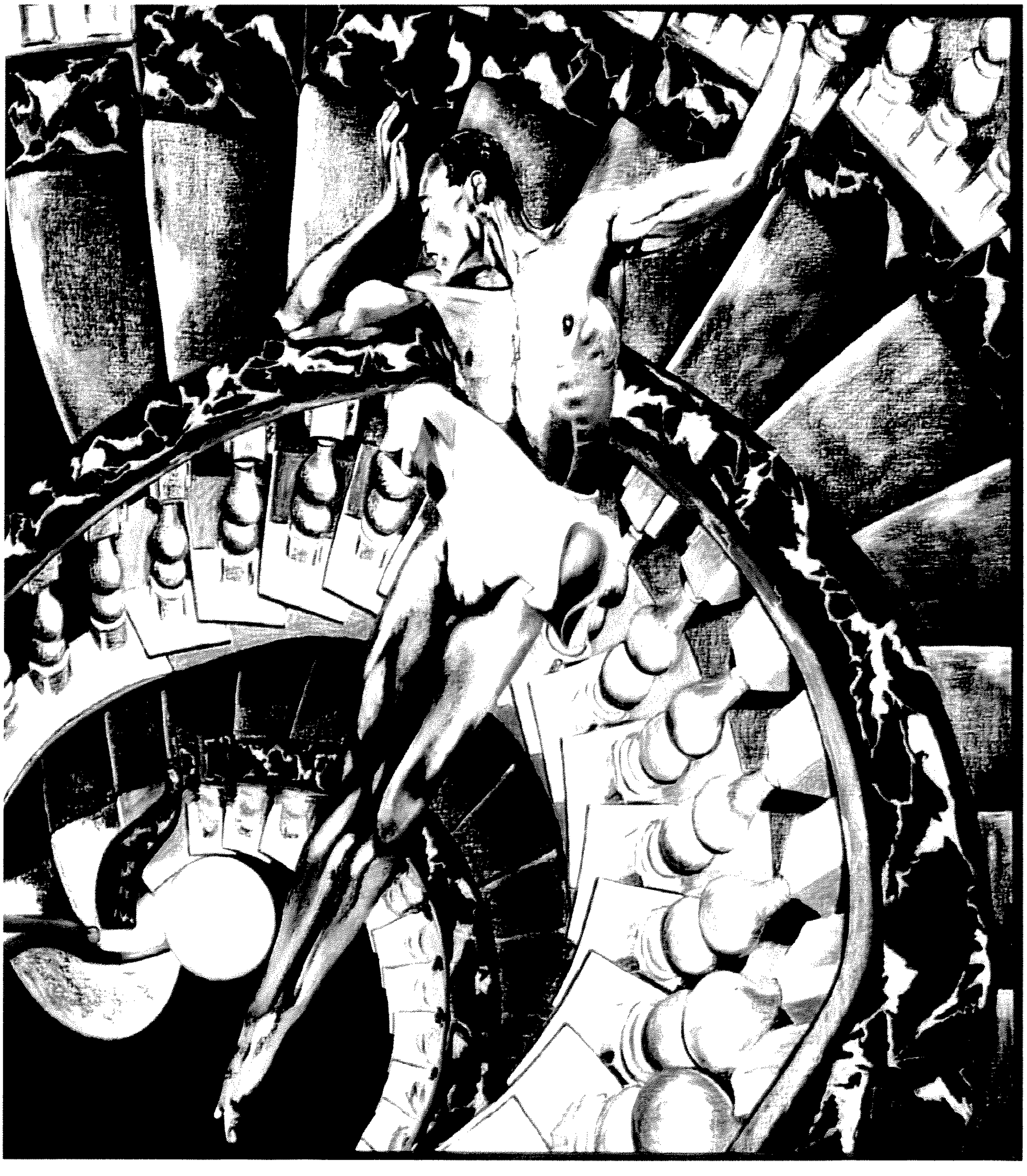
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 97 DÉCEMBRE 1999 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

Le tableau représenté ici illustre aussi la fin de l'article "Les Spirales" d'André STOLL. Son auteur est Bernard Sanna dit "Ben", professeur au Lycée Louis Couffignal de Strasbourg, et son vrai titre est "Zut j'ai encore oublié le pain (1996)".

EDITORIAL

REFONDATION[1].

Au moment où Internet ouvre aux esprits préparés des perspectives de formation et de culture sans équivalent dans l'histoire de l'humanité, l'Education Nationale accompagne et encadre un affaissement sans précédent de la formation initiale des élèves français.

Les réductions d'horaire des enseignements fondamentaux (Français et Mathématiques), décidées au cours des années passées[2] et annoncées pour l'avenir immédiat fragilisent les compétences des bons élèves et privent une majorité d'autres de la maîtrise des savoirs essentiels pour s'insérer utilement dans la vie sociale et professionnelle. Sans parler de ceux que l'on méprise au point de les diplômer sans autre raison que d'atteindre les magiques « 80% » de succès obligés au baccalauréat.

Un élève de Seconde ne peut pas redécouvrir et assimiler par les seules « activités » les notions mathématiques difficiles de son programme, même allégé. Dans cette section, l'apport de connaissances par l'enseignant se réduit depuis la rentrée à deux heures hebdomadaires. Cela ne permet de transmettre qu'un enseignement squelettique, de type algorithmique, sans grande utilité pour une formation scientifique. Au nom d'une trop tardive fausse-bonne idée, le soutien aux plus faibles[3], tous les élèves de Seconde sont privés d'une heure d'enseignement de mathématiques (et de français) qui était indispensable. En dessous d'un certain seuil critique, probablement franchi, la formation initiale perd l'essentiel de son efficacité : on est passé de « l'empilement pléthorique » des connaissances[4] à un empilement de misère, faute de temps pour établir des liens et faire les synthèses

Il est parfaitement possible de réduire les programmes dans les disciplines de base. L'exhaustivité est une utopie sans intérêt. Mais il faut réduire dans la cohérence et non « alléger » en hâte. Il faut enseigner ce qui ne va pas de soi, ce sur quoi l'élève bute s'il se connecte aux sites mathématiques pour compléter sa formation. Quelle illusion de croire que la magie d'Internet dissout les obstacles épistémologiques que recèlent les champs de connaissances mathématiques. L'école n'est indispensable que pour aider les élèves à apprendre ce qui est difficile, ce qui nécessite un dialogue intense entre eux et un adulte compétent, capable d'en éclairer les multiples facettes (aussi et surtout en environnement informatique).

L'école est désarmée face aux trop nombreux élèves qui confondent formation et diplôme, école et consumérisme. La formation d'un élève passe par sa forte implication pour comprendre, assimiler, mettre en oeuvre les connaissances. Le baccalauréat est distribué largement à des élèves, surpris de leur succès, incapables d'entreprendre des études supérieures. Les pres-

---

[1] *Ce titre s'inspire du livre, beau et profond, de Jean-Claude Guillebaud « La refondation du monde » qu'on lira avec beaucoup de profit (Seuil 99, ISBN 2-7028-3849-9). Il élargit le propos à la société planétaire.*

[2] *Au fur et à mesure des mises en place de dispositions successives (réductions globales à un niveau donné, alignement de la section scientifique sur l'ancienne section D, etc.), la perte en heures de l'enseignement des mathématiques sur la scolarité d'un bachelier scientifique correspond à l'horaire total de mathématiques d'une année de première scientifique! Et ce n'est pas fini...*

[3] *Pour beaucoup d'élèves, les attitudes face à l'apprentissage et l'ignorance sont telles qu'on ne peut plus parler de soutien. Il faut commencer à poser les bases. S'ils sont consentants et prêts à en payer le prix élevé. Il aurait fallu s'y atteler, bien plus tôt, au lieu de les faire glisser, à l'ancienneté, de classe en classe.*

[4] *Que dénonçait à juste titre Claude Allègre.*

sions des associations de parents, leurs exigences de « réussite » à bon marché ne sont pas étrangères à ces succès au goût amer.

Il est temps de refonder le système éducatif. Convaincre les élèves (et leurs parents) que **sans leur ferme volonté** de se former, rien n'est possible : il n'existe ni raccourci, ni technique pour éviter l'important travail personnel sans lequel on n'accède pas à la compétence. Proposer des programmes **plus réduits mais cohérents** permettant d'acquérir l'indispensable capacité d'apprendre par soi-même. **Revenir à des horaires décents** pour qu'un grand nombre d'élèves puisse apprendre autre chose que des recettes vite oubliées, et pour qu'on ne découvre pas, dans quelques années que nos cadres scientifiques n'ont pas les compétences requises[5]. Imaginer **de nouvelles formes d'apprentissage** et introduire sans réticences (mais sans illusion**) les technologies nouvelles.** Enfin, donner **un contenu décent aux « 80% » de succès au baccalauréat.**

Un gigantesque défi à relever pour la société toute entière!

Gérard Kuntz

[5] *L'expérience des systèmes publics d'éducation en Angleterre et aux USA fait réfléchir : après des années de dégradation, il faut un plan de sauvetage coûteux pour tenter, sans garantie de succès, de le remettre à flot.*

SOMMAIRE

N° 97 – DÉCEMBRE 1999

L'OUVERT

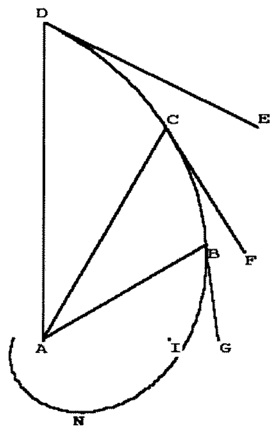
ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03-88-41-64-40
Fax : 03-88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
http ://irma.u-strasbg.fr/irem
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
◇ *Prix du numéro* : 35.– F

LES SPIRALES (2^e partie)

André STOLL

5. La spirale de Descartes

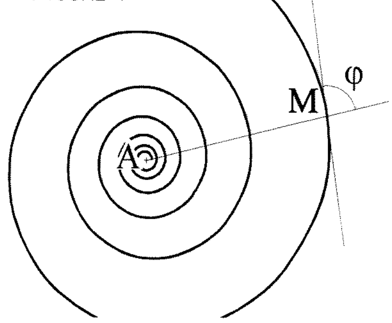


Elle est aussi appelée spirale de Bernoulli, spirale de Gregory, spirale équiangle, spirale proportionnelle, spirale logarithmique, spirale exponentielle ...[1]

1. La spirale de René DESCARTES.

Dans une lettre datant du 12 septembre 1638 et adressée au père Mersenne en réponse à une question de celui-ci, Descartes écrit : *« ...pour cete spirale, elle a plusieurs proprietez qui la rendent assez reconnoissable. Car si A est le centre de la terre & que ANBCD soit la spirale, ayant tiré les lignes droites AB, AC, AD, & semblables, il y a mesme proportion entre la courbe ANB & la droite AB, qu'entre la courbe ANBC & la droite AC ou ANBCD & AD, & ainsi des autres. Et si on tire les tangentes DE, CF, BG etc., les angles ADE, ACF, ABG etc. seront egaux ».*

FIGURE I



Spirale logarithmique d'équation $\varrho(\theta) = e^{\alpha\theta}$ avec α=0,088, soit l'angle $\varphi \approx 85°$.

Il est très remarquable que Descartes connaisse la proportionnalité de l'arc de la spirale à son rayon. C'est d'autant plus remarquable que celui-ci était convaincu qu'il n'était pas possible de rectifier une courbe quelconque.

En langage actuel, la propriété caractéristique que donne Descartes de cette spirale est : $\frac{s}{\varrho} = a$ (*) où s désigne l'abscisse curviligne du point générique M (s est la longueur de l'arc ANBM), ϱ le rayon vecteur (ϱ=AM) et a une constante.

Avec les outils mathématiques dont nous disposons, l'équation (*) s'intègre facilement en : $\varrho = k \cdot e^{\alpha\theta}$ où θ est l'angle polaire, k une constante et $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

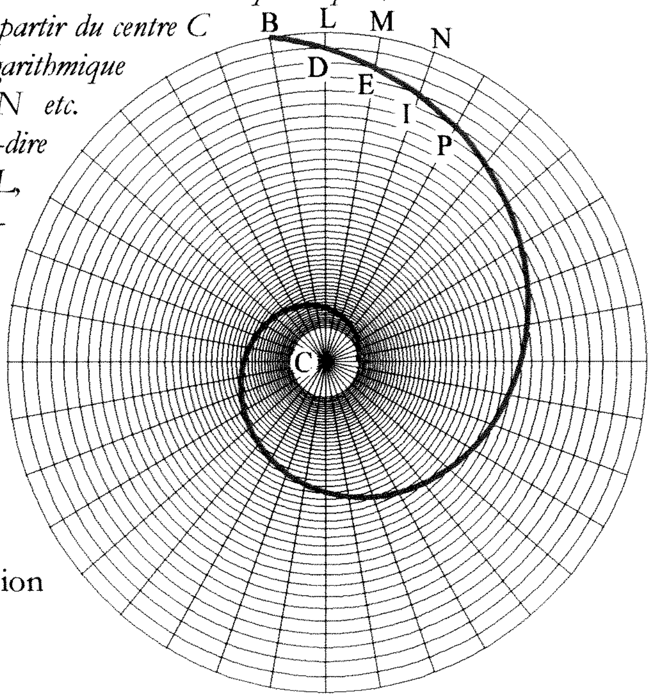
On en déduit facilement que l'angle φ formé par le vecteur $\overrightarrow{AM}$ et la tangente vérifie : $\tan\varphi = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{a^2 - 1}$ soit $\varphi = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right)$ et par suite, cet angle ne dépend pas de M.

---

[1] C'est le mathématicien Pierre VARIGNON (1654-1722) qui dénomma cette spirale « spirale logarithmique », nom sous lequel elle est connue à l'heure actuelle.
J. BERNOULLI l'appela « la spirale admirable » pour ses nombreuses propriétés (voir la conclusion)

2. Une propriété de la spirale logarithmique énoncée par J. BERNOULLI.

« Si sur le plan du cercle BCH se trouve une courbe BDEIPC que coupent, sous un même angle oblique, les rayons CB, CL, etc. menés à partir du centre C du cercle, cette courbe est dite spirale logarithmique puisque si on choisit des arcs LM, MN etc. infiniment petits et égaux c'est-à-dire arithmétiquement proportionnels aux arcs BL, BM, BN, les rayons DC, EC, IC sont géométriquement proportionnels par les triangles semblables DCE, ECI etc. »



Cette propriété de la spirale logarithmique nous permet de la construire géométriquement. (voir la figure ci-contre).

Les angles sont égaux :

$\widehat{BCL} = \widehat{LCM} = \widehat{MCN} = \ldots$

Les côtés sont en progression géométriques :

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE} = \frac{CE}{CI} = \frac{CI}{CP} = \cdots$$

3. La rectification de la spirale logarithmique par Torricelli.

Soit à rectifier l'arc de spirale logarithmique $\widehat{AI}$ de centre O et tel que OA > OI; (voir la figure 2 pour les notations)

Sur cet arc, reportons les points, en nombre pair, B, C, D,E… de telle sorte que :

$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \ldots = \widehat{HOI}$

et sur les segments [OA] et [OB] les points I' et J tels que : OI' = OJ = OI .

Appelant R le point d'intersection des droites (I'J) et (AB), la longueur du segment [AR] est la somme des longueurs des segments [AB], [BC], [CD],…, [HI] :

AR = AB + BC + CD + DE + … + HI .

En effet, reportons alternativement sur les segments [OB] et [OA] les points C', D', E',… tels que :

OC'=OC, OD'=OD, OE'=OE,…,OH'=OH .

Par définition de la spirale logarithmique, les triangles (AOB), (BOC), (COD), (DOE),…,(HOI) sont semblables. En particulier, en écrivant les rapports de similitude de (AOB) et (COD), on a : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD} = \dfrac{OC'}{OD'}$.

Et, par suite, les droites (AB) et (D'C') sont parallèles.

De la même manière, on démontre que les droites (BC'), (D'E'),…,(H'I') sont parallèles ainsi que les droites (AB), (D'C'), (F'E'), …

Appelant P le point d'intersection des droites (I'H') et (AB), on en déduit que :
$I'P = I'H' + \ldots + E'D' + C'B$ et $AP = AB + D'C' + E'F' + \ldots$

Or, les triangles (C'OB) et (COB) sont égaux. D'où $BC = BC'$.
De même, on a : $C'D' = CD$, $D'E' = DE$, …
Et :
$I'P = IH + \ldots + ED + CB$ et $AP = AB + DC + EF + \ldots$

Enfin, le triangle (RPI') est isocèle car :

(*) $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OBC'} = \widehat{OH'I'}$

(**)le triangle (OJI') est isocèle donc $\widehat{OI'J} = \widehat{OJI'}$ et aussi : $\widehat{H'JI'} = \widehat{JI'A}$

(*) et (**) impliquent que les deux triangles (H'JI') et (AI'R) sont semblables et par suite, l'égalité des angles $\widehat{RI'P} = \widehat{PRI'}$ et des longueurs $I'P = PR$. Finalement :
$AR = AP + PR = AB + BC + CD + DE + \ldots + HI$.
Si à présent on augmente indéfiniment le nombre de points sur l'arc $\widehat{AI}$, la droite (AB) devient la tangente à la spirale en A et la droite (I'J) la perpendiculaire à (OA) en I'.

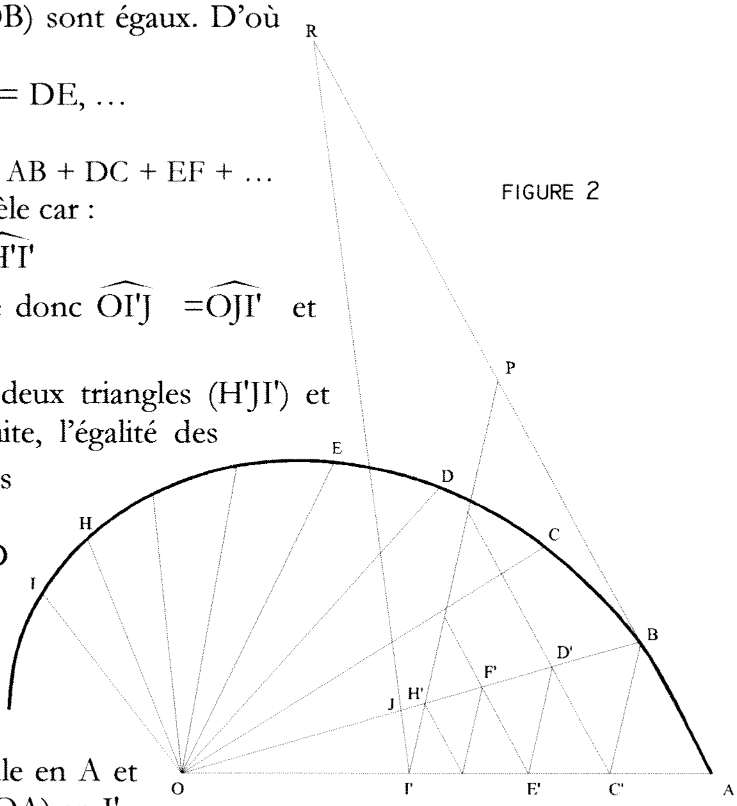
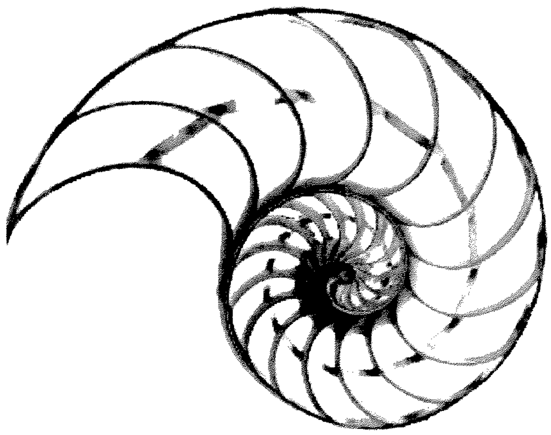


FIGURE 2

<u>Théorème</u> : la longueur de l'arc de spirale logarithmique $\widehat{AI}$ est égale à la longueur du segment [AR] de la tangente à la spirale en A où R est le point d'intersection de la tangente avec la perpendiculaire à (OA) en I' tel que OI' = OI.

4. Une spirale logarithmique dans la nature : le nautile.



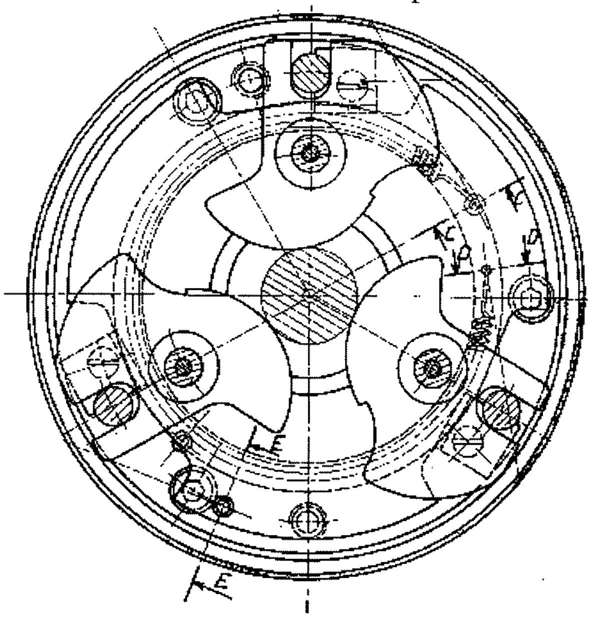
Petit nautile deviendra grand : Quand la chambre qu'il occupe est trop petite, le nautile en secrète une nouvelle qu'il sépare de la précédente par une cloison. Sa coquille qui est symétrique par rapport à son plan médian, dessine une spirale logarithmique parfaite.

EXERCICE I :

Reproduisez la coquille ci-contre en l'agrandissant ou en la réduisant (dans le rapport k); moyennant une rotation (d'angle ψ), cette reproduction se superposera avec l'original. Trouvez une relation entre k et ψ.

5. Une spirale logarithmique en mécanique : une roue libre.

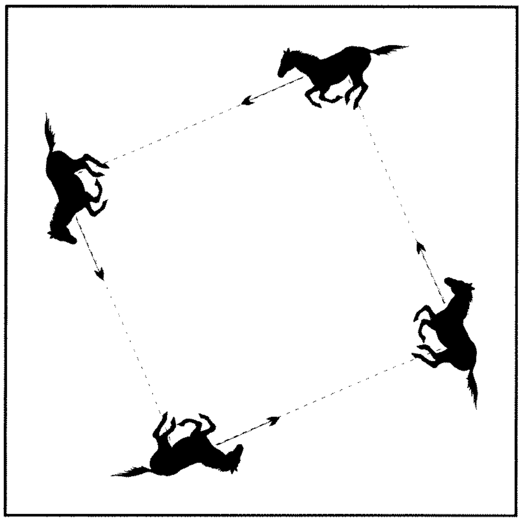
Une roue libre est un accouplement directionnel qui peut transmettre un moment par friction dans une direction en autorisant une marche à vide dans l'autre direction.



Le principe de la roue libre ci-contre est le suivant : lorsque l'axe central (hachuré sur la figure) tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, il entraîne les trois galets qui basculent. La courbure de ces galets est en forme de spirale logarithmique : le rayon augmente, l'angle de contact avec l'axe reste identique.

6. Un problème :

Galopin, Trotine, Marco et Plubelle sont quatre chevaux disposés, dans cet ordre, aux quatre sommets d'un carré de 1 kilomètre de côté.



Les chevaux courent tous les quatre à la même vitesse constante v=54 km/h.

Galopin est attiré par Trotine, Trotine par Marco, Marco par Plubelle et Plubelle par Galopin.

À chaque instant, chacun se dirige vers son (ou sa) préféré(e).

Le but du problème est de trouver les trajectoires des quatre chevaux et de calculer la distance parcourue par un des chevaux à la fin de la course.

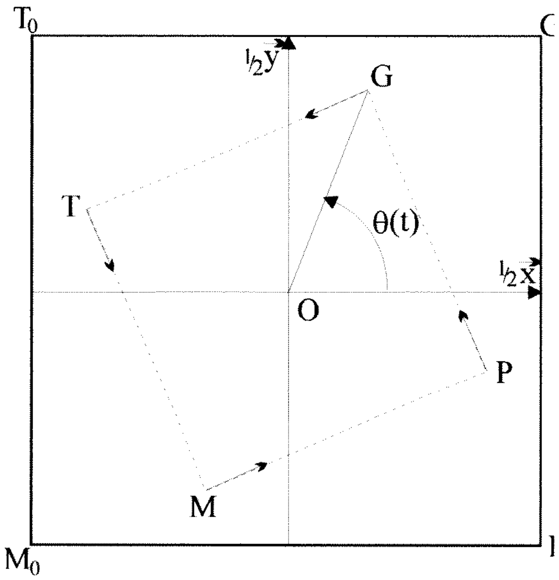
Celle-ci s'arrêtant lorsque la distance séparant deux chevaux est inférieure à deux mètres.

<u>Remarque préliminaire :</u> Pour des raisons de symétries, il suffit de trouver l'une des quatre trajectoires. Les autres s'en déduisent par des rotations de centre O, le centre du carré initial, et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

<u>Choix d'un repère :</u> le point O s'impose naturellement comme origine. Comme axe des abscisses, nous pouvons, par exemple, prendre un axe perpendiculaire à un des côtés du carré

Désignons, pour simplifier les notations, par G, T, M et P les quatre chevaux et posons $\varrho(t)$la distance OG et $\theta(t)$l'angle orienté $\left(\vec{x},\overrightarrow{OG}\right)$ à l'instant t.
Quelle est en fonction de t et sous forme trigonométrique, l'affixe z du point G ?
Montrer que l'affixe z_T de T est iz.
Calculer la dérivée $\dot{z}(t) = \dfrac{dz}{dt}$.

Par définition, $\dot{z}(t)$ est l'affixe du vecteur vitesse de G dans le repère
$R = (O\,;\vec{x}\,;\vec{y}\,)$.



Expliquer pourquoi la phrase : « À chaque instant t, G se dirige vers T » peut se traduire par : « il existe une fonction k(t), à <u>valeurs réelles</u>, telle que :

$$\dot{z}(t) = k(t)\,[z_T(t) - z(t)] \; (*1) \text{ »}.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires dans (*1), montrer que : $\dot{\varrho}(t) = -k(t)\varrho(t)$ (*2) et

$$\varrho\dot{\theta}(t) = k(t)\,\varrho(t) \quad (*3).$$

En déduire : $\dot{\varrho}(t) = -\,\varrho(t)\dot{\theta}(t)$ (*4)

ou encore $\dfrac{\dot{\varrho}}{\varrho} = -\,\dot{\theta}$ (*4a).

Intégrer l'équation différentielle (*4a). Calculer $\varrho(0)$ et $\theta(0)$.
En déduire que l'équation de la trajection du cheval Galopin est :

$$\varrho = \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \quad (*5)$$

Représenter graphiquement cette trajectoire pour $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, 2\pi\right]$.

L'expression (*5) exprime le module ϱ en fonction de l'argument θ. Dans cette question, nous cherchons à exprimer ϱ et θ en fonction du temps t.

Calculer le module de $\dot{z}(t)$et en déduire : $[\dot{\varrho}(t)]^2 + \varrho(t)\dot{\theta}(t) = v^2$.

À l'aide de (*4) et (*5), montrer que la fonction ϱ est solution de l'équation différentielle : $e^{-\theta}\,\dot{\theta} = e^{-\frac{\pi}{4}}\,v$(*6).
Intégrer cette équation différentielle et en déduire :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} - \ln(1-vt) \quad \text{et} \quad \varrho(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-vt) \quad (*7)$$

Exprimer en fonction de t, le module de $z_T(t) - z(t)$. Que représente ce nombre ?
En déduire à quel instant cesse la course et la distance parcourue par chaque cheval.

7. Bref retour à la spirale sans début ni fin de Albrecht Dürer.

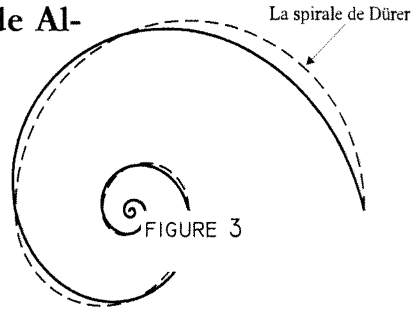


FIGURE 3

Sur la figure 3, nous avons représenté simultanément la spirale de Dürer (voir 4.3.) et une certaine spirale logarithmique – le lecteur se fera un plaisir de trouver l'équation polaire de cette spirale –.

6. La spirale hyperbolique.

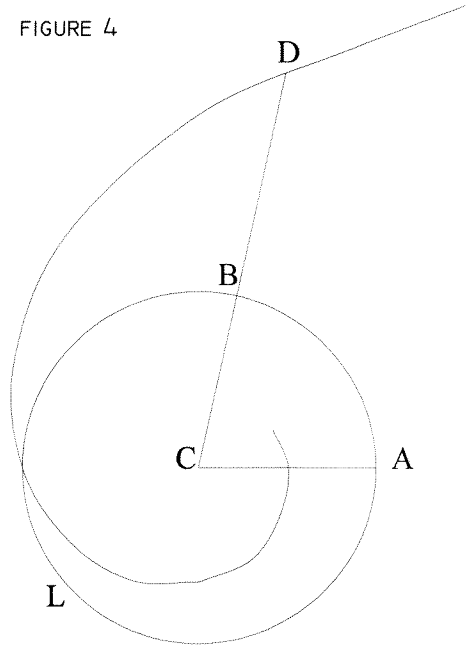
1. Jean Bernoulli et le problème des forces centrales.

1 De quel problème s'agit-il précisément ?

Rappelons, pour commencer, qu'on dit qu'un corps mobile M est soumis à une force centrale lorsque à chaque instant la force qui s'applique au point M et qui donne naissance au mouvement du point M est dirigée vers un point fixe O de l'espace. Cette propriété peut aussi se traduire par :

l'accélération du point M est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

FIGURE 4



Le problème des forces centrales consiste à trouver de quelle manière un mobile M doit décrire une courbe (C) donnée de telle sorte que l'accélération du point M soit, à chaque instant, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Dans le problème inverse, la force centrale est donnée et il s'agit de trouver la courbe décrite par le corps soumis à cette force.

L'origine de ce problème est la détermination de la trajectoire des planètes. En effet, le point fixe est le soleil, le corps mobile est une planète et la force centrale est inversement proportionnelle au carré de la distance de cette planète au soleil. Bien entendu, cette force est dirigée à chaque instant vers le soleil. Nous savons que dans ce cas la trajectoire est une ellipse.

J. Bernoulli, pour montrer l'efficacité des nouvelles méthodes de calcul inventées par Leibniz, généralise le problème au cas des forces centrales inversement proportionnelles au cube de la distance du point M au point O.

Dans une lettre datée du 28 octobre 1710 et adressée à Pierre VARIGNON, Jean BERNOULLI écrit : *« [mes] lettres contenant mes solutions du probleme inverse des forces, dont il ne paroit encore aucune solution dans le public. Mr Newton luy même suppose bien que, comme une section conique fait les forces centrales vers le foyer en raison reciproque des quarrés des distances, ainsi toute courbe où les forces centrales se trouvent dans cette raison, sera une section conique [...] car de même que de ce que dans la spirale logarithmique, les forces centrales vers le centre de la spirale sont en raison reciproque des cubes des distances, il ne s'en suit pas que toute courbe où cette* *loy des forces se trouve soit une spirale logarithmique, pouvant y avoir d'autres courbes et même d'algebraiques qui ont la même loy des forces... »*

Ultérieurement, s'étant rendu compte qu'il avait « oublié » une solution, il écrit à nouveau à Pierre VARIGNON (lettre du 10 janvier 1711) : *« ... un corps pour se mouvoir dans une spirale logarithmique requiert les forces centrales, en raison réciproque des cubes des distances, il ne s'en suit pas que cette loy des forces etant supposée, la courbe trajectoire sera de necessité une spirale logarithmique, vu qu'une autre spirale d'une nature toute differente, repond aussy à la même loy des forces; c'est la spirale que l'on peut appeller hyperbolique, dont voici la construction : Du centre C d'un cercle ABL, soit tiré par quelque point de la circonference B la droite CBD, en sorte que le rectangle entre la droite CD et l'arc AB commençant d'un point fixe A, soit toujours constant, le point D sera dans la spirale Hyperbolique DEF, la quelle a cela de commun avec la spirale logarith. que l'une et l'autre repond à la raison reciproque des cubes des distances pour les forces centrales... »*

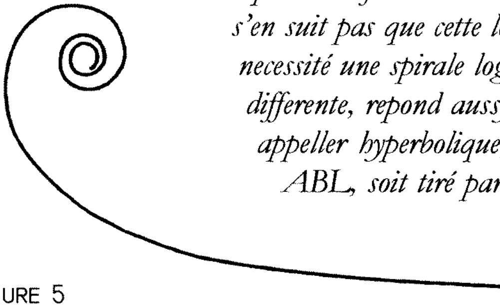


FIGURE 5

Ainsi, Jean Bernoulli est amené à introduire une courbe qu'il appelle « spirale hyperbolique ». Il la définit par la relation : $CD \times \widehat{AB} = \lambda$ (*) où λ est une constante.[2]

Actuellement, nous traduisons la relation (*) par $\varrho = \frac{\lambda}{r} \times \frac{1}{\theta}$ où θ désigne l'angle polaire $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right)$ et ϱ la distance CD.

2 Recherche de la trajectoire lorsque la force centrale est inversement proportionnelle au cube de la distance.

On démontre dans un premier temps que la trajectoire d'un point M soumis à une force centrale est nécessairement plane.

Désignons par $\overrightarrow{V}$ le vecteur vitesse de M et $\overrightarrow{a}$ son accélération :

$$\overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \text{ et } \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt}.$$

Posons $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}$.

Par dérivation, on trouve : $\frac{d\overrightarrow{\Gamma}}{dt} = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

En effet, comme la force centrale est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, il en est de même de l'accélération .

[2] Remarquons que Pierre Varignon avait déjà étudié cette courbe dans un mémoire publié en 1704. Toutefois, J. Bernoulli est probablement le premier à utiliser la loi des aires pour définir et construire la spirale hyperbolique.

En effet, comme la force centrale est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, il en est de même de l'accélération .

Par conséquent, $\overrightarrow{\Gamma}$ est constant.

Le cas où $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{0}$ est laissé au lecteur et nous supposerons par la suite que $\overrightarrow{\Gamma} \neq \overrightarrow{0}$.

Il est clair que dans ce cas la trajectoire du point M est incluse dans le plan (P) passant par O et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\Gamma}$. De plus, le point O n'appartient pas à la trajectoire.

Soit $R = (O\,;\vec{x}\,;\vec{y}\,;\vec{z}\,)$ un repère orthonormé direct tel que $R_1 = (O\,;\vec{x}\,;\vec{y}\,)$ soit un repère du plan (P) ;

Posons $\varrho = OM$, $\theta = \left(\vec{x},\overrightarrow{OM}\right)$et $z(t) = \varrho\, e^{i\theta}$ l'affixe du point M à l'instant t
En dérivant, nous obtenons :

(la notation $\dot{\varrho}$désigne la dérivée de ϱ par rapport à la variable t)

$$\dot{z}(t) = \left(\dot{\varrho} + i\varrho\dot{\theta}\right) e^{i\theta}$$

Et, en dérivant une deuxième fois :

$$\ddot{z}(t) = \left(\left(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\theta}^2\right) + \left(2\dot{\varrho}\,\dot{\theta} + \varrho\,\ddot{\theta}\right)\right) e^{i\theta}$$

Par suite :

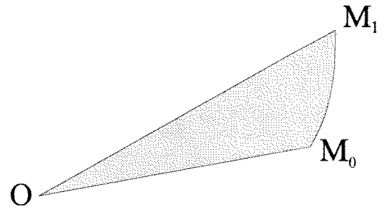
$$\left(2\dot{\varrho}\,\dot{\theta} + \varrho\,\ddot{\theta}\right) = 0$$

Comme $\varrho \neq 0$, on peut multiplier cette égalité par ρ. On reconnaît alors la dérivée de $\varrho^2\dot{\theta}$.

Par conséquent : $\varrho^2\dot{\theta} = \alpha$ où α est une constante (*).

Ce résultat, connu sous « la loi des aires » exprime le fait que l'aire balayée par le rayon vecteur OM est proportionnelle à t (voir la figure ci-contre) :

$$\textbf{aire}(OM_0M_1) = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \varrho^2 d\theta = \frac{\alpha}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt = \frac{\alpha}{2}(t_1 - t_0)$$



Supposons à présent que la force centrale soit inversement proportionnelle au cube de la distance OM.

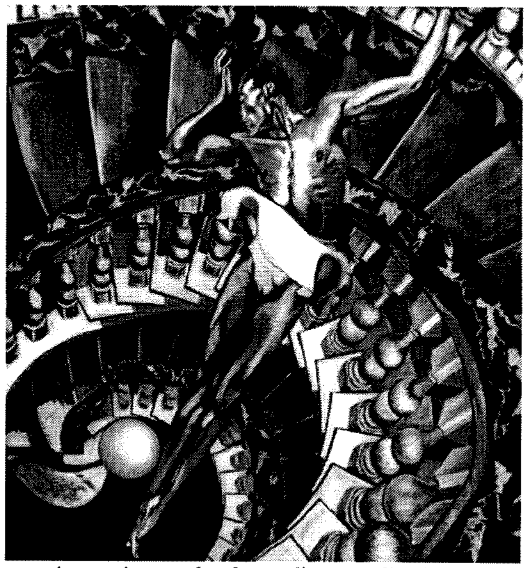
Dans ces conditions :$\left(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\theta}^2\right) = \dfrac{\lambda}{\varrho^3}$ où λ est une constante (**)

Pour intégrer le système d'équations différentielles (*) et (**), on pose $r = \dfrac{1}{\varrho}$ (c'est possible car $\varrho \neq 0$) et on cherche r en fonction de θ.

L'équation (**) devient :

$$r'' + \frac{\lambda+\alpha^2}{\alpha^2}\, r = 0$$

Suivant les valeurs de $\frac{\lambda+\alpha^2}{\alpha^2}$, on obtient une spirale logarithmique, une spirale hyperbolique qui correspond à $\frac{\lambda+\alpha^2}{\alpha^2} = 0$ (c'est le cas que J. Bernoulli avait oublié dans un premier temps) ou d'autres courbes que le lecteur se fera un plaisir de découvrir tout seul.



La représentation ou la photo d'un escalier hélicoïdal est une spirale hyperbolique. (tableau de Bernard Sanna dit « Ben », professeur au lycée Louis Couffignal de Strasbourg)

2. Trois autres situations où l'on rencontre une spirale hyperbolique.

1 La projection stéréographique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une spirale hyperbolique (voir photo ci-contre).

2 L'image d'une spirale d'Archimède par inversion est une spirale hyperbolique.

3 Sur un stade d'athlétisme, au départ d'une course de 200 m ou de 400 m, les coureurs sont disposés suivant une spirale hyperbolique.

7. La développante du cercle et la spirale de Norwich

1. La développante du cercle.

Cette courbe s'obtient très simplement de la manière suivante : prendre une bobine de fil, attacher un crayon au bout du fil, fixer solidement la bobine sur le plan de travail, dérouler le fil en prenant soin de laisser tendu. Le crayon marquera une superbe spirale que l'on appelle habituellement « développante du cercle »

Léonard de VINCI préconisa de donner cette forme aux dents des engrenages.

2. Équation de la développante du cercle.

Prenons l'unité comme rayon du cercle (c'est à dire de la bobine) et un repère orthonormé d'origine le centre du cercle. P un point quelconque du cercle d'affixe est : $z_P = e^{i\varphi}$ (voir figure 6). Sur la tangente au cercle, on prend le point M de telle sorte que la longueur PM soit égale à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{PA}$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{PM}$ est : $z_{\overrightarrow{PM}} = -i\,\varphi\, e^{i\varphi}$.

On en déduit l'affixe du point M : $z_M = z_P + z_{\overrightarrow{PM}} = e^{i\varphi} - i\,\varphi\, e^{i\varphi} = (1-i\varphi)e^{i\varphi}$.

En coordonnées polaires, la développante du cercle a pour équations :

$$\begin{cases} \varrho(\varphi) = |z_M| = \sqrt{1+\varphi^2} \\ \theta(\varphi) = \arg(z_M) = \varphi - \mathrm{Arctan}(\varphi) \end{cases}$$

3. Rectification de la développante du cercle.

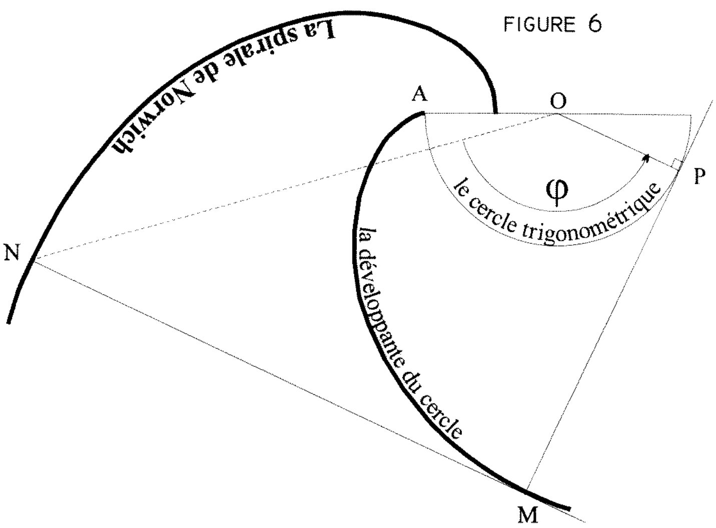
Il est aisé de calculer la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ de cette développante.

En effet :

$z_M' = -i\ e^{i\varphi} + (1-i\varphi)i\ e^{i\varphi} = \varphi\ e^{i\varphi}$

D'où : $|z_M'| = \varphi$ et

$$\widehat{AM} = \int_0^\varphi \varphi d\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2 .$$



4. La développante de la développante du cercle : la spirale de Norwich.

Enroulons à présent notre fil sur la développante du cercle. En le déroulant (prendre soin de laisser tendu), nous obtenons une nouvelle spirale appelée « **spirale de Norwich** ». Celle-ci doit son nom au mathématicien anglais J.J. SYLVESTER qui l'a dénommée ainsi suite à un meeting qui eut lieu en 1868 dans la ville de Norwich.

Une propriété remarquable de cette spirale : en tout point de cette spirale, le rayon vecteur est égal au rayon de courbure. Sur le dessin ci-dessus, cette propriété se traduit par : NO = NM.

5. Équation de la spirale de Norwich.

Soit N le point de la tangente en M à la développante qui vérifie :

$$MN = \frac{1}{2} + \widehat{AM} = \frac{1}{2}(1+\varphi^2) .$$

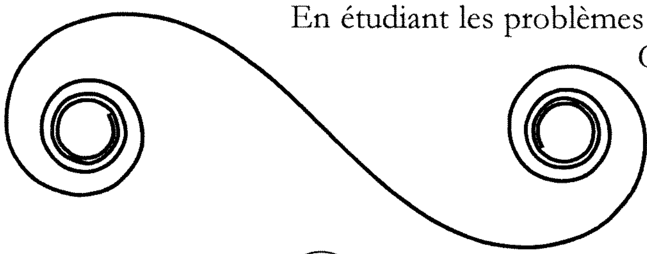
Par un calcul de même type que le calcul ci-dessus, on montre que l'affixe de N est : $z_N = \frac{1}{2}(1+\varphi^2)\ e^{i(\varphi - 2\mathrm{Arctan}\varphi)}$ (*)

Lorsque φ décrit l'ensemble des nombres réels positifs, le point N décrit la spirale de Norwich.

En posant $\varphi = \tan(t)$, on obtient à l'aide de (*) une équation de cette spirale en coordonnées polaires : $\begin{cases} r(t) = \dfrac{1}{2\cos^2(t)} \\ \theta(t) = \tan(t) - 2t \end{cases}$

ou encore : $\boxed{\theta(r) = \sqrt{2r-1} - 2\text{Arccos}\frac{1}{\sqrt{2r}}}$

8. La spirale de CORNU ou clothoïde.



En étudiant les problèmes de la diffraction de la lumière, Alfred CORNU (1841-1902), un physicien français, fut amené à introduire une courbe dont le rayon de courbure en un point quelconque M est inversement proportionnel à l'abscisse curviligne $\overset{\frown}{OM}$.

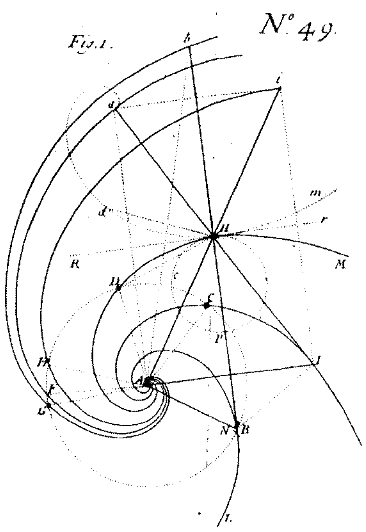
Cette courbe qui est une spirale et qui porte désormais son nom a pour équations, en coordonnées paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(u^2)du \\ y(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(u^2)\, du \end{cases}$$

Cette courbe est utilisée actuellement dans les travaux publics – dessin des bretelles de raccordement d'autoroutes par exemple – ; elle permet de négocier les virages à vitesse constante en tournant le volant à vitesse constante.

Conclusion

Pour finir, je ne peux résister au plaisir de donner la conclusion du chapitre XLIX que Jacques Bernoulli consacre à la spirale logarithmique dans son ouvrage « Acta eruditorum » .



Après avoir montré de nombreuses propriétés de cette courbe – qu'il appelle « la spirale admirable » —, J. Bernoulli conclut de la manière suivante :

Puisqu'en effet cette spirale engendre une spirale toujours semblable à elle-même, quelle que soit la façon dont elle s'enroule, se déroule, rayonne; elle pourrait aussi bien être pour tous un emblème semblable aux descendants des parents; La Fille Très Semblable à la Mère. Ou bien (s'il est permis d'appliquer cette chose aux mystères de l'éternelle Vérité de la Foi) elle est comme une esquisse quelconque de l'éternelle Génération du Fils, semblable à l'image du Père, et de ce fait comme la Lumière issue de la Lumière et identique à elle. Ou bien si vous préférez, parce que notre courbe admirable dans sa révolution demeure toujours semblable à elle-même, de façon très constante et en rapport, elle pourrait être le symbole du courage et de la constance dans l'adversité ; et même le symbole de la résurrection de notre chair après de multiples altérations, la *même pourtant après la mort. D'ailleurs si l'usage s'était maintenu de nos jours d'imiter ARCHIMÈDE, j'ordonnerai volontiers que fût gravée sur ma tombe cette spirale avec l'épigraphe :* « Eadem numero mutata sesurgo » *c'est-à-dire : « Elle ressuscitera identique à elle-même ».*

9. Annexes : corrigé de quelques exercices

ANNEXE 1 : CORRIGÉ DE L' EXERCICE 2

Voici un programme de construction de la spirale de Théodore à l'aide du logiciel de calcul formel « Maple » (il faudra bien sûr donner une valeur à n)

```
> restart:Digits:=15:A[n]:=[x(n),y(n)]:
> calculpoints:=proc(n)
> global A,S,z; local k;
> A[0]:=[0,0];A[1]:=[1,0]; z:=1.0;
> for k from 2 to n do z:=z+I*z/abs(z);A[k]:=[Re(z),Im(z)] od;
> S:=[seq(A[k] , k=0..n)];end:
> n:=   ;
> calculpoints(n):
>plot(S,scaling=constrained,color=black,axes=none);
```

ANNEXE 2 : CORRIGÉ DE L' EXERCICE 3

```
> Transformation: z->z(1+i/abs(z));
> restart:with(plots):
> Theo:=proc(x,y)
> evalhf(x-y/sqrt(x^2+y^2)),evalhf(y+x/sqrt(x^2+y^2));
> end:
> x:=t->evalhf(1+2*t*(1-t)):
> y:=t->evalhf(t):
> n:=17:
> c[0]:=[seq([x(i/100),y(i/100)],i=0..100)]:
> for k from 1 to n do c[k]:=[seq([Theo(op(c[k-1][i]))],i=1..101)]: od:
> display({plot(c[0],color=red),seq(plot(c[i],color=blue),i=1..n)},
> scaling=constrained);
```

ANNEXE 3 : RECHERCHE D'UNE COURBE "RÉGULIÈRE" PASSANT PAR TOUS LES POINTS DE LA SPIRALE DE THÉODORE[3]

Les notations sont les mêmes que dans l'exercice 1.

Pour n, nombre entier naturel, on a : $\varrho(n) = OA_n = \sqrt{n}$

$$\text{et} \begin{cases} \theta(n) = \arg(z_n) = \sum\limits_{p=1}^{n-1} \text{Arctan}\dfrac{1}{\sqrt{p}} \quad \text{si } n \geq 2 \\ \theta(1) = 0 \end{cases}$$

Le problème consiste donc à prolonger à l'intervalle $[1, +\infty[$ les fonctions ϱ et θ.

La fonction ϱ se prolonge naturellement en : $x \in [1, +\infty[\quad \varrho(x) = \sqrt{x}$.

Quant à θ, remarquons que : $\theta(n+1) - \theta(n) = \text{Arctan}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

[3] Je remercie mon collègue Philippe AUSCHER qui m'a aidé à élaborer cette solution.

Si on veut généraliser cette relation, il nous faut résoudre l'équation fonctionnelle suivante : $\theta(x+1) - \theta(x) = \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{x}}$ si $x \in [1, +\infty[$ et $\theta(1) = 0$.

Soit f une solution quelconque de $\theta(x+1) - \theta(x) = 0$ vérifiant $f(1) = 0$ (f est une fonction 1-périodique) et g une solution particulière de (E), il est aisé de vérifier que $\theta = f + g$ est solution de (E) – Remarquons d'ailleurs que toute solution de (E) est de cette forme –.

Il suffit donc de trouver UNE solution de l'équation (E). Posons $h(x) = \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{x}}$ et dérivons :
$$g'(x+1) - g'(x) = h'(x)$$
En remplaçant x par x+p, nous obtenons :
$$g'(x+p+1) - g'(x+p) = h'(x+p)$$
En sommant de p=0 à n :
$$g'(x+n+1) - g'(x) = \sum_{p=0}^{n} h'(x+p) \quad (*)$$

Or $h'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$ et la série de terme général $h'(x+p)$ est convergente ; en effet, pour x fixé et p au voisinage de $+\infty$, $h'(x+p)$ est équivalent à $-2p^{-\frac{3}{2}}$.

Faisons tendre n vers $+\infty$ dans (*) et prenons la solution g de (E) qui vérifie $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, pour en déduire que : $g'(x) = -\sum_{p=0}^{+\infty} h'(x+p)$

Il suffit à présent de remarquer que :
$$g(x) = g(x) - g(1) = \int_1^x g'(t)dt = -\int_1^x \sum_{p=0}^{+\infty} h'(t+p)dt = -\sum_{p=0}^{+\infty}\int_1^x h'(t+p)dt$$

(Le lecteur aura bien sûr pris soin de justifier l'inversion des signes $\sum$ et $\int$)

pour conclure que la fonction $g : x \longrightarrow g(x) = -h(x) + \sum_{p=1}^{+\infty}(h(p)-h(p+x))$ est une solution de l'équation (E).

Conclusion :

En coordonnées polaire une équation de la courbe cherchée est :

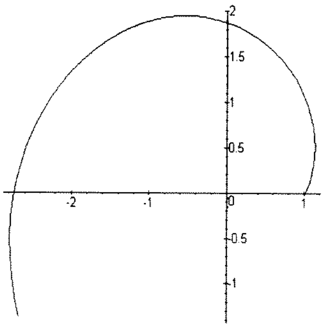
$\theta : \varrho \longrightarrow f(\varrho^2) + g(\varrho^2)$

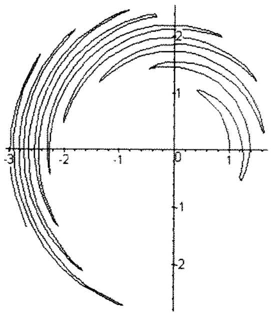
où f est une fonction 1-périodique vérifiant :

$f(1) = 0$ et $g(x) = -h(x) + \sum_{p=1}^{+\infty}(h(p)-h(p+x))$

Remarque : La solution $\varrho \longrightarrow \theta(\varrho) = g(\varrho^2)$ est croissante et dérivable. Est-ce la seule ?

Les figures suivantes sont obtenues en prenant $f(t) = 0$ puis $f(t) = \sin(2\pi t)$.





Annexe 4 : corrigé de l'exercice 4

Posons $f(x) = \mathrm{Arctan}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; il s'agit de calculer $\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k)$ avec une erreur inférieure à 2π. En remarquant que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[\,0\,,+\infty\,[$ on a :

$$\int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leqslant \int_1^{n-1} f(x)dx \quad (1)$$

Appelons F une primitive de f, l'inégalité (1) s'écrit :

$$F(n) - F(1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leqslant F(n-1) - F(0) \quad (2)$$

Le calcul de F ne pose pas de problème :

$$F(x) = (x+1)\,\mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = (x+1)\,[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\sqrt{x}\,] + \sqrt{x}\ .$$

En particulier $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $F(1) = \dfrac{\pi}{2} + 1$.

Par conséquent : $\dfrac{F(n)}{2\pi} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2\pi} \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k) \leqslant \dfrac{F(n-1)}{2\pi} - \dfrac{1}{4}$

Finalement, lorsque $n > 17$, le nombre de tours complets est égal à la partie entière de $\dfrac{F(n-1)}{2\pi} - \dfrac{1}{4}$.

Exemple : $n = 10^9$, le nombre de tours complets est 10 065.

Bibliographie

Brochure APMEP n°65, Fragments d'histoire des mathématiques II, 1987. Les deux articles suivants : — François DE GANDT, Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique : la géométrie des indivisibles en Italie.

— Évelyne BARBIN, Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVII^{e} siècle.

ARCHIMÈDE, (Traduction Charles MUGLER) Tome II, Édition « Les Belles Lettres » 1971.

ARCHIMÈDE, (Traduction P. Ver Eecke), Œuvres complètes 2 vol, Paris, 1961.

Albrecht DURER, (Traduction Jeanne PEIFFER)Géométrie Éditions du Seuil 1995.

Blaise PASCAL, Œuvres Complètes , Bibliothèque de la Pléade , Éditions Gallimard 1954.

P. J. DAVIS, Spirals from Theodorus to chaos, Éditions A. K PETERS Wellesley, Massachusetts 1993.

Brochure IREM de Strasbourg, Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique, 1996.

Dr Gino LORIA, Spezielle algebraische und transscendente Ebene Kurven., LEIPZIG 1902.

René DESCARTES , Œuvres de René DESCARTES, Tome 2 , Éditions Vrin 1996.

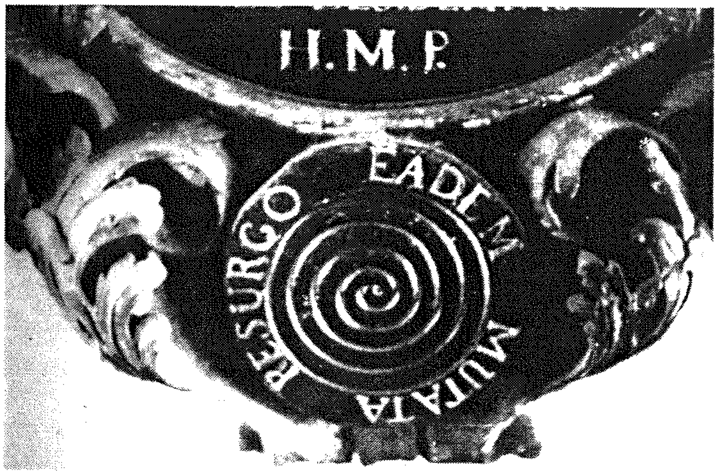
Jacob BERNOULLI, (Traduit du latin par Marga BUFFARD/André STOLL), Opera, Acta eruditorum, vol XLII et vol XLIX 1692

Bernard BETTINELLI (IREM de Besançon) : Intuition et démonstration chez Archimède in « Repères–IREM » N°2 janvier 1991.

PLATON , Théétète, Tome VIII, Édition « Les Belles Lettres » 1963.

Revue du Palais de la découverte, numéro spécial 45, Courbes mathématiques 1995.

Jean CHEVALIER et Alain GHEERBRANT, Dictionnaire des symboles, Collection Bouquins, Éditions Robert Laffont/Jupiter 1993.



Détail de la pierre tombale de J. Bernoulli à Bâle. Remarquez que, contrairement au souhait de J. Bernoulli, le sculpteur a gravé une spirale d'Archimède et non une spirale admirable.

(photo André Stoll)

FORME NORMALE DE JORDAN D'UNE MATRICE

Raymond SÉROUL
UFR de Mathématiques (Strasbourg)

Un coup d'œil à la littérature laisse la désagréable impression que la théorie de la forme normale de Jordan d'une matrice est un sujet difficile et qu'il n'est pas aisé de trouver explicitement la matrice J ; quant à la matrice de passage, c'est à peine si on ose en rêver ! On sent que les auteurs ont hâte de se débarrasser du sujet...

Vers les années 1980, j'avais découvert avec délices un article de Pittelkow et Runckel (voir [2] ou [4]) qui décrivait un algorithme pour fabriquer J et P (et démontrait du même coup leur existence). Malheureusement, cet algorithme nécessite des notations délicates ; quand on le pratique, les erreurs matérielles sont nombreuses et il faut résoudre beaucoup de systèmes linéaires ; bref, je me verrai mal enseigner cela en DEUG.

Un pas sans doute définitif vient d'être franchi : trois mathématiciens espagnols, Bujosa, Criado et Vega, viennent de publier un algorithme qui *démontre* l'existence de la réduite de Jordan et permet le calcul explicite de J et P en ne faisant appel qu'à des combinaisons linéaires de lignes et de colonnes.

Pour vous donner une idée, « l'algorithme BCV » permet de déduire J et P d'une matrice triangulaire 15×15 en une dizaine de minutes — sans stress ni mal de tête, quand on demande à Maple d'exécuter les combinaisons linéaires.

La simplicité de cet algorithme le met à la portée d'un étudiant de DEUG de première année : quelques rudiments d'algèbre linéaire suffisent. Exit les sous-espaces caractéristiques, les endomorphismes nilpotents et autres !

1. LE DÉCOR

Soit A une matrice $n \times n$ dont nous connaissons les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; nous travaillons dans un corps k assez grand pour contenir à la fois les coefficients de la matrice et ses valeurs propres. Nous désirons trouver une matrice inversible $P \in \mathrm{Gl}(n, k)$ et une matrice de Jordan $J \in M(n, k)$ telles que

$$J = P^{-1}AP.$$

Pour éviter tout malentendu, notons que l'algorithme BCV *n'est pas un algorithme de calcul numérique* (voir [5] pour une discussion intéressante) puisque nous avons besoin de connaître *a priori* les valeurs propres de A. Il s'agit seulement d'un algorithme «scolaire» qui établit l'existence d'une forme normale de Jordan et qui nous offre un moyen très commode de fabriquer de manière industrielle tous les exercices de réduction que nous voudrons.

La stratégie suivie par l'algorithme BCV est la suivante :

- on commence par trigonaliser A, c'est-à-dire par fabriquer une matrice P_1 telle que $T = P_1^{-1}AP_1$ est triangulaire supérieure;
- on déduit de T une matrice P_2 telle que $U = P_2^{-1}TP_2$ est diagonale par blocs triangulaires, chaque bloc ne contenant qu'une seule valeur propre (autrement dit, U correspond à une base des sous-espaces caractéristiques de A);
- on jordanise enfin U en fabriquant une matrice P_3 telle que $J = P_3^{-1}UP_3$.

On passe donc de A à J grâce à la formule

$$J = (P_1P_2P_3)^{-1}A\,(P_1P_2P_3).$$

2. OUTILS THÉORIQUES

Rappelons que manipuler les lignes et les colonnes d'une matrice A revient à pré- ou post-multiplier celle-ci par certaines matrices élémentaires :

$P^{-1}A$	AP
$L_i := L_i - \rho L_j$	$K_j := K_j + \rho K_i$
$L_i := \rho^{-1} L_i$	$K_i := \rho K_i$
$L_i \rightleftarrows L_j$	$K_i \rightleftarrows K_j$

Comme nous allons remplacer A par $P^{-1}AP$, nous avons besoin de manipuler simultanément les lignes et les colonnes; nous noterons :

- $[i, j, \rho]$, où $i \neq j$, les manipulations $K_j := K_j + \rho K_i$ et $L_i := L_i - \rho L_j$;
- $[i, i, \rho]$, les manipulations $K_i := \rho K_i$ et $L_i := \rho^{-1} L_i$ (on suppose $\rho \neq 0$);
- $[i, j]$ les manipulations $K_i \rightleftarrows K_j$ et $L_i \rightleftarrows L_j$.

L'ordre des manipulations ligne et colonne importe peu car celles-ci commutent. Si Θ est l'une des manipulations $[i, j, \rho]$ ou $[i, j]$ précédentes, nous avons donc

$$\Theta(A) = P^{-1}AP$$

où P est une matrice qu'il est inutile d'expliciter.

3. OUTILS MAPLE

Manipuler une matrice à la main est ennuyeux et source d'erreurs multiples. C'est pourquoi nous allons demander à Maple de nous seconder, de manière à nous réserver la partie noble : *comprendre et donner des ordres.*

3.1. Procédure de changement de base

Les manipulations $\Theta = [i, j, \rho]$ ou $\Theta = [i, j]$ étant stockées dans une liste L, la procédure Maple suivante se charge du calcul des matrices P et $P^{-1}AP$. L'argument P est optionnel (voir l'exemple).

```
changebase := proc(A :: matrix, L :: list(list), P :: evaln)
local B, Q;
B := copy(A);
Q := manipcol(diag(1$coldim(B)), L);
if nargs > 2 then P := copy(Q) fi ;
evalm(inverse(Q) &* B &* Q);
end :
```

La procédure *manipcol* déduit $P^{-1}AP$ de A en manipulant les lignes et colonnes.

```
manipcol := proc(A :: matrix, L :: list(list))
local ℓ, M;
M := copy(A);
for ℓ in L do
  if nops(ℓ) = 2 then M := swapcol(M, ℓ[1], ℓ[2])
  elif ℓ[1] = ℓ[2] then M := mulcol(M, ℓ[1], ℓ[3])
  else M := addcol(M, ℓ[1], ℓ[2], ℓ[3])
  fi
od ;
evalm(M)
end :
```

Exemple

Quand nous ne nous intéressons qu'à la seule matrice $B = P^{-1}AP$, nous pouvons omettre l'argument P :

```
A := matrix(4, 4, [0, 2, -2, 2, 4, 0, 2, 4, 0, 6, -2, 2, 2, 0, 6, 2]);
L := [[2, 1, 3], [3, 4], [3, 1, 1], [2, 3], [3, 3, 2], [1, 2]] :
B := changebase(A, L);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & -8 & -6 & 4 \\ 2 & 20 & 12 & -2 \end{bmatrix}.$$

Quand nous avons besoin de la matrice de passage, nous rajoutons un paramètre supplémentaire à la procédure qui se charge alors de placer dans ce paramètre la matrice de passage :

$$B := changebase(A, L, P);\;\; P;$$

Comme précédemment, nous obtenons d'abord la valeur de B puis

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut s'assurer que l'on a bien $B = P^{-1}AP$ en tapant :

$$evalm(\,\&*\;(inverse(P), A, P) - B);$$

L'affichage d'une matrice nulle confirme que les calculs sont corrects.

3.2. Déplacement d'une colonne

Vers la fin de l'algorithme, nous déplacerons les colonnes (et les lignes) à l'aide de transpositions $\Theta = [i, i+1]$. Comme il est agaçant d'avoir à produire de longues listes de transpositions à la main, voici une petite procédure bien commode :

```
movecol := proc(a :: posint, b :: posint)
local i;
if a < b then seq([i, i + 1], i = a..b − 1)
else seq([b + a − i, b + a − i − 1], i = b..a − 1)
fi
end :
```

Exemple

Les instructions $S := movecol(5, 2)$ et $T := movecol(7, 12)$ fabriquent respectivement les suites

$$S := [5, 4], [4, 3], [3, 2]$$
$$T := [7, 8], [8, 9], [9, 10], [10, 11], [11, 12]$$

3.3. Une procédure pour un meilleur environnement de travail

Quand on travaille dans une matrice de dimension élevée, on se rend vite compte que l'on passe beaucoup de temps à compter les numéros de ligne et de colonnes. La procédure suivante, qui borde une matrice avec deux «règles graduées», évite beaucoup de fausses manœuvres.

```
graduation := proc(A :: matrix)
local regleh, reglev;
regleh := vector([seq(i, i = 0..coldim(A))]);
reglev := vector([seq(i, i = 1..coldim(A))]);
stack(regleh, concat(reglev, A));
end :
```

Exemple

La commande *graduation*(A) affiche la matrice (les règles sont grisées) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. PREMIÈRE ÉTAPE : TRIGONALISATION

Nous allons progressivement *trigonaliser* la matrice A en construisant une suite de matrices inversibles $P_1, \dots, P_n$ telles que

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}, \quad P_2^{-1}AP_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

$$P_3^{-1}AP_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \quad \textit{etc.}$$

Les colonnes de la matrice finale T apparaissent dans l'ordre $1, 2, \dots, n$.

4.1. Description de l'algorithme

Posons

$$M_1 = A - \lambda_1 I_n \quad (\lambda_1 \text{ valeur propre}).$$

La matrice M_1 n'étant pas inversible (son déterminant est nul), nous savons qu'il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de M. Pour faire apparaître *automatiquement* cette combinaison linéaire sans résoudre (de manière apparente) un système linéaire, nous parcourons la dernière colonne de M_1 de *haut en bas* (il est essentiel de ne pas se tromper de sens !) :

• Si la dernière colonne de M_1 est nulle, nous avons terminé ; nous amenons la colonne à la place de la première colonne grâce à la manipulation $\Theta = [1, n]$ (il est inutile d'utiliser *movecol* pour cela !).

• Si la dernière colonne de M_1, n'est pas nulle, appelons $m_{i_1,n}$ le premier coefficient non nul rencontré quand on part du haut de la colonne ; appelons ce coefficient le *pivot*. Nous « nettoyons » la ligne

$$L_{i_1} = (m_{i_1,1},\ m_{i_1,2},\ \dots\ , m_{i_1,n})$$

en tuant tous les coefficients qui se trouvent à gauche du pivot grâce à des manipulations de la forme

$$\Theta = \big[n, j, \rho\big], \quad \rho = -\frac{m_{i_1,j}}{m_{i_1,n}}, \quad 1 \le j < n.$$

Remarques

1) Quand on travaille manuellement, on peut remplacer mentalement $\Theta = [n, j, \rho]$ par la seule manipulation colonne

$$\Theta' = \{K_j := K_j + \rho K_n\}.$$

En effet, la restriction de $\Theta = [n, j, \rho]$ à la ligne L_{i_1} est égale à Θ' ; or nous ne nous intéressons qu'à la seule ligne L_{i_1}...

2) Le sens du nettoyage dans la ligne L_{i_1} n'a aucune d'importance.

Une fois la ligne du pivot nettoyée, nous passons à la colonne $n-1$ en travaillant dans la sous-matrice formée par les colonnes $2, \ldots, n$. Nous procédons de même avec les colonnes restantes.

Les colonnes non nulles de la matrice obtenues étant — par construction — linéairement indépendantes, on voit tôt ou tard apparaître une colonne nulle qu'on amène en position 1 grâce à la manipulation $\Theta = [1, j]$.

Exemple

Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

dont les valeurs propres sont $\Lambda = [1, 1, 1, 1, 2, 2]$. L'algorithme démarre

$$M_1 = A - \mathrm{Id} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Le pivot dans la colonne 6 est $m_{1,6} = 1$; nous nettoyons cette ligne à l'aide de la liste $L_1 = [[6, 1, 2], [6, 2, -1], [6, 3, 1], [6, 4, 1], [6, 5, -1]]$ et nous obtenons

$$M_1' = \mathit{changebase}(M_1, L_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 6 & -4 & 4 & 7 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Le pivot dans la colonne 5 est $m_{2,5} = 1$; nous nettoyons cette ligne à l'aide de la liste $L_2 = [[5, 1, 2], [5, 2, -1], [5, 3, 1], [5, 4, -5]]$ et nous obtenons

$$M_1'' = \mathit{changebase}(M_1', L_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 21 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 22 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

• Le pivot dans la colonne 4 est $m_{3,4} = -8$; comme il n'y à rien à nettoyer dans la ligne 3, nous recherchons le pivot $m_{5,3} = 1$ dans la colonne 3 et nous nettoyons la ligne 5 à l'aide de la liste $L_3 = [[3, 2, 1]]$, ce qui nous donne

$$M_1''' = changebase(M_1'', L_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 21 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 22 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nous constatons alors que les colonnes 1 et 2 sont nulles. Comme $\lambda = 1$ est une valeur propre d'ordre 4, nous devons faire encore apparaître deux colonnes nulles dans la sous-matrice obtenue en supprimant les lignes et les colonnes 1,2.

• Le pivot dans la colonne 6 est $m_{3,6} = -1$; nous nettoyons la ligne 3 à l'aide de la liste $L_4 = [[6, 4, -8], [6, 5, 1]]$ et nous voyons apparaître la matrice

$$M_1^{(\mathrm{iv})} = changebase(M_1''', L_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

• Nous échangeons les colonnes 3 et 5, ce qui fait apparaître une nouvelle colonne nulle; la liste $L_5 = [[3, 5], [4, 5]]$ fabrique

$$M_1^{(\mathrm{v})} = changebase(M_1^{(\mathrm{iv})}, L_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous changeons maintenant de valeur propre en considérant la matrice

$$M_2 = A - 2\mathrm{Id}$$

à laquelle nous appliquons d'abord les transformations précédentes, ce qui nous donne

$$M_2' = changebase(M_1^{(\mathrm{iv})}, [op(L_1), \ldots, op(L_5)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On constate alors qu'il suffit d'échanger les colonnes 5 et 6 dans la sous-matrice formée par les éléments d'indice ≥ 5.

En résumé, la liste de manipulations

$$\begin{aligned} L = \big[[6,1,2],[6,2,-1],[6,3,1],[6,4,1],[6,5,-1]\\ [5,1,2],[5,2,-1],[5,3,1],[5,4,-5]\\ [3,2,1]\\ [6,4,-8],[6,5,1]\\ [3,5],[4,5]\\ [5,6]\big] \end{aligned}$$

trigonalise la matrice A en la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

la matrice de passage étant

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Remarque
Ne vous imaginez pas que les calculs se font toujours dans $\mathbb{Z}$ comme dans cet exemple !

4.2. Procédure Maple de trigonalisation

Nous mémorisons les valeurs propres de la matrice dans la liste $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. Le troisième argument P et le quatrième argument L de la procédure *trigonaliser* sont optionnels ; ils permettent d'« espionner » la procédure en recueillant la matrice de passage et les manipulations.

Nous choisissons une valeur propre $\lambda_k \in \Lambda$ (boucle principale(1)) et nous travaillons dans la sous-matrice $M = A - \lambda_k I$ formée par les éléments d'indices $\geq k$ en explorant(2) les colonnes $n, n-1, \dots, k$. La boucle(3) recherche le pivot dans la sous-colonne numéro j ; si celle-ci est nulle(4), nous appliquons la manipulation $\Theta = [k, j]$ puis nous quittons la boucle principale(5) ; dans le cas contraire(6), nous nettoyons la ligne i entre les colonnes k et $j-1$.

trigonaliser := **proc**(A :: *matrix*, Λ :: *list*, P :: *evaln*, L :: *evaln*)
local $B, M, i, j, k, n, \lambda, jj, coef, s$;
n := *coldim*(A) ; B := *copy*(A) ; s := *NULL* ;

```
for k from 1 to nops(Λ) − 1 do # voir texte(1)
  λ := Λ[k];
  M := evalm(B − λ * diag(1$n));
  for j from n to k by −1 do # voir texte(2)
    i := k;
    while i ≤ n and M[i,j] = 0 do i := i + 1 od ; # voir texte(3)
    if i > n then # voir texte(4)
      if k ≠ j then
        s := s, [k,j];
        M := swapcol(M,k,j);
        M := swaprow(M,k,j);
        break ; # voir texte(5)
      fi ;
    else # voir texte(6)
      for jj from k to j − 1 do
        coef := −M[i,jj]/M[i,j];
        if coef = 0 then next fi ;
        s := s, [j,jj,coef];
        M := addcol(M,j,jj,coef);
        M := addrow(M,jj,j,−coef);
      od ;
    fi ;
  od ;
  B := evalm(M + λ * diag(1$n));
od ;
if nargs > 2 then P := manipcol(diag(1$n), [s]) fi ;
if nargs > 3 then L := [s] fi ;
evalm(B);
end :
```

Exemple

Sachant que $1, 1, 1, 1, 2$ sont les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

la commande $T := trigonaliser(A, [1,1,1,1,2], P))$ fabrique

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. BLOCS INDÉPENDANTS

Pour l'algorithme de trigonalisation, il n'est pas nécessaire que les valeurs propres égales soient consécutives dans la liste Λ. *Mais, pour aller plus loin, nous supposerons désormais que cette contrainte est respectée.*

Nous pouvons améliorer la trigonalisation précédente en rendant « indépendants » les blocs correspondants à des valeurs propres distinctes ; de manière plus précise, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes de A, nous recherchons maintenant une matrice triangulaire de la forme

$$U = P^{-1}TP = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_k \end{bmatrix}$$

où U_i est une matrice triangulaire ayant la seule valeur propre λ_i de dimension égale à l'ordre de multiplicité de λ_i. (D'un point de vue théorique, il s'agit de trouver une base des sous-espaces caractéristiques.)

5.1. Description de l'algorithme

Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres de T et supposons que $t_{i,i} = \lambda$ et $t_{j,j} = \mu$ avec $i < j$:

$$U = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda & \ldots & a_{i,j} & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & \mu & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

L'hypothèse $i < j$ montre que l'on peut tuer le coefficient $a_{i,j}$ grâce à la manipulation

$$\Theta = [i, j, \rho], \quad \rho = \frac{a_{i,j}}{\mu - \lambda}.$$

Cette manipulation modifie la colonne K_j et la ligne L_i. Il en résulte que, pour ne pas abîmer les zéros qui remplacent les coefficients que nous détruisons, il est indispensable de parcourir les lignes *de bas en haut* et de se déplacer sur une ligne de *gauche à droite* :

$$\begin{array}{ccccccccc} \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet \\ & & & & & & & & \uparrow \\ \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet \\ & & & & & & & & \uparrow \\ \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet \end{array}$$

Exemple

Il s'agit de se débarrasser du bloc encadré de la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La ligne la plus basse à nettoyer est la ligne 6; nous tuons $t_{6,7} = 1$, $t_{6,8} = -1$ et $t_{6,9} = 3$ *dans cet ordre* à l'aide des manipulations $[6,7,1], [6,8,-3], [6,9,-1]$. Cela fait, nous remontons pour nettoyer la ligne 5 entre les colonnes 7 à 9, *etc.* La liste complète des manipulations est :

$$\begin{aligned} K := \big[&[6,7,1],[6,8,-3],[6,9,-1] \\ &[5,7,1],[5,8,-2],[5,9,-1] \\ &[4,5,1],[4,6,1],[4,7,3],[4,8,-\tfrac{9}{2}],[4,9,-\tfrac{23}{4}] \\ &[3,7,-\tfrac{3}{2}],[3,8,\tfrac{9}{4}],[3,9,\tfrac{17}{4}] \\ &[2,5,3],[2,6,4],[2,7,\tfrac{29}{4}],[2,8,-\tfrac{105}{8}],[2,9,-\tfrac{289}{16}] \\ &[1,5,6],[1,6,5],[1,7,\tfrac{41}{8}],[1,8,-\tfrac{215}{16}],[1,9,-\tfrac{341}{16}]\big] \end{aligned}$$

et la nouvelle matrice $U = \mathit{changebase}(T, K)$ est égale à

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matrice de passage et les manipulations s'obtiennent comme d'habitude.

5.2. La procédure blocs_independants

Là encore, la traduction en code Maple de cet algorithme ne présente pas de difficulté particulière. Le second argument P et le troisième argument L sont optionnels.

```
blocs_independants := proc(A :: matrix, P :: evaln, L :: evaln)
local B, coef, i, j, k, n, s;
n := coldim(A); B := copy(A); s := NULL;
for k from 1 to n - 1 do
```

```
  for i from 1 to n - k do
    j := i + k;
    if B[i,i] = B[j,j] or B[i,j] = 0 then next fi ;
    coef := -B[i,j]/(B[i,i] - B[j,j]) :
    B := addcol(B,i,j,coef); B := addrow(B,j,i,-coef);
    s := s, [i,j,coef];
  od ;
od ;
if nargs > 1 then P := manipcol(diag(1$n), [s]) fi ;
if nargs > 2 then L := [s] fi ;
evalm(B);
end :
```

Ne pas oublier : cette procédure ne fonctionne correctement que si A est déjà triangulaire avec des valeurs propres égales consécutives.

Exemple

Considérons la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La commande $U := blocs\_independants(T, P)$ fournit la matrice

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & -32 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. FORME NORMALE DE JORDAN

6.1. Cas d'une seule valeur propre

Soit M une matrice triangulaire supérieure ayant la seule valeur propre λ et dont les $(n-1)$ première colonnes forment déjà une matrice de Jordan ; en revanche, nous ne faisons aucune hypothèse sur la dernière colonne que nous allons manipuler.

Les dernières lignes de blocs de Jordan de M jouent un rôle spécial : si la dernière ligne d'un bloc a pour numéro i, nous dirons que ce bloc est le *bloc de Jordan associé* à l'élément $m_{i,n}$ de la dernière colonne. Dans l'exemple qui suit, il y a trois blocs de Jordan ; les éléments associés (dans la dernière colonne) sont $m_{3,10} = a$, $m_{7,10} = x$ et $m_{9,10} = u$.

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow m_{3,10} \\ \\ \\ \\ \leftarrow m_{7,10} \\ \\ \leftarrow m_{9,10} \\ \\ \end{array}$$

Pour transformer M en une matrice de Jordan, nous allons modifier la dernière colonne en annulant tous ses coefficients sauf un au plus. Les manipulations qui suivent ne concernent donc que les $m_{i,n}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ (le dernier coefficient, qui est la valeur propre, n'est pas concerné). Le processus comprend quatre étapes.

Première étape. — Nous annulons tous les coefficients de la dernière colonne qui se trouvent «en face» d'un '1' grâce à des manipulations de la forme

$$\Theta = [j, n, \rho], \qquad \rho = -m_{i,n}.$$

Quand on travaille à la main, on trouve facilement le coefficient ρ en s'imaginant qu'on utilise la seule manipulation $K_n := K_n + \rho K_j$. Signalons une erreur fréquente à ne pas commettre : si $\lambda = 1$ est une valeur propre, n'essayez pas de vous servir de λ comme pivot... Les '1' qui nous intéressent sont *au-dessus* de la diagonale.

Deuxième étape. — Nous *normalisons* (ce qui signifie que nous remplaçons par des '1') chaque coefficient non nul de la dernière colonne (après la première étape, chacun de ces coefficients est associé à un bloc de Jordan). Si $m = m_{i,n}$ est le coefficient à normaliser, on applique les manipulations

$$\Theta = [\ell, \ell, m], \quad (m = m_{i,n} \text{ coef. à normaliser})$$

à chaque ligne du bloc de Jordan associé au coefficient. Dans l'exemple précédent, la normalisation des coefficients $m_{3,10}$, $m_{7,10}$ et $m_{9,10}$ exige donc trois vagues de manipulations (une vague par bloc) :

$$\begin{aligned} L = \big[\, & [3,3,a], [2,2,b], [1,1,c], \\ & [7,7,x], [6,6,y], [5,5,z], [4,4,t], \\ & [9,9,u], [8,8,v] \,\big]. \end{aligned}$$

Dans la pratique, on a $a = b = c$, $x = y = z = t$ et $u = v$; les lettres supplémentaires ne servent qu'à mettre en évidence le phénomène de propagation à l'intérieur des blocs de Jordan.

$$
changebase(M, L) = \begin{bmatrix}
\lambda & \frac{b}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & \frac{a}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & \frac{z}{t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \frac{y}{z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \frac{x}{y} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \frac{u}{v} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}
$$

Troisième étape. — Quand la dernière colonne contient au moins deux '1' , ceux-ci «s'affrontent» de manière à ne laisser qu'un seul survivant; celui qui reste est celui qui est associé à un bloc de Jordan de dimension maximum. Pour être plus précis, soient s (pour *source*) et t (pour *but = target*) les lignes sur lesquelles se trouvent deux '1'; supposons que le plus gros bloc de Jordan associé à ces coefficients est celui de la ligne s. Le gros bloc «attaque» le plus petit grâce aux manipulations

$$\Theta = [t - i, s - i, 1], \quad i = 0, 1, \ldots$$

de manière que chaque ligne du plus petit bloc soit atteinte. Considérons par exemple la matrice :

$$
M = \begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow m_{3,10} \\ \\ \\ \\ \leftarrow m_{7,10} \\ \\ \leftarrow m_{9,10} \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

Les sous-blocs de Jordan associés aux éléments non nuls de la dernière colonne sont de dimensions $3, 4, 2$; il en résulte que c'est le coefficient $m_{7,10}$ qui se «débarrasse» des autres grâce aux manipulations

$$
\begin{aligned}
L = \big[\, & [3, 7, a], [2, 6, b], [1, 5, c], \\
& [9, 7, x], [8, 6, y] \,\big]
\end{aligned}
$$

qui transforment M en la matrice $M' = \mathit{changebase}(M, L)$ égale à :

$$M' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & -c+b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & -b+a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a+1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y+x & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -x+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Dans la réalité, on a $a = b = c = x = y = 1$; les lettres servent seulement à mettre en évidence un phénomène de propagation à l'intérieur des blocs de Jordan.

Quatrième étape. — Si la dernière colonne est nulle, nous avons une matrice de Jordan. Dans le cas contraire, elle contient un unique '1' et nous déplaçons la dernière colonne vers la gauche à l'aide des manipulations

$$\Theta = [i, i-1], \quad i = n, n-1, \ldots.$$

jusqu'à ce que le '1' se retrouve à côté d'une valeur propre (on se servira de la procédure *movecol*). Dans l'exemple précédent, nous ferions reculer de deux crans la dernière colonne avec la liste

$$L = \big[[10, 9], [9, 8]\big].$$

6.2. Le cas général

Le cas général consiste à partir d'une matrice triangulaire U *à blocs indépendants* et à traiter successivement les colonnes $2, 3, \ldots, n$ selon la méthode qui vient d'être décrite. La présence éventuelle de plusieurs valeurs propres n'est pas un obstacle car les blocs sont indépendants.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Voici la liste complète des manipulations

```
L := [ [1,2,1]                                      # colonne 3 : affrontement
       ,[3,4,-1]                                    # colonne 4 : annulation (phase 1)
       ,[3,3,-1],[2,2,-1]                           # colonne 4 : normalisation
       ,[1,3,1]                                     # colonne 4 : affrontement
       ,movecol(4,2)                                # colonne 4 : phase 4
       ,[2,5,-8],[4,5,3]                            # colonne 5 : annulation (phase 1)
       ,[2,2,5],[1,1,5],[4,4,-9],[3,3,-9]           # colonne 5 : normalisation
       ,[2,4,1],[1,3,1]                             # colonne 5 : affrontement
       ,[7,8,-5]                                    # colonne 8 : annulation (phase 1)
       ,[7,7,4],[6,6,4]                             # colonne 8 : normalisation
     ]
```

qui transforment U en la matrice de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. PROGRAMMATION DE LA RÉDUCTION DE JORDAN

Nous commençons par trigonaliser A (matrice T); nous rendons ensuite les blocs indépendants (matrice U), puis nous jordanisons chaque bloc (matrice J). Une fois de plus, les paramètres P et L sont optionnels.

```
forme_normale_jordan := proc(A :: matrix, Λ :: list, P :: evaln, L :: evaln)
local B, T, U, J, Q1, Q2, Q3, L1, L2, L3;
B := copy(A);
T := trigonaliser(A, Λ, Q1, L1);
U := blocs_independants(T, Q2, L2);
J := jordaniser_blocs(U, Q3, L3);
if nargs > 2 then P := evalm(Q1 &* Q2 &* Q3) fi ;
if nargs > 3 then L := [op(L1), op(L2), op(L3)] fi ;
evalm(J)
end :
```

La procédure *jordaniser_blocs* traite les colonnes $2, 3, \ldots, n$ selon la méthode décrite au paragraphe précédent. Nous n'avons pas à nous préoccuper des différentes valeurs propres car les blocs sont indépendants.

```
jordaniser_blocs := proc(A :: matrix, P :: evaln, L :: evaln)
local B, k, n, Q, L1, L2, s;
B := copy(A); n := coldim(A) : L1 := [];
for k from 2 to n do
| B := traiter_colonne(B, k, Q, L2);
| L1 := [op(L1), op(L2)];
od :
if nargs > 1 then P := manipcol(diag(1$coldim(A)), L1) fi ;
if nargs > 2 then L := L1; fi ;
evalm(B)
end :
```

Le traitement de la colonne k comporte les quatre phases décrites dans le paragraphe précédent.

```
traiter_colonne := proc(A :: matrix, k :: posint, P :: evaln, L :: evaln)
local B, B1, B2, B3, B4, Q1, Q2, Q3, Q4, L1, L2, L3, L4;
B := copy(A);
B1 := annuler_coefs_colonne(B, k, Q1, L1);
B2 := normalise_coefs_colonne(B1, k, Q2, L2);
B3 := confrontation_coefs(B2, k, Q3, L3);
B4 := deplace_colonnes(B3, k, Q4, L4);
if nargs > 2 then P := evalm(P1 &* P2 &* P3 &* P4) fi ;
if nargs > 3 then L := [op(L1), op(L2), op(L3), op(L4)] fi ;
evalm(B4)
end :
```

Dans la phase 1, nous annulons les coefficients qui se trouvent sur les lignes contenant un coefficient '1' de la matrice de Jordan formée par les colonnes $1, \ldots, k-1$.

```
annuler_coefs_colonne := proc(A :: matrix, k :: posint, P :: evaln, L :: evaln)
local B, i, coef, s;
B := copy(A); s := NULL;
for i from 1 to k - 2 do
| if B[i,k] ≠ 0 and B[i,i+1] ≠ 0 then
| | coef := -B[i,k]/B[i,i+1];
| | B := addcol(B, i+1, k, coef); B := addrow(B, k, i+1, -coef);
| | s := s, [i+1, k, coef];
| fi
od ;
if nargs > 2 then P := manipcol(diag(1$coldim(A)), [s]) fi ;
if nargs > 3 then L := [s] fi ;
evalm(B)
end :
```

Pour normaliser un coefficient, il faut connaître le début du bloc de Jordan qui lui est associé : la fonction *limite_sous_bloc* s'en occupe.

```
normalise_coefs_colonne := proc(A :: matrix, k :: posint, P :: evaln, L :: evaln)
local B, i, coef, debut_bloc, fin_bloc, s;
B := copy(A); s := NULL;
for fin_bloc from 1 to k − 1 do
| coef := B[fin_bloc, k];
| if coef ≠ 0 and coef ≠ 1 then
| | debut_bloc := limite_bloc_jordan(B, fin_bloc);
| | for i from fin_bloc to debut_bloc by − 1 do
| | | s := s, [i, i, coef];
| | | B := mulcol(B, i, coef); B := mulrow(B, i, 1/coef);
| | od
| fi
od ;
if nargs > 2 then P := manipcol(diag(1$coldim(A)), [s]) fi ;
if nargs > 3 then L := [s] fi ;
evalm(B)
end :
```

Pour connaître la première ligne d'un bloc de Jordan, nous remontons le long de la diagonale de la matrice.

```
limite_bloc_jordan := proc(A :: matrix, ℓ :: posint)
local i, debut_bloc;
debut_bloc := ℓ :
for i from ℓ − 1 to 1 by − 1 do
| if A[i, i + 1] ≠ 0 then debut_bloc := i else break fi
od ;
debut_bloc
end :
```

La procédure la plus compliquée s'occupe de la confrontation des coefficients. Nous commençons par rechercher(1) le premier '1' dans la colonne k ; quand il y en a un(2), nous cherchons s'il y en a d'autres. Quand il y a bataille(3), on détermine la taille des blocs de Jordan associés aux deux '1' que l'on vient de découvrir. Le '1' associé au plus gros bloc(4),(5) élimine l'autre et prend sa place.

```
confrontation_coefs := proc(A :: matrix, k :: posint, P :: evaln, L :: evaln)
local B, i, ii, debut_bloc1, debut_bloc2, fin_bloc1, fin_bloc2, coef, s;
B := copy(A);
s := NULL;
debut_bloc1 := 0; fin_bloc1 := 0;
debut_bloc2 := 0; fin_bloc2 := 0;
for i from 1 to k − 1 do # voir texte(1)
| if B[i, k] ≠ 0 then fin_bloc1 := i; break fi ;
od ;
```

```
if fin_bloc1 > 0 then # voir texte(2)
  debut_bloc1 := limite_bloc_jordan(B,fin_bloc1);
  for i from fin_bloc1 + 1 to k − 1 do
    if B[i,k] ≠ 0 then # voir texte(3)
      fin_bloc2 := i;
      debut_bloc2 := limite_bloc_jordan(B,fin_bloc2);
      if fin_bloc2 − debut_bloc2 ≥ fin_bloc1 − debut_bloc1 then # voir texte(4)
        for ii from fin_bloc1 to debut_bloc1 by − 1 do
          B := addcol(B, ii,fin_bloc2 + ii − fin_bloc1, 1);
          B := addrow(B,fin_bloc2 + ii − fin_bloc1, ii, −1);
          s := s, [ii,fin_bloc2 + ii − fin_bloc1, 1];
        od ;
        debut_bloc1 := debut_bloc2;
        fin_bloc1 := fin_bloc2;
      else # voir texte(5)
        for ii from fin_bloc2 to debut_bloc2 by − 1 do
          B := addcol(B, ii,fin_bloc1 + ii − fin_bloc2, 1);
          B := addrow(B,fin_bloc1 + ii − fin_bloc2, ii, −1);
          s := s, [ii,fin_bloc1 + ii − fin_bloc2, 1];
        od ;
      fi ;
    fi ;
  od ;
fi ;
if nargs > 2 then P := manipcol(diag(1$coldim(A)), [s]) fi ;
if nargs > 3 then L := [s] fi ;
evalm(B)
end :
```

Pour déplacer une colonne k qui contient un seul '1', nous utilisons de manière répétée les manipulations $\Theta = [j-1, j]$ de manière à ce que le '1' se retrouve juste après une valeur propre.

```
deplace_colonnes := proc(A :: matrix, k :: posint, P :: evaln, L :: evaln)
local B, i, j, ℓ, s;
B := copy(A);
s := NULL;
ℓ := 0;
# recherche de l'unique '1'
for i from 1 to k − 1 do if B[i,k] ≠ 0 then ℓ := i;  break fi od ;
if ℓ > 0 then # le '1' existant, on le déplace
  for j from k to ℓ + 2 by − 1 do
    B := swapcol(B, j, j − 1); B := swaprow(B, j, j − 1);
    s := s, [j, j − 1];
  od ;
```

```
fi ;
if nargs > 2 then P := manipcol(diag(1$coldim(A)), [s]) fi ;
if nargs > 3 then L := [s] fi ;
evalm(B)
end :
```

8. CONCLUSION

On peut énoncer la morale de cette histoire de la manière suivante : *la réduite de Jordan est un algorithme, pas un théorème*! C'est parce qu'elle n'était pas présentée dans le bon contexte que cette théorie était aussi rébarbative.

9. APPENDICE

Quand nous voulons fabriquer des exercices à pratiquer à la main, nous nous tournons spontanément vers des matrices à coefficients entiers et à valeurs propres entières. Pour obtenir de telles matrices, il est naturel de partir d'une matrice triangulaire T à coefficients entiers qu'on brouille par manipulations des lignes et des colonnes, opération qui remplace T par $A = U^{-1}TU$ où U est une matrice unimodulaire(*).

Si les entiers vous enchantent, vous vous demanderez certainement si cette méthode est capable de fabriquer toutes les matrices $A \in M(n, \mathbb{Z})$ à valeurs propres entières.

Théorème (Leavitt et Whaples, 1948). — *Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients entiers. Les valeurs propres de A sont entières si et seulement si il existe une matrice unimodulaire U telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure.*

Démonstration. — Soit A une matrice à coefficients et à valeurs propres entières. Comme les valeurs propres sont rationnelles, nous savons déjà trouver (explicitement) une matrice $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Q})$ telle que $T_1 = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure. Écrivons cette égalité sous la forme

$$AP = PT_1$$

et multiplions P par un entier convenable de manière à ce qu'elle devienne à coefficients entiers.

En manipulant les lignes de P grâce à l'algorithme de Blankinship (qui est le pivot de Gauss adapté aux entiers, voir [3] ou [4]), nous savons trouver (explicitement)

(*) Rappelons qu'une matrice *unimodulaire* est une matrice à coefficients entiers, inversible et dont l'inverse est aussi à coefficients entiers, cette dernière propriété étant équivalente à $\det \pm 1$ (la preuve est très facile).

une matrice unimodulaire U telle que $T_2 = UP$ soit triangulaire supérieure. Nous déduisons facilement de l'égalité $UAP = UAU^{-1}UP = UPT_1$ que nous avons

$$UAU^{-1} = T_2 T_1 T_2^{-1}.$$

Alors UAU^{-1} est à coefficients entiers parce que U est unimodulaire ; d'autre part, c'est une matrice triangulaire car elle est le produit de trois matrices triangulaires supérieures. La réciproque est évidente.

Une question. — De manière analogue, peut-on caractériser les matrices A à coefficients entiers, à valeurs propres entières et pour lesquelles il existe une matrice unimodulaire U telle que $U^{-1}AU$ soit une matrice de Jordan ?

J'ai fait de multiples expériences, mais je n'ai pas trouvé de loi...

Bibliographie

[1] A. BUJOSA, R. CRIADO, C. VEGA, *Jordan normal form via elementary transformations*, Siam Review, vol. 40 (1998), p.947–956.
[2] U. PITTELKOW, H.-J. RUNCKEL, *A short and constructive approach to the Jordan canonical form of a matrix*, Serdica, vol. 7 (1981), p. 348–359.
[3] E.J. PUTZER, *Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients*, American Mathematical Monthly (1966), p. 2–7.
[4] R. SÉROUL, *math_info*, InterÉditions, 1997.
[5] C. Moler et C. Van Loan, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix*, SIAM Review , vol. 20, n° 4 (1978).

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN HONGRIE

Par LASZLO Somogyi Directeur
du *BERZSENYI Daniel Gimnazium* BUDAPEST

1. Généralités sur la Hongrie
2. Le système scolaire
3. L'enseignement des mathématiques
4. Olympiades

Annexes : – énoncés du baccalauréat
– énoncés des concours
– énoncés des olympiades

1. Quelques mots sur la Hongrie

Les ancêtres des hongrois sont arrivés de l'Asie intérieure dans le bassin des Carpates à la fin de IX^e siècle. L'origine de ces peuplades n'est pas mieux connue. La langue hongroise est, avec le finnois et l'estonien, une langue finno-ougrienne. Au cours de X^e siècle les guerriers hongrois nomades ont dévasté plusieurs fois beaucoup de villes de l'Europe occidentale. On retrouve leurs traces dans l'église de Murbach avec le sarcophage des sept moines tués par les Hongrois en 926.

À la fin du X^e siècle leur intégration à l'Europe est inéluctable s'ils ne veulent pas disparaître comme beaucoup d'autres peuples nomades, et c'est le souverain Geza, père du premier roi de Hongrie qui a fait le pas décisif : il appelle des missionnaires chrétiens pour baptiser le peuple. Ce sont ces missionnaires, venus d'Italie, d'Allemagne et de France qui ont fondé les premières écoles. Nous pouvons parler de système éducatif hongrois depuis ce moment là.

La première loi d'éducation qui établit globalement le système scolaire du pays est née en 1777 à l'instigation de Marie-Thérèse, impératrice de Habsbourg, reine de Hongrie.

Après le compromis austro-hongrois de 1867, le développement est accéléré, et dans plusieurs domaines la Hongrie dépasse l'Autriche. C'est la période où la Hongrie moderne s'est formée, y compris le système éducatif qui, par la suite, a donné à l'humanité des savants comme Frédéric RIESZ, Alfred HAAR, Georges POLYA, Jean von NEUMANN, Eugène WIEGNER, Edouard TELLER, Léon SZILARD etc.

2. Le système scolaire

Le système scolaire est actuellement en transition, comme presque tous les domaines de la vie sociale. Les changements étaient prévus par la loi sur l'éducation de 1985. Cette loi a libéralisé la gestion scolaire : jusqu'à cette date, l'enseignement avait suivi le modèle soviétique. À partir de 1985, les établissements scolaires ainsi que les enseignants jouissent d'une plus grande liberté ; ceci a provoqué le renouveau des écoles, et les expériences éducatives, initiées et menées par des enseignants ou des équipes d'enseignants, se sont multipliées. Cela a engendré des écoles très variées tant dans leurs formes que dans leurs contenus.

Ces changements, conséquences des bouleversements de 1989 ont été codifiés dans la loi de 1992 qui est en vigueur aujourd'hui.

La scolarité obligatoire s'étend de six à seize ans. Mais l'enseignement préélémentaire qui existe en Hongrie s'adresse aux enfants âgés de trois à six ans. L'école maternelle existe depuis 1828, et a les mêmes objectifs qu'en France. Plus de 90 % des enfants âgés de 3 à 6 ans fréquentent l'école maternelle dont le programme est bien nuancé.

À l'âge de six ans il n'est pas obligatoire de commencer l'école primaire. Les parents avec l'accord de l'instituteur de maternelle, peuvent décider que leur enfant commence le primaire ou reste encore une année à l'école maternelle. (Si l'accord n'est pas donné, il y a un procès.) Il est fréquent que les enfants restent une année de plus à l'école maternelle de par la volonté des parents. En général ces enfants ont moins d'échecs par la suite.

L'enseignement primaire dit « général » accueille les enfants âgés de six à quatorze ans, sa durée est donc de 8 ans. L'enseignement secondaire s'adresse aux élèves âgés de 14 à 18 ans, il se déroule dans les lycées classiques et les lycées professionnels. La période secondaire se termine avec le baccalauréat qui n'est pas un épreuve aussi difficile qu'en France. En fait presque 100 % des candidats réussissent le bac. Les élèves qui veulent continuer leurs études dans l'enseignement supérieur doivent passer un examen d'entrée, généralement en deux matières. Le niveau de cet examen est beaucoup plus élevé que celui du baccalauréat.

Après l'école « générale » on peut choisir la filière de l'apprentissage qui dure trois ans. Depuis les changements de 1985 de plus en plus de lycées se transforment en établissement secondaire qui forment pendant six ou huit ans les lycéens, c'est-à-dire qui accueillent les lycéens âgés de 12 à 18 ans ou de 10 à 18 ans. Le programme de ces établissements est unique, développé par les professeurs du lycée et autorisé par le ministère et le directeur de l'établissement. Ainsi se sont développés une concurrence parmi des lycées et un choix pour des élèves.

Il ne faut pas cacher l'autre côté de cette diversité. Comme il y a plus de candidats que de places dans ces établissements, les enfants âgés de 10 ou 12 ans doivent subir un concours. De plus, les élèves qui doivent changer d'école ont des difficultés énormes quand ils veulent continuer leurs études dans un autre établissement selon un autre programme.

L'état essaie de régulariser cette situation par un programme minimal dit « programme national de base » et par un système d'examens centralisés.

Le programme de base contient un tronc commun des connaissances pour les élèves âgés de 6 à 16 ans qui doit être complété par le programme local, fait par les enseignants de l'établissement scolaire. Ce dernier fixe environ la moitié des connaissances enseignées. L'efficacité de l'établissement sera jugée par des examens que les élèves devront subir dans certaines matières et à certains âges. Les deux dernières années de l'école secondaire servent à la préparation au baccalauréat et à l'examen d'entrée à l'université.

Pour continuer les études universitaires il faut subir un examen d'entrée qui est plus difficile que le baccalauréat. Les écoles supérieures donnent une formation de 3, 4 ans tandis que les universités durent 4, 5 et 6 ans.

Les propriétaires des établissements primaires et secondaires sont en général les municipalités. Ce sont elles qui assurent environ 35 % des moyens financiers pour le fonctionnement. Le reste est assuré par l'état selon l'effectif des élèves de l'école. (La proportion exacte est fixée chaque année dans la loi de budget.)

Depuis 1989 les écoles privées et religieuses se développent et accueillent de nombreux élèves. C'est environ 10 % des élèves qui suivent leurs études dans ces établissements.

Les enseignants sont employés et licenciés par le chef d'établissement. (Bien sûr le licenciement est réglementé.) Jusqu'à 1992 même les salaires étaient fixés par le directeur. Depuis 1992 il y a, comme en France, une échelle qui varie selon le diplôme et l'ancienneté. Les salaires sont très bas, ce qui est une héritage de l'époque précédente. Par exemple un professeur agrégé avec 20 ans d'expérience gagne environ 1200 FF.

Le chef d'établissement est nommé pour 5 ans par la municipalité. La nomination est précédée par une candidature publique. Tout le monde peut se présenter à condition de posséder 5 ans d'expérience d'enseignement. Chaque candidat doit subir une présentation auprès des enseignants de 1'école concernée qui votent pour ou contre chacun des candidats. En générale la municipalité respecte l'opinion du personnel enseignant. (Bien qu'il y ait des exceptions ...)

L'année scolaire dure 37 semaines dont 6 jours sont à la disposition des écoles. Elles peuvent les utiliser à organiser les classes vertes, kermesses, etc. L'année se partage en deux semestres. À la fin de ces deux semestres les élèves reçoivent un bulletin mais celui du premier n'a pas d'autre rôle qu'informer les parents. La plupart des heures commencent par un contrôle oral ou écrit. Les notes sont de 1 à 5. Cette dernière est la meilleure note.

L'élève qui n'a aucun 1 dans son bulletin à la fin de l'année peut continuer ses études dans la classe supérieure. Celui qui a reçu 1 en au moins 3 matières dans son bulletin, doit redoubler automatiquement la classe. L'élève qui a 1 dans une ou deux matières doit passer un examen à la fin des grandes vacances pour pouvoir passer dans la classe supérieure.

Le jour scolaire commence à 8 heures du matin, l'après-midi commence à 14 heures. Les élèves de 6 à 10 ans ont en général 4-5 heures par jour (1 séquence d'une heure correspond en fait à 45 minutes) les plus âgés ont 6-7 heures du lundi au vendredi. Le samedi est libre partout. Les élèves ont des travaux à faire à la maison avec une grande fréquence.

Le programme de base nationale fixe 10 domaines culturels et conseille un pourcentage qui indique la quantité des heures par semaine qui seront fixées dans le programme local. Voilà les domaines :

Langue maternelle et littérature
Langue vivante
Mathématiques
L'homme et la société
L'homme et la nature
La Terre et notre environnement
L'art
Informatique
Mode de vie et connaissances pratiques
Sport

Les pourcentages conseillés en mathématiques sont les suivants selon les classes :
1e – 4e classes : 19-23 % qui correspond 5-6 heures par semaine ;
5e – 6e classes : 16-20 % qui correspond 4-5 heures par semaine ;
7e –10e classes : 10-14 % qui correspond 3-4 heures par semaine.
Le programme de 11e et 12e est fait par le lycée donc c'est là où le nombre des heures sera déterminé. (12e classe = terminale)
Il faut ajouter que dans la plupart des écoles les mathématiques sont enseignées en groupe, c'est-à-dire qu'on divise les classes en deux parties, souvent selon le niveau des élèves.

3. L'enseignement des mathématiques

Pour mieux comprendre ce qui se passe actuellement dans les classes en mathématiques il est nécessaire de faire connaître l'œuvre de Tamás VARGA.

Tamás VARGA est né en 1919. Il était professeur à l'Université Roland Eötvös à Budapest, il a participé pendant des années à la formation des professeurs de mathématiques. Par la suite, il était le chef du département de mathématiques à l'Institut Pédagogique National. Ce département jouait un peu le même rôle en Hongrie que les IREM en France. Il participait dans la mise au point du programme de mathématiques dans plusieurs pays. (par exemple en Italie, au Canada, etc.) Il est décédé en 1988.

La nouvelle vague du renouveau de l'enseignement des mathématiques des années 60 a touché la Hongrie. C'est en 1963 que l'expérience complexe dont les auteurs étaient Tamás VARGA et ses collaborateurs, a démarré sous la direction de VARGA. L'expérience était complexe puisqu'elle a visé le renouveau du contenu aussi bien que les méthodes de l'enseignement. Cette expérience a pu bien adapter les éléments positifs des expériences, menées dans le monde.

Le programme est regroupé autour de 5 thèmes :
1) Ensembles, logique
2) Arithmétique, algèbre
3) Fonctions, suites
4) Géométrie, mesures
5)Analyse combinatoire, probabilités, statistique

Chaque thème revient tous les ans afin d'approfondir les notions.
Voici les principes didactiques de l'expérience, rédigés par les auteurs :

1) L'expérience est générale et faite à long terme : générale parce qu'elle n'est pas limitée à un domaine mais essaye de travailler l'unité de différents thèmes. Elle est

faite à long terme puisqu'elle prépare les connaissances qui seront mûres dans les années qui viennent.

2) Souplesse, flexibilité

3) Indépendance et goût du travail des élèves : le but est d'élever à l'indépendance, plus précisément à l'indépendance de pensée, à la résolution et la proposition de problèmes, à l'autovérification. La plus en plus grande indépendance, la possibilité du choix, le travail volontaire et non imposé active le goût du travail.
Il est important que la quantité et la qualité des problèmes et des devoirs proposés soient tels que les « élèves doivent faire des efforts », les meilleurs aussi bien que les plus faibles. Bien sûr il faut leur assurer le soutien adéquat.

4) L'indépendance et le goût du travail des enseignants : les enseignants eux-mêmes font leur travail avec plus de plaisir s'ils ont la possibilité de choix et ce n'est pas uniquement les instructions qui dirigent leur activité professionnelle. En plus, les professeurs qui se sont habitués à l'indépendance et à l'initiative sont capables de former davantage des élèves indépendants et qui prennent des initiatives. L'indépendance des enseignants ne veut pas dire qu'ils sont laissés seuls : ils reçoivent des principes pédagogiques précis avec lesquels ils peuvent discuter ou qu'ils peuvent compléter par leurs propres idées. Les professeurs donc reçoivent un cadre et ils ont la possibilité de le remplir.

5) L'Autorité doit être remplacée par le respect du travail : Le principe suivant : « le professeur a toujours raison » doit être rejeté ; laissons plutôt discuter les élèves. De temps à autre il est profitable de faire exprès des fautes pour stimuler les élèves à rédiger leurs contre-avis. Mais il faut les tenir partenaires même quand ils corrigent notre faute involontaire. Les professeurs ne craignent pas pour leur autorité puisque elle n'est pas basée sur leur vérité indiscutable mais sur le fait que les élèves sont à l'aise et travaillent avec plaisir sous leur direction.

6) La diminution du rôle « il faut … » : s'il est possible, utilisons de moins en moins les expressions de ce type : « il faut être en silence ! » ou « il faut être attentif ! ». Il est préférable de rendre les élèves capables de reconnaître ce qui est bon pour eux.

7) Plutôt exploiter qu'éteindre l'activité des élèves

Les professeurs de mathématiques se sont associés volontairement à cette expérience, dite complexe, au cours des années 60. Par la suite, dans les années 70 il y avait parallèlement deux programmes et méthodes différentes au libre choix des professeurs de mathématiques. À cette époque-là cette situation était révolutionnaire. Au fur et à mesure, sans pression, le nouveau programme et la méthode ont gagné du terrain, et finalement c'est en 1978 qu'il était introduit généralement.

Depuis cette date le programme en mathématique était modifié plusieurs fois mais l'expérience décrite ci-dessus exerçait une influence profonde même jusqu'à nos jours, sur l'enseignement des mathématiques en Hongrie.

Selon le principe généralement accepté, le rôle de l'enseignement des mathématiques consiste à rendre les élèves capables de reconnaître les situations-problèmes, d'édifier un modèle mathématique et de juger si la solution trouvée répond à la vie réelle.

Nous pouvons difficilement donner un panorama précis sur les évolutions actuelles de l'enseignement des mathématiques puisque chaque établissement possède son programme propre. Il n'y a plus d'inspection donc le seul contrôle professionnel est l'efficacité de l'établissement au point de vue de l'admission de ses élèves dans un lycée réputé ou dans une université.

Souvent il arrive qu'une école ou lycée développe et utilise plusieurs programmes de certaines matières. Par exemple le lycée Berzsenyi, une des meilleures écoles secondaires de Budapest, utilise quatre programmes différents en mathématiques : un dans la section littéraire, un dans la section physique, un dans la section chimie-biologie et un dans la section mathématique.

La section mathématique est adressée aux élèves doués en mathématiques. Il y a quatre classes dans la capitale et quatre autres classes à la campagne dans les villes universitaires. Ces sections mathématiques remontent au début des années 60 et ont formé des générations de mathématiciens.

On peut quand même dire que la tendance dans l'enseignement des mathématiques est qu'on choisit plutôt des chapitres plus pratiques, plus « utiles ». Il y a discussion sur l'utilité de la géométrie élémentaire qui jouait un rôle important dans le programme et qu'on veut diminuer. La probabilité et la statistique gagnent du terrain dans l'enseignement malgré une certaine aversion des professeurs. Il y a des expériences qui visent l'utilisation des calculatrices qui sont payées par les distributeurs de grandes marques.

4. Olympiades

L'histoire des olympiades mathématiques en Hongrie remonte au 19e siècle. La première compétition fut organisée par la Société de Mathématiques et de Physique en 1894 pour des jeunes gens qui passaient leur baccalauréat cet année là. Depuis, cette compétition est organisée chaque année. Voilà quelques noms sur la liste des gagnants: L. Fejer, D. Konig, A. Haar, G. Szego, E. Teller etc.

Depuis ce temps les olympiades jouent un rôle non négligeable dans la découverte et l'éducation des élèves doués.

Les élèves de 8 à 14 ans sont concernés par deux types de compétition. L'une est « classique », c'est à dire qu'il y a quelques énoncés à résoudre, l'autre est de type « Kangourou ». Pour les élèves de 13-14 ans s'organise la compétition „Tamas Varga", pour les élèves de 14-16 ans la compétition „Daniel Arany", puis la plus prestigieuse qui est la « Compétition Nationale des Lycéens ». Elle est organisée pour les élèves de 16-18 ans. Chaque compétition commence par une éliminatoire à l'école, puis se termine par une finale nationale.

Depuis 1993 le concours « Mathématiques sans frontières » , venu de l'Alsace a franchi la frontière hongroise et a ravi les élèves et professeurs magyars. L'année scolaire 1998/99 a compté 6 200 participants.

Annexes

A) Olympiade *– compétition „Daniel Arany", 1994/95 – éliminatoire 14-15 ans*

1. Résoudre l'équation suivante, où x, y, z sont des entiers naturels :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + z = 2{,}5$$

2. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2 - y^2 .$$

3. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont inférieurs à 90°. Un cercle passant par B et C coupe le côté AB en P et le côté AC en Q. Soit O le centre du cerce circonscrit au triangle APQ. Démontrer, que les droites (AO) et (BC) sont perpendiculaires.

4. La suite est définie de la manière suivante :

$$a_n = \frac{a_{n-1}\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - a_{n-1}} \quad \text{et} \quad a_1 = A \qquad \text{où A est un entier positif}$$

Déterminer la valeur de a_{1995}.

5. Vérifier que : $s_n = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$

n'est pas entier quelque soit l'entier positif n.

B) Olympiade *– compétition „Daniel Arany", 1998/99 – éliminatoire 15-16 ans*

1. Résoudre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'équation : $3(x - y) = x^2 - xy + y^2$.

2. Soit O le centre du parallélogramme ABCD. L'angle $\widehat{DAB}$ est égal à l'angle $\widehat{AOD}$. Démontrer que : $AC^2 - BD^2 = 2\,(AB^2 - BC^2)$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{4 - x} = c + \sqrt{x - 1}$ où c est un paramètre entier.

4. On relie les points d'intersection de n droites où n est un entier. Combien peut-on former de nouvelles droites au plus ?

C) Olympiade *–Compétition Nationale des Lycéens, 1998– éliminatoire 16-18 ans*

1. On écrit un nombre entier dans tous les carrés d'un tableau 3×3 de façon à ce qu'il y ait parmi eux des pairs et impairs. Puis on compose un second tableau à partir du premier de la façon suivante : on additionne les nombres écrits dans les carrés voisins d'un carré M du tableau original et on écrit cette somme dans le carré M du nouveau tableau. On fait de même avec les 8 autres carrés.

Répondre aux questions suivantes : en répétant ce processus peut-on obtenir à partir d'un tableau quelconque un tableau dont tous les carrés contiennent un nombre

a) impair ? b) pair ?

(Deux carrés sont voisins s'ils ont un coté commun.)

Voilà un exemple du processus utilisé pour composer un nouveau tableau :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & -1 & 0 \\ \hline 9 & 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 8 & 10 & 1 \\ \hline 11 & 13 & 13 \\ \hline 12 & 14 & 5 \\ \hline \end{array}$$

2. Le cercle inscrit dans le triangle ABC touche les côtés AB, BC, CA en C_1, A_1, B_1 Soit C_2 le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ du cercle circonscrit qui ne contient pas le sommet C, A_2 le milieu le l'arc $\overset{\frown}{BC}$ du cercle circonscrit qui ne contient pas le sommet A, B_2 le milieu le l'arc $\overset{\frown}{AC}$ du cercle circonscrit qui ne contient pas le sommet B. Démontrer que les droites (A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2), se coupent en un point.

3. Résoudre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + (z^2 - 8z + 14)\sqrt{x + y - 2} = 1 \\ 2x + 5y + \sqrt{xy - z} = 3 \end{cases}.$$

4. Démontrer que la suite $a_n = 5\,\dfrac{10^n - 1}{9} + 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) ne contient pas de nombre carré.

D) Olympiade – Compétition Nationale des Lycéens, 1998 – finale 16-18 ans

1. Démontrer que la moyenne arithmétique de

$2\,\sin 2°$, $4\,\sin 4°$, $6\,\sin 6°$, … , $2k\,\sin(2k)°$, … , $180\,\sin 180°$ est égale à $ctg 1°$.

2. Soient P, Q, R des points sur les côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC puis A', B', C' des points sur les côtés PR, QP, RQ du triangle PQR de façon que AB et A'B', BC et B'C', CA et C'A' soient parallèles. Démontrer que le rapport des longueurs des côtés parallèles des triangles ABC et A'B'C' est égale au rapport des aires des triangles PQR et A'B'C'.

3. x, y, n sont des entiers positifs qui vérifient les conditions suivantes :

$x \le y$; $PGCD(x, y) = 1998$; $PPCM(x, y) = n$.

Pour quelles valeurs de n , x et y existent-ils ?

Pour quelles valeurs de n le nombre de solutions sera-t-il inférieur à 1998 ?

E) Baccalauréat, 1997

1. On allonge un côté d'un carré d'un cinquième de sa longueur et on diminue dans le même rapport le côté voisin. Est ce que l'aire est changée ? Si oui, le changement est de combien pour cent ? (10 points)

2. Résoudre l'inéquation suivante : $\ln_{\frac{1}{3}}(3x - 2) \ge 0$ (8 points)

3. Soit **R** et **r** les deux rayons d'un cône tronqué. On coupe en deux par un plan parallèle aux cercles de telle manière que les volumes des deux parties soient égaux. Calculer le rayon du cercle d'intersection du plan et du cône tronqué. (14 points)

4. Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{3}\ \boldsymbol{sin}\ 2x = 2\ \boldsymbol{sin}^2\ x + 1$ (14 points)

5. Les coordonnées de deux sommets voisins d'un carré sont A(5,-2) et B(-4,4). Calculer les coordonnées des deux autres sommets du carré. (12 points)

6. Combien de diviseurs positifs possède le nombre 2700 ? (10 points)

7. Démontrer que les hauteurs d'un triangle quelconque se coupent en un point.

F) Examen d'entrée à l'université, 1999

Durée de travail :	180 minutes.	
Barème :	0-17 points	: non-réussite
	60-80 points	: très bon

1. Quand on divise un nombre de deux chiffres par le produit de ses deux chiffres, le quotient est égale à 5 et le reste est égale à 2. Quand on soustrait de ce nombre celui obtenu par l'interversion de ses deux chiffres, la différence est égale à 45. Déterminer ce nombre de deux chiffres. (10 points)

2. Déterminer les cinq premiers termes d'une suite arithmétique dont le premier membre est égale à 1, la somme de ces cinq termes est égale à un quart de la somme des cinq termes suivants. (11 points)

3. Résoudre l'équation sur l'intervalle [0 ; π] :

$$8\ \boldsymbol{cos}\ 2x + 7\ \boldsymbol{cos}^2 x = 5\ \ \boldsymbol{sin}\ x + \frac{27}{4}$$ (11 points)

4. Quels sont les points $P(x,y)$ à l'intérieur du cercle, de centre C(2,1) et de rayon 2, qui vérifient les équations suivantes :

$$3^{x} + 3^{y-\frac{1}{2}} = 4 \quad \text{et} \quad (2x-y)^2 = \frac{9}{4}$$ (13 points)

5. Pour quelle valeur de p l'équation suivante possède-t-elle exactement une solution : $(2 + \boldsymbol{log}_2\,p)\ x^2 + (6\ \boldsymbol{log}_2\,p)\ x + 4\ \boldsymbol{log}_2\,p + 1 = 0$ (13 points)

6. La distance des centres de deux cercles non sécants est de 12. La longueur du segment de la tangente commune intérieure est de $4\sqrt{3}$ et la longueur du segment de tangente commune extérieure est de $2\sqrt{35}$.
Calculer la longueur des deux rayons. (13 points)

7. L'aire d'un rectangle est égale à celle d'un autre dont les côtés sont les bissectrices du premier rectangle. Calculer l'angle des deux diagonales. (14 points)

8. Déterminer le maximum et le minimum de $4x - 3y + 8z$ où x, y, z sont des réels non négatifs qui vérifient les équations suivantes :

$$4\,x + y + 4\,z = 3 \ \text{ et } \ 3\,x + 6\,y - 4\,z = 4.$$ (15 points)

RENCONTRE RÉGIONALE DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES

organisée par l'APMEP

La rencontre régionale annuelle de l'APMEP[1] du samedi 27 mars s'est déroulée au lycée Charles Frey de Strasbourg.

Le matin s'est réuni un **groupe franco-allemand** de professeurs de mathématiques de l'IREM de Strasbourg, avec le soutien de l'APMEP et de la MNU[2]: 6 collègues allemands et 3 collègues français ont discuté de la place de l'informatique et des calculatrices dans l'enseignement des mathématiques de leurs pays respectifs.

En Allemagne, en dehors de la discipline informatique enseignée de manière indépendante des mathématiques, il existe un cours CAS (Computer Algebra System) qui intègre dans l'enseignement des mathématiques les mathématiques de l'informatique (notamment pour ce qui concerne les structures de données et l'algorithmique). Pour le niveau correspondant au collège on utilise quelques logiciels : Euclide en géométrie, Derive en analyse. Le logiciel Mapple est plutôt utilisé pour ce qui correspond à notre niveau lycée avec des licences d'utilisation très bon marché pour un lycée. L'étude des courbes planes, les approximations, les matrices sont des domaines où l'informatique est très utilisée.

Il existe à partir de la classe 11 (l'équivalent de notre seconde) 6 classes du Bade-Wurtemberg où tous les élèves sont équipés de portables et qui utilisent dans toutes les disciplines cet outil. L'évaluation n'est pas encore terminée mais les problèmes de fiabilité du matériel et de perte de données se révèlent déjà importants. L'usage des calculatrices formelles est peu répandu .

Pour les épreuves du baccalauréat, tous les élèves disposent de la même calculatrice qui est une calculatrice scientifique, en général non programmable. L'utilisation de calculatrices formelles achetées selon les moyens des familles poserait des problèmes juridiques.

Le repas de midi a été partagé par une vingtaine de collègues au restaurant l' Ancienne Douane dans une ambiance très conviviale.

L'après-midi , une quarantaine de collègues se sont répartis en **trois ateliers parallèles.**

Bernard Schibler a animé un atelier sur **l'utilisation d'une calculatrice alphanumérique** adaptée aux programmes des **lycées professionnels** : statistiques à une et deux variables, droites de régression et de Mayer, médiane, interpolation parabolique. L'utilisation d'un tableur a été illustrée pour réaliser un repère, un graphique, pour étudier des suites, des tableaux d'amortissement ou la loi binomiale. Quelques programmes classiques ont été proposés : équations du second degré, systèmes linéaires, calcul d'annuité. Un document a été proposé aux participants qui ont pu l'essayer avec une calculatrice.

---

[1] APMEP: Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public , en France.

[2] MNU: Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht , association allemande de professeurs de sciences.

Des collègues de Mulhouse du groupe IREM collège ont animé un atelier sur l'utilisation de **Cabri-géomètre en collège**. Les participants ont pu manipuler en salle d'ordinateur. Un compte rendu plus détaillé sera donné ultérieurement.

Luc Trouche , de l'IREM de Montpellier, a proposé un atelier sur **l'usage des calculatrices symboliques en lycée** dont il nous rend compte dans le paragraphe suivant.

Après ces ateliers, Gérard Kuntz a animé une **table ronde sur l'enseignement des mathématiques en environnement informatique et avec des calculatrices**. Aux animateurs des ateliers s'étaient joints Marc Nourisson, qui a indiqué les modifications de comportement des élèves de classes préparatoires avec l'introduction de l'informatique, et un collègue allemand, Monsieur Lutz, professeur de mathématiques et proviseur en Allemagne, qui nous a informé sur la situation dans son pays. Il a notamment signalé le problème suivant: si le développement de l'informatique entraîne la réduction des mathématiques algorithmiques qui seraient prises en charge par l'ordinateur ou la calculatrice au profit de la recherche de problèmes plus ouverts, une grande partie des élèves , besogneux et appliqués, auraient alors des difficultés importantes en mathématiques. Gérard Kuntz résumera les enseignements de cette table ronde dans un paragraphe suivant.

L'après-midi s'est terminée par une assemblée générale qui a élu un nouveau comité régional lequel a désigné Jean-Pierre Darou comme nouveau président de la régionale.

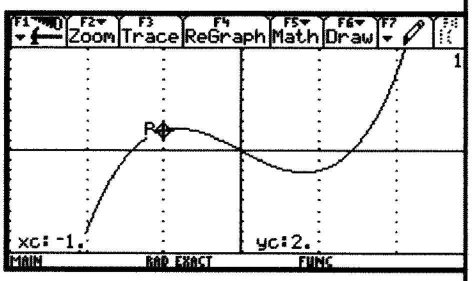
FAIRE DES MATHÉMATIQUES DANS UN ENVIRONNEMENT DE CALCULATRICES SYMBOLIQUES

par Luc Trouche, IREM de Montpellier

L'environnement technologique dans lequel l'enseignement est organisé modifie considérablement les conditions de l'apprentissage, en particulier les énoncés des problèmes et les façons de les traiter. En m'appuyant sur l'expérience de trois ans d'enseignement assisté par des TI-92 (calculatrices prêtées aux élèves dans le cadre d'une expérimentation CRDP-IREM de Montpellier), j'ai proposé lors de l'atelier un travail aux professeurs présents.

Il s'agissait de traiter un TP (cf. encadré ci-dessous) proposé à des élèves de terminale scientifique.

Soient f la fonction qui à x associe $2x^3$-4x, C sa représentation graphique, P le point de C d'abscisse -1, D la tangente à C au point P.



– Les questions du jour

a) Montrer que D recoupe C en un point Q. Soit Δ la tangente à C en Q; montrer que Δ recoupe C en un point R.

b) Soit A l'aire de la surface délimitée par le courbe C et la tangente D, soit B l'aire délimitée par la courbe C et la tangente Δ ; **comparer les aires A et B**.

c) Aurait-on trouvé le même résultat en partant d'un point quelconque P de C ?

d) Aurait-on trouvé le même résultat à partir d'une fonction f : x → ax^3+bx, a et b étant des réels quelconques ?

– Les questions du lendemain

Peut-on généraliser ces résultats à tout polynôme de degré 3 ? À d'autres polynômes ? Comment expliquer ces résultats ?

Chacun des participants à l'atelier pouvait disposer d'une calculatrice TI-92. Bien entendu, son utilisation nécessitait une certaine familiarité avec cet outil, le but de l'atelier n'était pas d'apprendre à se servir d'une calculatrice complexe, mais plutôt de réfléchir à ses effets possibles.

Après une première recherche individuelle, un bilan collectif des différentes méthodes a mis en évidence la grande variété des itinéraires possibles :

- certains ont choisi de traiter cette question “ à la main ”, d'autres avec la calculatrice, d'autres en combinant les deux approches ;
- certains groupes ont choisi de traiter cette question dans l'application graphique de la calculatrice (donc en calcul approché), d'autres dans l'application symbolique ;
- dans l'application symbolique certains ont choisi de traiter de nombreux cas particuliers (pour le choix de P), d'autres ont choisi de généraliser d'emblée le problème ;
- pour trouver l'équation de la tangente, il était possible d'utiliser la forme générale donnée dans le cours, ou d'utiliser la commande Taylor (en utilisant le fait que le polynôme de degré 1 était la fonction affine tangente)…

Il ressort de cette présentation que la dispersion des méthodes est très grande et que les travaux les plus avancés sont ceux qui ont pu passer d'une application à l'autre, prendre du recul pour distinguer les raccourcis de calcul :

– ainsi de simples considérations géométriques permettaient de comprendre que, pour traiter l'ensemble des cubiques, il suffisait de traiter le cas des cubiques impaires ;
– ainsi voir que l'abscisse de Q était (-2) fois l'abscisse de P permettait d'en déduire que l'abscisse de R était nécessairement (-2) fois l'abscisse de Q.

Le résultat obtenu peut constituer une surprise : le rapport entre les deux aires est constant (valeur 16), il ne dépend ni du point choisi, ni de la cubique étudiée. Il peut susciter d'autres questions :

– pourquoi un tel rapport ? Y a-t-il une transformation géométrique qui permettrait de passer d'une surface à l'autre (similitude ?). On peut aussi rechercher des explications formelles : on intègre une fonction cube, on trouve donc une primitive du quatrième degré ; comme les bornes sont deux fois plus grandes pour B que pour A, et que $2^4 = 16$, on comprend l'intervention de ce nombre au cours des calculs) ;
– peut-on trouver des phénomènes du même type pour des polynômes de degré plus élevé ?

On le voit, de tels énoncés peuvent susciter dans la classe une dynamique de recherche, appuyée sur des conjectures, des recherches de preuve, des réfutations... Mais les énoncés en eux-mêmes ne suffisent pas, l'utilisation raisonnée d'outils de calcul complexes nécessite un apprentissage... complexe :

– apprendre à combiner le travail papier/crayon et le travail écran/clavier ;
– apprendre à utiliser de façon pertinente des commandes de la calculatrice ;
– savoir prendre du recul (éviter les zooms et le zapping frénétique) pour repérer les régularités et irrégularités des phénomènes observés...

Éviter d'enfermer les élèves dans une confrontation solitaire avec une calculatrice (que la petitesse des écrans favorise nécessairement) suppose surtout de développer les habitudes de travail collectif. Les différentes expériences menées ces dernières années montrent en particulier l'intérêt du cadre des TP, associant des binômes d'élèves travaillant à la résolution de problèmes du type de celui que nous venons de présenter ici.

Nous n'avons pu, dans le cadre de ce petit compte rendu, aborder que quelques aspects forcément partiels du travail avec des calculatrices symboliques. On trouvera des développements plus importants dans trois ouvrages récents :

Le bilan d'un an de travail avec une classe équipée TI-92 :

Trouche Luc. 1998. *Expérimenter et prouver, faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques (38 variations sur un thème imposé)*. Irem de Montpellier.

Des propositions de renouvellement du cours et des dispositifs de travail :

Bernard René, Christian Faure, Maryse Noguès, Yvon Nouazé et Luc Trouche. 1998. *Pour une prise en compte des calculatrices symboliques au lycée*. Irem de Montpellier.

Le point sur les expériences et les analyses théoriques en Europe :

Guin Dominique. 1999. *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*. Actes de colloque francophone européen. Irem de Montpellier.

TABLE RONDE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE OU AVEC DES CALCULATRICES.

par Gérard Kuntz,
IREM de Strasbourg

Une table ronde constitue un observatoire idéal pour faire le point sur l'état d'une question. Celle du 27 Mars 99 a confirmé que l'outil informatique occupe désormais, modestement mais de façon irréversible, une place à part entière dans l'enseignement des mathématiques. Les grandes passions du début (pour ou contre) ont disparu. Le travail d'intégration a progressé (l'Apmep et les Irem n'y sont pas étrangers). Les illusions dissipées, on mesure mieux l'intérêt et la difficulté d'utiliser des calculatrices de plus en plus perfectionnées pour apprendre des mathématiques.

L'outil informatique favorise *l'initiative des élèves.* Il peut redonner *goût et motivation* à ceux qui sont en difficulté. Il permet d'expérimenter, de conjecturer, de vérifier ou d'infirmer des hypothèses. *Il fait des élèves les acteurs de leur formation.*

Il pose autrement la question de la preuve. L'atelier de Luc Trouche en est l'illustration. Le problème abordé a été entièrement traité sur machine. A-t-on prouvé le résultat? Les opinions n'ont pas été unanimes.

Il bouscule les évaluations traditionnelles. On a enfin compris qu'ont peut, en analyse par exemple, évaluer les connaissances d'un élève à partir d'une courbe qui lui est fournie!

Il impose de nouveaux apprentissages, techniques et intellectuels. Utiliser efficacement une TI92 ne va pas de soi. Il faut traduire le problème pour la machine. Dans l'atelier de Luc Trouche, la machine donnait l'équation d'une tangente au point d'abscisse a à la courbe de f en réponse à la commande « Taylor(f(x),x,a,1) » ! Peu de participants y avaient pensé.

Il perd tout intérêt si on ne sait pas interpréter les figures ou les résultats numériques qu'il produit.

Tous ces apprentissages sont essentiels en mathématiques et au-delà, pour la vie professionnelle.

Le choc des calculatrices à peine absorbé, voici celui, plus rude encore, du multimédia. On en pressent l'intérêt, les difficultés, les illusions inévitables quant arrive une innovation aussi considérable. Internet, CD-ROM éducatifs, classes virtuelles doivent être évalués, analysés en profondeur.

Nous ne sommes pas au bout des adaptations nécessaires. Il faut éviter qu'elles ne se transforment en capitulation sans conditions devant les sirènes de la « modernité ».

NOTES DE LECTURE
par Gérard Kuntz

La Tête bien faite
Edgar Morin(Seuil 1999, 154 pages, 98 F. ISBN 2.02.037503.6)

La réforme du système éducatif préconisée par Edgar Morin dans ce livre n'a aucune chance de passer dans les faits tant elle est radicale et exigeante. Elle se situe dans le droit fil de « La Méthode[1] », son immense effort pour repenser au fil des ans la connaissance de cette fin de millénaire. Déclinons ses maîtres-mots.

Décloisonner. La science et les humanités ne doivent plus s'ignorer. Ce sont les deux faces inséparables de la connaissance. La science, privée de réflexivité sur les problèmes généraux et globaux, devient incapable de se penser elle-même et de penser les problèmes sociaux et humains qu'elle engendre. La culture des humanités, tel un moulin privé du grain des acquis scientifiques sur le monde et la vie, tourne à vide …

Réorganiser les enseignements épars en grands thèmes transversaux dont la recherche donne des exemples. La cosmologie moderne inclut l'astronomie sous tous ses aspects, la physique dans ses plus ultimes développements, les mathématiques pour modéliser, la technologie (y compris celle des satellites) pour l'instrumentation, la philosophie qui pense l'univers et l'homme en son sein, la mythologie qui éclaire ses représentations. Les sciences de la terre et de l'écologie englobent elles aussi de nombreuses disciplines jadis éparses…

Penser en termes systémiques. Désordre, ordre et organisation ont partie liée. Les causes engendrent des effets qui rétroagissent sur elles et les modifient. Il est impossible d'appréhender le tout sans connaître ses parties. Cerner les parties en ignorant le tout est tout aussi illusoire. L'écologie (dont l'homme est un élément déterminant) et les sociétés humaines (inséparables de leur écosystème) en fournissent des exemples à foison.

Ne pas succomber au mirage du modernisme technologique. L'accès à l'information n'est pas synonyme de connaissance. On peut connaître sans comprendre. Internet ne saurait être à lui seul l'avenir du lycéen…

Notre système éducatif repose toujours sur le paradigme de la science classique[2] : réduction du complexe à ses composantes simples, étude des objets ainsi isolés. Il en résulte un éclatement de la connaissance en disciplines fermées sur elles-mêmes. L'absence d'une vue d'ensemble qui pourrait donner du sens aux différentes matières est une raison importante de *l'ennui* éprouvé par de nombreux élèves[3]. Le messianisme technologique n'y changera rien.

La réforme préconisée par Edgar Morin, de l'école primaire à l'université, n'est pas celle des horaires et des programmes : il propose d'introduire à tous les niveaux la forme de pensée qui nourrit la science contemporaine. Douce utopie ? Sans doute. Et pourtant…

---

[1] 5 tomes dans la collection ***« Points Essais ».*** La Nature de la Nature (n°123, 1981), la Vie de la Vie (n°175,1985), la Connaissance de la Connaissance (n°236, 1992), les Idées. Leur habitat, leur vie, leur moeurs et leur organisation (n° 303, 1995), l'Humanité de l'Humanité (à paraître).

[2] Il fut à l'origine de ses formidables succès. Ses limites, bien connues aujourd'hui dans le milieu des chercheurs, ne sont guère prises en compte dans l'enseignement secondaire.

[3] Beaucoup d'élèves de lycée sont à tel point imprégnés du cloisonnement des disciplines qu'ils s'étonnent et résistent quand un enseignant établit des liens transdisciplinaires.

NOTE DE LECTURE

par Gérard Kuntz

Tableau noir, Résister à la privatisation de l'enseignement
Gérard de Sélys & Nico Hirtt, Éditions EPO

119 pages, Format 11*17.5, Prix 71 F, ISBN 2 87262 134 2

Voici un livre à lire, *toutes affaires cessantes*. Vous y trouverez des informations à faire dresser les cheveux sur la tête de tout citoyen attaché au service public d'enseignement. Sa thèse est limpide et stupéfiante : grâce aux nouvelles technologies de l'information et de la communication (TIC), de grands groupes industriels projettent, dans un avenir proche, de lancer une véritable O.P.A. sur les systèmes publics d'enseignement, pour y substituer *un enseignement privé, payant, destiné aux enfants des familles solvables et capables d'utiliser efficacement les TIC (ordinateurs et réseaux)*.

Discrètement, dans les coulisses des organisations internationales (la Commission des Communautés Européennes et l'OCDE par exemple), l'ERT (European Round Table) qui rassemble les dirigeants de 47 grands groupes industriels européens, mène une puissante action de lobbying. L'ERT prépare les décideurs internationaux aux *« inéluctables »* bouleversements qu'elle appelle de ses vœux, en attendant que ses *« produits éducatifs »* envahissent le *« marché »*.

Les textes qui émanent de l'ERT et de diverses organisations internationales ne laissent aucun doute sur ce qui se prépare. Le mérite des auteurs est de mettre ces documents (souvent confidentiels et proprement hallucinants) dans le domaine public, en pleine lumière. Ils sont dans le droit fil de la récente tentative de *traiter la culture comme un « produit industriel »*. Lors de la dernière négociation du GATT, il fallut un rude combat pour faire échec à cette aberration. *L'éducation réduite à un « marché » dont les exclus seraient légion, tel est le cauchemar dont l'ERT nous menace.*

Les moyens techniques pour le réaliser existent déjà : de grands groupes industriels possèdent en France près de 80% de l'édition scolaire et universitaire. Ils maîtrisent aussi les technologies (câble ou télécommunications) pour atteindre le « client » chez lui, sans intermédiaires. Il reste à fabriquer les « produits éducatifs » et à les vendre sur les réseaux. (Les CD-ROM éducatifs et les premières classes virtuelles rencontrent dès maintenant un succès considérable). Pour offrir des *« produits éducatifs »* couvrant un domaine étendu, il faut, Dieu merci, du temps. Un répit dont il faut profiter pour mettre en échec ce sinistre projet et pour imaginer un usage des TIC plus conforme à l'intérêt général.

Un seul regret : le livre est écrit dans un style inutilement polémique et simplificateur. Les textes cités parlent par eux-mêmes. La polémique outrancière affaiblit le propos.

OUTILS MATHÉMATIQUES POUR ÉLÈVES NON FRANCOPHONES OU EN DIFFICULTÉ

Odile ANDRÉ - Geneviève JOST - Marie Anne KEYLING - Catherine LECLERCQ
Odile OSTERMANN - María Luisa PEREZ C. de A. - Fabienne SCHEURER - Nathalie WACH

Depuis plusieurs années nous accueillons des élèves non francophones dans nos classes de Cla et de lycées internationaux. De nombreux élèves souhaitent poursuivre leur scolarité en France et doivent par conséquent s'intégrer dans le système scolaire français. De plus ces classes sont très ouvertes et les arrivées en cours d'année sont très fréquentes ce qui représente une difficulté supplémentaire pour les enseignants.

Les difficultés rencontrées par ces élèves résultent d'une part de la langue et du vocabulaire spécifique à la matière qui sont à assimiler rapidement pour pouvoir suivre le cours normal (l'utilisation du livre de la classe s'avère impossible au début). D'autre part, les contenus des programmes diffèrent d'un pays à l'autre, si bien que les élèves ne possèdent pas toujours le bagage mathématique nécessaire à la compréhension du programme français. Enfin, les méthodes de raisonnement et de rédaction employées en France constituent un très gros obstacle.

Confronté à ce type d'élèves, nous avons choisi de présenter sous la forme de fiches de travail les notions essentielles des programmes des classes de 4^{e} et de 3^{e}, ou plus globalement, ce qu'un élève doit maîtriser à son entrée en seconde.

La plupart des fiches ont été élaborées pour être utilisées indépendamment suivant les besoins ou les difficultés ponctuelles des élèves. Elles constituent un complément au travail fait en classe et ne sauraient, en aucun cas, se substituer au livre de mathématiques. Ces fiches peuvent être utilisées au même moment par toute la classe ou peuvent faire l'objet d'un travail autonome pour un élève en difficulté sur une partie bien précise du programme. Dans ces classes très hétérogènes, le travail autonome peut permettre à un élève de combler ses lacunes.

Chaque fiche traite une notion sous la forme suivante :

- un résumé de cours bref, exprimé avec un vocabulaire simple sur le minimum à savoir concernant la notion
- un ou deux exercices résolus et commentés permettant à l'élève de se familiariser avec des énoncés, des consignes et la rédaction attendue
- une série d'exercices d'entraînement dont les objectifs sont très différents : de l'application directe du cours à l'exercice de réflexion et de rédaction.

Le professeur conseillera les élèves sur les choix des exercices à faire en fonction des besoins de chacun.

Des étrangers venant en France lorsque les identités remarquables ont été traitées en classe et n'ayant pas assimilé cette notion, pourront l'étudier seuls avec les fiches correspondantes (exemple fiche : Les identités remarquables … une technique pour développer).

Pour beaucoup d'élèves qui arrivent sans avoir abordé la géométrie, ou pour des français qui n'ont pas saisi l'importance de la rédaction, les fiches de géométrie donnent un exemple propre et net d'une solution rédigée (exemple fiche : Triangle et cercle … pour démontrer qu'un triangle est rectangle).

Les fiches du guide permettent aux élèves de retrouver à tout moment de l'année la signification d'un mot français utilisé en mathématiques et les formulations françaises des théorèmes et propriétés de base qui peuvent être utilisées pour une démonstration et qu'ils connaissent peut-être dans leur langue maternelle (exemple fiche : Comment montrer qu'un triangle est rectangle).

Toutes ces fiches ont été regroupées dans une brochure qui comprend trois parties :

- algèbre
- géométrie
- guide (vocabulaire et notions de base).

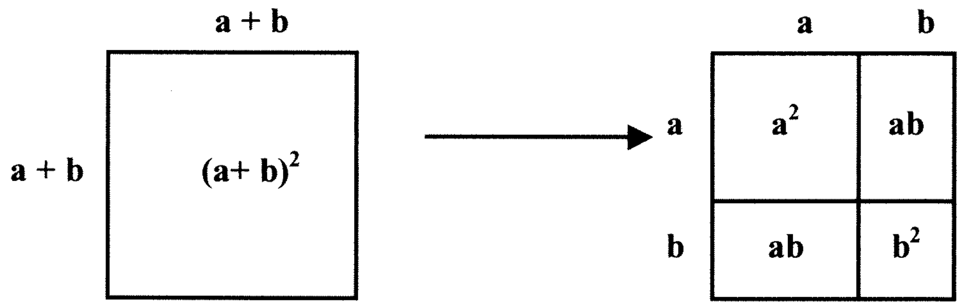
Nous pensons que ces fiches peuvent également servir à des élèves francophones de classes de 3e ou 2e en difficulté. De nombreux élèves de nos classes ont des lacunes ponctuelles ou plus étendues. Ils ont besoin de rappels de cours simples et d'exercices adaptés pour combler leurs lacunes. Ces fiches peuvent servir pendant des séances de remédiation individualisées ou en travail autonome à la maison.

Voici les exemples cités plus haut.

Au-delà d'une aide précieuse aux élèves non francophones, ces fiches constituent aussi une source d'exercices de difficultés graduées qui permettent un travail de remédiation individualisé dans n'importe quelle classe de troisième de collège.

La brochure <u>OUTILS MATHÉMATIQUES pour élèves non francophones ou en difficulté</u> est en vente à l'IREM de Strasbourg 7 rue René Descartes 67084 StrasbourgCedex au prix de 55 F +20 F de frais de port.

1. LES IDENTITÉS REMARQUABLES … UNE TECHNIQUE POUR DÉVELOPPER



Donc $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

PRODUIT	Développer $\longrightarrow$	SOMME
$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2\,ab + b^2$
$(a - b)^2$	=	$a^2 - 2\,ab + b^2$
$(a + b)(a - b)$	=	$a^2 - b^2$

EXEMPLES	REMARQUES
Développer, réduire et ordonner : $A = (x + 5)^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$	$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$
Développer, réduire et ordonner : $B = (7 - x)^2 = 7^2 - 2 \times 7 \times x + x^2 = 49 - 14\,x + x^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$
Développer, réduire et ordonner : $C = (x + 7)(x - 7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Développer, réduire et ordonner : $D = (2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$	$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ **Attention** $(2x)^2 = 2^2\,x^2 = 4x^2$
Développer, réduire et ordonner : $E = (5x - 8)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 8 + 8^2 = 25x^2 - 80x + 64$	$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$ **Attention** $(5x)^2 = 5^2x^2 = 25x^2$
Développer, réduire et ordonner : $F = (3x + 7)(3x - 7) = (3x)^2 - 7^2 = 9x^2 - 49$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ **Attention** $(3x)^2 = 3^2\,x^2 = 9x^2$

2. LES IDENTITÉS REMARQUABLES … UNE TECHNIQUE POUR DÉVELOPPER – EXERCICES –

Exercice 1

Développer, réduire et ordonner :

1. $(x + 8)^2 =$
2. $(x - 4)^2 =$
3. $(x - 2)(x + 2) =$
4. $2(x - 5)^2 =$
5. $(3x - 5)^2 =$
6. $(8x + 11)^2 =$
7. $(x - \frac{2}{3})^2 =$
8. $\left(\frac{1}{3} + x\right)\left(\frac{1}{3} - x\right) =$
9. $\left(9x - \frac{4}{5}\right)\left(9x + \frac{4}{5}\right) =$
10. $\left(\frac{5}{3}x - \frac{1}{5}\right)^2 =$
11. $(-x - 8)^2 =$

Exercice 2

Compléter :

1. $(x + \ldots)^2 = \ldots + \ldots + 16$
2. $(3x - \ldots)^2 = \ldots - 24x + \ldots$
3. $(\ldots + 7)(\ldots - \ldots) = x^2 - \ldots$
4. $(\ldots + \ldots)^2 = \frac{1}{4} + \ldots + x^2$
5. $(\ldots + \ldots)^2 = \ldots - 12x + 4$

Exercice 3

Développer et réduire :

1. $A = x^2 - (3x + 1)^2$
2. $B = 4(x + 3) + 2(x - 3)^2$
3. $C = 6x + 2x(x - 7)(x + 7)$
4. $D = (6x + 8)^2 - 2(1 - 5x)(2x + 7)$

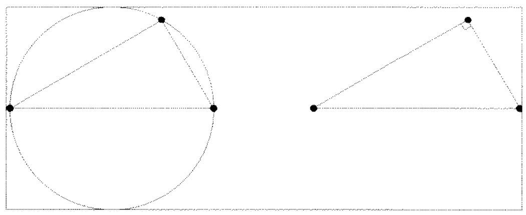
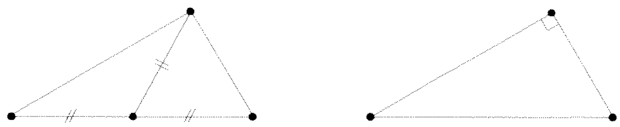
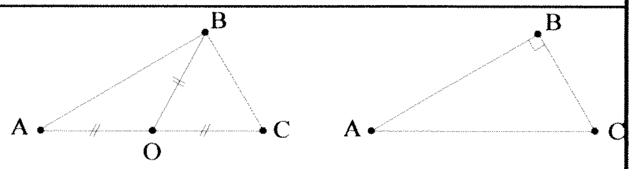
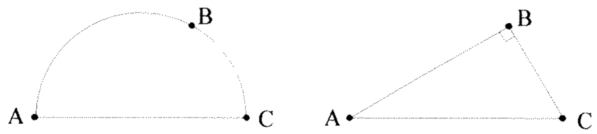
Exercice 4

Calculer

1. $999\ 999 \times 1\ 000\ 001 =$
2. $1\ 000\ 001^2 - 999\ 999^2 =$

3. TRIANGLE ET CERCLE …

POUR DÉMONTRER QU'UN TRIANGLE EST RECTANGLE

Dans un triangle, **si** l'un des côtés est un diamètre du cercle circonscrit à ce triangle, **alors** ce triangle est rectangle.	
Dans un triangle, **si** le milieu de l'un des côtés est à égale distance des trois sommets, **alors** ce triangle est rectangle.	
Dans le triangle ABC, **si** le milieu O de [AC] vérifie OA = OB = OC, **alors** le triangle est rectangle en B.	
Si B appartient au cercle de diamètre [AC], **alors** le triangle ABC est rectangle en B.	

EXEMPLES	SOLUTIONS	FIGURES À FAIRE
A, B, C et I sont quatre points tels que AI = CI = BI et A, I et C sont alignés. 1. Faire la figure. 2. Montrer que le triangle ABC est rectangle.	A, I et C sont alignés et AI = IC, donc I est le milieu de [AC] ; AI = CI = BI, I est à égale distance des trois points A, B et C. On en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.	
Le diamètre [AC] du cercle circonscrit au triangle ABC est 5 cm et AB = 3cm . 1. Faire la figure. 2. Montrer que ABC est un triangle rectangle en B. Calculer BC.	B appartient au cercle de diamètre [AC]. On en déduit que le triangle ABC est rectangle en B. On peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle ABC : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 25 - 9 = 16$ BC = 4 cm	

4. TRIANGLE ET CERCLE …

POUR DÉMONTRER QU'UN TRIANGLE EST RECTANGLE

– EXERCICES –

Exercice 1

Construire un triangle ABC rectangle en B tel que AB = 3 cm et dont le rayon du cercle circonscrit est 2,5 cm.

Exercice 2

ABC est un triangle. BC = 3cm, I est le milieu de [BC] et AI = 1,5 cm. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 3

ABC est un triangle rectangle en A, M est le milieu de [BC]et E est le point tel que M est le milieu de [AE]. Quelle est la nature de ABCE ?

Exercice 4

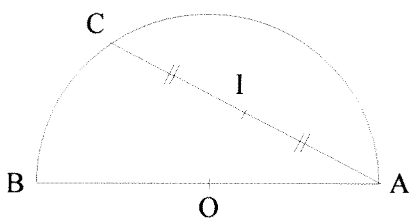
D et E sont deux points tels que DE = 4 cm ; construire sans équerre (en utilisant uniquement la règle et le compas) 5 triangles rectangles d'hypoténuse [DE].

Exercice 5

(D) est une droite et A un point qui n'appartient pas à (D) ; tracer sans équerre la droite perpendiculaire à (D) et passant par A.

En déduire un programme de construction des hauteurs d'un triangle sans équerre.

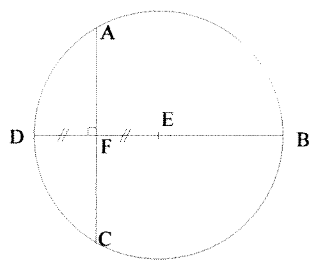
Exercice 6



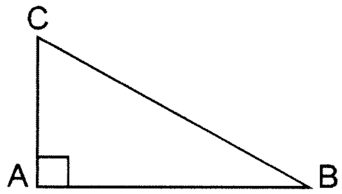
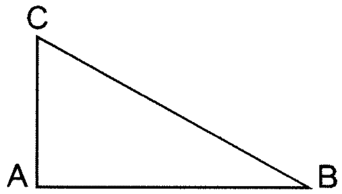
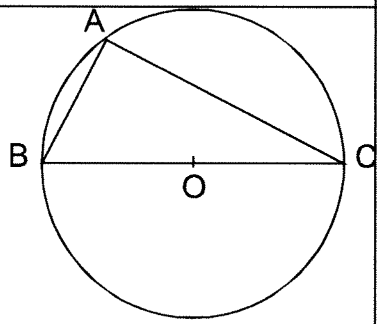
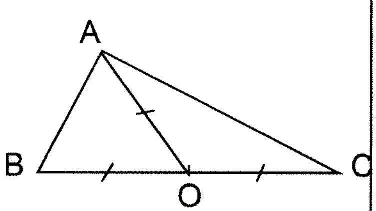
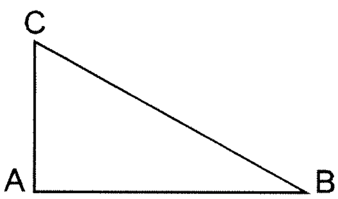
1. Montrer que les triangles ABC et IOA sont rectangles et que I est sur le cercle de diamètre [OA].
2. Lorsque AB = 5cm ; calculer les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABC et IOA.

Exercice 7

Trouver tous les triangles rectangles de la figure.



5. COMMENT MONTRER QU'UN TRIANGLE EST RECTANGLE ?

	Un triangle qui a un angle droit est un triangle rectangle.	On sait que : $[AB] \perp [AC]$ on en déduit que : ABC est un triangle rectangle en A.
	Un triangle qui a deux angles complémentaires est un triangle rectangle.	On sait que : $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$ on en déduit que : ABC est un triangle rectangle en A.
	**Si** A appartient au cercle de diamètre [BC], **alors** le triangle ABC est rectangle en A.	On sait que : A est sur le cercle de diamètre [BC] on en déduit que : ABC est un triangle rectangle en A.
	Lorsque la médiane relative à un côté d'un triangle mesure la moitié de ce côté alors ce triangle est rectangle.	On sait que O est le milieu de [BC] $AO = \frac{1}{2}BC$ on en déduit que ABC est rectangle en A.
	Réciproque du Théorème de **Pythagore** **Si** les côtés d'un triangle ABC vérifient : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **alors** le triangle ABC est rectangle en A.	On calcule AB^2, AC^2 et BC^2 . On remarque que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

A VOS STYLOS

Rappel à propos de cette rubrique de problèmes.— Nous cherchons autant que possible à soumettre à nos lecteurs des problèmes originaux, ou en tout cas méconnus. Comme en général peu de mathématiciens ont réfléchi à ces énoncés, du moins sous la forme où ils sont ici proposés, il est hasardeux de prétendre évaluer leur niveau de difficulté. Certains problèmes peuvent donc s'avérer difficiles. Qu'il soit entendu que ni les auteurs des problèmes, ni l'animateur de la rubrique ne sont tenus d'apporter des solutions complètes. L'objectif n'est pas celui-là, il est bien plutôt de susciter l'intérêt des lecteurs, qui sont par ailleurs invités à soumettre leurs propres énoncés pour cette rubrique.

Dominique Dumont

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

Solutions, par Pierre Renfer et Jacques Dautrevaux.—

Suite à la parution dans notre précédent numéro d'une solution proposée par P. Renfer, nous avons reçu deux courriers de J. Dautrevaux. Sa première lettre nous confirme dans l'impression que le théorème de Morley et Peterson est un peu tombé dans l'oubli et sa solution peu accessible, ce qui justifiait le fait qu'on l'ait proposé dans la présente rubrique. En effet, selon J. Dautrevaux, il en est fait mention seulement sous forme d'énoncés d'exercices dans *J. Frenkel, Géométrie pour l'élève-professeur, p. 339* et aussi dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès, tome 3, p. 681*, avec une indication de méthode différente. J. Dautrevaux nous envoie une solution élégante, géométrique, n'utilisant que les notions élémentaires de produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte.
Dans un second courrier, J. Dautrevaux nous a fait parvenir un long article qui est en fait un cours sur les torseurs : introduction, applications à la Mécanique et à la Géométrie, avec en conclusion une nouvelle et élégante démonstration du théorème de Morley et Petersen.
Faute de place, nous ne pouvons publier les solutions de Jacques Dautrevaux dans cette rubrique à vos stylos.

PROBLÈME 54

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Montrer que si x, y et z sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.
2°) Soit n un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1}$$

est égal au nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$xy + yz + zx = n. \tag{2}$$

Exemple.— $n = 35$. L'équation (1) possède six solutions : $(1, 3, 5)$, $(1, 5, 3)$, $(3, 1, 5)$, $(3, 5, 1)$, $(5, 1, 3)$ et $(5, 3, 1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1, 5, 5)$, $(5, 1, 5)$, $(5, 5, 1)$, $(1, 1, 17)$, $(1, 17, 1)$ et $(17, 1, 1)$.

Indication : Montrer que le nombre de triplets d'entiers impairs positifs (x, y, z) satisfaisant l'une ou l'autre des deux équations est aussi le nombre de triplets d'entiers (a, b, c) solutions de l'un ou l'autre des deux systèmes d'équation-inéquations suivants :
• $b^2 - 4ac = -n$, avec a, b, c impairs positifs tels que $b < 2a$ et $b < 2c$.
• $b^2 - ac = -n$, avec a *ou* c impair (*ou* est ici inclusif), b tel que $|2b| \leq a \leq c$ et, dans le cas où l'une au moins de ces deux inégalités est une égalité, $b > 0$.

Continuation de l'exemple.— $n = 35$. Le premier système a six solutions (a, b, c) qui sont : $(1, 1, 9)$, $(3, 1, 3)$, $(9, 1, 1)$, $(3, 5, 5)$, $(5, 5, 3)$ et $(9, 17, 9)$; le second système a également six solutions (a, b, c) qui sont : $(1, 0, 35)$, $(5, 0, 7)$, $(3, 1, 12)$, $(3, -1, 12)$, $(4, 1, 9)$ et $(4, -1, 9)$.

PROBLÈME 55

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(x + 1)$$

dans l'ensemble le plus vaste possible.

Suggestions de P. Renfer et J. Lefort : a) Une solution f est-elle nécessairement de classe C^∞ ? Comparer ses dérivées successives aux points 0 et 1.

b) Construire une suite de fonctions f_n, où f_n est définie sur $[n, n+1]$ par la récurrence $f_n(x) = f'_{n-1}(x+1)$. Puis recoller ces fonctions.
c) Rechercher des solutions particulières de la forme $e^{\alpha x} sin(\beta x)$, où α et β sont des constantes à déterminer ou à approcher.

PROBLÈME 56

Énoncé (proposé par M. Emery) :

1°) Soient a, b, r des réels tels que $a < b$ et $0 < b-a < 2r$. Soit u une fonction réelle continue sur $[a, b]$, telle que $u(a) = u(b)$, et satisfaisant la propriété suivante :
pour tout z intérieur à $[a, b]$, il existe c et d tels que $a < c < z < d < b$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r, c'est-à-dire donné par une équation de type $y = p + \sqrt{r^2 - (x-q)^2}$.
Montrer que le graphe de u est lui-même un arc de cercle de rayon r.
Remarque.— On peut, dans un premier temps, chercher une démonstration en imposant des hypothèses plus fortes à la fonction u (par exemple des conditions de différentiabilité).
2°) Soient J un intervalle ouvert, r un réel > 0 et u une fonction continue sur l'adhérence de J. On suppose que pour tout z de J il existe c et d dans J tels que $c < z < d$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r.
Montrer que J est borné, de longueur au plus $2r$, et que le graphe de u est un arc de cercle de rayon r.

PROBLÈME 57

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante entre séries formelles (ou entre séries entières dont on aura calculé le rayon de convergence) :

$$\left(1+x+2^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3 = \left(1+2^2x+3^3\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1-x-\frac{x^2}{2!}-2^2\frac{x^3}{3!}-3^3\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)$$

PROBLÈME 58

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante (on peut, soit lui donner un sens formel en développant chaque fraction rationnelle selon les puissances croissantes de x, soit supposer que $|x| < 1$) :

$$\left(\frac{x}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^6}+\frac{5x^5}{1-x^{10}}+\cdots\right)^2 = \frac{1^3x^2}{1-x^4}+\frac{2^3x^4}{1-x^8}+\frac{3^3x^6}{1-x^{12}}+\frac{4^3x^8}{1-x^{16}}+\cdots$$

PROBLÈME 59

Énoncé (proposé par P. Borel) :

Soit n un entier relatif. Montrer que $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré.

PROBLÈME 60

Énoncé (proposé par P. Borel) :

Résoudre l'équation

$$x^{x^8} = 2$$

a) pour x réel > 0;
b) pour x complexe.

NOUVELLE PARUTION 1999

André Stoll et l'IREM de Strasbourg
vous présentent la
VERSION VIDEO DU DIAPORAMA :

"LES MATHEMATIQUES ? QUELLE HISTOIRE !

LES GEOMETRES GRECS"

CASSETTE I

Partie 1 : Thalès - Pythagore - Zénon - Platon	(28 min)
Partie 2 : Les trois problèmes de la géométrie grecque	(10 min)

"Les philosophes qui prétendent que les sciences mathématiques ne font aucune place, ni au beau, ni au bien, sont assurément dans l'erreur : le beau est au contraire l'objet principal du raisonnement de ces sciences et de leurs démonstrations (...) car elles en montrent les effets et les rapports. Les formes les plus hautes du beau sont l'ordre, la symétrie, le défini et c'est là surtout ce que font apparaître les sciences mathématiques. " (Aristote) .

C'est ce qu'ont voulu montrer André Stoll et un groupe pluridisciplinaire travaillant sur l'histoire des mathématiques à l'IREM de Strasbourg, auteurs de ce montage audiovisuel. Il présente les multiples facettes de l'oeuvre des mathématiciens grecs, la géométrie certes, mais aussi la philosophie et la politique. Il expose les recherches et les interrogations d'hommes célèbres, Thalès, Pythagore, Archimède et Euclide. D'autres, moins connus, Apollonius ou Euxode de Cnide par exemple, sont tirés d'un injuste oubli.

Les mathématiques ont leur histoire, intimement liée à l'histoire humaine et bien des élèves l'ignorent. Le montage, œuvre d'amateurs de belles images, passionnés par l'enseignement, révèle cet aspect fascinant.

Il s'adresse à des élèves de lycée (ou à des étudiants) et peut être étudié en classe de mathématiques et éventuellement donner lieu à un travail transversal avec le professeur de philosophie en terminale.

Au cours des années passées, André Stoll a présenté le diaporama lors de différentes rencontres d'enseignants et s'est déplacé pour l'exploiter dans de nombreuses classes de toutes sections. La version vidéo qui paraît aujourd'hui facilite considérablement sa mise en œuvre et permet à chacun de personnaliser son utilisation.