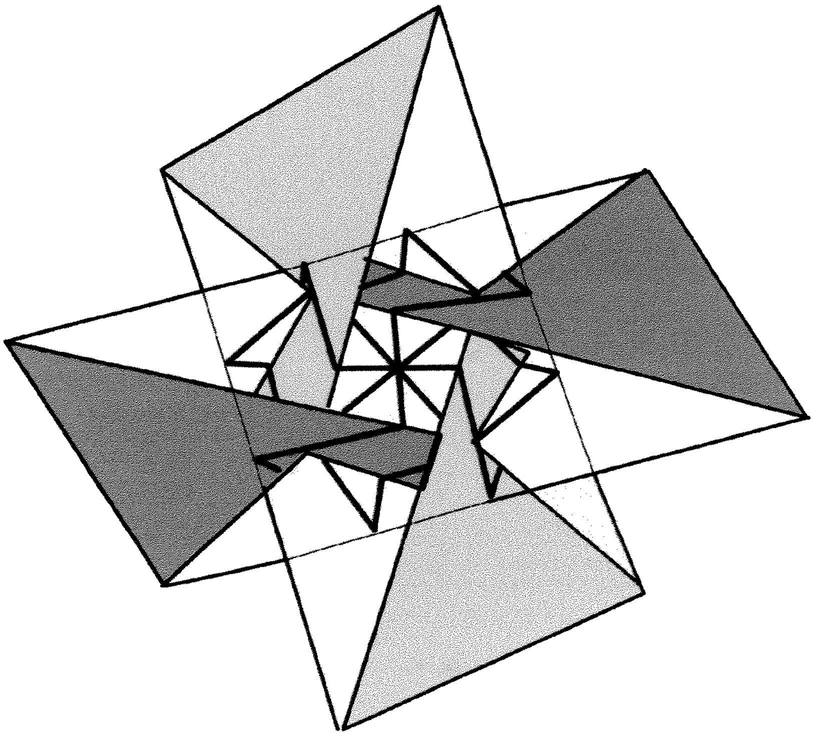
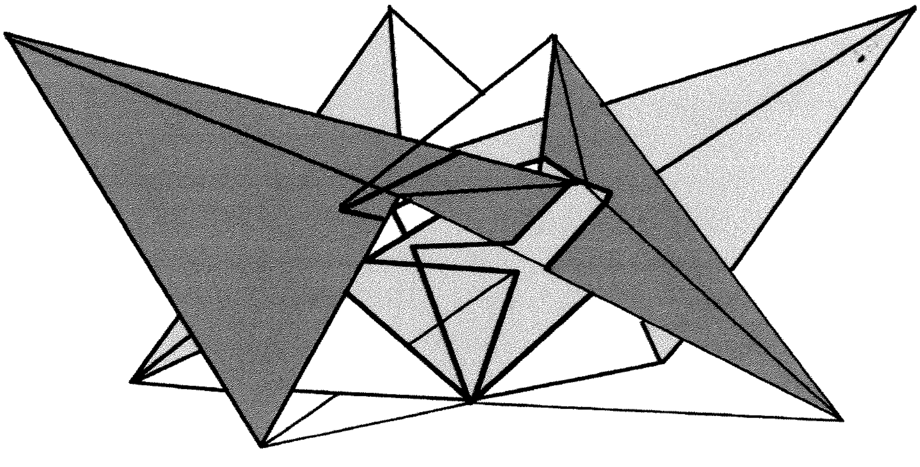
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 95 JUIN 1999 I.S.S.N. 0290 - 0068





NOTRE COUVERTURE :

Le retournement du cuboctaèdre

Les figures de la couverture sont extraites de l'article de R. DENNER sur les versions polyèdriques du retournement du cuboctaèdre.
Nous renvoyons aux pages 17 (figure 3) et 18 (figure 4) pour une explication détaillée.

La réforme des lycées et l'enseignement des mathématiques.

La prochaine rentrée scolaire connaîtra les premiers effets de la réforme des lycées par une modification des programmes et de la grille horaire des enseignements en lycée en classe de seconde, suivie de modifications analogues pour la classe de première à la rentrée 2000 et pour la classe de terminale à la rentrée 2001.
Pour l'enseignement des mathématiques cette réforme se traduira pour tous les élèves du lycée d'enseignement général par une baisse du volume horaire d'enseignement de mathématiques reçu lors de sa scolarité en lycée; plus précisément au niveau de l'horaire hebdomadaire :
- pour la classe de seconde par une baisse de 4h15 à 3h30, dont une baisse de l'horaire en groupe de 1h45 à 1h30;
- pour la série scientifique S:

en première une baisse de 6h à 5h , avec l'horaire en groupe maintenu à 1h,

en terminale une baisse pour l'enseignement obligatoire de 6h à 5h , avec apparition d'1h en groupe, et le maintien d'un enseignement de spécialité de 2h,
- pour la série littéraire L:

en première la suppression des 4h d'enseignement optionnel, et le passage de l'enseignement obligatoire de 1h de mathématiques à 2h de mathématiques-informatique, avec épreuve du baccalauréat en fin de première,

en terminale suppression de l'enseignement obligatoire des mathématiques (40mn) et l'option de 4h est ramenée à 3h;
- pour la série économique et sociale,

en première le maintien de l'enseignement obligatoire à 3h, avec apparition d' ½ h en groupe, et le maintien de l'option à 2h,

en terminale le maintien de l'enseignement obligatoire à 4h et le maintien de l'enseignement de spécialité à 2h.

Cette baisse du volume d'enseignement des mathématiques en lycée poursuit la baisse observée en collège à la suite de la réforme des collèges et aura des conséquences sur le niveau de connaissances et de formation mathématiques du futur bachelier à l'entrée dans l'enseignement supérieur. Nous observerons avec attention l'évolution des prochains programmes d'enseignement.
Cette baisse horaire correspond au souhait du ministre. Ne déclarait-il pas[1] :"Par exemple alléger les horaires de maths pour renforcer les heures de disciplines artistiques. Ceci ne fait pas baisser le niveau. Au contraire, ça l'améliorera". Avec la suppression de l'option en maths en première littéraire, le ministère déclare[2]: "une véritable série littéraire ...sera mise en place sans sélection par les mathématiques".
R. Amalberti, président de l'APMEP[3], déclarait déjà aux journées nationales de Rouen en 1988: "Une fois de plus, à l'occasion de la mission qui a été confiée à Monsieur Dacunha-Castelle, les mathématiques ou plutôt le fonctionnement de cette discipline dans l'enseignement sont sous le feu des projecteurs dont il faut bien dire que certains ne sont pas bienveillants. Il y a eu le rapport du Collège de France, plus récemment les rapports Lesourne et De Chalendar et de façon générale l'exploitation par la presse de titres à sensations du type "les victimes des maths" etc..."
En 1998, aux journées nationales de Rouen, on retrouvait parfois les mêmes personnages et les mêmes problèmes. Alors rendez-vous dans dix ans pour évaluer la réussite de l'actuelle réforme des lycées particulièrement pour ce qui concerne la fin de la sélection par les mathématiques et la qualité de la formation scientifique des lycéens.

Richard Cabassut

---

[1] Le Monde de l'Education, décembre 1998
[2] XXIième siècle, magazine du ministère de l'Education, avril 1999.
[3] APMEP: association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public

SOMMAIRE DE L'OUVERT

N° 95 - JUIN 1999

L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 88-41-64-40
Fax : 88-41-64-49
E-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
Site Internet : http://irem.u-strasbg.fr
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'I.R.E.M.
◇ *Prix du numéro* : 35.– F

NOS ÉLÈVES REFONT L'HISTOIRE DES PROBABILITÉS

Nicole VOGEL, LEGT de Haguenau*

« Le réel n'est jamais « ce qu'on pourrait croire » mais il est toujours ce qu'on aurait dû penser... »

« On ne peut rien fonder sur l'opinion : il faut d'abord la détruire. »

La formation de l'esprit scientifique, Gaston BACHELARD

Peu après la rentrée 1996, j'ai proposé à mes élèves de terminale S, de spécialité math ou physique, un devoir à la maison en probabilités, en plusieurs épisodes. Un rapide sondage dans la classe a montré que seulement 13 élèves sur 34 ont eu un enseignement de probabilités en première.

Notre travail se situe 8 jours après la rentrée, après 6 heures de cours et d'exercices de dénombrement et 2 heures de probabilités élémentaires. (En 1996, il s'agit encore de l'ancien programme). Le jeudi soir, je donne à mes élèves l'exercice suivant pour le lendemain matin (le délai est intentionnellement très court) :

Acte 1

Le problème du partage

Deux joueurs, Anne et Bruno, jouent plusieurs parties d'un jeu de hasard. À chaque partie, l'un des joueurs gagne un point et l'autre aucun, avec les mêmes chances.

Le gagnant est le premier des joueurs qui arrive à 8 points. La mise totale est de 84 F, chacun ayant misé 42 F.

1) Le jeu est interrompu lorsque Anne a 7 points et Bruno 5 points. Comment doivent-ils se répartir les 84 F ? Justifiez.

2) Même question si le jeu est interrompu lorsque Anne a 1 point et Bruno 0 point.

3) Même question si le jeu est interrompu lorsque Anne a 7 points et Bruno 0 point.

Il s'agit du « problème des partis », rendu célèbre par la correspondance entre Blaise PASCAL et Pierre de FERMAT en 1654. Mais son histoire remonte au moins au début du XVI^{e} siècle, comme le raconte le groupe M.A.T.H. dans un article très documenté, où j'ai trouvé l'idée de l'exercice précédent [1]. Les références historiques ne sont pas données a priori, pour ne pas influencer les réponses.

L'objectif est de voir comment les élèves modélisent le problème : se contentent-ils des erreurs historiques ou utilisent-ils spontanément les outils dont on vient d'ébaucher l'étude ?

* Ce travail a été présenté lors d'une conférence au Congrès International sur l'Enseignement des Probabilités et des Statistiques en Octobre 1996, à Kalouga (Russie)

La question 2 est inspirée d'un exemple donné par Niccolo TARTAGLIA en 1556 en objection au partage proportionnel aux points déjà marqués, qui semble particulièrement injuste dans cette situation.

De même la question 3 s'inspire d'un exemple de Gerolamo CARDAN (1539), également destiné à montrer l'iniquité du partage proportionnel.

Le vendredi matin, je ramasse les réponses.

– ***6 élèves donnent une réponse juste*** aux questions 1 et 3 à l'aide d'un calcul de probabilité et constatent que c'est très compliqué pour la question 2. Leur méthode est assez proche de celle de PASCAL (voir l'acte 2) ; elle exploite en plus le langage des probabilités. En voici un exemple :

« *Le partage de la mise se fait en fonction de la probabilité qu'auraient eu les 2 joueurs de gagner la partie si le jeu n'avait été interrompu.*

1) Anne a 7 points et Bruno 5 points.

Si le jeu continuait, pour que Bruno gagne la partie, il faudrait qu'il remporte les 3 coups suivants. Il aurait $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$ *chance que cela se produise.*

La probabilité de gagner pour Bruno est donc de $\frac{1}{8}$.

La probabilité de gagner pour Anne est alors de $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

La somme gagnée par Bruno sera donc $\frac{1}{8} \times 84 = 10{,}50$ F.

La somme gagnée par Anne sera $\frac{7}{8} \times 84 = 73{,}50$ F.

2) ?

Le jeu n'étant pas tellement avancé (1 seul coup a été joué), la probabilité de gagner est à peu près la même pour les 2 joueurs. Les 2 joueurs gagneront à peu près la même somme soit $\frac{84}{2} = 42$ F *avec néanmoins un peu plus pour Anne.*

3) Anne a 7 points et Bruno 0 point.

Si le jeu continuait, pour que Bruno gagne la partie, il faudrait qu'il remporte les 8 coups suivants.

...

La somme gagnée par Bruno sera donc $\frac{1}{256} \times 84 \approx 0{,}33$ F.

La somme gagnée par Anne est alors $\frac{255}{256} \times 84 \approx 83{,}67$ F. »

– ***2 réponses donnent le principe*** d'une répartition proportionnelle aux probabilités, avec des calculs de probabilités faux. Dans ces 2 cas, la probabilité de gagner de Bruno est juste et celle d'Anne est fausse. (La somme n'est donc pas 1)

– ***18 élèves font un partage proportionnel*** aux points gagnés dans la question 1. (C'est la solution de Luca PACIOLI en 1494). Un seul d'entre eux choisit un autre principe pour la question 3, mais 4 d'entre eux choisissent le partage 42 - 42 dans la question 2.

La question 2 semble donc semer le doute sur l'équité du partage proportionnel chez quelques-uns, mais la majorité y reste insensible.

– ***3 élèves choisissent la répartition 42 - 42*** dans tous les cas. Ceux-là semblent vraiment croire que les chances restent égales, sans être sensibles à l'objection contenue dans la question 3. L'un confond l'équiprobabilité de départ avec l'équiprobabilité au cours du jeu et ne semble donc pas sensible à la notion de conditionnement ; pour un autre : « *La chance pourrait tourner...* »

– ***1 copie*** propose la répartition 52,50 - 31,50 correspondant au raisonnement de Niccolo TARTAGLIA (1556) : « *8 points représentent 42 F donc 2 points d'écart représentent 10,50 F. Donc Anne doit prendre 42 F + 10,50 F et Bruno 42 F – 10,50 F...* »

– ***4 élèves n'ont pas répondu*** à l'exercice.

On peut remarquer, sans qu'il soit possible d'en tirer des conclusions en raison du petit échantillon, que les élèves ayant déjà étudié les probabilités en première répondent mieux que les autres : 31% de bonnes réponses (et même 46% de propositions de partage proportionnel aux probabilités) pour eux contre 10% pour les autres.

Le vendredi, immédiatement après avoir ramassé les travaux précédents, et donc, sans les avoir examinés, je distribue la suite de l'énoncé, à faire pour le lundi :

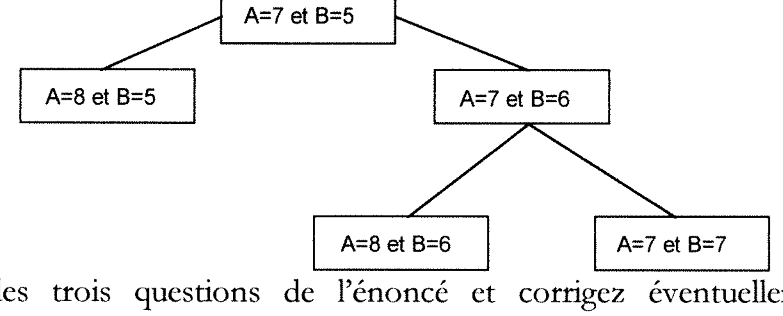
Acte 2

Eléments de solutions :

Raisonnement 1 :

Reprenons la question 1. Imaginons les différentes possibilités de finir le jeu. Appelons A le nombre de points obtenus par Anne et B le nombre de points obtenus par Bruno.

On peut représenter la fin du jeu en utilisant l'arbre ci-dessous :



Reprenez les trois questions de l'énoncé et corrigez éventuellement votre première solution.

Raisonnement 2 :

Reprenons la question 1. Il faudrait au maximum 3 parties pour terminer le jeu.

Notons a une partie gagnée par Anne et b une partie gagnée par Bruno et regardons toutes les possibilités pour ces trois parties :

Partie 1	Partie 2	Partie 3
a	a	a
a	a	b
a	b	a
b	a	a
...	...	...

Reprenez les trois questions de l'énoncé. Le raisonnement précédent vous fait-il corriger votre première solution ?

Quelques élèves réagissent immédiatement en lisant l'énoncé :

« Si on a déjà fait comme ça, qu'est ce qu'il faut faire ? »

« L'arbre est trop compliqué si Anne n'a qu'un point. »

Le raisonnement 1 s'inspire de celui de PASCAL ; on ne propose pas plus qu'un début d'arbre pour ne pas imposer l'outil des probabilités, que Pascal n'a évidemment pas utilisé explicitement.

Cependant, la réponse attendue est un arbre de probabilité car la solution de Pascal, qui ne raisonne que sur les répartitions des gains, n'est pas facile à imaginer. En effet, l'exemple donné ici nécessite une étape de plus que son premier exemple historique qui est celui d'un jeu en 3 parties, interrompu à 2 parties contre 1. Il dit dans ce cas :

« Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est en jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles et vous me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16. »

(Lettre de Pascal à Fermat, 29 juillet 1654) [3]

Le raisonnement 2 évoque celui de FERMAT, qui est rapporté par Pascal dans une autre lettre qu'il adresse à ce dernier le 24 août 1654 :

«Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti il faut (dites-vous), voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion [...]

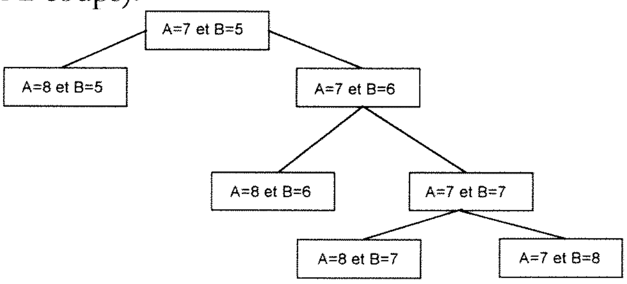
Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties) ; et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils peuvent en avoir seize, qui est le second degré de quatre, c'est à dire le carré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second ; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes : aaaa... bbbb.

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il y en a 11 pour lui ; et parce qu'il manque trois partues au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a deux joueurs... » [3]

À ce stade, je ne donne toujours pas d'explications historiques, que je réserve pour la fin, avec le bilan du travail, pour ménager le suspense.
Cette fois-ci, il y a ***22 réponses justes*** pour les questions 1 et 3.

– *9 élèves donnent la probabilité ¾ pour Anne et ¼ pour Bruno* en comptant le nombre de cas (non équiprobables évidemment) dans l'arbre. (Erreur que d'illustres mathématiciens ont commise également, comme d'Alembert dans le jeu de pile ou face en 2 coups).



« Anne a 3 possibilités de gagner et Bruno 1, c'est pourquoi Anne gagne $\frac{3}{4} \times 84 = 63$ F *et Bruno 21 F. »*

– *3 élèves font d'autres erreurs.* L'un d'entre eux affirme que seule la répartition 84 - 0 est possible, le deuxième attribue une probabilité de 7/8 à Anne, mais de 5/8 à Bruno et le troisième affirme qu'il y a 8 cas sur 15 qui font gagner Anne sans justifier davantage.

Le premier est le seul qui ne semble faire aucun lien avec les probabilités (que les énoncés n'ont volontairement pas encore évoquées jusqu'ici) : celui-ci semble avoir de grandes difficultés de représentation du hasard, puisqu'il affirme dans un autre exercice que la probabilité d'un couple d'avoir une fille après 4 garçons est 0.

Dans le raisonnement 2, ***2 élèves disent que c'est impossible*** car le tableau comporte des cas qui ne sont pas « réels ».

« Ce raisonnement est impossible car Anne ne peut gagner 3 parties car elle aurait alors un score de 10 points. »

« Ce raisonnement est impossible car il ne faut pas toujours obligatoirement 3 parties pour finir le jeu. »

Ces réponses peuvent être comparées à l'objection de Gilles de Roberval au travail de Fermat, citée par Pascal dans sa lettre du 24 août 1654 (cas où il manque 2 parties à l'un des joueurs et 3 à l'autre) :

« Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en 4 parties, vu que, quand il manque 2 parties à l'un et 3 à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue 4 parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que 2 ou 3, ou, à la vérité peut-être 4 :

Et ainsi qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendait de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera 4 parties, vu que la condition naturelle du jeu, est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'était faux, cela n'était pas démontré, de sorte qu'il avait quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme. »

– 4 autres élèves regroupent le tableau en 4 cas qu'ils traitent comme équiprobables (Anne finit à la 1re partie, à la seconde, à la troisième ou Bruno gagne en trois parties), refusant ainsi également d'envisager théoriquement ce qui pourrait se passer après le gain de la partie.

Partie 1	*Partie 2*	*Partie 3*
a	×	×
b	*a*	×
b	*b*	*a*
b	*b*	*b*

× : *fin du jeu*

« Donc Anne aura $\frac{3}{4} \times 84 = 63$ F *et Bruno 21 F. »*

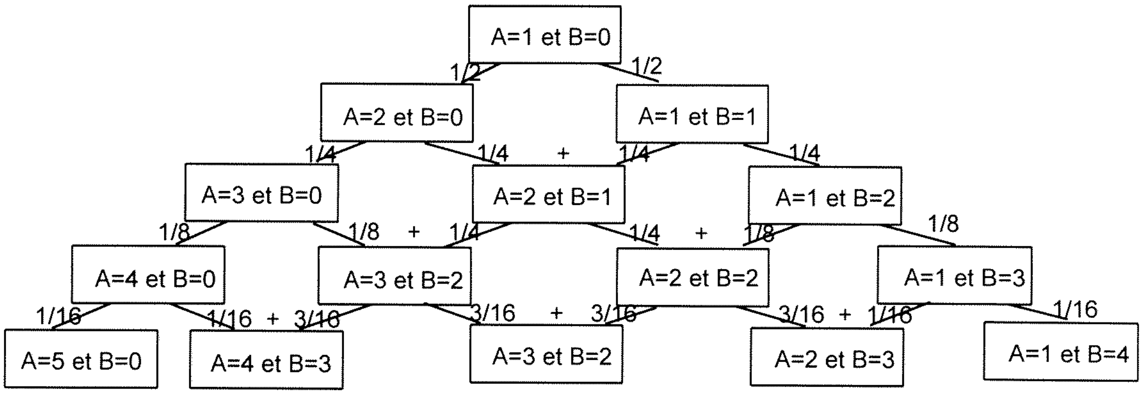
Par contre, ***2 élèves donnent une réponse juste à la question 2.***

L'un des deux fait un dénombrement dans l'ensemble des listes évoquées par Fermat.

L'autre copie est étonnante, car elle est très proche du raisonnement de Pascal dans le traité du triangle arithmétique. Je cite l'élève, Mathieu :

« Cas 2 : Anne a 1 point et Bruno 0. Ce cas est beaucoup plus complexe. Il est impossible d'effectuer un arbre.

Néanmoins, on inscrira les premières branches :



En observant les numérateurs, on constate qu'ils correspondent aux nombres du triangle de Pascal (quand le dénominateur est le même).

Il y a au maximum 14 étapes (partie finie avec 8 à 7). D'où :

n\p	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
0	1														
1	1	1													
2	1	*2*	1												
3	1	3	3	1											
4	1	4	*6*	4	1										
5	1	5	10	10	5	1									
6	1	6	15	*20*	15	6	1								
7	1	7	21	35	35	21	7	1							
8	1	8	28	56	*70*	56	28	8	1						
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					
10	1	10	45	120	210	*252*	210	120	45	10	1				
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
12	1	12	66	220	495	792	*924*	792	495	220	66	12	1		
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	*3432*	3003	2002	1001	364	91	14	1

8-0 8-1 8-2 8-3 8-4 8-5 8-6 8-7 7-8 6-8 5-8 4-8 3-8 2-8 1-8

Anne gagne — Bruno gagne

Ainsi, Anne a $p_A = \dfrac{1 + 14 + 91 + 364 + 1001 + 2002 + 3003 + 3432}{2\,(1 + 14 + 91 + 364 + 1001 + 2002 + 3003) + 3432} = \dfrac{9908}{16384} = \dfrac{2477}{4096}$

soit $p_A \approx 0{,}605$ *chance de gagner.*

Quant à Bruno, il a $p_B = \frac{16384 - 9908}{16384} = \frac{6476}{16384} = \frac{1619}{4096} \approx 0{,}395$ *chance de gagner.*
On en déduit donc :
– *somme qu'Anne devrait empocher :* $84 \times \frac{2477}{4096} \approx 50{,}80$ F.
– *somme que Bruno devrait empocher :* $84 \times \frac{1619}{4096} \approx 33{,}20$ F.

Le seul reproche que nous puissions faire au travail de Mathieu, c'est qu'il ne *démontre* pas que les probabilités des différents scores s'obtiennent avec le triangle de Pascal.

Comparons à la solution générale que donne Pascal dans le « Traité du Triangle Arithmétique », rédigé en 1654 et publié en 1665 :

« Problème I : Etant proposés deux joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, trouver par le Triangle arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer), eu égard aux parties qui manquent à chacun.

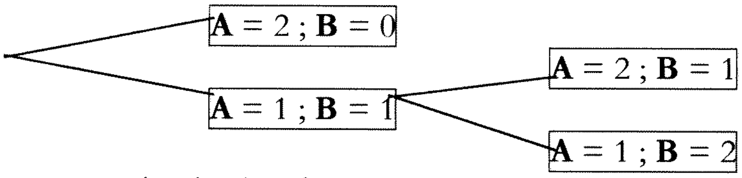
Soit prise dans le triangle la base dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble ; ensuite soient prises dans cette base autant de cellules continues à commencer par la première, qu'il manque de parties au premier joueur, et qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres. Ces sommes sont l'une à l'autre comme les avantages des joueurs réciproquement… » [3]

Pascal propose ensuite une démonstration par récurrence de ce résultat, laborieuse faute de notations adaptées.

– 2 autres élèves essaient de trouver une formule de récurrence en partant d'un jeu en 2 points, 3 points, etc. L'un abandonne, l'autre, Nicolas, fait un travail intéressant. En effet, bien qu'une généralisation trop hâtive conduise à un résultat faux et non démontré, cette copie suit les étapes d'une démarche scientifique (étude d'exemples, généralisation, retour au cas particulier...) et fait preuve d'un remarquable esprit critique :

« *Je présenterai ici un raisonnement basé quelque peu sur l'intuition et ainsi* ***peu rigoureux*** *mais expérimental.*

J'ai tout d'abord calculé les chances d'Anne de parvenir (avec une avance de 1 à 0) à 2, 3, 4 et 5 points comme suit



Anne a ici $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ *de chances de s'imposer et ainsi de suite*

En comparant les résultats, qui sont respectivement pour 2, 3, 4 et 5 points $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{21}{32}$, $\frac{41}{64}$ *, j'ai constaté que si l'on réduisait toutes les fractions au même dénominateur 4^{n-1} où n est le nombre de points à atteindre (4^{n-1} est le nombre total de branches), on passait d'une étape à l'autre en retranchant un nombre deux fois plus petit qu'à l'étape précédente.

Je m'explique : pour 2, 3 et 4 points, on réduit à des fractions de dénominateur $4^{4-1} = 64$. *On obtient* $\frac{48}{64}$, $\frac{44}{64}$, $\frac{42}{64}$ *: on a d'abord retranché 4, puis* $\frac{4}{2}$ *etc.*

Ainsi, comme on sait qu'il y a 6 étapes pour parvenir jusqu'à 8 points (pour Anne) et un nombre total de branches de 4^7, *on obtiendra notre pourcentage de chance en retranchant aux points de départ* $(\frac{3}{4} \times 4^7)$ *plusieurs nombres, puis en divisant le tout par* 4^7.

Les points à retrancher sont $4^7 \times (\frac{3}{4} - \frac{11}{16})$ *la moitié de ce nombre … et cela six fois ; on a ici une suite géométrique :*

$$1024 + \frac{1024}{2} + \frac{1024}{4} + \cdots + \frac{1024}{2^5} = 1024 \times \frac{1 - \frac{1}{2^6}}{1 - \frac{1}{2}} = 2016\ .$$

On obtient ainsi une probabilité de $\frac{\left(\frac{3}{4} \times 4^7\right) - 2016}{4^7} = \frac{321}{512} \approx 0{,}63$ *et un partage 52,65 F. contre 31,35 F. Un détail me chagrine toutefois : si l'on considère ma formule générale (de probabilité d'arriver à n points) :* $\frac{\frac{3}{4} \times 4^{n-1} - \frac{4^{n-1}}{16} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{0{,}5}}{4^{n-1}}$, *on constate qu'elle présente une* ***limite en*** $+\infty$ ***de 0,625*** *; je me serais plutôt attendu à* ***0,5*** car le point d'avance aurait tendance à s'effacer devant le nombre de points astronomique à atteindre ».

Prévoyant que très peu d'élèves auront résolu la question 2 à l'issue de l'acte 2 que je ramasse le lundi, je distribue le même jour l'acte 3 à faire pour le jeudi.

Acte 3

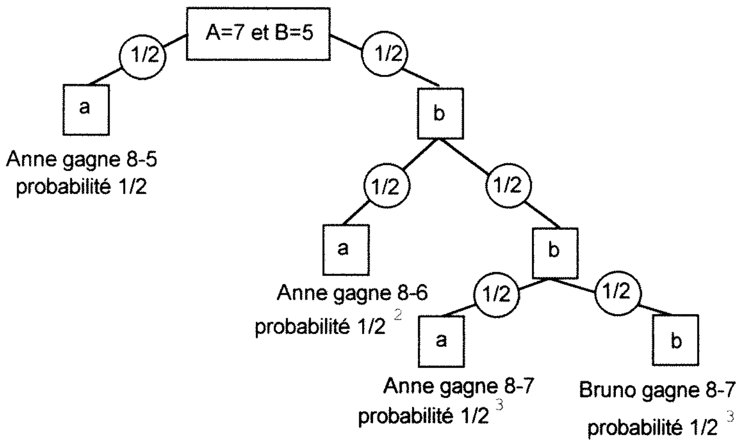
Quelques indications supplémentaires pour la question 2

Pour le raisonnement 1 ; en utilisant un arbre de probabilités représentant les suites possibles de la partie :

Notons a et b les événements « Anne gagne un point » et « Bruno gagne un point ».

L'arbre de probabilités de la question 1 est alors :

* Ce dernier résultat est faux, le calcul exact donne $\frac{163}{256}$



L'arbre de la question 2 est trop long à faire explicitement. Mais on peut raisonner sur cet arbre sans le dessiner : les branches pour lesquelles Anne gagne la partie sont celles qui

– finissent par « a » et

– comportent auparavant 6 autres « a » et au maximum 7 « b ».

La probabilité qu'Anne gagne est égale à la somme des probabilités de ces branches. On peut utiliser le tableau suivant :

Nombre de « b »	Nombre de telles branches	Proba. d'une branche	Proba. totale pour le nombre de « b »
0	1	$\frac{1}{2^7}$	$\frac{1}{2^7}$
1			
2	C_8^2	$\frac{1}{2^9}$	$C_8^2 \times \frac{1}{2^9}$
3			
4			
5			
6			
7			
		Total :	

Complétez ce tableau et répondez à la question 2 du problème B.

Pour le raisonnement 2 :

Il faut encore au maximum 14 parties pour finir le jeu. On va donc supposer qu'on en joue 14 même si un joueur atteint 8 points avant la fin. Il y a 2^{14} issues possibles pour ces 14 parties.

Chaque suite de 14 parties peut se décrire par une liste composée de 14 lettres « a » ou « b ».

Comptons le nombre de listes gagnantes pour Anne (qui a un point d'avance, il lui en manque donc 7) :

1) Notons n_a et n_b les nombres respectifs de « a » et de « b » d'une liste.

Nous avons $n_a + n_b = 14$. L'ensemble des listes est la réunion disjointe de deux sous-ensembles :

– l'ensemble des listes où $n_a \geq 7$ et donc $n_b = 14 - n_a \leq 7$. Ce sont les listes gagnantes pour Anne.

– l'ensemble des listes où $n_a \leq 6$ et donc $n_b = 14 - n_a \geq 8$. . Ce sont les listes gagnantes pour Bruno.

Le nombre de listes gagnantes pour Anne est donc le nombre de listes ayant 7, 8, 9, … , 14 « a ».

Déterminez le nombre N_A de listes gagnantes pour Anne.

2) Simplification de la formule :

a) Prouvez que $C_{14}^{0} + C_{14}^{1} + C_{14}^{2} + \ldots + C_{14}^{13} + C_{14}^{14} = 2^{14}$

b) En déduire que $N_A = \dfrac{2^{14} + C_{14}^{7}}{2}$.

c) Proposez un partage équitable de la mise lorsque le jeu s'arrête à 1 pour Anne et 0 pour Bruno.

Certains élèves n'arrivent toujours pas à résoudre le problème du partage dans la situation où le jeu s'arrête à 1 à 0. On pouvait s'y attendre car les raisonnements et les dénombrements qui interviennent dans cet acte 3 sont assez compliqués.

Je pensais néanmoins terminer le problème des partis sur cette solution avant de faire le bilan du travail de la classe et donner les étapes historiques du problème.

L'acte 4 n'était pas prévu au départ. Il est encore plus difficile que l'acte 3.

Je l'ai ajouté parce que Mathieu avait proposé la solution de PASCAL sans la démontrer.

De plus, cela se passe précisément au moment où le chapitre étudié en classe est le raisonnement par récurrence.

Enfin, je pense que l'énoncé de l'acte 4 a un intérêt historique, même pour les élèves qui sont un peu dépassés par son contenu mathématique.

Acte 4

Généralisation du problème des partis : le raisonnement de Pascal publié en 1665 (« méthode pour faire les partis entre deux joueurs par le moyen du Triangle Arithmétique ») ;

Pascal énonce la proposition suivante : *« Soit prise dans le triangle la base (ligne) dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble ; ensuite soient prises* *dans cette base autant de cellules continues à commencer par la première, qu'il manque de parties au premier joueur, et qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres. Ces sommes sont l'une à l'autre comme les avantages des joueurs réciproquement...*

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, je la démontrerai néanmoins en peu de mots par le moyen de deux lemmes.

Le 1er, que la seconde base contient les partis des joueurs auxquels il manque deux parties en tout.

Le 2ème, que si une base quelconque contient les partis de ceux auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules, la base suivante sera de même... »

1) Expliquez la règle énoncée par Pascal dans le cas du partage d'une mise de 84 F lorsqu'un jeu en 4 parties est interrompu à 2 à 1.

2) a) Quel type de preuve Pascal propose-t-il ?

b) Le langage des probabilités n'existait pas à l'époque de Pascal, mais nous pouvons traduire sa proposition en disant que la proportion de la mise (ou avantage) qui revient à un joueur est égale à sa probabilité de gagner.

Notons MA et MB les points manquant aux joueurs A et B et p la probabilité que le joueur A gagne au moment de l'interruption du jeu. Posons n = MA+MB.

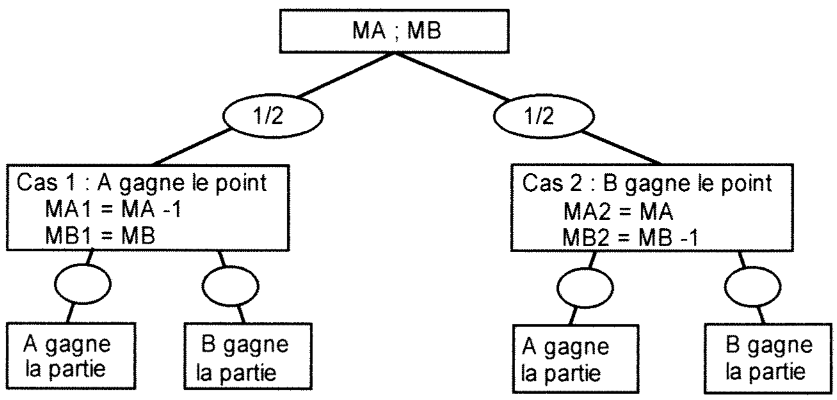
Expliquez pourquoi (si MB ≠ 0) la règle de Pascal donne

$$p = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sum_{k=0}^{k=\mathrm{MB}-1} C_{n-1}^{k}\ .$$

c) On note p_1 et p_2 les probabilités de gagner du joueur A dans les cas 1 et 2 ci-dessous.

À l'aide du schéma ci-dessous (où on suppose MA et MB non nuls), expliquez pourquoi

$$p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$$



d) Notons R_n la propriété : «La règle de Pascal est vraie dans tous les cas où il manque un total de n points lorsqu'on additionne ce qui manque au joueur A et au joueur B ».

Prouver par récurrence que la propriété R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

e) Appliquez cette règle à la question 2) du problème B pour proposer un partage équitable.

Lors du corrigé de l'acte 4 en classe, j'ai enfin raconté l'histoire du problème, des différentes solutions fausses qui nous étaient parvenues et de leur critique jusqu'à la correspondance de Pascal et Fermat.

C'était devenu très intéressant car on retrouvait la plupart des raisonnements historiques, justes ou faux, dans les travaux de la classe. Au cours des 4 actes, nous avons donc vécu un raccourci de l'histoire du problème.

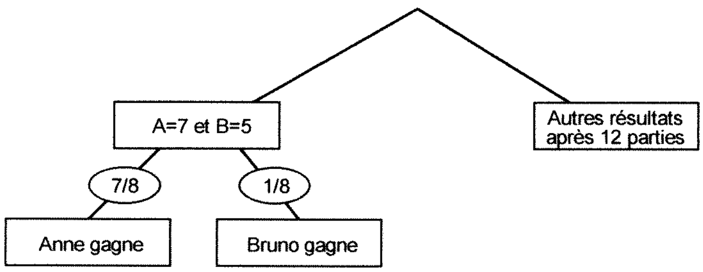
Plus tard, au moment de l'étude des probabilités conditionnelles, j'ai encore donné un acte 5, pour montrer que l'on a implicitement utilisé ces notions dans le problème des partis.

Acte 5

Exemple de probabilités conditionnelles :

Reprenons la première question du problème du partage. (Anne a 7 points et Bruno 5 points)

On peut présenter la situation ainsi :



Notons E l'événement « après 12 parties, Anne a 7 points et Bruno 5 » et Ag l'événement « Anne gagne le jeu ».

La probabilité qu'Anne gagne à partir de 7 à 5 est de 7/8.

C'est la probabilité conditionnelle de Ag par rapport à E. $P_E(Ag) = \frac{7}{8}$ ou $P(Ag/E) = \frac{7}{8}$.

Exemple d'espérance mathématique :

Reprenons encore la première question du problème du partage.

Notons X et Y les sommes qu'Anne et Bruno peuvent recevoir à la fin du jeu.

On a les possibilités suivantes :

Valeurs de X	0	84
Probabilités	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$

On obtient $E(X) = 84 \times \frac{7}{8} = 73{,}50$ et $E(Y) = 84 \times \frac{1}{8} = 10{,}50$.

L'espérance de la variable aléatoire X est l'« espérance de gain » d'Anne. C'est la part des 84 F qu'il faut lui attribuer si on arrête le jeu lorsqu'elle a 7 points et Bruno 5.

Il est évidemment difficile de conclure...

Cependant, cette activité à épisodes m'a beaucoup intéressée parce que les réactions de la classe ont souvent dépassé mes prévisions. Certes, il y avait là quelques très bons élèves, et c'est grâce à leur travail que ce problème nous a menés très loin, mais les travaux de tous, à commencer par les erreurs, ont eu leur intérêt.

La forme proposée, devoirs à la maison à rendre très rapidement, avait pour but de conserver les erreurs de raisonnement et d'éviter l'uniformisation des réponses. Par contre, la succession rapide des actes ne m'a pas permis de proposer aux élèves d'exposer leurs premières solutions et d'en débattre.

Mais nous avons pu à la fois remettre en cause des raisonnement faux, voir la place de ces erreurs dans l'histoire des probabilités et aborder quelques problèmes difficiles motivés par la classe elle-même.

Les élèves ont été très étonnés de voir que certaines de leurs erreurs ou certains de leurs raisonnements avaient joué un rôle historique. Cela leur a montré qu'ils savaient faire des choses difficiles, puisqu'elles ont posé des problèmes à de grands mathématiciens.

On peut espérer que cela aura modifié la représentation naïve du hasard de quelques-uns et que le contexte historique aura montré à tous l'intérêt d'une théorie des probabilités.

Bibliographie :

[1] – M.A.T.H. (mathématiques, approche par des textes historiques), Université Paris VII, 1986 ;on trouvera également dans cet ouvrage des références historiques et une bibliographie plus complète

[2] – Enseigner les probabilités en classe de terminale, IREM de Strasbourg, 1994

[3] – Pascal, œuvres complètes, Louis LAFUMA, L'intégrale - SEUIL, 1963

VERSIONS POLYÉDRIQUES DU RETOURNEMENT DE LA SPHÈRE, RETOURNEMENT DU CUBOCTAÈDRE.

Conception : Bernard Morin, Professeur à l'U.L.P. de Strasbourg.

Réalisation : Richard Denner, La Providence Strasbourg, annexe de Vendenheim.

Ma plus vive reconnaissance va bien sûr à Bernard Morin pour les très nombreuses explications qu'il m'a données, ainsi que pour tous les efforts qu'il a déployés pour me transmettre les idées qu'il avait conçues, mais également à d'autres personnes sans qui ce travail n'aurait pas la forme actuelle. Je voudrais en particulier remercier ici François Apéry, Jean Brette et Monique Sicard pour l'intérêt et les encouragements qu'ils m'ont manifestés ainsi que Michèle Audin qui a fait la lecture critique du manuscrit. Merci également à l'équipe de L'Ouvert pour leur sympathique accueil.

R. D.

Deuxième partie : de la surface de Boy vers un modèle central du retournement du cuboctaèdre

Introduction

En s'inspirant de la surface de Boy, on se propose de décrire deux modèles, de complexité croissante, qui vont nous mener au cœur du problème du retournement du cuboctaèdre. Le premier, appelé **modèle central ouvert**, a eu une importance primordiale dans ce travail. En effet, sa réalisation contient en germe celle des suivants. Le second, appelé **modèle central fermé**, sera la clé du problème. C'est lui, que l'on déformera pour aboutir en définitive au cuboctaèdre.

Contrairement à la surface de Boy, ils possèdent deux faces que l'on aperçoit alternativement lorsque l'on passe d'un sommet C_i au sommet suivant C_{i+1}. De plus, ils ont un **point quadruple**. Cette particularité représente l'une des principales difficultés qui a fait obstacle pour résoudre le problème du retournement de la sphère.

1. Modèle central ouvert

Sa construction est semblable à celle de la surface de Boy à part qu'elle présente un symétrie d'ordre 4 par rapport à l'axe Oz. D'autre part, les quatre pentagones concaves sont en position verticale ; ils sont fabriqués en carton bicolore. On observera en particulier le changement de couleur quand on passe de l'un à l'autre.

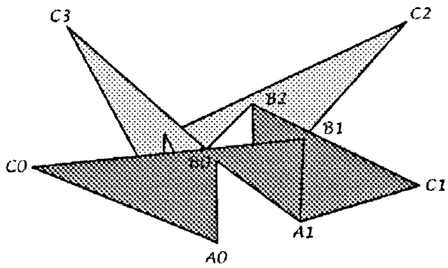


FIGURE 1 : ASSEMBLAGE DES PENTAGONES DU MODÈLE CENTRAL OUVERT.

Ne dirait-on pas un manège de quatre chevaux aux longs cous solidement harnachés, la patte avant de l'un rejoignant la patte arrière de l'autre ? Ce genre de comparaison est utile pour comprendre et communiquer l'ensemble du processus. Dans le dialogue avec Bernard Morin, il fut essentiel. C'est en imaginant la déformation des pentagones qu'il a découvert le chemin de l'ensemble du retournement.

On peut à présent donner une description de l'ensemble du modèle central ouvert. À titre indicatif le modèle présent, ici admet les coordonnées suivantes :

Sommets :

$A_0 = (1; -1; 0)$ $B_0 = (1; -1; 1)$ $C_0 = (1; -5; 5/3)$

Les autres sommets A_i, B_i, C_i, i = 1 à 3 se déduisent des sommets précédents par rotation autour de l'axe Oz de sens direct et d'angles de mesures respectives 90°, 180° et 270°.

Faces pentagonales verticales : $P_i = A_iB_iA_{i+1}B_{i+1}C_i$ (les chevaux)

Faces triangulaires : $Q_i = C_iA_{i+2}B_{i+1}$ (les faces dorsales)

$R_i = C_iA_iA_{i+2}$ (les faces ventrales).

Dans cette description l'indice i doit être compris modulo 4.

Le **point quadruple** appartient aux quatre plans Q_i.

La figure suivante laisse entrevoir l'agencement des différentes faces, seuls les pentagones sont opaques, toutes les autres faces sont translucides. La ligne d'auto-intersection est indiquée en noir.

Un observateur extérieur verra les pointes aboutissant aux points C_0 et C_2 en **rouge** et celles aboutissant aux points C_1 et C_3 en **bleu** !

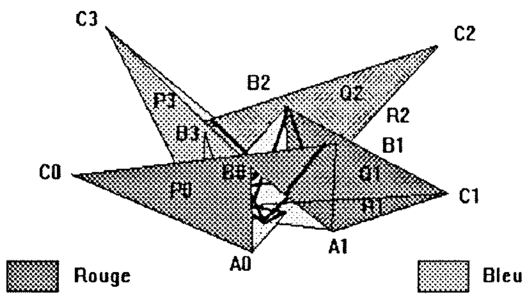


FIGURE 2 : MODÈLE CENTRAL OUVERT.

Remarquons que le point B_0 est au-dessus du plan Q_1 et qu'il existe comme une amorce d'ouverture vers l'intérieur du modèle sous l'aisselle B_0 mais qui reste cependant bouchée dans le fond. D'où la dénomination **modèle central ouvert**.

Faisons un petit exercice d'imagination : penchons les chevaux vers l'intérieur du manège comme s'ils voulaient rétablir leur équilibre lorsqu'il se met à tourner. De façon plus précise, inclinons les quatre pentagones vers l'axe Oz en les faisant pivoter autour des cotés du carré de base $A_0A_1A_2A_3$.

Le point B_0 va peu à peu se rapprocher du plan Q_1. Si on compare ce plan à un niveau d'eau, les deux pattes du « cheval » P_0 vont peu à peu s'enfoncer dans l'eau. On peut faire en sorte que **B_0** *soit dans le plan* **Q_1**. Les quatre chevaux s'appuient alors contre une pyramide régulière dont la base est la moitié d'un octaèdre régulier. Pour cela il est nécessaire que l'arête C_1A_3 vienne « mordre » la patte arrière A_0B_0 de P_0. On obtient ainsi le **modèle central fermé** qui sera un point de vue de choix pour comprendre le retournement du cuboctaèdre

2. Modèle central fermé

Les notations sont les mêmes que pour le modèle central ouvert, mais de plus, les points **B_i** appartiennent aux plans **Q_{i+1}**.

Sommets : $A_0 = (1, -1, 0)$ $B_0 = (1/3, -1/3, 1)$ $C_0 = (-1/7, -11/7, 12/7)$

Les quatre plans P_i se rencontrent en un même point S, sommet de la pyramide de coordonnées (0, 0, 3/2). Les quatre plans Q_i se rencontrent en un même point Q de coordonnées (0, 0, 1). Les quatre plans R_i se rencontrent à l'origine O du repère. Les plans $V_i = A_iA_{i+1}C_{i+1}$ (ces plans ne constituent pas de faces du polyèdre) se rencontrent au point (0, 0, –3).

Retenons surtout pour la suite que **les points A_i ont comme cote 0, les points B_i ont comme cote 1 et que celle des points C_i est 12/7 ~ 1,7**.

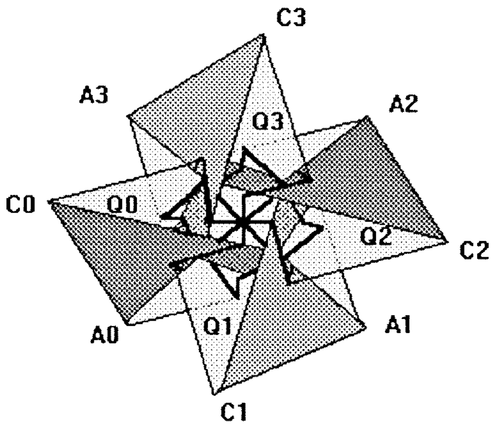


FIGURE 3 : VUE DE DESSUS DU MODÈLE CENTRAL FERMÉ.

Une remarque importante : l'arête (C_2A_0) vient de traverser la patte arrière du cheval rouge P_0, ce faisant elle donne naissance à une « dent » qui prolonge la partie interne située sous le point quadruple du modèle et que l'on appellera « chambre intérieure ». Elle sera davantage visible sur la figure suivante. Une vue de profil permet de mieux voir l'imbrication des différentes faces.

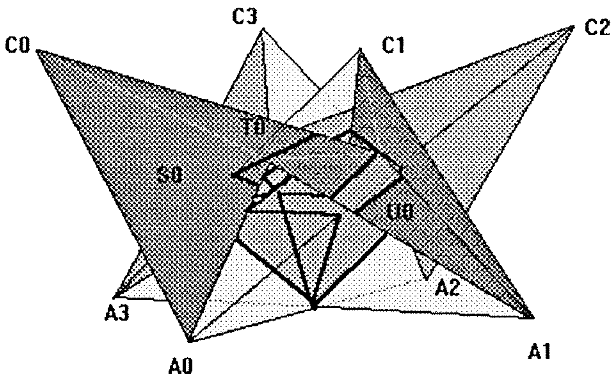


FIGURE 4 : MODÈLE CENTRAL FERMÉ, MISE EN ÉVIDENCE DE LA CHAMBRE INTÉRIEURE ET TRIANGULATION DU PENTAGONE P_0, $P_0 = S_0 \cup T_0 \cup U_0$.

Cette dernière décomposition, déjà mise en évidence dans le cadre de la surface de Boy, prépare la triangulation qui apparaîtra sur le cuboctaèdre que l'on se propose de retourner.

Calculons sa caractéristique d'Euler en tenant compte de la triangulation des pentagones.

On trouve :

$S = 12$, $A = 30$, $F = 20$ et donc : $\chi = S - A + F = 2.$

Ce qui nous laisse tout espoir de pouvoir le déformer en un polyèdre homéomorphe à une sphère.

Ce modèle tel qu'il est représenté ici a été reproduit à partir d'une photographie. Sa réalisation, a demandé une recherche assez longue pour aboutir à une esthétique satisfaisante. Ses dimensions sont telles que les modèles ultérieurs soient de dimensions raisonnables.

Jusqu'à présent les modèles sont présentés sous un aspect statique. La suite fait appel à une **vision dynamique du processus** ! Déplacer un point le long d'une arête, faire pivoter un plan autour d'une droite tout en imaginant les modifications des différentes cloisons et celles de la lignes d'auto-intersection n'est pas chose aisée à priori et représente un obstacle certain.

Troisième partie : retournement du cuboctaèdre

Introduction

Au cours de la déformation, appelée homotopie, les sommets des différents polyèdres subissent des **opérations élémentaires** : ils sont astreints à se déplacer le long d'une arête tandis que les faces en mouvement pivotent autour d'une autre arête qui peut éventuellement être fictive comme on le verra dans l'étape 1.

Le cuboctaèdre de départ (étape –22) a sa face externe rouge et sa face interne bleue, le cuboctaèdre final (étape +22) a sa face externe bleue et sa face interne rouge. La transformation, symétrique dans le temps, passe par une étape centrale (modèle 0) appelée **modèle central fermé** présentant un point quadruple ainsi qu'une symétrie d'ordre 4.

Le chemin que l'on se propose de suivre, est celui de la découverte. Ce qui est remarquable, c'est qu'en six étapes seulement, Bernard Morin a imaginé comment passer de l'immersion centrale à un modèle qui sort du domaine des immersions (modèle 6), c'est-à-dire qui ne comporte plus aucune ligne d'auto-intersection. C'est alors qu'il lui est apparu que ce dernier modèle pouvait, en seize étapes supplémentaires, être transformé en un **cuboctaèdre** !

1. Modifications génériques

Afin de mieux appréhender l'ensemble de la déformation, donnons une idée des modifications qui vont avoir lieu. On appelle modification générique, une modification au cours de laquelle la structure du modèle, et en particulier de sa ligne d'auto-intersection, change de nature. Par exemple, dans le modèle central, on a vu qu'elle comportait un point quadruple. Dès la première opération élémentaire ce point va disparaître laissant la place à quatre points triples.

Il y a des modifications génériques de trois types : D, T et Q.

Une **modification de type D** se produit toutes les fois que deux nappes de la surface immergée entrent en contact en un point isolé. On distingue parmi elles :

– les modifications de types D_0 et D_2 :

La première consiste à amener les deux nappes en contact, puis à les faire se traverser. Il apparaît alors une ligne de points doubles. La deuxième, qui est simplement l'opération inverse de la première, consiste à séparer les deux nappes.

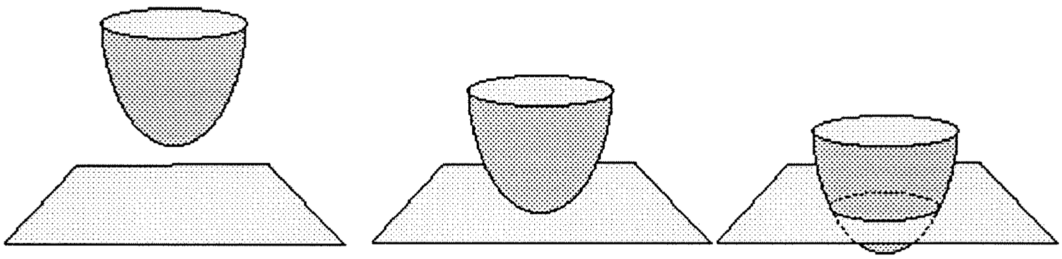
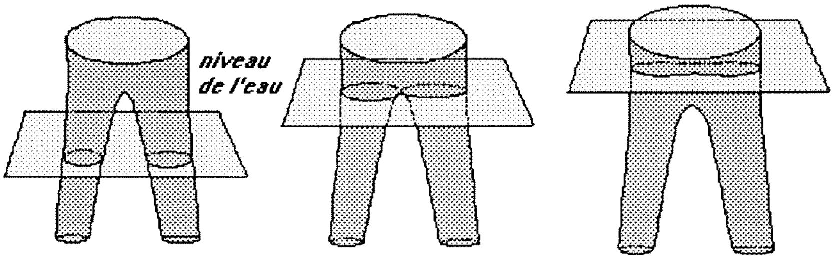


FIGURE 5 : MODIFICATIONS GÉNÉRIQUES DE TYPES D0 ET D2.

– et les modifications de type D_1 :

Elles sont comparables à la montée d'un « plan d'eau » le long d'un pantalon. La ligne de points doubles change de nature à mesure que le plan s'élève : parti de deux composantes séparées au départ, on aboutit à un raccord en forme de X au point de contact entre les deux nappes, puis en définitive à une courbe connexe. Il est essentiel de constater que cette transformation change la communication entre les différentes régions de l'espace. On notera de la même manière la montée ou la descente du plan d'eau.



On reconnaîtra cette situation dans la description du modèle central fermé lorsque le plan dorsal Q_1 vient se mettre en contact avec le point B_0 tout en traversant la patte avant du cheval rouge P_0 et en même temps la patte arrière du cheval bleu P_3.

On peut également donner l'image de la toiture d'une maison cruciforme. Lorsque l'on pousse les deux arêtes faîtières l'une vers l'autre, on est exactement dans la situation du modèle central fermé où les deux arêtes A_0A_2 et A_1A_3 se rencontrent.

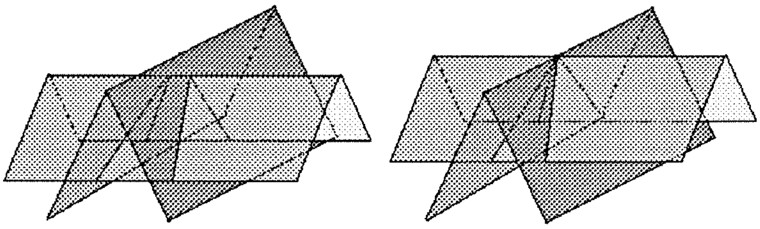


FIGURE 6 : MODIFICATION GÉNÉRIQUE DE TYPE D_I.

Une modification de type T se produit lorsque trois nappes de l'immersion passent par un même point.

Modifications de type T+ et T–:

Une modification de type T+ se produit lorsque l'on approche une surface cylindrique de l'arête d'un dièdre, et que l'on continue le mouvement au-delà de cette arête. Il se forme une paire de points triples ainsi qu'une région en forme de tranche de mandarine. Inversement une modification de type T– défait les points triples.

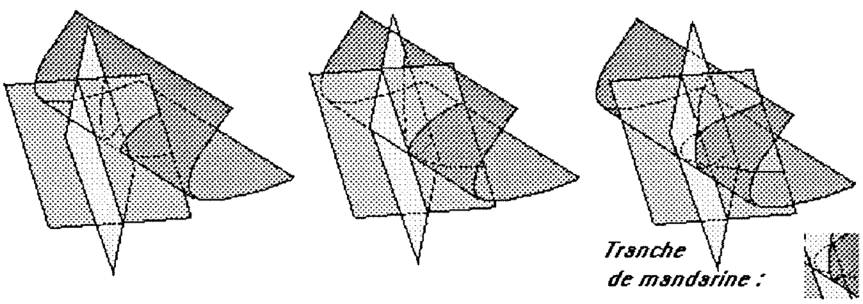


FIGURE 7 : MODIFICATIONS GÉNÉRIQUES DE TYPE T+ ET T-.

Une modification de type Q se produit lorsque l'immersion vient à présenter un point quadruple.

Modification de type Q :

Juste avant, et juste après, le passage par le point quadruple, les quatre plans délimitent un tétraèdre. On remarquera que ses quatre sommets sont des points triples formés par l'intersection de trois plans chacun.

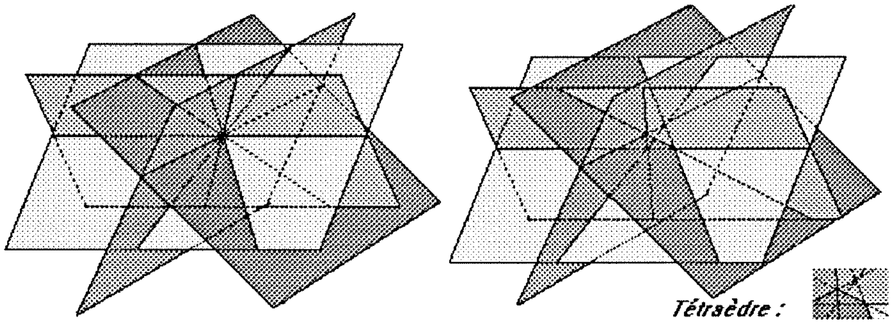
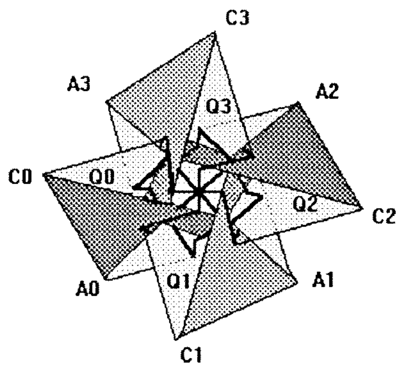


FIGURE 8 : MODIFICATION GÉNÉRIQUE DE TYPE Q.

2. Les six étapes fondamentales

Les modèles suivants visualisent les six étapes fondamentales de l'homotopie transformant le modèle central fermé en un modèle homéomorphe à une sphère.

Modèle central fermé :



ÉTAPE 0 : MODÈLE CENTRAL FERMÉ.

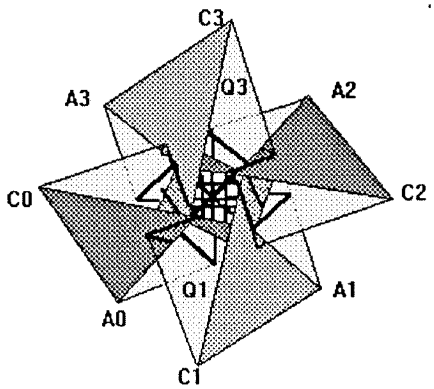
Remarque : les modèles suivants ont tous une symétrie d'ordre 2 par rapport à l'axe Oz.

La première déformation consiste à défaire le point quadruple. Pour cela, on soulève les plans dorsaux Q_1 et Q_3 en les faisant pivoter autour d'une droite qui exceptionnellement n'est pas une droite du polyèdre. Dans ce mouvement, la ligne d'auto-intersection va changer de nature. Le modèle subit une modification générique de type Q.

Modèle n° 1 : Le texte en italique est de Bernard Morin.

« Les points C_1 et C_3 se déplacent à vitesse constante le long des droites (C_1A_1) et (C_3A_3) jusqu'à atteindre la cote $36/19 \cong 1{,}89$. Dans ce mouvement, les plans Q_1 et Q_3 se redressent en pivotant autour de leurs intersections respectives avec le plan des A_i. Le point B_0 appartient

toujours au plan Q_1 et le point B_1 au plan Q_2, mais les quatre faces Q_i délimitent à présent un tétraèdre ».



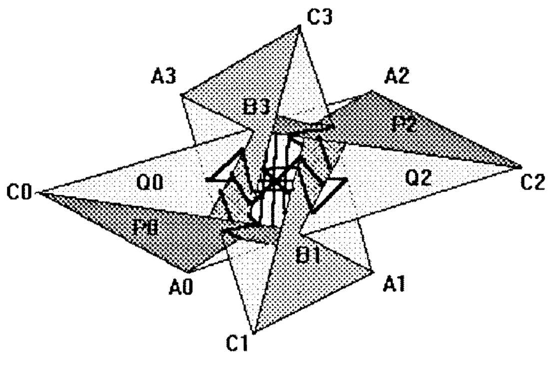
ÉTAPE 1 : RELÈVEMENT DES PLANS Q_1 ET Q_3 ET APPARITION D'UN TÉTRAÈDRE.

On remarquera que les sommets de ce tétraèdre sont constitués de **deux paires de points triples** et que l'immersion est donc transverse, ce qui n'était pas le cas du modèle central fermé. Il y a perte de transversalité au moment du passage par l'étape centrale.

La deuxième déformation consiste à redresser les deux plans P_0 et P_2 par un mouvement de rotation autour des droites (A_0A_1) et (A_2A_3).

Modèle n°2 :

« Les points C_0 et C_2 se déplacent à vitesse constante respectivement le long des droites (C_0A_2) et (C_2A_0) jusqu'à atteindre la cote $20/9 \cong 2,22$. Dans ce mouvement les plans P_0 et P_2 se redressent en pivotant autour de leurs intersections respectives avec le plan des A_i ».



ÉTAPE 2 : LES PLANS P_0 ET P_2 SE REDRESSENT.

Le relèvement de P_0 et P_2 entraîne quatre nouvelles modifications génériques de type $\mathbf{D_1}$.

Si l'on observe le mouvement du point B_0 sur la droite fixe (C_3B_0) lorsque P_0 se redresse, on remarque que le point $\mathbf{B_0}$ se déplace vers le bas et passe sous le plan $\mathbf{Q_1}$. De façon analogue, le point $\mathbf{B_2}$ passe sous le plan $\mathbf{Q_3}$ le long de la droite ($\mathbf{C_1B_2}$). Il s'agit là de deux modifications de type D_1.

Il en résulte une **ouverture** vers les petites dents aboutissant au points B_0 et B_2 et qui prolongent la chambre intérieure.

Deux autres modifications de type D_1 se produisent en même temps. En effet, sous l'effet du redressement de P_0 et de P_2, le point $\mathbf{B_1}$ passe au-dessus du plan $\mathbf{Q_2}$ et le point $\mathbf{B_3}$ passe au-dessus du plan $\mathbf{Q_0}$.

Ce faisant il se crée un passage vers les deux ouvertures précédemment décrites et la chambre intérieure, mise en évidence sur le modèle central, est amenée en communication avec le monde extérieur. On peut donc entièrement **traverser le modèle** en pénétrant par $\mathbf{B_1}$ et en ressortant par $\mathbf{B_3}$!

Remarques :

– Le redressement des deux plans P_0 et P_2 est fait de telle manière que les points B_0 et B_2 restent au-dessus des plans ventraux R_1 et R_3. Leur position est cependant extrême.

– Il est très important que les points C_0 et C_2 soient sous les plans R_1 et R_3 afin d'éviter les complications.

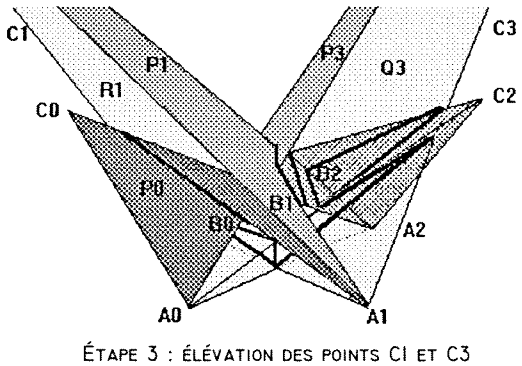
Défaut de généricité :

Lorsque l'arête C_2A_0, formée par l'intersection des faces Q_0 et R_0 va cesser de rencontrer la face P_1, elle traverse d'une traite, la « patte arrière » du pentagone P_0. Leur intersection est alors un segment et non plus un point comme dans les modifications génériques qui ont été décrites. Il s'agit là d'une entorse mineure à la généricité de la déformation. Elle a lieu au temps $t = 25/16 \cong 1{,}562$ (Il est possible d'éviter se défaut en s'autorisant à plier légèrement les polygones P_0 et P_2).

La troisième déformation va étirer considérablement les pointes bleues aboutissant à C_1 et C_3.

Modèle n° 3 :

« Les points C_1 et C_3 se déplacent à vitesse constante respectivement le long des droites (A_1C_1) et (A_3C_3) jusqu'à atteindre la cote $309/37 \cong 8{,}35$. Dans ce mouvement les plans Q_1 et Q_3 se redressent en pivotant respectivement autour des droites (B_2A_3) et (B_0A_1) ».



ÉTAPE 3 : ÉLÉVATION DES POINTS C1 ET C3

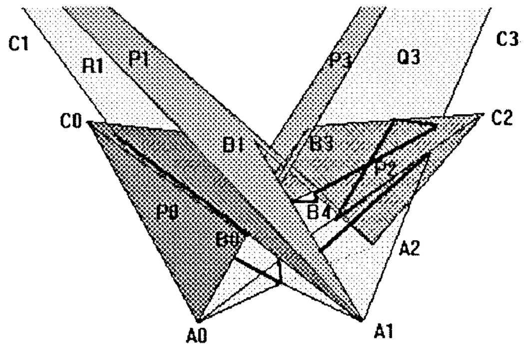
Les deux paires de points triples toujours présentes sur le modèle 2, vont disparaître sous l'action de **deux modifications de type T–.** Calculs faits, cela se passe au temps $t \cong 2{,}029$ pour la paire de points triples constituant l'arête supérieure du tétraèdre et au temps $t = 377/170 \cong 2{,}217$ pour celle constituant son arête inférieure. C'est également, à ce dernier instant, que les arêtes C_1B_2 et C_3B_0 se croisent.

À partir de là, la courbe d'intersection n'est plus constituée que de points doubles.

Avec cette quatrième déformation, la chambre intérieure va s'ouvrir complètement sur le monde extérieur.

Modèle n°4 :

« Les points B_1 et B_3 se déplacent à vitesse constante respectivement le long des droites (A_1B_1) et (A_3B_3) jusqu'à atteindre la cote 2. Dans ce mouvement les plans Q_0 et Q_2 s'élèvent en pivotant respectivement autour des droites (C_0A_2) et (C_2A_0) ».



ÉTAPE 4 : LES POINTS B_1 ET B_3 S'ÉLÈVENT.

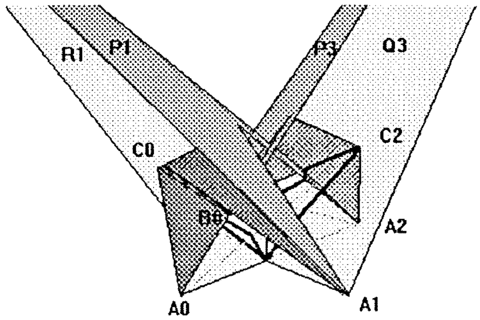
L'élévation des points B_1 et B_3 va provoquer le décroisement des pentagones P_1 et P_3 et, de façon plus globale, le décroisement des deux cornets constituant les pointes C_1 et C_3. Il s'agit là d'une nouvelle **modification générique de type D_2. La chambre intérieure est à présent entièrement ouverte à l'espace extérieur** !

À présent, il ne reste plus qu'à « dégonfler » les pointes C_0 et C_2 ; cela se passe sans nouvelle modification générique, les différentes nappes évoluent simplement l'une par rapport à l'autre. Puis à sortir du domaine des immersions entre les étapes 5 et 6, c'est-à-dire que **la courbe de points doubles va entièrement disparaître** !

Marquons un temps d'arrêt pour observer ce dégonflement.

Halte intermédiaire au temps $t \cong 4{,}671$:

« Dans le mouvement qui mène de l'étape 4 à l'étape 5, on s'arrête au moment où les points C_0 (resp. C_2) ont comme cote $3/2$. »

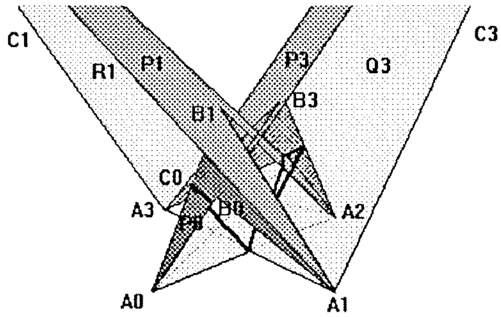


Halte au temps t ≅ 4,671.

Les pointes rouges vont complètement se résorber, C_0 se rapproche encore de B_0.

Modèle n°5 :

« Les points C_0 et C_2 descendent à vitesse constante respectivement le long des arêtes (C_0B_0) et (C_2B_2) jusqu'à se trouver sur les segments respectifs [A_0B_1] et [A_2B_3], de sorte les plans Q_0 et R_0 coïncident, de même que Q_2 et R_2 ».



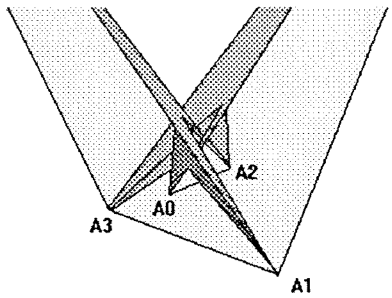
ÉTAPE 5 : LES POINTES C_0 ET C_2 SE DÉGONFLENT.

Les pentagones P_0 et P_2 viennent de prendre la forme de deux quadrilatères concaves. Les points A_0 et A_2 vont s'élever. Ce faisant, les arêtes A_0A_2 et A_1A_3 se décroisent en **achevant une modification générique de type D_1 commencée et en attente depuis le temps t = –5**. Ce phénomène constitue un nouvelle entorse à la généricité de la déformation, l'avantage est que les modèles en carton tiennent debout !

Nous voici enfin arrivés au moment où toute ligne de points doubles va disparaître. Sur le chemin vers l'étape 6, A_0 remonte le long de la droite (A_0B_3) qui est en retrait par rapport à la droite A_0B_0 sur la figure précédente ; l'arête A_0A_2 commence sa remontée en se désolidarisant de l'arête A_1A_3.

Halte intermédiaire au temps t ≅ 5,58 : sortie du domaine des immersions.

« Au temps $t = 95/17 \cong 5,58$, les points A_0 et A_2 sont en contact avec les plans ventraux R_1 et R_3. C'est à cet instant que l'on quitte définitivement le domaine des immersions sous l'effet simultané de deux modifications génériques de type D_2 et que disparaît toute courbe d'intersection ».

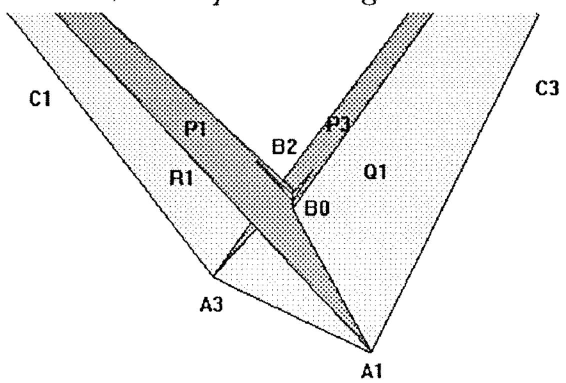


Halte intermédiaire au temps t ≅ 5,58 : sortie du domaine des immersions.

Le bout du chemin est proche, le prochain modèle est homéomorphe à une sphère ! Il reste juste à dégonfler les pointes rouge A_0 et A_2.

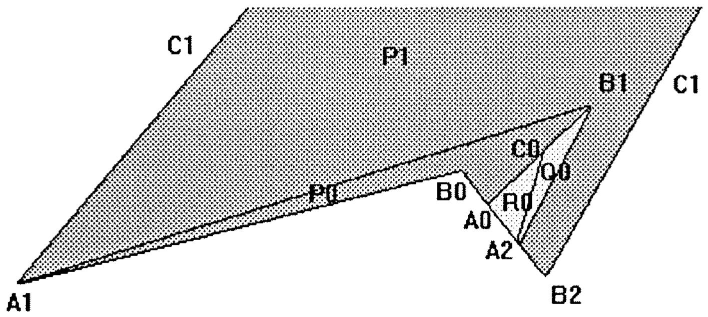
Modèle n°6 : Ce modèle est appelé « **bicorne bleu** ».

« Les points A_0 et A_2 se déplacent à vitesse constante respectivement le long des droites (A_0B_3) et (A_2B_1) jusqu'à atteindre la cote 3/2. Ils entraînent avec eux les plans P_0 et P_2 qui se redressent en pivotant respectivement autour des droites (A_1B_1) et (A_3B_3) jusqu'à se retrouver le premier dans le prolongement de P_1 et le second dans le prolongement de P_3. Les plans P_3 et Q_3 d'une part et P_1 et Q_1 de l'autre restant fixes, les points B_0 et B_2 sont entraînés dans un mouvement ascendant le long des droites (B_0C_3) et (B_2C_1). Dans ce mouvement les plans $Q_0 = R_0$ et $Q_2 = R_2$ s'élèvent également en pivotant respectivement autour des droites (A_2B_1) et (A_0B_3) jusqu'à se confondre eux aussi avec les plans P_1 et P_3. Durant cette étape les points C_0 et C_2 sont astreints à vérifier la relation $C_i = 11/41A_i + 30/41B_{i+1}$ avec $i = 0$ ou 2 de sorte que, tout comme les points A_0 et A_2, ils se déplacent le long d'une droite de l'espace ».



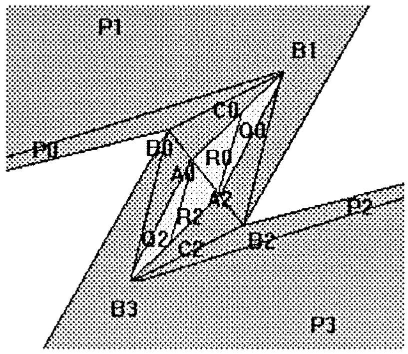
ÉTAPE 6 : LES POINTS A_0 ET A_2 S'ÉLÈVENT LE LONG DES DROITES (A_0B_3) ET (A_2B_1), BICORNE BLEU.

La figure suivante montre le pentagone P_0 après son mouvement de rotation autour de la droite (A_1B_1). On remarquera l'énorme contraction qu'il a subie en cours de chemin alors que le pentagone P_1 a, lui, été considérablement dilaté !



Étape 6 : contraction et dilatation de certains éléments.

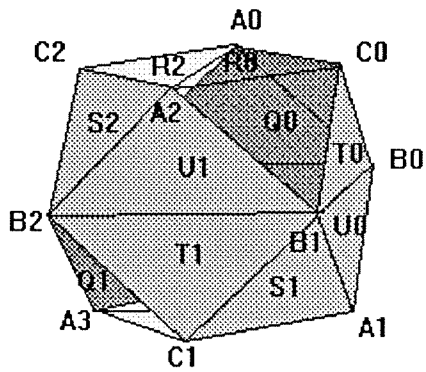
En fait, si l'on considère, en complétant par symétrie, l'ensemble du quadrilatère $B_0B_1B_2B_3$, ainsi que sa triangulation, on a sous les yeux **tout l'hémisphère nord** du cuboctaèdre bleu que l'on se propose d'atteindre !



ÉTAPE 6 : VUE DE DESSUS, MISE EN ÉVIDENCE DE HÉMISPHÈRE CONTRACTÉE $B_0B_1B_2B_3$.

Ainsi donc, retourner le cuboctaèdre exige de dilater un de ses hémisphères et de contracter l'autre.

En seize étapes supplémentaires ce dernier modèle peut se transformer en un cuboctaèdre bleu. On pourra comparer la figure précédente avec celle qui suit, et y reconnaître les différents éléments.



ÉTAPE 22 : CUBOCTAÈDRE BLEU.

Remarques :

On notera en particulier la triangulation des faces carrées permettant d'une part de faire apparaître l'équateur du cuboctaèdre et d'autre part deux arêtes orthogonales contenant respectivement son pôle nord et son pôle sud.

Le calcul de sa caractéristique d'Euler donne comme pour le modèle central fermé :

$$S = 12\,, \quad A = 30, \quad F = 20$$

$$\chi = S - A + F = 2\,.$$

L'objectif est donc atteint !

Si l'on se rappelle la triangulation $P_i = S_i \cup T_i \cup U_i$, i = 0 à 3, du pentagone P_i, observons qu'à présent, ces quatre pentagones forment une ceinture de douze triangles qui oscillent autour de l'équateur du cuboctaèdre.

Remarquons également que l'arête $[A_0A_2]$ a, dans son mouvement de **vrille ascendante**, subi une **rotation d'un demi-tour** dans le sens trigonométrique, par rapport à l'arête $[A_1A_3]$.

3. Une approche de l'ensemble du retournement

Il est facile de comprendre que le chemin qui a permis de passer du modèle **central fermé** au cuboctaèdre de face externe **bleue** peut aussi conduire au cuboctaèdre de face externe **rouge**.

Au lieu de commencer, à l'étape 1, par le relèvement des plans Q_1 et Q_3, on démarre avec celui des plans Q_0 et Q_2. Puis on fait de même pour remonter en arrière jusqu'au temps $t = -22$.

En considérant la loi de formation suivante sur les sommets X :

$$\mathbf{X^{-t}_j = \rho^{-1}(X^t_{j+1})\,,\ j \in Z\,/4Z}$$

où ρ désigne la rotation de 90° autour de l'axe Oz selon le sens trigonométrique, on obtient pour chaque valeur du temps t variant 1 à 22, un modèle négatif transformant le modèle **central fermé** en un cuboctaèdre **rouge**.

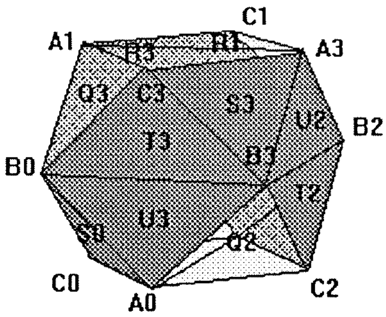
On pourra, par exemple, observer sur la figure suivante que :

$\mathbf{A}_1^{-22}$ est l'image de $\mathbf{A}_2^{+22}$ par la rotation de sens indirect et de 90° autour de l'axe Oz.

Il en est de même de toutes les faces des modèles négatifs, ainsi :

$\mathbf{Q_3^{-22}}$ est l'image de $\mathbf{Q_0^{+22}}$ par la rotation de sens indirect et de 90° autour de l'axe Oz.

À présent on touche au but : en faisant varier le temps t de la valeur –22 à la valeur 22, on réalise le **retournement du cuboctaèdre** !



ÉTAPE -22 : CUBOCTAÈDRE ROUGE.

Remarque :

On remarquera qu'un même point occupe des positions diamétralement opposées sur le cuboctaèdre initial et sur le cuboctaèdre retourné. De même, on observera les **orientations opposées** d'un triangle quelconque, par exemple $A_0B_0C_0$, aux temps $t = -22$ et $t = +22$.

Paradoxalement, tout le chemin parcouru mène au point de départ du retournement. L'imagination de tout un chacun peut à présent aller à l'envi dans un sens comme dans l'autre et saisir de façon dynamique l'ensemble de la déformation. Certes, le passage du bicorne au cuboctaèdre n'est pas évidente, mais cela a peu d'importance : tous les calculs ont été faits.

Pour résumer cette vision dynamique, retenons simplement quelques mots (dans l'ordre) :

Cuboctaèdre rouge, bicorne rouge, modèle central fermé, bicorne bleu, cuboctaèdre bleu.

Si l'on concentre son attention sur le **pôle nord** du cuboctaèdre rouge du départ, on observe qu'il croise une seule fois le **pôle sud** au cours de cette déformation, le contact entre les deux restant maintenu du temps $t = -5$ jusqu'au temps $t = +5$.

Le schéma suivant met en évidence les **seize modifications génériques** qui ont été nécessaires pour réaliser ce retournement du cuboctaèdre.

$$\begin{array}{|c|}\hline D_0 \\ \\ D_0 \\ \hline\end{array} \to D_0 \to \begin{array}{|c|}\hline T^+ \\ \\ T^+ \\ \hline\end{array} \to \begin{array}{|ccc|}\hline D_1 & Q & D_1 \\ & & \\ D_1 & D_1 & D_1 \\ \hline\end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline T^- \\ \\ T^- \\ \hline\end{array} \to D_2 \to \begin{array}{|c|}\hline D_2 \\ \\ D_2 \\ \hline\end{array}$$

Remarques :

– la modification D_1 située sous la lettre Q est celle qui reste bloquée du temps $t = -5$ jusqu'au temps $t = +5$.

– les termes encadrés correspondent à des accidents se produisant simultanément.

Pour terminer ce périple, donnons une brève esquisse du cheminement qui permet de passer du **cuboctaèdre rouge** ($t = -22$) au **cuboctaèdre bleu** ($t = 22$).

Résumé :

t = –22 : **cuboctaèdre rouge**.

t = –6 : **bicorne rouge**.

t = –5 : vrille descendante, selon le sens direct, des points A_1 et A_3 ; traversée des plans ventraux R_0 et R_2, provoquant simultanément deux modifications génériques de type D_0 et début d'une modification D_1.

t = –4 : gonflement des petites pointes bleues C_1 et C_3.

t = –3 : abaissement des points B_1 et B_3, croisement des grands cornets formant les pointes rouges C_0 et C_2, modification D_0.

t = –2 : descente des points C_0 et C_2, provoquant successivement deux modifications T+.

t = –1 : inclinaison vers l'intérieur des pentagones bleus P_1 et P_3, entraînant deux modifications D_1.

t = 0 : abaissement des plans dorsaux Q_0 et Q_2, **modèle central fermé**.

t = 1 : élévation des plans dorsaux Q_1 et Q_3.

t = 2 : redressement des pentagones rouges P_0 et P_2, entraînant deux modifications D_1.

t = 3 : élévation des points C_1 et C_3, provoquant successivement deux modifications T–.

t = 4 : élévation des points B_1 et B_3, décroisement des grands cornets formant les pointes bleues C_1 et C_2, modification D_2.

t = 5 : dégonflement des petites pointes rouges C_0 et C_2.

t = 6 : vrille ascendante, selon le sens direct, des points A_1 et A_3 ; fin d'une modification D_1 ; traversée des plans ventraux R_1 et R_2, provoquant simultanément deux modifications génériques de type D_2 ; **bicorne bleu**.

t = 22 : **cuboctaèdre bleu**.

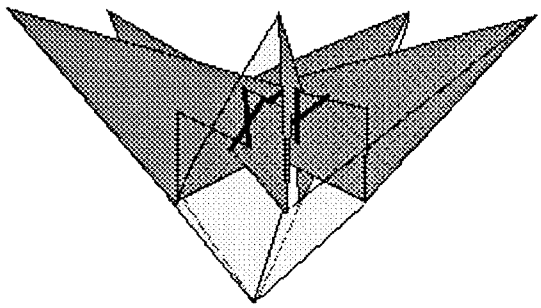
***Complément bibliographique** : François Apéry. An algebraic halfway model for the eversion of a sphere with an appendix by Bernard Morin. Tohoku mathemetical journal, volume 44 (1992), n°1, p 103 à 150.*

Prolongements

Pour conclure cet article, il nous reste à décrire deux modèles encore plus complexes, et qui laissent entrevoir qu'il existe une infinité de surfaces polyédriques pouvant servir de modèle central à un retournement de la sphère.

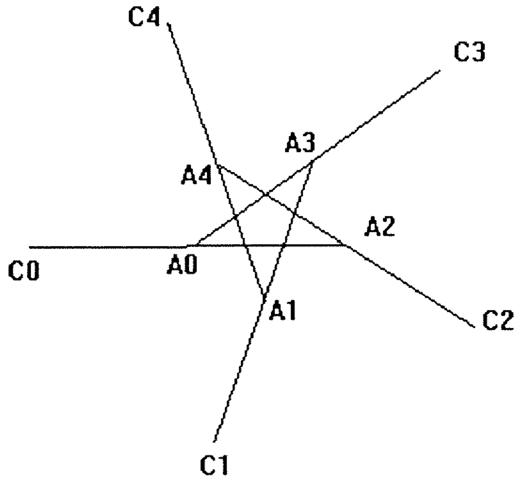
1. Immersion polyédrique du plan projectif ayant une symétrie d'ordre 5

Le premier modèle est, comme la surface de Boy, une immersion du plan projectif. Il possède une symétrie d'ordre 5.



IMMERSION POLYÉDRIQUE DU PLAN PROJECTIF AYANT UNE SYMÉTRIE D'ORDRE 5.

L'idée essentielle pour fabriquer ce polyèdre consiste à mettre les cinq polygones concaves Pi en position verticale tout en leur faisant prendre appui sur les branches d'un pentagone étoilé.



PROJECTION SUR LE PLAN HORIZONTAL DES PENTAGONES CONCAVES P_i.

Remarque : Le pentagone étoilé $A_0A_2A_4A_1A_3A_0$ peut être parcouru en une seule fois sans lever le crayon, ce qui permet l'enchaînement des « chevaux » les uns à la suite des autres. Pour chaque pentagone, on peut distinguer la face qui est tournée vers l'axe vertical Oz et celle qui est tournée vers l'extérieur. A chaque raccordement de deux chevaux on passe de la face externe du premier sur la face interne du second, et vice et versa. Par conséquent, tout raccordement d'un nombre impair de chevaux qui se referme engendrera un ruban Mœbius immergé (qui se recoupe).

Description de l'immersion du plan projectif ayant une symétrie d'ordre 5 :

Sommets : Dans le plan xOy on considère les points A_i, i = 0 à 4, images des racines cinquièmes de l'unité. Les points B_i sont les translatés des points A_i par la translation de vecteur (0 ; 0 ; 1). Les plans P_i, i = 0 à 4, sont les plans verticaux passant par les points A_i et A_{i+2}. Les plans R_i, i modulo 5, sont les plans passant par les points A_i, A_{i+4} et Y(0 ; 0 ; –1). Le point C_i se trouve à l'intersection des plans P_i, R_i et du plan d'équation z = 2.

Le polyèdre ainsi décrit est constitué de seize sommets: Y, A_i, B_i, C_i, i = 0 à 4. Ses faces s'obtiennent de la manière suivante :

Faces pentagonales : $P_i = A_iB_iA_{i+2}B_{i+2}C_i$,

Faces triangulaires : $Q_i = C_iB_{i+2}A_{i+4}$,

Faces quadrangulaires : $R_i = A_iC_iA_{i+4}Y$, i modulo 5.

Le point pentuple appartient aux cinq plans Q_i.

Calculons sa constante d'Euler :

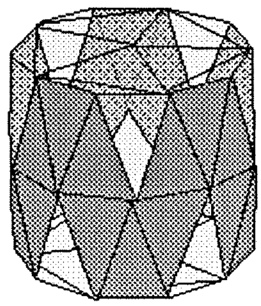
S = 16 **A = 5(5 + 3 + 4) : 2 = 30** **F = 3 × 5 = 15**

$\chi = S - A + F = 16 - 30 + 15 = 1$

Le polyèdre étudié est donc bien homéomorphe au plan projectif.

Tonneau conduisant au revêtement double de l'immersion du plan projectif ayant une symétrie d'ordre 5 :

Comme pour la surface de BOY, on peut imaginer un polyèdre en forme de tonneau et qui peut servir à réaliser un revêtement à deux feuillets du modèle précédent. De part et d'autre de son équateur, on compte 30 triangles isocèles qui sont destiner à recouvrir les 5 pentagones P_i. Rappelons que chacun d'eux est constitué de 3 triangles.

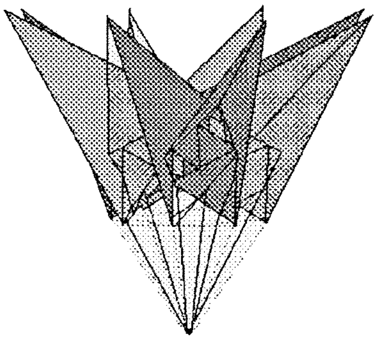


TONNEAU CONDUISANT AU REVÊTEMENT DOUBLE DE L'IMMERSION DU PLAN PROJECTIF AYANT UNE SYMÉTRIE D'ORDRE 5.

2. Immersion polyédrique de la sphère ayant une symétrie d'ordre 8

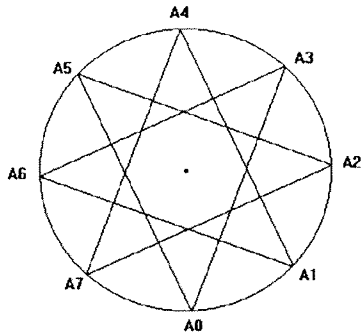
Le deuxième modèle est une **immersion polyédrique de la sphère S^2** ayant une symétrie d'ordre 8, il généralise le modèle central fermé.

Les figures réalisées par W. Thurston et son équipe sur le retournement de la sphère, qui semblent intéresser beaucoup de mathématiciens parce qu'elles illustrent la démarche de Smale, s'apparentent au modèle présenté ici.



IMMERSION DE LA SPHÈRE AYANT UNE SYMÉTRIE D'ORDRE 8.

Comme précédemment, les sommets A_i, i = 0 à 7, sont les sommets d'un octogone étoilé. Les pentagones concaves P_i, prennent cette fois appui sur les points A_i et A_{i+3}. On observera que l'on peut passer par tous les sommets de l'octogone régulier en suivant la ligne brisée $A_0A_3A_6A_1A_4A_7A_2A_5A_0$.



OCTOGONE ÉTOILÉ.

Description

Sommets : Dans le plan xOy on considère les points A_i, i = 0 à 7, images des racines huitièmes de l'unité. Les points B_i sont les translatés des points A_i par la translation de vecteur (0 ; 0 ; 1). Les plans P_i sont les plans verticaux passant par les points A_i et A_{i+3}, (i modulo 8). Les plans Q_i sont les plans passant par les points A_{i+6}, B_{i+3}, B_{i+7}. Les plans R_i passent par les points A^i, A_{i+6} et Y(0 ; 0 ; –3/2). Le point C_i se trouve alors à l'intersection des plans P_i, Q_i et R_i.

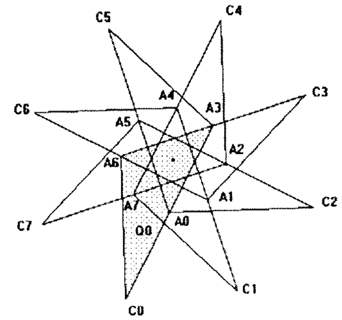
Le polyèdre décrit comporte alors vingt-cinq sommets : les points A_i, B_i, C_i pour i modulo 8 et le point Y. Ses faces sont les suivantes :

Faces pentagonales : $P_i = A_iB_iA_{i+3}B_{i+3}C_i$,

Faces triangulaires : $Q_i = C_iB_{i+3}A_{i+6}$,

Faces quadrangulaires : $R_i = C_iA_iA_{i+6}Y$.

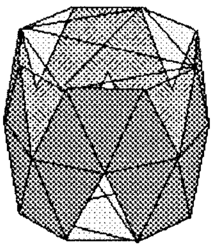
Les huit plans Q_i passent tous par un même point. De plus **le point B_i appartient au plan Q_{i+1}**. La figure suivante suggère la disposition des plans dorsaux Q_i



PROJECTION SUR LE PLAN HORIZONTAL DES PLANS DORSAUX Q_i I = 0 À 7, MISE EN ÉVIDENCE DU PLAN DORSAL Q_0.

Tonneau candidat à un retournement polyédrique de la sphère qui passe par une étape centrale ayant une symétrie d'ordre 8 :

Ce modèle joue le même rôle que le cuboctaèdre. Il compte exactement le même nombre de sommets (26), d'arêtes (70) et de triangles (48) que l'immersion précédente.



TONNEAU CONDUISANT À UNE IMMERSION DE LA SPHÈRE S^2 ET AYANT UNE SYMÉTRIE D'ORDRE HUIT.

3. Généralisation et conclusion

Au cours des deux paragraphes précédents on a vu apparaître le rôle primordial joué par une catégorie bien particulière de polygones étoilés : ceux qui pouvaient être parcourus entièrement sans lever le crayon ! Signalons le théorème suivant dont la démonstration est une conséquence de l'égalité de Bézout.

Théorème : $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ engendre le groupe U_n des racines n^{es} de l'unité si et seulement si $k \wedge n = 1$.

Applications

a. Immersions du plan projectif

Le cas $n = 1$ correspond à la surface de Boy.

Pour tout $n > 1$, vérifions par l'algorithme d'Euclide que $n + 1 \wedge 2n+1 = 1$.

En effet, on a les égalités suivantes liées à deux divisions euclidiennes successives :

$$2n+1 = (n+1).1 + n \qquad \text{et} \qquad n+1 = n.1 + 1$$

Le dernier reste étant égal à 1 on a $n + 1 \wedge 2n+1 = 1$.

Il résulte alors du théorème précédent que ω_{n+1} engendre le groupe U_{2n+1}.

Conséquences : les points d'affixes les puissances successives de ω_{n+1} sont alors les sommets successifs d'un polygone étoilé ayant 2n+1 sommets et qui peut **être parcouru sans lever le crayon** !

Ainsi, pour tout nombre impair 2n+1, $n \geq 1$, il existe une **immersion du plan projectif P_2** ayant une symétrie d'ordre 2n+1 et pouvant être revêtue, comme la surface de Boy, deux fois par un tonneau dont la bande oscillant de part et d'autre de l'équateur est composée de $3\times2\times(2n+1)$ triangles isocèles.

b. Immersions de la sphère S^2

De même pour tout nombre de la forme 4n, $n \geq 1$, il existe une immersion de la sphère S^2 ayant une symétrie d'ordre 4n.

Le cas n = 1 correspond au modèle central du retournement du cuboctaèdre.

Pour $n \geq 2$, son existence est liée à une classe de polygones étoilés d'ordre 4n, pouvant être parcouru sans lever le crayon.

Vérifions que $2n-1 \wedge 4n = 1$. On a : $4n = (2n-1) . 2 + 2$ et $2n-1 = 2 .(n-1)+1$

Le dernier reste est de nouveau égal à 1, on a donc $2n-1 \wedge 4n = 1$. Les points dont les affixes sont les puissances successives de ω_{2n-1} sont alors les sommets successifs d'un polygone étoilé ayant 4n sommets et qui peuvent être parcourus sans lever le crayon ce qui permet d'enchaîner les "chevaux" servant de base à la construction d'une immersion de la sphère S^2. Ce qui n'est pas le cas d'un hexagone ou d'un décagone étoilés comme on peut le vérifier sans difficulté.

Un tonneau ayant une bande de $3 \times 4n$ triangles isocèles, oscillant autour de l'équateur, peut alors servir de départ à un retournement polyédrique de la sphère admettant le modèle précédent comme modèle central.

Conclusion :

Un tonneau constitué de 4 pentagones (3 triangles consécutifs) a permis de réaliser le retournement du cuboctaèdre. Un tonneau formé de 6 pentagones permet le revêtement à deux feuillets de la surface de Boy. Un tonneau réalisé à partir de 8 pentagones conduit à un retournement passant par l'immersion centrale ayant une symétrie d'ordre huit et grâce à un tonneau composé de 10 pentagones il est possible de revêtir deux fois l'immersion du plan projectif ayant une symétrie d'ordre cinq.

À tout nombre de la forme 4n où $n \geq 1$ correspond un tonneau et une immersion de la sphère S^2 généralisant le retournement du cuboctaèdre.

À tout nombre de la forme 2(2n+1) où $n \geq 1$ correspond un tonneau et une immersion du plan projectif P_2 généralisant le retournement à l'aide du double revêtement de la surface de Boy.

C'est sur cette perspective que s'arrêtera ce voyage au pays des immersions. Chacun pourra le parcourir selon sa propre initiative en laissant libre cours à son imagination.

Le contact direct avec un chercheur, en prise avec un problème actuel, reste pour moi une expérience irremplaçable. Le moment où l'on sent la solution proche est très riche en émotions ; lorsqu'enfin elle émerge, après une longue marche d'approche à cordes tendues, les efforts fournis cèdent la place à la joie de la découverte. Transmettre ce genre d'impressions représente certainement la plus belle part du métier d'enseignant. De façon similaire, le jeune élève ne se retrouve-t-il pas dans la même situation quand un problème éveille sa curiosité et qu'il se retrouve devant la page blanche ? Se rend-il compte qu'elle est un lieu de création ?

UN CARRÉ VRAIMENT MAGIQUE!

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

avec en plus :

$$\begin{array}{ll}
618^2 + 753^2 + 294^2 = 816^2 + 357^2 + 492^2 & \text{(lignes)} \\
672^2 + 159^2 + 834^2 = 276^2 + 951^2 + 438^2 & \text{(colonnes)} \\
654^2 + 132^2 + 879^2 = 456^2 + 231^2 + 978^2 & \text{(diagonales)} \\
639^2 + 174^2 + 852^2 = 936^2 + 471^2 + 258^2 & \text{(contre} - \text{diagonales)} \\
654^2 + 798^2 + 213^2 = 456^2 + 897^2 + 312^2 & \text{(diagonales)} \\
693^2 + 714^2 + 258^2 = 396^2 + 417^2 + 852^2 & \text{(contre} - \text{diagonales).}
\end{array}$$

emprunté à l'American Mathematical Monthly, fév. 1999, vol. 106, n° 2.

TRADUCTION ET TRANSMISSION SCIENTIFIQUES AUX VIII^{e}-X^{e} SIÈCLES(*)

A. DJEBBAR
Université de Paris-Sud

Introduction

Malgré les recherches de ces dernières décennies, nos connaissances sur les origines et sur les débuts des activités scientifiques en pays d'Islam restent encore très lacunaires. Les informations rapportées par les biobibliographes, les traducteurs et les premiers auteurs d'écrits scientifiques en arabe nous renseignent partiellement sur les sources écrites et sur les différents aspects de l'activité de traduction. Ces informations permettent de prendre conscience de l'importance du phénomène mais elles ne suffisent pas pour le décrire et pour en analyser les causes.

On sait, par exemple, que les traductions en arabe ont commencé avant le VIII^{e} siècle et qu'elles ne se sont interrompues que vers le milieu du X^{e} siècle. Quels ont été les facteurs qui ont favorisé cette activité ? Quelles sont les disciplines concernées ? Quelle a été, enfin, le rôle de ces traductions dans les orientations prises par l'activité scientifique à partir du IX^{e} siècle ?

Dans cette étude, nous n'avons pas la prétention de reconstituer l'histoire des débuts de la science en pays d'Islam. Nous tenterons plutôt de présenter l'essentiel de ce qui est connu aujourd'hui dans ce domaine en regroupant les informations autour des points suivants qui nous semblent caractériser le mieux ce phénomène de réactivation de la science à partir du VIII^{e} siècle : les lieux du savoir avant l'avènement de l'Islam, le rôle du mécénat et des bibliothèques, certains aspects de l'activité de traduction et, enfin, les orientations scientifiques qui se sont dégagées, sous l'effet de tous ces facteurs, dans deux domaines bien précis, celui des Mathématiques et celui de l'Astronomie.

Mais, avant d'évoquer ces différents sujets, il me semble utile de faire quelques remarques sur le contexte dans lequel ce phénomène est apparu, et s'est développé et sur d'autres activités intellectuelles qui l'on accompagné ou qui l'ont même précédé.

La première remarque concerne les facteurs qui, antérieurement ou parallèlement aux traductions, ont joué un rôle dans l'avènement d'une activité scientifique en pays d'Islam. En effet, même si les biobibliographes ne parlent que des traductions, nous savons aujourd'hui, grâce aux études comparatives, que bien avant la découverte des manuscrits scientifiques et philosophiques grecs et sanskrits, une pratique scientifique locale était observée dans certains secteurs de la vie de tous les jours,

---

(*)- Ce texte est une version remaniée de la conférence donnée à l'Université de Strasbourg, le 22 Janvier 1997.

comme la répartition des héritages, l'arpentage et les transactions commerciales. Ces pratiques utilisaient des procédés arithmétiques, géométriques ou même algébriques qui avaient été assimilés soit par enseignement soit par initiation directe dans les lieux de travail. Ce patrimoine scientifique local qui regroupait un ensemble de savoir-faire, que la pratique avait longuement testés et que l'habitude allait pérenniser, ne va pas être balayé, du jour au lendemain, par le nouveau savoir que les traductions vont révéler et que le nouvel enseignement va essayer de populariser. D'ailleurs, et pour nous limiter au domaine des Mathématiques, on constate que certains procédés de résolution antérieurs aux traductions étaient tellement familiers aux utilisateurs que des mathématiciens les ont intégrés à leurs manuels, aux côtés des nouveaux procédés, ou bien leur ont tout simplement consacré des manuels indépendants.

La seconde remarque concerne les activités intellectuelles qui ont été suscitées par l'avènement du Coran et du Hadith, d'un côté et, de l'autre, par la promotion de la langue arabe à la faveur de l'expansion de la nouvelle religion et du nouveau pouvoir qui s'exprimaient dans cette langue. Ces activités n'ont pas attendu les traductions parce qu'elles n'avaient pas besoin d'elles. Elles se sont développées sous l'impulsion de facteurs internes à la nouvelle société et ont concerné un corpus et une matière relativement bien délimités. Il n'est pas facile de voir comment ces nouvelles activités intellectuelles ont favorisé les traductions ou les premières initiatives d'enseignement des disciplines scientifiques, d'abord en syriaque puis en arabe. Mais il était nécessaire de les évoquer ne serait-ce que pour mieux appréhender le contexte dans lequel va commencer, tout d'abord, la recherche des manuscrits d'astrologie, d'alchimie ou de médecine puis, dans un second temps, la recherche de textes astronomiques ou leur étude à travers des versions syriaques déjà existantes.

Les activités scientifiques pré-islamiques

La science arabe n'aurait pas eu l'impulsion et la vigueur qu'elle a eu à ses débuts sans l'existence d'un certain nombre de foyers scientifiques qui se trouvaient à l'intérieur des territoires contrôlés par le pouvoir musulman, et qui fonctionnaient bien avant l'avènement de ce pouvoir. Parmi les centres intellectuels sur lesquels il nous est parvenu quelques témoignages, il y a celui d'Alexandrie, en Égypte, celui de Rās-al-ʿayn en Syrie, celui de Gundishāpūr en Perse et ceux d'Antioche et d'Édesse en Asie Mineure (dans les frontières actuelles de la Turquie).

Lorsque l'armée arabe pénètre, en 642, à Alexandrie, la prestigieuse bibliothèque de la ville n'existait plus depuis longtemps.[1] Le général ʿAmr Ibn al-ʿāṣ n'a donc pas pu donner l'ordre de brûler ses livres, sur instruction du calife ʿUmar, comme on peut le lire dans le livre d'Ibn al-Qifṭī (m. 1248) et dans d'autres ouvrages du XIIIe

[1] - P.Casanova : *L'incendie de la bibliothèque d'Alexandrie par les Arabes.* Académie des Inscriptions et Belles Lettres. Compte-rendus des séances de l'année 1923, pp. 163-171 . Cf. également L. Canfora : *La véritable histoire de la bibliothèque d'Alexandrie.* Paris, 1988.

siècle. Il n'a pas non plus rencontré Jean Philippon qui l'aurait informé de l'existence des livres grecs et qui aurait plaidé pour leur préservation.[2]

Ce que l'on sait, par contre, à partir de témoignages fiables, c'est que la ville connaissait, avant l'avènement de l'Islam, une certaine activité scientifique, en particulier dans le domaine de la Médecine et de la Philosophie. Parmi les noms de savants qui nous sont parvenus, on peut citer, pour le VI^e siècle, celui de Jean Philippon (1re moitié du VIe s.) qui a commenté les œuvres d'Aristote, ainsi qu'Alexandre de Tralle (525-605) qui a écrit un ouvrage intitulé *Therapeutica.* Pour le VIIe siècle, on peut citer Paul d'Égine qui pratiquait et enseignait la Médecine à la veille de la conquête de l'Égypte. Il publia également des ouvrages importants dont une encyclopédie en sept livres et un « *Livre sur les maladies des femmes* » .[3] À la même époque, le prêtre Ahrūn publiera à son tour un manuel de Médecine, intitulé « *les Pandectes médicales* » .[4]

Ces activités supposent, bien évidemment un minimum d'échanges scientifiques, des enseignements, ainsi que l'existence de bibliothèques privées plus ou moins spécialisées. Il semble que certaines de ces bibliothèques fonctionnaient encore au IXe siècle puisque le grand traducteur Ḥunayn Ibn Isḥāq (m. 873) y trouvera des manuscrits grecs.[5] Après la conquête de l'Égypte, Alexandrie a continué à être un foyer scientifique grec, comme en témoignent les activités de Paul d'Égine ainsi que celles de Stéphane l'Ancien.[6]

Le second foyer scientifique de la région, qui était en activité à la veille de la conquête musulmane, avait pour pôle Gundishāpūr, ville fondée par le souverain sassanide Khuṣrū Anūsharwān (521-579). La Médecine était également bien implantée dans cette ville, mais l'activité scientifique ne se limitait pas à cette discipline. On sait, par exemple, que les Sassanides avaient accueilli, au VIe et au VIIe siècle, des savants grecs et syriaques chassés par les pouvoirs byzantins de l'époque qui reprochaient à certains d'entre eux leurs activités philosophiques et à d'autres leur adhésion à un Christianisme non officiel. Il semble que cet exode ait été plus important en 529, après la décision de l'empereur Justinien (483-565) de fermer l'Académie d'Athènes. Parmi les scientifiques et les philosophes qui rejoindront

---

2- Cette anecdote semble avoir été publiée pour la première fois par l'historien 'Abd al-Laṭīf al-Baghdādī puis reprise par des auteurs aussi importants qu'Ibn al-'Ibrī, Abū l-Fidī et Ibn al-Qifṭī. Ce dernier rapporte que, lorsque le calife 'Umar a été sollicité par 'Amr Ibn al-'Āṣ pour décider du sort qui devait être réservé aux livres de la fameuse bibliothèque d'Alexandrie, il aurait dit : « *Jette-les à l'eau! S'ils renferment un guide pour la vérité, Dieu nous en a donné un meilleur, et s'ils ne contiennent que des mensonges, Dieu nous en aura débarrassés* » . (Ibn al-Qifṭī : *Ikhbār al-'ulamā' bi akhbār al-ḥukamā'* [Livre qui informe les savants sur la vie des sages]. Beyrouth, Dār al-āthār, non datée. pp. 232-233.). Ce même passage est repris, plus d'un siècle plus tard, par Ibn Khaldūn mais, cette fois, à propos des livres trouvés en Perse, au lendemain de la conquête musulmane (Ibn Khaldūn, *al-Muqaddima.* Trad. française : V. Monteil, Discours sur l'Histoire Universelle. Paris, Sindbad, 1978. pp. 1044-45).

3- Ibn an-Nadīm, *al-Fihrist* [Le Catalogue]. Edit. par R. Tajaddud. Téhéran, 1971. pp. 351.

4- D. Jacquart & F. Micheau : La médecine arabe et l'Occident médiéval. Paris, Maisonneuve & Larose, 1990. pp. 24-25.

5- D. Jacquart & F. Micheau : *La médecine arabe et l'Occident médiéval.* Op. cit. p. 26.

6- Ibn an-Nadīm, *al-Fihrist.* Op. cit. pp. 303.

Gundishāpūr, il y avait sept néoplatoniciens dont Simplicius, le célèbre commentateur d'Aristote et d'Euclide.

On sait aussi que le mécénat de Khuṣrū ne s'est pas limité à l'accueil de savants persécutés puisqu'il y eut aussi, de la part de ce roi, une volonté de développer une tradition scientifique persane. Dans ce but, il aurait fortement encouragé la traduction, en pehlévi, d'ouvrages grecs et sanskrits. Il aurait même, si l'on en croit certains témoignages, envoyé en Inde son propre médecin pour rapporter des manuscrits ou pour les copier.[7]

Un troisième centre scientifique a joué un rôle important dans la préservation de la Science et de la Philosophie et dans leur transmission, même si cette transmission a été indirecte puisque le centre n'existait plus au VII^e^ siècle. Il s'agit d'Édesse dont les activités d'enseignement et de traduction ont commencé dès le III^e^ siècle et se sont poursuivies jusqu'à la fin du V^e^. C'est en effet en 489 que son école sera fermée sur ordre de l'empereur Zénon (475-491), à cause des tendances nestoriennes de ses membres. Ses activités philosophiques et théologiques se déplaceront alors à Nisibe où elles se poursuivront jusqu'au VII^e^ siècle. À cette école se rattachent, directement ou indirectement, des centres qui ont accueilli, à un moment ou à un autre, des savants prestigieux. C'est le cas de certaines villes comme Antioche, Ḥarrān et Rās-al-ʿAyn, ou de monastères et de cloîtres comme celui de Kenesrin.

Les savants qui ont travaillé à Édesse, à Nisibe ou dans les villes et monastères avoisinants ne sont pas tous connus. Mais le peu d'information qui nous est parvenu sur eux nous permet de parler d'une véritable tradition avec une filiation de maîtres à élèves, avec une spécificité linguistique, qui est l'utilisation du Syriaque, et avec une continuité dans l'étude de certaines disciplines, comme la Théologie, la Philosophie, la Logique, la Grammaire et, dans une moindre mesure, les sciences exactes.

Parmi les figures représentatives de cette longue tradition, il y a d'abord Probus (VI^e^ s.), un des premiers traducteurs d'œuvres philosophiques du Grec au Syriaque. Au VII^e^ siècle, il y a Sévère Sebokht (m. 667) qui est originaire de Nisibe et qui a vécu dans le cloître de Kenesrin. Il a traduit et commenté les *Analytiques* d'Aristote, mais il s'est occupé également de science exacte puisqu'il a rédigé un traité sur l'astrolabe et d'autres ouvrages sur l'Astronomie et la Géographie. C'est enfin le premier, à notre connaissance, qui aurait eu quelques connaissances sur le contenu de la tradition scientifique indienne puisqu'il en aurait étudié des éléments d'Astronomie et, surtout, le système décimal positionnel.[8] Sévère Sebokht a eu un certain nombre d'élèves, comme Jacques d'Édesse qui a traduit des traités médicaux de Galien et *les Catégories* d'Aristote et qui était également spécialiste en Grammaire. Il y a aussi Athanase (m. 686) qui a étudié à Kenesrin et qui a traduit, entre autre, *l'Isagoge* de Porphyre. Son travail sera poursuivi par ses élèves dont le plus connu est

7- Ṣāʿid al-Andalusī : *Kitāb ṭabaqāt al-umam* [Le Livre des catégories des nations]. Edit. H. Buʿalwane. Beyrouth, Dār aṭ-ṭalīʿa, 1985. p. 57.

8- F. Nau : Notes d'astronomie syrienne. *Journal Asiatique.* Série 10, t. 16. 1910. p. 225.

Georges des Arabes qui deviendra évêque de Kufa. Ce dernier traduira *l'Organon* et *les Catégories* d'Aristote.[9]

À ces savants, qui constituent une véritable école, il faudrait ajouter d'autres qui, même s'ils n'ont pas eu de liens directs avec les premiers, ont inscrit leurs activités dans la tradition syriaque. C'est le cas de Sergius de Rās al-'Ayn qui traduisit, en Syriaque, 25 ouvrages de Galien et 12 d'Hippocrate ainsi que *la Logique* d'Aristote.

Comme on le voit, l'un des aspects essentiels de cette école, au delà de la diversité de ses préoccupations, a été son activité de traduction qui fera du Syriaque un vecteur incontournable au moment où commenceront les traductions en Arabe. Un autre aspect, qu'il est utile de souligner pour comprendre les orientations ultérieures des activités intellectuelles en pays d'Islam, concerne le contenu de ces traductions. On constate en effet qu'elles concernent essentiellement deux domaines, la Médecine et la Philosophie. Pour cette dernière discipline, il faut remarquer que seule une partie du corpus philosophique grec semble avoir bénéficié de traductions puisque les sources biobibliographiques ne mentionnent que les ouvrages d'Aristote. Quant aux sciences exactes, nous avons trouvé peu de témoignages à leur sujet même si l'utilisation d'ouvrages astronomiques et mathématiques dans les foyers intellectuels syriaques est implicitement confirmée par le témoignage du savant du VIIe siècle Sévère Sebokht.[10]

Les premières traductions et les premières activités scientifiques en pays d'Islam

Dans l'état actuel de nos connaissances, il semble que les premiers ouvrages scientifiques écrits en arabe, et qui concernaient la Médecine et l'Astronomie, ne soient apparus que vers la fin du VIIIe siècle, c'est à dire plus de 150 ans après l'avènement du pouvoir musulman. Que s'est-il donc passé avant cette date dans le domaine scientifique ? D'une manière plus précise, quelles ont été les phases qui ont précédé ces premières publications et quels ont été les facteurs qui ont rendu possible la naissance puis le développement d'une langue scientifique arabe qui sera le vecteur d'un enseignement et d'une recherche renouvelée et à grande échelle? On peut également s'interroger sur le rôle exact des califes et des mécènes privés dans l'impulsion, et ce dès le VIIIe siècle, d'une dynamique de traduction, d'enseignement et de production d'ouvrages scientifiques. Quelle était la nature de ce mécénat, dans quel cadre et dans quel contexte a-t-il été prodigué ? Quels sont enfin les scientifiques qui en ont profité et qui ont été les pionniers de la Science en pays d'Islam ?

Comme on le voit, les questions relatives aux débuts des activités scientifiques en pays d'Islam sont nombreuses et ont toutes une certaine importance. Mais il faut tout de suite reconnaître que, malgré les recherches effectuées sur ces différents

---

9- A. De libera : *La philosophie médiévale*. Paris, Presses Universitaires de France. 1993. pp. 66-67.

10- Cl. Baudoux : *La version syriaque des « Éléments » d'Euclide*. In : Deuxième Congrès National des Sciences. Bruxelles I, 1935. p. 75.

sujets depuis des décennies, les réponses à ces questions restent encore partielles et parfois même inexistantes; ce qui rend difficile et hasardeux toute tentative de reconstitution du contexte de l'avènement de la Science en pays d'Islam, d'abord au cours de sa phase omeyyade (661-750), puis durant le premier siècle abbasside (750-850).

Les premières bibliothèques et leur rôle

Un des premiers phénomènes qui ont précédé et favorisé la naissance d'une tradition scientifique arabe a été la constitution de bibliothèques. Nous savons que dans les villes conquises par les musulmans, il y avait des bibliothèques qui appartenaient à des rois, des princes et peut-être même à des particuliers, mais nous savons peu de choses sur leur contenu exact et sur leur rôle. Certaines d'entre elles ont alimenté le butin des premiers conquérants musulmans. À titre d'exemple, on peut citer le témoignage d'Ibn 'Abd al-Barr qui nous apprend que Ṭāriq Ibn Ziyād, le chef des armées musulmanes en Espagne, avait envoyé au calife omeyyade al-Walīd Ibn 'Abd al-Malik (705-715) 22 exemplaires de la *Bible* ainsi qu'un livre sur les propriétés des pierres, un autre sur la chimie et un troisième sur la culture des jacinthes.[11]

Il semble en fait que, dès le début de la dynastie omeyyade, un certain intérêt pour les livres s'est manifesté chez les califes et les princes. Selon al-Mas'ūdī, c'est Mu'āwiyya (660-680) qui a été le premier à rétribuer des fonctionnaires chargés d'entretenir les livres et les documents de sa bibliothèque et de lui lire, chaque nuit, ceux qui concernaient l'histoire des rois et des guerres.[12]

Mais, c'est avec al-Walīd que la bibliothèque califale commence à se structurer et à acquérir une certaine importance car, en plus des livres qui provenaient des butins de guerre, elle était désormais alimentée par des copies d'ouvrages anciens, réalisées à Damas même ou dans d'autres villes de l'empire, et par les premières traductions d'ouvrages scientifiques ou considérés comme tels à cette époque.

En effet, selon al-Jāḥiẓ (m. 868), c'est le prince Khālid Ibn Yazīd (m. 704) qui a donné la véritable impulsion à ces traductions scientifiques.[13] Les titres des livres traduits pour Khālid ne nous sont pas parvenus, mais nous savons qu'ils concernaient, en particulier, la Médecine, l'Astrologie et surtout la Chimie ou, pour être plus précis, tout ce qui avait trait aux techniques visant à réaliser la transmutation des métaux en or. Cette information est d'ailleurs confirmée par Ibn an-Nadīm qui nous apprend que Khālid Ibn Yazīd avait fait venir d'Égypte un groupe de philosophes et qu'il les avait chargés de traduire des livres de Chimie, du Grec et du Copte à l'Arabe. Parmi ces traducteurs, l'auteur du *Fibrist* cite le nom de Stéphane l'Ancien en précisant que « *ce fut là les premières traductions d'une langue à une*

11- Ibn 'Abd al-Barr : *al-Qaṣd wa l-īmān* [L'intention et la foi]. Le Caire, 1931, p. 34. Cité par Y. Eche : *Les bibliothèques arabes publiques et semi-publiques au Moyen-Orient*. Damas, 1967.

12- Al-Mas'ūdī : *Murūj adh-dhahab* [Les prairies d'or]. Beyrouth, Dār al-kutub. 1967. Vol. II, p. 24.

13- Al-Jāḥiẓ: *Kitāb al-bayān wa t-tabyīn* [Le Livre de la preuve et de la clarification]. Le Caire 1895. Vol. I, p. 260.

autre qui eurent lieu en Islam ».[14] De son côté, Ibn Juljul (m. 995) nous apprend que le sixième calife omeyyade, 'Umar Ibn 'Abd al-'Azīz (717-720) aurait eu également des traducteurs parmi lesquels Māsarjawayh qui lui traduisit, du Syriaque, le livre de médecine de Ahrūn, les *Pandectes médicales* dont le titre arabe sera *al-Kunnāsh*.[15] Pour la même époque, Ibn an-Nadīm cite un troisième traducteur nommé Ibn Qusṭunṭīn sans préciser le contenu de sa production.[16]

Avec l'avènement du califat abbasside, le phénomène de traduction va se poursuivre et se diversifier. En effet, en plus des ouvrages de médecine que le calife al-Manṣūr aurait fait traduire par Jurjus Ibn Jibrīl et par al-Baṭrīq , il aurait également financé la traduction, par Ibn al-Muqaffa', de trois des livres de Logique d'Aristote et de *l'Isagoge* de Porphyre, ainsi que d'un ouvrage astronomique indien, le *Sindhind*, qui sera traduit par Muḥammad al-Fazārī. L'historien des sciences du XI^e^ siècles,
Ṣā'id al-Andalusī, nous a d'ailleurs conservé le témoignage de l'astronome Ibn al-Ādamī qui dit, dans son livre *Niṭām al-'iqd* : « *En 156, se présenta, auprès du calife al-Manṣūr, un homme de l'Inde qui était savant dans le calcul du Sindhind relatif au mouvement des étoiles avec des équations établies à partir de tables calculées de demi degré en demi degré, avec différentes opérations astronomiques, les deux éclipses, l'ascension des divisions du zodiaque et d'autres choses, "contenues" dans un livre comprenant douze chapitres (...). Al-Manṣūr ordonna de le traduire en Arabe et d'en rédiger un livre que les Arabes prendraient pour base dans "l'étude" des mouvements des astres* ».[17]

Les premiers écrits scientifiques en Arabe

La seconde activité qui a alimenté les bibliothèques des califes et des princes a été la rédaction d'ouvrages qui concernaient à la fois des disciplines littéraires, comme la Grammaire et la Poésie, religieuses comme l'exégèse du Coran et du Ḥadith, et des domaines scientifiques comme la Chimie, la Médecine et l'Astronomie. Pour ce qui est des disciplines scientifiques, ce phénomène semble avoir eu lieu parallèlement à celui des traductions, mais pour toutes les autres disciplines il a été antérieur à elles[18]. Ibn an-Nadīm nous dit, par exemple, en parlant de Khālid Ibn Yazīd, « *j'ai vu de ses livres, le livre des chaleurs, le grand livre de la Ṣaḥīfa, le petit livre et son livre de recommandation à son fils au sujet de l'Art "de la transmutation"* ».[19]

En Médecine, les premiers livres en Arabe, comme celui de Georgius Abū Bakhtishū', ont été écrits à l'époque d'al-Manṣūr.[20] C'est également sous l'impulsion

[14]- Ibn an-Nadīm : *Al-Fihrist*. Op. cit., p. 355.

[15]- Ibn Juljul : *Ṭabaqāt al-aṭibbā' wa l-ḥukamā'* [Classes des médecins et des sages]. Edit. Fuad Sayyid. Le Caire, Imprimerie de l'Institut français d'archéologie orientale, 1955. p. 61.

[16]- Ibn an-Nadīm : *Al-Fihrist*. Op. cit., p. 355.

[17]- Ṣā'id al-Andalusī : *Kitāb ṭabaqāt al-umam*. Op. cit., pp. 130-132.

[18]- F. Sezgin : *Geschichte des arabischen Schrifttums* . Band I. Leiden, Brill, 1967.

[19]- Ibn an-Nadīm : *Al-Fihrist*. Op. cit., p. 419.

[20]- Ṣā'id al-Andalusī : *Kitāb ṭabaqāt al-umam*. Op. cit., p. 101.

de ce calife que Muḥammad al-Fazārī rédigera son ouvrage d'astronomie, intitulé *as-Sindhind al-kabīr,* à partir de la traduction qu'il avait faite du livre indien offert à al-Manṣūr et que nous avons déjà évoqué. C'est également à cette époque que Māshā'allāh a commencé à publier ses ouvrages d'Astrologie qui utilisent des techniques astronomiques, ce qui suppose déjà une certaine maîtrise des outils classiques de cette science.[21] Mais nous ne savons rien sur la formation de cet astrologue célèbre ni d'ailleurs sur celle d'al-Fazārī et nous n'avons aucune information sur les premières institutions d'enseignement en Arabe.

La période de Bayt al-ḥikma

Tous les spécialistes s'accordent pour dire que Bayt al-ḥikma [Maison de la sagesse] de Bagdad a été la première institution d'état en pays d'Islam qui a réuni des savants de différentes disciplines et de différentes opinions : des traducteurs, des philosophes, des astronomes, des mathématiciens et même, à une certaine époque, des théologiens. Mais, lorsqu'on veut dater avec précision la création de cette institution, on se heurte à certaines difficultés liées essentiellement à la rareté des témoignages historiques et à leur caractère parfois imprécis ou contradictoires. C'est la raison pour laquelle on a dit, pendant longtemps, que c'était le calife al-Ma'mūn (813-833) qui a été le premier fondateur de cette institution. Pourtant, l'étude comparative de toutes les sources aujourd'hui disponibles et qui évoquent directement ou indirectement ce sujet, permet d'avancer la date de création de Bayt al-ḥikma et de la situer à l'époque de Hārūn ar-Rashīd (786-809).

En effet, c'est durant le règne de ce calife que l'on commence à parler d'une institution scientifique portant le nom de Bayt al-ḥikma ou de Khizānat al-ḥikma.[22] Dans son *Fihrist,* Ibn an-Nadīm nous donne même des précisions sur les activités qu'elle renfermait. On sait, par exemple, qu'on y copiait des ouvrages pour Hārūn ar-Rashīd et pour certains membres de la puissante famille des Barāmika. On sait aussi qu'on y traduisait, pour le calife, des ouvrages d'Astronomie et de Philosophie écrits en persan.[23] On y a également traduit certains ouvrages philosophiques d'Aristote, comme les *Catégories* et les *Analytiques.*[24]

Il semble qu'à cette époque, Bayt al-ḥikma ait fonctionné essentiellement comme une bibliothèque dont le fond était alimenté par quelques documents rares et surtout par des ouvrages provenant de différentes sources : copies de livres nouveaux qui commençaient à se publier, traductions d'ouvrages persans, syriaques ou grecs et parfois même exemplaires anciens d'ouvrages faisant partie des butins de guerre.

21- F. Sezgin : *Geschichte des arabischen Schrifttums*. Band VII, 1978. Op. cit. pp. 102-108.

22- Pour la dernière mise au point sur l'histoire de Bayt al-ḥikma, voir : M.-G. Balty-Guesdon : *Le Bayt al-ḥikma de Baghdad.* Mémoire de D.E.A. Université de Paris III-Sorbonne Nouvelle. 1985-86.

23- Ibn an-Nadīm : *Al-Fihrist.* Op. cit., pp. 118, 333.

24- M.-G. Balty-Guesdon : *Le Bayt al-ḥikma de Baghdad.* Op. cit., pp. 34-35.

Quoi qu'il en soit, un nombre de plus en plus important d'ouvrages d'Astronomie et de Mathématiques grecques deviennent accessibles à travers leurs versions originales et sont rapidement traduits en arabe. C'est le cas de *l'Almageste* de Ptolémée et des *Éléments* d'Euclide.[25]

Il n'est pas étonnant que l'on dispose de plus d'informations au sujet des activités scientifiques de Bayt al-ḥikma à l'époque d'al-Ma'mūn car les vingt ans de règne de ce calife représentent, pour les sciences, à la fois un développement quantitatif et, pour certains domaines, un saut qualitatif qui n'ont pas d'équivalent dans toute l'histoire de la civilisation arabo-islamique.

À travers les différents rôles qu'elle a eu à assumer durant ces deux décennies, le Bayt al-ḥikma va constituer un élément moteur pour les activités scientifiques, philosophiques et même théologiques qui étaient en train de naître ou de se développer.

Durant cette période, le Bayt al-ḥikma a continué à jouer son rôle de bibliothèque califale en conservant les livres et en les copiant, mais on constate que son caractère privé disparaît peu à peu puisqu'elle commence à être fréquentée par des intellectuels.

Les livres qui alimentaient la bibliothèque provenaient de différentes sources : ceux qui étaient écrits en arabe étaient des copies ou des dons que les auteurs faisaient directement au calife. Dans cette catégorie, on peut citer la seconde version des *Éléments* d'Euclide faite par al-Ḥajjāj Ibn Maṭar, ou bien le fameux livre d'algèbre d'al-Khwārizmī, *al-Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa l-muqābala* [l'Abrégé du calcul par le jabr et la muqābala].[26] Quant aux ouvrages écrits en syriaque, en persan ou en grec, ils étaient achetés ou empruntés en vue d'être traduits. On sait d'ailleurs, d'après le témoignage d'Ibn an-Nadīm, que le calife al-Ma'mūn intervint personnellement, auprès de l'empereur de Byzance Léon V (813-820), pour lui demander de lui envoyer des ouvrages de philosophie et de science. On sait aussi qu'une véritable mission scientifique a été envoyée à Byzance, peu avant 815, pour choisir les ouvrages qui devaient être empruntés en vue d'une traduction en arabe. Parmi les membres de cette mission, Ibn an-Nadīm cite Salm, le premier directeur du Bayt al-ḥikma et deux traducteurs, Yaḥyā Ibn al-Baṭrīq et al-Ḥajjāj Ibn Maṭar.[27]

Le second rôle du Bayt al-ḥikma, peut-être le plus important, est en relation avec les activités de traduction. Il semble en effet que cette institution ait été un élément moteur dans ce domaine en stimulant et en organisant, dans ses murs, différentes activités centrées sur la production d'ouvrages scientifiques et philosophiques. Nous savons, par exemple, que Ḥunayn Ibn Isḥāq, le plus grand traducteur de son époque, a été le responsable de la traduction à Bayt al-ḥikma. Il l'a été d'abord sous le règne d'al-Ma'mūn puis sous celui d'al-Mutawakkil (847-861). Nous savons également qu'il

---

25- Ibn an-Nadīm : *Al-Fihrist*. Op. cit., pp. 325, 327.

26- Al-Khwārizmī : *al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa l-muqābala*. Edit. A.M. Mashrafa et M.M. Ahmad. Le Caire, 1968.

27- Ibn an-Nadīm : *Al-Fihrist*. Op. cit., p. 304.

dirigeait toute une équipe de traducteurs dont les plus éminents étaient Étienne Ibn Bāsil, Musā Ibn Khālid et Yaḥyā Ibn Hārūn.

Les initiatives prises par Bayt al-ḥikma en faveur des traductions vont favoriser, à Bagdad même et dans d'autres villes de l'empire musulman, d'autres initiatives du même type, mais privées cette fois, concernant la collecte de manuscrits, leur traduction et leur copie. On sait par exemple que Ṭāhir Ibn al-Ḥusayn, un personnage important de l'époque, commande à Abū Qurra des traductions de commentaires d'ouvrages d'Aristote, et que le gouverneur d'Égypte, Isḥāq Ibn Sulaymān demande à Ḥunayn Ibn Isḥāq la traduction de quatre ouvrages médicaux de Galien. De son côté, 'Ali ibn Yaḥyā Ibn Abī Manṣūr, qui s'intéressait particulièrement à la Médecine, à la Géométrie et à la Musique, a consacré des sommes importantes à la traduction d'ouvrages grecs. Les meilleurs traducteurs de son époque, comme Ḥunayn Ibn Isḥāq et Ḥubaysh, ont travaillé pour lui, mais d'autres traducteurs moins connus ont également été sollicités par lui comme nous le dit Ibn Abī Uṣaybi'a qui donne les noms de ceux d'entre eux qui étaient des médecins.[28]

À côté des mécènes fortunés qui commandaient des traductions pour alimenter leurs bibliothèques, il y avait des chercheurs qui faisaient traduire des textes pour leur besoin propre. C'est ainsi que 'Abd al-Masīḥ Ibn Nā'ima traduira des livres de philosophie pour le grand philosophe al-Kindī (m. 850) et que les frères Banū Mūsā, des spécialistes en Géométrie et en Mécanique, feront travailler Ḥunayn Ibn Isḥāq, Ḥubaysh, Hilāl Ibn Abī Hilāl al-Ḥimṣī et Thābit Ibn Qurra, c'est à dire les traducteurs scientifiques les plus qualifiés de leur époque. Le mécénat des frères Banū Mūsā est d'ailleurs exemplaire comme nous le précisent les biobibliographes arabes. En effet, selon le témoignage d'Ibn an-Nadīm, c'est Muḥammad, l'aîné des trois frères, qui a d'abord pris l'initiative de voyager lui-même dans les territoires byzantins pour acheter les manuscrits scientifiques anciens. Ibn Abī Uṣaybi'a nous apprend même que « *au cours d'un de ses voyages, il se fit accompagner par Thābit Ibn Qurra* » , le plus grand mathématicien du IX^{e} siècle, qui lisait parfaitement le Grec, comme il nous le dit lui-même dans sa révision des *Éléments* d'Euclide.[29] Puis, avec ses frères, Muḥammad recherchera les meilleurs traducteurs et il les installera à Bagdad en finançant généreusement à la fois les traductions et les travaux originaux que certains d'entre eux réalisaient dans leurs domaines respectifs.

Le troisième rôle joué par Bayt al-ḥikma, à l'époque d'al-Ma'mūn, a été celui d'un lieu de débat entre savants de différentes disciplines. Les témoignages qui nous sont parvenus ne laissent aucun doute à ce sujet. On sait ainsi que ces débats avaient lieu au moins une fois par semaine, parfois avec la participation active du calife al-

---

28- Ibn Abī Uṣaybi'a : '*Uyūn al-anbā' fī ṭabaqāt al-aṭibbā'*. Edit. Nizar Rida. Beyrouth, Dār maktabat al-ḥayāt, non datée p. 283.

29- Ms. Oxford, Thurston 11.

Ma'mūn lui-même. Le juriste 'Abd al-'azīz al-Kinānī, qui a assisté à certaines de ces séances, nous précise que l'assistance était composée de spécialistes du Ḥadith, de juristes, de lexicographes et de philosophes spécialisés dans le Kalām. On sait également que les débats portaient sur des questions scientifiques, philosophiques ou théologiques.[30]

Le quatrième et dernier rôle de Bayt al-ḥikma a été celui d'un centre scientifique relativement spécialisé. En effet, les historiens associent souvent cette institution aux activités astronomiques et mathématiques de cette époque, sans toutefois donner d'informations précises sur la nature du travail qu'on y faisait et sur l'identité de tous les chercheurs qui l'ont fréquentée. Parmi les scientifiques qui semblent y avoir travaillé régulièrement, il y a d'abord Yaḥyā Ibn Abī Manṣūr, un astronome important du IXe siècle qui a joué un rôle non négligeable dans la naissance d'une véritable tradition scientifique arabe, à la fois par sa participation aux activités de Bayt al-ḥikma, par son mécénat et par sa propre production scientifique.[31] D'ailleurs ses qualités scientifiques vont amener le calife al-Ma'mūn à le nommer à la tête d'une équipe d'astronomes qui fut chargée de faire des observations et des mesures en vue de vérifier et de corriger éventuellement les données que renfermaient les ouvrages astronomiques anciens, comme le *Sindhind* et l'*Almageste* de Ptolemee.

Le second savant qui a travaillé à Bayt al-ḥikma est le célèbre al-Khwārizmī qui est plus connu pour son livre d'algèbre mais qui était également un spécialiste en Astronomie et en Science du calcul. On ne lui connaît pas de rôle dans le mécénat scientifique et nous ne savons pas s'il a enseigné à Bayt al-ḥikma et s'il y a eu des élèves. Mais sont rôle est indéniable dans le développement de trois disciplines : le calcul indien, l'Algèbre et l'Astronomie. Les livres qu'il a publiés dans ces trois domaines ont marqué durablement les traditions mathématiques et astronomiques en pays d'Islam et, à partir du XIIe siècle, les traditions latine et hébraïque de l'Europe médiévale.[32]

Les traductions des IXe-Xe siècles

Malgré ce que nous avons dit sur les activités intellectuelles qui ne doivent rien à l'héritage des civilisations antérieures, il est indéniable que c'est le phénomène de traduction qui va constituer le véritable moteur de la nouvelle dynamique scientifique que l'on va observer à partir de la fin du VIIIe siècle. Il nous a donc semblé utile de dire, même brièvement, quelques mots sur les hommes qui ont été ses véritables acteurs et sur certains aspects de leur activité de traduction.

30- M.-G. Balty-Guesdon : *Le Bayt al-ḥikma de Baghdad.* Op. cit., pp. 42-44.

31- E.S. Kennedy : *Studies in the islamic exact sciences.* Beyrouth, Université américaine, 1983. pp. 184-185.

32- G.J. Toomer : *Al-Khwārizmī.* In : *Dictionary of Scientific Biography* (Ch. C. Gillespie, édit). New-York, Scribner's Sons, 1981. Vol. VII, pp. 358-365.

Sur le plan quantitatif, on estime à près d'une centaine le nombre de traducteurs répertoriés par les biobibliographes durant les deux siècles qui nous intéressent ici. Ibn an-Nadīm cite les noms de 45 d'entre eux qui ont traduit du Grec ou du Syriaque. Il donne également les noms de 16 traducteurs du Persan, de deux traducteurs du Sanskrit et d'un seul qui aurait traduit à partir du Nabatéen. D'autres biographes citent d'autres noms ou bien évoquent des traductions d'ouvrages sans préciser les noms de leurs auteurs. C'est le cas d'Ibn Juljul qui signale des traductions du Latin à l'Arabe, comme le *Livre des plantes* de Dioscoride (traduit par Nicolas), les *Aphorismes* d'Hippocrate traduit à l'époque de 'Abd ar-Raḥmān II (826-852), ou le livre de Paulus Orosius traduit pour la calife 'Abd ar-Raḥmān III (912-961), sans parler des ouvrages traduits avant le Xe siècle, comme la *Chronique* de Saint Jérôme (IVe s.) et les *Etymologies* d'Isidore de Séville (570-636).[33]

Sur le plan qualitatif, les traductions des IXe-Xe siècles se rattachent à plusieurs traditions bien distinctes : grecque, persane, indienne, syriaque et même babylonienne pour certains écrits astrologiques.[34] On y constate également des différences quant à la technique des traductions et à la qualité de leurs résultats. Pour nous limiter au domaine mathématique, nous constatons que les premières traductions n'ont pas été jugées satisfaisantes par les spécialistes de chacune des disciplines concernées. Parlant de la traduction des tables astronomiques indiennes, al-Bīrūnī (m. 1058) disait : « *J'ai corrigé le Zīj al-Arkand et je l'ai écrit avec mes propres termes car la traduction existante était incompréhensible et les mots indiens y étaient restés tels quels* ».[35] De son côté an-Nayrīzī nous dit, dans son commentaire des *Éléments* d'Euclide, à propos des traductions de cet ouvrage par al-Ḥajjāj, que ce dernier a dû en réaliser une seconde traduction et « *a abandonné la première version telle quelle aux gens du commun* ».[36] Quelques décennies plus tard, cette seconde traduction sera elle-même jugée insuffisante puisque Isḥāq Ibn Ḥunayn éprouvera le besoin d'en réaliser une troisième qui sera révisée par le mathématicien Thābit Ibn Qurra.

Un autre exemple significatif nous est fourni par *l'Almageste* de Ptolémée (IIIe s.). Ibn an-Nadīm nous dit que cet important ouvrage, qui a été la base de l'Astronomie en pays d'Islam, a bénéficié, probablement dès la seconde moitié du VIIIe siècle, d'une première traduction qui a été jugée non satisfaisante et qui a été très vite remplacée par une seconde traduction commandée par Yaḥyā Ibn Khālid al-Barmakī. Cette traduction sera révisée, une première fois, par Abū l-Ḥasan et par Salm, le directeur du Bayt al-ḥikma et, une seconde fois, par Thābit Ibn Qurra. Une

33- Ibn Juljul : *Ṭabaqāt al-aṭibbā' wa l-ḥukamā'* [Classes des médecins et des sages]. Edit. Fuad Sayyid. Le caire, 1955. Introduction, pp. 1-4.

34- À titre d'exemple, on peut signaler le livre de Dhawānāy al-Bābilī qui sera le premier livre traduit par Ibn Waḥshiyya. Cf. : F. Sezgin : *Geschichte des arabischen Schrifttums* . Band VII, 1978. Op. cit. p. 77.

35- Al-Bīrūnī : *Ifrād al-maqāl fī amr aẓ-ẓilāl* [propos consacré au problème des ombres]. Haidarabad, 1948. p. 141.

36- Ms. Leiden, Or. 399/1e, f. 1b.

troisième traduction sera réalisée par al-Ḥajjāj Ibn Maṭar puis une quatrième par Isḥāq Ibn Ḥunayn.[37]

Ces traductions successives s'expliquent d'abord par le progrès enregistré dans les activités mathématiques et qui va entraîner un enrichissement de l'Arabe scientifique et, par voie de conséquence, une plus grande exigence quant à la fidélité au contenu des sources traduites. Une autre raison peut expliquer la multiplication ou l'amélioration des traductions : c'est la découverte de nouveaux manuscrits. Pour les Mathématiques, on peut citer le cas de Naṭīf al-Mutaṭabbib qui avait projeté de retraduire le Livre X des *Éléments* à partir d'une version grecque qui contenait 149 propositions (alors que les traduction antérieures n'en contenaient que 105 (dans la seconde version d'al-Ḥajjāj) et 109 (dans celle d'Isḥāq-Thābit).[38]

Pour la Philosophie, nous avons le précieux témoignage d'Isḥāq Ibn Ḥunayn qui dit, à propos de ses traductions successives du Livre de l'âme d'Artistote : « *J'avais traduit ce livre en Arabe à partir d'une mauvaise copie. Trente ans après, j'ai trouvé une copie des plus parfaites. Je l'ai alors comparée à la première traduction* » .[39]

Les autres facteurs du développement scientifique en pays d'Islam

Jusqu'ici, nous n'avons évoqué qu'un seul facteur, le mécénat, pour expliquer la naissance d'une dynamique scientifique; mais, avec l'avènement de Hārūn ar-Rashīd, et surtout à partir de la fin de son règne, trois autres facteurs vont accélérer ce processus complexe qui aboutira, aux IX^e-X^e siècles à une véritable floraison scientifique, d'abord dans le Croissant fertile puis dans d'autres régions du Dār al-Islām.

Le premier facteur est à la fois économique et politique : avec le contrôle du commerce international par le pouvoir musulman, la capitale du califat, Bagdad, connaîtra très vite une réelle prospérité et deviendra un pôle très attractif pour tous ceux qui avaient un savoir-faire, comme les architectes, les médecins, les astrologues et les poètes de cours. Certains de ces spécialistes arrivaient à Bagdad avec des ouvrages rares qui étaient vendus aux mécènes fortunés ou qui étaient prêtés à des copistes et à des traducteurs. La ville persane de Gundishāpūr offre d'ailleurs un bon exemple d'un centre scientifique qui était dominant jusqu'au milieu du VIII^e siècle et qui, à partir de cette date, va lentement décliner à cause du départ vers Bagdad de ses meilleurs spécialistes, en particulier en Médecine et en Pharmacologie.[40]

Le second facteur est culturel et il concerne les activités non scientifiques qui ont accompagné, et parfois même précédé, les activités de traduction. On sait en effet qu'à ses débuts, la dynamique scientifique arabe n'était qu'une composante d'un phénomène intellectuel large et multiforme qui s'est d'abord manifesté par des

---

[37]- Ibn an-Nadīm : *Al-Fibrist.* Op. cit., p. 327.
[38]- Op. cit. p. 325.
[39]- Op. cit. p. 312.
[40]- D. Jacquart & F. Micheau : *La médecine arabe et l'Occident médiéval.* Op. cit., pp. 29, 35.

recherches antérieures aux traductions et donc indépendantes d'elles, comme celles qui ont concerné l'exégèse du Coran et la science du Ḥadith ou celles qui ont concerné la Grammaire, la Lexicographie et la Métrique, c'est à dire toutes les disciplines qui ont un lien direct avec la langue arabe.

Le troisième facteur pourrait être qualifié de matériel. Il s'est manifesté sous le règne de Hārūn ar-Rashīd mais ses effets ne seront visibles, à l'échelle de la société, que sous le califat d'al-Ma'mūn. Il s'agit de la naissance de l'industrie du papier, avec la construction des premières fabriques en pays d'Islam, d'abord à Samarcande puis à Bagdad. La diffusion à grande échelle de ce nouveau produit n'a pu que favoriser la multiplication et la circulation des ouvrages qui avaient été traduits et ceux qui commençaient à être rédigés et dont le nombre allait considérablement augmenter au IXe siècle.

À ces trois facteurs que nous venons d'évoquer, il faudrait ajouter deux autres qui vont accompagner l'activité scientifique dans son ensemble et qui joueront un rôle important dans la diffusion de ses résultats. Il s'agit du développement de l'enseignement et de la multiplication des bibliothèques.

La première période qui s'achève vers le milieu du XIe siècle est caractérisée par un enseignement supérieur largement privé et dans lequel la puissance publique intervient essentiellement par le mécénat. Sur le plan du contenu, c'est la période de la liberté des programmes, permettant ainsi aux sciences « rationnelles » , comme la Philosophie, les Mathématiques, l'Astronomie, la Physique et la Médecine, d'avoir une place privilégiée dans cet enseignement, et ce après l'impulsion décisive dont elles ont bénéficié au IXe siècle à travers les activités de Bayt al-ḥikma. Cette impulsion initiale sera soutenue pendant une cinquantaine d'années par l'idéologie officielle du califat, le Mu'tazilisme, dont les adeptes étaient favorables au développement des sciences rationnelles.

C'est également durant cette période que vont se multiplier les bibliothèques privées, semi-publiques ou publiques. Certaines d'entre elles se spécialiseront dans des disciplines bien déterminées et la majorité d'entre elles sera ouverte aux étudiants et aux chercheurs qui y trouveront les livres inaccessibles à leurs bourses et parfois même le papier et l'encre pour en faire des copies. Mais, en plus de leur vocation première, certaines de ces bibliothèques seront des centres d'enseignement supérieur relayés, pour certaines disciplines, par des institutions spécialisées comme les laboratoires, les observatoires ou les hôpitaux.[41]

L'exemple des Mathématiques

Les premiers travaux mathématiques comportant une certaine originalité sont apparus dès le début du IXe siècle et sans attendre la fin de la période de traduction, puisque l'on sait que certains ouvrages grecs, comme les *Arithmétiques* de Diophante

41- Y. Eche : *Les bibliothèques arabes publiques et semi-publiques au Moyen-Orient.* Op. cit.

ou les commentaires sur le Livre X des *Éléments* d'Euclide ne seront traduits qu'au début du X^e^ siècle.

Les mathématiciens de la première phase vont partir de problèmes déjà traités par les Grecs ou par les Indiens. Ils vont d'abord les assimiler, les commenter, les critiquer parfois et en faire des révisions ou proposer des développements techniques ou théoriques. Pour la tradition mathématique grecque, ils vont compléter des preuves inachevées, contester la validité de certains postulats ou de certaines définitions, puis ils vont tenter de les remplacer par d'autres, à leurs yeux plus satisfaisants et, enfin, démontrer des propositions que leurs prédécesseurs n'avaient fait qu'énoncer. Pour la tradition indienne et pour l'héritage babylonien, les mathématiciens des pays d'Islam vont faire un premier travail de synthèse qui va ouvrir la voie à des extensions à la fois techniques et théoriques et à des innovations dans le domaine de la Science du calcul, de l'Algèbre et de la Trigonométrie.

Il en sera ainsi par exemple pour les équations qui commenceront par la systématisation proposée par al-Khwārizmī, Ibn Turk et d'autres, qui consacrent la naissance d'une nouvelle discipline, avec ses objets, ses algorithmes et son domaine d'application. Puis, à partir du X^e^ siècle, on voit apparaître des études nouvelles concernant les polynômes en tant que tels. Cela consistera en un enrichissement du domaine de l'Algèbre par l'extension des notions de monômes, de polynômes, d'équations et de nombres intervenant dans ces équations. Mais cela consistera également en une extension des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine) aux monômes et aux polynômes. Parmi les savants qui ont contribué à ces progrès, on peut citer Abū Kāmil (m. 930), Sinān Ibn al-Fatḥ (X^e^ s.) , al-Karajī (m. 1029) et as-Samaw'al (m. 1175).[42]

Ces activités novatrices vont s'accompagner par des tentatives de résolution de problèmes géométriques qui aboutiront à des équations du 3^e^ degré. Al-Māhānī a été ainsi le premier à algébriser une proposition du livre d'Archimède sur la *Sphère et le cylindre* et à tenter vainement de résoudre l'équation du 3^e^ degré qui en a résulté. À partir de là, de nouvelles recherches seront entreprises, en particulier par Abū l-Jūd (X^e^ s.) et par al-Khayyām (m. 1139). Ces recherches aboutiront à l'élaboration par ce dernier d'une théorie géométrique des équations cubiques.[43]

En Astronomie, l'innovation a été permise grâce à la synthèse préalable des deux traditions grecque et indienne que nous avons déjà évoquées. Elle s'est manifestée, dans le domaine technique, par l'amélioration ou l'invention de nombreux instruments de mesure, d'orientation ou d'observation et, dans le domaine théorique, par l'invention ou le perfectionnement de certaines méthodes d'approximation, l'élaboration ou l'utilisation de modèles planétaires non-

[42]- A. Djebbar : *Quelques aspects de l'Algèbre dans la tradition mathématique arabe d'Orient.* Université d'été de Toulouse, 6-12 Juillet 1986. In : Actes de l'Université d'été sur l'Histoire des Mathématiques. Toulouse, I.R.E.M. 1988, pp. 257-286.

[43]- R. Rashed & A. Djebbar : *L'oeuvre algébrique d'al-Khayyām.* Alep, Institut for the History of Arabic Sciences. 1981.

ptoléméens[44] et l'enrichissement progressif des premiers outils trigonométriques qui va aboutir à la constitution d'une nouvelle discipline : la Trigonométrie.

Cette discipline aura comme point de départ les premières tables indiennes de sinus et de cosinus, puis ces deux premières fonctions vont être complétées par d'autres, que la pratique astronomique va suggérer, et qui sont la tangente, la cotangente, le sinus verse et le cosinus verse. Puis, les spécialistes vont établir toute une série de relations entre ces différentes fonctions ou entre les éléments d'un triangle sphérique. Cela va permettre à l'Astronomie classique de se libérer de certaines contraintes de calcul, comme celles qui résultaient de la manipulation du théorème de Menelaüs (Ier s. av. J.C.). Ce développement quantitatif va entraîner une autonomie de fait de ce qui n'était, pendant longtemps, qu'un ensemble d'outils dispersés. Cette autonomie, qui mettra du temps à se concrétiser, commencera à prendre forme au XIe siècle, comme le montre l'ouvrage d'al-Bīrunī (m. 1058), *Maqālīd ʿilm al-hay'a* [Les Clefs de l'Astronomie] et, un peu plus tard, celui de l'andalou d'al-Jayyānī (m. 1079), intitulé *Kitāb majhūlāt qisiyy al-kura* [Livre sur les arcs inconnus de la sphère].

En Analyse Combinatoire, ce sont des préoccupations liées à la Poésie et à la Linguistique arabe qui ont provoqué les premières investigations. En effet, les calculs de nature combinatoire apparaissent d'abord en Métrique, en Musique, en Lexicographie et en Grammaire. Puis le développement de l'Astronomie, de l'Algèbre et de la Théorie des nombres va révéler un certain nombre de problèmes de dénombrement, préparant ainsi la voie à l'établissement des premières propositions combinatoires. Ces propositions feront l'objet d'un chapitre autonome dans un livre maghrébin du XIIIe siècle, l*e Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Munʿim (m. 1228), et seront utilisées après lui comme instruments de dénombrement en Arithmétique et en Algèbre.[45]

En Théorie des nombres, les recherches se sont orientées dans trois directions : la première concerne les nombres premiers. Elle a débuté avec les travaux de Thābit Ibn Qurra (m. 901) sur les nombres amiables et s'est poursuivie avec ceux d'Ibn al-Haytham sur le théorème de Wilson et ceux d'al-Fārisī sur les parties aliquotes d'un nombre.[46] La seconde direction, suggérée par l'étude des *Arithmétiques* de Diophante, suscitera des recherches sur la résolution des systèmes d'équations indéterminées à solutions entières ou rationnelles et sur les triplets pythagoriciens et les nombres

---

[44]- B.R. Goldstein : *Theory and Observation in Ancient and Medieval Astronomy*, Londres 1985. Variorum. Cf. également : E.S. Kennedy : *Studies in the Islamic Exact Sciences*. American University of Beirut, 1983. D.A. King : The exact Sciences in Medieval Islam, Some remarks on the Present State of Research, *Middle East Studies Association Bulletin*, 14 (1), pp. 10-26. G. Saliba : A Damascene Astronomer proposes a non-Ptolomaic Astronomy, *Journal for the History of Arabic Science*. Alep, Vol. 4 n°1, 1984, partie arabe, pp. 3-17.

[45]- A. Djebbar : *Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIe-XIVe siècles*. Paris, Publications Mathématiques d'Orsay, 1980, n° 81-02. Cf. également : A. Djebbar : *L'analyse combinatoire au Maghreb : l'exemple d'Ibn Munʿim*. Publications Mathématiques d'Orsay, n° 85-01. Orsay, Université de Paris-Sud. 1985.

[46]- R. Rashed : *Entre Arithmétique et Algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris, Les Belles lettres, 1984. pp. 227-299.

congruents.[47] La troisième direction concerne l'étude des suites et des séries finies qui sont apparues d'abord dans le calcul des surfaces et des volumes, par la méthode d'exhaustion, puis dans la recherche des propriétés des nombres figurés.[48]

En Géométrie, une première tradition est partie des problèmes de constructibilité des points et des figures du plan : c'est après avoir été souvent confrontés à des problèmes non constructibles que certains mathématiciens des pays d'Islam ont été amenés à élargir (à la suite de quelques savants grecs) la notion d'existence géométrique ou algébrique par l'utilisation systématique des sections coniques. Cela aboutira, en particulier, à la résolution géométrique des équations cubiques que nous avons déjà évoquée.[49] Une seconde tradition s'est attaquée à des problèmes de mesure (surfaces, volumes, moment d'inertie) et a constitué un prolongement aux travaux d'Archimède.[50] La troisième et dernière tradition, qui est née d'une lecture critique des *Éléments* d'Euclide, va permettre l'élaboration d'une réflexion nouvelle sur les fondements de la Géométrie (en particulier autour du 5^e^ postulat des parallèles)[51], la redéfinition du concept de rapport qui aidera à dégager clairement la notion de nombre réel positif et, enfin, l'extension des opérations arithmétiques aux irrationnels positifs.[52] Parallèlement, deux autres types de réflexion ont été amorcés : l'un sur les outils de la démonstration mathématique (induction, raisonnement par l'absurde, analyse et synthèse) et l'autre sur la classification des problèmes en fonction du nombre de leurs solutions.[53]

47- J. Sesiano : Les méthodes d'analyse indéterminée chez Abū Kāmil, *Centaurus* 1977, Vol. 21, n°2, pp. 89-105. Cf. également : J. Sesiano : Le traitement des équations indéterminées dans le Badīʿ fī l-ḥisāb d'Abī Bakr al-Karajī. *Archive for the History of Exact Sciences*, Vol. 17, n°4, 1977, pp. 297-379. A. Anbouba : *L'algèbre al-Badīʿ d'al-Karajī.* Beyrouth, Publication de l'Université Libanaise, 1964. R. Rashed : *Entre Arithmétique et Algèbre*... Op. cit., pp. 196-225.

48- A. Djebbar : *Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e^-XIV^e^ siècles.* Op. cit., pp. 76-89.

49- R. Rashed & A. Djebbar : *L'œuvre algébrique d'al-Khayyām.* Op. cit.

50- K. Jaouiche : *Le livre du qarasṭūn de Thābit Ibn Qurra.* Leiden, Brill, 1976.

51- K. Jaouiche : *La théorie des parallèles en Pays d'Islam.* Paris, Vrin, 1986.

52- A. I. Sabra : *'Umar al-Khayyām, Muṣādarāt Uqlīdis.* Alexandrie, 1961.

53- A. Djebbar : *Quelques remarques sur les rapports entre Philosophie et Mathématiques arabes.* Colloque de la Société Tunisienne de Philosophie. Hammamet, 1-2 Juin 1983. Paru dans les actes du Colloque : *Revue Tunisienne des Études Philosophiques*, Mars 1984, n° 2, pp. 3-21.

LE POLYTECHNICIEN, L'EXPONENTIELLE ET LES NÉNUPHARS

Edith Kosmanek

Docteur 3e cycle (mathématiques)

Fax : 01 60 74 09 00

Dans son beau livre intitulé : "L'équation du nénuphar" (Calmann-Lévy, 1998) Albert Jacquard reprend, entre autres, l'exemple classique de la croissance exponentielle des nénuphars : la surface occupée, dans une pièce d'eau, par ces fleurs spectaculaires, double par unité de temps (Jacquard choisit le jour pour unité, ce qui paraît excessif, mais peu importe!).
Le célèbre polytechnicien-généticien-démographe, ex-directeur de l'INED, part de l'équation-standard (page 71) :

$$x(t) = x(o)e^{kt}. \tag{1}$$

Une première interprétation erronée apparaît (page 73) : "le paramètre k caractérise l'évolution par unité de temps". Dans le contexte, cela signifie que Jacquard considère k comme étant le taux de croissance de $x(t)$ par unité de temps, alors que le paramètre k est le taux **instantané** de croissance, défini par :

$$\frac{dx}{x} = kdt.$$

Le taux de croissance **par unité de temps**, notons-le K, est défini par :

$$K = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x(t+1) - x(t)}{x(t)} = e^k - 1.$$

L'équation d'évolution, avec ce paramètre, s'écrit :

$$x(t) = x(o)(1 + K)^t. \tag{2}$$

Il est vrai que, pour une croissance à taux faible, les deux taux k et K sont voisins : k faible $\Rightarrow e^k \simeq 1 + k \Rightarrow K \simeq k$.
Mais cette approximation n'est plus valable pour la croissance du nénuphar puisqu'ici : $K = 100~\% = 1$ et $k = \ln(1 + K) = \ln 2 \simeq 0,69$.
L'équation d'évolution peut s'obtenir par (1) ou (2) :

$$x(t) \simeq x(o)e^{0,69t} \simeq x(o)(1+1)^t = x(o)2^t$$

Jacquard poursuit (toujours page 73) :
"Par exemple, $k = 1,03$ signifie une augmentation de 3 % au cours de la durée prise pour unité".
Ce doit être une coquille! En effet : $x(t) = x(o)e^{1,03t} \simeq x(o)(2,80)^t$ signifie une croissance de 180 % par unité de temps!
Acceptons la coquille et remplaçons $k = 1,03$ par $k = 0,03$. Il vient : $x(t) = x(o)e^{0,03t} \simeq x(o).(1,0305)^t$ donc une croissance de 3,05 % par unité de temps. On vérifie qu'à croissance faible, les deux taux $k = 0,03$ et $K = 0,0305$ sont effectivement très voisins et sont confondus dans la pratique.
Mais Jacquard récidive (page 74) :
"L'évolution (la croissance des nénuphars) est donnée par l'équation (1) avec $k = 1$"
Non! L'équation $x(t) = x(o)e^t \simeq x(o)(2,718)^t$ n'est pas adéquate pour décrire le doublement par unité de temps!
C'est dans l'équation (2) qu'il faut remplacer K par 1, d'où $x(t) = x(o)2^t$.
Je passe sur l'étourderie de la page 75 qui consiste, à deux reprises, à escamoter le 25e jour de l'évolution. Peut-être, dans l'optique de Jacquard, les nénuphars ne se reproduisent-ils pas le dimanche?
J'arrive page 76 et je vérifie consciencieusement sur ma calculette une autre assertion : "La somme de 1 franc, placée à 3 % l'an au début de l'ère chrétienne, vaudrait aujourd'hui 38 millions de milliards de milliards de francs".
L'année de parution du livre étant 1998, je fais :

$$x(o) = 1; K = 0,03; t = 1998 \text{ dans l'équation } (2)$$

d'où : $x(1998) = (1,03)^{1998} \simeq 44,5.10^{24}$!
Encore à côté de la plaque! En tâtonnant, j'obtiens comme année la plus conforme au résultat annoncé : 1993.
En effet :

$$\begin{aligned}(1,03)^{1992} &\simeq 37,3.10^{24}\\ (1,03)^{1993} &\simeq 38,4.10^{24}\\ (1,03)^{1994} &\simeq 39,6.10^{24}\end{aligned}$$

Jacquard a dû effectuer ses petits calculs en 1993 et, pressé par le temps, n'a pas opéré la mise à jour en 1998!
Quand on publie deux livres par an, pour exploiter un bon filon, est-ce bien surprenant?
On remarque en passant qu'avec l'équation (1), donc en confondant taux instantané et taux par unité de temps, on obtient :

$$x(1993) = e^{0,03.1993} \simeq 92,6.10^{24}$$

alors qu'avec (2) :

$$x(1993) = (1 + 0,03)^{1993} \simeq 38,4.10^{24}.$$

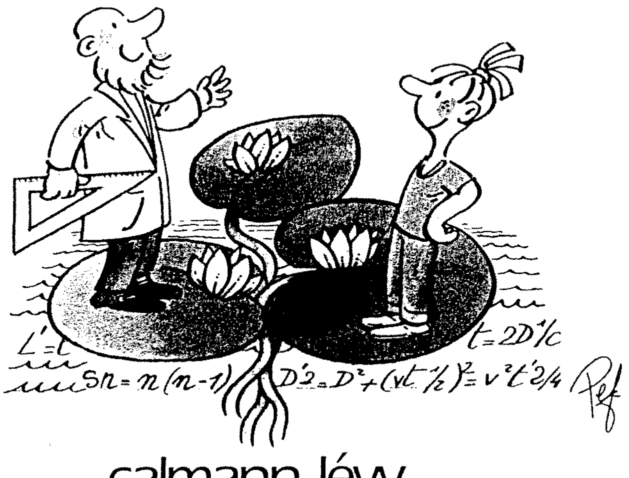
Ici, le délai étant très long, même des taux faibles mènent à des résultats très différents !
Et je n'insiste pas sur la mauvaise habitude qui consiste à présenter comme valeur exacte ce qui n'est qu'une approximation (toujours page 76) : $100(1,03)^{100} = 1920$.
Notons enfin qu'il eût été plus judicieux d'ajuster un modèle logistique plutôt que le modèle exponentiel pour cette étude de croissance végétale, croissance forcément limitée ; les deux modèles ne sont voisins que dans la première phase du phénomène, avant l'inflexion et la tendance vers une asymptote.
Et Jacquard conclut ainsi :
"Ce n'est pas seulement aux jeunes qu'il est nécessaire de faire comprendre le piège que constitue une croissance exponentielle."
En effet ! Même les polytechniciens chevronnés peuvent nécessiter une urgente mise à jour ! Sans rancune, Mr Jacquard ! Même si, au cours de notre brève correspondance, vous avez renâclé quelque peu à reconnaître humblement vos torts !
Exponentiellement vôtre.

P.S. : Petit tableau de correspondance entre taux instantané k et taux par unité de temps K, pour l'équation d'évolution :

$$x(t) = x(o)e^{kt} = x(o)(1+K)^t$$

K	0,01	0,05	0,10	0,20	0,50	0,70	1,00
k=ln$(1+K)$	0,00995	0,04879	0,09531	0,18232	0,40547	0,53063	0,69315

La coutume est de confondre k et K pour $K \leq 10\%$ et t "pas trop grand" !



RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 1999

Classe de Première

Sujet 1 :

Une petite souris est prisonnière dans un cube géant de comté, partagé en 27 cubes de même côté. Elle occupe le cube central, vide.

Elle dévore les cubes un par un, ne pouvant passer de l'un à l'autre que s'ils ont une face commune et sans jamais passer deux fois par le même cube.

La souris peut-elle manger tout le fromage ?

Sujet 2 :

Dans un champ non loin de la commune d'Osterhaasheim, un renard alléché par l'odeur d'un lièvre décide d'attraper sa proie. Comment doit-il se poster par rapport aux trois sorties du terrier pour que la sortie la plus éloignée de lui soit la plus proche possible ?

Sujet 3 :

Sur Internet, on a surpris la conversation suivante entre Boris et Bill :

Boris : "Чёрт возьми ! [1]J'ai beau chercher, mis à part 1, 2 et 3, je ne trouve pas 3 entiers naturels non tous nuls dont le produit est égal à la somme."

Bill : "Don't worry[2], j'ai résolu ton problème. Mais voici une autre énigme non résolue : connais-tu tous les triplets d'entiers naturels dont la somme est égale au produit moins un ?"

Pouvez-vous souffler la réponse tant à Boris qu'à Bill dans leurs méditations arithmétiques ?

---

1 Que le Diable l'emporte !
2 Ne t'en fais pas

Classe de Terminale

Sujet 1 :

Ce siècle a 99 ans
Voici venu le temps des hautes montagnes
Le monde va entrer dans un nouveau millénaire.
Esméralda monte vers les étoiles
Escalade le Cervin, par une belle journée de juin.

Quasimodo, appelé en déplacement en Haute-Alsace
Pour sonner d'urgence les cloches de Saint-Thiébaut
Décide d'escalader, muni de sa besace,
Le Rossberg, un sommet voisin fort haut.

Que les Alpes semblent proches du sommet vosgien !
Armé de sa longue-vue, il cherche le Cervin
En espérant, tout tremblant, y apercevoir sa belle.
Que diantre ! Sera-t-il gêné par le Wildstrubel ?

Quelques données numériques

- Altitude des trois sommets alignés dans cet ordre :

Cervin :	4478 mètres
Wildstrubel :	3243 mètres
Rossberg :	1191 mètres

- Hauteur de la flèche de la Collégiale Saint-Thiébaut de Thann : 76 mètres
- Gros Bourdon de la Collégiale, coulé en 1467 : hauteur : 1,6 mètres ; diamètre : 1,6 mètres
- D'après une carte moderne, on trouve également que le Rossberg est distant du Cervin de 210,6 km et du Wildstrubel de 161,8 km.
- Distance Terre - Lune : 384400 km
- Rayon de la Terre : 6373 km
- Température en haut du Cervin le 27 juin 1499 : - 15° C.

Sujet 2 :

Sur trois tablettes sont gravés 3 entiers naturels non nuls $a < b < c$. Falbala, Ielosubmarine et Bonemine reçoivent chacune une tablette, puis le nombre de sesterces qui y figure. Les tablettes sont ensuite ramassées, mélangées et redistribuées.

Après n distributions, ($n \geq 2$), les joueuses Falbala, Ielosubmarine et Bonemine disposent respectivement d'un total de 20, 10 et 9 sesterces.

Ielosubmarine a reçu c sesterces à la dernière partie. Qui en a reçu b à la première ?

Sujet 3 :

En se promenant dans ses Vosges natales, Emile le Sage, virtuose de l'addition, rencontra le redoutable Sphinx du Wasigenstein qui lui soumit l'énigme suivante :

> "Si je prends un ensemble formé de 10 entiers naturels compris entre 11 et 99, puis-je toujours trouver deux sous-ensembles disjoints non vides dont les sommes des éléments soient égales ?"

La bonne réponse assurait à l'Alsace la protection de la déesse Iremia pour 1999 ans, tandis que la mauvaise faisait périr notre héros. Qu'advint-il ?

A VOS STYLOS

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des $2-$mélanges réguliers (pour la définition d'un $2-$mélange, voir les articles sur les tours de cartes dans les numéros 90 et 93 de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

Indication : Pour la première question, on pourra d'abord montrer le résultat général suivant : si f est une fonction affine de Z/mZ dans Z/mZ de la forme $f(x) = ax + b$, où a est un élément inversible dans l'anneau Z/mZ et b un élément quelconque, alors f est une permutation d'ordre au plus égal à m.
Pour la deuxième question, on examinera le cas où $n = 3^k$.

PROBLÈME 54

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Montrer que si x, y et z sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.
2°) Soit n un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1}$$

est égal au nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$(2) \qquad xy + yz + zx = n.$$

Exemple.— n=35. L'équation (1) possède six solutions : $(1,3,5)$, $(1,5,3)$, $(3,1,5)$, $(3,5,1)$, $(5,1,3)$ et $(5,3,1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1,5,5)$, $(5,1,5)$, $(5,5,1)$, $(1,1,17)$, $(1,17,1)$ et $(17,1,1)$.

PROBLÈME 55

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(x+1)$$

dans l'ensemble le plus vaste possible.

PROBLÈME 56

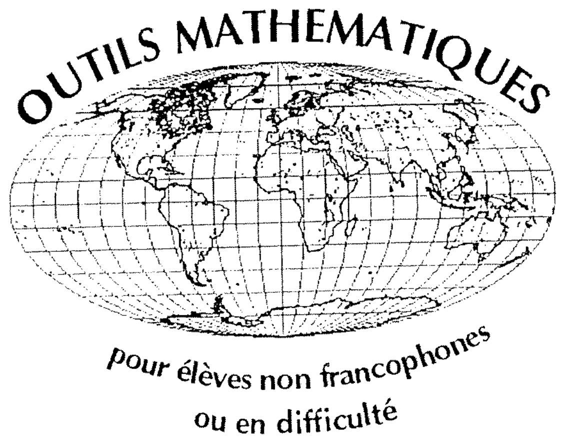
Énoncé (proposé par M. Emery) :

1°) Soient a, b, r des réels tels que $a < b$ et $0 < b - a < 2r$. Soit u une fonction réelle continue sur $[a, b]$, telle que $u(a) = u(b)$, et satisfaisant la propriété suivante :
pour tout z intérieur à $[a, b]$, il existe c et d tels que $a < c < z < d < b$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r, c'est-à-dire donné par une équation de type $y = p + \sqrt{r^2 - (x-q)^2}$.
Montrer que le graphe de u est lui-même un arc de cercle de rayon r.
Remarque.— On peut, dans un premier temps, chercher une démonstration en imposant des hypothèses plus fortes à la fonction u (par exemple des conditions de différentiabilité).
2°) Soient J un intervalle ouvert, r un réel > 0 et u une fonction continue sur l'adhérence de J. On suppose que pour tout z de J il existe c et d dans J tels que $c < z < d$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r.
Montrer que J est borné, de longueur au plus $2r$, et que le graphe de u est un arc de cercle de rayon r.

NOUVELLE BROCHURE :

Odile ANDRE, Geneviève JOST, Marie Anne KEYLING,
Catherine LECLERCQ, Odile OSTERMANN, Maria Luisa PEREZ C. de A.,
Fabienne SCHEURER et Nathalie WACH

vous proposent cette brochure, conçue pour offrir un outil de travail aux élèves non francophones confrontés pour la première fois à l'enseignement des mathématiques en France. C'est aussi un outil de travail pour les élèves en difficulté. Les fiches de travail couvrent l'essentiel des connaissances qu'un collégien doit maîtriser.



Classes de 4ème - 3ème - début 2de

Prix de vente : 55 F (+ 20 F de frais de port) - Règlement à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'I.R.E.M.