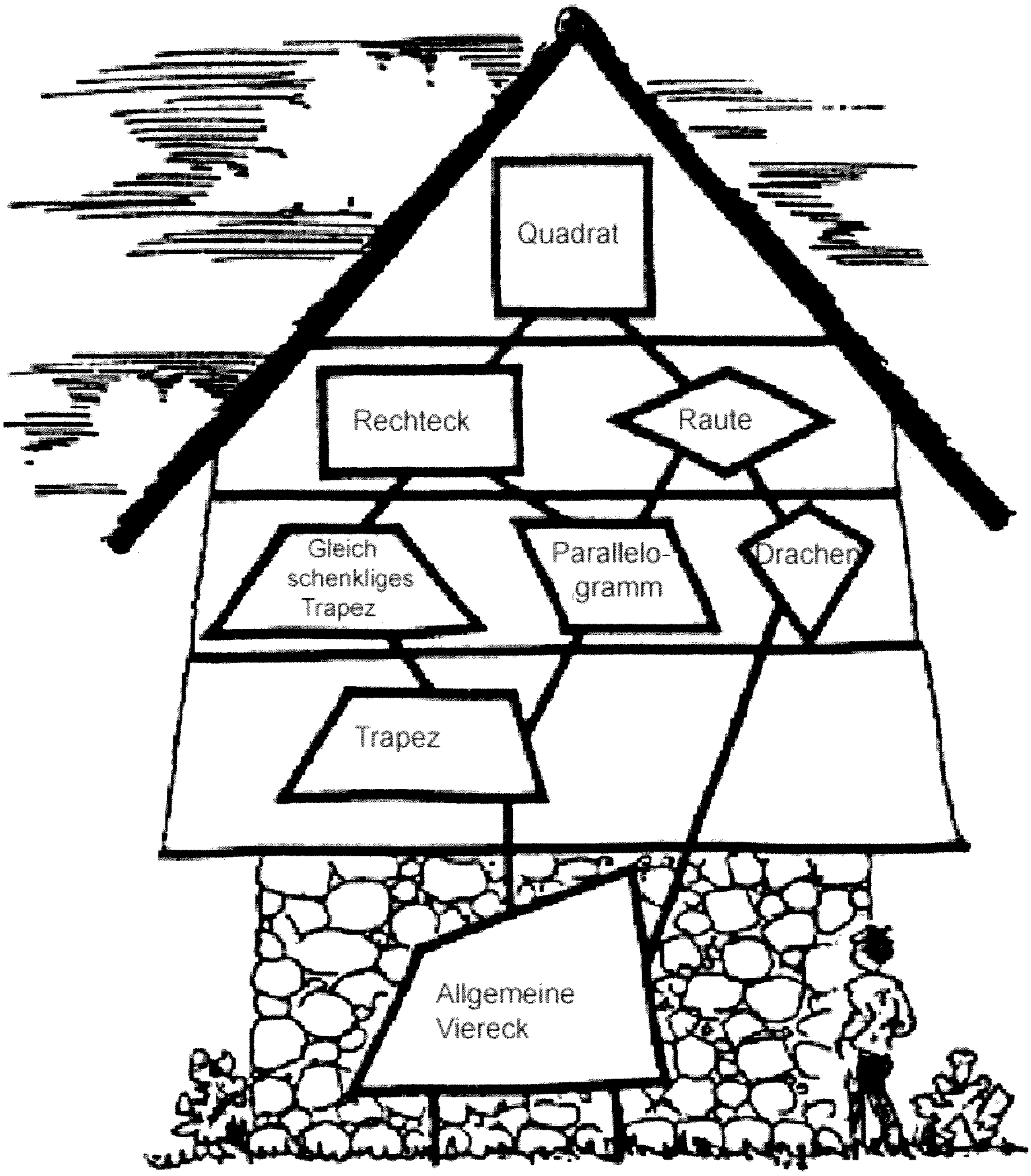
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 96 SEPTEMBRE 1999 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

La maison des quadrilatères

La couverture reproduit l'une des figures d'un article sur "la maison des quadrilatères, une suggestion pour animer l'activité mathématique véritable" et que vous trouverez p. 14 à 33.

Il nous est fourni par un étudiant à la pädagogische Hochshule de Heildelberg, l'équivalent de nos I.U.F.M., Mr. Giuseppe Pintaudi. Celui-ci y fait une analyse comparée de l'enseignement des quadrilatères en France et en Allemagne.

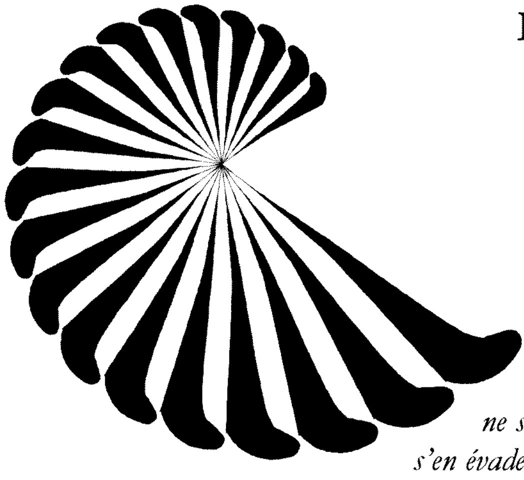
SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 96 – 1999

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
http://irem.u-strasbg.fr
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre du Régisseur
de Recettes de l'I.R.E.M.
◇ *Prix du numéro* : 35.– F



LES SPIRALES (1re partie)

André STOLL
Lycée Louis Couffignal
IREM de Strasbourg[1]

« Quelle spirale, que l'être de l'homme. Dans cette spirale, que de dynamismes qui s'inversent. On ne sait plus tout de suite si l'on court au centre ou si l'on s'en évade. »

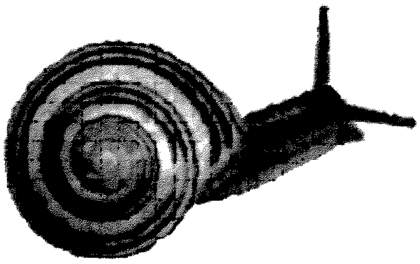
BACHELARD, Poétique de l'espace.

1. Introduction

Les spirales ? Elles sont présentes partout. Dans le monde animal ou végétal, admirez la forme superbe d'un nautile ou d'une coquille d'escargot. Admirez également la fleur de la marguerite. Celle-ci est composée d'une centaine de fleurons élémentaires jaunes, disposés en son cœur selon une double gerbe de spirales droites ou gauches. Vous en trouverez également dans les tableaux de Léonard de Vinci, de Dürer et autres artistes peintres, en architecture, en ferronnerie, en mécanique... Sur une pellicule photo, un banal escalier hélicoïdal devient une spirale. En astronomie, nul ne peut ignorer les galaxies en forme de spirale.

LÉONARD DE VINCI : L'ANNONCIATION

Cette figure est présente dans toutes les cultures. Elle est chargée de signification symbolique. C'est un motif ouvert et optimiste. Elle représente les rythmes répétés de la vie, le caractère cyclique de l'évolution.



Paradoxalement pourtant, dans la langue française, on ne parle d'elles que pour évoquer un échec, une crise… la spirale du chômage, la spirale de la violence…

Paradoxalement encore, si ces courbes sont si présentes dans notre environnement, elles sont

[1] Ce texte est un résumé de la conférence donnée le 28 mars 1998 à la régionale d'Alsace de l'APMEP.

presque complètement oubliées dans l'enseignement des mathématiques. Pourquoi ? Difficile de répondre de manière précise à cette question. Certains disent qu'elles sont trop difficiles à tracer. C'est évidemment une fausse raison. D'ailleurs à l'ère des calculatrices graphiques et autres traceurs de courbes cette raison ne peut pas expliquer leur absence.

Dans l'histoire des mathématiques, ces figures sont intervenues comme solutions de problèmes fondamentaux et extrêmement variés. Et très souvent, elles apparaissent là où on ne les attendait pas !

Au cours de l'article ci-dessous, je souhaiterais d'une part présenter quelques spirales en les remettant dans leur contexte historique et d'autre part, montrer ce que l'étude de ces courbes peut apporter à un enseignant de mathématiques.

2. La spirale de Théodore de Cyrène.

1. De l'incommensurabilité de la diagonale du carré à la spirale de Théodore.

Dans l'ouvrage de *Platon* qui porte son nom, *Théétète* affirme que son maître, *Théo-*

THÉODORE DE CYRÈNE (finV^{e} – débutIV^{e} siècle avant J.C.)

Mathématicien grec, qui enseignait à Cyrène. D'après Diogène Laërce, Théodore de Cyrène aurait connu et même instruit Platon, lors de son passage à Cyrène. Platon fait d'ailleurs de lui un des personnages de la trilogie du Théétète , en le présentant à la fois comme ami de Socrate et comme ami de Protagoras (un disciple de Pythagore). Dans le catalogue d'Eudème conservé par Proclus, Théodore est cité après Hippocrate de Chios. Il figure également dans la liste de Jamblique comme pythagoricien. C'est, en tout cas, de la grande découverte pythagoricienne de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré (racine carrée de 2) qu'il est parti pour étudier ce que nous appelons actuellement l'irrationalité des racines carrées des nombres de 3 à 17, sans doute par des procédés géométriques comme nous pouvons le lire dans le «Théétète » de Platon :

THÉÉTÈTE. - *Théodore [...] avait fait, devant nous, les constructions relatives à quelques-unes des puissances, montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point, considérées selon leur longueur, commensurables à celle d'un pied, et continué ainsi à les étudier, une par une, jusqu'à celle de dix-sept pieds : il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là.* [Platon : Théétète 147d]

dore, a étudié l'irrationalité des nombres $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ ... jusqu'à $\sqrt{17}$ et qu'il a construit ces nombres devant lui (voir encadré). Comment ? Pourquoi Théodore s'est-il arrêté à $\sqrt{17}$?

Nous ignorons les réponses à ces questions. Depuis plus de 2 millénaires, les mathématiciens et les historiens se posent ces questions et, encore de nos jours, les spéculations continuent.

Une réponse, pleine d'imagination, a été donnée, il y a environ 70 ans par un mathématicien allemand, J.H. Anderhub. Celui-ci imagina que Théodore construisit $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ ...à l'aide d'une suite de triangles rectangles dont l'un des côtés de l'angle droit mesure une unité et l'autre côté de l'angle droit est l'hypoténuse du triangle rectangle précédent, le premier triangle étant rectangle et isocèle (voir figure 1)

Il est aisé de démontrer à l'aide du théorème de Pythagore que les hypoténuses des triangles ainsi construits mesurent $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ …

J.H. Anderhub observa que $\sqrt{17}$ est l'hypoténuse du dernier triangle rectangle avant que la figure ne se superpose à elle-même. En poursuivant la construction, nous obtenons une spirale que J.H. Anderhub dénomma „die Quadratwurzel-schnecke" c'est-à-dire « l'escargot de la racine-carrée » pour rappeler que l'hypoténuse du n-ième triangle est $\sqrt{n+1}$. En l'honneur de Théodore de Cyrène, elle est aussi appelée « la spirale de Théodore » Il se pourrait ainsi que cette spirale, tout en étant une découverte récente, soit la plus ancienne des spirales.

2. Construction de la spirale de Théodore.

La spirale de Théodore est une spirale discrète.

Pour la tracer, nous construisons un triangle rectangle et isocèle (OA_1A_2) puis, par récurrence, les points A_3, A_4, A_5,... tels que :

– les angles $O\widehat{A_nA}_{n+1}$ sont droits :

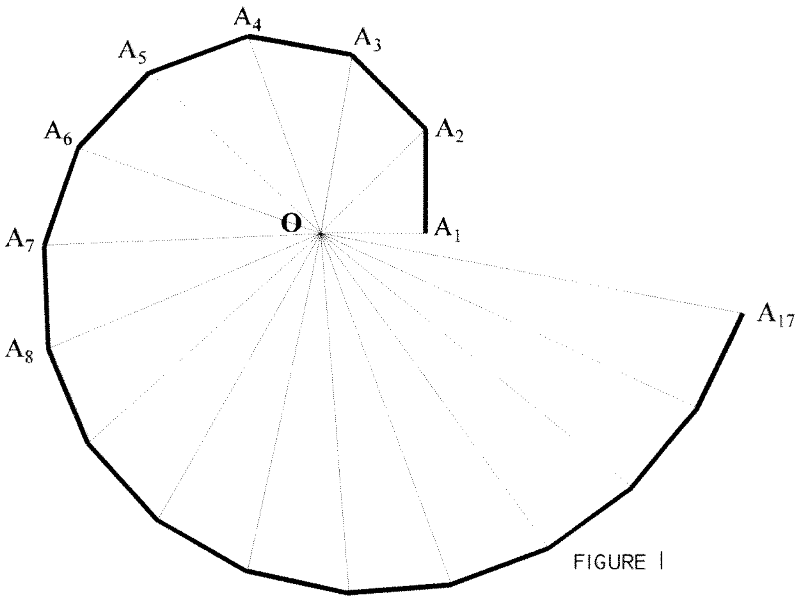


FIGURE 1

$O\widehat{A_1}A_2 = O\widehat{A_2}A_3 = O\widehat{A_3}A_4 = \ldots = 1$ droit

– les côtés $[A_nA_{n+1}]$ ont tous même longueur : $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$

En prenant comme unité de mesure la longueur commune des côtés $[A_nA_{n+1}]$, il est facile de montrer, à l'aide du théorème de Pythagore, que la longueur du segment $[OA_n]$ est $\sqrt{n}$:

$OA_1 = \sqrt{1}$, $OA_2 = \sqrt{2}$, $OA_3 = \sqrt{3}$, $OA_4 = \sqrt{4}$,$OA_5 = \sqrt{5}$, …

3. Pour les enseignants : quelques sujets de réflexion.

La construction de la spirale de Théodore est, sans aucun doute possible, à la portée d'un élève de collège. Mais, en faisant preuve d'un peu d'imagination, elle peut susciter des questions dont le niveau peut dépasser le niveau d'une classe préparatoire. En voici quelques exemples sous forme d'exercices.

Exercice 1

Dans le repère orthonormé direct R = $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ où $\vec{i} = \overrightarrow{OA_1}$, on appelle z_n l'affixe du point A_n . Montrer que $z_{n+1} = \mathbf{i}\,\dfrac{z_n}{|z_n|}$

Retrouver le résultat ci-dessus c'est à dire : $|z_n| = \sqrt{n}$.

Montrer qu'un argument de z_n est, pour $n \geq 2$: $\arg(z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \mathrm{Atan}\,\frac{1}{\sqrt{k}}$.

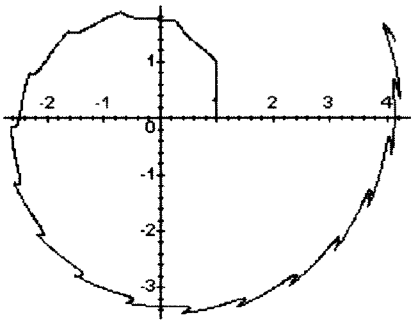


FIGURE 2

Exercice 2

À l'aide du logiciel *Mapple*, construire n points de la spirale de Théodore.

Exercice 3 : Prolongement par « continuité »

La spirale de Théodore est une spirale discrète. Le but de cet exercice est de la transformer en une spirale continue en s'imposant bien évidemment certaines contraintes.

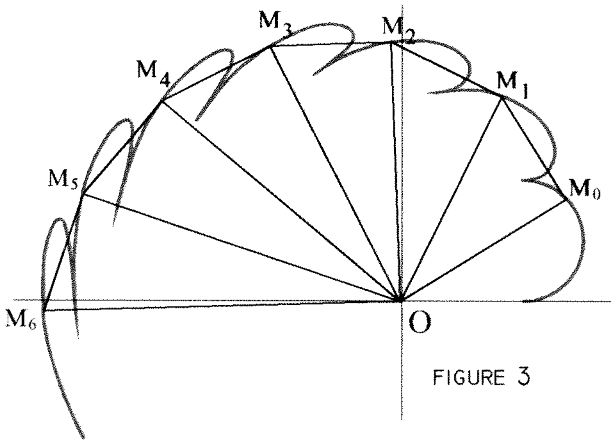


FIGURE 3

Une première idée, très simple, consiste à relier les points A_n par un segment de droite.

Malheureusement, dans ce cas, nous ne pouvons pas généraliser la propriété qui a donné naissance à cette spirale. En effet, on voudrait que si le point M est sur la courbe, alors le point M' tel que MM' = 1 et le triangle OMM' est rectangle soit également sur la courbe. En langage des nombres complexes, cette propriété se traduit par : la courbe est invariante par la transformation

$\Gamma : z \to z \times\left(1 + \dfrac{i}{|z|}\right)$.

D'où l'idée suivante : on relie les points A_1 et A_2 par une courbe (C) quelconque et on applique la transformation Γ à chaque point de cette courbe (C). La figure 2 et la figure 3 montrent le résultat lorsque (C) est un segment de droite ou un demi-cercle.

Écrire un programme permettant à des logiciels de calcul formel comme *Maple*, *Derive* ... de tracer les courbes correspondantes et tracer la courbe obtenue lorsque (C) est un segment de parabole. (Une solution est proposée en figure 3)

Les spirales ainsi obtenues ne sont pas assez « régulières » (comment définir correctement ce terme ?). D'où la deuxième question : trouver l'équation d'une courbe (S) « bien régulière » qui passe par tous les points A_n et telle que si le point M est sur (S) alors le point $\Gamma(M)$ y est également. (Une réponse se trouve en figure 4)

Exercice 4 : Nombre de tours ...

Au dix-septième point, la spirale a presque fait un tour complet.

Montrer que le nombre de spires réalisées lorsque $n \geq 18$ est égal à la partie entière de :

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=n-1} \text{Atan}\,\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

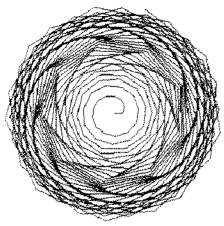


FIGURE 4

Calculer, par exemple, le nombre de tour lorsque $n = 10^9$.

4. Pour le plaisir : généralisons !

Pour construire la spirale de Théodore, nous avons pris une succession de triangles rectangles dont l'un des côtés mesure 1 unité .

(En langage des nombres complexes, ceci correspond à la transformation $z \to z + i\dfrac{z}{|z|}$)

Généralisons en prenant, non plus un angle droit, mais un angle quelconque et le côté A_nA_{n+1} quelconque (Soit une transformation de la forme

$z \to z + b\dfrac{z}{|z|}$ où b est un nombre complexe quelconque). Généralisons encore d'avantage par la transformation

$z \to az + b\dfrac{z}{|z|}$ où a et b sont deux nombres complexes quelconques. Le lecteur inspiré pourra encore généraliser en prenant par exemple a et b dépendant de n. Les résultats sont parfois spectaculaires.

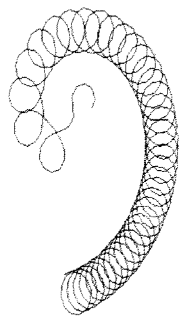


FIGURE 5

La figure 4 et la figure 5 ont été obtenues en prenant :

$a = \exp(i\dfrac{\pi}{4})$, $b = \exp(-i\dfrac{\pi}{4})$ (nombre de points : 300) et

$a = 1,\ b = \frac{1}{2}\exp(i\frac{n}{2})$ (nombre de points : 500).

3. La spirale d'Archimède.

Il est fort probable que c'est en cherchant les solutions des problèmes de la trisection de l'angle et/ou de la quadrature du cercle qu'Archimède eut l'idée d'introduire la spirale qui porte désormais son nom.

Celle-ci mériterait à elle seule un long exposé. Aussi, me contenterais-je de ne donner que quelques résultats concernant la spirale d'Archimède[2]

1. Définition.

Dans le « Traité des spirales », Archimède nous donne la définition suivante :

« Lorsqu'une [demi] *droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, et si sur cette droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira dans le plan une spirale. »*

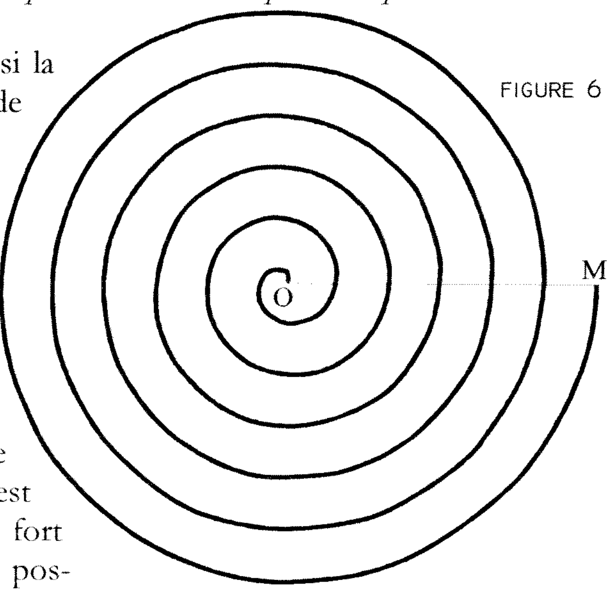
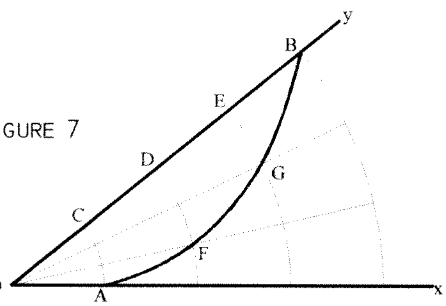


FIGURE 6

Il est tout à fait remarquable que si la définition que nous donne Archimède est purement mécanique, ses démonstrations quant à elles sont purement géométriques !

Archimède a-t-il utilisé la mécanique pour découvrir les résultats concernant la tangente et d'autres propriétés de la spirale? La réponse nous est inconnue. Toutefois, replaçant le traité de la spirale dans l'ensemble de son œuvre, cela est fort possible.

FIGURE 7



2. La spirale d'Archimède et le problème de la trisection de l'angle.

En fait, cette spirale permet de partager un angle en n angles égaux.

---

[2] Le lecteur intéressé pourra consulter l'œuvre d'Archimède : Éditions « Les Belles Lettres » – texte établi et traduit par Charles Mugler - Tome II.
Les enseignants quant à eux pourront consulter la brochure de l'IREM de Strasbourg – *« Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique »* – janvier 1996

En effet, pour partager l'angle $\widehat{xOy}$ en n angles égaux, il suffit de :

– Faire coïncider le sommet de l'angle avec l'origine de la spirale. (Sur la figure 7, n'a été tracé que l'arc de spirale $\widehat{AB}$ où A (resp. B) est l'intersection de Ox (resp. Oy) avec la spirale).

– Le cercle de centre O et de rayon OA coupe la demi-droite [Oy) en C. On partage le segment [CB] en n segments de même longueur (sur la figure, n = 3) : CD = DE = EB.

– Les cercles de centre O et de rayons OD et OE coupent la spirale en F et G.

– On démontre que : $\widehat{xOF} = \widehat{FOG} = \widehat{GOy}$

(La démonstration est laissée au lecteur)

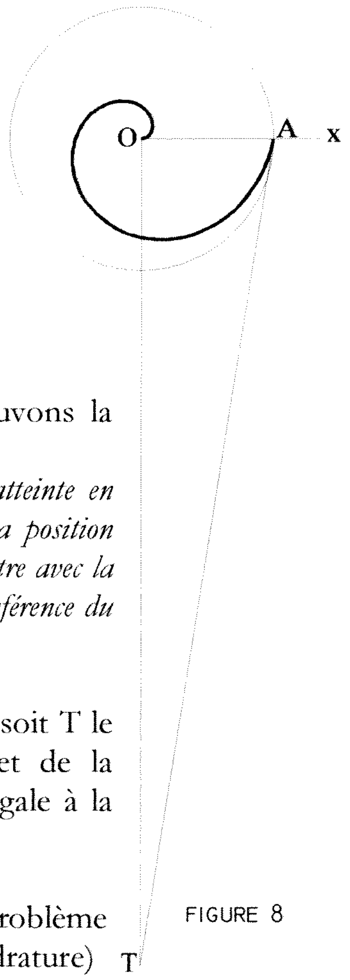


FIGURE 8

3. Tangente à la spirale d'Archimède et quadrature du cercle.

Poursuivant la lecture du traité des spirales, nous trouvons la proposition suivante:

« Et si une droite est tangente à la spirale en son extrémité atteinte en dernier lieu, et qu'on élève, sur la droite ayant tourné et repris sa position initiale, la perpendiculaire à l'extrémité restée fixe jusqu'à sa rencontre avec la tangente, je dis que le segment de droite ainsi mené est égal à la circonférence du cercle. »

Sur la figure ci-contre, cette proposition se traduit par : soit T le point d'intersection de la tangente à la spirale en A et de la perpendiculaire à (OA) en O ; alors la longueur OT est égale à la circonférence du cercle de centre O et de rayon OA

Ainsi la construction d'une tangente à la spirale est un problème équivalent au problème de la rectification (donc de la quadrature) du cercle.

La démonstration que nous donne Archimède de ce théorème offre un bel exemple de la méthode géométrique des Anciens. Elle présente certes des longueurs, mais celles-ci sont nécessaires. Elle est remarquable par sa rigueur et se trouve dégagée de tout usage de considération d'infini.

Au début du XVII^{e} siècle, G. P. de Roberval utilise la composition des vitesses pour aboutir au même résultat.

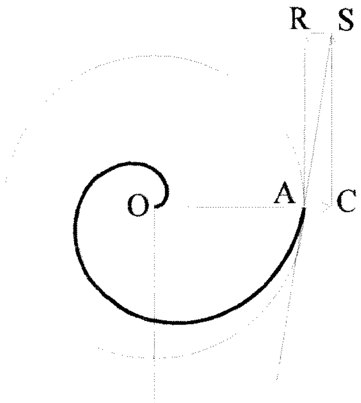


FIGURE 9

Le calcul suivant illustre sa méthode avec des notations contemporaines et la notion de vecteur qui est plus récente.

Supposons, pour fixer les idées, que la demi-droite Ox tourne autour de O à la vitesse constante de 1 tour par seconde. Le mouvement du point A résulte d'un mouvement linéaire représenté par le vecteur $\overrightarrow{AC}$ et de la rotation de Ox représentée par le vecteur $\overrightarrow{AR}$ (voir la figure 8 et la figure 9). La direction du mouvement du point A, qui est la tangente à la spirale en ce point, est donnée par le vecteur $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AR}$.

Les triangles rectangles (ACS) et (AOT) sont semblables, d'où :

$$OT = OA \times \frac{CS}{CA} = OA \times \frac{AR}{AC} = 2\pi \times OA \ .$$

Nous retrouvons ainsi le résultat démontré par Archimède il y a plus de deux mille ans.

4. Aire d'un segment de spirale.

Après avoir étudié la tangente à la spirale, Archimède s'intéresse à l'aire d'un segment de spirale. Il énonce la proposition suivante :

« Je dis, dès lors, que l'aire comprise entre la spirale et la droite revenue à sa position initiale est égale au tiers du cercle décrit autour du point fixe comme centre avec un rayon égal au segment de droite parcouru par le point pendant une révolution de la droite. »

(Sur la figure 10, cette proposition se traduit par : l'aire de la surface hachurée est le tiers de l'aire du disque de centre O et rayon OA)

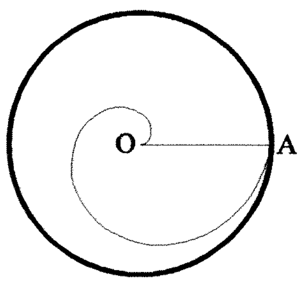


FIGURE 10

Pour démontrer ce théorème, Archimède partage le cercle en un certain nombre de secteurs angulaires. Il encadre alors l'aire $\mathcal{A}$ à calculer par deux aires Σ_1 et Σ_2 dont la différence est aussi petite que l'on voudra. Puis par un double raisonnement par l'absurde, il en déduit le résultat.

L'exercice ci-dessous traduit la méthode d'Archimède en utilisant les notations contemporaines et, contrairement à Archimède, le recours à la notion d'infini.

Exercice 5 : calcul de l'aire d'un segment de spirale

Soit p un nombre entier quelconque, on partage le plan en p secteurs angulaires : w_0Ow_1, w_1Ow_2, ... , $w_{p-2}Ow_{p-1}$, $w_{p-1}Ow_p$ (sur la figure 12, on a pris p = 9).

Si $0 \leq n \leq p$ la demi-droite $[Ow_n$, coupe la spirale en M_n. (pour les notations, voir la figure 12).

L'aire $\mathcal{A}$ à calculer est alors égale à la somme des aires des segments de spirale $(OM_nM_{n+1})=\mathcal{A}_n$ $\qquad \mathcal{A} = \sum_{n=0}^{p-1} \mathcal{A}_n$.

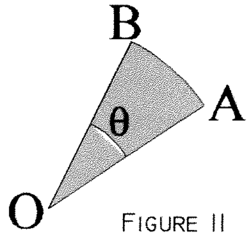


FIGURE 11

Exprimer en fonction de l'angle θ et du rayon $r = OA = OB$ l'aire du secteur angulaire OAB (voir figure 11 pour les notations).

La réponse est : $\frac{1}{2}\ r^2\,\theta$

Exprimer en fonction de p et de n les angles orientés $([Ow_n,[Ow_{n+1})$ et $([Ox, [Ow_n)$. En déduire la longueur OM_n et l'aire des secteurs (OM_nR_{n+1}) et (OP_nM_{n+1}) .

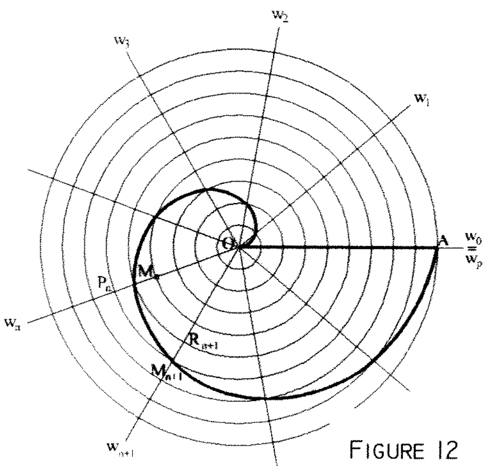


FIGURE 12

Trouver un encadrement de $\mathcal{A}_n$ et en déduire :

$$C\sum_{n=0}^{p-1}\frac{n^2}{p^3} \leq \mathcal{A} \leq C\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(n+1)^2}{p^3}$$ où C désigne l'aire du cercle de centre O et de rayon OA.

Démontrer que $\sum_{n=0}^{p-1} n^2 = \dfrac{(p-1)p(2p-1)}{6}$.

En déduire l'encadrement suivant de $\mathcal{A}$:

$$C\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{2p}+\frac{1}{6p^2}\right) \leq \mathcal{A} \leq C\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{2p}+\frac{1}{6p^2}\right)$$

Que se passe-t-il lorsque p tend vers « plus l'infini » ?

En déduire le résultat annoncé par Archimède.

Transcrit en algorithme moderne, l'obtention de ce résultat ne pose aucun problème.

En effet, dans un repère orthonormé convenablement choisi, une équation de la spirale d'Archimède en coordonnées polaires est : $\rho = k\theta$ où $k = \dfrac{OA}{2\pi}$.

L'aire de la première spire est égale à l'intégrale définie :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\theta = \frac{k^2}{2}\int_0^{2\pi}\theta^2 d\theta = \frac{k^2}{6}\left[\theta^3\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3k^2}{6} = \frac{\pi OA^2}{3}.$$

Malheureusement cet algorithme nous fait oublier les raisonnements géométriques qui sont les fondements du calcul intégral. Nous l'appliquons machinalement à un grand nombre de courbes dont nous connaissons une équation sans nous préoccuper de la décomposition de l'aire à calculer en tranches et de l'inscription et de la circonscription de celles-ci. Il n'en est pas de même pour les Anciens pour lesquels chaque problème de quadrature est un problème spécifique qui reçoit une solution particulière.

5. Longueur d'un segment de spirale.

Au XVII^e siècle, à l'aide de la méthode des indivisibles, les mathématiciens démontrent que le problème de la rectification d'un arc de la spirale d'Archimède est équivalent à la rectification d'un arc de parabole (voir figure 13).

La méthode des indivisibles étant contestée, Blaise Pascal démontre le résultat ci-dessus à l'aide de la méthode des Anciens: « *[...] et sans m'arrêter, ni aux méthodes des mouvements, ni à celles des indivisibles, mais en suivant celles des anciens afin que la chose pût être désormais ferme et sans dispute. Je l'ai donc fait, et j'ai trouvé que M. de Roberval avait eu raison, et que la ligne parabolique et la spirale sont égales l'une à l'autre; c'est ce que vous verrez. La démonstration est entière et exactement accomplie, et vous pourra plaire d'autant qu'elle est la seule de cette espèce, aucune autre n'ayant encore paru à la manière des anciens de la comparaison de deux lignes de différente nature. Ainsi je puis dire avec certitude que la ligne parabolique est égale à la spirale et je m'assure que cette preuve arrêtera toutes les contradictions. Voilà ce que vous avez demandé de moi : je souhaite que cela vous agrée, et que ce vous soit au moins une marque du désir que j'ai de vous satisfaire et de vous témoigner que je suis de tout mon cœur, etc.*

De Paris, ce 10 décembre 1658. »[3]

La spirale (***S***) est donnée. M est un point quelconque de (***S***) et I est le point de l'axe des abscisses qui vérifie OM = OI. Soit (***P***) une parabole, α l'angle formé par la demi-droite [OM et la tangente à la spirale en M, β l'angle formé par l'axe des abscisses et la tangente à la parabole en P. Lorsque la parabole (***P***) est correctement choisie, les angles α et β sont égaux et l'arc de spirale $\overset{\frown}{OM}$ a la même longueur que l'arc de parabole $\overset{\frown}{OP}$.

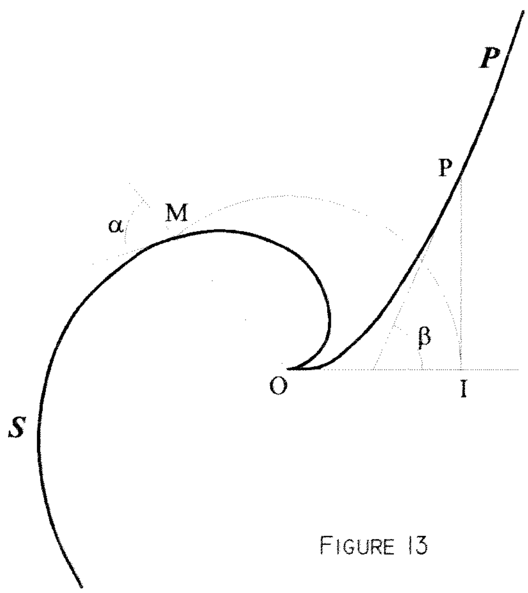


FIGURE 13

(Par exemple si la spirale (***S***) a pour équation polaire $\rho = k\theta$, il faut prendre la parabole (***P***) qui a pour équation cartésienne $y = \frac{1}{2k}x^2$).

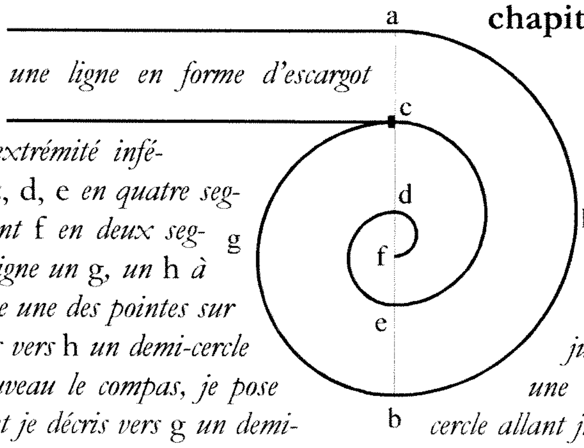
[3] « *Lettre de A. DETTONVILLE* [c'est-à-dire de Blaise PASCAL] *à Monsieur A.D.D.S.* » in Blaise PASCAL, Œuvres Complètes, Bibliothèque de la Pléiade p. 314. La démonstration de PASCAL est jointe à la lettre.

Exercice 6 : Théodore et Archimède, deux spirales si proches
Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la spirale de Théodore est asymptote à une spirale d'Archimède .

4. Les spirales de Albrecht Dürer

Dans son livre intitulé „Underweysung der messung / mit dem zirckel und richtscheyt / in Linien ebnen und gantzen corporen / durch Albrecht Dürer zu samen getzogen / und zu nutz aller kuntstliebhabenden mit zu gehörigen figuren in truck gebracht / im jar MDXXV."[4], Albrecht Dürer nous montre comment construire quelques spirales. Les trois constructions ci-dessous sont extraites de ce livre.

1. Une ligne en escargot utile dans la réalisation d'une corne de bélier pour les chapiteaux.



« Je tracerai au compas une ligne en forme d'escargot [...] comme suit. J'élève une ligne verticale dont l'extrémité supérieure soit désignée par a, *l'extrémité inférieure par* b. *Je divise celle-ci par trois points* c, d, e *en quatre segments égaux. Puis, je divise* de *par un point* f *en deux segments égaux. Je mets ensuite à droite de la ligne un* g, *un* h *à gauche*[5]*, puis je prends un compas, dont je place une des pointes sur le point* d *et l'autre sur le point* a *et je décris vers* h *un demi-cercle jusqu'au point* b *situé en bas. Je prends de nouveau le compas, je pose une pointe sur le point* f, *l'autre sur le point* c *et je décris vers* g *un demi-cercle allant jusqu'au point* b. *Je reprends le compas, pose une pointe sur le point* d *et décris de l'autre un demi-cercle situé vers* h *allant du point* c *vers le point* e. *Je pose ensuite une pointe du compas sur le point* f *l'autre sur le point* d *et je décris du côté* g *le demi-cercle s'arrêtant au point* e. *Je pose enfin le compas sur la ligne* ab, *une de ses pointes au milieu de* df *et l'autre sur le point* d, *et je décris du côte* h *le demi-cercle s'arrêtant au point* f. *Cette ligne est ainsi achevée et servira dans de multiples ouvrages. Entre autres, elle sera utile dans la réalisation d'une corne de bélier pour les chapiteaux. Pour mieux me faire comprendre, j'ai ajouté, ci-dessous, à main gauche de la ligne en escargot, deux lignes droites horizontales issues de ses points* a *et* c.»

[4] Instruction pour la mesure / à la règle et au compas / des lignes, plans et corps solides / réunies par Albrecht Dürer / et imprimées avec les figures correspondantes / à l'usage de tous les amateurs d'art / en l'an MDXXV.
Une traduction de ce livre est paru en 1995 aux Éditions du Seuil sous le titre « Albrecht Dürer: Géométrie » Traduction de Jeanne Peiffer.
[5] Dans le livre d'A. Dürer, la figure gravée est inversée par rapport au texte.

2. Construction d'une autre ligne en escargot où l'on ne peut s'empêcher de penser à Archimède.

« Je me propose de construire au compas une ligne en escargot, mais par une autre voie. Fixe d'abord un centre a, puis décris un cercle que tu diviseras comme ci-devant par 12 points en 12 parties égales. Mène des lignes droites de chacun de ces points vers le centre a. Ajoutes-y des nombres en commençant à compter en haut, poses-y le 12, puis parcours tous les points en les marquant par 1, 2, 3, etc., jusqu'au 12. Divise ensuite la ligne a12 par 35 points en 36 parties égales et commence à les compter en haut, au point 12, puis en descendant 1, 2, 3, etc. Prends alors un compas, pose une de ses pointes sur le centre a et l'autre, sur la ligne 12a, sur le point 1. Décris de là un arc de cercle allant jusqu'au rayon 1a. Garde une des pointes du compas immobile sur le centre a, déplace l'autre pointe sur le rayon 12a jusqu'au deuxième point, 2, et décris avec elle un arc de cercle situé entre les deux rayons 1a et 2a. Déplace ainsi cette pointe du compas sur le rayon a12 de degré en degré et décris de façon ordonnée des arcs de cercle situés entre tous les rayons, et ce jusqu'à ce que tu aies fait le tour trois fois. Par les déplacements successifs d'une des pointes, l'ouverture du compas sera de plus en plus faible jusqu'à ce que cette pointe coïncide pratiquement avec le centre a. Toute cette construction ayant été effectuée au compas, tu pourras tracer la ligne en escargot en joignant un point à l'autre. Commence avec le point 12 de la circonférence et fais le tour trois fois jusqu'à ce que tu arrives au centre a...»

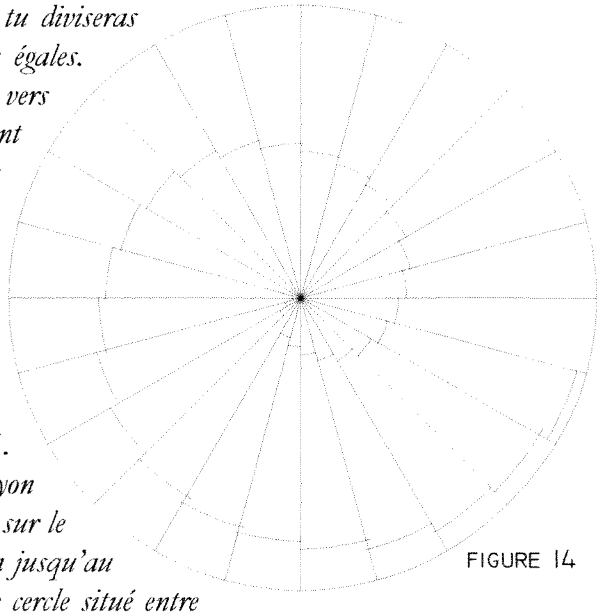


FIGURE 14

3. Construction d'une spirale sans début ni fin.

« On peut concevoir une ligne éternelle qui s'enroule continûment autour d'un centre et qui décrit aussi à l'autre extrémité des révolutions de plus en plus amples, sans jamais s'arrêter. On ne peut réaliser cette ligne à la main, à cause de ses infinies grandeur et petitesse. Car comme son début et sa fin n'existent pas, ils sont introuvables et concevables mentalement seulement. Mais je veux la représenter ci-dessous, tant qu'il est possible, avec un début et une fin. Je commence avec un point a et je décris la ligne à l'aide d'arcs de cercle comme si elle s'enroulait autour d'un centre, et à chaque révolution j'ôte une moitié de l'ampleur de la ligne. Je procède de même avec la ligne partant de a et allant vers l'extérieur. À chaque révolution, j'ajoute une moitié de l'ampleur. Ainsi cette ligne, plus

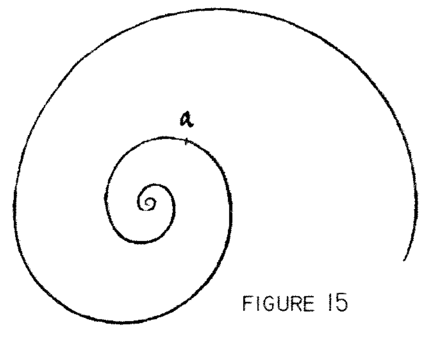
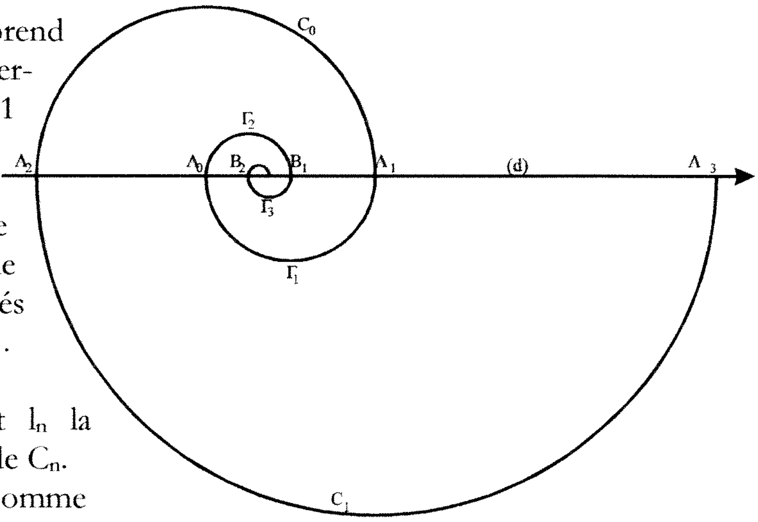


FIGURE 15

elle s'enroule, plus elle se resserre, et plus elle se déroule, plus elle se desserre, sans jamais s'arrêter, ni en son centre, ni en son contour, comme j'en ai donné, afin de me faire comprendre, une représentation ...» (Dürer, opus cité)

Les enseignants qui sont à la recherche d'exercices portant sur les suites (notamment les suites adjacentes, les suites et les séries géométriques) sauront tirer le plus grand profit de cette construction d'Albrecht Dürer.

Voici, par exemple, un exercice que l'on pourrait proposer à des élèves de première :



Sur une droite orienté (d), on prend un point A_0 et on trace le demi-cercle C_0 de centre A_0 et de rayon 1 unité qui coupe (d) en A_1 et A_2 puis le demi-cercle C_1 de centre A_1 et de rayon 2 unités qui coupe (d) en A_2 et A_3 puis le demi-cercle C_2 de centre A_2 et de rayon 4 unités qui coupe (d) en A_3 et A_4 puis le...

1. On appelle A_n le centre et l_n la longueur du n-ième demi-cercle C_n. Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = l_0+l_1+\ldots+l_n$ et l'abscisse a_n de A_n dans le repère$(A_0, \overrightarrow{A_0A_1})$.
2. Soit à présent Γ_1 le demi-cercle d'extrémités A_1 et A_0 (on appelle B_1 son centre), Γ_2 le demi-cercle d'extrémités A_0 et B_1 (on appelle B_2 son centre), Γ_3 le demi-cercle d'extrémités B_1 et B_2 (on appelle B_3 son centre), etc.
   On appelle B_n le centre et λ_n la longueur du n-ième demi-cercle Γ_n.
   Calculer, en fonction de n, la somme $\Sigma_n=\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n$ et l'abscisse b_n de B_n dans le repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1})$.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \Sigma_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

LA « MAISON DES QUADRILATÈRES » – UNE SUGGESTION POUR ANIMER L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE VÉRITABLE

Giuseppe Pintaudi
Étudiant à la pädagogische Hochschule
de Heidelberg

L'esprit philosophique a tourné de ce côté les réflexions de plusieurs écrivains de ce siècle ; mais je doute que la vérité gagne à leur travail. La fureur des sistêmes s'étant emparée d'eux tous, nul ne cherche à voir les choses comme elles sont, mais comme elles s'accordent avec son système.

J. J. Rousseau[1]

Introduction

Dans le cadre de mon mémoire sur „Das Haus der Vierecke" dans l'enseignement des mathématiques, j'ai osé comparer sa place ou plutôt son importance en France et en Allemagne. Bien les difficultés se présentent à l'occasion d'une telle comparaison ; néanmoins, nous pouvons relever des tendances. Tout d'abord, nous voulons clarifier ce que nous entendons par une « maison des quadrilatères » (1.1). Ensuite, nous allons donner quelques exemples commençant par Euclide et terminant avec Bauersfeld (1.2). Après, nous ferons quelques remarques générales sur l'enseignement des mathématiques tel qu'il est en Allemagne, ce qui nous conduira aux objectifs généraux allemands et français (2). Enfin, nous allons étudier la place de la « maison » dans les programmes ou dans les manuels scolaires allemands et français (3). En conclusion, nous dresserons le bilan de nos études (4).

1. „Das Haus der Vierecke"

1.Définition

„Das Haus der Vierecke" est une expression fixe dans la didactique mathématique allemande. Autrement dit, il s'agit – si on veut – d'une expression synonyme pour *ordre*, *bon état*, *rangement*, *classement* etc. des quadrilatères. Si on parle de *la* maison, ce n'est pas à cause d'une exclusivité ; cela est lié à son origine. C'est Walter Breidenbach qui a formé ce terme, d'abord appliqué aux triangles, puis transféré aux quadrilatères. Dans son célèbre livre „Raumlehre in der Volksschule" il écrit :

„[...] Wir wollen ein Haus mit mehreren Stockwerken bauen, da sollen diese Dreiecke einziehen. Aber diejenigen, die mehr verwandt sind, sollen näher beieinander wohnen als die, die nicht so nah verwandt sind." [Nous voulons construire une maison de

[1] Jean-Jacques Rousseau: *Émile ou De l'éducation* (texte établi par Charles Wirz, présenté et annoté par Pierre Burgelin), Paris: Gallimard, 1969, 366.

plusieurs étages, dans laquelle ces triangles emménageront. Mais ceux qui sont plus proches parents doivent résider plus près l'un de l'autre que ceux qui le sont moins.]

Chaque fois que nous parlerons de la maison, nous ne penserons pas à *la* maison de Breidenbach qui n'est qu'un exemple pour un classement des quadrilatères, mais – en général – à un classement quelconque (suivant bien sûr un certain critère).

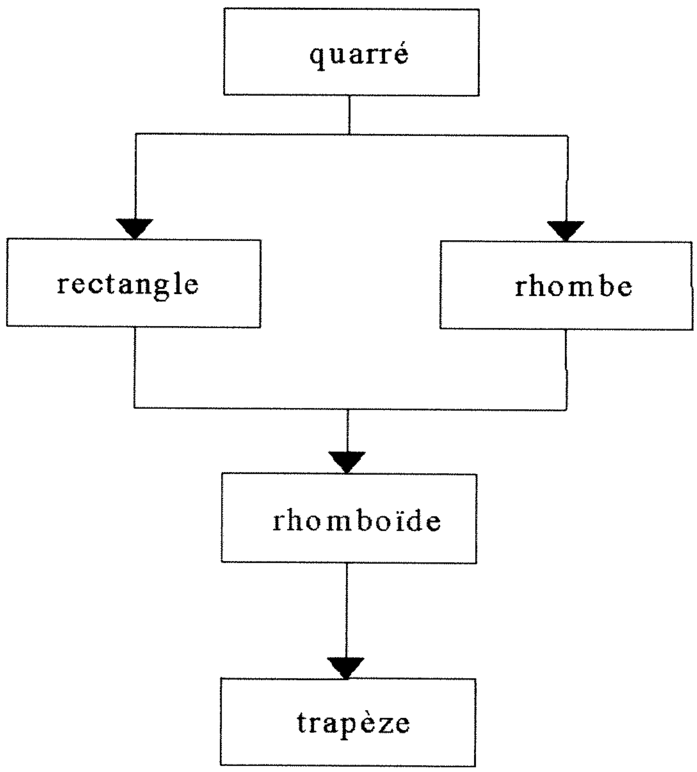
2.Quelques exemples

Euclide (340–270 av. J.C.)

Avant de passer aux maisons courantes jetons un coup d'œil sur les débuts. Pour les mathématiques – comme on sait – il y a un nom qu'on lie à « l'ordre systématique » : Euclide. Dans ses « Éléments », on trouve les quadrilatères suivants :

quarré	=	quadrilatère équilatéral et rectangulaire
rectangle	=	quadrilatère rectangulaire, mais pas équilatéral
rhombe	=	quadrilatère équilatéral, mais pas rectangulaire
rhomboïde	=	quadrilatère dont les angles et les côtés opposés sont de même grandeur, mais n'étant ni équilatéral ni rectangulaire
trapèze	=	les autres quadrilatères

Avec ces définitions, on peut maintenant construire la maison d'Euclide :



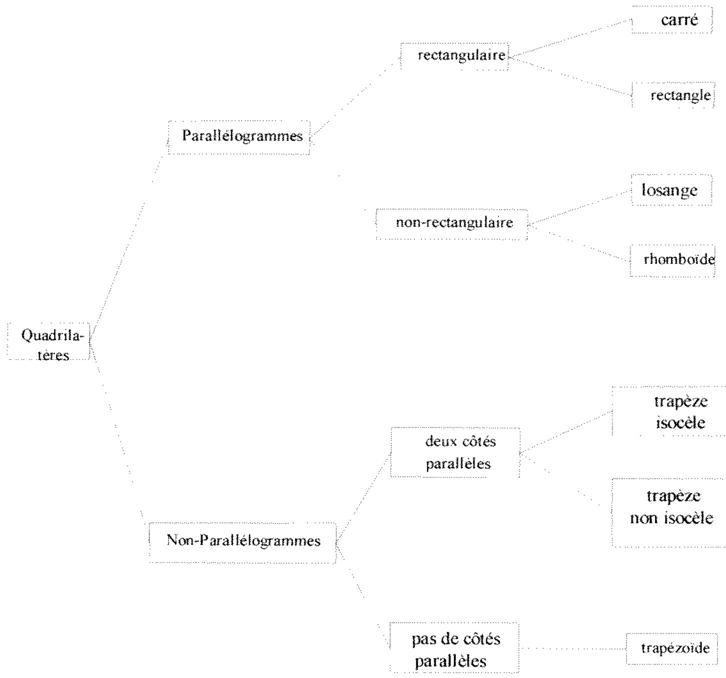
En analysant cette maison, on peut constater que :

- le point de départ est le carré ; par conséquent, on va du cas spécial au cas général ;
- les flèches correspondent à la prescription « un attribut se perd » (ainsi, par ex., un carré n'est qu'un carré et pas un rectangle !) ;
- le trapèze selon le sens courant ne s'y trouve pas.

Proklos (410–485)

Une des plus vieilles maisons

est celle de Proklos. Il ne la décrit que verbalement ; pourtant ce n'est pas difficile de l'illustrer parce qu'il suit strictement un principe : il compare une notion à sa négation. Cela donne une structure binaire :

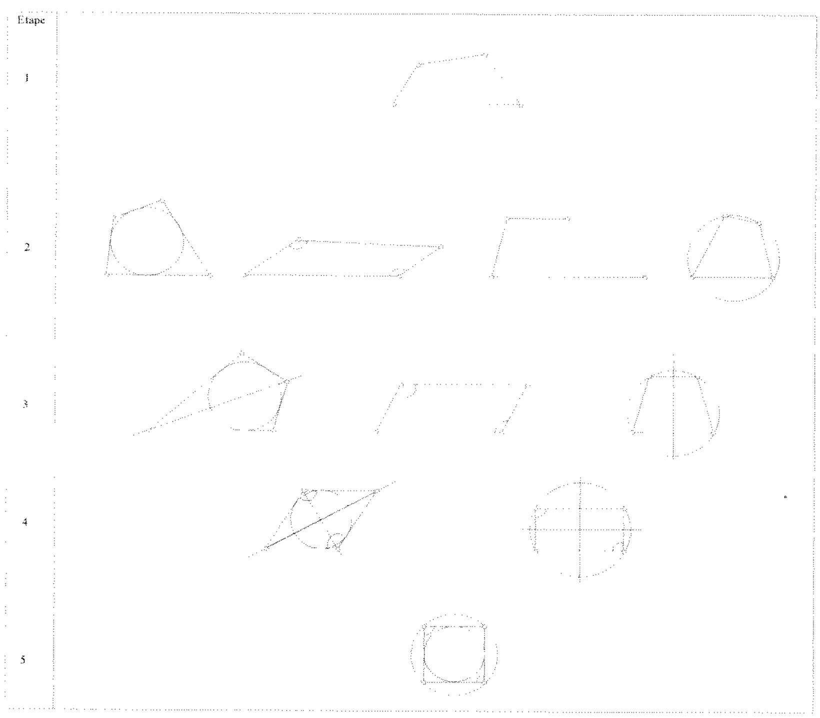


Nous ne pouvons pas entrer dans les détails de cette maison (respectivement des maisons suivantes), cela dépasserait le cadre de cet article. Elles sont juste présentées pour donner une idée.

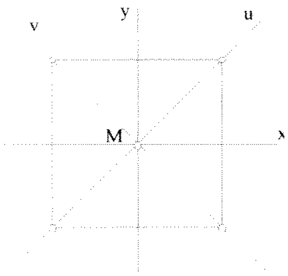
Pugehl (1917)

Le système présenté par Pugehl se forme d'une manière différente : partant d'un quadrilatère quelconque, il introduit quatre qualités particulières :

- Les quatre côtés touchent un cercle ;
- Une paire d'angles opposés est de même grandeur ;
- Une paire de côtés opposés est parallèle ;
- Les quatre coins sont sur un cercle.



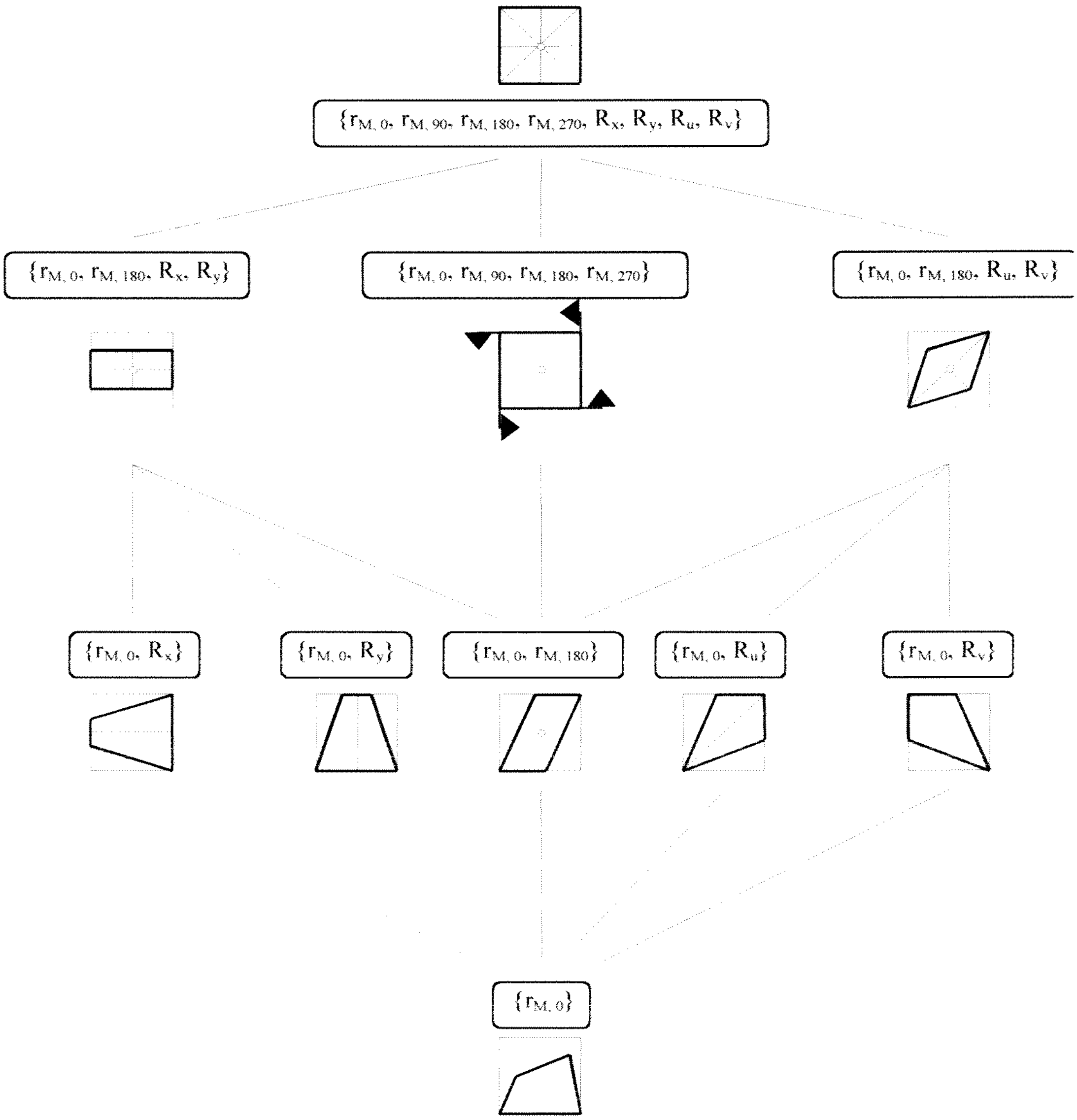
En combinant les qualités de (1) à (4) on reçoit différents types de quadrilatères. Le carré, par ex., est le quadrilatère ayant toutes les qualités nommées. Le système de Pugehl fournit le diagramme suivant :

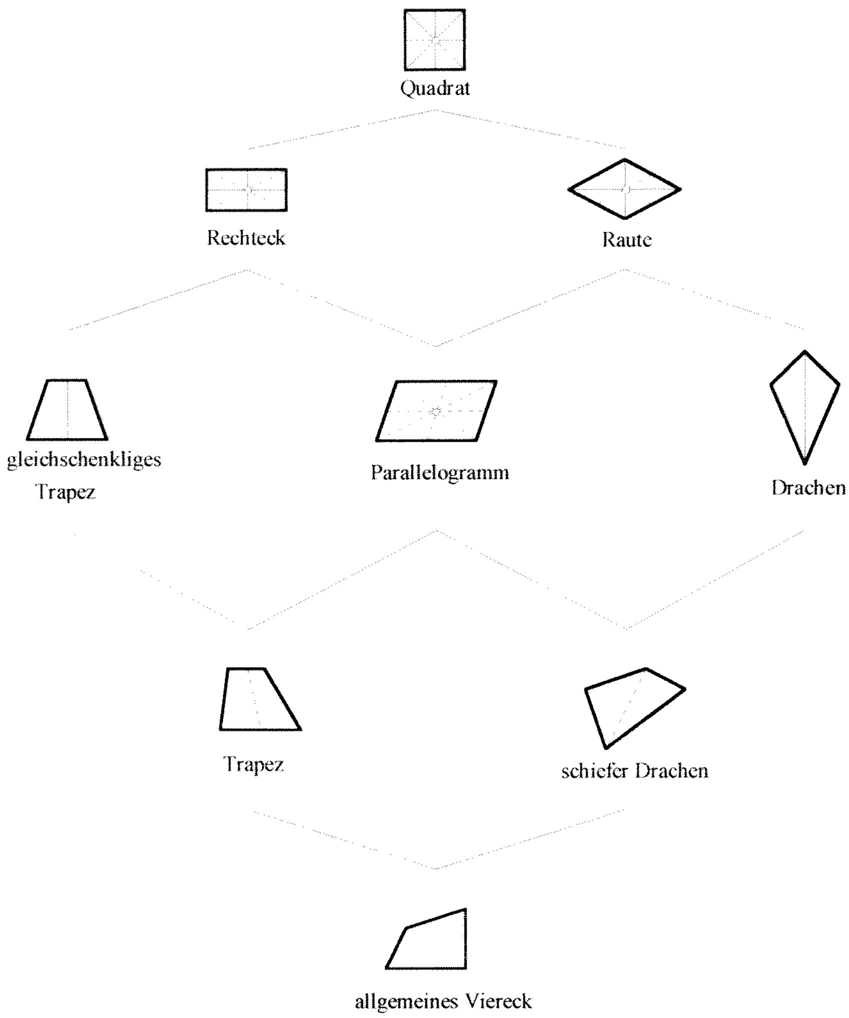


Bauersfeld (1961/62)

Chez Bauersfeld, la maison des quadrilatères s'illustre par la théorie des groupes. Le point de départ, c'est le carré ou bien le groupe du carré.

En formant ses sous-groupes, on obtient un schéma qui montre les relations entre tous ces (nouveaux) groupes. Maintenant, il est question de chercher le type de quadrilatère qui correspond à un sous-groupe donné. On trouve (r = rotation, M = centre de rotation ; R = réflexion) :





Le sous-groupe $\{r_{M,\,0},\ r_{M,\,90},\ r_{M,\,180},\ r_{M,\,270}\}$ est très intéressant : il s'agit d'un quadrilatère qui n'est symétrique que relativement à la rotation.
Bauersfeld élargit le système obtenu :

2. Les mathématiques à l'école

1.Quelques remarques sur l'enseignement des mathématiques à la Realschule

Pour commencer il faut rappeler que le système scolaire allemand n'est pas centralisé comme c'est le cas en France. Ce sont plutôt les *Bundesländer* (les régions allemandes) qui sont responsables de l'éducation. Ainsi, p. ex., chaque région a son propre programme et n'oublions pas qu'après l'école élémentaire il y a trois différents types d'écoles, la *Hauptschule* (de la classe 5 à 9), la *Realschule* (de la classe 5 à 10) et le *Gymnasium* (de la classe 5 à 13). Nos remarques se limiteront à la *Realschule* du Bade-Wurtemberg.

Le *Bildungsplan für Realschulen (Baden-Württemberg)*, c'est-à-dire le programme pour le Bade-Wurtemberg, exige une culture générale mathématique. Il faut que les élèves se familiarisent avec la pensée ou bien l'esprit mathématique et avec les méthodes mathématiques pour qu'ils puissent décrire leur milieu par des modèles. Somme toute, on voit que le programme reste très général pour donner aux professeurs la liberté nécessaire pour chaque travail pédagogique.

Selon Winter, on peut formuler les objectifs généraux suivants :

- apprendre à *montrer de la créativité*
- apprendre à *raisonner*
- apprendre à *mathématiser* des situations réelles
- apprendre à *comparer*
- apprendre *à mettre en ordre*
- apprendre à *classer*
- apprendre à *formaliser*
- apprendre à *établir des analogies*

*2.*Bildungsplan comparé avec le programme en France

Ce qui est intéressant pour nous, c'est de voir dans quelle mesure on peut constater des aspects communs ou bien des différences.

6e et 5e font partie du cycle d'observation ; la classe 5 et la classe 6 ont de leur côté aussi un caractère d'orientation.

Les deux programmes sont élaborés à partir du même contexte ; à la vérité, le *Bildungsplan* souligne que la faculté de concentration est limitée alors que le programme français ne dit rien là-dessus :

ALLEMAGNE	FRANCE
Les élèves de cette tranche d'âge (classe 5) sont capables de curiosité et de spontanéité dans leurs actes [...] *Un penchant marqué au mouvement, une joie à la créativité mais aussi une ténacité et une capacité de concentration limitées peuvent se remarquer à cet âge.* (43)	« Au collège, on constate qu'une proportion importante d'élèves s'intéressent à la pratique des mathématiques et y trouvent du plaisir. » (6e)[2]

En analysant les programmes on a l'impression que le programme français attache une valeur plus grande à la langue que le programme allemand ; en plus, en Allemagne, la maîtrise de la langue ne semble être qu'un moyen d'arriver au but.

[2] Le programme de la 6e manque d'une pagination.

ALLEMAGNE	FRANCE
La capacité à utiliser correctement la langue doit être enseignée dans toutes les matières. (10) *Dans chaque matière, les élèvent doivent être capables de s'exprimer clairement oralement.* (11) *La présentation des faits et procédés doit être bien exprimée de manière objective et grammaticale.* (23) *On doit utiliser la langue mathématique là où elle rend possible – plus clairement et plus précisément que la langue familière – la formulation des faits mathématiques.* (24)	« Les mathématiques participent à l'enrichissement de l'emploi de la langue [...] » (6e) « L'usage largement répandu des moyens actuels de traitement de l'information et de communication exige une bonne maîtrise de ces formes variées d'expression. » (6e) « [...] habituer l'élève à s'exprimer clairement, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral » (6e) « [...] les travaux individuels de rédaction concourent efficacement à la maîtrise de la langue [...] » (5e/4e, 20)

Un signe caractéristique des deux programmes est – sans doute – la continuité et la cohérence de la structure.

ALLEMAGNE	FRANCE
Le cours fait appel aux connaissances, aux facilités et à l'envie d'apprentissage des élèves. (11) *Le cours de mathématiques est construit sur les connaissances, les capacités et les facilités acquises à l'école primaire.* (23)	« Ces programmes sont construits de manière à permettre une acquisition et un approfondissement progressifs des notions sur toute la durée du collège. » (6e) « [...] insister sur la continuité des apprentissages (école élémentaire–collège) [...] » (6e) « [...] mobiliser et [...] consolider les acquis antérieurs dans une perspective élargie. » (5e/4e, 19) « [...]souligner la continuité et la cohérence[...]» (5e/4e, 20)

« L'activité mathématique véritable » joue un grand rôle dans le programme français; c'est –si on veut– un but principal des mathématiques au collège. Dans le *Bildungsplan* par contre on ne trouve pas de formulation explicite concernant cette activité.

ALLEMAGNE	FRANCE
	« Il est en effet possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable [...] Une telle activité est ainsi accessible au plus grand nombre et a une valeur formatrice évidente. » (6e) « À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique [...] » (6e)

Néanmoins, dans la didactique allemande il y a certainement la demande de tirer profit de cette activité. Surtout en rapport avec les études TIMSS (*Third International Mathematics and Science Study*) on exige de plus en plus une telle activité mathématique véritable.

L'emploi des ordinateurs entre en considération dans les deux programmes : mais selon toute apparence, l'ordinateur est apprécié plus en France qu'en Allemagne :

ALLEMAGNE	FRANCE
On devrait se servir de l'ordinateur si les conditions préalables nécessaires sont données. (24)	« [...]Leur mise en œuvre sera grandement facilitée par l'emploi des instruments modernes de calcul, de dessin et de traitement (calculatrices, ordinateurs). » (6e)

À tout prendre, il n'y a pas de grandes différences en ce qui concerne les objectifs généraux des mathématiques au collège et à la *Realschule.*

3.Les quadrilatères dans les programmes

Qu'est-ce que les programmes prévoient quant aux quadrilatères ?

En 6e/classe 5 il s'agit de tracer des figures. Le *Bildungsplan* mentionne le rectangle et le carré, le programme français nomme en plus le losange :

ALLEMAGNE	FRANCE
classe 5 : *tracer le rectangle et le carré* (73)	6e : « Tracer et reproduire sur papier blanc les figures suivantes:[...]rectangle, losange, carré[...]»

Il est à remarquer que le programme français réclame d'utiliser du papier blanc.

En France et en Allemagne, les élèves apprennent à connaître la symétrie axiale et ses propriétés. Le *Bildungsplan* ne parle que des figures (y compris des quadrilatères) qui sont symétriques par symétrie axiale ; le programme français est plus concret : les élèves doivent tracer les axes de symétrie des figures données. En plus, la symétrie axiale doit être utilisée pour la construction du losange, du rectangle et du carré :

ALLEMAGNE	FRANCE
classe 5 : *Symétrie axiale [...] Des figures qui sont symétriques par symétrie axiale [...] Aussi les quadrilatères »* (74)	6e : « Tracer [...] les axes de symétrie des figures suivantes : [...] losange, rectangle, carré. » « Utiliser la symétrie axiale pour construire [...] un losange, un rectangle et un carré. »

Lorsqu'il s'agit de calculer l'aire et le périmètre, c'est aussi le carré et le rectangle qui font l'objet de l'enseignement des mathématiques. Il est à noter que seul le

Bildungsplan parle explicitement du carré et du rectangle ; le programme français ne mentionne que le rectangle.

Après la symétrie axiale en classe 5, les élèves apprennent – en classe 6 – la rotation et en particulier la symétrie centrale. En France, c'est en 5e que les élèves apprennent à la connaître :

ALLEMAGNE	FRANCE
classe 6 : *Symétrie centrale et ses propriétés [...] Des figures qui sont symétriques relativement à la symétrie centrale [...] Aussi les quadrilatères »* (121)	5e : « [...] on mettra en évidence : [...] la présence d'un centre de symétrie dans une figure ([...] rectangle, carré, losange), c'est-à-dire l'existence d'une symétrie centrale la conservant. » (22)

Jusqu'ici, les différences entre les deux programmes n'étaient que très petites. Mais en ce qui concerne le parallélogramme, c'est différent : le *Bildungsplan* parle des figures (y compris les quadrilatères) ayant un centre de symétrie. En France, par contre, le parallélogramme est mentionné à part. En fait, cette figure joue un rôle fondamental dans le programme français : on donne sa définition, puis des propriétés particulières, l'aire, la construction jusqu'au moyen pour produire des preuves :

ALLEMAGNE	FRANCE
	5e : « Connaître et utiliser une définition du parallélogramme et des propriétés relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles. » (22) « Relier les propriétés du parallélogramme à celles de la symétrie centrale. » (22) « Calculer l'aire d'un parallélogramme. » (22) « Reproduire, sur papier quadrillé ou pointé et sur papier blanc, un parallélogramme donné (et notamment dans les cas particuliers du carré, du rectangle, du losange) en utilisant ses propriétés. » (22)

Il est intéressant de voir que le programme en France – nous l'anticipons – ne prévoit pas de classification des quadrilatères, mais qu'on trouve quand même une sorte de structuration des quadrilatères ; ainsi, p. ex., le carré, le rectangle et le losange sont explicitement mentionnés comme des cas particuliers du parallélogramme.

On trouve encore :

ALLEMAGNE	FRANCE
	5e : « Connaître et utiliser une définition et des propriétés (relatives aux côtés, aux diagonales, aux éléments de symétrie) du carré, du rectangle, du losange. » (22) « L'aire du parallélogramme pourra être reliée à celle du rectangle. » (22)

Les deux programmes prévoient des problèmes de construction. Le *Bildungsplan* demeure – encore une fois – assez général, alors que le programme en France est plus concret et souligne que les problèmes de construction contribuent à consolider des connaissances :

ALLEMAGNE	FRANCE
classe 8 : *Profonde restriction en ce qui concerne les constructions de quadrilatères.* (240)	5e : « Les problèmes de construction consolideront les connaissances relatives aux quadrilatères usuels [...] » (22)

Il est vain – on l'a déjà dit – de chercher une classification des quadrilatères dans le programme français. Une telle classification est prévue, par contre, dans le *Bildungsplan* (classe 8). En France, en ne trouve pas même le « temps de synthèse » comme l'exigent p. ex. les programmes du cycle central (19). Au contraire, on se restreint aux propriétés de la symétrie centrale et – bien sûr – aux propriétés du parallélogramme de façon que les élèves puissent produire des preuves. Ainsi, une maison des quadrilatères ne se trouve que dans le *Bildungsplan* :

ALLEMAGNE	FRANCE
classe 8 : *classification des quadrilatères* (240)	

Comme synthèse, on peut retenir :

Le programme français est souvent plus concret que le Bildungsplan du Bade-Wurtemberg. En ce qui concerne les quadrilatères, le Bildungsplan reste indécis : il n'impose pas les quadrilatères qu'il faut choisir pour l'enseignement. En France, il s'agit toujours du parallélogramme, du losange, du rectangle et du carré. Les autres quadrilatères comme p. ex. le trapèze (isocèle) ou le cerf-volant n'entrent (presque) pas en considération.

Mais il faut attirer l'attention sur une chose : dans les deux programmes, les figures en général ou bien les quadrilatères en particulier sont en rapport avec les transformations, surtout avec la symétrie axiale et la symétrie centrale. Le „Erlanger Programm" de Felix Klein domine donc dans les deux pays.

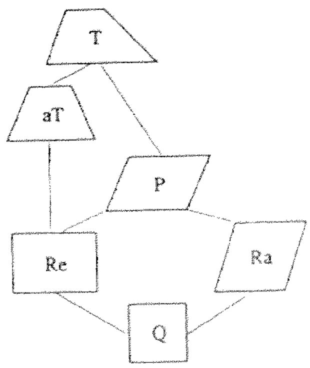
3. „Das Haus der Vierecke" dans les manuels

1.Manuels allemands

Par la suite, nous présentons quelques maisons se trouvant dans différents manuels allemands. Nous ne voulons pas entrer dans le détail, cela irait trop loin. Nous ne voulons que donner une idée de la maison tel qu'elle paraît en Allemagne.

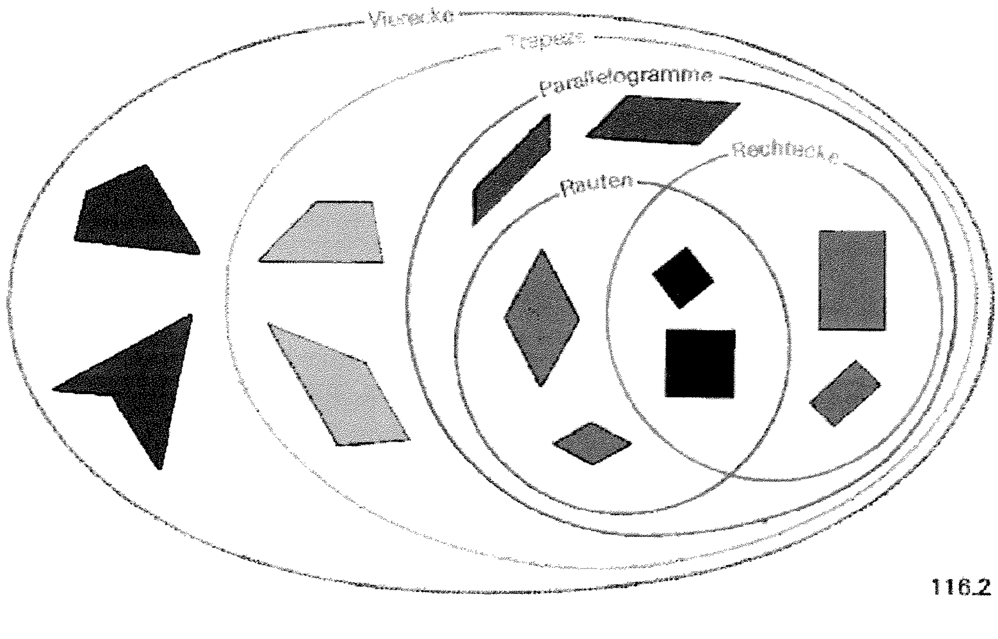
Mathematik heute 8 (1995), voir bibliographie 🕮 **[3]**

(3) *Haus der Vierecke*
Rechts haben wir das Haus der Vierecke mit dem achsensymmetrischen Trapez (aT) und dem allgemeinen Trapez (T) ergänzt. Daran erkennst du:
Jedes Parallelogramm ist auch ein Trapez, aber:
Kein Parallelogramm ist ein achsensymmetrisches Trapez.
Lies weitere Beziehungen ab.



Cette maison n'est pas précisément un exemple typique ; elle ne rend pas possible une vraie activité, mais elle est plutôt utile pour connaître des relations.

LS Geometrie Eins (1983), 🕮 **[5]**

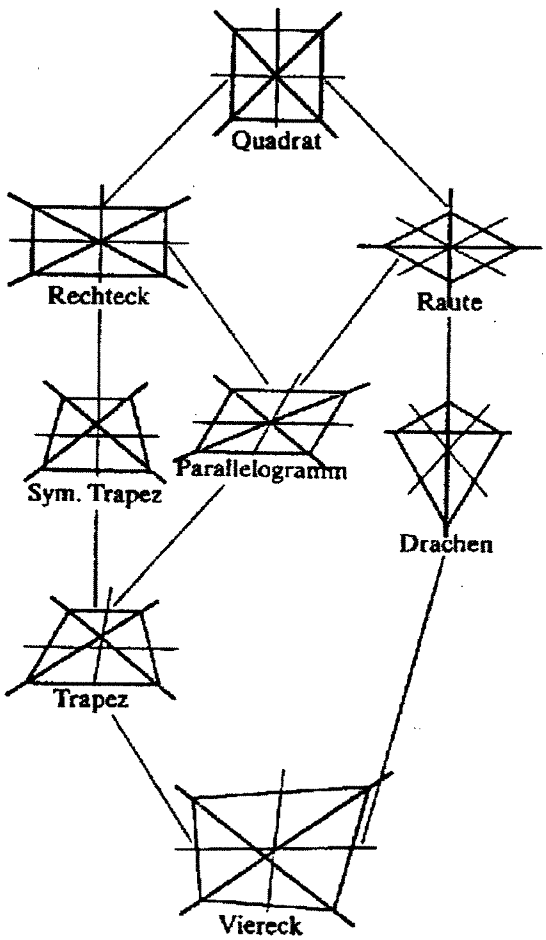


116.2

Il s'agit de nouveau d'une sorte de vue d'ensemble. Mais il y a quelques avantages comparé à l'exemple [2]. En premier lieu, c'est plus intéressant en ce qui concerne la présentation : elle est plus grande, les quadrilatères sont figurés en différentes couleurs. Ce qui est très bien, c'est la variation de la position des figures (cf. p. ex. la position du carré étant sens dessus dessous). Il est remarquable qu'on dise aux élèves que la classification se base sur les définitions des quadrilatères (ce qui n'est pas toujours le cas ; souvent, les élèves apprennent seulement : *En figure x, les quadrilatères sont mis en ordre dans la maison des quadrilatères*). Quand même, on se demande : où en reste l'activité mathématique de mettre en ordre, de classifier, de spécialiser, de généraliser etc.?

Welt der Mathematik 8 (1981), 🕮 **[4]**

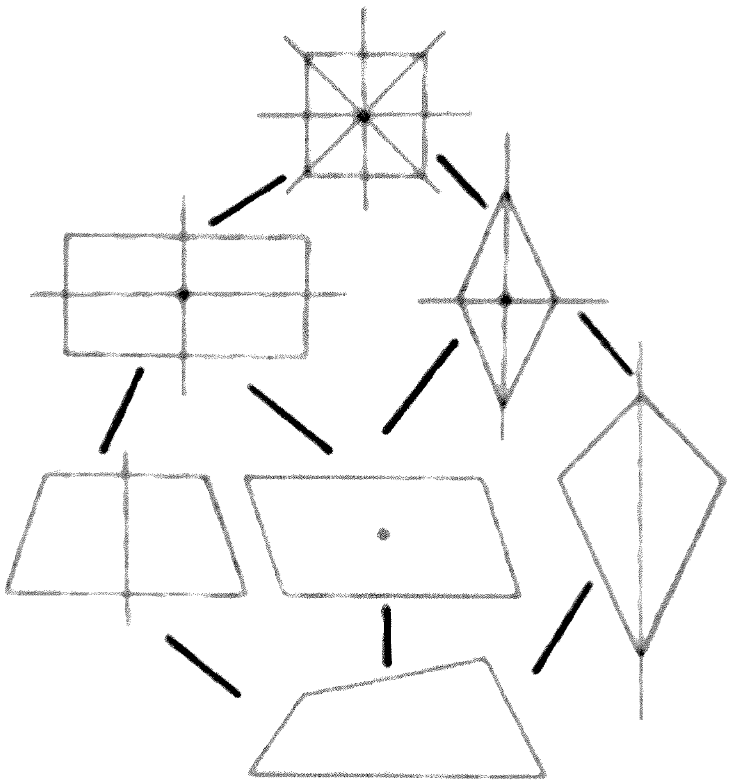
Ce manuel souligne l'aspect de la symétrie et les qualités particulières des quadrilatères comme p. ex. la même longueur des côtés. Il faut ajouter qu'il y a – une exception jusqu'à présent – aussi des problèmes en rapport avec la maison. Ceci rend possible une activité mathématique, même s'il y a beaucoup de questions qui font réciter ce que les élèves ont appris d'abord, p. ex : Quels sont les quadrilatères dont les côtés opposés sont parallèles ? Lesquels ont des côtes opposés de même longueur ? Lesquels possèdent un centre de symétrie ? etc. Mais on trouve aussi des questions comme p. ex. : Quels quadrilatères sont des parallélogrammes ? Lesquels sont des rectangles ? etc. Ainsi, les élèves peuvent découvrir « l'hérédité » d'un tel système, c'est-à-dire : si j'ai trouvé le parallélogramme comme un quadrilatère ayant un centre de symétrie, alors j'ai trouvé automatiquement aussi le rectangle, le losange et le carré.



En regardant le schéma (à gauche) on observe que ce ne sont pas seulement les axes de symétrie qui sont tracés, mais aussi les diagonales et les lignes médianes des quadrilatères. Ce fait est en rapport avec les douze questions abordées ci-dessus.

PLUS 8 (1977), 🕮 **[6]** (schéma ci-dessous)

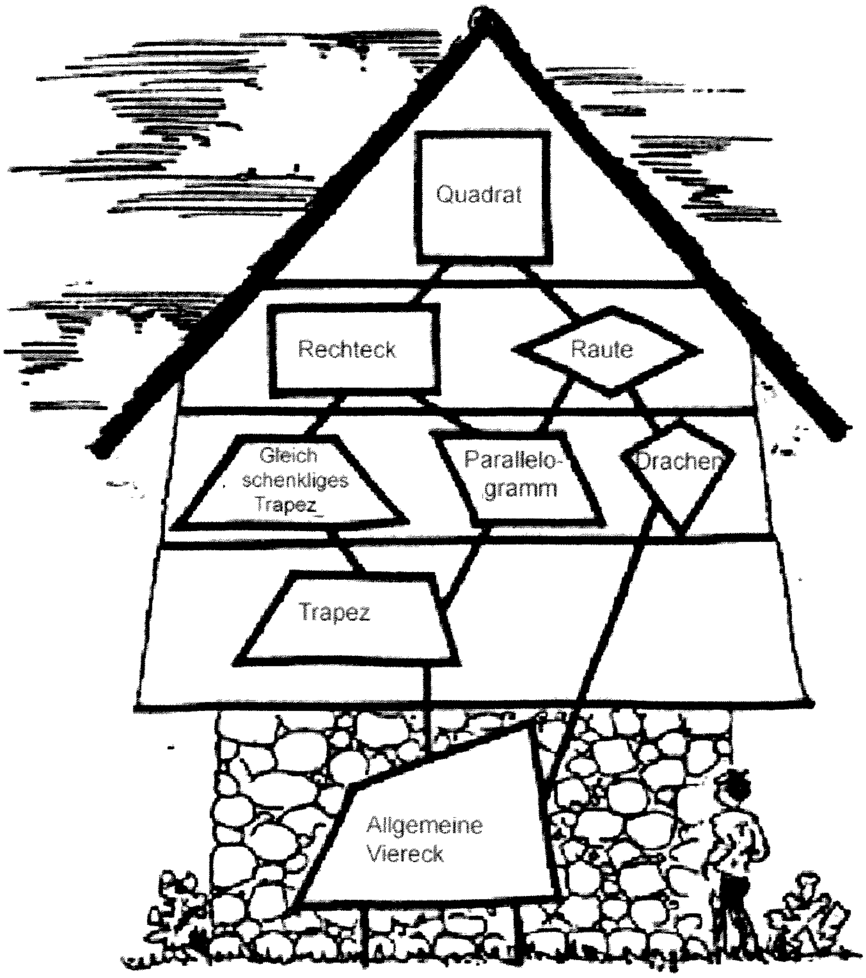
Le chapitre de ce manuel commence avec une discussion entre deux élèves. Il s'agit du problème : Le rectangle est-il un parallélogramme ? Partant de cette question, on veut mettre en ordre les quadrilatères. Le critère choisi, c'est le principe de la symétrie :



Zeichnung 2

Ce qui est notable, c'est le fait qu'on a renoncé au trapèze et au cerf-volant. Cela montre une certaine suite dans les idées. C'est bien heureux que cette maison ne soit pas construite à la fin. Faisant suite à la maison donnée, les élèves doivent ordonner les quadrilatères dans un diagramme. Ainsi, on essaie de réaliser une activité mathématique ! Mais il faut souligner une autre chose : Après avoir ordonné les quadrilatères, il s'agit de comparer les deux systèmes (c'est-à-dire le diagramme des élèves et le système dans le manuel). Cela nous paraît très important. En comparant, on peut gagner des nouvelles connaissances : De quelle façon la particularité du carré se montre-t-elle dans les deux systèmes ? Comment peut-on se rendre compte de l'hérédité ? etc. Mais le manuel n'en reste pas là. Des problèmes comme Comment est-ce que tu peux –en outre– ordonner les quadrilatères ? ou bien Essaie d'ordonner les triangles par le critère de la symétrie etc. montrent que –enfin !– on prend partie aux activités mathématiques fondamentales (ordonner, classifier, comparer). Il ne faut pas oublier que le manuel présenté ici date des années soixante-dix !

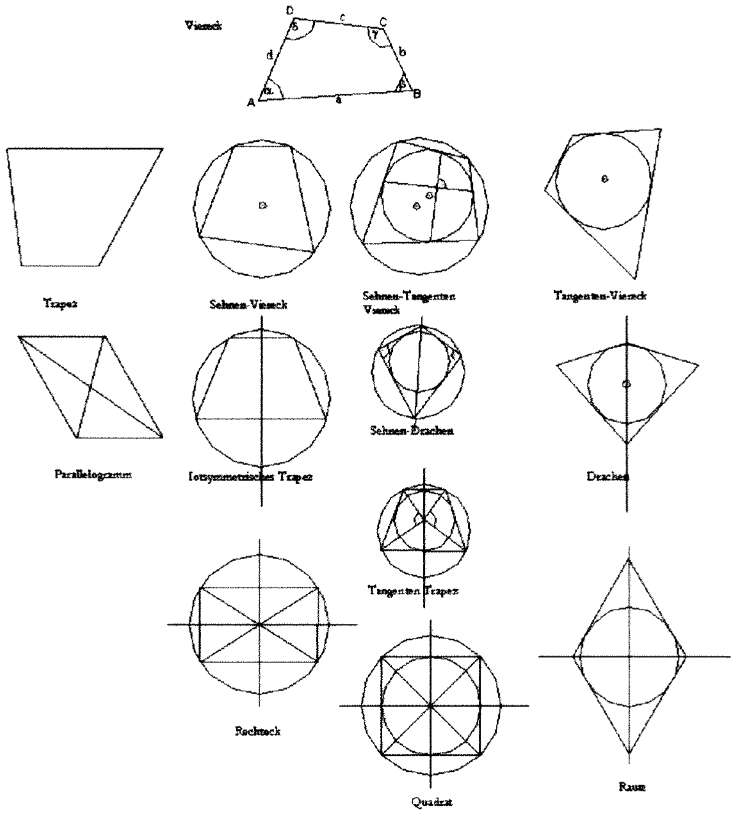
Kurs Mathematik 8 (1995), 🕮 **[2]**



On voit qu'il s'agit d'une « vraie » maison, les quadrilatères sont placés dans une maison. Le carré est logé dans le grenier, le quadrilatère quelconque semble (ce qui est intéressant) n'en pas faire partie. Ce qui est notable, c'est qu'il y a sans doute un ordre ; mais le critère n'est pas mentionné. Les élèves apprennent seulement que les quadrilatères sont en relation. Pareil à PLUS 8, ce manuel veut profiter de la maison : on veut réaliser des activités. Pour ne donner qu'un exemple : pars du trapèze isocèle. Où est-ce que tu arrives si on te demande un angle droit ? La systématique des quadrilatères n'est pas prise comme conclusion ou comme point culminant. Des problèmes bien structurés rendent possible une réflexion active.

En conclusion, nous voulons mentionner une « maison » pas vraiment comme les autres, parce qu'elle ne se trouve pas dans un chapitre du manuel, mais sur la couverture. Ce n'est qu'un tableau. Nous le présentons quand même parce qu'il y a des types intéressants dedans :

Anschauliche Geometrie 8 (1985), 🕮 **[1]**



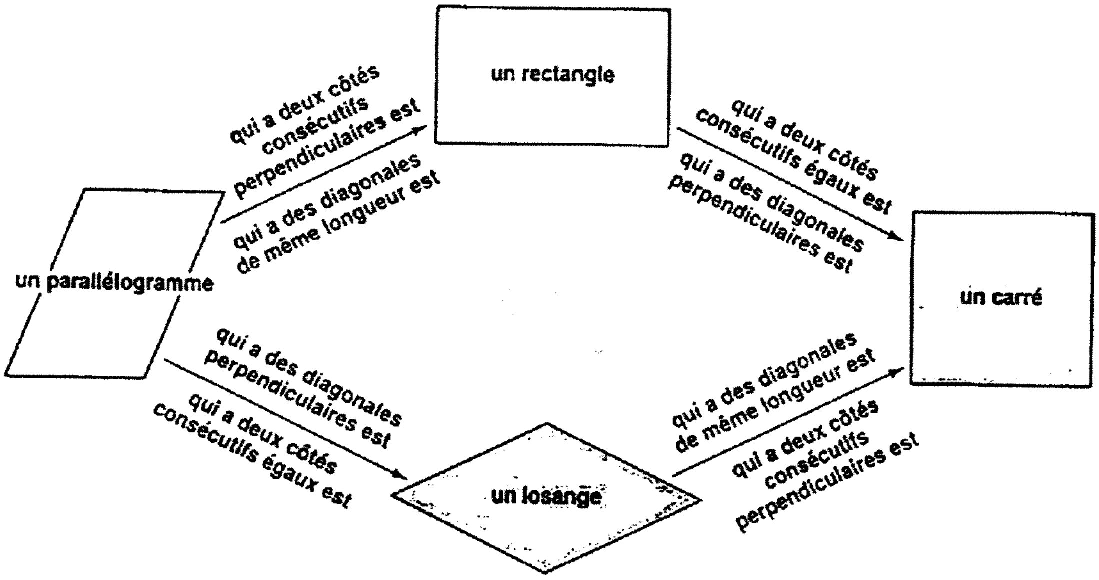
Résumons : la maison des quadrilatères montre différentes formes dans les manuels, à plus d'un titre :

- La figuration varie (bien sûr) ;
- Les maisons contiennent – partiellement – différents types de quadrilatères. Ce qui est frappant, c'est que le cerf-volant (dans son cas général) n'intéresse pas du tout. Le quadrilatère quelconque n'a pas sa place dans chaque système ;
- Le principe dominant, c'est la symétrie. Néanmoins, les lignes de jonction ne sont pas toujours expliquées ;
- Les buts d'utilisation diffèrent : dans quelques manuels les maisons ne sont qu'un sommaire, d'autres – en regard – épuisent toutes les possibilités de la maison.

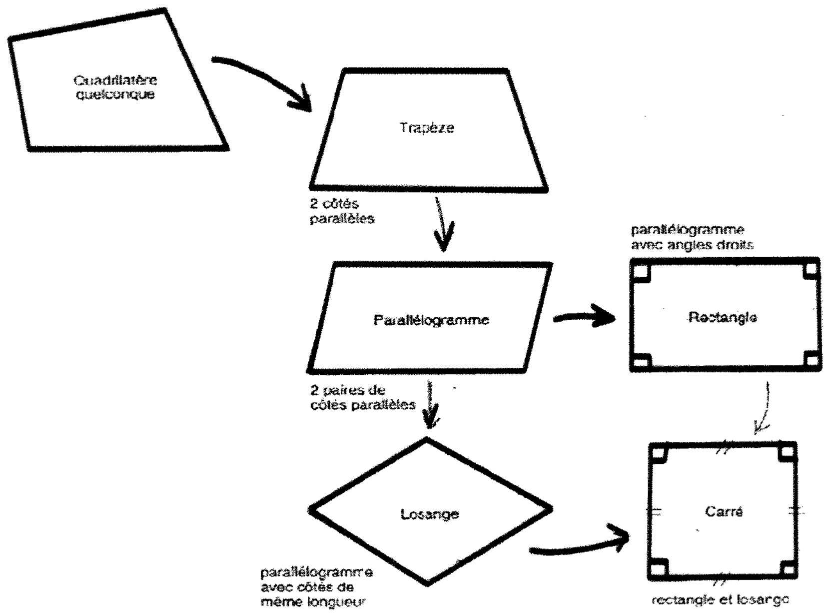
2.Manuels français

On pourrait être surpris à cause du titre de ce chapitre. N'a-t-on pas vu que le programme en France ne prévoit pas de classification des quadrilatères ? Malgré cela, on trouve des manuels dans lesquels il y a une sorte de maison. En tout cas, il y a des tentatives de mettre en ordre les quadrilatères. Les manuels, eux aussi, montrent – outre le programme – des aspects et des mouvements (actuels) de la didactique mathématique ; c'est pourquoi il nous paraît important de choisir quelques exemples.

Mathématiques 5e (1997), 🕮 [8]

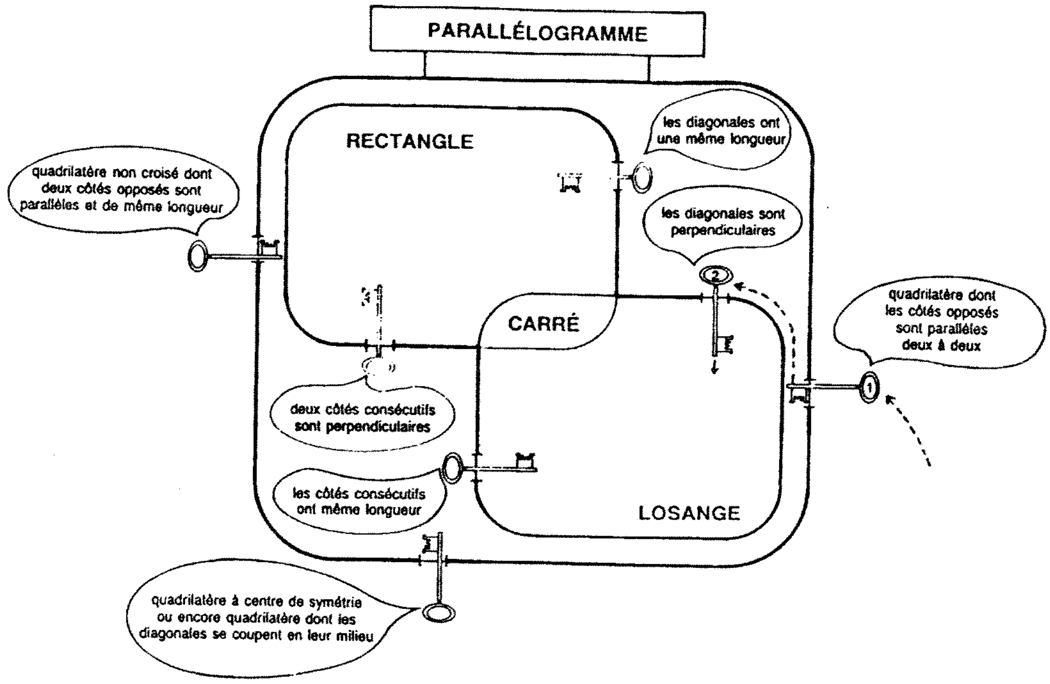


Mathématiques Pythagore 4e (1992), 🕮 [7]

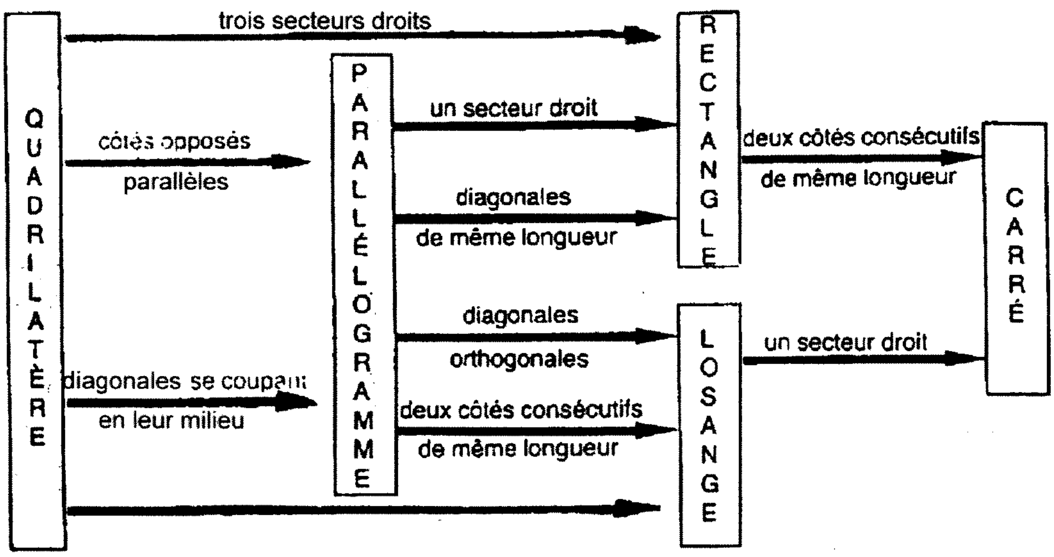


QUADRILATÈRES : du plus général au plus particulier.

Mathématiques 4e (1988), 🕮 [9]



Mathématiques 4e (1988), 🕮 [10]



Nous avons présenté ces exemples pour montrer que les manuels français – contrairement à ce qui dit le programme– contiennent des schémas des quadrilatères. Mais si on les étudie de près, on constatera :

Les exemples choisis servent tous à une répétition. Presque tous les schémas donnent un coup d'œil, un regard en arrière, une sorte de résumé, de sommaire, bref : il ne s'agit que d'un supplément, d'un formulaire.

Aucun des schémas ne tient aux activités mathématiques véritables : mettre en ordre et classifier.

Il s'agit toujours d'une formation logique, les maisons servent à « retirer » et à démontrer des théorèmes (ainsi, le rectangle p. ex. est défini précisément comme un parallélogramme ayant *un* angle droit). Les manuels français semblent chercher à glisser les méthodes des sciences théoriques (*Fachwissenschaft*) dans le cours des mathématiques (mais la définition du rectangle comme un quadrilatère ayant quatre angles droits n'est-elle pas plus compréhensible pour les élèves ?).

Les schémas ne tiennent compte que des parallélogrammes, on trouve rarement le trapèze et le quadrilatère quelconque, jamais le cerf-volant et le trapèze isocèle.

Dans tous les schémas, il s'agit des qualités « de même longueur », « parallèle », « ayant des angles droits » etc. La symétrie qui joue un grand rôle en Allemagne n'y apparaît pas.

Le critère principal, c'est l'hérédité et la conséquence. Il est vrai que l'ordre est important pour faire un tour d'horizon ; mais les activités des élèves restent en suspens.

Bilan

Résumons : Une comparaison des programmes en France et en Allemagne (Bade-Wurtemberg) a montré que les différences – en ce qui concerne les idées générales – ne sont pas grandes. La structure – elle aussi – est la même : le „Spiralprinzip" (Bruner) soulève des idées connues et élargit l'angle en faisant des progrès.

Quant au contenu pourtant il y a des différences plus ou moins « graves ».

Ainsi, en France, les quadrilatères « habituels », ce sont le carré, le rectangle, le losange et le parallélogramme, le dernier jouant un rôle central. Le trapèze (isocèle) par contre vit dans l'ombre. Le cerf-volant ne fait presque jamais l'objet de l'enseignement. En Allemagne au contraire on trouve ces quadrilatères. Pourquoi ? Une raison est, à mon avis, le manque d'une maison des quadrilatères en France. En fait, il n'y a pas « d'homologue » de la „Haus der Vierecke" (comme l'avait appelé Breidenbach) en France. Alors que dans la didactique mathématique allemande il y a eu d'autres tentatives classifiant les quadrilatères en changeant de critère, les vues d'ensemble des quadrilatères en France (qui n'existent même pas toujours) se limitent à une sorte de formulaire. Il s'agit d'un « produit fait » n'étant là que pour être consulté : *Un losange, c'était quel type de quadrilatère ? Quel quadrilatère a deux diagonales de même longueur ?* etc. Mais le *procès* du classement, du rangement n'est pas du tout considéré, donc juste ce qui constitue *l'activité mathématique véritable.* Il semble que l'enseignement des quadrilatères en France sert (seulement ?) à une formation logique et aux études des démonstrations.

Mais les conditions pour « réformer » l'enseignement des quadrilatères en France sont, à mon avis, très bonnes. Nous avons vu qu'il y est question avant tout des parallélogrammes, y compris sous ses formes spéciales. Ne se rend-on pas compte aujourd'hui (de plus en plus) dans la didactique mathématique allemande que l'enseignement doit se limiter à l'essentiel ? Surtout en rapport avec les études TIMSS on exige ce que la didactique appelle le *principe exemplaire* : pas de « je sais tout », mais une connaissance approfondie des choses importantes. Et comme en France on ne considère que les parallélogrammes (donc ni le cerf-volant ni le trapèze), alors il en résulte une maison réduite à l'essentiel.

Or on pourrait penser : la maison des quadrilatères ne se trouve qu'en Allemagne. À première vue, cela semble être le cas, mais : l'air ne fait pas la chanson! Il est vrai qu'on trouve la maison dans les manuels. Mais que fait-on ? Où en sont les activités ? La maison est nombre de fois une maison « fixe », raide, immobile, elle n'est qu'un point culminant, un terminus!

On devrait unir l'enseignement en France et en Allemagne : jumeler *l'activité mathématique véritable* et la réduction à l'essentiel du côté français à la « conscience » du côté allemand que la maison des quadrilatères peut être un enrichissement pour l'enseignement.

Bibliographie

BAUERSFELD Heinrich : *Ein Beitrag der Gruppentheorie zur Systematisierung geometrischer Figuren* in : Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 14 (1961/62), 274–278

BREIDENBACH Walter : *Raumlehre in der Volksschule*, Hannover [11]1966

EUCLIDE : *Les Éléments*, éd. par Peyrard

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA RECHERCHE ET DE LA TECHNOLOGIE (Hrsg.) : *Programme de la classe de sixième*, Paris 1997

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA RECHERCHE ET DE LA TECHNOLOGIE (Hrsg.) : *Programmes du cycle central : 5e et 4e*, Paris 1997

Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.) : *Bildungsplan für die Realschule*, Stuttgart 1994

PINTAUDI Giuseppe : *Das Ordnen der Vielfalt : Das Haus der Vierecke in der SK 1 mit einem Vergleich Deutschland–Frankreich*, Heidelberg 1998

PUGEHL F : *Die Behandlung der Viereckslehre* in : Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 48 (1917), 49–60 et 95–105

ROUSSEAU Jean-Jacques : *Émile ou De l'éducation* (texte établi par Charles Wirz, présenté et annoté par Pierre Burgelin), Paris : Gallimard

Manuels allemands

[1] BARTH Élisabeth ; Anschaulische Geometrie 8. Münschen, Ehrenwirth 1993

[2] Bentzinger Wolfgang, Hofsäß Gerhard ; *Kurs Mathematik 8.* Frankfurt am Main, Diesterweg 1995

[3] Griesel Heinz, Poste Helmut ; *Mathematik heute 8 Realschule.* Hannover, Schroedel 1995

[4] Griesel Heinz, Sprockhoff Wolfgang ; *Welt der Mathematik 8 Hauptschule.* Hannover, Schroedel 1981

[5] SCHMID August, SCHWEIZER Wilhelm ; *LS Geometrie Eins.* Stuttgart, Ernst Klett 1983

[6] SCHÖNBECK Jürgen, SCHUPP Hans ; *PLUS 8.* Paderborn, Schöningh 1977

Manuels Français

[7] Bonnefond Gérard, Daviaud Daniel, Revranche Bernard ; *Mathématiques Pythagore 4e.* Paris, Hatier 1992

[8] Chapiron Gisèle, Mante Michel, Mulet-Marquis René, Pérotin Catherine ; *Mathématiques 5e, Nouveau Programme, Cycle central, collection TRIANGLE.* Paris , Hatier 1997

[9] CUREL P., FAUVERGUE P., RIEU R., SARNETTE A. ; *Mathématiques 4e, collection Mistral.* Parisn, Istra-Casteilla 1988

[10] I. R. E. M. de Strasbourg (Hrsg.) ; *Mathématiques 4e, collection Collèges.* Paris, Casteilla 1988

LES REMARQUES DE MÉRAY : UN TÉMOIGNAGE IMPORTANT DANS LA PRÉHISTOIRE DE L'AXIOME DU CHOIX (*)

Michel GUILLEMOT

Université Paul Sabatier de Toulouse

Les historiens des mathématiques considèrent que les **Remarques sur la nature des quantités par la condition de servir de limites à des variables données**, parues en 1869, dans la **Revue des Sociétés Savantes** constituent la première publication d'une construction des nombres réels à l'aide des suites de Cauchy. Elles sont l'oeuvre d'un mathématicien français, Charles Méray, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon, dont les différents travaux, tant en analyse qu'en géométrie méritent d'être reconnus (voir DUGAC 1970). Dans notre étude, nous ne nous intéresserons pas à la construction proprement dite mais à son introduction, où Méray nous montre que toute suite de Cauchy de nombres réels converge si l'on admet que toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente. L'auteur y emploie, en effet, implicitement, l'axiome du choix, dont nous donnons, brièvement, pour commencer, quelques éléments historiques.

Quelques éléments sur l'histoire de l'axiome du choix

Les différentes études qui ont été conduites sur l'histoire de l'axiome du choix [Medvedev 1982; Moore 1982; Cassinet, Guillemot 1983] s'accordent pour en préciser trois étapes :
– avant 1904 : la préhistoire,
– entre 1904 et 1908 : les polémiques,
– après 1908 : l'installation
dont nous retraçons quelques éléments principaux. A proprement parler, nous ne devons pas tout d'abord parler de choix mais plutôt de bon ordre puisque d'une part, historiquement, c'est le bon ordre qui a donné naissance à l'axiome du choix et que d'autre part, logiquement, l'axiome du choix est équivalent à l'affirmation suivante :

tout ensemble peut être bien ordonné.

Par bon ordre qu'entend-on? En gros, qu'un ensemble peut être ordonné selon un ordre qui ressemble à celui des entiers naturels : en quelque sorte on peut classer tous les entiers naturels, ou si l'on considère un ensemble quelconque non vide de nombres naturels celui-ci comporte un plus petit élément. En généralisant cela, on dit qu'un ensemble est bien ordonné s'il est ordonné, c'est-à-dire si l'on

(*) Conférence tenue à Strasbourg le 15 janvier 1999 à l'occasion du séminaire d'histoire des mathématiques Heidelberg-Nancy-Strasbourg.

peut définir une relation d'ordre sur cet ensemble et si toute partie non vide de cet ensemble possède un plus petit élément. Evidemment $(N, \leq)$ est bien ordonné mais $(Z, \leq)$ n'est pas bien ordonné : $(Z$, par exemple, ne possède pas de plus petit élément. Toutefois Z, comme Q ou encore l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable c'est-à-dire qu'on peut le mettre en bijection avec l'ensemble des entiers naturels. Utilisant une de ces bijections on peut alors transporter l'ordre des entiers naturels sur cet ensemble de manière à en faire un bon ordre sur ces ensembles. Par exemple, on peut considérer la bijection b de N sur Z, telle que pour tout entier naturel n

$$b(n) = p \text{ si } n = 2p \text{ et } b(n) = -p \text{ si } n = 2p + 1$$

et on dira que $b(n)$ est inférieur ou égal à $b(n')$ si et seulement si n est inférieur ou égal à n'. Nous laissons au lecteur le plaisir de voir que nous avons ainsi défini un bon ordre sur l'ensemble des entiers relatifs.

La notion de bon ordre a été mise en avant par Georg Cantor dans ses fameuses publications sur la théorie (naïve) des ensembles. Sans doute encouragé par sa création des nombres transfinis qui lui permettait de classer au-delà de l'infini dénombrable, toute sa vie il a cherché à démontrer ce qu'il affirmait en 1883 :

> on peut toujours mettre tout ensemble bien défini sous la forme d'un ensemble bien ordonné.

Plus prudent, David Hilbert, restreignait, en 1900, la bonne ordonnabilité à l'ensemble des nombres réels : il en faisait l'objet de son premier problème :

> le continu peut-il être bien ordonné? A cette question, M. Cantor croit que l'on peut répondre par l'affirmative. Il me semble extrêmement désirable d'obtenir une démonstration directe de cette remarquable affirmation de M. Cantor, en assignant, par exemple un ordre des nombres tel que dans tout ensemble partiel, on puisse assigner un nombre précédant tous les autres [Hilbert 1900, 71].

Ceci se passait au Deuxième Congrès des Mathématiciens, à Paris, en 1900. Quatre ans après, au Troisième Congrès, Julius König jette le désarroi dans la communauté allemande en croyant démontrer que le continu ne pouvait pas être bien ordonné. Peu après, Ernst Zermelo envoyait à Hilbert une preuve que au contraire tout ensemble pouvait être bien ordonné, que ce dernier s'empressait de publier dans les **"Mathematische Annalen"** Beweis dass jede Menge wohlgeordnet sein kann [Zermelo 1904].

Ceci fait l'effet d'une bombe dans la communauté mathématique internationale car son auteur y affirmait que

> La démonstration dont il est ici question est faite à partir du principe que, même pour une totalité infinie d'ensembles, il y a toujours une correspondance qui à chaque ensemble associe un de ses éléments ou, exprimé formellement, que le produit d'une totalité infinie d'ensembles, dont chacun contient au moins un élément, diffère lui-même de zéro.

> Ce principe logique, ne peut, à la vérité, être réduit encore à un plus simple, mais il est appliqué partout, sans hésitation, dans les déductions mathématiques [Zermelo 1904, 516].

Le principe du choix prenait ses lettres de noblesse même si, auparavant, d'autres savants comme par exemple Beppo Levi ou Rodolfo Bettazzi ou encore Bertrand Russell et Alfred Whitehead avaient mis l'accent sur l'insuffisance de certaines démonstrations.
Après 1904 les polémiques vont surgir de tous les côtés. Pour ne citer que le cas de la France, l'échange de cinq lettres entre René Baire, Emile Borel, Jacques Hadamard et Henri Lebesgue marque la vigueur des propos échangés. Toutefois, en 1908, les clameurs commencent à se taire car Zermelo publie d'une part une deuxième preuve du bon ordre [Zermelo 1908a] où il en profite pour répondre de manière complète à toutes les critiques et d'autre part ses recherches sur ce qu'il est convenu d'appeler la première théorie axiomatique des ensembles où l'axiome du choix trouvait sa place [Zermelo 1908b].
Aujourd'hui, cette théorie est généralement acceptée par l'ensemble de la communauté mathématique : elle prend toutefois une forme légèrement modifiée à la suite des travaux de Abraham Fraenkel et on parle de la théorie ZF des ensembles. Quand à l'axiome du choix proprement dit, deux événements majeurs marquent ensuite son histoire. Le premier est la démonstration de sa consistance par Kurt Gdel en 1938 et le second est celle de son indépendance par Paul Cohen en 1963. Les travaux des logiciens permettent de mieux préciser le rôle joué par cet axiome dans l'établissement des démonstrations mathématiques. En dehors du bon ordre et des principes énoncés par Zermelo on connaît de très nombreux énoncés équivalents de l'axiome du choix que les ouvrages de la famille Rubin ont brillamment recensés.
D'autres principes, tel le principe des choix dépendants dont nous aurons l'occasion de parler ont aussi été mis en avant pour remplacer l'axiome du choix mais ceci est une autre histoire!

Les suites adjacentes

Les approximations successives des racines d'une équation par excès et par défaut conduisent naturellement à la notion de suites adjacentes. Ainsi, lorsqu'il désire fournir une deuxième démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, dans le **Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique**, qu'il publie en 1821, Augustin Louis Cauchy se place dans le cadre de la résolution numérique des équations. Auparavant, la première preuve avait pour domaine celui de la monstration classique géométrique :

> Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation
> $$y = f(x)$$
> rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation
> $$y = b$$
> dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0, x = X \dots$ [Cauchy 1821, 50].

Cauchy sent bien que sa preuve n'a peut-être pas toute la rigueur qu'il mettait en évidence dans l'introduction de son ouvrage. Aussi prend-t-il soin d'avertir le lecteur :

> on peut, au reste, comme on le fera dans la Note III, démontrer le théorème IV par une méthode directe et purement analytique, qui a même l'avantage de fournir la résolution numérique de l'équation
> $$f(x) = b$$
> [Cauchy 1821, 51]

En fait, en se plaçant dans le cadre de la résolution numérique des équations Cauchy est amené, dans cette Note III à formuler différemment son théorème IV. Il considère le cas particulier où b est nul et introduit, de manière classique, les signes contraires de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle où la fonction est continue :

> Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable x, qui demeure continue par rapport à cette variable entre les limites $x = x_0, x = X$. Si les deux quantités $f(x_0), f(X)$ sont de signes contraires, on pourra satisfaire à l'équation
> $$f(x) = 0 \qquad (1)$$
> par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X [Cauchy 1821, 378].

Cauchy considère que x_0 est inférieur à X et il pose

$$X - x_0 = h.$$

Prenant alors un entier naturel m supérieur à l'unité il considère la suite finie

$$f(x_0), f(x_0 + \frac{h}{m}), f(x_0 + 2\frac{h}{m}), \dots, f(X - \frac{h}{m}), f(X)$$

dont il compare les termes :

> "si l'on compare successivement le premier terme avec le second, le second avec le troisième, le troisième avec le quatrième, etc...on finira nécessairement par trouver une ou plusieurs fois deux termes consécutifs qui seront désignés contraires. Soient
>
> $$f(x_1), f(X')$$
>
> deux termes de cette espèce, x_1 étant la plus petite des deux valeurs correspondantes de X [Cauchy 1821, 378-9].

Il est clair qu'ici Cauchy a en vue la résolution numérique de l'équation (1). Dès lors, il se peut que dans l'intervalle $[x_0, X]$, cette équation ait plusieurs racines et que les changements de signes interviennent plusieurs fois dans la suite considérée. Ce qui importe donc n'est pas le choix de x_1 et X' mais plutôt le fait que pour un tel choix, on puisse ultérieurement trouver une racine dans l'intervalle $[x_1, X']$ strictement contenu dans l'intervalle précédent $[x_0, X]$.
Pour cela Cauchy réitère ce procédé

> Ayant déterminé x_1 et X' comme on vient de le dire, on pourra de même, entre ces deux nouvelles valeurs de x, en placer deux autres x_2, X'' qui, substituées dans $f(x)$ donnait des résultats de signes contraires [...]. En continuant ainsi, on obtiendra : 1) une série de valeurs croissantes de x, savoir
>
> $$x_0, x_1, x_2, \ldots; \tag{2}$$
>
> 2) une série de valeurs décroissantes
>
> $$X, X', X'', \ldots, \tag{3}$$
>
> qui, surpassant les premières de quantités respectivement égales aux produits
>
> $$1(X - x_0), \frac{1}{m}(X - x_0), \frac{1}{m^2}(X - x_0), \ldots,$$
>
> finiront par différer de ces premières valeurs aussi peu que l'on voudra [Cauchy 1821, 379].

Autrement dit, Cauchy obtient les deux suites adjacentes (x_n) et $(X^{(n)})$ qui convergent vers une limite commune, racine de l'équation (1), puisque la fonction f est continue sur l'intervalle $[x_0, X]$.
Strictement parlant, Cauchy effectue donc une **infinité** de choix pour déterminer les suites adjacentes. Mais, à chaque fois, ce choix est effectué parmi un nombre **fini** de termes et il peut donc être aisément précisé. Par exemple, si Cauchy avait

en vue, seulement, l'obtention d'une racine de l'équation (1) il pourrait, à chaque fois, choisir les premiers changements de signe afin de bien déterminer x_n et $X^{(n)}$. De même, si l'équation (1) ne possède qu'un nombre **fini** de racines, au bout d'un certain nombre de découpages on aboutira à un intervalle $[x_p, X^{(p)}]$ où ne figure plus qu'une seule racine de l'équation (1). Bien sûr, il se peut que dans l'intervalle $[x_0, X]$ cette équation ait une infinité de racines et que, dès lors, à chaque étape, on doive choisir : il ne semble pas que Cauchy ait envisagé une telle éventualité et, dès lors, nous ne pouvons pas dire qu'il ait, ici, utilisé implicitement, l'axiome du choix. Ceci ne sera pas toujours le cas lorsque les suites adjacentes seront employées dans un autre cadre. Nous allons voir ce qu'il en est pour les **Remarques** de Charles Méray.

Les remarques de Méray

Les **Remarques sur la nature des quantités par la condition de servir de limites à des variables données**, publiées en 1869 dans la **Revue des Sociétés Savantes** par Charles Méray, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon sont très importantes puisqu'elles fournissent la première étude sur la construction des nombres réels à l'aide des suites de Cauchy. Ici, nous considérerons seulement le début de l'article.
A la différence de Cauchy qui se plaçait dans le cadre de la résolution numérique des équations, Méray se situe dans un domaine plus vaste :

> la théorie des quantités incommensurables, celle des séries, des quadratures, et en général toutes les parties des mathématiques où il y a lieu de considérer des limites de quantités variables [Méray 1869, 280].

Il note que deux principes en constituent le "fondement essentiel". Le premier consiste à affirmer que **toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) de nombres réels est convergente** :

> Une quantité variable v, qui prend successivement les valeurs en nombre indéfini :
>
> $$v_1, v_2, \ldots, v_n \ldots$$
>
> tend vers une certaine limite, si les termes de cette limite vont toujours soit en augmentant, soit en diminuant, pourvu qu'ils restent dans le premier cas, inférieurs, dans le second cas supérieurs à une quantité fixe quelconque [Méray 1869, 280].

Quant au second principe, il s'agit du critère dit de Cauchy, **toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente** :

> La variable v, définie comme ci-dessus, jouit encore de la même propriété si la différence $v_{n+p} - v_n$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, quelque relation que l'on puisse établir entre n et p [Méray 1869, 280].

A la lecture de cet énoncé une remarque s'impose : Méray ne se situe pas dans le cadre de l'arithmétisation de l'analyse développée, au même moment, par Karl Weierstrass et ses élèves. Pour nous en convaincre il nous suffit de tourner notre regard vers la définition des suites de Cauchy – l'auteur parle de Zahlenreihe, suite-de-nombres donnée par Eduard Heine dans son fameux article "**Die Elemente der Functionenlehre** (Les éléments de la théorie des fonctions) publiée en 1872, dans le **Journal für die reine und angewandte Mathematik** :

> On appelle suite-de-nombres une suite de nombres a_1, a_2, etc, a_n, etc, telle que pour chaque nombre η non nul aussi petit que l'on veut, il existe une valeur n telle que $a_n - a_{n+v}$ soit inférieur à η, pour tout entier positif v [Heine 1872, 174].

Cette définition ressemble à celle que nous formulons aujourd'hui et elle peut nous permettre de donner une démonstration distincte de celle fournie par Méray. En effet, ce dernier se propose de prouver que son premier principe implique le second, en d'autres termes que toute suite de Cauchy converge si l'on admet, ici, que deux suites adjacentes vers la même limite.
En effet, soit (v_n) une suite de Cauchy quelconque. Par définition, pour tout ε strictement positif, il existe un entier n_ε bien déterminé tel que

$$\mid v_{n_\varepsilon+p} - v_{n_\varepsilon} \mid < \varepsilon$$

(il suffit de prendre le plus petit entier naturel satisfaisant à la proposition ci-dessus) pour tout entier naturel p.
Soit maintenant un nombre réel a strictement positif quelconque. Pour tout entier naturel q, prenant

$$\varepsilon = \frac{a}{2^q}$$

nous pouvons ainsi déterminer un entier naturel m_q, tel que, pour tout entier naturel p,

$$\mid v_{m_q} + p - v_{m_q} \mid < \frac{a}{2^q}$$

c'est-à-dire que

$$v_{m_q} - \frac{a}{2^q} < v_{m_q} < v_{m_q} + \frac{a}{2^q}. \tag{1}$$

Ne pouvant être ainsi assuré d'obtenir des suites adjacentes, nous pouvons poser

$$s_0 = v_{m_0} - a, t_0 = v_{m_0} + a$$

et pour tout entier naturel q

$$[b_{q+1}, t_{q+1}] = [s_q, t_q] \cap [v_{m_{q+1}} - \frac{a}{2^{q+1}}, v_{m_{q+1}} + \frac{a}{2^{q+1}}].$$

Ainsi il est clair que les suites (s_q) et (t_q) sont adjacentes. D'après le premier principe de Méray elles convergent vers une même limite et d'après (1) la suite (v_n) converge aussi vers cette limite.
A cette démonstration, nous pouvons opposer celle de Méray. En quelque sorte, point de souci, comme précédemment d'effectivité et par deux fois, Méray ne va pas raisonner directement mais, au contraire, par l'absurde. De plus, peu à peu, Méray va préciser comment il obtient les suites adjacentes. Dans une première étape, il se propose de démontrer un résultat semblable à (1) :

> Quel que soit le nombre n il existe deux quantités l_k, L_k telles que l'on a
>
> $$l_k < v_n < L_k$$
>
> pour toute valeur de n supérieure à k [Méray 1869, 281].

En fait, ayant en vue une propriété comme (1) valable, avec ses notations, pour tout entier naturel k il énonce une proposition générale qui à tout prendre n'a pas, démonstrativement, une portée tout aussi générale. Il suffit, en effet, de démontrer que la suite (v_n) est bornée pour être assuré du résultat. Méray ne s'y trompe pas puisque sa preuve revient à démontrer que la suite est majorée, même s'il invoque L_k. Ecoutons-le :

> En effet, si la limite L_k n'existait pas, v_n pourrait être rendue plus grande que toute quantité donnée, et il serait possible de choisir successivement et indéfiniment les nombres $k', k'', k''' \dots$ de manière à obtenir :
>
> $$v_{k'} > v_k + a, v_{k''} > v_{k'} + a, v_{k'''} > v_{k''} + a, \dots$$
>
> où a désigne une quantité quelconque. Or, on en conclurait, contrairement à l'hypothèse, qu'en attribuant à n les valeurs successives $k, k', k'', k''', \dots,$ qui croissent à l'infini, et à p les valeurs correspondantes $k'-k, k''-k', k'''-k'', \dots$ la différence $v_{n+p}-v_n$ conserverait une valeur supérieure à a [Méray 1869, 281].

Nous l'avons dit, Méray ne se préoccupe pas de trouver effectivement un majorant et en l'absence d'une définition du critère de Cauchy semblable à celle donnée par Heine, il a recours à un raisonnement par l'absurde. Pour, peut-être, mieux saisir son heuristique supposons donc que la suite (v_n) ne soit pas majorée et précisons comment Méray peut obtenir la suite $(k^{(n)})$ de sa démonstration.
La suite (v_n) n'étant pas majorée, pour tout nombre M, il existe au moins un terme v_n de la suite supérieur à M. Si a est une quantité strictement positive quelconque, prenant M égal à $(v_k + a)$ il existe au moins un terme v_n tel que

$$(2) \qquad v_n > M = v_k + a.$$

Méray affirme seulement qu'il est "possible de choisir" un tel terme. Aujourd'hui, comme précédemment, si nous désirons **effectivement** préciser ce choix, nous

pouvons prendre pour k' le plus petit entier naturel n vérifiant (2).
De même, en prenant cette fois M égal à $(v_{k'} + a)$, il existe au moins un terme v_n tel que

$$(3) \qquad v_n > v_{k'} + a.$$

Comme précédemment, nous pouvons choisir pour k'' le plus petit entier naturel n vérifiant (3). Nous avons ainsi

$$(4) \qquad v_{k''} > v_{k'} + a \text{ et } k' < k''.$$

On en déduit donc que pour tout entier naturel

$$v_{k^{(n+1)}} - v_{k^{(n)}} > a \text{ et } k^{(n)} < k^{(n+1)}$$

ce qui contredit la condition de Cauchy. En effet, la suite $(k^{(n)})$ étant strictement croissante, quel que soit l'entier naturel m que l'on considère il existe deux termes d'indices supérieurs à m dont la différence est strictement supérieure à a.
A tout prendre, comme Méray le dira plus tard, il vient seulement de démontrer le résultat suivant où k n'intervient pas

> on pourra assigner successivement à v deux premières limites l_{h_0}, L_{h_0} [Méray 1869, 282].

Pour obtenir "deux autres l_{h_1}, L_{h_1} renfermées (l'une au moins) dans l'intervalle des précédentes" nous devons examiner la deuxième partie de la démonstration qui revient à affirmer que l'on peut définir une suite d'intervalle emboîtés :

> **2) Quel que soit k, on peut, sauf à prendre k suffisamment grand supposer à la fois**
>
> $$l_h > l_k \text{ et } l_h \leq L_k$$
>
> ou
>
> $$l_h \geq l_k \text{ et } L_h < L_k.$$
>
> Sinon, en effet, concevons deux quantités l', L', dont la seconde surpasse la première et qui satisfassent à toutes ces conditions, c'est-à-dire telles que l'on ait
>
> $$l_k < l' < L' < L_k.$$
>
> Quelque valeur de v que l'on considère, il en existera de rangs plus éloignés qui seront les unes égales ou supérieures à L', les autres égales ou inférieures à l', car autrement on pourrait prendre soit $l_h = l'$, soit $L_h = L'$. Ainsi on peut trouver un nombre h assez grand pour avoir $v_h \geq L'$ puis un autre $h' > h$ qui fasse $v_{h'} \leq l'$, puis un troisième $h'' > h$ qui ramène la première inégalité $v_{h''} \geq L'$, et ainsi de suite alternativement jusqu'à l'infini.

> Il arriverait donc, contrairement à l'hypothèse, que la différence $v_{n+p} - v_n$ conserverait une valeur numérique au moins égale à $L' - l'$ pour les valeurs indéfiniment croissantes au moins égale à $L' - l'$ pour les valeurs indéfiniment croissantes $h, h', h'', \ldots$ attribuées à n, et les valeurs correspondantes $h' - h, h'' - h', h''' - h'', \ldots$ imposées à p [Méray 1869, 281-2].

Une nouvelle fois, Méray ne détermine pas effectivement l_h et L_h : il raisonne par l'absurde. Avec ses notations il s'agit de démontrer que pour tout entier naturel k et tout intervalle $]h_k, L_k[$ auquel appartiennent tous les v_n d'indice supérieur à k, il existe un entier h supérieur à k et un intervalle $]l_h, L_h[$ strictement contenu dans le précédent, auquel appartiennent tous les v_n d'indice supérieur à h. Suivant Méray, soit donc un entier naturel k et un intervalle $]l_k, L_k[$ auquel appartiennent tous les v_n d'indice supérieur à k. Raisonnons alors par l'absurde et supposons que pour tout entier h supérieur à k et pour tout intervalle $]l_h, L_h[$ strictement contenu dans $]l_k, L_k[$ il existe au moins un terme v_n d'indice n supérieur à h n'appartenant pas à $]l_h, L_h[$. Soit alors $]l', L'[$ tel que

$$l_k < l' < L' < L_k.$$

S'il existait un nombre fini de termes supérieurs à L' (resp. inférieurs à l') alors on poserait

$$l_h = l_k \text{ et } l_h = L' \text{ resp. } l_h = l' \text{ et} L_h = L_k)$$

ce qui serait en contradiction avec notre hypothèse : on aurait obtenu $]l_h, L_k[$ strictement contenu dans $]l_k, L_k[$ tel que tous les termes v_n d'indice supérieur à h lui appartiennent.
Autrement dit, il existe un nombre infini de termes à la fois dans $]l_{k'}, l'[$ et dans $]L', L_k[$. A partir de cette double infinité de termes v on pourrait extraire la suite (n'_n) telle que v'_{2p} appartient à $]l_{k'} l'[$ et v'_{2p+1} appartient à $]L', L_k[$. Ainsi pour tout entier naturel p

$$v'_{2p+1} - v'_{2p} > L' - l'$$

ce qui contredit le fait que la suite (v'_n) est une suite infinie extraite de la suite de Cauchy (v_n).
Bien sûr, comme nous, Méray ne s'est pas préoccupé de définir effectivement la suite extraite : une nouvelle fois il suffit de considérer le bon ordre de l'ensemble des entiers naturels pour définir précisément la suite (v'_n). En revanche, Méray indexe les intervalles $]l_k, L_k[$ et il revient même à la charge à la fin de sa démonstration lorsqu'il précise le caractère "adjacent" des suites $(l_k), (L_k)$.

> On pourra assigner successivement à v deux premières limites l_{h_0}, L_{h_0}, puis deux autres l_{h_1}, L_{h_1}, renfermées (l'une au moins) dans l'intervalle des précédentes puis deux nouvelles l_{h_2}, L_{h_2}, encore plus rapprochées que celles-ci et cela indéfiniment [Méray 1869, 282].

En fait, Méray n'explicite ici que l'emboîtement des intervalles mais il est clair que dans son esprit les bornes l_{h_n} et L_{h_n} sont infiniment rapprochées l'une de l'autre. Il n'en demeure pas moins qu'en raisonnant par l'absurde, pour chaque k, il a seulement démontré l'**existence** d'un intervalle $]l_h, L_h[$ et qu'il ne l'a pas précisément déterminé afin d'en assurer l'**indexation** souhaitée. Nous pouvons penser qu'ici, en prenant non plus $]l', L'[$ quelconque mais l'un des intervalles $]l_k, \frac{l_k+L_k}{2}[ ] \frac{l_k+L_k}{2}, L_k[$ Méray aurait pu mener à bien l'effectivité des suites (l_{h_n}) et (L_{h_n}). D'un autre côté, nous savons aussi qu'en adoptant les suites de termes rationnels (l_{h_n}) et (L_{h_n}), compte tenu d'un bon ordre possible sur l'ensemble des rationnels, nous pouvons choisir effectivement les bornes.

Conclusion

Si aujourd'hui nous pouvons **effectivement** déterminer les suites adjacentes (l_{h_n}) et (L_{h_n}) invoquées par Méray dans sa démonstration, nous sommes, en revanche assurés que pour cet auteur, ceci relevait de l'implicite. Plus tard avant la bombe de Zermelo et bien après, partisans ou adversaires de l'axiome du choix commettrons de telles absences de rigueur. Guidés en quelque sorte par leurs intuitions, les mathématiciens ne prendront pas garde que, parfois, leurs raisonnements nécessitaient l'acceptation de l'axiome du choix pour valider leurs preuves. L'exemple fourni par les **remarques** de Méray nous montre qu'en suivant de telles démarches on pouvait passer peu à peu d'une certaine effectivité à une imprécision beaucoup plus préjudiciable à la valeur des arguments invoqués.
En fait, nous pouvons penser que pour de nombreux mathématiciens de la fin du XIX$^{\text{e}}$ ou du début du XX$^{\text{e}}$ l'**existence** d'un être mathématique suffisait pour la transformer en une **existence fonctionnelle**. En analyse, nous pouvons invoquer au lieu de l'axiome du choix, le **principe des choix dépendants** énoncé par Paul Bernays en 1942.

> Si R est une relation sur un ensemble E tel que pour tout x de E il existe un y de E tel que xRy alors il existe une suite (x_n) telle que pour tout entier naturel n, $x_n R x_{n+1}$.

Sans aucun doute, formulé plus tôt, ce principe aurait sans doute reçu l'assentiment de la communauté des analystes alors que l'axiome du choix général proné par Zermelo fit l'effet d'une bombe. Même si nous avons pu rendre effective la démonstration proposée par Méray nous savons qu'en d'autres endroits nous ne pouvons pas réussir. Par exemple, d'après les travaux de Jaegermann, nous savons que l'axiome du choix dénombrable est essentiel pour démontrer l'équivalence des deux définitions de la continuité (voir ci-après). Pourtant, soucieux de rigueur, trois ans après Méray, Heine n'a pas décelé **la faille** dans son raisonnement. Pour Heine

> une fonction est dite continue pour une valeur particulière déterminée $x = X$, quand, pour chaque grandeur ε donnée aussi petite que l'on veut, il existe un autre nombre positif η_0 ayant la propriété que, pour aucune grandeur positive η, qui soit plus petite que η_0, la valeur numérique de $f(X \pm \eta) - f(X)$ ne dépasse ε [Heine 1872, 182].

et il veut montrer que

> si pour chaque suite de nombre x_1, x_2, etc..., ayant pour symbole $X, f(x_1), f(x_2)$, etc formant aussi une suite de nombres de symbole numérique $f(x)$ alors $f(x)$ est continue pour $x = X$ [Heine 1872, 182].

Comme Méray, Heine raisonne par l'absurde. Il suppose donc que pour toute suite (x_n) convergeant vers X la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(X)$ et il veut en déduire que la fonction f est continue au point X. Raisonnant par l'absurde et supposant dont f non continue au point X, il existe une grandeur ε telle que pour tout nombre y_0 positif, il existe une grandeur y plus petite que y_0 telle que $f(X \pm y - f(X)$ soit en valeur absolue supérieure à ε. Cette existence de y à partir de y_0 lui sert pour définir une suite $(z^{(n)})$ moyennant implicitement l'axiome du choix. Ecoutons-le.

> Quand on fixe un nombre déterminé ε tel que, aussi petit que l'on prenne un nombre η_0, la condition de continuité ne soit jamais remplie, alors il existe toujours des valeurs η inférieures à η_0 telles que $f(X + y) - f(x)$ reste supérieur à ε; ainsi, pour une grandeur quelconque η_0, on a une telle valeur η, égale à η' (inférieure à cet η_0), pour laquelle la différence précitée n'est pas plus petite que ε. Pour une moitié de la grandeur de la valeur η_0 la différence ne peut être plus petite que ε pour $\eta = \eta''$; pour un η_0 égal à la moitié du précédent (le quart du premier, ceci peut avoir lieu pour $\eta = \eta'''$ et ainsi de suite [Heine 1872, 183].

Pour le lecteur que la théorie des modèles mise en oeuvre par Jaegermann pourrait effaroucher, contentons-nous ici, de remarquer que les η', η'' et η''' mis en avant par Heine sont des nombres réels non nécessairement rationnels. Dès lors, nous ne pouvons plus, comme pour Méray, invoquer un bon ordre sauf à admettre celui des nombres réels ou de manière plus générale l'axiome du choix même si ce dernier peut ici être remplacé par une forme plus faible, axiome du choix dénombrable ou principe des choix dépendants. Cet exemple nous montre combien, resituée dans un certain cadre, la démarche suivie par Méray est un témoignage certain de la préhistoire de l'axiome du choix : dans un cadre semblable, Heine développe une argumentation tout à fait comparable à celle suivie par Méray, mais où cette fois on ne peut évacuer l'axiome du choix.

Bibliographie

CANTOR Georg 1883 Über unendliche lineare Punktmanningfaltigkeiten V **Mathematische Annalen** t. 21, 1883, 545-586, in **Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts**. Hildesheim, Olms, 1966, 165-208 trad. partielle Fondements d'une théorie générale des ensembles **Acta mathematica** t. 2, 1883, 381-408.

CASSINET Jean, GUILLEMOT Michel 1983 L'axiome du choix dans les mathématiques de Cauchy (1821) à Gödel (1940), **Thèse d'Etat**, Toulouse

CAUCHY Augustin 1821 **Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique**, Paris : Imprimerie Royale, réimp. Oeuvres complètes II^{e}série, t. III. Paris, Gauthiers-Villars, 1897.

COHEN Paul 1963 **The independance of the axiom of choice**, Stanford University

DIEUDONNE Jean (éd.) 1978 **Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900**, t. I, Paris, Hermann

DUGAC Pierre 1970 Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite, **Revue d'Histoire des Sciences**, t. 23, 1970, 333-350.

GÖDEL Kurt 1938 The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, Proceedings of the National Academy of Sciences, t. 24, 1938, 556-557.

HEINE Heinrich Eduard 1872 Die Elemente der Functionenlehre, **Journal für die reine une angewandte Mathematik**, t. 74, 1872, 172-188.

HILBERT David 1900 Mathematische Problem Vortrag, gehalten auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900, **Nachrichten von den Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen**, 1900, 253-297 in **Oeuvres**, t. 3, 290-329, trad. Sur les problèmes futurs des mathématiques, **Compte-rendu du 2eCongrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900**, Paris, Gauthier-Villars, 1902, 58-114.

HOWARD Paul, RUBIN Jean 1998 **Consequences of the axiom of choice**, American Mathematical Society.

JAEGERMANN, M. 1965 The axiom of choice and the two definitions of continuity, **Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques**, t. 13, 1965, 699-704.

KÖNIG Julius 1904 Zum Kontinuum Problem **Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg vom 8 bis 13 August 1905**, Leipzig, Teubner, 1905, 144-147.

MEDVEDEV Fedor 1982 **Ramnyaya istoriya aksiani vibrra** (Brève Histoire de l'Axiome du Choix), Moscou, Nauka.

MERAY Charles 1869 Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données, **Revue des Sociétés Savantes**, t. 4, 1869, 280-289.

MOORE Gregory 1982 **Zermelo's axiom of choice. Its origins, development and influence**, New-York, Springer.

RUBIN Herman, RUBIN Jean 1985 **Equivalents of axiom of choice II**, Amsterdam, North Holland

ZERMELO Ernst 1904 Beweis dass jede Menge wohlgeordnet sein kann **Mathematische Annalen**, t. 59 (1904), 514-516.
1908a Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung **Mathematische Annalen**, t. 65, 1908, 107-128.
1908b Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, **Mathematische Annalen**, t. 65, 1908, 261-281.

ZORN Max 1935 A remark on method in transfinite Algebra, **Bulletin of the American Mathematical Society**, t. 41, 1935, 667-670.

MARIA GAETANA AGNESI

1718 - 1799

D'après un texte librement adapté de June Barrow-Green paru dans "Newsletter" n° 31 (mars 1999), revue de la Société Mathématique Européenne. Il s'agit de célébrer le bicentenaire de la mort de cette mathématicienne.

Bien des mathématiciens connaissent le nom d'Agnesi à cause de la cubique dite "versiera" ou « cubique d'Agnesi » ou encore « sorcière d'Agnesi ». Cette cubique a pour équation cartésienne $x^2 y = a^2 (a - y)$. Cependant, la plupart d'entre eux, peu au fait de son histoire, peuvent se demander en vain la raison de la dénomination, pour le moins inhabituelle, de cette courbe. Nous verrons que si la vérité est bien plus triviale que ce que l'on peut s'imaginer, il nous faut noter que ce nom a au moins l'avantage de perpétuer le souvenir de Maria Gaetana Agnesi, sinon la première du moins une des toutes premières mathématiciennes européennes de la période moderne.

Maria Gaetana Agnesi naquit à Milan en 1718, l'aînée des 21 enfants de Pietro Agnesi dont la famille avait fait fortune dans le commerce de la soie[1]. Elle fut poussée dans les études par son père qui lui procura les meilleurs maîtres de la région en philosophie, en langues, en sciences naturelles, en mathématiques et en musique. Dès l'âge de 11 ans, elle dominait de nombreuses langues dont le français, le latin, le grec, l'allemand, l'espagnol et l'hébreux. En 1738 fut publié un volume de 191 thèses philosophiques qu'elle se prépara à défendre, défiant ainsi tous les concurrents. Les comptes rendus de son habileté dans cette joute oratoire montrent qu'elle possédait déjà de sérieuses connaissances dans les disciplines scientifiques puisqu'elle y fait référence à la théorie des marées, à la propagation de la lumière, aux propriétés géométriques des courbes et de son soutien à la philosophie newtonienne.

Cependant Agnesi se lassa rapidement d'une vie publique où on ne s'intéressait qu'à son prodigieux talent et, contre la volonté de son père, elle décida d'entrer au couvent. Ce n'est qu'après de longues discussions, qu'elle accepta de rester au sein de la famille à la condition qu'elle abandonne les formes de sa vie passée. Elle se cloîtra chez elle et s'adonna à l'étude de la religion et des mathématiques. Ses progrès en mathématiques furent grandement facilités par l'arrivée à Milan de Ramiro Rampinelli (1697–1759), moine bénédictin et surtout mathématicien qui était auparavant professeur à Rome et à Bologne. Rampinelli devint un visiteur régulier de la maîtresse de maison et tînt bientôt le rôle de professeur d'Agnesi.

Le premier travail mathématique d'Agnesi, un commentaire du traité posthume de L'Hospital sur les sections coniques[2], ne fut pas publié. Cependant, son deuxième

---

[1] C'est à tort que de nombreux dictionnaires biographiques perpétue le mythe d'un père professeur de mathématiques à Bologne. Le statut social exact de la famille Agnesi est parfaitement documenté dans l'ouvrage d'Anzoletti "Maria Gaetana Agnesi" publié à Milan en 1900.

[2] Guillaume de L'Hospital, « Traité analytique des sections coniques », Paris 1720. Ce livre eut une grande importance lors de sa publication.

ouvrage mathématique, "Instituzioni Analitiche ad Uso della Gioventù Italiana", en deux volumes, publié à compte d'auteur à Milan en 1748, la rendit célèbre. Il était rédigé en italien (et non pas en latin) d'une part parce qu'elle préférait écrire en cette langue et d'autre part parce qu'elle voulait le rendre accessible à la jeunesse italienne, en particulier à ses frères. Son but, comme elle le déclare dans la préface, était de présenter le sujet de façon qu'il soit « pourvu de sa clarté et de sa simplicité propre... [et] suive l'ordre naturel qui procure, peut-être, le meilleur enseignement et la plus grande lumière » La préface contient également un hommage émouvant à Rampinelli ainsi qu'une reconnaissance envers une œuvre plus ancienne de Reyneau[3].

En dehors de Rampinelli, une autre personne eut une influence importante sur l'ouvrage. Il s'agit du mathématicien Jacopo Riccati (1676–1754). Rampinelli connaissait bien Riccati et c'est sur son conseil qu'Agnesi lui écrivit, lui demandant son avis et des commentaires sur son travail. Commença alors une longue et fructueuse correspondance entre elle et Riccati, correspondance qui dura de 1745 à 1749 et dans laquelle Riccati suggère de nombreuses corrections et annotations. La correspondance contient également la « méthode des polynômes » œuvre non publiée de Riccati et qui datait de plusieurs années. Agnesi inclut cette œuvre dans son ouvrage en précisant soigneusement son origine.

À première vue, il semble que l' "Instituzione Analitiche" fut un grand succès. Marie-Thérèse, Grande Duchesse d'Autriche et féministe notoire à laquelle Agnesi avait dédicacé son travail, montra sa satisfaction en envoyant à l'auteur une boîte incrustée de diamants. Le Pape Benoît IV qui avait lui-même étudié les mathématiques lui écrivit personnellement pour la féliciter et peu de temps après il lui accorda le poste rémunéré de lectrice honoraire en analyse à l'université de Bologne. En 1750, elle fut nommée sur la chaire de mathématiques. En 1749, l'Académie française recommanda que le deuxième volume fut traduit en français, traduction qui vit le jour en 1775. En 1760, John Colson[4] prépara une traduction anglaise[5] mais qui ne fut publié qu'en 1801 pour diverses raisons dont la mort du traducteur. Colson avait été tellement intéressé par le travail d'Agnesi qu'il apprit l'italien pour effectuer la traduction, traduction qui ne se limitait pas seulement au vocabulaire mais également aux notations, puisqu'il transposa les notations de Leibniz en celles de Newton.

Cependant, un examen plus attentif des sources montre que l'accueil de son livre ne fut pas aussi large qu'on peut le penser. Le travail d'Agnesi ne reçut pratiquement pas d'attention de la part des grands mathématiciens du XVIII[e] siècle et plus tard les historiens des mathématiques l'ignorèrent largement. Comme Truesdell l'a démontré

---

[3] Charles René Reyneau : « Analyse démontrée ou la méthode de résoudre les problèmes des mathématiques et d'apprendre facilement ces sciences » Paris 1707.

[4] John Colson était titulaire d'une chaire à Cambridge de 1739 à 1760. La plupart de ses publications sont des traductions.

[5] J. Colson, "Analytical Institutions", Volume I, Londres 1801.

avec force, c'était essentiellement parce que le livre d'Agnesi, bien qu'il fut sans aucun doute un modèle de clarté, ne contenait rien de nouveau ou d'original, ni davantage d'applications à la mécanique. Bien qu'il ait été décrit avec précision comme « un exposé par l'exemple plutôt que par la théorie », il ne contient pas un seul exemple d'un calcul différentiel ou intégral appliqué à un phénomène naturel, contrairement à bien d'autres livres de l'Europe continentale de la même période.

Le livre commence par l'algèbre élémentaire, continue par la théorie des équations et l'usage des coordonnées en géométrie, puis dans le volume II, attaque le calcul différentiel et intégral (ainsi que les séries infinies telles qu'on les connaissait à l'époque), et termine par la résolution des équations différentielles élémentaires. L'étude de la courbe connue aujourd'hui sous le nom de « sorcière d'Agnesi » apparaît vers la fin du premier volume[6] (page 381). Cette courbe, dont la première mention se trouve dans les travaux de Fermat, fut construite en 1703 par Guido Grandi (1671–1742) qui, en 1718, l'appela « Versiera » du latin « Versiora » qui est la corde qui entoure une voile[7]. Dans l'étude de cette courbe, Agnesi suit fidèlement Grandi et écrit "La curva... dicesi la Versiera". Le nom de « sorcière » n'apparut que plus tard et résulte d'une erreur de traduction. Le coupable en est Colson qui confondit "la Versiera" avec " l'aversiera" qui a justement le sens de « sorcière » (voir sa traduction page 222).

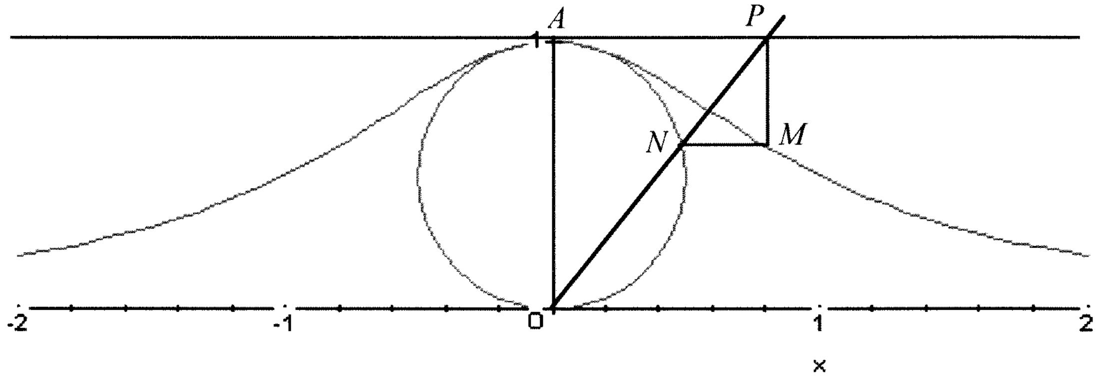
Malgré sa nomination sur une chaire de l'université de Bologne, Agnesi ne se rendit jamais dans cette ville pour y toucher ses revenus. Pourtant son nom resta sur les registres de l'université pendant quarante-cinq ans. Peu de temps après la publication de "Instituzioni Analitiche", et sans doute à la suite d'une sévère injonction paternelle elle se dédia corps et âme à la religion. Elle prit en charge l'instruction de ses frères et sœurs et s'engagea dans l'aide aux pauvres et aux malades. Après la mort de son père en 1752, elle redoubla de ferveur religieuse et s'investit totalement dans son travail charitable. Elle créa et finança un hospice pour les vieilles femmes. En 1771 elle devint directrice d'un grand asile pour pauvre, "Pio albergo Trivulzio" dépendant de l'église et elle y mourut, sans ressource, en 1799.

---

[6] M. G. Agnesi, "Instituzioni Analitiche ad Uso della Gioventù Italiana", Vol I, Milan, 1748.

[7] Pour une histoire de la courbe, voir G. Loria, "Curve Piane Speciali Algebriche e Transcendenti, Teoria et Storia", Volume I, Milan, 1930.

UNE CONSTRUCTION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA CUBIQUE D'AGNESI



On considère un cercle de diamètre $[OA]$ et sa tangente en A. Une droite variable passant par O recoupe le cercle en N et coupe la tangente en P. Soit M le point tel que le triangle MNP soit rectangle en M et la droite MP parallèle à OA. Quand N varie sur le cercle, alors M décrit la cubique d'Agnesi.

Soit O l'origine du repère, (OA) l'axe des y et la tangente en O au cercle l'axe des x, la cubique a pour équation cartésienne $y\,x^2 + a^2\,y - a^3 = 0$ où a est la longueur OA. On peut aussi écrire $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ ce qui montre que l'axe des abscisses est asymptote à la cubique. En prenant comme paramètre l'angle t entre OA et ON, on obtient la représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\tan(t) \\ y = a\cos^2(t) \end{cases}$.

Le cercle de diamètre OA est le cercle surosculateur en A à la cubique d'Agnesi.

L'aire entre la courbe et son asymptote vaut quatre fois l'aire du cercle générateur de diamètre OA.

26^e RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE

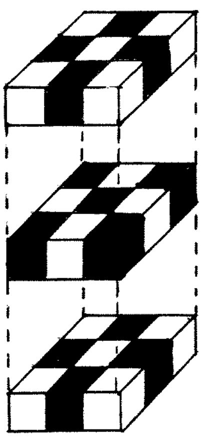
CORRIGÉ DES ÉPREUVES 1999

Nous avons sélectionné, pour chacun des exercices, une solution de candidats qui nous a paru intéressante. Pour deux des sujets nous ne proposons pas d'autre corrigé : la copie d'élèves étant déjà tout à fait satisfaisante.

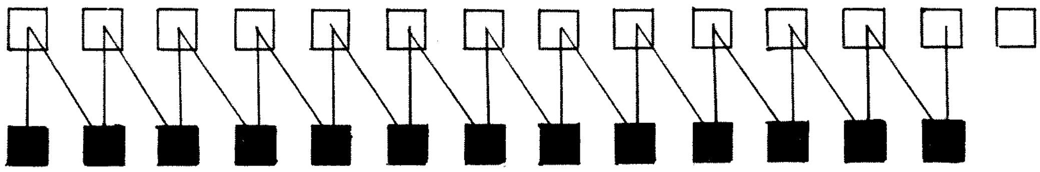
ÉPREUVES DE PREMIÈRES

Sujet 1 : JOUALI Youssef et TROG Alexandre (Lycée Marc Bloch de Bischheim)

La souris se trouve dans le (petit) cube central d'un grand cube, composé de 27 petits cubes. Puisque $\sqrt[3]{27} = 3$, on en déduit que ce grand cube est formé de 3 couches, similaires, de $3 \times 3 = 9$ petits cubes.
L'énoncé affirme que la souris ne peut passer d'un cube à un autre que s'ils ont une face commune, et bien sûr sans repasser par un même cube.
En donnant à chaque cube une couleur différente des cubes qui sont en contact face à face avec lui, et en n'utilisant que deux couleurs, les consignes peuvent se traduire par : "la souris dévore les cubes un par un, ne pouvant passer de l'un à l'autre que s'ils sont de couleurs différentes".
On obtient donc le schéma suivant :



Il y a donc 13 cubes gris et 14 cubes blancs. Sachant que la souris part d'un cube gris, il apparaît clairement qu'elle ne pourra pas manger tout le fromage en suivant les consignes. En effet, elle en mange un gris, puis un blanc, puis un gris, et ainsi de suite. Malheureusement en arrivant à l'avant-dernier cube, elle ne pourra passer au dernier, puisqu'ils sont tous les deux blancs.
Cela apparaît plus clairement au travers du schéma suivant :



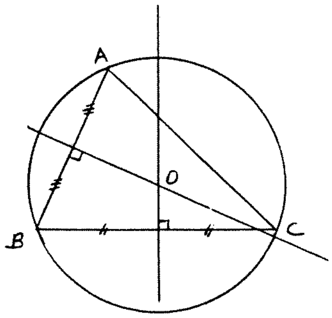
Chemin emprunté par la souris : ———

La souris ne peut donc pas manger tout le fromage.

Sujet 2 : GRETENER Maxime et DALMAR Geoffroy (Lycée Jean Monnet de Strasbourg)

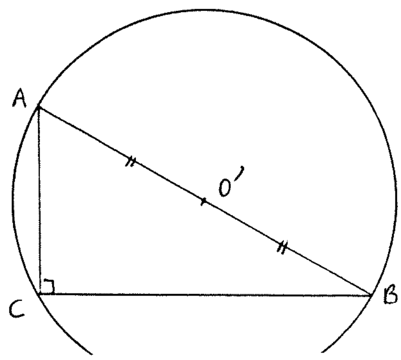
Puisqu'il y a trois sorties de terrier, la figure représentée est un triangle ou un segment dans le cas où les trois terriers sont alignés.
Divers cas sont possibles et dans chacun des cas le point change d'emplacement mais reste toujours à l'intérieur ou sur les limites du triangle ou du segment fermé.

1er cas : Triangle aux angles aigus (quelconques, isocèles non rectangles, équilatéraux)



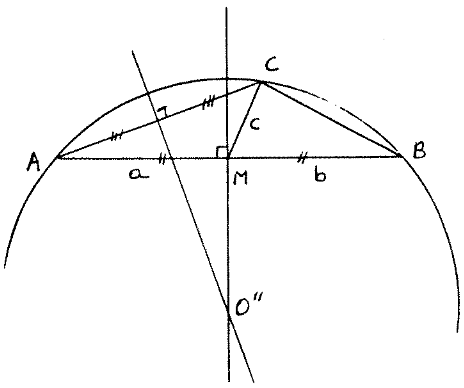
O est le centre du cercle circonscrit à ABC. Donc $OA = OB = OC = r$, r étant le rayon du cercle. Le renard doit se placer en O car s'il se déplace, une des distances qui le sépare d'un terrier augmentera et sera donc supérieure à r.

2ème cas : Triangle rectangle (et rectangle isocèle)



Ici, comme pour le triangle aux angles aigus, la démonstration est la même, le renard doit se placer à égale distance des trois terriers. Mais dans ce cas de figure, le centre du cercle circonscrit se trouve au milieu de l'hypothénuse. Ce qui nous amène au 3ème cas.

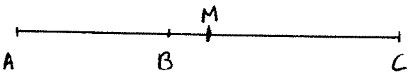
3ème cas : Triangle avec un angle obtus ($> 90^o$) isocèle ou non



A l'évidence, si le renard se place en O'' il ne sera pas au point le plus proche des trois terriers.
Comme pour les deux premiers cas, le renard doit se placer à égale distance de deux terriers (A et B ici). Donc, il doit se placer sur la médiatrice de $[AB]$. Reste à savoir où.
Soit M le point où le renard doit se placer pour que le terrier le plus loin soit le plus proche possible.
On sait que M est sur la médiatrice de $[AB]$, et M ne doit pas sortir du triangle ABC.
Soit $a = MA$, $b = MB$ et $c = MC$.
On a $a = b = c$ lorsque $O'' = M$; lorsque M se dirige vers A et B en restant sur la médiatrice de $[AB]$, $c < b$ et $c < a$. Donc c sera forcément la distance la plus

courte du renard aux terriers (par rapport à a et b). Il nous faut donc a et b le plus petit possible, donc il faut $a = b$.
Donc M doit se placer au milieu du côté le plus long.

4ème cas : Trois terriers alignés



$AM = MC, AB = c, BC = a, AC = b.$

A l'évidence M doit être sur $[AC]$ pour que $AM + MC$ soit le plus court possible. De ce fait, MB sera plus petit que AM et MC. Donc il nous faut $AM = MC$, c'est-à-dire M milieu de $[AC]$ pour que la distance du renard au terrier le plus loin possible soit le plus proche possible, car si M tend vers C, AM sera supérieur à MC.
Donc la distance du renard au terrier le plus loin sera la plus petite lorsque le renard se situera au milieu du segment formé par les deux terriers les plus éloignés dans le cas où les trois terriers seront alignés.

<u>**Sujet 3**</u> : GLEIXNER Karoline et BOST Jean-François (Lycée français de Vienne (Autriche))

Le problème de Boris :

$$\begin{aligned} & a+b+c = abc \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a+b+c}{abc} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a}{abc} + \frac{b}{abc} + \frac{c}{abc} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = 1. \end{aligned}$$

Donc $a \neq 0 \quad b \neq 0 \quad c \neq 0$ (la division par 0 étant impossible) donc comme a, b et $c \in \mathbf{N} \quad a \geq 1 \quad b \geq 1 \quad c \geq 1$.

Attention : cette partie est mal rédigée : voir commentaires sur les "divisions par zéro" (1).

Considérons que aucun des trois nombres soit égal à 1 donc que

$$\begin{aligned} & a \geq 2 \qquad b \geq 2 \qquad c \geq 2 \quad (2) \\ \Longrightarrow\ & ab \geq 4 \qquad ac \geq 4 \qquad bc \geq 4 \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{ac} \leq \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{4} \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \leq \frac{3}{4} \neq 1 \end{aligned}$$

---

(1) NDLR : On introduit en italique les remarques du correcteur.
(2) La copie de ces élèves ne contient que des symboles d'équivalence. Certaines de ces équivalences sont vraies sous conditions, mais pour les autres, la rédaction de '*L'Ouvert*' a préféré les remplacer par des implications pour que la lecture devienne acceptable et reproduise le raisonnement des élèves.

Pour cette dernière ligne : Mal dit : n'hésitez pas à rajouter une ligne ici : $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\leq\frac{3}{4}\Longrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\neq 1$ *(Cette faute va réapparaître à plusieurs reprises.)*

La formule qui découle de l'énoncé n'est donc pas vérifiée.
$a\neq 1 \quad b\neq 1 \quad c\neq 1$ est impossible donc un des trois réels est égal à 1.
Considérons $a\leq b\leq c$, donc $\underline{a=1}$.
Donc : $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=1\Leftrightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{bc}=1$.

$$\begin{gathered}\text{Or, si } b=1 \text{ ou c}=1,\text{alors}\\ \frac{1}{c}=1 \text{ ou } \frac{1}{b}=1\Longleftrightarrow\\ \frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}>1\neq 1.\end{gathered}$$

Donc $a=1$ et $b=1$ impossible et $\underline{\text{donc } a=1 \quad b\geq 2 \text{ et } c\geq 2}$.

Première réapparition de la faute de rédaction : on arrive à des choses étranges : $1\neq 1$.

Considérons $b\neq 2$ et $c\neq 2$. Comme c et $b\in\mathbf{N}$

$$\begin{gathered}b\neq 2 \qquad c\neq 2 \qquad b\neq 1 \qquad c\neq 1\Longrightarrow\\ b\geq 3 \qquad c\geq 3 \qquad c\geq 3\Longrightarrow\\ \frac{1}{b}\leq\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{c}\leq\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{bc}\leq\frac{1}{9}\Longrightarrow\\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{bc}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\Longrightarrow\\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{bc}\leq\frac{7}{9}<1\end{gathered}$$

donc $b\neq 2$ $c\neq 2$ est impossible, donc $\underline{b=2}$.
Donc

$$\begin{gathered}\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=1\Longleftrightarrow\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2c}=1\Longleftrightarrow\\ \frac{2}{2c}+\frac{1}{2c}=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\\ 2c=3\times 2\Longleftrightarrow\\ \underline{c=3}.\end{gathered}$$

L'unique solution au problème de Boris est donc le triplet 1, 2, 3.

Bill ne peut donc lui donner trois autres entiers naturels solution à son problème :

Le problème de Bill :
C'est relatif à la division par 0.

$$a+b+c=abc-1 \Longleftrightarrow \frac{a+b+c+1}{abc}=1$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}=1$$

$a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$ (la division par 0 étant impossible) donc comme a, b et $c \in N$, $a \geq 1$ $b \geq 1$ $c \geq 1$.
Considérons $a \leq b \leq c$. Considérons que $a \neq 1$ $b \neq 1$ $c \neq 1$ donc que

$$a \geq 2 \qquad b \geq 2 \qquad c \geq 2 \Longrightarrow$$
$$abc \geq 8 \qquad ab \geq 4 \qquad bc \geq 4 \qquad ac \geq 4 \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{abc} \leq \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{ac} \leq \frac{1}{4} \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{abc} \leq \frac{7}{8} \neq 1.$$

La formule qui découle de l'énoncé n'est donc pas vérifiée, donc $a=1$.
Donc

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{abc}=1 \Longleftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bc}=1$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{bc}=1.$$

Considérons $b=1$ ou $c=1 \Longleftrightarrow \frac{1}{b}=1$ ou $\frac{1}{c}=1$.
Alors $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{bc}>1 \neq 1$
donc a et seulement a est égal à 1, donc : $\underline{b \geq 2 \; c \geq 2}$.
Considérons

$$b \geq 3 \qquad c \geq 3 \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{9} \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{bc} \leq \frac{8}{9} \neq 1.$$

Donc $b \geq 3$ et $c \geq 3$ est impossible donc $b=2$, donc finalement

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{c}+\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}c}=1 \Longleftrightarrow$$
$$\frac{2}{c}=\frac{1}{2} \Longleftrightarrow$$
$$\underline{c=4}.$$

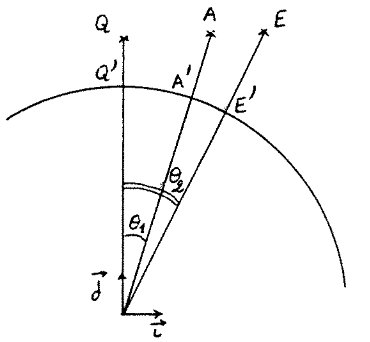
1, 2, 4 est donc l'unique solution de nombres entiers naturels tel que a + b + c = abc - 1.

ÉPREUVES DE TERMINALE

<u>**Sujet 1**</u> : HALLER Fabien et HEIBY Jean-François (Lycée Marc Bloch de Bischheim)

Pour traiter ce sujet, on se place dans le repère géocentrique $R(O, \vec{i}, \vec{j})$. On supposera Q, le sommet du Rossberg où est Quasimodo, tel que $\overrightarrow{OQ}$ colinéaire à $\vec{j}$.

Schéma :



$\widehat{Q'A'} = 161,8$ km
$\widehat{Q'E'} = 210,6$ km
$Q'Q = 1,191$ km
$A'A = 3,243$ km
$E'E = 4,478$ km
$R = 6373$ km

On se propose de déterminer les coordonnées de Q, A, E dans R :

• mesure de θ_1 et θ_2 :

Périmètre de la terre : $p = 2\pi R$ ($\simeq$ 40042,74 km)

$$\frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{\widehat{Q'A'}}{P} \Longleftrightarrow \theta_1 = \frac{\widehat{Q'A'}}{R} = \frac{809}{31865} \quad (\simeq 0,025 \text{ rad})$$

$$\frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{\widehat{Q'E'}}{P} \Longleftrightarrow \frac{\widehat{Q'E'}}{R} = \frac{1053}{31865} \quad (\simeq 0,033 \text{ rad}).$$

Coordonnées :

$$Q \left| \begin{array}{ll} 0 & = 0 \\ 6373 + 1,191 & 6374,191 \end{array} \right.$$

$$A \left| \begin{array}{l} (6373 + 3,243) \times \sin\theta_1 \\ (6373 + 3,243) \times \cos\theta_1 \end{array} \right.$$

$$A \left| \begin{array}{l} 6376,243 \sin\theta_1 \\ 6376,243 \cos\theta_1 \end{array} \right.$$

$$E \left| \begin{array}{l} (6373 + 4,478) \times \sin\theta_2 \\ (6373 + 4,478) \times \cos\theta_2 \end{array} \right.$$

$$E \left| \begin{array}{l} 6377,478 \sin\theta_2 \\ 6377,478 \cos\theta_2. \end{array} \right.$$

Afin de savoir si Quasimodo voit Esmeralda, on calcule les équations des droites (QA) et (QE).

$$(QA) : y_1 = \frac{6376,243\cos\theta_1 - 6374,191}{6376,243\sin\theta_1}x + 6374,191$$

$$(QE) : y_2 = \frac{6377,478\cos\theta_2 - 6374,191}{6377,478\sin\theta_2}x + 6374,191$$

On étudie les positions relatives des droites (QA) et (QE) : signe de la différence $y_1 - y_2$. Si $y_1 - y_2 > 0$, alors (QA) au-dessus de (QE) : Quasimodo ne voit pas Esmeralda. Mais si $y_1 - y_2 < 0$, alors il la voit.

$$y_1 - y_2 = \underbrace{\Big(\frac{6376,243\cos\theta 1 - 6374,191}{6376,243\sin\theta_1} - \big(\frac{6377,478\cos\theta_2 - 6374,191}{6377,478\sin\theta_2}\big)\Big)}_{\alpha}x.$$

$y_1 - y_2 = \alpha x$ avec α calculé à la calculatrice : $\alpha \simeq 9,07.10^{-4} > 0$. Or, ici x est toujours positif. Donc $y_1 - y_2 > 0$.
$y_1 > y_2$: (QA) au dessus de (QE).

Conclusion : Quasimodo ne voit pas Esmeralda.

<u>**Sujet 2**</u> : Pansiot Julien et Matt Paul-Amaury (Lycée Marie Curie de Strasbourg)

- **Hypothèse :** $1 \leq a < b < c$ et $n \geq 2$
- **Détermination de n et de la somme a + b + c**

Soit L, la somme des sesterces distribués en une distribution. $L = a + b + c$, car les trois femmes reçoivent des sommes toutes différentes.
On a donc $L \quad n = 20 + 10 + 9 = 39$.
L et n sont entiers, et 39 est entier. Donc L est diviseur de 39, et de même pour n.
Les diviseurs de 39 sont : $\{1;3;13;39\}$. $n \geq 2$, donc $n \neq 1$.
Par conséquent $L \neq 39$.
Donc n et L appartiennent à $\{3;13\}$. On a $a \geq 1$, donc $b \geq 2$ et $c \geq 3$. Donc $L \geq 6$.
Par conséquent, $L = 13$ et $n = 3$.

- **Encadrement de c**

. Ielosubmarine a reçu $n = 3$ plaquettes, dont c en dernier lieu. Soit x et y les deux premières sommes reçues. On a : $10 = c + x + y$, avec $x \geq 1$ et $y \geq 1$.
Donc $\underline{c \leq 8}$.
. Falbala a reçu trois plaquettes avec les sesterces correspondants : x, y et z. On a : $x \leq c \quad y \leq c$ et $z \leq c$.
Donc $3c \geq 20$. D'où $\underline{c \geq 7}$ car c entier.

- **Détermination de a**

. Ielosubmarine a reçu au total 10 sesterces, dont c à la dernière distribution.
La somme des deux premières distributions est $10 - c$ avec $c = 7$ ou $c = 8$.
Si $c = 7$, cette somme est de 3. Si $c = 8$, cette somme est de 2.
Par décomposition de la somme en entiers non nuls, on obtient $1 + 1$ et $1 + 2$.
Dans tous les cas, le 1 est présent. Par conséquent, il existe une plaquette notée 1.
Or, $1 \leq a < b < c$. Donc : $a = 1$.

- Il reste à présent deux triplets de solutions :

$$(a, b, c) = (1, 4, 8) \quad (\text{si } c = 8)$$
$$(a, b, c) = (1, 5, 7) \quad (\text{si } c = 7)$$

avec $a + b + c = 13$.

• Elimination du triplet (1,5,7)
Ielosubmarine a reçu 10 sesterces au total, dont 7 à la dernière distribution. Par conséquent, la somme des deux premières distributions est de 3. Or il est impossible d'additionner 2 nombres de $\{1; 5; 7\}$ et d'obtenir en résultat 3. Donc ce triplet ne convient pas.

• Vérification du triplet (1,4,8)
Ielosubmarine a reçu en dernier lieu 8 sesterces. Dans la dernière distribution, Falbala et Bonemine ont reçu 1 et 4 sesterces. Il est impossible que ce soit Falbala qui ait eu 1 sesterce, car dans ce cas, la somme des deux premières distributions est de $20 - 1 = 19$, qu'on ne peut obtenir avec la somme de deux éléments de (1,4,8). Donc à la dernière distribution, Falbala a reçu 4 sesterces, Ielosubmarine 8 et Bonemine 1.
La somme des deux premières distributions de Ielosubmarine est de 2, c'est-à-dire $1 + 1$ (unique combinaison possible).
La somme des deux premières distributions de Falbala doit être 16, c'est-à-dire 8 + 8, et celle de Bonemine de 8, c'est-à-dire 4 + 4.
Les deux premières distributions sont égales, et les trois femmes ont eu des sommes différentes.

n	Falbala	Ielosubmarine	Bonemine
1	$c = 8$	$a = 1$	$b = 4$
2	$c = 8$	$a = 1$	$b = 4$
3	$b = 4$	$c = 8$	$a = 1$
somme	20	10	9

• Conclusion
On a procédé par implication et vérification. Les vérifications se révèlent exactes.
La femme ayant eu b la première est Bonemine.

__Sujet 3__ : DOGOS-DOCOVITCH Alexandre et FUHR Thomas (Lycée Kléber de Strasbourg)

Enigme : "Si je prends un ensemble formé de 10 entiers naturels compris entre 11 et 99, puis-je toujours trouver deux sous-ensembles disjoints non vides dont les sommes des éléments soient égales ?"

• Déterminons le nombre de sommes distinctes ou non que l'on peut trouver en additionnant n éléments d'un ensemble de 10 éléments (avec $1 \leq n \leq 10$).
Soit S le nombre de sommes que l'on peut trouver pour chaque $n \in [1, 10]$. Il s'agit pour chaque n de prendre n éléments parmi 10, donc $S = C_{10}^n$.

$$\text{si } n=1 \quad S = C_{10}^1 = 10 \qquad \text{si } n=2 \quad S = C_{10}^2 = \frac{10!}{8!2!}$$
$$\text{si } n=3 \quad S = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} \qquad \text{si } n=4 \quad S = C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!}$$
$$\text{si } n=5 \quad S = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} \qquad \text{si } n=6 \quad S = C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!}$$
$$\text{si } n=7 \quad S = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} \qquad \text{si } n=8 \quad S = C_{10}^8 = \frac{10!}{8!2!}$$
$$\text{si } n=9 \quad S = C_{10}^9 = 10 \qquad \text{si } n=10 \quad S = 1.$$

Finalement <u>le nombre Σ total de sommes que l'on peut trouver est :</u>

$$\Sigma = 1 + 2(10 + \frac{10!}{8!2!} + \frac{10!}{7!3!} + \frac{10!}{6!4!}) + \frac{10!}{5!5!} = \underline{1023}$$

• On sait de plus que les 10 éléments constituant l'ensemble sont compris entre 11 et 99, la somme s' de ces 10 éléments est donc strictement inférieure à $1099 = 990$ et strictement positive.

Avec les 10 éléments, on peut donc composer 1023 sommes toutes comprises entre $]0, 990[$, cela signifie donc qu'il y a au moins une somme qui revient plusieurs fois, et ce quels que soient les 10 éléments qui constituent l'ensemble (*).

Ainsi on peut toujours trouver deux sous-ensembles disjoints non vides dont les sommes des éléments soient égales.

Emile le Sage étant un virtuose de l'addition, il trouva sans nul doute la réponse à l'énigme que lui avait soumis le Sphinx Wasigenstein. L'Alsace fut donc protégée par la déesse Iremia pendant 1999 ans.

(*) Si un des éléments de l'ensemble de 10 nombres intervient dans les deux sommes égales, on le "retire" de chacune des sommes. On aura bien deux sommes répondant à l'énoncé.

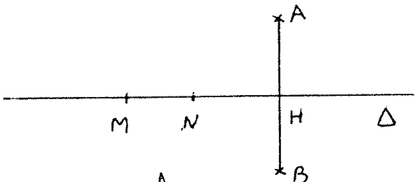
COMMENTAIRES - CLASSE DE PREMIÈRE

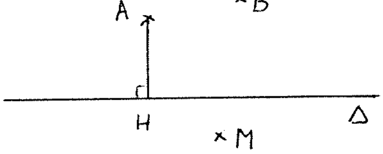
Sujet 1

1) Essayer d'emprunter quelques chemins qui n'aboutissent pas ne permet pas de conclure qu'aucun chemin ne peut répondre au problème posé.
2) Certains candidats ont pensé, pour une raison inconnue, que la souris devait manger le cube par tranches ou par étages successifs. Il n'y a aucune raison pour qu'un tel parcours soit optimal.

Sujet 2

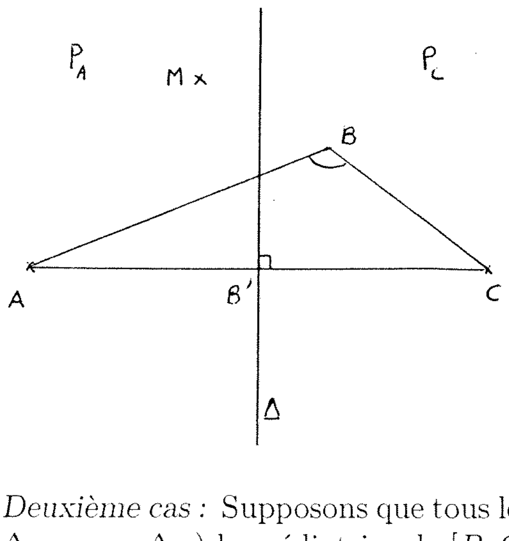
Soit $[A, B]$ un segment. Sa médiatrice Δ partage le plan en deux demi-plans P_A (contenant A) et P_B (contenant B).
Remarque 1 : Si $M \in P_A$, alors $MA \leq MB$. Le point M appartient à Δ si et seulement si $MA = MB$.





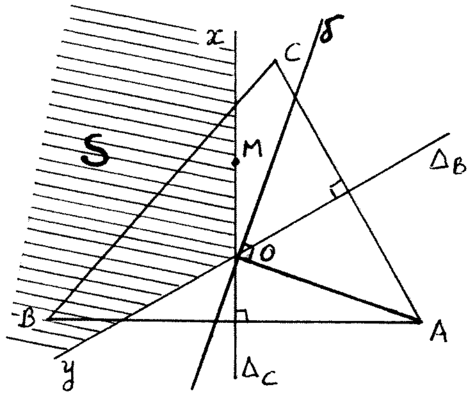
Remarque 2 : Soit H le milieu de $[A, B]$. Si $M \in \Delta$ et $N \in [H, M]$, alors $NA = NB \leq$ MA = MB.
Remarque 3 : Soit Δ une droite, A un point n'appartenant pas à Δ et H la projection orthogonale de A sur Δ. Pour tout M dans le demi-plan limité par Δ et ne contenant pas A, on a $AH \leq AM$ avec égalité si et seulement si $M = H$.

Note préliminaire : Les angles considérés seront de mesure comprise entre 0 et π.
Soit ABC le triangle formé par les trois sorties du terrier. Soit M un point, on note $d(M) = \max(AM, BM, CM)$.
Premier cas : Supposons qu'un des angles du triangle ABC est obtus, par exemple $\hat{B}$. Appelons Δ la médiatrice de $[A, C]$, $B' = \Delta \cap (AC)$, P_A (resp. P_C) le demi-plan délimité par Δ contenant A (resp. C).



Si M appartient à P_A, on a $MC \geq B'C$ (remarque 3), donc $d(M) \geq B'C$, avec égalité si et seulement si $M = B'$. Si M appartient à P_C, on a $MA \geq AB'$ (remarque 3), donc $d(M) \geq AB' = B'C$, avec égalité si et seulement si $M = B'$. Donc, pour tout point M du plan, on a $d(M) \geq B'C$ avec égalité si et seulement si $M = B'$. L'angle $\widehat{ABC}$ est obtus, donc $BB' \leq B'C = B'A$. Donc, pour tout point M du plan, on a $d(M) \geq d(B')$ avec égalité si et seulement si $M = B'$. Le point cherché est donc B'.

Deuxième cas : Supposons que tous les angles du triangle sont aigus. Soit Δ_A (resp. Δ_B, resp. Δ_C) la médiatrice de $[B, C]$ (resp. $[A, C]$, resp. $[A, B]$). On appelle O le centre du cercle circonscrit ($\{O\} = \Delta_A \cap \Delta_B \cap \Delta_C$). Il se trouve à l'intérieur du triangle.



Notons $S = xOy$ le secteur angulaire intersection des demi-plans délimités par Δ_B et contenant C et par Δ_C contenant B. Pour tout $M \in S$, $d(M) = MA$ (*cf.* remarque 1). Considérons δ, la droite perpendiculaire à (AO) passant par O.
Soit $M \in Ox$, alors $MA \geq OA$ (*cf.* remarque 2), donc l'angle $\widehat{AOx}$ est obtus. De même $\widehat{AOy}$ est obtus. Le secteur S est donc inclus dans le demi-plan limité par δ et ne contenant pas A.

D'après la remarque 3, pour tout point M de S, on a $d(M) = MA \geq OA$, avec égalité si et seulement si $M = O$. On raisonne de même pour les deux autres secteurs. Finalement, pour tout point M du plan, $d(M) \geq d(O)$, avec égalité si et seulement si $M = O$. Le point cherché est donc O.

Commentaires :
1) Le triangle aplati relève du premier cas, alors que le triangle rectangle relève des deux cas.
2) Les trois remarques préliminaires se démontrent, par exemple, de manière analytique ou encore à l'aide du produit scalaire.

Commentaires sur les copies :
1) Un grand nombre de candidats n'a pas compris le sens de l'énoncé.
2) Le centre du cercle circonscrit est souvent confondu avec le centre de gravité.
3) Le centre O du cercle circonscrit a souvent été introduit. Malheureusement, même sur des figures où le triangle possédait un angle obtus, il a été retenu comme solution du problème.
4) Nous avons retenu les copies des candidats qui distinguaient distinctement les différents cas et apportant des éléments de solution.
5) La rédaction proposée n'est pas une narration de recherche, mais un bilan ordonné d'une réflexion après tâtonnements et retours en arrière. Les trois remarques initiales sont les outils employés dans le corps de la démonstration et sont placées en préliminaire pour ne pas alourdir l'exposé.

Sujet 3

Notons a, b, c les trois entiers cherchés.
• Le problème de Boris revient à résoudre l'équation $a + b + c = abc$ avec $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{N}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Par symétrie, on peut supposer $a \leq b \leq c$. En outre, si $a = 0$, alors on obtient $b + c = 0$, donc $b = c = 0$ car $b \in \mathbf{N}$ et $c \in \mathbf{N}$. Cela donne $a = b = c = 0$, ce qui est exclu. On suppose donc $1 \leq a$.

Etude du cas $a = 1$. L'équation s'écrit alors $bc = 1 + b + c$, c'est-à-dire

$(b-1)(c-1) = 2$, avec les conditions $1 \leq b \leq c$, $b \in \mathbf{N}$ et $c \in \mathbf{N}$. Les seuls diviseurs dans $\mathbf{N}^*$ de 2 sont 1 et 2, donc on obtient nécessairement $b-1=1$ et $c-1=2$, d'où $b=2$, $c=3$. On obtient $a=1$, $b=2$ et $c=3$ qui est effectivement solution.

Etude du cas $a \geq 2$. On suppose que le problème posé admet au moins une solution et on aboutit à une absurdité. Supposons donc que a, b et c conviennent, avec $2 \leq a \leq b \leq c$, $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{N}$. Alors $a(bc-1) = b+c$, donc comme $a \geq 2$, on a $2(bc-1) \leq b+c$, donc $b(2c-1) \leq c+2$, et donc, comme $b \geq 2$, on a $2(2c-1) \leq c+2$, soit $3c \leq 4$. Mais $c \geq 2$, d'où $6 \leq 4$. Absurde! Il n'y a pas de solution avec $a \geq 2$.

Conclusion : seuls trois entiers conviennent, ce sont 1,2 et 3, correspondant à l'égalité $1.2.3 = 1+2+3$. Il est donc prouvé que Boris peut arrêter de chercher.

• Le problème de Bill peut se résoudre de la même manière. Il s'écrit $a+b+c+1 = abc$ avec $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{N}$ et on peut à nouveau supposer $a \leq b \leq c$. On laisse au lecteur le détail des calculs. Le cas $a=1$ conduit cette fois à $(b-1)(c-1) = 3$, c'est-à-dire $b=2$ et $c=4$. On obtient alors $a=1$, $b=2$, $c=4$, qui est effectivement solution.
Le cas $a \geq 2$ conduit comme précédemment à l'inégalité $3c \leq 5$, d'où l'absurdité car $c \geq 2$. Là encore, il n'y a pas de solution pour $a \geq 2$.

Conclusion : seuls trois entiers conviennent, ce sont 1,2 et 4, correspondant à l'égalité $1.2.4 = 1+1+2+4$. Le problème de Bill est donc résolu.

Commentaires : Cet exercice a permis de mettre en évidence quelques erreurs souvent commises, parfois indépendamment des sujets.
1) L'énoncé est parfois mal compris ou trop vite lu. On raisonne dans $\mathbf{N}$, pas dans $\mathbf{Z}$, et les entiers considérés ne sont pas supposés consécutifs.
2) Un serpent de mer ensuite : on ne divise par un nombre qu'après s'être assuré qu'il n'est pas nul. On est alors souvent amené à faire une petite discussion de cas ($a=0$, $a \neq 0$ ...). En tout cas, on n'affirme pas qu'un nombre est non nul sous prétexte qu'on a soi-même pris l'initiative de diviser par ce nombre à la ligne précédente...
3) Le classement ($1 \leq a \leq b \leq c$) des trois entiers permet de simplifier la résolution, de majorer, de minorer. Cela ne semble pas toujours naturel à nos élèves de premières.
4) On note, comme chaque année depuis quelque temps, une démarche désormais courante : la seule vérification que 1,2,3 sont effectivement des solutions pour en déduire ensuite qu'on a là toutes les solutions.
5) Une dernière remarque : la seule phrase "un produit d'entiers tend plus vite vers l'infini que leur somme", même intuitivement légitime pour guider une preuve, ne saurait tenir lieu de démonstration dans un exercice de Rallye Mathématique.

Rallye Mathématique d'Alsace 1999 - Terminale

Sujet 1

Commentaires :
1) Beaucoup de candidats ont effectué leurs calculs sans tenir compte du fait que la Terre est ronde; d'autres ont cru démontrer que la courbure de la Terre est négligeable.
2) Curieusement, la collégiale Saint-Thiébaut de Thann s'est parfois retrouvée sur le Rossberg, quand ce n'était pas sur le Wildstrubel, surmontée de plus du gros bourdon.
3) Un certain nombre de candidats ont fait preuve de beaucoup d'humour et de poésie dans leurs conclusions.

Sujet 2

On a distribué au total $20 + 10 + 9 = 39$ sesterces, d'où $n.(a + b + c) = 39$. Par hypothèse, $n \geq 2$ et $1 \leq a < b < c$, donc comme a, b, c sont entiers, $b \geq 2$ et $c \geq 3$, d'où $a + b + c \geq 6$. Le seul diviseur entier de 39 supérieur ou égal à 6 est 13. Donc $a + b + c = 13$ et donc $n = 3$.
Ielosubmarine a reçu a jetons les deux premières donnes, car sinon elle aurait reçu au moins $a + b + c = 13$ jetons au cours des trois tours. Si Bonnemine avait reçu c jetons à la première partie, elle aurait reçu au moins b et a jetons aux deux tours, soit au moins $a + b + c = 13$ jetons, ce qui est impossible.

F	I	B
	a	$\geq b$
	a	$\geq b$
	c	$\geq a$

Donc c'est Bonnemine qui a reçu b jetons à la première partie.

Commentaires :
1) On peut sans grand mal reconstituer le jeu en montrant que $a = 1$, $b = 4$ et $c = 8$, puis que les trois tours furent

F	I	B
8	1	4
8	1	4
4	8	1

2) L'étude exhaustive de tous les cas est lourde et inélégante. Elle nécessite de plus de ne pas oublier de cas, comme certains l'ont fait.
3) La solution précédente permet de conclure sans connaître (a, b, c).

Sujet 3

Soit A un ensemble formé de dix entiers compris (au sens large) entre 11 et 99. Il possède $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} = (1+1)^{10} = 2^{10}$ sous-ensembles, donc $2^{10} - 2$ sous-ensembles à part l'ensemble vide et A. Soit B un sous-ensemble de A différent de l'ensemble vide et de A. Alors $1 \leq \mathrm{Card}B \leq 9$ et la somme des éléments de B est inférieure ou égale à $99 \times \mathrm{Card}B$, donc à $9 \times 99 = 891$. Donc il y a deux sous-ensembles de A distincts, différents de l'ensemble vide et de A, ayant des sommes des éléments égales. En enlevant les éléments communs à ces deux sous-ensembles, on obtient deux sous-ensembles de A disjoints ayant des sommes d'éléments égales. L'Alsace peut ainsi compter sur la protection de la déesse Iremia pour 1999 grâce à l'excellente réponse d'Emile le Sage.

Commentaires :
1) Cet exercice n'a pas été traité par tous les candidats.
2) Les bonnes solutions furent rares.
3) Nombre de candidats ont pris dix entiers choisis par leurs soins et ont raisonné sur un exemple, de manière erronée qui plus est.
4) Beaucoup d'élèves ont considéré que lorsqu'on prend deux sous-ensembles disjoints dans un ensemble à 10 éléments, ils doivent forcément être complémentaires.
5) L'emploi de la formule du binôme de Newton pour déterminer le nombre de sous-ensembles d'une ensemble (dont le résultat n'est plus au programme de terminale) ne semble pas immédiat pour les candidats.
6) Heureusement que le Sage veillait...

A VOS STYLOS

Rappel à propos de cette rubrique de problèmes.— Nous cherchons autant que possible à soumettre à nos lecteurs des problèmes originaux, ou en tout cas méconnus. Comme en général peu de mathématiciens ont réfléchi à ces énoncés, du moins sous la forme où ils sont ici proposés, il est hasardeux de prétendre évaluer leur niveau de difficulté. Certains problèmes peuvent donc s'avérer difficiles. Qu'il soit entendu que ni les auteurs des problèmes, ni l'animateur de la rubrique ne sont tenus d'apporter des solutions complètes. L'objectif n'est pas celui-là, il est bien plutôt de susciter l'intérêt des lecteurs, qui sont par ailleurs invités à soumettre leurs propres énoncés pour cette rubrique.

Dominique Dumont

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

Solution par Pierre Renfer.—
[*Rappel de D. Dumont.*— A toute droite on associe le retournement ayant pour axe cette droite (la symétrie par rapport à cette droite). Rappelons que tout déplacement dans l'espace peut s'écrire comme le composé de tels retournements. Le cas général est celui d'un déplacement hélicoïdal (ou *vissage*) d'axe D, qui peut s'écrire comme le composé de deux retournements r_1 et r_2, D étant alors la perpendiculaire commune aux axes de r_1 et r_2. Dans le cas particulier où ces deux axes sont concourants (resp. parallèles), leur composé est une rotation (resp. une translation).]
Lemme 1.— *Soient trois retournements r_1, r_2 et r_3. Leur composé $r = r_1 \circ r_2 \circ r_3$ est un retournement si et seulement si leurs trois axes sont parallèles ou ont une perpendiculaire commune.*
Supposons que r soit un retournement et posons $f = r_1 \circ r_2 = r \circ r_3$. Si f est une translation, les axes des quatre retournements sont parallèles (et orthogonaux au vecteur de translation), tandis que si f est un vissage, les axes des quatre retournements ont une perpendiculaire commune, l'axe du vissage.
Réciproquement, si les axes de trois retournements r_1, r_2, r_3 sont parallèles ou ont une perpendiculaire commune, alors il existe un retournement r tel que $r_1 \circ r_2 = r \circ r_3$.

Lemme 2.— *Soient u et v deux déplacements tels que $u^{-1} = v \circ u \circ v^{-1}$. Alors v est un retournement.*
En effet, distinguons deux cas :
a) si u est un vissage d'axe D, sa transmuée $v \circ u \circ v^{-1}$ est un vissage d'axe $v(D)$. Donc $v(D) = D$. Une telle tranformation v est soit un vissage d'axe D (éventuellement réduit à une translation), soit un retournement d'axe perpendiculaire à D. Mais si c'est un vissage, on a $v \circ u \circ v^{-1} = u$. Mais $v \circ u \circ v^{-1} = u^{-1}$, donc v est un retournement.
b) si u est une translation de vecteur $\vec{a}$ non nul, alors sa transmuée $v \circ u \circ v^{-1}$ est une translation de vecteur $\vec{v}(\vec{a})$ (où $\vec{v}$ désigne ici l'application linéaire associée à v.) Donc $\vec{v}(\vec{a}) = -\vec{a}$, par suite v est un retournement.
Démonstration du théorème de Morley et Petersen.—
On note par la minuscule correspondante d le retournement ayant pour axe la droite D.
Pour chaque $i = 1, 2, 3$, comme D_i et U_i sont perpendiculaires, d_i et u_i commutent. D'après le lemme 1, D_3, D_2 et U_1 ayant une perpendiculaire commune P_1, le composé $d_3 \circ d_2 \circ u_1$ est un retournement, donc (et de même pour les suivants) :

$$\begin{aligned} d_3 \circ d_2 \circ u_1 &= u_1 \circ d_2 \circ d_3 \\ d_3 \circ d_1 \circ u_2 &= u_2 \circ d_1 \circ d_3 \\ d_1 \circ d_2 \circ u_3 &= u_3 \circ d_2 \circ d_1 \end{aligned}$$

Posons $u = d_3 \circ d_2 \circ d_1$ et $v = u_3 \circ u_2 \circ u_1$. Par suite, on a :

$$\begin{aligned} v \circ u \circ v^{-1} &= u_3 \circ u_2 \circ u_1 \circ d_3 \circ d_2 \circ d_1 \circ u_1 \circ u_2 \circ u_3 \\ &= u_3 \circ u_2 \circ u_1 \circ d_3 \circ d_2 \circ u_1 \circ d_1 \circ u_2 \circ u_3 \\ &= u_3 \circ u_2 \circ u_1 \circ u_1 \circ d_2 \circ d_3 \circ d_1 \circ u_2 \circ u_3 \\ &= u_3 \circ u_2 \circ d_2 \circ d_3 \circ d_1 \circ u_2 \circ u_3 \\ &= u_3 \circ u_2 \circ d_2 \circ u_2 \circ d_1 \circ d_3 \circ u_3 \\ &= u_3 \circ d_2 \circ u_2 \circ u_2 \circ d_1 \circ d_3 \circ u_3 \\ &= u_3 \circ d_2 \circ d_1 \circ d_3 \circ u_3 \\ &= d_1 \circ d_2 \circ u_3 \circ d_3 \circ u_3 \\ &= d_1 \circ d_2 \circ d_3 \circ u_3 \circ u_3 \\ &= d_1 \circ d_2 \circ d_3 \\ &= u^{-1}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2, v est un retournement. D'après le lemme 1, les axes U_1, U_2, U_3 sont parallèles ou ont une perpendiculaire commune. Le cas de leur parallélisme est exclu, car D_1, D_2 et D_3 seraient alors parallèles à un même plan (orthogonal aux U_i), ce qui est exclu par l'énoncé.

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des $2-$mélanges réguliers (pour la définition d'un $2-$mélange, voir les articles sur les tours de cartes dans les numéros 90 et 93 de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

Indication : Pour la première question, on pourra d'abord montrer le résultat général suivant : si f est une fonction affine de Z/mZ dans Z/mZ de la forme $f(x) = ax + b$, où a est un élément inversible dans l'anneau Z/mZ et b un élément quelconque, alors f est une permutation d'ordre au plus égal à m.
Pour la deuxième question, on examinera le cas où $n = 3^k$.

PROBLÈME 54

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Montrer que si x, y et z sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.
2°) Soit n un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1}$$

est égal au nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$xy + yz + zx = n. \tag{2}$$

Exemple.— $n = 35$. L'équation (1) possède six solutions : $(1, 3, 5)$, $(1, 5, 3)$, $(3, 1, 5)$, $(3, 5, 1)$, $(5, 1, 3)$ et $(5, 3, 1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1, 5, 5)$, $(5, 1, 5)$, $(5, 5, 1)$, $(1, 1, 17)$, $(1, 17, 1)$ et $(17, 1, 1)$.

Indication : Montrer que le nombre de triplets d'entiers impairs positifs (x, y, z) satisfaisant l'une ou l'autre des deux équations est aussi le nombre de triplets d'entiers (a, b, c) solutions de l'un ou l'autre des deux systèmes d'équation-inéquations suivants :

- $b^2 - 4ac = -n$, avec a, b, c impairs positifs tels que $b < 2a$ et $b < 2c$.
- $b^2 - ac = -n$, avec a *ou* c impair (*ou* est ici inclusif), b tel que $|2b| \leq a \leq c$ et, dans le cas où l'une au moins de ces deux inégalités est une égalité, $b > 0$.

Continuation de l'exemple.— $n = 35$. Le premier système a six solutions (a, b, c) qui sont : $(1, 1, 9)$, $(3, 1, 3)$, $(9, 1, 1)$, $(3, 5, 5)$, $(5, 5, 3)$ et $(9, 17, 9)$; le second système a également six solutions (a, b, c) qui sont : $(1, 0, 35)$, $(5, 0, 7)$, $(3, 1, 12)$, $(3, -1, 12)$, $(4, 1, 9)$ et $(4, -1, 9)$.

PROBLÈME 55

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(x+1)$$

dans l'ensemble le plus vaste possible.

Suggestions de P. Renfer et J. Lefort : a) Une solution f est-elle nécessairement de classe C^∞ ? Comparer ses dérivées successives aux points 0 et 1.
b) Construire une suite de fonctions f_n, où f_n est définie sur $[n, n+1]$ par la récurrence $f_n(x) = f'_{n-1}(x+1)$. Puis recoller ces fonctions.
c) Rechercher des solutions particulières de la forme $e^{\alpha x} sin(\beta x)$, où α et β sont des constantes à déterminer ou à approcher.

PROBLÈME 56

Énoncé (proposé par M. Emery) :

1°) Soient a, b, r des réels tels que $a < b$ et $0 < b - a < 2r$. Soit u une fonction réelle continue sur $[a, b]$, telle que $u(a) = u(b)$, et satisfaisant la propriété suivante :
pour tout z intérieur à $[a, b]$, il existe c et d tels que $a < c < z < d < b$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r, c'est-à-dire donné par une équation de type $y = p + \sqrt{r^2 - (x-q)^2}$.
Montrer que le graphe de u est lui-même un arc de cercle de rayon r.
Remarque.— On peut, dans un premier temps, chercher une démonstration en imposant des hypothèses plus fortes à la fonction u (par exemple des conditions de différentiabilité).
2°) Soient J un intervalle ouvert, r un réel > 0 et u une fonction continue sur l'adhérence de J. On suppose que pour tout z de J il existe c et d dans J tels que $c < z < d$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r.
Montrer que J est borné, de longueur au plus $2r$, et que le graphe de u est un arc de cercle de rayon r.

PROBLÈME 57

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante entre séries formelles (ou entre séries entières dont on aura calculé le rayon de convergence) :

$$\left(1+x+2^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3=\left(1+2^2x+3^3\frac{x^2}{2!}+4^4\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-x-\frac{x^2}{2!}-2^2\frac{x^3}{3!}-\cdots\right)$$

PROBLÈME 58

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante (on peut soit lui donner un sens formel en développant chaque fraction rationnelle selon les puissances croissantes de x, soit supposer que $|x|<1$) :

$$\left(\frac{x}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^6}+\frac{5x^5}{1-x^{10}}+\cdots\right)^2=\frac{1^3x^2}{1-x^4}+\frac{2^3x^4}{1-x^8}+\frac{3^3x^6}{1-x^{12}}+\frac{4^3x^8}{1-x^{16}}+\cdots$$