

NOTRE COUVERTURE

Notre couverture est un extrait du livre *Cité de l'Arithmétique* du mathématicien arabe du XVe siècle, al-Kashi, dans la section de l'arche et de la voûte. On la retrouvera en figure 6 de l'article sur "le volume des dômes dans les mathématiques arabes" ainsi que les explications sur le calcul d'al-Kashi.

Il existe également une vidéo illustrant l'article sur les dômes, montrant les cinq figures géométriques et notamment la construction virtuelle d'une koubba (mausolée) par le mathématicien al-Kashi, qui est disponible sous le titre "Qubba for Al-Kashi" par Yvonne Dold-Samplonius.

Cette vidéo peut être commandée chez :

American Mathematical Society
Customer Services Department
P.O. Box 6248
Providence, RI 02940-6248, USA

ou par téléphone au (401) 455-4500, par fax au (401) 331-3842, par courrier électronique au "cust-serv@ams.org". Veuillez préciser le format, PAL (utilisé en Europe) ou NTSC.

Les conditions de prix et de livraison par courrier sont : \$19 la copie, ou \$15 pour les membres de AMS En addition \$3 pour le courrier (\$6,50 par avion), AMS accepte les cartes suivantes : Visa, Master Card, American Expresse et Discover.

EDITORIAL

Des stages de poterie

Visiblement, Monsieur le Ministre Claude Allègre a bien réussi sa campagne de dénigrement. Les stages de formation continue passent plus au moins à la trappe. Des professeurs renoncent à se mettre ce travail supplémentaire sur le dos puisqu'il est si peu apprécié ou parce qu'il faut trouver à remplacer les heures de cours qui sauteraient, des proviseurs n'accordent qu'avec parcimonie des inscriptions de professeurs à des stages, et des stages sont éliminés car ils n'ont pas trouvé de ce fait plus de quinze participants.

Mais voilà qu'un document, qui provoqua notre étonnement, nous fut mis entre les mains. Dans la kyrielle de réunions supplémentaires du mois de janvier (réunions parents-professeurs, réunion d'information pour l'orientation des élèves après bac, conseil d'enseignement ...) se trouvait donc le conseil d'enseignement pour lequel les professeurs auraient dû - si seulement il en avaient eu le temps - remplir un questionnaire sur une "*Analyse des besoins en formation des personnels*".

Etait-ce une plaisanterie ou avions-nous de nouveau droit à une formation continue? Ni l'un, ni l'autre; le titre avait produit un malentendu. Tout de même, une première partie avait pour objet la pédagogie et s'adressait aux professeurs mais le reste concernait l'administration de l'établissement. Cependant cette liste de besoins envisagés pour la pédagogie provoqua quelques interrogations.

Passées certaines formulations pompeuses qui faisaient sourire, du style :

“• *décliner le projet pédagogique en termes d'objectifs et de progression d'objectifs, à partir des contenus des programmes et des référentiels.*”

on nous proposait de pratiquer une pédagogie de la réussite, ce qui pouvait être vexant mais avait sa place. Un jeune enseignant, même sorti d'une formation en IUFM pourrait souhaiter mettre des croix face aux points de la rubrique suivante :

“*Savoir conduire sa classe, créer les conditions favorables à la réussite*

• *instaurer une relation de contrat pédagogique avec la classe, les élèves (ex : heure de vie de classe ...)*

• *gérer, structurer le groupe classe*

• *gérer le temps classe, les rythmes et modes de travail ...*

• *adapter le mode relationnel à la psychologie de l'adolescent, du groupe*

• *maîtriser les registres de langue*

• *maîtriser l'espace, le geste, la voix ...*

autres”

On pourrait conseiller d'effectuer quelques regroupements entre ces points pour des propositions de stage dans le but de trouver plus de quinze stagiaires qui auront peut-être à jongler avec les heures de rattrapage. Alors que dans la deuxième

rubrique intitulée “*Enseigner leur discipline*” on ne pourrait demander de faire plus condensé, à moins de ne rien y mettre. En effet, il n’y avait qu’un seul point (36e et ultime point de la liste) :

“• *contribuer à la réalisation de l’objectif commun de maîtrise des langages par les élèves*”

secondé tout de même d’un : “*autres*” pour lequel il était laissé assez de place pour notre imagination. Fallait-il s’interroger sur l’art et la manière d’enseigner les mathématiques pour rester dans la note, ou était-il permis de parler de contenu ? Mais non, pas question d’y mettre de l’arithmétique ou des probabilités car ce serait lier pédagogie et discipline ce qui n’est pas dans l’air du temps. La tentation fut forte tout de même de faire une demande de stage de poterie.

Mais ne désespérons pas. L’année scolaire n’en est qu’à son milieu et les propositions sérieuses de formation continue ne nous parviennent que bien plus tard. D’ici là, les opinions peuvent évoluer et nous n’aurons peut-être pas à tourner en rond solitairement dans notre savoir et notre expérience sur de longues années.

O. SCHLADENHAUFEN.

IMPORTANT :

NOTER NOTRE CHANGEMENT D’ADRESSE POSTALE

7, rue René Descartes

SOMMAIRE

N° 94 – MARS 1999

◇ <i>Notre couverture : Clé de l'Arithmétique</i>	i
◇ <i>Editorial : Des stages de poterie</i>	ii
◇ <i>Jeu de taquin et tableaux de Young</i> par P. LITTELMANN	1
◇ <i>Le volume des dômes dans les mathématiques arabes</i> par Y. DOLD-SAMPLONIUS	18
◇ <i>Versions polyédriques du retournement de la sphère</i> par R. DENNER	32
◇ <i>Enseigner au moyen du multimédia</i> par G. KUNTZ	46
◇ <i>Publicité : Titre Trompeur</i> par D. REISZ	54
◇ <i>L'Histoire des mathématiques par correspondance</i> par J.-P. FRIEDELMEYER	56
◇ <i>Publicité : La saga des calendriers</i> par J. LEFORT	62
◇ <i>A vos stylos</i> par D. DUMONT	63

L'OUVERT

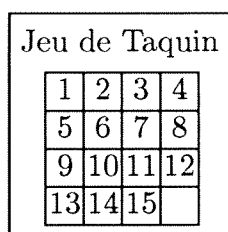
ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Odile SCHLADENHAUFEN
- ◇ *Rédacteur en chef* : Jean-Pierre FRIEDELMEYER
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03-88-41-64-40
Fax : 03-88-41-64-49
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
[http ://irma.u-strasbg.fr/irem](http://irma.u-strasbg.fr/irem)
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
110 F (180 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace,
140 F (240 F/2 ans) dans les autres cas.
N° spécial Georges REEB (66 F port compris).
Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
- ◇ *Prix du numéro* : 35.– F

JEU DE TAQUIN ET TABLEAUX DE YOUNG

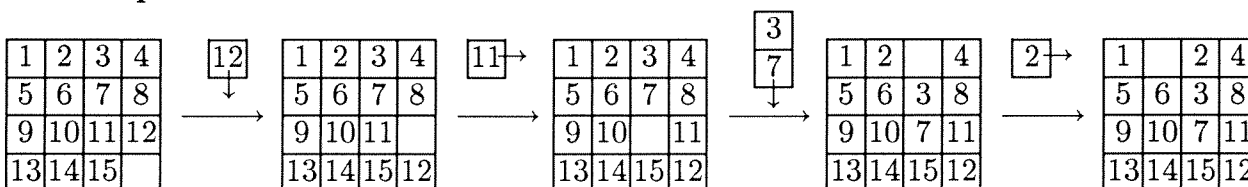
Peter LITTELMANN

- Quand on cherche le verbe *taquiner* dans le «Petit Larousse», on y trouve :
- *taquiner un instrument* – veux dire en jouer distraitement,
- et, pour le Jeu de Taquin, on y trouve la définition suivante :
- *Jeu de Taquin* – Jeu de combinaison consistant à ranger par simple glissement des plaques numérotées, étroitement juxtaposées.



Les Jeux de Taquin qu'on trouve dans les magasins n'ont presque jamais des plaques numérotées, ils sont plutôt décorés avec l'image d'un animal ou d'un bâtiment. Sur un carré on a place pour 16 plaques, mais pour avoir la possibilité de ranger les plaques par simple glissement, on en enlève une.

Exemple.



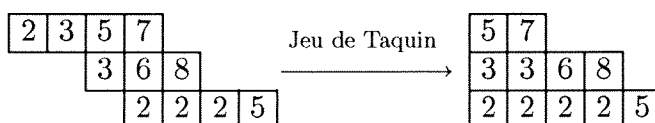
De cette façon il est possible de «battre» les plaques numérotées. L'objectif du jeu est de remettre les plaques en ordre, par simple glissement.

Pendant les années 70, Lascoux et Schützenberger ont défini un Jeu de Taquin pour les tableaux gauches. Un tel tableau est un arrangement de cases, étroitement juxtaposées, dont les cases sont remplies d'entiers strictement positifs. Les tableaux gauches tels que les cases sont alignées sur la gauche sont appelés tableaux de Young, et l'objectif du Jeu de Taquin de Lascoux et Schützenberger est de transformer un tableau gauche en un tableau de Young, par simple glissement des «plaques» (suivant certaines règles).

Exemple.

tableau gauche

tableau de Young



Ce «jeu» est devenu un outil très important dans la théorie des représentations complexes du groupe $GL_n(\mathbf{C})$, on en parlera un peu dans la dernière section. Nous ne donnerons pas toutes les démonstrations concernant le Jeu de Taquin, pour les détails nous recommandons l'article de A. Lascoux et M. P. Schützenberger [2].

Commençons avec la définition d'un tableau de Young.

1. Partitions, tableaux semi-standard et tableaux gauches pointés

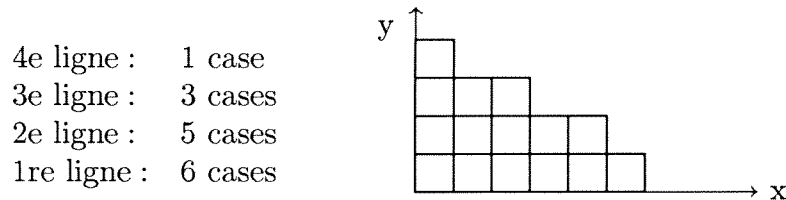
Une *partition* \underline{p} de longueur n est une suite de n nombres naturels, décroissante au sens large : $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$, où $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 0$.

Exemples. Pour $n = 3$, les suites $\underline{p} = (7, 3, 0)$, $\underline{q} = (4, 4, 1)$, et $\underline{r} = (0, 0, 0)$ sont des partitions de longueur n .

Pour simplifier la notation, nous omettrons souvent les zéros dans les suites. Les partitions ci-dessus s'écrivent donc : $\underline{p} = (7, 3)$, $\underline{q} = (4, 4, 1)$ et $\underline{r} = ()$.

Définition. Soit $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ une partition de longueur de n . Un *diagramme de Young* $D(\underline{p})$ de type \underline{p} est un arrangement de cases, étroitement juxtaposées, les cases sont alignées sur la gauche, et on a p_1 cases dans la première ligne, p_2 cases dans la deuxième ligne, ..., et p_n cases dans la dernière ligne.

Exemple. Soit $n = 4$ et soit $\underline{p} = (6, 5, 3, 1)$. Le diagramme de Young $D(\underline{p})$ de type \underline{p} est formé de $15 = 6 + 5 + 3 + 1$ cases. Les 6 premières cases forment la première ligne (= la ligne inférieure), la deuxième ligne est formée de 5 cases, la troisième ligne est formée de 3 cases, et la dernière ligne (= ligne supérieure) est formée d'une seule case.



Définition. Soit $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ une partition de longueur n . Un *tableau de Young* de type \underline{p} est un diagramme de type \underline{p} , dont les cases sont remplies d'entiers pris dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. On dit que le tableau est *semi-standard* si les cases sont remplies de sorte que les nombres soient croissants au sens large dans les lignes (de gauche à droite) et strictement croissants dans les colonnes (de bas en haut).

Exemple. Soit $n = 7$ et soit $\underline{p} = (p_1, \dots, p_7)$. Le tableau T ci-dessous est un tableau de Young semi-standard de type $\underline{p} = (5, 3, 1, 0, 0, 0, 0)$:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 7 & & & & \\ \hline 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 7 & & & & & & \\ \hline 3 & 4 & 5 & & & & \\ \hline 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & & \\ \hline \end{array} \quad T'' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & & & & \\ \hline 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Le tableau T' (aussi de type \underline{p}) n'est pas semi-standard : la suite des entiers dans la première ligne $(2, 2, 3, 2, 2)$, n'est pas une suite croissante au sens large. Le tableau T'' n'est pas un tableau semi-standard parce que la suite des entiers dans la première colonne $(2, 3, 3)$, n'est pas une suite strictement croissante.

Soient $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ et $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ deux partitions de longueur n . Nous définissons un ordre partiel sur l'ensemble des partitions de longueur n . On dit que

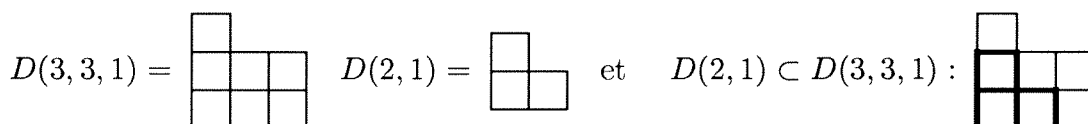
$$\underline{p} \geq \underline{q} \quad \text{si} \quad p_1 \geq q_1, p_2 \geq q_2, \dots, \text{ et } p_n \geq q_n.$$

Exemples.

- i) $\underline{p} = (3, 3, 1) \geq \underline{q} = (3, 2, 1)$ parce que $p_1 = q_1 = 3$, $p_2 = 3 \geq q_2 = 2$ et $p_3 = q_3 = 1$.
- ii) $\underline{p} = (3, 3, 1) \not\geq \underline{q} = (2, 2, 2)$ parce que $p_3 = 1 \not\geq q_3 = 2$, et $\underline{q} \not\geq \underline{p}$ parce que $q_1 = 2 \not\geq p_1 = 3$.
- iii) $\underline{p} = (4, 2, 2) \geq \underline{q} = (2)$ parce que $p_1 = 4 \geq q_1 = 2$, $p_2 = 2 \geq q_2 = 0$ et $p_3 = 2 \geq q_3 = 0$.

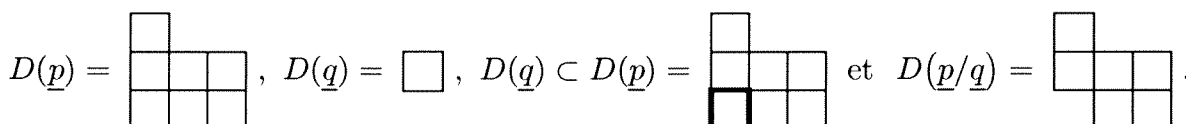
Soient $\underline{p}, \underline{q}$ deux partitions de longueur n telles que $\underline{p} \geq \underline{q}$. Nous considérons $D(\underline{q})$ comme le sous-diagramme de $D(\underline{p})$ formé des premières q_1 -cases dans la première ligne de $D(\underline{p})$, des premières q_2 -cases dans la 2e ligne, \dots , et des premières q_n -cases dans la dernière ligne.

Exemple. Pour $(3, 3, 1) \geq (2, 1)$ on peut voir $D(2, 1)$ comme un sous-diagramme de $D(3, 3, 1)$:

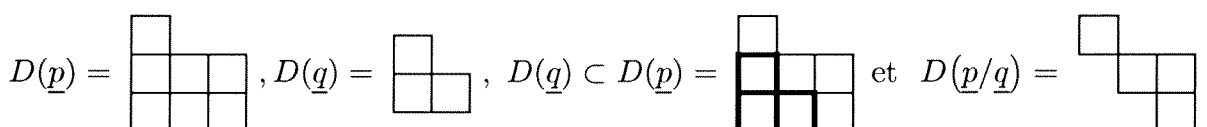


Définition. Le *diagramme gauche* $D(\underline{p}/\underline{q})$ de type $\underline{p}/\underline{q}$ est le diagramme qu'on obtient à partir de $D(\underline{p})$ en supprimant les cases de $D(\underline{q}) \subset D(\underline{p})$.

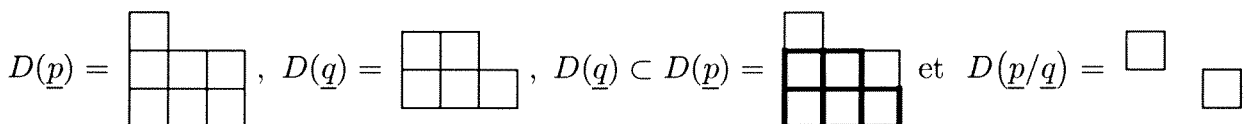
Exemples. Pour $\underline{p} = (3, 3, 1) \geq \underline{q} = (1)$ on obtient :



Pour $\underline{p} = (3, 3, 1) \geq \underline{q} = (2, 1)$ on a :



Et pour $\underline{p} = (3, 3, 1) \geq \underline{q} = (3, 2)$ on obtient :

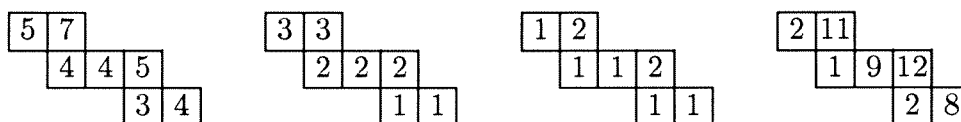


La définition d'un tableau gauche semi-standard est semblable à la définition d'un tableau de Young semi-standard :

Définition. Soient $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ et $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ deux partitions de longueur n telles que $\underline{p} \geq \underline{q}$. Un *tableau gauche* de type $\underline{p}/\underline{q}$ est un diagramme gauche de type $\underline{p}/\underline{q}$,

dont les cases sont remplies d'entiers de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. On dit que le tableau gauche est *semi-standard* si les cases sont remplies de sorte que les nombres soient croissants au sens large dans les lignes et strictement croissants dans les colonnes.

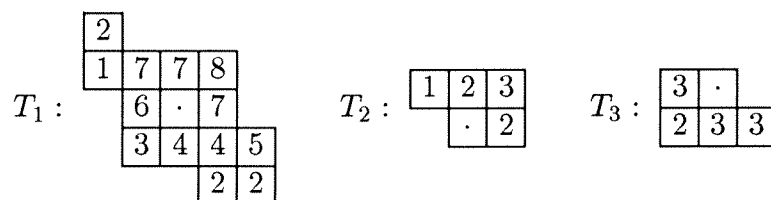
Exemple. Soient $n = 12$, $\underline{p} = (5, 4, 2)$ et $\underline{q} = (3, 1)$. Les tableaux gauches ci-dessous sont des tableaux gauches semi-standard de type $\underline{p}/\underline{q}$:



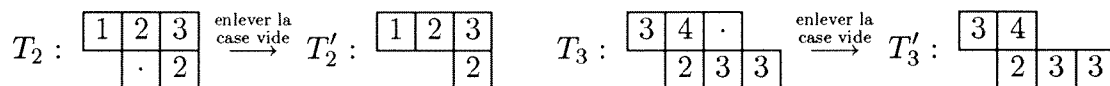
La notion de tableau gauche pointé que nous introduisons maintenant n'est autre qu'un tableau gauche avec un «trou» :

Définition. Soient $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ et $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ deux partitions de longueur n telles que $\underline{p} \geq \underline{q}$. Un *tableau gauche pointé* de type $\underline{p}/\underline{q}$ est un diagramme gauche de type $\underline{p}/\underline{q}$, dont toutes les cases **sauf une** sont remplies par des entiers de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. On dit que le tableau gauche pointé est *semi-standard* si les cases sont remplies de sorte que les nombres soient croissants au sens large dans les lignes et strictement croissants dans les colonnes.

Exemples. Les trois tableaux gauches pointés ci-dessous sont semi-standard. Le premier est de type $(5, 5, 4, 4, 1)/(3, 1, 1)$, le deuxième est de type $(3, 3)/(1)$, le troisième est de type $(3, 2)/()$. On a marqué la case vide d'un « \cdot ».



Soit T un tableau gauche pointé de type $\underline{p}/\underline{q}$, enlevons la case vide. On dit que la case vide est *enlevable* si l'arrangement de cases qui reste est un tableau gauche. Par exemple, les cases vides de T_2 et T_3 sont enlevables :



Par contre, on ne peut pas enlever la case vide de T_1 , ce qui reste n'est plus un tableau.

Définition. Soit T un tableau gauche pointé de type $\underline{p}/\underline{q}$. La case vide est appelée *case vide extérieure* si la case est enlevable et le tableau gauche qui reste est de type $\underline{p}'/\underline{q}$ (la partition \underline{q} ne change pas!), et la case vide est appelée *case vide intérieure* si la case est enlevable et le tableau gauche qui reste est de type $\underline{p}/\underline{q}'$ (\underline{p} ne change pas!).

Exemples. T_2 est de type $(3, 3)/(1)$, la case vide de T_2 est une case vide intérieure, T_2' est de type $(3, 3)/(2)$. T_3 est de type $(4, 3)/(1)$, la case vide de T_3 est une case vide extérieure, T_3' est de type $(4, 2)/(1)$.

2. Le Jeu de Taquin

L'objet du Jeu de Taquin pour tableaux gauches est de transformer (suivant certaines règles) un tableau gauche semi-standard T en un tableau de Young semi-standard T' .

Commençons avec un tableau gauche pointé semi-standard T , où la case vide a été marqué d'un « \cdot » :

T :

	a	b	c			
	d	\cdot	e			
	f	g	h			

Parce que T est semi-standard, on sait que les nombres dans les cases autour de la case vide, satisfont les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 \underset{\cdot}{a} & \leq & \underset{\cdot}{b} & \leq & \underset{\cdot}{c} \\
 \underset{\cdot}{d} & \leq & \underset{\cdot}{\cdot} & \leq & \underset{\cdot}{e} \\
 \underset{\cdot}{f} & \leq & \underset{\cdot}{g} & \leq & \underset{\cdot}{h}
 \end{array}$$

Seules les valeurs de b et e sont importantes pour le Jeu de Taquin. S'il n'y a pas de cases correspondantes, on pose $b = \infty$ respectivement $e = \infty$

Exemples. Nous indiquons pour les 5 tableaux gauches semi-standard ci-dessous les valeurs de b et e dans une matrice $\begin{pmatrix} b & \\ \cdot & e \end{pmatrix}$ à droite du tableau :

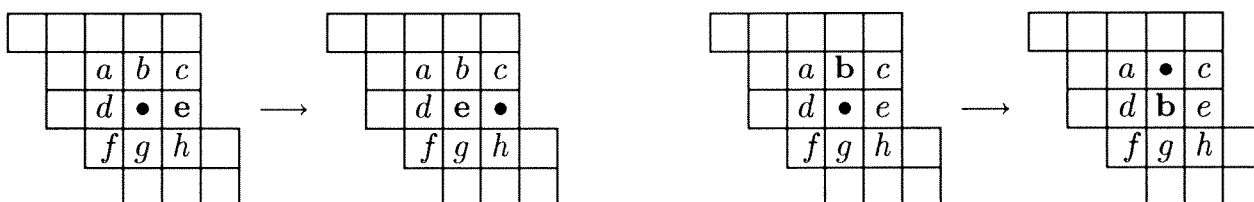
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td>\cdot</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>8</td></tr> </table>	2	2	3	5	6		2	\cdot	2	5	1	1	1	4	5	8	→	$\begin{pmatrix} 5 & \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}$,	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td></td><td>\cdot</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table>	1	3	5	6		\cdot	2	5	1	1	1	4	→	$\begin{pmatrix} 5 & \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}$
2	2	3	5	6																														
	2	\cdot	2	5																														
1	1	1	4	5	8																													
1	3	5	6																															
	\cdot	2	5																															
1	1	1	4																															
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>\cdot</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> </table>	3	3	2	\cdot	1	2	3	4	→	$\begin{pmatrix} 3 & \\ \cdot & \infty \end{pmatrix}$,	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>\cdot</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	2	\cdot	1	1	→	$\begin{pmatrix} \infty & \\ \cdot & \infty \end{pmatrix}$,	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>\cdot</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	\cdot	2	1	1	→	$\begin{pmatrix} \infty & \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}$								
3	3																																	
2	\cdot																																	
1	2	3	4																															
2	\cdot																																	
1	1																																	
\cdot	2																																	
1	1																																	

L'objet du jeu est de bouger «le trou» dans la direction nord-est, c'est-à-dire de transformer un tableau pointé de telle sorte que la case vide du nouveau tableau soit «plus extérieure» que la case vide du tableau pointé du début.

Les règles du Jeu de Taquin.

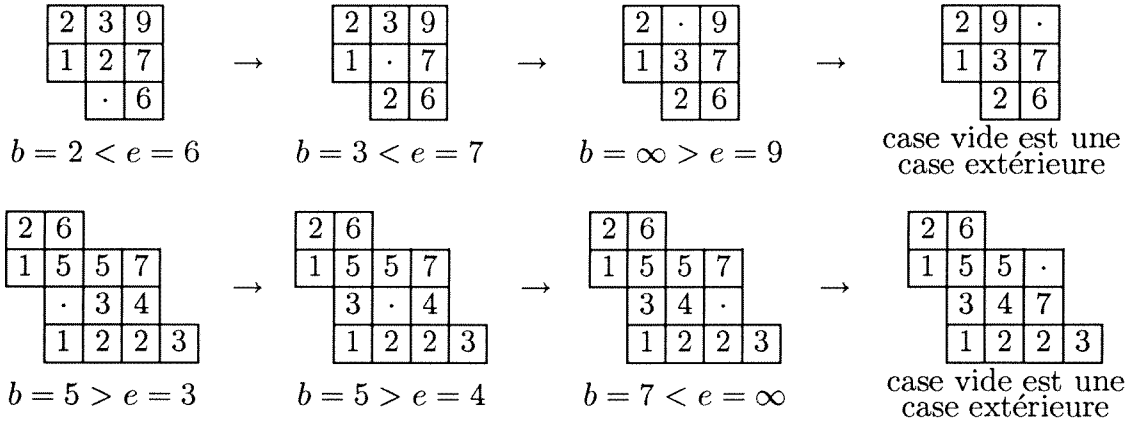
- Si $b = e = \infty$, la case vide est déjà une case extérieure.
- Si soit $b \neq \infty$, soit $e \neq \infty$, la case vide n'est pas une case extérieure. Dans ce cas, les transformations suivantes sont permises : on peut échanger

i) $\boxed{\cdot}$ et \boxed{e} si $b > e$ et ii) $\boxed{\cdot}$ et \boxed{b} si $b \leq e$



Les nouveaux tableaux ci-dessus sont des tableaux gauches pointés semi-standard. De plus, par réitération, on voit qu'on peut transformer un tableau gauche pointé semi-standard en un tableau gauche pointé semi-standard tel que la case vide soit une case extérieure.

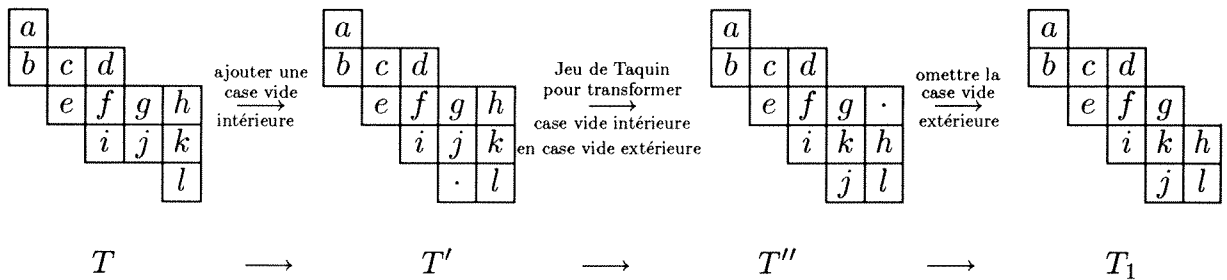
Exemples.



Le Jeu de Taquin pour tableaux gauches semi-standard.

On peut transformer un tableau gauche semi-standard T en un tableau de Young semi-standard à l'aide du Jeu de Taquin :

- Si T est un tableau de Young semi-standard, rien est à faire.
- Supposons que T est du type $\underline{p}/\underline{q}$ avec $\underline{q} \neq ()$. On transforme T en un tableau gauche semi-standard T_1 de type $\underline{p}'/\underline{q}'$ avec $\underline{q}' < \underline{q}$, comme indiqué dans le schéma suivant :



1re étape. On ajoute une case vide intérieure à T pour obtenir un tableau gauche pointé semi-standard T' . (Par exemple, soit j tel que $q_j > q_{j+1}$, ou soit $j = n$ si $q_n > 0$, on peut ajouter une case vide dans la $j^{\text{ième}}$ ligne et $q_j^{\text{ième}}$ colonne.)

2e étape. On utilise le Jeu de Taquin pour transformer T' en un tableau gauche pointé semi-standard T'' avec une case vide extérieure.

3e étape. T_1 est le tableau gauche semi-standard issu de T'' en omettant la case vide extérieure de T'' . Notons que T_1 est de type $\underline{p}'/\underline{q}'$ avec $\underline{q}' < \underline{q}$. On écrit

$$T \implies T_1$$

pour indiquer que le tableau gauche semi-standard T_1 est issu du tableau gauche semi-standard T en utilisant le Jeu de Taquin.

Par itération, on peut transformer de cette manière tout tableau gauche semi-standard T en un tableau de Young semi-standard \tilde{T} .

Dans les exemples suivants, nous transformons des tableaux gauches semi-standard T en tableaux de Young semi-standard \tilde{T} . Nous écrivons \xrightarrow{a} pour *ajouter une case vide intérieure*, \xrightarrow{o} pour *omettre la case vide extérieure*, et \xrightarrow{J} pour une transformation utilisant le Jeu de Taquin.

Exemple.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{a} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \cdot & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \cdot \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{o} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Exemple.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{a} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline \cdot & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & \cdot \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \cdot \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{o} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Exemple.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{a} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline & 2 \\ \hline \cdot & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline & 2 \\ \hline 1 & \cdot \\ \hline \end{array} \xrightarrow{o} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{a} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \cdot & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \\ \\ \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \cdot \\ \hline 1 & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{o} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{a} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \cdot & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline \cdot & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & \cdot \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{o} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

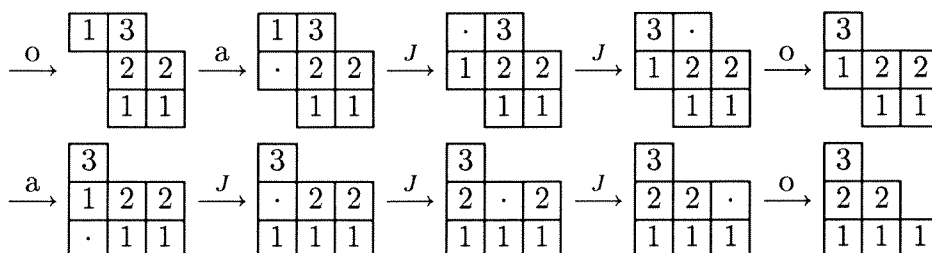
Remarque 1. A l'aide du Jeu de Taquin on pousse les cases vides intérieures dans la direction nord-est, puis, on pousse, en même temps, les plaques du tableau gauche T dans la direction sud-ouest. Si donc P est une plaque de T dans la $i^{\text{ième}}$ ligne, $j^{\text{ième}}$ colonne, on retrouve la plaque dans \tilde{T} dans la $i'^{\text{ième}}$ ligne, $j'^{\text{ième}}$ colonne avec $i' \leq i$ et $j' \leq j$.

Exemple. En général, on a plusieurs possibilités de choisir la case vide intérieure qu'on peut ajouter à un tableau gauche semi-standard. Dans l'exemple suivant, on peut commencer avec la case dans la deuxième ligne, première colonne :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{a} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \cdot & 1 & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & \cdot & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \cdot \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \\ \\ \xrightarrow{o} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{a} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \cdot & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \cdot & 2 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \cdot \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{o} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \\ \xrightarrow{a} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \cdot & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \cdot & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \cdot \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{o} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

ou avec la case dans la première ligne, deuxième colonne :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{a} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 \\ \hline \cdot & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & \cdot & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \cdot & 3 \\ \hline & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{J} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & \cdot \\ \hline & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$



Notons que le Jeu de Taquin produit le même tableau de Young semi-standard \tilde{T} !

En effet, le tableau \tilde{T} obtenu est indépendant du choix de la façon d'ajouter les cases vides intérieures :

Théorème 1. (Knuth, Lascoux-Schützenberger) *Le tableau semi-standard \tilde{T} est uniquement déterminé par le tableau gauche semi-standard T .*

Pour expliquer les méthodes utilisées dans la démonstration du théorème, nous introduisons l'algèbre des mots dans l'alphabet $\{1, 2, \dots, n\}$.

3. Mots et tableaux gauches

Considérons l'alphabet $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, \dots, n - 1, n\}$ formé par les entiers entre 1 et n .

Définition. Un mot m (de longueur r) dans l'alphabet \mathbf{A} est une suite finie d'éléments de \mathbf{A} (de longueur r) : $m = (w_1, w_2, \dots, w_r)$.

Exemple. Soit $n = 7$. L'alphabet $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et 7. La suite $(5, 2, 6, 7, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 5, 1, 2)$ est un mot de longueur 13.

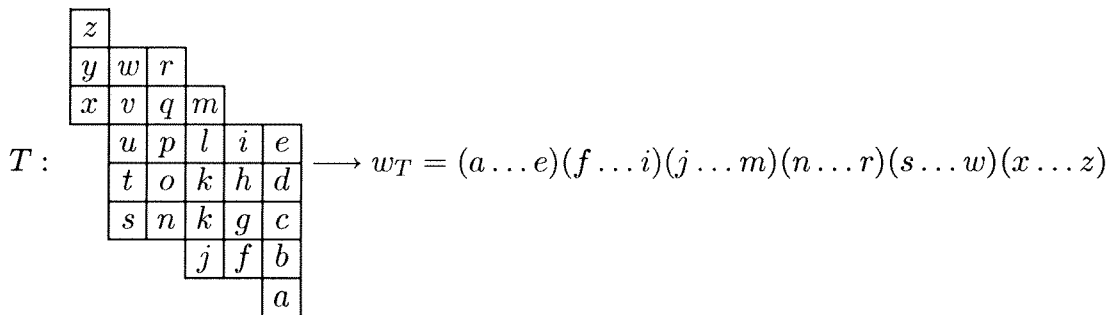
L'ensemble des mots dans l'alphabet \mathbf{A} est muni d'une *multiplication* (associative) naturelle : le produit de deux mots n'est que la concaténation des deux mots. Pour $w = (w_1, w_2, \dots, w_r)$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_t)$ on pose $w \cdot v = (w_1, w_2, \dots, w_r, v_1, v_2, \dots, v_t)$.

Exemple. Conservons le même alphabet \mathbf{A} que dans l'exemple ci-dessus, et soient $w = (5, 2, 6, 7, 4, 5, 6)$ et $v = (1, 2, 4, 5, 1, 2)$, alors $w \cdot v = (5, 2, 6, 7, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 5, 1, 2)$.

Un mot $m = (w_1, \dots, w_t)$ est dit strictement croissant si $w_1 < w_2 < \dots < w_r$. Une *décomposition* d'un mot $m = m_1 m_2 \dots m_r$ en mots strictement croissants m_j ($j = 1, \dots, r$) est une décomposition de m comme produit de mots croissants.

Exemple. Une décomposition de $m = (5, 2, 6, 7, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 5, 1, 2)$ en mots strictement croissants est $m = m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$ avec $m_1 = (5)$, $m_2 = (2, 6, 7)$, $m_3 = (4, 5, 6)$, $m_4 = (1, 2, 4, 5)$ et $m_5 = (1, 2)$, alors $m = (5)(2, 6, 7)(4, 5, 6)(1, 2, 4, 5)(1, 2)$.

Définition. Soit T un tableau gauche semi-standard. Le mot $w_T = m_1 m_2 \dots m_r$ associé au tableau T est le produit des mots strictement croissants m_j donnés par les inscriptions dans les colonnes de T , de droite à gauche :



Exemple.

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline & 2 & 5 & 7 \\ \hline & 1 & 4 & 6 \\ \hline & & & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow w_T = (5)(267)(456)(1245)(12)$$

4. L'algèbre plaxique I

Soit $W := \mathbf{Q}\langle 1, 2, 3, \dots, n-1, n \rangle$ l'algèbre des mots, c'est-à-dire W est l'algèbre associative libre à coefficients rationnels sur l'alphabet $\{1, 2, \dots, n\}$. Un élément de W n'est qu'une combinaison linéaire (formelle) de mots, à coefficients rationnels :

$$a * (w_1, w_2, \dots, w_r) + b * (v_1, v_2, \dots, v_s) + \dots + d * (u_1, u_2, \dots, u_t)$$

Exemple.

$$\frac{3}{4} * (1, 1, 3, 6, 3, 1) + \frac{11}{47} * (2, 7, 4, 2, 2, 1) + 3 * (1, 2, 3, 2, 1) + \frac{103}{51} * (4, 4, 4)$$

La structure multiplicative de W n'est autre que l'extension linéaire de la multiplication de mots :

$$\left(\sum_{i=1}^r a_i * m_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^s b_j * n_j \right) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (a_i b_j) * (m_i n_j)$$

Exemple.

$$\begin{aligned} & [2 * (2, 2, 1) + 4 * (5, 1)] \cdot [3 * (2, 5) + 8 * (3, 1, 1)] \\ & = 6 * (2, 2, 1, 2, 5) + 16 * (2, 2, 1, 3, 1, 1) + 12 * (5, 1, 2, 5) + 32 * (5, 1, 3, 1, 1) \end{aligned}$$

Pour $1 \leq a < b < c \leq n$ considérons les relations suivantes, appelées *relations de Knuth*, et soit I l'idéal bilatère dans W , engendré par les relations :

$$(a, a, b) = (a, b, a), \quad (c, a, b) = (a, c, b), \quad (b, a, c) = (b, c, a), \quad (b, a, b) = (a, b, b).$$

Exemples. $(1, 1, 2) = (1, 2, 1)$, $(3, 1, 2) = (1, 3, 2)$, $(2, 1, 3) = (2, 3, 1)$, $(2, 1, 2) = (1, 2, 2)$.

Définition. Le quotient W/I de W par I est appelé *algèbre plaxique*.

Pour un mot $m \in W$ notons \overline{m} la classe du mot dans W/I . De même, pour un tableau gauche semi-standard T soit w_T le mot associé, et notons $\overline{w_T}$ la classe du mot dans W/I .

Exemple.

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline & 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \overline{w_{T_1}} = \overline{(3, 4, 2)} = \overline{(3, 2, 4)}, \quad \text{et pour } T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \overline{w_{T_2}} = \overline{(3, 2, 4)},$$

alors, on a $\bar{w}_{T_1} = \bar{w}_{T_2}$. Notons que T_2 est le tableau de Young semi-standard qu'on obtient à partir de T_1 en appliquant le Jeu de Taquin.

Nous définissons une *relation* \sim sur les tableaux gauches semi-standard de la façon suivante : $T_1 \sim T_2$ s'il est possible de trouver des tableaux gauches semi-standard $S_0 = T_1, S_1, \dots, S_t = T_2$ tels que $T_1 = S_0 \Rightarrow S_1 \Rightarrow S_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow S_i \Rightarrow S_{i+1} \Rightarrow S_{i+2} \Rightarrow \dots \Rightarrow S_{t-1} \Rightarrow S_t = T_2$.

M. Schützenberger [7] complétant un premier mémoire de D. Knuth [1] (à qui nous devons les précédentes règles dites de Knuth) a prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.

1) Soient T_1, T_2 deux tableaux gauches semi-standard. On a

$$\bar{w}_{T_1} = \bar{w}_{T_2} \quad \text{si et seulement si} \quad T_1 \sim T_2$$

2) Pour chaque classe $\bar{w} \in W/I$ il existe un tableau semi-standard unique tel que $\bar{w} = \bar{w}_T$.

3) L'ensemble des classes $\{\bar{w}_T \mid T \text{ semi-standard}\}$ associées aux tableaux de Young semi-standard est une base de W/I (comme \mathbf{Q} -espace vectoriel).

Remarque 2. Notons que 2) et 3) sont deux assertions équivalentes, et 2) implique le Théorème 1. Il n'est pas très difficile de déduire 2) (et donc 3)) de 1). La démonstration de 1) est «élémentaire», mais pas «simple». En fait, 1) est lié à la démonstration de la règle de Littlewood-Richardson (voir sections 5 et 6), publiée en 1934 [3] sans démonstration. G. Robinson a donné une démonstration incomplète ([4],[6]), la première démonstration correcte a été donnée par Schützenberger [7] en 1976. On trouve également un bel exposé de cette règle avec une démonstration dans le livre de Macdonald [5].

5. L'algèbre plaxique II

Soit \mathcal{P} l'espace vectoriel rationnel libre

$$\mathcal{P} := \mathbf{Q}\langle T \mid T \text{ tableau de Young semi-standard de type } \underline{p}, \underline{p} \text{ partition de longueur } n \rangle$$

sur l'ensemble des tableaux de Young semi-standard de type \underline{p} , où \underline{p} parcourt les partitions de longueur n . Donc les éléments de \mathcal{P} sont des combinaisons linéaires (formelles)

$$a_1 T_1 + a_2 T_2 + \dots + a_r T_r$$

où les a_i sont des nombres rationnels et les T_i sont des tableaux de Young semi-standard.

D'après le Théorème 2, nous savons que cet espace vectoriel est isomorphe à l'algèbre plaxique et donc muni d'une multiplication. On peut définir la multiplication directement en utilisant le Jeu de Taquin :

Pour deux tableaux de Young semi-standard T_1 et T_2 de type $\underline{p} = (p_1, \dots, p_r)$ et $\underline{q} = (q_1, \dots, q_s)$ (avec $p_r, q_s > 0$ et $r, s \leq n$) soit $T_1 * T_2$ le tableau gauche de type

$$(p_1 + q_1, \dots, p_r + q_1, \underbrace{q_1, \dots, q_s}_{r \text{ fois}})$$

D'abord \mathcal{P} est une algèbre non-commutative, par exemple,

$$\boxed{1} \circ \boxed{2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \boxed{2} \circ \boxed{1} = \boxed{1} \boxed{2}.$$

Elle admet une sous-algèbre commutative intéressante : pour une partition \underline{p} de longueur n notons $s(\underline{p})$ la somme (dans \mathcal{P}) de tous les tableaux de Young semi-standard de type \underline{p} :

$$s(\underline{p}) := \sum_{T \text{ semi-standard, de type } \underline{p}} T$$

Les sommes $s(\underline{p})$ ont une interprétation dans la théorie des représentations du groupe $GL_n(\mathbf{C})$, nous parlerons de cet aspect dans la prochaine section.

Proposition.

1) Soient $\underline{p}, \underline{q}$ deux partitions de longueur n . Il existe des partitions $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_t$ de longueur n et $a_i \in \mathbf{N}$ telles que

$$s(\underline{p}) \circ s(\underline{q}) = \sum_{i=1}^t a_i s(\underline{r}_i)$$

2) Le sous-espace vectoriel $R \subset \mathcal{P}$ engendré par les $s(\underline{p})$, \underline{p} partition de longueur n , est une sous-algèbre commutative de \mathcal{P} .

Exemple. Soit $n = 3$, $\underline{p} = \underline{q} = (1)$. On a $s((1)) = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3}$, alors

$$s((1)) \circ s((1)) = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \boxed{i} \circ \boxed{j} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq 3} \boxed{i} \circ \boxed{j} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \boxed{i} \circ \boxed{j}.$$

Pour $i < j$ on trouve :

$$\boxed{i} \circ \boxed{j} = \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} \xrightarrow{a} \begin{bmatrix} j \\ \cdot \\ i \end{bmatrix} \xrightarrow{J} \begin{bmatrix} j \\ i \\ \cdot \end{bmatrix} \xrightarrow{o} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix},$$

et pour $i \geq j$ on trouve :

$$\boxed{i} \circ \boxed{j} = \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} \xrightarrow{a} \begin{bmatrix} j \\ \cdot \\ i \end{bmatrix} \xrightarrow{J} \begin{bmatrix} \cdot \\ j \\ i \end{bmatrix} \xrightarrow{o} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix},$$

et donc

$$s((1)) \circ s((1)) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq 3} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} = s((1, 1)) + s((2)).$$

On peut donner un algorithme pour calculer les a_i . Pour une partition \underline{p} soit $Y_{\underline{p}}$ l'unique tableau de Young semi-standard de type \underline{p} dont toutes les cases dans la première ligne sont remplies de 1, les cases dans la deuxième ligne sont remplies de 2, ...

Exemple. Soit $\underline{p} = (6, 3, 1)$, alors $Y_{\underline{p}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Le coefficient a_i est la multiplicité de $s(\underline{r}_i)$ dans le produit $s(\underline{p}) \circ s(\underline{q}) = \sum T \circ T'$, où la somme parcourt tous les tableaux de Young semi-standard T de type \underline{p} et tous les tableaux de Young semi-standard T' de type \underline{q} . Or la multiplicité de $s(\underline{r}_i)$ est déjà déterminée par la multiplicité de $Y_{\underline{r}_i}$ dans

$$\{T \circ T' \mid T, T' \text{ semi-standard, } T \text{ de type } \underline{p}, T' \text{ de type } \underline{q}\}$$

Donc

$$a_i = \#\{(T, T') \mid T, T' \text{ semi-standard, } T \text{ de type } \underline{p}, T' \text{ de type } \underline{q}, T \circ T' = Y_{\underline{r}_i}\}$$

est le cardinal de l'ensemble des paires (T, T') de tableaux de Young semi-standard de type \underline{p} respectivement \underline{q} telles que $T \circ T' = Y_{\underline{r}_i}$.

Rappelons (remarque 2) que dans le Jeu de Taquin on pousse les cases d'un tableau gauche dans la direction sud-ouest, c'est-à-dire que si P est une case de T dans la $k^{\text{ième}}$ ligne, $\ell^{\text{ième}}$ colonne, on retrouve la case dans $T' = T \circ T'$ dans la $k'^{\text{ième}}$ ligne, $\ell'^{\text{ième}}$ colonne avec $k' \leq k$ et $\ell' \leq \ell$.

Supposons $T \circ T' = Y_{\underline{r}_i}$. Le tableau T est un tableau de Young semi-standard, donc une case P de T dans la $k^{\text{ième}}$ ligne est remplie d'un nombre $N \geq k$.

Supposons qu'on retrouve la case dans $Y_{\underline{r}_i}$ dans la $k'^{\text{ième}}$ ligne. D'après la définition de $Y_{\underline{r}_i}$, la case est donc remplie de k' , et on a $N = k'$.

Mais plus haut on a vu que $k' \leq k$, donc $N \geq k \geq k' = N$, ce qui implique que $k = k' = N$. On a prouvé : pour que $T \circ T' = Y_{\underline{r}_i}$, on doit avoir nécessairement $T = Y_{\underline{p}}$. De plus,

$$a_i = \#\{T' \mid T' \text{ semi-standard de type } \underline{q}, Y_{\underline{p}} \circ T' = Y_{\underline{r}_i}\}$$

Cette condition peut être traduite en une condition sur le remplissage du tableau T' .

Soit e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbf{Q}^n , et soit T un tableau de Young semi-standard de type \underline{q} . Notons $w_T = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_s)$ le mot associé à T .

Définition. Le vecteur $\underline{\nu}(T) := e_{w_1} + e_{w_2} + \dots + e_{w_s} \in \mathbf{Z}^n$ est appelé le *poids* de T .

Soit \underline{p} une deuxième partition de longueur n

Définition. Le tableau T est appelé \underline{p} -*dominant* si tous les vecteurs :

$$\begin{aligned} \underline{\nu}_0 &:= \underline{p}, \\ \underline{\nu}_1 &:= \underline{p} + e_{w_1}, \\ \underline{\nu}_2 &:= \underline{p} + e_{w_1} + e_{w_2} \\ \underline{\nu}_3 &:= \underline{p} + e_{w_1} + e_{w_2} + e_{w_3} \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{\nu}_s &:= \underline{p} + e_{w_1} + e_{w_2} + \dots + e_{w_s} = \underline{p} + \underline{\nu}(T) \end{aligned}$$

sont des partitions (= les coefficients forment une suite décroissante au sens large).

Exercice. Prouver que cette définition est équivalente à la définition d'une «lattice permutation» dans [5].

Théorème 3. (Règle de Littlewood-Richardson) *La multiplicité a_i de $s(\underline{r}_i)$ dans le produit*

$$s(\underline{p}) \circ s(\underline{q}) = \sum_{\substack{T \text{ semi-standard, de type } \underline{p} \\ T' \text{ semi-standard, de type } \underline{q}}} T \circ T' = \sum_{i=1}^t a_i s(\underline{r}_i)$$

est égale au cardinal de l'ensemble des tableaux semi-standard de type \underline{q} tels que T est \underline{p} -dominant et $\underline{r} = \underline{p} + \underline{\nu}(T)$:

$$a_i = \#\{T \mid T \text{ semi-standard de type } \underline{q}, \underline{p}\text{-dominant et } \underline{r}_i = \underline{p} + \underline{\nu}(T)\}.$$

6. Représentations et tableaux

Soit $G := GL_n(\mathbf{C}) = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid \det A \neq 0\}$ le groupe des matrices complexes carrées inversibles d'ordre n . Soit V un espace vectoriel complexe de dimension m . Fixons une base et identifions le groupe $GL(V)$ des automorphismes de V avec $GL_m(\mathbf{C})$.

Une *représentation* de G sur V est une application

$$\rho : GL_n(\mathbf{C}) \longrightarrow GL(V) \text{ telle que } \rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \quad \forall g, h \in G.$$

Soit $\rho_{i,j} : G \rightarrow \mathbf{C}$ les fonctions telles que $\rho(g) = (\rho_{i,j}(g))$. La représentation est appelée *représentation polynômiale* si les fonctions $\rho_{i,j}$ sont les restrictions de fonctions polynômiales définies sur l'ensemble $M_m(\mathbf{C})$ ($\supset G = GL_n(\mathbf{C})$) des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Remarque 3. La définition d'une représentation polynômiale est indépendante du choix de la base.

Exemple. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbf{C}^n et soit

$$\{e_{\underline{i}} := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$$

la base canonique correspondante de $\Lambda^r \mathbf{C}^n$. Pour $g \in G$ soit $\rho(g) : \Lambda^r \mathbf{C}^n \rightarrow \Lambda^r \mathbf{C}^n$ l'application linéaire définie par

$$\rho(g)(e_{\underline{i}}) := (ge_{i_1}) \wedge \dots \wedge (ge_{i_r}).$$

Il est facile à vérifier que ρ définit une représentation de G sur $\Lambda^r \mathbf{C}^n$. Soit $g \in G$ la matrice $g = (g_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n}$. Rappelons que

$$(ge_{i_1}) \wedge \dots \wedge (ge_{i_r}) = \sum_{\substack{j := (j_1, \dots, j_r) \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n}} \det(g_{\underline{i}, \underline{j}}) e_{\underline{j}}, \quad \text{où } g_{\underline{i}, \underline{j}} = \begin{pmatrix} g_{i_1, j_1} & g_{i_1, j_2} & \dots & g_{i_1, j_r} \\ g_{i_2, j_1} & g_{i_2, j_2} & \dots & g_{i_2, j_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{i_r, j_1} & g_{i_r, j_2} & \dots & g_{i_r, j_r} \end{pmatrix}.$$

Les éléments de la matrice de $\rho(g)$ sont donc les mineurs de g d'ordre r . Cette représentation est un exemple de représentation polynômiale.

Le caractère $\text{Char}(V)$ d'une représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est la fonction

$$\text{Char}(V) : G \rightarrow \mathbf{C}, \quad g \mapsto \text{trace de } \rho(g).$$

Le nom caractère vient du fait que la représentation est complètement déterminée par $\text{Char}(V)$, c'est-à-dire si $\text{Char}(V) = \text{Char}(V')$ comme fonction sur G , alors les représentations sont isomorphes.

Soit $H \subset G$ le sous-groupe des matrices diagonales et soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation polynômiale. L'ensemble D des matrices diagonalisables est *Zariski-dense* dans G , c'est-à-dire, que le seul polynôme f (défini sur $M_n(\mathbf{C})$) qui s'annule sur D est le polynôme $f = 0$. En conséquence, pour une représentation polynômiale nous savons que $\text{Char}(V)$ est déjà déterminée par sa restriction à D . De plus, $\text{Char}(V)$ est invariante par conjugaison : $\text{Char}(V)(g) = \text{Char}(V)(hgh^{-1})$. La trace est donc déjà déterminée par sa restriction à H . Pour le reste de cet article nous considérons donc $\text{Char}(V)$ plutôt comme une fonction sur H : $\text{Char}(V)(h) :=$ la trace de $\rho(h)$.

Une représentation de G sur V est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces de V , stables par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$, sont 0 et V .

Notons que toute représentation polynômiale V de G (de dimension finie) est la somme directe de représentations polynômiales irréductibles : $V = V(\underline{r}_1) \oplus \dots \oplus V(\underline{r}_s)$. Pour étudier les représentations polynômiales de G , il suffit donc de considérer les représentations polynômiales irréductibles.

Le lien entre la combinatoire qu'on a traitée dans les sections précédentes et la théorie des représentations de G est donné par la classification des représentations polynômiales irréductibles de G et leurs caractères :

Théorème 4. *Les représentations irréductibles polynômiales sont en bijection avec les partitions de longueur n .*

Pour une partition \underline{p} notons $V(\underline{p})$ l'espace vectoriel correspondant à la représentation polynômiale irréductible associée.

Exemples. $V((1)) = \mathbf{C}^n$, $V((k))$ est la $k^{\text{ième}}$ puissance symétrique $S^k \mathbf{C}^n$ de \mathbf{C}^n , et $V(\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_r)$ est la $r^{\text{ième}}$ puissance alternée $\Lambda^r \mathbf{C}^n$ de \mathbf{C}^n .

Soit $\underline{t} = \text{diag}(t_1, \dots, t_n)$ un élément de H et soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation polynômiale. Pour $\underline{q} \in \mathbf{N}^n$ notons

$$V_{\underline{q}} := \{v \in V \mid \rho(\underline{t})(v) = (t_1^{q_1} \dots t_n^{q_n})v \forall \underline{t} \in H\},$$

le sous-espace des vecteurs propres communs des éléments de H , de valeur propre $t_1^{q_1} \dots t_n^{q_n}$. On peut montrer que V est la somme directe de tels sous-espaces :

$$V = \bigoplus_{\underline{q} \in \mathbf{N}^n} V_{\underline{q}}.$$

Soit $x_i : H \rightarrow \mathbf{C}$ la projection définie par $x_i(\underline{t}) := t_i$, alors le caractère $\text{Char}(V)$ s'écrit :

$$\text{Char}(V) = \sum_{\underline{q} \in \mathbf{N}^n} (\dim V_{\underline{q}}) x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$$

Le caractère d'une représentation irréductible $V(\underline{p})$ peut être calculé à l'aide des tableaux de Young semi-standard de type \underline{p} . Soit T un tel tableau et soit $\underline{\nu}(T) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ le poids de T . Nous utiliserons l'abréviation suivante : $\underline{x}^{\underline{\nu}(T)} := x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}$.

Théorème 5.

$$\text{Char}(V(\underline{p})) = \sum_{\substack{T \text{ type } \underline{p} \\ \text{semi-standard}}} x^{\underline{\nu}(T)}$$

Remarque 4. La théorie des représentations de $GL_n(\mathbf{C})$ a été étudiée par I. Schur au début de ce siècle. Les résultats donnés plus haut sont tous plus ou moins implicitement dans les travaux de Schur. Implicitement, parce que, par exemple, la notion de tableau (de Young) a été introduite par Young seulement pendant les années trente de ce siècle. L'idée de représenter une partition par un diagramme a été introduite par Ferrers et Sylvester. Le diagramme de «Young» $D(\underline{p})$ est donc souvent aussi appelé le diagramme de «Ferrers».

Nous avons un homomorphisme d'algèbre naturel de \mathcal{P} dans l'anneau des polynômes $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$, définie par $T \mapsto \underline{x}^{\underline{\nu}(T)}$ pour un tableau T de Young semi-standard. Le Théorème 5 nous dit que l'image de

$$s(\underline{p}) = \sum_{T \text{ semi-standard, de type } \underline{p}} T$$

dans $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ est le caractère $\text{Char}(V(\underline{p}))$ de $V(\underline{p})$.

Une façon de produire une nouvelle représentation de deux représentations U, V données, est de considérer le produit tensoriel $U \otimes V$. Soit $B_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$ une base de U et soit $B_2 = \{v_1, \dots, v_l\}$ une base de V , rappelons que $B = \{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, \dots, u_m \otimes v_l\}$ est une base de $U \otimes V$. On en déduit facilement que

$$\text{Char}(U \otimes V) = \text{Char}(U) \text{Char}(V).$$

La représentation $V(\underline{p}) \otimes V(\underline{q})$ est la somme directe de représentations irréductibles :

$$V(\underline{p}) \otimes V(\underline{q}) = \sum_{j=1}^t a_j V(\underline{r}_j),$$

où a_j est la multiplicité de $V(\underline{r}_j)$ dans le produit tensoriel. On obtient pour le caractère :

$$\text{Char}(V(\underline{p}) \otimes V(\underline{q})) = \text{Char}(V(\underline{p})) \text{Char}(V(\underline{q})) = \sum_{j=1}^t a_j \text{Char}(V(\underline{r}_j)).$$

D'autre part, l'image de $s(\underline{p})$ est $\text{Char}(V(\underline{p}))$, l'image de $s(\underline{q})$ est $\text{Char}(V(\underline{q}))$, et l'image de $s(\underline{p}) \circ s(\underline{q})$ est le produit $\text{Char}(V(\underline{p})) \text{Char}(V(\underline{q}))$. Les multiplicités a_j sont donc les mêmes que les multiplicités qu'on a calculées avec la règle de Littlewood-Richardson (Théorème 3).

Corollaire. *La multiplicité a_j de $V(\underline{r}_j)$ dans le produit tensoriel*

$$V(\underline{p}) \otimes V(\underline{q}) = \sum_{j=1}^t a_j V(\underline{r}_j),$$

est égale au cardinal de l'ensemble des tableaux semi-standard de type \underline{q} tels que T est \underline{p} -dominant et $\underline{r} = \underline{p} + \nu(T)$:

$$a_i = \#\{T \mid T \text{ semi-standard de type } \underline{q}, \underline{p}\text{-dominant et } \underline{r}_i = \underline{p} + \nu(T)\}.$$

Bibliographie

- [1] D. E. Knuth, *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux*, Pacific Journal of Math. **34** (1970), 709-727.
- [2] A. Lascoux, M. P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique*, in *Non-commutative structures in algebra and geometric combinatorics*, Quad. Ricerca Sci. **109** (1981), 129-156.
- [3] D. E. Littlewood, A. R. Richardson, *Group characters and algebra*, Phil. Trans. A, **233** (1934), 99-141.
- [4] D. E. Littlewood, *The theory of group characters and matrix representations of groups*, Oxford University Press, London, (1950).
- [5] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall polynomials*, Oxford University Press, London, (1979).
- [6] G. B. Robinson, *On the representation of the symmetric group*, Amer. J. Math., **69** (1938), 745-760.
- [7] M. P. Schützenberger, *La correspondance de Robinson*, *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, Springer Lecture notes, **579** (1976).

LE VOLUME DES DOMES DANS LES MATHEMATIQUES ARABES,
par Yvonne Dold-Samplonius, Université de Heidelberg.

1 Introduction.

Le mot arabe désignant un dôme ou une coupole est *qubba*, pluriel *qibab* ou *qubab*. Par extension *qubba* signifie aussi : édifice construit en voûte, mémorial en dôme ou koubba (monument élevé sur la tombe d'un marabout). A l'époque pré-islamique la *qubba* était une petite tente de cuir en dôme, portée par un chameau, dans laquelle certaines tribus gardaient des pierres sacrées. Ainsi le dôme situé en face du mihrâb¹ - par exemple dans les Grandes Mosquées de Damas, Qayrawan, le Caire et Cordoue - pourrait avoir une signification particulière. A partir de la fin du 9^{ème} siècle et au 10^{ème} siècle apparaît la construction de structures commémoratives sur certains lieux d'inhumation, notamment ceux des saints Shi'ï. A travers le monde islamique, tous les noms spéciaux pour les constructions sépulcrales, qui varient avec le pays, la langue aussi bien que la personne enterrée, sont regroupés sous le nom générique de *qubba*.²

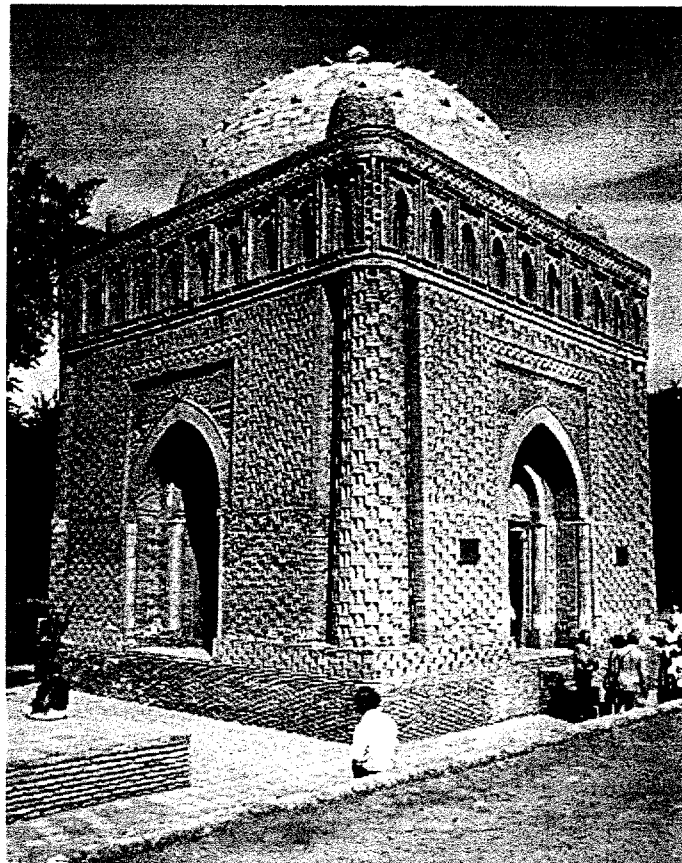


Figure 1 : La Qubba des Samanides à Bukhara .

Il y a fondamentalement deux types de monuments : le circulaire, en forme de tour, et le carré ou polygonal, souvent plus grandiose. Tous deux peuvent être couverts par un dôme

¹ Niche pratiquée dans la muraille d'une mosquée et orientée vers La Mecque.

² cf. Diez [1838/1986] et Ettinghausen [1976] p.65 et 68.

circulaire ou un toit conique ou pyramidal. La forme originale, devenue plus tard stéréotype, est une construction carrée couverte par un dôme. Le plus ancien exemple conservé est la *Qubba des Samanides* à Bukhara (figure 1), construite autour de 907 mais certainement avant 943. Il consiste en une structure carrée avec un grand dôme central et quatre petits dômes en coin élevés sur une galerie.

Dès la période Seljuq (11^{ème} siècle) la construction de dômes avec une double coque fut essayée, avec un aboutissement réussi à l'époque Timuride (première moitié du 15^{ème} siècle). L'objectif d'un tambour monté d'un dôme à double coque est de donner un aspect de tour à l'extérieur. Un exemple frappant est la *Qubba de Tamerlan et Ulugh Beg* à Samarkand (figure 2).

Aussi longtemps que les dômes étaient constitués de cônes ou de portions de sphères, leurs mesures étaient automatiquement rattachées à la mesure des solides et la qubba *en tant que telle* n'avait pas à être mentionnée. Il n'est toutefois pas étonnant que seul Ghiyath-al-Din al-Kashi explique la mesure de qubbas complexes dans son livre « Sur les mesures », une des cinq parties de sa *Clé de l'Arithmétique*. Dans cet article j'étudie d'abord le calcul de la qubba hémisphérique et ensuite la partie³ dans laquelle al-Kashi calcule le volume d'un type de qubba plus complexe. Dans les deux cas les résultats sont vérifiés par des méthodes modernes.

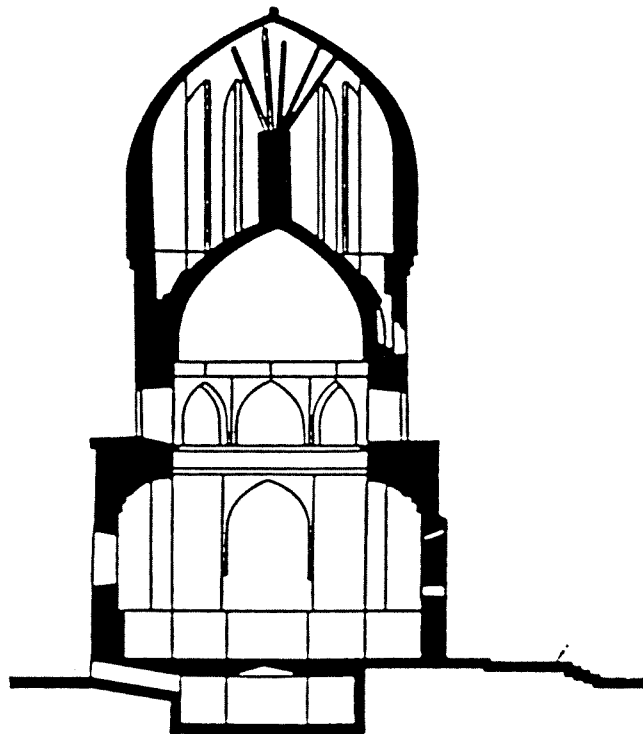


Figure 2 :La Qubba de Tamerlan avec un dôme à deux coques (Pougatchenkova).

2 Mathématiques pratiques.

Sous le règne du calife al-Ma'mun (813-33) le mathématicien et astronome Abu Ja'far Muh. b. Musa al-Khwarizmi⁴ écrivit à Bagdad sa célèbre *Algèbre*, un travail de mathématiques

³ Fols.83r/83v ;Nader[1977] pp.375-380.

⁴ cf. Toomer dans DSB VII, pp 358-365.

pratiques élémentaires. L'intention déclarée par l'auteur est de proposer « ce qui est le plus utile et le plus facile en arithmétique, comme on peut constamment l'éprouver dans des cas d'héritage, de legs, de partage, de décision de justice, de commerce, et dans toutes les transactions avec quelqu'un, ou dans l'arpentage, le creusement de canaux, des calculs géométriques, et d'autres objets de toutes sortes et espèces en rapport »⁵. Il apparaît qu'on avait besoin de conseils le plus souvent pour résoudre les problèmes surgissant à la suite de legs ; ainsi cette partie, la troisième et la dernière du traité, est de loin la plus longue. Ces problèmes impliquent seulement l'arithmétique ou des équations linéaires simples mais exigent une connaissance considérable des lois islamiques sur l'héritage. La seconde partie du traité d'al-Khwarizmi concerne les mesures pratiques⁶. Il donne des règles pour trouver l'aire de différentes figures planes, incluant le cercle, et pour déterminer le volume de nombreux solides, incluant les cônes, les piliers de base circulaire, les pyramides, et les pyramides tronquées. Cette partie est réellement en rapport avec l'application pratique de la mesure, comme le montrent déjà les premières lignes : « On sait que le sens de l'expression *un sur un* est une mesure : à savoir une coudée [*dhira*] (en longueur) par une coudée (en largeur) »⁷. Plus de 600 ans plus tard, en 1427 à Samarkand, durant le règne de Ulugh Beg (1394-1449), l'astronome et mathématicien timuride, Ghiyath al-Din Jamshid al-Kashi⁸ compléta sa *Clé de l'Arithmétique*. Le titre arabe « Miftah al-hisab » peut aussi être lu comme « Miftah al-hussab », *Clé des calculateurs*, les deux versions indiquant la perspective pratique du traité : l'arithmétique est vue comme la clé pour résoudre tous les problèmes qui peuvent être ramenés à des calculs. Dans l'introduction al-Kashi explique : « j'ai rédigé ce livre et rassemblé dedans tout ce qui est utile pour celui qui calcule soigneusement, évitant la longueur ennuyeuse ou la brièveté disgracieuse ». Ce travail est une sorte d'encyclopédie de mathématiques élémentaires, mais pas trop élémentaires. Les problèmes d'héritage n'interviennent pas ici. Le travail est réparti en cinq livres, le plus long étant le livre IV *Sur les mesures*. Des règles y sont données pour mesurer des aires de toutes sortes, incluant des figures planes comme les surfaces en anneaux ou en étoiles aussi bien que les aires de surfaces courbées, et pour trouver des volumes de solides : cylindre, cône, cône tronqué, intersection de cônes, sphère, etc. jusqu'à des constructions réelles. Son dernier chapitre, numéro neuf, *Mesures de structures et constructions* est constitué en fait de mathématiques pratiques, comme al-Kashi l'explique : « Les spécialistes se sont exprimés simplement à ce sujet (c-à-d la mesure) pour l'arche et la voûte, et le reste n'était pas considéré comme nécessaire. Mais je présente cela parmi les nécessités ensemble avec le reste, parce que c'est plus souvent requis dans la mesure des constructions que dans le reste ». Le chapitre neuf est divisé en trois sections :

1. Mesure de l'arche et de la voûte.
2. Mesure de la qubba.
3. Mesure de muqarnas.⁹

Al-Kashi distingue les catégories suivantes de qubba : « Elles apparaissent sous la forme d'hémisphère creux, sous la forme d'une partie de sphère creuse, sous la forme d'un cône polygonal, ou sous la forme produite en imaginant une rotation d'une coupe d'arche, c-à-d d'une arche comme mentionnée en section 1, autour de sa hauteur, qui est le segment joignant sa limite la plus haute avec le milieu du segment entre ses bases ».

⁵ Rosen [1831] trad. .p.3.

⁶ Rosen l.c. trad., pp.70-86.

⁷ Dans la traduction de Gandz ce passage est : « On sait que le sens de l'expression *un par un* est l'aire, et sa signification est : une coudée par une coudée.

⁸ cf Dold-Samplonius [1992/3]

⁹ cf Dold-Samplonius l.c.

Al-Kashi indique seulement comment calculer la dernière catégorie de qubba. Le calcul des deux premières catégories, remarque-t-il, avait été signalé plus tôt dans le livre IV, en relation avec la mesure de la sphère et de ses sections, c-à-d les surfaces dans le chapitre 6, sections 4 et 5, et leurs volumes dans le chapitre 7, section 5 et 6. La catégorie 3 a été mentionnée en lien avec la mesure du cône, c-à-d dans le chapitre 6, section 3 et chapitre 7, section 2 pour la surface et le volume respectivement.

La première mention de la mesure de la qubba est trouvée dans un livre d'Abu'l-Wafa al-Buzjani,¹⁰ écrit entre 961 et 976. Ce travail sur l'arithmétique pratique, *Livre sur ce qui est nécessaire dans la science de l'arithmétique pour les scribes et pour les hommes d'affaires*¹¹ est constitué de sept parts. Les trois premières parties, sont purement mathématiques, c-à-d sur les ratios, les multiplications, les divisions, et les mesures. Les quatre autres parties contiennent les solutions de problèmes pratiques, c-à-d taxes, échanges et partages relatifs à la récolte, problèmes concernant le paiement du travail, et l'estimation de constructions.¹² Dans l'introduction à la troisième partie, il est annoncé que le chapitre 6, *Sur la mesure des solides*, sera sur la mesure de « ...autres choses tombant sous la forme de sphères, comme les cylindres, les cônes et les **qubbas**. » Les solides considérés par Abu'l-Wafa dans le chapitre 6 cité sont le cube, le cuboïde, le prisme, le cylindre, le cône, le tronc de cône, la sphère, aussi bien que les sections sphériques. La qubba n'est mentionnée nulle part. Bien qu'un cône ou les sections d'une sphère incluent toutes les qubbas existant à l'époque d'Abu'l-Wafa (voir ci-dessus).

Depuis, le calcul du volume et des aires de qubbas forme un chapitre courant de beaucoup de livres d'arithmétiques pratiques. A présent il semble que seules les qubbas de forme hémisphérique creuse ont été considérées, comme c'est le cas dans le traité *L'indispensable pour les calculateurs* (MS. Ayasofya Kutuphanesi 2728 fol. 26r-125v) par Ahmad b. Thabat (d 1234).¹³ Le type complexe de qubba calculé par al-Kashi était déjà considéré à cette époque mais n'atteindra son plein développement que beaucoup plus tard.

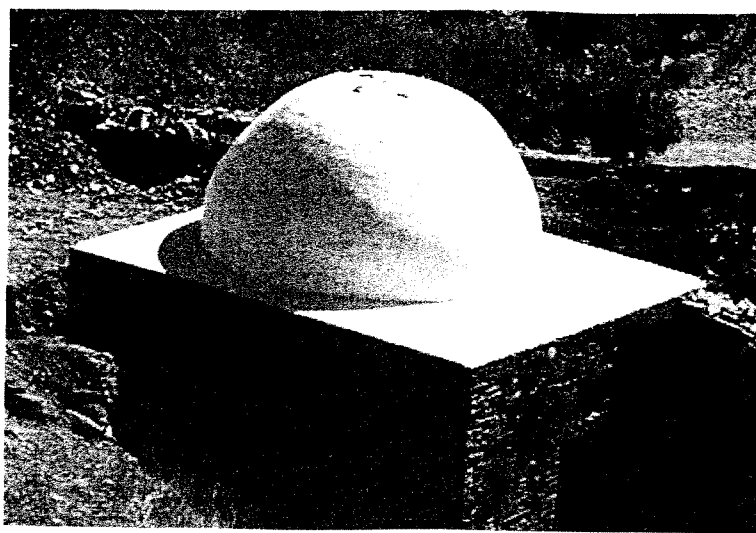


Figure 3 : Qubba du 11^{ème} siècle, à Monsaras (Portugal), christianisée au 14^{ème} siècle.

¹⁰cf Youschkevitch in DSB I, pp 39-43.

¹¹ Edité par Saidan [1971], basé sur Leiden MS.Or.103 et sur Caire MS. Riyada 42 M.

¹² cf Saidan [1974] pp. 369-375.

¹³ Je remercie Dr Ulrich Rebstock [Tübingen] pour avoir fourni les informations et les photocopies d'extraits aussi bien du traité de Ahmad b. Thabat que des commentaires de ibn al-Hanbali cf Rebstock pp. 132-133.

3 Mesure d'une Qubba hémisphérique.

Une Qubba hémisphérique (figure 3) est supposée se composer d'une coque solide entre deux hémisphères concentriques. En pratique (figure 2) les surfaces intérieures et extérieures de la coque ne sont jamais réellement parallèles, parce que dans la partie plus basse, jusqu'à un angle de 61 degrés, il y a la pression et il y a le tirage dans la partie supérieure.¹⁴ Quand les diamètres intérieur et extérieur de l'hémisphère de qubba sont connus, son volume et les aires des surfaces intérieures et extérieures peuvent être calculées comme suit : on sait comment calculer l'aire d'une sphère de diamètre égal au diamètre extérieur. La moitié de cette valeur est la surface extérieure de la qubba. De manière analogue, la surface intérieure peut être calculée.

Pour calculer le volume de la qubba, on calcule les volumes des sphères intérieure et extérieure et on prend chaque fois la moitié. La différence entre les deux nombres est le volume de la qubba.

Les formules de calcul sont : Aire de la sphère = $(2r)^2 \pi$, et

Volume de la sphère = Aire de la sphère $\times \frac{r}{3}$, où $2r$ est le diamètre.

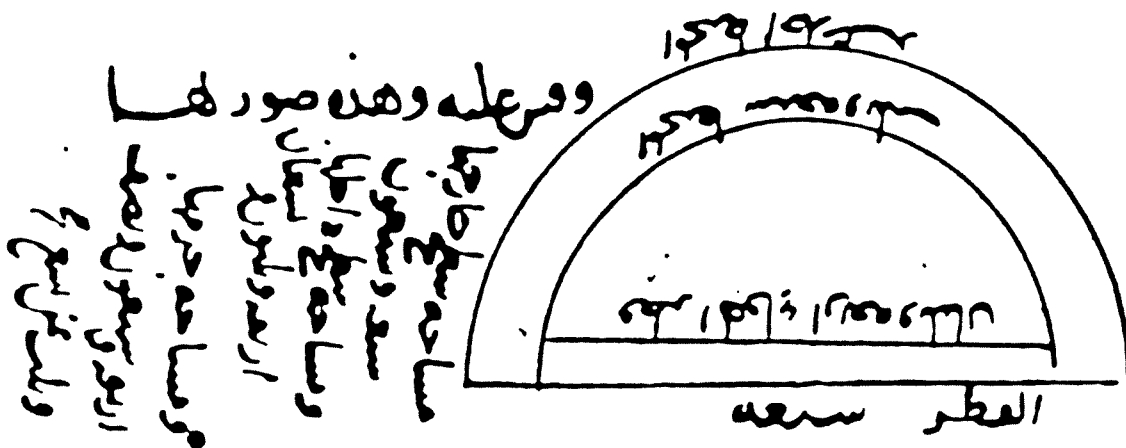


Figure 4 : Figure du calcul de la qubba hémisphérique.¹⁵ Les valeurs des deux diamètres sont précisées sur chaque diamètre et les calculs du volume et de l'aire sont écrits à gauche.

Dans le traité mentionné ci-dessus par Ahmad b. Thabat un exemple est donné (figure 4), dans lequel le diamètre extérieur égale sept et le diamètre intérieur égale quatre et deux tiers,

$(2r)_{\text{extérieur}} = 7$; $(2r)_{\text{intérieur}} = 4\frac{2}{3}$. π est exprimé comme d'habitude : écarte un septième et la

moitié d'un septième et multiplie par quatre : $\pi = (1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}) \times 4 = \frac{11}{14} \times 4 = 3\frac{1}{7}$.

Avec ces valeurs les aires des surfaces et le volume de la qubba sont calculés ainsi :

¹⁴ L'information a été communiqué aimablement par le professeur Erich Rossmann, architecte à Karlsruhe.

¹⁵ Fol.116v.

$$\text{Aire de la sphère extérieure} = 7^2 \times \frac{11}{14} \times 4 = 154 \Rightarrow \text{Aire de la qubba extérieure} = \frac{154}{2} = 77$$

$$\text{Aire de la sphère intérieure} = \left(4\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{11}{14} \times 4 = 68\frac{4}{9} \Rightarrow \text{Aire de la qubba intérieure} = 34\frac{2}{9}$$

Pour calculer le volume de la qubba, Ahmad b. Thabat procède comme suit, utilisant une formule incorrecte mais répandue :

$$\text{Volume de la sphère} = (2r)^3 \times \frac{11}{14} \times \frac{11}{14}$$

$$\text{Volume de la sphère extérieure} = 7^3 \times \frac{11}{14} \times \frac{11}{14} = 211\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ Volume sphère extérieure} = 105\frac{7}{8}$$

$$\text{Volume de la sphère intérieure} = \left(4\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{11}{14} \times \frac{11}{14} = 62 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \times 9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \text{ Volume de la sphère intérieure} = 31 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 9}$$

$$\begin{aligned} \text{Volume de la qubba} &= \frac{1}{2} \text{ Volume de la sphère extérieure} - \frac{1}{2} \text{ Volume de la sphère intérieure} = \\ &74 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Quand on calcule le volume de qubba au moyen de formules correctes, en prenant pour π la valeur $3\frac{1}{7}$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \text{ Volume de la sphère extérieure} = \frac{1}{2} \text{ Aire de la sphère extérieure} \times \frac{r}{3} = 77 \times \frac{7}{2 \times 3} = 89\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} \text{ Volume de la sphère intérieure} = \frac{1}{2} \text{ Aire de la sphère intérieure} \times \frac{r}{3}$$

$$= 34\frac{2}{9} \times \frac{4\frac{2}{3}}{2 \times 3} = 26 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{3 \times 6 \times 9}$$

$$\text{Volume de la qubba} = \frac{1}{2} \text{ Volume de la sphère intérieure} - \frac{1}{2} \text{ Volume de la sphère intérieure}$$

$$= 63 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3 \times 9} + \frac{1}{9 \times 9}$$

L'erreur relative est indépendante du diamètre. En comparant les résultats calculés avec la formule correcte et avec la formule extraite du traité d' Ahmad b. Thabat, on trouve la différence (D) :

$$D = (2r)^3 \times \frac{11}{14} \times \frac{11}{14} - \pi(2r)^2 \times \frac{r}{3} = (2r)^3 \left[\left(\frac{11}{14}\right)^2 - \frac{\pi}{6} \right], \text{ avec } \pi = 3\frac{1}{7},$$

$$D = (2r)^3 \left(\frac{121}{196} - \frac{22}{42} \right) = (2r)^3 (0,6173 - 0,5238) = 0,0935 (2r)^3.$$

cela signifie que le volume calculé est plus grand de 17,86% (!) par rapport au volume correct, indépendamment de la valeur du diamètre.

Al-Kashi n'effectue pas le calcul de la qubba hémisphérique, mais se réfère à son calcul de la sphère. Là, il utilise, comme attendu, les formules correctes pour l'aire et le volume, exprimant π comme rapport entre la circonférence et le diamètre du cercle. Ainsi Abu'l-Wafa donne les définitions ou formules correctes, mentionnant Archimède¹⁶. Bien qu'al-Karaji¹⁷, qui vécut un siècle après Abu'l-Wafa, emploie dans *Ce qui suffit en arithmétique* exactement les mêmes formules que Ahmad b. Thabat¹⁸. Ici il explique aussi comment mesurer un hémisphère creux en soustrayant l'intérieur creux de l'hémisphère.

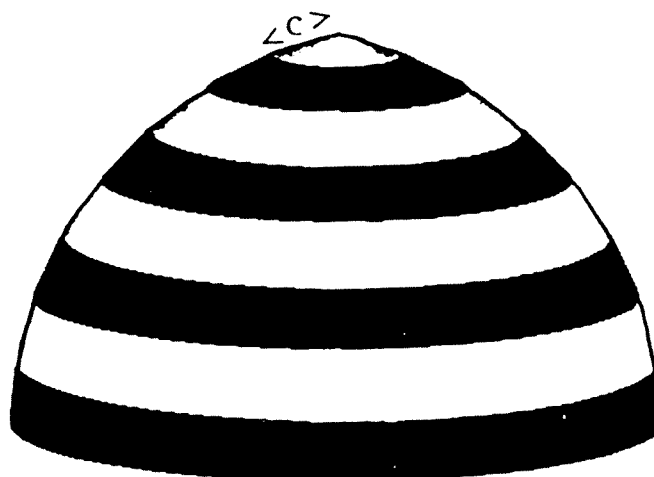


Figure 5 : Qubba, découpée en huit tranches (simulation, avec ordinateur, de Kindl).

4 Mesure de la Qubba par al-Kashi.

Comme mentionné ci-dessus, al-Kashi indique seulement comment calculer le type complexe de qubba, c'est-à-dire le dôme engendré par une rotation d'un arc, autour de son axe vertical. La méthode est la suivante (figure 5) : le dôme est divisé en tranches parallèles en traçant des cercles, centrés sur l'axe, sur sa surface. Ces cercles doivent être si proches que les arcs entre deux de ces cercles égalent les cordes correspondantes. Sept ou huit de ces cercles devraient normalement suffire, d'après al-Kashi. De cette façon, le dôme est coupé en un cône et plusieurs troncs de cône. On mesure d'abord tous les cercles sur la surface du dôme. La prochaine étape est la mesure de la distance du sommet du dôme au cercle le plus proche, c'est-à-dire la corde (figure 5 :c) égalant l'arc sur le cercle. En multipliant cette valeur avec la demi-circonférence du cercle le plus proche, on obtient l'aire de la surface du cône. Enfin on multiplie la demi-somme de chacun des deux cercles voisins par leur distance pour obtenir l'aire de la surface de tous les troncs de cône. La somme de ces produits vaut l'aire de la surface de la qubba.

Pour obtenir le volume de la qubba, qui est un solide creux, on mesure d'abord les volumes du cône et des troncs de cône, qui remplissent la surface extérieure de la coque, et on les ajoute. De cette somme, on soustrait ensuite la somme des volumes du cône et des troncs de

¹⁶ Saidan [1971] l.c. p.268.

¹⁷ cf. Rashed dans DSB VII, pp. 240-246.

¹⁸ Hochheim [1877-80] part 2, p.28.

cône qui remplissent l'intérieur de la coque. La différence entre les deux sommes est le volume de la qubba, comme on l'a vu auparavant dans le cas de la qubba hémisphérique. Dans la section *Mesure de l'arche et de la voûte*, al-Kashi décrit cinq méthodes pour tracer la coupe d'une arche, tous les cinq types étant basés sur des arcs de cercle. Pour illustrer la méthode générale il l'applique à une qubba du quatrième type, construite comme suit ¹⁹ (figure 6) :

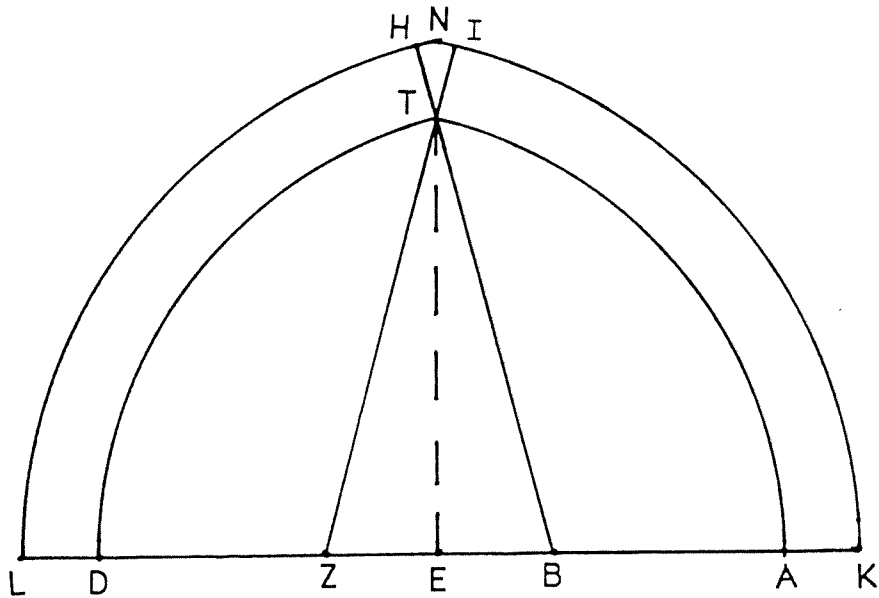


Figure 6 : Construction d'une arche du quatrième type.

AD, c'est-à-dire l'écartement intérieur de l'arche, est divisé par les points B et Z en trois parties de longueurs égales. On trace l'arc DT de centre B et l'arc AT de centre Z. BT et ZT sont prolongés de l'épaisseur de l'arche, à partir de T, et donnent les points H et I. On trace alors l'arc LH de centre B et l'arc IK de centre Z. On construit en H et I les perpendiculaires à TH et TI, qui se coupent en N. Le complexe des trois sections TK, TN, et TL constitue alors la coupe de l'arche. Pour les calculs il suffit de dire que la coupe de l'arche consiste en deux sections entre deux arcs parallèles, c'est-à-dire ND et NA. Je suppose que al-Kashi mentionne le coin TN à cause de son importance pratique.

Pour obtenir l'aire de la surface intérieure du dôme on multiplie le carré du diamètre de la base de l'intérieur du dôme creux par $1^{\circ}46'32''$, si on calcule en sexagésimal, ou par 1,775, en calculant en décimal²⁰. Quand on multiplie le carré du diamètre de la base de la coque extérieure du dôme par le même nombre, on obtient l'aire de la surface extérieure du dôme, en supposant les surfaces extérieures et intérieures parallèles entre elles. Quand on multiplie le cube du diamètre de l'intérieur du dôme aussi bien que le cube du diamètre de la base du dôme par $0^{\circ}18'23''$ en sexagésimal, ou par 0,306 en décimal, et qu'on prend la différence de deux produits, on obtient le volume de la qubba creuse.

« Pour simplifier l'exposé », al-Kashi n'explique pas comment il est arrivé à ces résultats. Pour une application pratique, les règles seules suffisent. Les questions suivantes nous

¹⁹ Fol. 79v ; Nader l.c., p.359.

²⁰ Sur le calcul de ce facteur et la vérification de cette valeur par des méthodes modernes cf. l'annexe et Dold-Samplonius [1992].

viennent à l'esprit : (1) Quelle est la précision des facteurs d'al-Kashi ? (2) En combien de tranches a-t-il coupé le dôme pour obtenir ces facteurs ?

5 La précision du facteur de calcul du volume.

Pour vérifier la valeur d' al-Kashi, $0^{\circ}18'23''$ en sexagésimal, ou 0,306 en décimal, on intègre le volume comme suit (figure 7) :

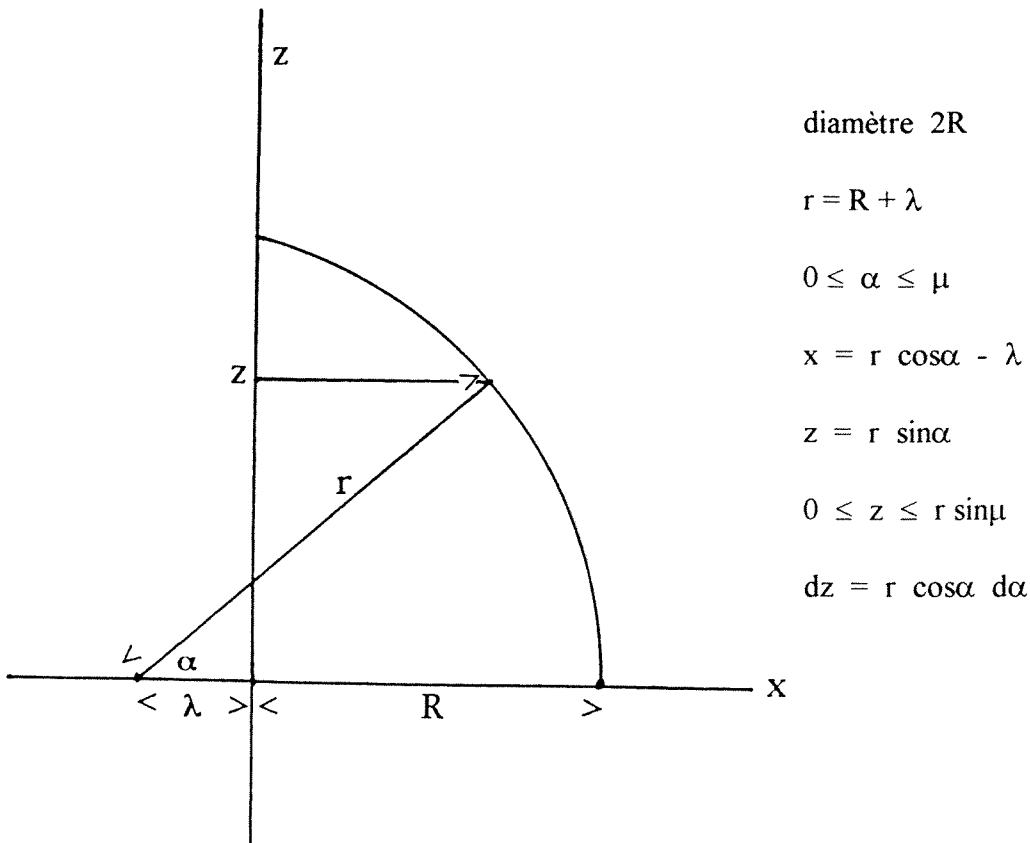


Figure 7.

L'aire $F(z)$ du disque au niveau z est $F(z) = x^2 \pi$. Le volume de la qubba est donc :

$$\begin{aligned} \text{Volume de la Qubba} &= \int_0^{r \sin \mu} F(z) dz \text{ où } \cos \mu = \frac{\lambda}{r}, \\ \int_0^{r \sin \mu} F(z) dz &= \pi \int_0^{r \sin \mu} (r \cos \alpha - \lambda)^2 dz = \pi r \int_0^{\mu} (r \cos \alpha - \lambda)^2 \cos \alpha d\alpha = \\ \pi r \int_0^{\mu} (r^2 \cos^3 \alpha - 2\lambda r \cos^2 \alpha + \lambda^2 \cos \alpha) d\alpha &= \\ \pi r^3 \int_0^{\mu} \cos^3 \alpha d\alpha - 2\lambda \pi r^2 \int_0^{\mu} \cos^2 \alpha d\alpha + \lambda^2 \pi r \int_0^{\mu} \cos \alpha d\alpha &= \\ \frac{\pi r^3}{3} (\sin \mu \cos^2 \mu + 2 \sin \mu) - \lambda \pi r^2 (\sin \mu \cos \mu + \mu) + \lambda^2 \pi r \sin \mu. \end{aligned}$$

Comme $\cos\mu = \frac{\lambda}{r}$, avec $\sin\mu = \frac{\sqrt{r^2 - \lambda^2}}{r}$, on obtient:

$$\text{Volume de la Qubba} = \pi (\sqrt{r^2 - \lambda^2} \times \frac{\lambda^2 + 2r^2}{3} - \lambda r^2 \arccos(\frac{\lambda}{r})) .$$

Dans l'exemple pratique d' al-Kashi, le diamètre intérieur $2R$ de la qubba est égal à 6, ce qui signifie que :

$$r = 4 , \quad \lambda = 1 \quad \text{et} \quad \text{Volume} = \pi(\sqrt{15} \times \frac{33}{3} - 4^2 \arccos(\frac{1}{4})) = 67,584955.$$

$$\frac{\text{Volume}}{(2R)^3} = 0,3128933(\text{décimal}) = 0^\circ 18' 46''(\text{sexagésimal}).$$

Ici encore, pour la même raison que dans le cas de l'aire de la surface de la qubba, notre valeur approchée est supérieure à la valeur calculée d' al-Kashi. Cependant, dans le cas de l'aire, l'erreur était seulement de 0,48%, alors que dans le cas du volume c'est une erreur de 2,2%. C'est une erreur très modérée en comparaison des 18% dans le calcul de l'hémisphère de la qubba ci-dessous et acceptable pour des architectes modernes. Mais comme al-Kashi calculait un facteur avec seulement 0,48% d'écart pour l'aire de la surface, pourquoi n'a-t-il pas fait de même pour le volume ?

Il y a une autre erreur évidente, quand al-Kashi utilise le même facteur pour l'intérieur et l'extérieur du volume creux. Que se passe-t-il quand le diamètre croît ? Supposons que le diamètre extérieur $(2R)$ du dôme égale 6,5 (cf figure 6). On calcule son volume par la formule développée ci-dessous :

$$\text{Volume de la Qubba} = \pi (\sqrt{r^2 - \lambda^2} \times \frac{\lambda^2 + 2r^2}{3} - \lambda r^2 \arccos(\frac{\lambda}{r})) .$$

$$2R = 6,5 , \quad \lambda = 1 , \quad \text{et} \quad r = \frac{6,5}{2} + 1 = 4,25.$$

$$\text{Alors, Volume} = \pi(\sqrt{(\frac{17}{4})^2 - 1} \times \frac{2 \times (\frac{17}{4})^2 + 1}{3} - (\frac{17}{4})^2 \arccos(\frac{4}{17})) = 84,932507.$$

$$\frac{\text{Volume}}{(2R)^3} = \frac{84,932507}{(6,5)^3} = 0,3092672.$$

Dans ce cas , le facteur d' al-Kashi de 0,306 pour le calcul du volume est trop petit de seulement 1,0564%. Cela signifie qu'en prenant la différence avec le volume intérieur, trop petit de 2,2%, le volume résultant de la qubba est plus ou moins correct. Ceci, dans un exemple pratique , où le diamètre intérieur de la qubba mesure 6 m et où la coque de la qubba a une largeur de 25 cm, tandis que le diamètre extérieur égale 6,5 m, le volume de la coque de qubba calculé par la méthode d' al-Kashi est correct pour toutes les utilisations pratiques.

Examinons à nouveau le calcul de l'aire de la surface et observons ce qui se passe dans ce cas avec l'aire de la surface extérieure. Appliquant notre formule, explicitée dans l'annexe²¹, nous avons :

²¹cf. Dold-Samplonius [1992] I.c.

$$F = 2\pi r (\sqrt{r^2 - 1} - \arccos(\frac{1}{r}))$$

$2R = 6,5$, $r = R + 1$ soit $r = 4,25$, alors:

$$F = 8,5\pi(\sqrt{(\frac{17}{4})^2 - 1} - \arccos\frac{4}{17}) = 74,700548.$$

Quand nous divisons l'aire de la surface par le carré du diamètre, nous obtenons:

$$\frac{F}{(2R)^2} = \frac{74,700548}{6,5^2} = 1,768.$$

Ici la valeur d' al-Kashi de 1,775 est supérieure à notre valeur calculée de 0,39%, ce qui ne pose pas de problèmes pour les applications pratiques. Si les constructeurs ont à calculer l'aire d'une surface intérieure aussi bien qu'extérieure, par exemple pour déterminer la quantité nécessaire de plâtre , les erreurs s'équilibrent également.

6 Comment découper le dôme en tranches ?

Combien de cercles al-Kashi a-t-il tracé sur la surface du dôme ? Ou pour le formuler autrement, combien de tranches a-t-il utilisé pour obtenir ses facteurs ? Dans la figure 8 nous voyons une simulation par ordinateur de trois qubbas, découpées en sept , trente-six et six tranches de la gauche vers la droite. De manière plutôt étonnante, six tranches, soit seulement cinq cercles tracés sur la surface, approchent assez bien la courbe désirée. Comme je l'ai mentionné en lien avec les calculs du muqarnas²², al-Kashi avait beaucoup de connaissances pratiques.

Pour établir le nombre de tranches , nous avons calculé le volume et les aires de surface pour plusieurs cas. Les calculs ont été faits à l'ordinateur en accord avec les méthodes indiquées par al-Kashi. A partir du résultat, nous avons déduit les facteurs respectifs :

Aire : Comme le facteur d'al-Kashi pour l'aire est plus exact que son facteur pour le volume , nous avons d'abord calculé l'aire, ajoutant l'aire du cône supérieur et de tous les troncs de cônes. Sept ou huit cercles , huit ou neuf tranches, suffisent normalement d'après al-Kashi.

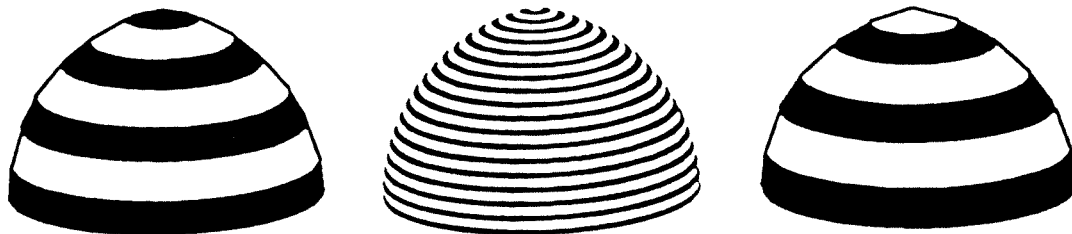


Figure 8 : Qubbas coupées en sept, trente-six et six tranches (simulation par ordinateur de Kindl)

²² Dold-Samplonius [1992/3], I.c.

En calculant avec huit tranches on obtient ce qui suit : l'aire du cône supérieur plus l'aire de surface des sept troncs de cônes s'élève à 63,918, pour lesquelles le facteur serait de 1,77551. En calculant avec neuf tranches le résultat pour le dôme donne une aire de 67,1268, ou un facteur égal à 1,77721. Avec six tranches nous obtenons une aire totale de 63,6908, ce qui signifie un facteur égal à 1,76919.

Al-Kashi propose comme facteur 1,775, ce qui veut dire qu'il a fait le calcul avec huit tranches, c'est-à-dire à partir de sept cercles tracés sur la surface du dôme. Une telle qubba est montrée en figure 5.

Volume : En calculant le volume du dôme pour huit tranches, nous devons ajouter le volume du cône supérieur et les volumes des sept troncs de cône, ce qui s'élève à 67,0055 avec un facteur de 0,310211.

Pour six tranches le volume total serait 66,557, avec un facteur de 0,308134. Et pour cinq tranches nous obtenons un volume de 66,1078, avec un facteur de 0,306055. Le dernier facteur est la valeur indiquée par al-Kashi, mais je ne pense pas que ce facteur soit le résultat d'un calcul pour cinq tranches seulement. Comme il obtenait une excellente valeur dans le cas de l'aire, il aurait été parfaitement capable de faire la même chose dans le cas du volume.

Ma conclusion est que les écarts entre facteurs pour le volume sont en rapport avec les raisons pratiques expliquées ci-dessus.

7 Conclusion

Dans tous les exemples, l'intérieur et l'extérieur de la surface de la coque de la qubba sont supposées parallèles. En pratique la partie basse d'un dôme doit être renforcée et le haut peut être relativement fin. Cependant, cet effet n'affecte que la surface extérieure, qui devient quelque peu déformée. C'est spécifiquement un problème si le dôme est très large, comme dans le cas de Hagia Sophia. Pour des qubbas plus petites l'effet ne sera pas significatif.

Un résultat acceptable pour le volume peut être probablement calculé avec le facteur découvert par al-Kashi. Dans le cas d'une qubba hémisphérique, l'erreur de 18% est beaucoup trop grande, erreur bien avantageuse aux architectes, leur honoraire étant basé sur le volume construit.

Annexe : calcul de l'aire de la Qubba :

Pour calculer l'aire de la Qubba, basé sur la coupe 4, al-Kashi dit « multiplier le carré du diamètre de base de l'intérieur du dôme creux par $1^{\circ}46'32''$ ou par 1,775 pour obtenir l'aire de la surface du dôme creux. » Pour déterminer la précision des calculs d'al-Kashi, le nombre 1,775 a été vérifié. Pour cette raison, l'aire de la coque intérieure de la Qubba a été calculée par des méthodes modernes et cette valeur a été divisée par le carré du diamètre de sa base.

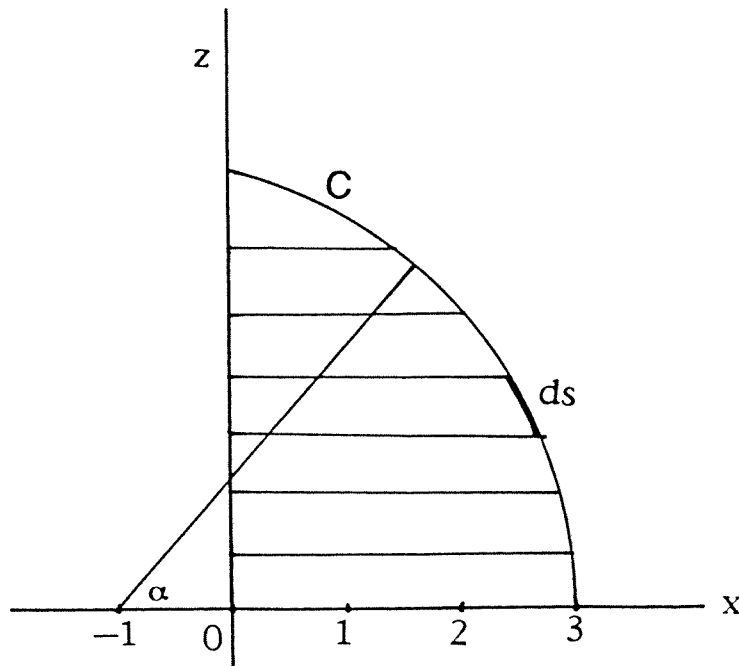


Figure 9.

L'aire F de surface de la Qubba est obtenue par rotation de son méridien C dans le plan (Oxy) autour de l'axe (Oz) (figure 9). Le méridien C est paramétré par l'angle α comme suit :

$$x = 4 \cos \alpha - 1, \quad z = 4 \sin \alpha, \quad \text{où : } 0 \leq \alpha \leq \mu \quad \text{et} \quad \cos \mu = \frac{1}{4}.$$

La surface de révolution se calcule par : $F = 2\pi \int_0^\mu x ds$, ($\cos \mu = \frac{1}{4}$)

et l'élément de l'arc ds : $ds = 4 d\alpha$ (arc de cercle de rayon 4),

$$\text{d'où: } F = 2\pi \int_0^\mu x ds = 2\pi \int_0^\mu 4(4 \cos \alpha - 1) d\alpha = 8\pi(4 \sin \mu - \mu)$$

et comme : $\cos \mu = \frac{1}{4}$ et $\sin \mu = \frac{1}{4} \sqrt{15}$ alors: $F = 8\pi(\sqrt{15} - \arccos(\frac{1}{4}))$.

Comme $\sqrt{15} = 3,8729833$, $\arccos(\frac{1}{4}) = \frac{75,5225}{360} \times 2\pi = 1,3181163$,

nous avons: $\sqrt{15} - \arccos(\frac{1}{4}) = 2,554867$ et $F = 8\pi \times 2,554867 = 64,210812$.

Alors le rapport entre l'aire F et le carré du diamètre est:

$$\frac{64,210812}{36} = 1,7836337 = 1^\circ 47' 1''.$$

La valeur d'al-Kashi est légèrement inférieure, parce qu'il approximait à partir de l'intérieur. Quand on exprime en mode sexagésimal, qui est le mode avec lequel al-Kashi calculait, la différence est même moindre. Cependant, la plus petite valeur n'est pas un problème, car la pratique de la vie quotidienne les quantités de matériaux de construction, de peinture ... seront normalement arrondies à la valeur supérieure.

Bibliographie :

- Bretanizkij, L.S. et Rosenfeld, Boris A., 1956 : « Architecture dans le traité « Clé de l'arithmétique » de Ghiyath al-Din al-Kashi », (Russe) *Iskusstvo Azerbaidjana* 5, pp. 87-130.
- DSB, 1970-80 : *Dictionary of scientific Biography*, 16 vols. New York.
- Diez, E., 1938 /1986 : « Kubba », *Encyclopaedia of Islam*, Volume supplémentaire, pp. 139-146, repr. dans la 2nde édition Vol. V, pp.289-296.
- Dold-Samplonius, Yvonne 1992 : « The XVth Century Timurid Mathematician Ghiyath al-Din Jamshid al-Kashi and his computation of the Qubba ». « *Amphora* », *Festschrift for Hans Wussing on the Occasion of his 65th Birthday*. Ed.S.S. Demidov, M. Folkerts, D ; E. Rowe, Ch.J.Scriba. Basel et al., pp.171-181.
- Dold-Samplonius, Yvonne 1993 : « Practical Arabic Arithmetics : Measuring the Muqarnas by al-Kashi » . *Centaurus* 35 pp.193-242.
- Ettinghausen, Richard, 1976 : « *The Man-made Setting* ». *The World of Islam*. Ed. B. Lewis. London, pp. 57-88.
- Gandz, Solomon, 1932 : « The Mischnat ha Middot »(Allemand). *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*. Abt. A Quellen, Vol.2.Berlin.
- Hochheim, Adolf, 1877-80 : *Kafi fi l Hisab* (Genügendes über Arithmetik) (Allemand). Halle. Repr.1998 : *Islamic Mathematics and Astronomy*, Vol. 38. Frankfurt/Main.
- Al-Kashi, Ghiyath al-Din, 1427/1558 : *Miftah al-Hisab* (Clé de l'arithmétique). Ms. Or. 185, Leiden. Traduction Russe v. Rosenfeld.
- Lewis, Bernard (ed.), 1976 : *The World of Islam*. London.
- Luckey, Paul, 1951 : *Die Rechenkunst bei Jamshid b. Mas'ud al-Kashi mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens*.(Allemand). Wiesbaden.
- Nader, Nabusi, 1977 : *Al-Kashi, Ghiyath al-Din : Miftah al-Hisab* (Clé de l'Arithmétique). Edition Arabe, notes et introduction en Français, Damas.
- Pougatchenkova, Galina A., 1981 : *Chefs d'œuvre d'architecture de l'Asie Centrale XIVe - XVe siècle*. Paris.
- Rebstock, Ulrich, 1993 : *Die Reichtümer der Rechner von Ahmad b. Thabat*, (Allemand). Beiträge zur Sprach- und Kulturgeschichte des Orients, Vol. 32. Walldorf-Hessen.
- Rosen, Frederic, (ed. et trad.), 1831 : *The Algebra of Mohammed Ben Musa*. London. Repr.1997 : *Islamic Mathematics and Astronomy*, Vol.1 Frankfurt/Main.
- Rosenfeld, Boris A. and Youschekevitch, Adolf P., 1956 : *Al-Kashi, Ghiyath al-Din : Miftah al-Hisab* (Clé de l'Arithmétique). Traduction Russe avec commentaires. Moscou.
- Saidan, Ahmad S., 1971 ,*The Arithmetic of Abu al-Wafa al-Buzajani*, .(Arabe). Edition, introduction et commentaires avec références à *The Arithmetic of al-Karaji* . Amman.
- Saidan, Ahmad S., 1974 : « The Arithmetic of Abu'l-Wafa », *ISIS*, pp. 367-375.

VERSIONS POLYEDRIQUES DU RETOURNEMENT DE LA SPHERE

par Richard Denner
Institution La Providence Strasbourg, annexe de Vendenheim.

" ... les mathématiques donnent à ceux qui les aiment, les pratiquent, les utilisent ou, mieux encore, à qui les inventent, la certitude immédiate et expérimentale, oui, vécue, de la présence inévitable d'une corne d'abondance d'où l'on tire toujours tout de rien. Certes tout s'y trouve, mais nous n'avons pas d'yeux pour le voir ! "

Michel Serres, les origines de la géométrie, p 333.

Première partie : Utilisation de la surface de Boy.

Introduction :

Il est des problèmes, qui sont de véritables défis lancés à l'imagination. En 1957, un jeune chercheur Stephen Smale travaillant sur les déformations de sphères conjectura, puis démontra un an plus tard, qu'une sphère pouvait être retournée.

Sans entrer dans plus de détails, disons que **retourner une sphère, c'est imaginer une déformation permettant d'échanger sa face interne avec sa face externe !**

Les pages qui suivent, retracent le chemin que j'ai eu l'occasion de parcourir, suite à ma préparation au capes, avec le professeur Bernard Morin, mathématicien aveugle, de l'Université Louis Pasteur. Il s'est attaché à plusieurs reprises au cours de sa carrière à ce problème avec toute la puissance de son imagination. Ensemble, nous avons mené à son terme une version polyédrique de ce problème.

On a beau appuyer de toutes les manières possibles sur un ballon, on n'arrivera jamais à échanger ses faces interne et externe, sans trous sa membrane.

Si l'on veut quand même le faire, une première condition est d'autoriser la surface à se traverser elle-même. Matériellement cela est évidemment impossible. Cependant si l'on considère une sphère dessinée sur un écran d'ordinateur, ou simplement sur une feuille de papier, rien n'empêche d'essayer.

C'est ce qu'avait fait Jean Pierre Petit dans un article de "Pour la Science" [1] paru en janvier 1979. On y découvre des dessins illustrant la transformation imaginée par Bernard Morin ainsi qu'un historique du retournement de la sphère.

Une collection de 8 modèles en grillage fut réalisée en 1973 par Charles Pugh. Mystérieusement disparue de la salle de réunion du département de mathématiques de

Berkeley où elle fut exposée, elle ne subsiste plus que sous la forme d'un film pédagogique réalisé en 1976 par Nelson Max.

Le présent travail, mené de 1989 à 1992, a conduit à la réalisation d'une série de 45 modèles en trois dimensions qui permettent de donner très rapidement une vision globale du processus tout en montrant sa complexité. Ces modèles n'ont malheureusement pas pu être exposés à la Villette ou au Palais de la Découverte comme Morin l'avait souhaité. De nombreuses photos ont été prises ainsi que des diapositives, elles complètent cet article. C'est sur le chemin de la découverte de cette déformation que je me propose de vous accompagner. Le point de départ sera le plan projectif.

1. Le plan projectif.

Il s'agit de l'ensemble de toutes les droites de \mathbf{R}^3 qui passent par l'origine. On note cet espace \mathbf{P}_2 . Comme toutes les droites ont deux vecteurs unitaires cet espace ressemble beaucoup à la sphère. Toutefois, il est difficile de se le représenter dans \mathbf{R}^3 contrairement à la sphère.

Pour cela, considérons la sphère unité S^2 de \mathbf{R}^3 . Toute droite passant par l'origine la recoupe en deux points M et M' . Représenter l'espace projectif \mathbf{P}_2 consiste à ne garder qu'un seul de ces deux points.

De cette manière, on identifie deux points diamétralement opposés sur la sphère : **on réalise une identification antipodale.**

Afin de mieux cerner le problème, il est commode de découper sur la sphère unité S^2 une bande équatoriale de largeur ε (ε strictement positif et pouvant être choisi aussi petit que l'on veut) . Les deux calottes, situées de part et d'autre de cette bande, se correspondent dans la symétrie centrale par rapport à l'origine. On peut n'en conserver qu'une, disons celle contenant le pôle nord. Les points de la bande se correspondent également deux par deux, partageons la en deux, en la sectionnant par un plan contenant l'axe vertical Oz . Une des deux demi-bandes peut alors être éliminée. En ce qui concerne l'autre, il suffit d'identifier les points diamétralement opposés des deux segments verticaux extrêmes.

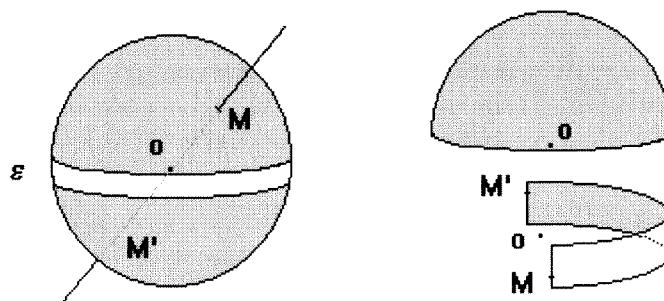


Figure 1 : la sphère S^2 et l'identification antipodale.

De façon imagée, on recolle les deux extrémités de la demi-bande en lui faisant subir un demi-tour. Ce faisant on obtient un ruban de Möbius.

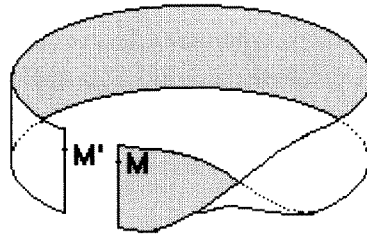


Figure 2 : ruban de Möbius.

Rappelons qu'un ruban de Möbius n'a qu'une seule face : c'est une **surface unilatère**. Son bord est d'un seul tenant et peut être déformé en un cercle. De plus cette surface **n'est pas orientable**.

Pour terminer la représentation dans \mathbb{R}^3 de l'espace projectif P_2 , il ne reste plus qu'à coller bord à bord la calotte et le ruban de Möbius !

En effet, les points qui se trouvent sur le bord inférieur de la demi-bande de la figure 1 s'identifient avec leurs symétriques par rapport à O se trouvant sur le bord de la calotte supérieure.

Quiconque tentera l'opération se rendra vite compte de son impossibilité matérielle. A moins d'autoriser la surface à se recouper elle même ! En d'autres termes, **il n'y a pas de représentation injective du plan projectif**.

Afin de mieux se familiariser avec l'identification antipodale, l'exemple suivant décrit une telle représentation.

Si l'on fait tendre ε vers 0, le ruban de Möbius se réduit à une courbe fermée à laquelle on a fait subir un demi-tour avant de la raccorder. A la limite, l'identification antipodale sur la sphère consiste à garder son hémisphère nord, et à identifier les points diamétralement opposés de l'équateur ! C'est ce que l'on va faire à présent sur un cuboctaèdre.

2. Identification antipodale sur le cuboctaèdre et représentation du plan projectif.

Rappelons qu'un cuboctaèdre s'obtient en traçant le quadrilatère des milieux sur chacune des faces carrées d'un cube puis, en lui enlevant les huit tétraèdres ainsi obtenus.

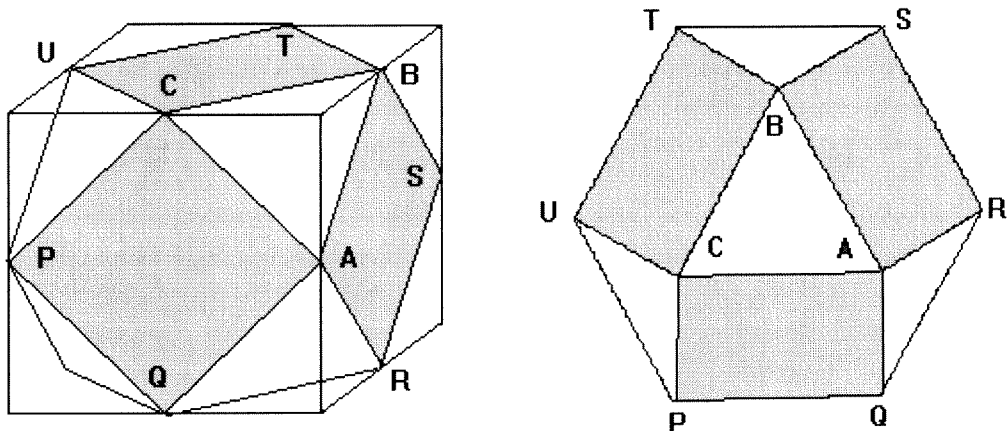


Figure 3 : cuboctaèdre.

Si l'on regarde un cuboctaèdre en se plaçant au-dessus d'une de ses faces triangulaires, son contour apparent est un hexagone régulier. On aperçoit ainsi tout son hémisphère nord, composé de quatre faces triangulaires et de trois faces carrées, ainsi que son équateur. L'identification antipodale sur le cuboctaèdre conduit à la fabrication d'un nouveau polyèdre appelé **heptaèdre de Rheinhardt** que l'on va décrire à présent.

Sur la figure suivante considérons les deux faces $ABSR$ et $AQPC$ et amenons le point S sur le point P . Pour réaliser cette opération, il est nécessaire d'autoriser ces deux carrés à se traverser. Ce faisant, la diagonale $[AP]$ devient une ligne de points doubles.

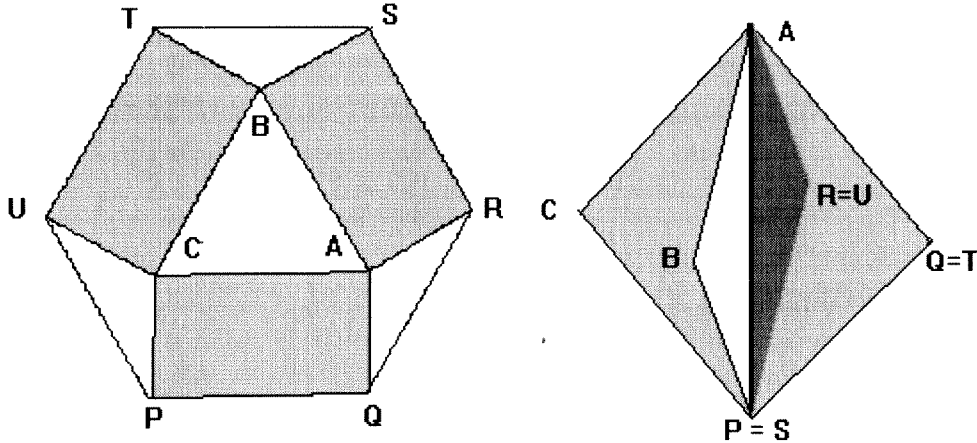


Figure 4 : identification antipodale.

De plus, U doit s'identifier avec R et T avec Q . La troisième face carrée $BCUT$ du cuboctaèdre devient donc la face $BCRQ$ du nouveau polyèdre.

On peut décrire complètement l'**heptaèdre de Rheinhardt** en partant de l'octaèdre formé par les six sommets A, B, C, R, Q et P . Ses sept faces se composent d'une part des trois faces carrées $ABPR, ACPQ$ et $BQRC$ (représentées de manière transparente sur le dessin suivant) qui matérialisent les plans diagonaux de l'octaèdre précédent et d'autre part des quatre faces triangulaires ABC, ARQ, BQP et CPR n'ayant deux à deux qu'un sommet en commun.

Observons que les trois plans diagonaux se coupent en un **point triple** O et que **les trois lignes de points doubles aboutissent à des sommets de l'heptaèdre**.

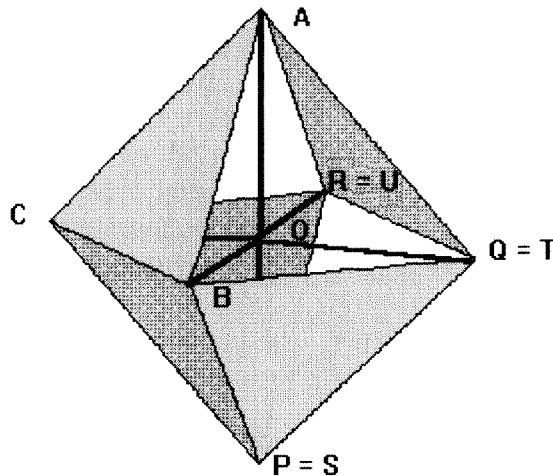


Figure 5 : heptaèdre de Rheinhardt.

Remarque : L'heptaèdre de Rheinhardt est une **représentation** du plan projectif. Cependant, on ne peut le qualifier de "surface". En effet, une **surface** doit admettre en tout point un voisinage homéomorphe à (continûment déformable en) un disque, ce qui n'est le cas en aucun point de la ligne de points doubles.

On peut à présent citer le résultat suivant (cf. par ex. [2]) :

Théorème : le plan projectif est une surface compacte.

De fait, il a été démontré que cette surface comporte nécessairement un **point triple**. Une telle surface est dite **immergée** dans \mathbb{R}^3 , alors qu'une sphère, un tore sont des surfaces fermées n'ayant aucun point d'auto-intersection, on dit qu'elles sont **plongées** dans \mathbb{R}^3 . De telles surfaces admettent en tout point un plan tangent.

La suite de l'article va présenter une telle surface. On dira encore, en s'autorisant l'abus de langage consistant à identifier une application et son image, qu'une telle surface est une **immersion** alors qu'une sphère ou un tore sont des **plongements**.

On dira d'une **immersion** qu'elle est **transverse** si la surface ne présente que des **lignes de points doubles** le long desquelles les nappes ne sont jamais tangentes entre elles et un nombre fini de **points triples** en lesquels les trois plans tangents aux trois nappes forment un trièdre.

3. Immersion polyédrique du plan projectif ayant une symétrie d'ordre trois : surface de Boy.

Historique :

Lorsque David HILBERT dressa une liste de vingt-trois problèmes devant guider les recherches des mathématiciens pour les années à venir, il en confia un vingt-quatrième à son élève Werner BOY : **prouver l'impossibilité d'immerger le plan projectif dans l'espace à trois dimensions.**

En 1901, Werner BOY résolvait négativement le problème de HILBERT et présentait à son maître une surface qui porte depuis son nom. Déjà présente dans les pages de l'Ouvert n° 38 [3] sous sa forme différentiable, cette surface exerce, de part son esthétique, un attrait certain sur l'observateur qui la découvre la première fois. Le sculpteur Max Sauze eut l'intuition d'utiliser des ellipses pour réaliser un remarquable modèle.

Dans son ouvrage "Models of the real projective plane" [4], François Apéry retrace l'évolution des représentations du plan projectif et décrit une très belle construction de la surface de Boy par un bouquet d'ellipses. Le lecteur y trouvera également une série de magnifiques photos d'images réalisées sur ordinateur et qui ont inspiré une partie du présent travail.

La recherche d'une version polyédrique minimale (ayant le minimum de sommets, de faces et d'arêtes) de la surface de BOY a été menée par le Professeur Ulrich Brehm de l'Université de Berlin [5]. La simplicité de la surface obtenue ne doit pas faire oublier que

de nombreux essais préliminaires furent nécessaires pour y parvenir. Bernard Morin y en a apporté les dernières retouches.

Comme il a déjà été signalé précédemment, une telle surface comporte au moins un point triple ; on a en plus le résultat suivant :

Théorème : Il n'existe aucune immersion polyédrique du plan projectif ayant moins de neuf sommets.

Preuve : Le point triple appartient nécessairement à trois triangles déterminés par neuf sommets. Deux quelconques d'entre eux ne peuvent pas coïncider car sinon il se formerait une ligne de points doubles joignant le point triple à ce sommet. Comme dans le cas de l'heptaèdre de Rheinhardt, ce ne serait plus une surface.

La description suivante propose une immersion du plan projectif ayant exactement neuf sommets.

Version polyédrique minimale de la surface de Boy :

Dans \mathbf{R}^3 identifié à $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$, où \mathbf{C} est représenté par le plan xOy , soit S un point de l'axe Oz situé au-dessus du plan xOy .

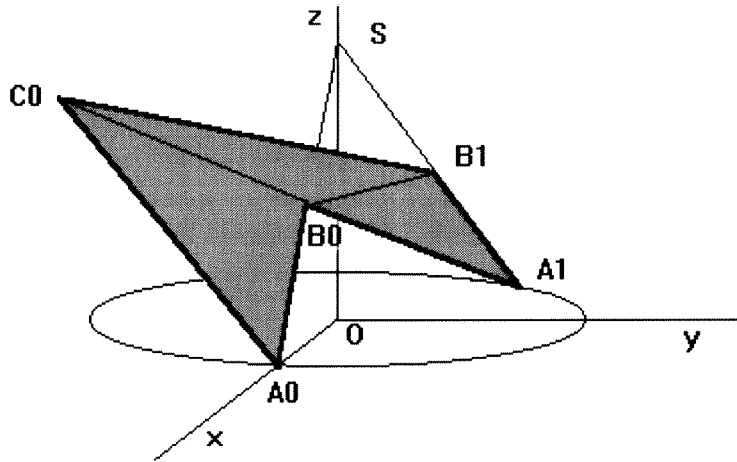


Figure 6 : le pentagone concave P_0 et sa triangulation.

Considérons les points suivants :

$$A_0 = (1, 0), \quad A_1 = (j, 0) \quad \text{et} \quad A_2 = (j^2, 0) \quad \text{avec} \quad j = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$

Soit B_0 un point du segment $[A_0S]$, $B_0 \neq A_0$ et $B_0 \neq S$.

Soient B_1 le point de la droite (A_1S) et B_2 le point de la droite (A_2S) tels que :

$$\frac{A_0S}{B_0S} = \frac{A_1S}{B_1S} = \frac{A_2S}{B_2S}$$

Dans le plan $A_0B_0B_1A_1$, partagé en deux demi-plans par la droite (A_0S) , considérons celui qui ne contient pas le point A_1 . Dans ce demi-plan choisissons un point C_0 situé au-dessus de la droite (B_0B_1) . On obtient ainsi un **pentagone concave** $A_0B_0B_1A_1C_0$ que l'on appelle P_0 . En traçant les segments $[B_0C_0]$ et $[B_0B_1]$, on fait apparaître une triangulation de P_0 dont l'utilité se révélera par la suite.

On construit ensuite les points C_1 et C_2 en prenant les transformés de C_0 par les rotations d'axes Oz et d'angles de 120° et 240° .

La **surface de Boy** s'obtient alors de la manière suivante :

Sommets : $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2$.

Les points $A_i, B_i, C_i, i = 1 \text{ à } 2$, sont les transformés des points A_0, B_0, C_0 par les rotations d'axe Oz et d'angles de mesures respectives 120° et 240° .

Faces pentagonales : $P_0 = A_0B_0A_1B_1C_0, P_1 = A_1B_1A_2B_2C_1, P_2 = A_2B_2A_0B_0C_2$.
Faces triangulaires : $Q_0 = C_0B_1A_2, Q_1 = C_1B_2A_0, Q_2 = C_2B_0A_1,$
 $R_0 = C_0A_0A_2, R_1 = C_1A_1A_0, R_2 = C_2A_2A_1,$
 $\Pi = A_0A_1A_2$.

Elle a 9 sommets, 10 faces et 18 arêtes. Les faces Q_0, Q_1 et Q_2 se coupent en un même point triple. Sur la figure ci-dessous apparaît également la ligne d'intersection, en forme d'hélice tripale, formée des points doubles de la surface.

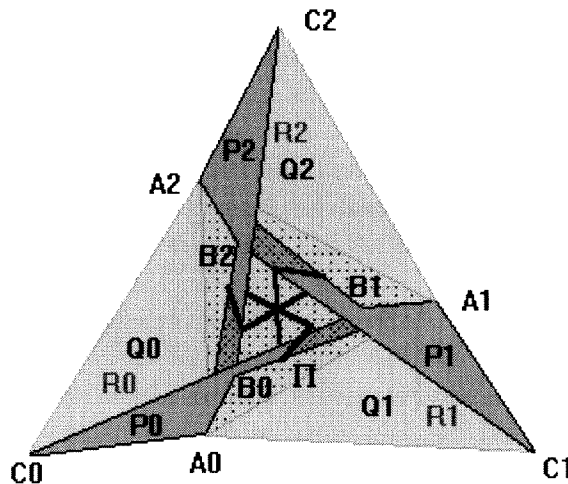


Figure 7 : surface de Boy vue de dessus, sa ligne d'auto-intersection et son point triple.

On remarquera également que la réunion des trois pentagones concaves P_0, P_1 et P_2 forme un ruban de Möbius qui admet une triangulation en neuf triangles comme le suggère la figure 6. De plus, la réunion de tous les autres triangles est homéomorphe à un disque. De cette manière, **on a donc soudé bord à bord un ruban de Möbius et un disque**. C'est l'objectif que l'on s'était proposé.

Remarques :

Il existe, pour tout polyèdre, une constante reliant son nombre de sommets S , son nombre d'arêtes A et son nombre de faces F , valable lorsque chaque face est homéomorphe à un disque : c'est la **caractéristique d'Euler** définie par $\chi = S - A + F$.

Dans le cas présent, $\chi = 9 - 18 + 10 = 1$. C'est le cas pour toute surface polyédrique représentant le plan projectif P_2 .

Le même calcul, effectué sur des surfaces polyédriques homéomorphes à la sphère S^2 (cube, tétraèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre...) fera apparaître que dans tous ces cas χ prend comme valeur 2. De même, une surface polyédrique homéomorphe à un tore possède une caractéristique d'Euler égale à 0.

4. Construction d'une surface de Boy.

Dans le modèle que l'on se propose de construire, la pyramide $SA_0A_1A_2$ est régulière. De plus le triangle $A_0B_1C_0$ est équilatéral et le quadrilatère $A_1B_1C_0B_0$ est un parallélogramme.

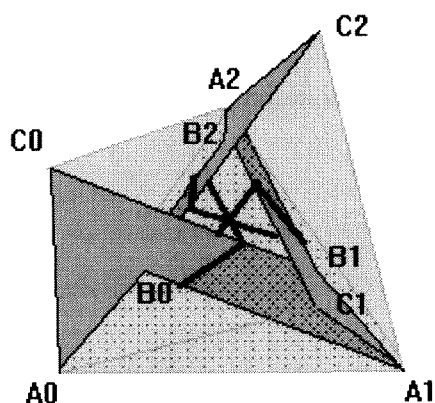


Figure 8 : surface de Boy d'Ulrich Brehm.

Voici les coordonnées de ses neuf sommets :

$A_0(1, 0, 0)$	$A_1(-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$	$A_2(-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$
$B_0(1/2, 0, \sqrt{2}/2)$	$B_1(-1/4, \sqrt{3}/4, \sqrt{2}/2)$	$B_2(-1/4, -\sqrt{3}/4, \sqrt{2}/2)$
$C_0(3/4, -\sqrt{3}/4, \sqrt{2})$	$C_1(0, \sqrt{3}/2, \sqrt{2})$	$C_2(-3/4, -\sqrt{3}/4, \sqrt{2})$

On obtient le patron suivant :

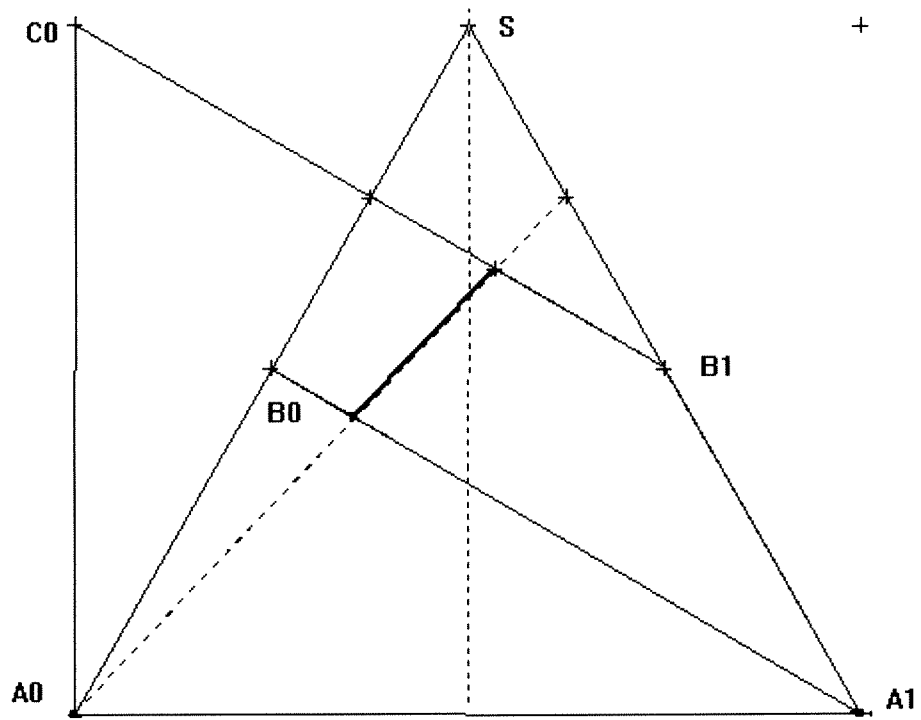


Figure 9 : le pentagone P_0 .

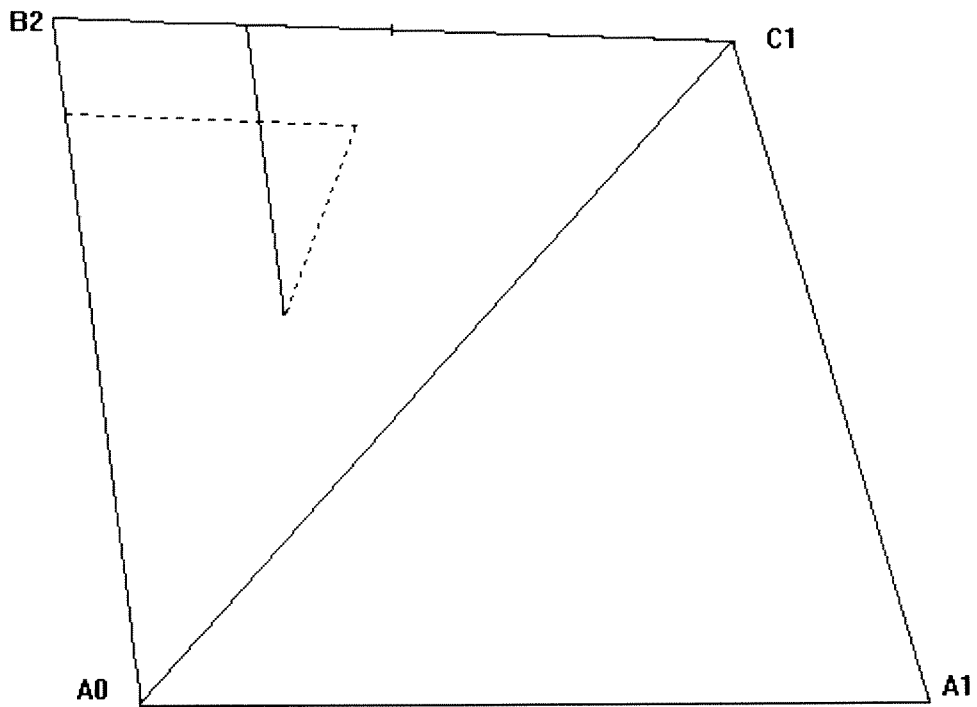


Figure 10 : les faces Q_1 et R_1 .

Chacune des faces précédentes est à découper trois fois, et l'on rajoutera un triangle équilatéral $A_0A_1A_2$ qui constituera la dernière face Π .

Consignes de montage :

Après avoir découpé séparément les différentes faces et après avoir préparé la ligne d'auto-intersection comme indiqué sur les patrons précédents (le pointillé du triangle Q_1 indique une découpe), on assemblera dans l'ordre :

- les trois faces dorsales Q_0 , Q_1 et Q_2 (on verra ainsi apparaître le point triple),
- les faces P_0 , P_1 et P_2 en les faisant passer par la fente prévue à cet usage sur les faces précédentes,
- les faces ventrales R_0 , R_1 et R_2 ,
- et pour terminer, la face du fond Π dans laquelle on peut, si on le désire, aménager une ouverture circulaire permettant de voir le point triple par en-dessous.

Il ne reste plus qu'à coller, à l'aide d'un ruban adhésif, les faces les unes aux autres le long de chaque arête.

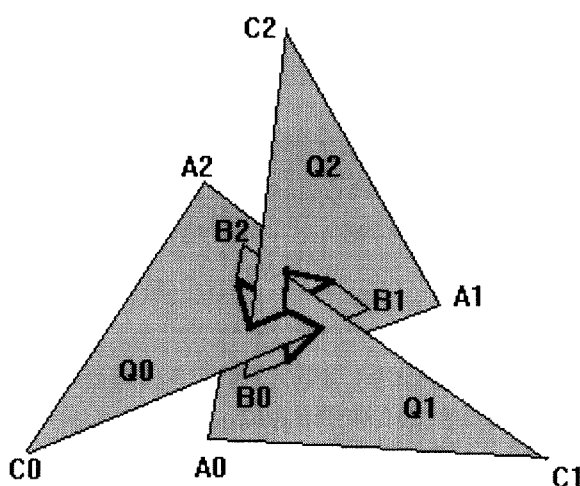


Figure 11 : les trois faces dorsales Q_0 , Q_1 et Q_2 et le point triple.

Si l'on utilise des feuilles de dessin ordinaires, le modèle prendra une rigidité suffisante. On observera en particulier, le passage vers le point triple, en passant sous les aisselles B_0 , B_1 et B_2 .

Il est possible, d'obtenir une réalisation de meilleure qualité, et permettant surtout de percevoir le modèle en toute transparence en procédant comme suit :

On trouve en papeterie, des feuilles dont l'une des faces est plastifiée et en couleur. En collant deux feuilles l'une contre l'autre, à l'aide d'une colle de montage définitif, on va pouvoir y découper, à l'aide d'un cutter et d'un réglet, les faces pentagonales P_0 , P_1 et P_2 .

Pour les autres faces, il est possible d'utiliser des feuilles de rhodoïd de 0,5 mm d'épaisseur (on peut en trouver dans un magasin de modèles réduits). La ligne d'auto-intersection pourra y être dessinée à l'aide d'un marqueur permanent.

Version pointue de la surface de Boy.

Dans cette version, dont l'intérêt est, d'une part de permettre une généralisation ultérieure, et, d'autre part de mieux comprendre le retournement décrit dans le paragraphe suivant, on considère le point d'intersection K des trois faces ventrales R_0 , R_1 et R_2 .

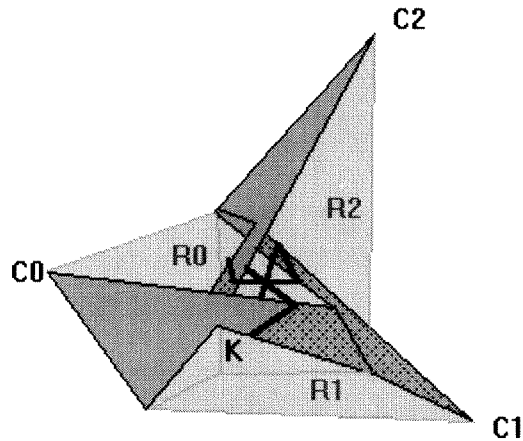


Figure 12 : version pointue, le point d'intersection des plans ventraux.

5. La surface de Boy considérée comme modèle central du retournement de la sphère.

Le résultat étonnant de Stephen Smale prouvant qu'il était possible de retourner une sphère fut facilement accepté par la communauté mathématique. Cependant, Smale n'a jamais montré effectivement comment cela était possible.

Il fallut attendre respectivement 1961 et 1966, pour que Arnold Shapiro puis Anthony Phillips, imaginent, chacun de leur côté, une transformation permettant effectivement de réaliser le retournement.

L'idée clé commune à ces deux scénarios consiste à déformer la sphère de façon à revêtir la surface de Boy avec deux feuillets, puis **d'échanger les deux feuillets au travers de la surface de Boy**.

Dans cette opération, deux points diamétralement opposés se croisent. L'opération inverse de celle ayant amené la sphère à revêtir la surface de Boy permet alors d'aboutir à une sphère dont les deux faces interne et externe ont été échangées. La **surface de Boy** intervient ainsi comme **étape centrale** de la déformation.

La manipulation suivante permet de mieux comprendre cette brève esquisse.

Manipulation : revêtement à deux feuillets d'un ruban de Möbius.

La figure 2 proposait de fabriquer un ruban de Möbius. En prenant, non plus une, mais trois bandes de papier de dessin superposées et en les recollant comme précédemment après torsion d'un demi-tour, on verra apparaître **un ruban de Möbius pris en sandwich entre deux feuillets**. A titre indicatif, une longueur de 50 cm et une largeur de 4 cm seront du plus bel effet.

Un peu de couleur rehaussera le tout ! On coloriera respectivement en rouge et bleu les deux faces de deux des trois bandes, puis on mettra en contact les faces rouges avec les faces blanches de la troisième bande avant recollement.

De cette façon, le ruban de Möbius blanc sera entièrement entouré de rouge alors que, si les trois bandes sont bien serrées l'une contre l'autre, on n'y verra que du bleu !

A l'envers de la revue Le Plot n°76 d'automne 96 on trouve un très beau dessin montrant ce revêtement.

Marquons, sur chacun des deux feuillet, deux points A et A' pris face à face de part et d'autre du ruban de Möbius puis, défaisons le tout. On obtiendra ainsi une bande dont l'une des faces est rouge et l'autre bleue entrelacée avec le ruban de Möbius. On observera alors que **les deux points A et A' sont diamétralement opposés sur la bande bilatère**. D'autre part on pourra constater ouvrant l'un des raccords que **celle-ci a subi une torsion de deux tours !**

Les figures suivantes illustrent comment passer, d'une boucle simple à une boucle tordue deux fois, en autorisant la nappe à se traverser.

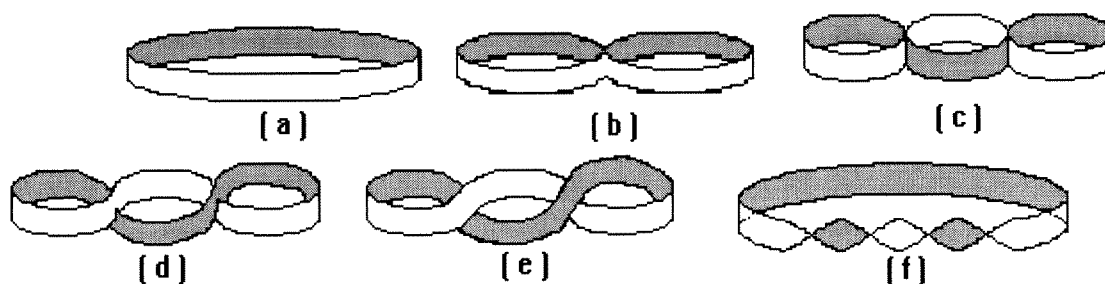


Figure13 : croisement (a), (b) et (c) d'un ruban, puis décroisement par le bas et le haut (d) et (e) permettant d'aboutir à un ruban tordu deux fois (f).

La figure [f] représente l'état du ruban bicolore à la fin du paragraphe précédent. En parcourant à rebours cette séquence de dessins on aboutit à une bande cylindrique dont la face extérieure est rouge.

Le même chemin, parcouru en sens direct, transforme une ceinture d'extérieur rouge à un revêtement à deux feuillet dont l'apparence extérieure est bleue !

Comme la matière utilisée pour confectionner tous nos modèles possède la propriété mirifique de pouvoir se traverser, en échangeant les deux feuillet au travers du ruban de Möbius ce dernier se retrouve d'un coup entouré de bleu alors qu'un observateur extérieur n'y verra plus que du rouge !

Un scénario semblable à celui décrit précédemment permet alors d'obtenir une ceinture d'extérieur bleu !

Il ne reste plus alors qu'à faire le lien avec la figure 1, pour concevoir que toute la sphère puisse être déformée et venir revêtir la **surface de Boy**. En échangeant les deux feuillet de la sphère, au travers de la surface de Boy, ses deux faces interne et externe

s'intervertissent. La transformation inverse aboutit alors à la sphère retournée. C'est ainsi que la surface de Boy sert comme premier **modèle central** d'une transformation aboutissant au retournement de la sphère.

Pour en savoir plus sur la surface de Boy, on pourra également consulter les références [6] et [7] données dans la bibliographie.

Jouons le même jeu en version polyédrique ! Pour cela considérons un ruban composé de dix-huit triangles équilatéraux et procédons à l'identification antipodale en amenant l'un sur l'autre les triangles dont les numéros appartiennent à la même classe modulo neuf : 1 sur 10, 2 sur 11, ... , 9 sur 18.

La manipulation n'est pas tout à fait évidente, mais avec un peu de persévérance, on obtient un revêtement à deux feuillets d'un ruban de Möbius.

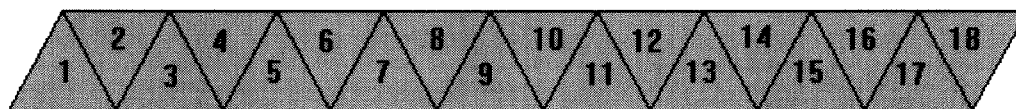


Figure 14 : bande permettant d'obtenir un revêtement à deux feuillets d'un ruban de Möbius par juxtaposition antipodale.

Pour terminer cette première partie, il ne reste plus qu'à présenter un polyèdre en forme de tonneau, sur lequel on voit osciller, autour de l'équateur, une bande de dix-huit triangles équilatéraux et qui, d'après un scénario analogue au précédent, peut être déformé, pour venir revêtir deux fois la surface de Boy (version pointue de la figure 12). **Après échange des deux feuillets, le chemin en sens inverse aboutit au tonneau retourné dont l'extérieur est bleu !**

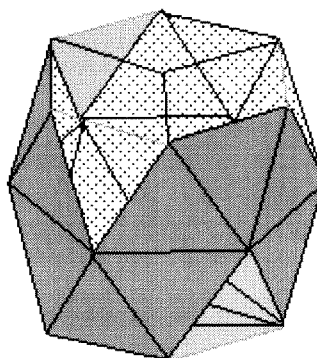


Figure 15 : polyèdre en forme de tonneau pouvant être retourné à l'aide de la surface de Boy.

Il est à noter que le pôle nord et le pôle sud de ce tonneau, viennent se placer, dans le revêtement à deux feuillets de la surface de Boy, de part et d'autre du point K de la figure 12. Au moment du passage au travers de la surface de Boy, chaque point croise son point antipodal. De plus, à ce moment précis, les deux feuillets sont en contact direct l'un avec l'autre et ne se coupent donc pas transversalement.

Même si l'idée précédente est intéressante en soi, elle se heurte aux limites de l'imagination et ne permet pas de suivre, de proche en proche, la déformation.

La suite de cet article retracera le chemin qui a permis de construire un **modèle central** d'une déformation permettant de retourner le **cuboctaèdre** et en indiquera les étapes essentielles.

Bibliographie :

- [1] Pour la Science n° 15 , janvier 1979.
- [2] Daniel Lehmann, Carlos Sacré, Géométrie et topologie des surfaces, PUF.
- [3] L'Ouvert n° 38 , mars 1985.
- [4] François Apéry, Models of the real projective plane, Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [5] Ulrich Brehm Minimal polyedral versions of the Boy surface, Preprint Reihe Mathematik, Technische Universität Berlin, n° 189.
- [6] Jean Pierre Petit, Le topologicon, Le géométricon, Belin.
- [7] François Apéry, La surface de Boy, thèse de troisième cycle, Irma Strasbourg, 1984. Le retournement du cuboctaèdre, 1994/003.

Dans ce calendrier lunaire, en vigueur dans toutes les cités grecques, l'année avait 12 mois et totalisait 354 jours :

Hécatombéon	30 j	}	Total : 354 jours
Metagitnion	29 j		
Boédromion	30 j		
Pyanepsion	30 j		
Mœmactérion	29 j		
Posidéon	29 j		
Gaméliion	30 j		
Anthestérion	29 j		
Elaphébolion	30 j		
Munychion	29 j		
Thagéliion	30 j		
Scirophorion	29 j		

ENSEIGNER AU MOYEN DU MULTIMEDIA : UN DEFI POUR L'AVENIR.

par Gérard KUNTZ, lycée Couffignal.

Depuis quelque temps, l'industrie de l'enseignement¹ s'est emparée des techniques multimédias et a mis sur le marché des produits éducatifs qui, dès leur lancement, ont connu un succès considérable. Les CD-ROM éducatifs se multiplient² et de grandes maisons d'édition se lancent dans les cyber-cours du soir : ils devraient concerner, dès la rentrée de 1999, l'ensemble des élèves de l'enseignement secondaire.³ Le système éducatif ne peut rester indifférent à la mise en place d'une école parallèle, avec le concours d'enseignants et d'étudiants d'IUFM. Des questions nombreuses et difficiles se posent : les techniques multimédias améliorent-elles vraiment la démarche éducative ? Ne sont-elles pas une nouvelle forme de l'illusion technicienne, sans cesse renaissante ? Comment intégrer de tels outils à la formation des élèves ? Comment utiliser les compétences des enseignants pour mettre au point des produits de qualité dans le cadre et pour le bénéfice de l'Education Nationale ? Seuls l'expérimentation et le recul du temps permettront de donner des réponses assurées. Raison de plus pour réfléchir et expérimenter dès maintenant.

1°) Les atouts des techniques multimédias.

Lorsqu'il est bien conçu et réalisé avec soin, un CD-ROM éducatif possède, par rapport à un livre, des avantages décisifs. La connaissance y est structurée, arborescente, modulaire. On peut l'aborder par des entrées multiples. Des mots-clés invitent à la promenade-découverte. Texte, image (fixe ou animée) et son se mêlent pour expliquer et illustrer le propos. L'utilisateur peut reprendre à loisir une partie délicate, demander des précisions, approfondir une question.

Sa diffusion est facile : un CD-ROM contient une information considérable et peut être mis sur réseau.

S'il est utilisé par une population importante, le coût de la connaissance ainsi présentée devient faible. Ce sera à terme le cas des CD-ROM éducatifs destinés aux élèves (très nombreux) des collèges et des lycées.

Des pans entiers de la connaissance enseignée au collège, au lycée et dans le premier cycle universitaire pourraient être mis à la disposition des élèves et des étudiants sous cette forme (la science enseignée y est stable). La formation continue pourrait y puiser de précieux outils. L'introduction du multimédia dans l'enseignement ne disqualifie en aucune manière le livre qui possède lui aussi *des avantages décisifs sur le CD-ROM!* Ils tiennent à la matérialité du support de la connaissance, à la stabilité de l'écrit par opposition au défilement de l'information sur l'écran, au contact direct avec la page, à sa disponibilité indépendamment de la machine. Le sens du discours se dégage plus facilement du caractère global de l'écrit que de la fragmentation arborescente et labyrinthique du multimédia.⁴

¹ Il s'agit des éditeurs de livres, de logiciels et de CD-ROM éducatifs ainsi que des créateurs et des animateurs de sites Internet à vocation éducative. Le secteur informatique de cette industrie connaît une rapide croissance.

² ADI (Accompagnement Didactique Intelligent) est le cyberprof le plus branché du moment. 300000 CD-ROM du petit extraterrestre ont été vendus en France cette année, plus d'un million en Europe. Coktel, qui produit ADI, a suscité d'autres appétits : Hachette, TLC Edusoft sont sur les rangs... (cf. le Nouvel Observateur n° 1768 page 102). Voir aussi l'Express n° 2463 du 17.9.98, page 44 et 45.

³ Nathan et France Télécom lancent les cybercours du soir. Voir l'Express n° 2463 du 17.9.98, page 45.

⁴ Régis Debray a bien analysé cette question. Voir « l'oeil naïf » (Seuil 94) ou « Vie et mort de l'image. Une histoire du regard en occident. » (Folio essais 94).

Le multimédia *ne peut pas* remplacer le livre. Il est appelé à prendre une place, originale et complémentaire, parmi les outils de transmission de la connaissance. Son usage efficace nécessite, comme pour le livre, un apprentissage qui est loin d'être simple.⁵ Le CD-ROM n'est pas le remède miracle à la crise de l'école, mais, bien conçu et bien utilisé, il peut s'avérer utile dans la formation des élèves.

2°) Mission impossible?

Actuellement, chaque enseignant a en charge la totalité de la chaîne éducative : documentation, projet pédagogique, élaboration d'un cours, réponse aux questions, applications et évaluation des élèves. A cela s'ajoute depuis peu la nécessité de motiver les élèves et de faire face à la violence scolaire : cela fait beaucoup pour un seul homme (ou pour une seule femme). D'autant que ces responsabilités s'appliquent à toutes les classes qui lui sont confiées. On connaît les inconvénients du système pour les enseignants et pour les élèves : même rythme imposé à toute une classe, trop rapide pour les uns, ennuyeux pour d'autres, peu de temps pour répondre à des questions qui ne concernent que de petits groupes, beaucoup de temps passé à prendre des notes sans comprendre... Sans compter qu'il est difficile d'être génial tout seul et tout le temps, de la conception à l'évaluation.

Les parcours différenciés sont de pure rhétorique dans l'école actuelle. L'ennui, la souffrance même, y sont monnaie courante. Une partie de ces dysfonctionnements sont liés à une conception archaïque du système éducatif et à son organisation trop rigide. Les nouvelles technologies pourraient aider à renouveler certaines façons d'enseigner et d'apprendre.

3°) Des équipes pluridisciplinaires pour mettre en forme la connaissance.

Il y a dans l'Education Nationale des équipes d'enseignants extrêmement performantes, qui pendant plusieurs années consacrent beaucoup de temps à réfléchir, à élaborer des scénarios pédagogiques, à expérimenter avec des élèves, à évaluer leurs résultats. On peut citer, entre autres, les commissions inter-Irem ou les commissions spécialisées de l'Apmp. Certes, leurs travaux sont diffusés sous forme d'ouvrages, de brochures ou d'articles, mais il faut bien reconnaître que, pressés par les nécessités quotidiennes, peu d'enseignants en tirent réellement parti. *La distance est trop grande entre la réflexion menée et le travail d'une classe* (une réflexion de qualité ne peut se limiter à une série d'applications immédiatement utilisables en classe). Une partie importante de ces travaux se perd dans les sables.

Le multimédia constitue un des chaînons manquants pour les faire parvenir dans les lycées et les collèges, jusque dans les classes.

Imaginons que l'on confie à ces équipes la réalisation d'un enseignement multimédia dans leur spécialité. La commission « Probabilités et statistiques » pourrait ainsi concevoir et réaliser des CD-ROM sur les statistiques au collège, prenant en compte l'ensemble de la démarche pédagogique : les exemples introductifs, la réflexion sur les raisons et l'intérêt de ces démarches, les pièges qu'elles recèlent, la présentation des notions, des exercices pour illustrer et pour évaluer. Plusieurs approches seraient adoptées dans le même CD-ROM : rien ne serait plus dramatique que d'aboutir, sous prétexte de modernité, à la pensée unique! De

⁵ Voir « Vivre au lycée avec le multimédia pour le meilleur ou pour le pire » dans l'Ouvert n° 90 (Mars 98).

nombreux autres domaines de la connaissance pourraient être proposés aux enseignants et aux élèves sous cette forme.

De telles équipes devraient pouvoir travailler plusieurs années durant et être déchargées totalement ou partiellement de cours. Un renouvellement régulier éviterait la sclérose ou la perte du sens des réalités. Des didacticiens, des spécialistes en évaluation, en informatique et en techniques multimédias y seraient indispensables.

Le coût de ces équipes pluridisciplinaires serait supportable (voire faible) : le matériel pédagogique élaboré serait de grande qualité (on peut l'espérer) et utilisable dans tous les établissements scolaires de France (et du monde francophone⁶).

Si le CD-ROM pédagogique est *un chaînon manquant* pour amener jusque dans la classe les réflexions et les propositions de bonnes équipes d'enseignants, *il n'est de loin pas le seul*. Contrairement à l'opinion de Monsieur Allègre, l'invention technique n'engendre pas à elle seule le progrès scientifique ou pédagogique.⁷ La connaissance disponible sur un support quelconque *n'est d'aucune utilité sans un dispositif spécifique fort complexe d'intégration à la classe*. Plus la connaissance est concentrée et multiforme (c'est le cas du CD-ROM), plus le dispositif de mise en oeuvre doit être pensé. Il faut de nombreux maillons entre le produit brut (très élaboré) et le professeur (formation continue spécifique au nouveau produit, échanges dans des groupes disciplinaires et interdisciplinaires en collège et en lycée), entre le nouvel outil et l'élève.⁸

Toute nouvelle technique résout certains problèmes et en soulève d'autres.

4°) Des moments pour enseigner et pour apprendre autrement.

Malgré ces réserves, l'introduction des nouveaux outils, avec les précautions indispensables, ouvrirait des perspectives intéressantes pour les enseignants et les élèves. Pour certaines questions, pour certains chapitres, il serait possible d'enseigner et d'apprendre autrement que par les voies habituelles.

Le professeur choisirait, *dans la trop grande richesse disponible sur le CD-ROM*, un chemin (ou un groupe de chemins) qu'il proposerait aux élèves dont il a la charge : il faut éviter qu'ils ne se perdent dans une arborescence foisonnante. Il établirait des procédures et des directives d'utilisation (sans doute pas les mêmes pour tous). Il sélectionnerait les exercices et choisirait la manière d'évaluer (parmi toutes celles qui sont proposées). Il n'écrit plus interminablement au tableau (l'information transmise aux élèves serait sur leur écran). Il deviendrait *DISPONIBLE* pour les élèves en apprentissage autonome.

Les élèves travailleraient selon ses directives, le plus souvent en binômes, parfois en petits groupes, toujours en interaction les uns avec les autres. L'enseignant serait (très souvent) mis à contribution pour expliquer ce qu'ils ne saisissent pas, *du détail technique à l'obstacle épistémologique*. Il lui faudra dire les choses autrement, illustrer la difficulté par un exemple répondant à *cette question précise*, reprendre avec des élèves en difficulté des préalables qui leur manquent pour entrer dans l'étape du jour, répondre à des questions *non prévues* d'élèves rapides et subtils. Les parcours différenciés sont consubstantiels à la démarche même.

⁶ Rien n'empêcherait, en cas de succès, d'adapter ces produits culturels en d'autres langues, anglais et espagnol par exemple.

⁷ Lettre au Nouvel Observateur de M. Allègre : « Oui, l'ordinateur va révolutionner l'école ». La réponse de la rédaction est particulièrement pertinente et incisive.

⁸ Voir « vivre au lycée avec le multimédia pour le meilleur ou pour le pire » dans Repères-Irem n° 34.

Ceux qui ont utilisé l'outil informatique avec des élèves savent combien ce type de travail est difficile et épuisant pour l'enseignant : des sollicitations fréquentes, de nature et de profondeur très variées, l'adaptation constante à des interlocuteurs qui ne sont pas au même stade de connaissance et de compréhension, cela n'a rien d'une sinécure! Mais cet effort connaît sa récompense : le travail est réellement adapté à chaque groupe d'interlocuteurs et permet à chacun de progresser.

Cette nouvelle approche ne se substituerait évidemment pas aux anciennes. Elle les compléterait à *certaines moments*. *Elle ne dissoudrait pas la classe*. Les structures souples, les parcours différenciés ne doivent pas être opposés à la solidarité dans les apprentissages. Le temps continu et non spécifié du multimédia ne peut remplacer le temps scolaire qui réclame *prise de distance, coupure, spécification des moments et des lieux*. A la découverte et à l'expérimentation succède l'institutionnalisation, sous la responsabilité du maître.

En s'intégrant à l'école, le multimédia devra subir une révolution de ses usages au moins aussi grande que celle qu'il fera subir à l'école!

5°) Pour réussir l'insertion du multimédia dans le système scolaire.

Les CD-ROM de qualité ne tombent pas du ciel. Leur mise au point est affaire de longue haleine. Mettre en forme une connaissance complexe demande beaucoup de travail. Raison de plus pour ne pas tarder à constituer des équipes de conception, de production et d'expérimentation.

Dans une première étape, les produits de qualité, abordant des questions complexes, ne seront disponibles que lentement, au compte-gouttes. Cette utile lenteur permettra l'expérimentation par des enseignants volontaires et une évaluation sans concession du nouvel outil et des démarches qui y sont liées.

Avant toute utilisation à grande échelle, une formation préalable et approfondie des enseignants à ces nouvelles techniques est vitale : s'ils ne sont pas convaincus de l'intérêt de ces outils pour la formation des élèves, s'ils craignent de perdre la maîtrise dans la démarche pédagogique,⁹ les CD-ROM (mêmes excellents) finiront dans un tiroir.

Les élèves sont apparemment plus ouverts aux techniques nouvelles que les adultes. Mais ils risquent eux aussi de déchanter. Pour ceux qui n'ont pas vraiment appris à lire, à traiter de l'information, les outils multimédias seront aussi inefficaces que l'école traditionnelle et leur échec aussi profond¹⁰ (à moins que la nouvelle façon de travailler n'en sauve certains de l'ennui et de la démobilisation¹¹). Il faut donc que l'on fasse, dès l'école élémentaire et tout au long de la scolarité, l'effort qui s'impose pour que chaque élève parvienne à comprendre un document et en tirer l'information qu'il recèle.

Enfin, un parc d'ordinateurs nombreux et performants, *assurés d'une maintenance régulière*, est un préalable à l'utilisation systématique de CD-ROM pédagogiques.

⁹ Le risque a été mis en évidence lors d'activités mathématiques en environnement informatique. L'usage de logiciels performants permet aux élèves d'explorer, à partir du problème proposé, des voies non prévues par l'enseignant, confronté à des questions déstabilisantes. A la suite de cela, des enseignants ont abandonné la démarche.

¹⁰ Voir « vivre au lycée avec le multimédia pour le meilleur ou pour le pire » dans Repères-Irem n° 34.

¹¹ Voir « L'ordinateur peut sauver les cancrès », entretien avec Monique Linard. Le Nouvel Observateur n°1768, pages 104 et 105. Sous un titre racoleur on trouve une réflexion lucide et informée sur un domaine sensible.

Conclusion : les risques de l'immobilisme.

L'école de la République n'est plus seule sur le marché de la formation initiale ou continue. Une *industrie de l'enseignement, dynamique et techniquement innovante*, vit aujourd'hui en symbiose (parfois en parasite) avec elle. Elle risque demain de la concurrencer, voire de la marginaliser. Les éditeurs de livres scolaires, qui prospèrent grâce à l'Education Nationale, ont compris les enjeux. Les familles qui en ont les moyens achètent dès aujourd'hui leurs CD-ROM éducatifs et les font utiliser à leurs enfants¹². Un embryon d'école parallèle se dessine, dont on imagine les développements à venir (les classes virtuelles se développent déjà sur Internet¹³). Faut-il laisser au secteur privé l'initiative de créer, avec le concours d'enseignants dont le système public sous-utilise les capacités d'innovation, une école virtuelle, à l'échelle du monde, pour une classe aisée de la population ? Bientôt, grâce aux nouveaux outils, *ceux qui ont les moyens et qui savent lire (y compris les langues étrangères) pourront avoir chez eux le travail des meilleures équipes enseignantes du monde dans toutes les disciplines*.¹⁴ Que deviendra alors un système éducatif qui n'aura pas su (ou pas voulu) prendre ce virage ? L'affaiblissement, l'atomisation de l'Education Nationale sous l'influence des techniques multimédias est un risque sérieux pour l'avenir. Entre les seules mains du secteur privé, elles accroissent les inégalités culturelles et accentuent l'individualisme.

Sans céder aux mirages techniciens, l'école doit intégrer ces outils *au bénéfice de tous*, leur accorder une juste place, *sans abandonner en aucune manière son projet éducatif*. L'enfant ne doit jamais devenir en son sein un individu qui dialogue en permanence avec une machine, fut-elle connectée à toutes les bibliothèques du monde. Pour le système éducatif, la solidarité, l'écoute des autres, la capacité de débattre, d'élaborer des projets qui dépassent l'individu sont, aujourd'hui plus que jamais, des valeurs essentielles, car chancelantes dans la société. Pour toutes ces raisons, il faut acclimater les nouvelles technologies de l'information à l'école, trouver leur place dans le vaste dispositif de formation, les utiliser sans complexes lorsqu'elles sont utiles. *Accueillante à la modernité, l'école de la République ne sera jamais, sauf à se renier, une cyber-école.*

¹² Les CD-ROM éducatifs visent actuellement surtout l'enseignement élémentaire, où les parents peuvent *imposer* ces produits à leurs enfants. Il est probable que, lorsque ceux-ci auront le choix, leurs préférences iront aux CD-ROM de jeux. Rude concurrence et débats familiaux houleux en perspective.

¹³ Voir l'Express n° 2463 du 17.9.98, page 45.

¹⁴ Avoir leur science à disposition ne signifie pas, hélas (ou heureusement), la comprendre et en tirer profit. Il faut pour cela un important travail PERSONNEL.

RENCONTRE REGIONALE DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

organisée par l'APMEP

Cinquante cinq personnes se sont réunis au lycée Koeberlé de Sélestat, pour la traditionnelle rencontre régionale de l'APMEP. La rencontre a débuté par une conférence d'André Stoll sur les spirales : esthétiques, mystiques, historiques, les spirales constituent également un formidable outil heuristique et pédagogique. Un compte rendu de la conférence sera diffusé dans un prochain numéro de l'Ouvert.. A la pause nous avons pu discuter avec une délégation de la MNU du Bade-Wurtemberg, association de professeurs de mathématiques allemands , avec laquelle la régionale de l'APMEP souhaite développer une coopération plus approfondie . Puis les travaux ont été animés en trois ateliers : « mathématiques et interdisciplinarité au collège » par Farida Chaibai, « évolution des épreuves du baccalauréat » par Jean-Pierre Richeton, l'exposition « objets mathématiques » par Madeleine Huguel et Marie-José Baliviera. Après une pause, l'assemblée générale a approuvé à l'unanimité les rapports d'activité et financier et a discuté de la politique de la régionale. Nous rendons compte des ateliers.

MATHEMATIQUES ET INTERDISCIPLINARITE AU COLLEGE

par Farida CHAIBAI
collège Camus de Jarville

Les possibilités de travaux interdisciplinaires en Mathématiques au collège ne manquent pas.

Ils peuvent s'effectuer, de façon classique, lors d'activités en cours de mathématiques. Mais, ces pratiques se révèlent très pertinentes dans le cadre d'ateliers, de clubs, de projets de classes ou de parcours diversifiés.

Les objectifs de telles actions sont multiples. Il s'agit de répondre à la diversité du public scolaire, d'élèves et surtout de susciter la curiosité et le goût de la recherche. L'occasion peut être donnée aux élèves de découvrir les aspects historiques et contemporains des Mathématiques dans les autres sciences et de les relier à d'autres domaines des connaissances. De plus en fonction des circonstances, on rend le travail plus vivant grâce à des intervenants extérieurs ou des séquences pédagogiques hors du cadre scolaire.

Quant à l'enseignant, il travaille en équipe pluridisciplinaire, il appréhende l'enseignement de façon plus ouverte. Ainsi, il renouvelle et enrichit ses pratiques pédagogiques et contribue à un certain décloisonnement des apprentissages.

On peut citer quelques exemples de travaux effectués au cours de ces dernières années :

- Ateliers « maths-français » en 6^{ième} et 5^{ième} : divers travaux de lecture et d'écriture, en demi-classe, en parallèle avec une collègue de français.

- Ateliers en 6^{ième} et parcours diversifié en 5^{ième} « histoire de diverses numérations et sensibilisation à la calligraphie » ainsi qu'un atelier « origami » en 4^{ième} , dans le cadre

d'un partenariat avec un établissement japonais (Takaaka Junior High School de Kanazava.

- Activités concernant « le nombre d'or » en 3^{ième}.
- Classe projet La Villette « Le fil des maths » en 4^{ième}, en partenariat avec la cité des Sciences et de l'industrie à Paris : une heure d'atelier par semaine (mathématiques, technologie, astronomie, histoire, arts plastiques) et une semaine de travail à la Cité des Sciences.

Ces démarches pédagogiques nécessitent de la part de l'enseignant de mathématiques, un rôle actif et innovant. En fonction de sa sensibilité et de ses curiosités, chacun peut trouver de nombreux thèmes transversaux à explorer avec tout type de classe.

Bibliographie :

- Français-Mathématiques . Cahiers pédagogiques n° 316, sept.1993.
- Le français à l'usage des mathématiques. J. et L. DENIERE, éditions KIM. Dunkerque.
- L'empire des nombres. Denis GUEDJ. Collection Découvertes. Gallimard.
- La perspective en jeu. Philippe COMAR. Collection Découvertes. Gallimard.
- Histoire illustrée des mathématiciens. CRDP de Poitiers.
- Origami. Zülal Aytüre-Scheele. Ed. Fleurus.

L'EXPOSITION OBJETS MATHÉMATIQUES.

L'atelier lycée professionnel a monté et étudié l'exposition mise à notre disposition par la régionale Lorraine de l'APMEP. Cette exposition a commencé à circuler en Moselle, dans des écoles primaires, puis en collèges et en lycées. Elle est composée de dix stands formés chacun d'un panneau explicatif présentant un thème et d'objets à manipuler. Les thèmes proposées sont : polycubes, losanges, trilosanges, combis, sphinx, carrés de Mac Mahon, tétraèdres et octaèdres, losanges et décagones, puzzles, puzzles de Pythagore. Un classeur d'activités utilisables face à des élèves, contenant des exemples de travaux expérimentés en classes, ainsi qu'une brochure de 120 pages d'accompagnement et de prolongement de l'exposition sont disponibles. Une description de l'exposition est accessible sur l'excellent site internet de la régionale de Lorraine à l'adresse : www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/expo.htm.

L'EVOLUTION DES EPREUVES AU BACCALAURAT

L'atelier, animé par Jean-Pierre Richeton, était dans le prolongement de la brochure, supplément au bulletin vert n°414 de l'APMEP de février-mars 1998, intitulée *Bac Mathématiques Horizon 2000, contribution du groupe de travail APMEP « Prospective Bac »*. Ce travail a d'ailleurs été largement pris en compte par la commission Bac présidée par l'Inspection Générale, où l'APMEP est représentée es-qualité. L'atelier a proposé des exemples d'autres sujets de baccalauréat pour l'épreuve de mathématiques, que l'on retrouvera dans la brochure précitée. Ces sujets renouvelés

permettraient de voir évoluer les pratiques. Une expérimentation en Terminales S et ES a eu lieu l'an passée et une expérimentation en première aura lieu cette année. Dans la brochure quelques aménagements progressifs de l'épreuve sont proposés :

« par exemple en :

- *diminuant le poids du problème et augmentant le nombre d'exercices,*
- *variant les thèmes de ces exercices afin d'évaluer une plus grande étendue des programmes de première et terminale,*
- *posant une question de cours nécessitant une démonstration et conduisant élèves et professeurs à restituer à celle-ci une place plus importante,*
- *prenant en compte autant les démarches que les résultats , même lorsque ceux-ci ne sont pas complets,*
- *laissant plus d'initiative à l'élève dans les exercices plus ouverts où la créativité y trouverait sa place... ».* On proposerait parmi les exercices des exercices de type « recherche », à condition d'évaluer les candidats sur leurs démarches, qu'elles soient fructueuses ou non .

Le débat au sein de l'atelier a été animé. Si de tels changements se produisaient, la formation continue des enseignants y serait déterminante.

La régionale d'Alsace de l'association des professeurs de mathématiques organise cette année sa rencontre régionale le samedi après-midi **27 mars 1999** à Strasbourg. **Tous les professeurs de mathématiques** de l'académie, adhérents ou non, inscrits ou non , **sont cordialement invités** à participer à un des ateliers et à la table-ronde, à s'informer ou à proposer des idées, à consulter quelques brochures APMEP ou IREM parues récemment, à discuter avec des collègues d'autres établissements.

PROGRAMME :

12h15-13h30 : repas au restaurant pour les collègues intéressés
(réserver au 0388392407 avant le 21 mars 1999)

14h-15h15 : ateliers en parallèle (collège, lycée, lycée professionnel)

15h15-15h30 : pause, consultation de brochures

15h30-16h45 : table ronde

16h45-17h15 : pot convivial , pause, consultation de brochures,

17h15-18h : assemblée générale

Des ateliers par niveau (collège, lycée, lycée professionnel) seront suivis d'une table ronde sur le thème : faire des mathématiques en environnement informatique ou avec des calculatrices.

Luc Trouche , co-auteur de la brochure de l'IREM de Montpellier « faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques » animera un atelier « lycée ». Les collègues pouvant se procurer une ou des calculatrices TI92 sont invités à les apporter à l'atelier. Des collègues de collège animeront un atelier « collège » autour de Cabri-Géomètre. Bernard Schibler animera un atelier « lycée professionnel » sur le thème « une calculatrice alphanumérique adaptée aux programmes des lycées professionnels » : la calculatrice Casio graph 20 sera mise à la disposition des collègues

NOS COLLÈGUES PUBLIENT

TITRE TROMPEUR

par Daniel REISZ - Dijon

JEUX D'ESPRIT ET ENIGMES MATHÉMATIQUES - Comptes de la vie ordinaire -, par Elisabeth Busser et Gilles Cohen, 215 pages, Editions Odile Jacob, prix 130 F.

L'éditeur a imposé le titre, le trouvant sans doute plus commercial bien que trompeur. Dommage, car il ne correspond guère au contenu, alors que celui proposé par les auteurs "Comptes de la vie ordinaire", devenu simple sous-titre, en dit bien plus long sur cette leçon d'instruction civique, option mathématique.

Les titres des chapitres annoncent la couleur : Acheter, Décider, Financer, Circuler, Voter "Acheter" est en tête. "Voter" ferme la marche! Quel symbole de notre société! Et chacun de ces chapitres permet de mesurer combien le consommateur, le contribuable, l'automobiliste, le citoyen ..., c'est-à-dire la composante mathématique, à base de logique, de calculs, de graphiques et de statistiques, de cette nécessaire attention qui est analysée avec intelligence, humour, élégance.

En tête de chaque chapitre, un petit test vous met face à votre crédulité et aux dangers qui vous guettent. Ensuite les pages de droite pointent, expliquent, justifient les enjeux. Elles se lisent agréablement et tout cela reste abordable à l'honnête homme sans nécessité de formation mathématique particulière. Les pages de gauche illustrent les pages de droite : articles de presse, petites histoires drôles, publicités plus ou moins mensongères, petits problèmes délicieusement agaçants et aussi quelques précisions techniques pour nous autres matheux. Regrettons l'absence d'une brève bibliographie, même si au cours du texte d'excellents renvois sont fréquents. Vous apprendrez plein de choses irritantes, statistiques perverties, les effets de seuil, les retraites, les impôts... Cela sera pour beaucoup d'entre nous une source d'exercices et de problèmes motivants et civiquement instructifs à proposer à nos élèves depuis le collège jusqu'à la Terminale (on pense en particulier aux classes littéraires, économiques ou du tertiaire). Je crois d'ailleurs que le livre lui-même peut-être conseillé à des élèves curieux : cela pourra élargir leur regard sur les mathématiques, tout en contribuant à leur éducation citoyenne.

Saviez-vous, par exemple, que si vous possédez une voiture rouge la logique statistique voudrait que vous payiez une surprime d'assurance? Les voitures rouges sont significativement plus souvent impliquées dans des accidents que les autres. N'avez-vous jamais été dupé pour un placement qui affiche un rapport de 7, 18 % l'an et qui ne vous rapporte que 6.27 %. Mais n'avez pas honte, les "spécialistes"

ne sont pas meilleurs! Un Directeur d'un institut de sondage a affirmé, sur les ondes, qu'un sondage s'appuyant sur un échantillon de 850 personnes représentatif d'une population de 800 000 personnes était quand même plus fiable que celui qui s'appuyait sur un échantillon de 1 000 personnes représentatif d'un corps électoral de 34 000 000 de personnes. Et je vous laisse deviner ce qu'il advint (ou mieux, lisez le livre) lorsqu'une promotion d'énarques eut à commenter cet article paru le 26/01/77 dans le Canard Enchaîné

Et les 0,4 % ?

Depuis le 1er janvier, on nous l'a assez dit, la TVA sur un tiers des produits est ramenée de 20 à 17,6 % - soit une baisse de 2,4 %. Une baisse qui, avait annoncé Barre, devait être répercutée "intégralement" au stade du consommateur.

Or, tout le monde l'a constaté, la ristourne dans les magasins est au maximum de 2 %. Manque 0,4 %. 0,4 % ce n'est pas grand-chose, mais ça représente quand même la bagatelle de 1,4 milliard de francs pour 1977.

En fait, il s'agirait d'une bonne manière électorale que le gouvernement a voulu faire aux commerçants, mais en les suppliant surtout de n'en rien dire à personne.

Alors chut ! n'en disons rien.

Les énarques de cette promotion se portent bien.

Daniel REISZ

Cette page de calendrier du XVIII^e siècle couvre les années 1674 à 1691. Notez la suite des épactes, qui correspond au premier cycle des épactes grégoriennes, corrigé en 1700 (voir page 142).

La mention de l'épacte et de la lettre dominicale (deux lettres sont indiquées lors des années bissextiles) suffit pour calculer la date de Pâques.

ANNEE	Lettre Dominicale	Epacte	Lettre Dominale	Lettre Dominale
1674	A	23	G	
1675	B	24	F	
1676	C	25	E	D
1677	D	26	D	C
1678	E	27	C	B
1679	F	28	B	A
1680	G	29	A	GF
1681	A	30	F	E
1682	B	31	E	D
1683	C	1	D	C
1684	D	2	C	BA
1685	E	3	B	A
1686	F	4	A	GF
1687	G	5	F	E
1688	A	6	E	D
1689	B	7	D	C
1690	C	8	C	B
1691	D	9	B	A
1692	E	10	A	GF
1693	F	11	F	E
1694	G	12	E	D
1695	A	13	D	C
1696	B	14	C	B
1697	C	15	B	A
1698	D	16	A	GF
1699	E	17	F	E
1700	F	18	E	D
1701	G	19	D	C
1702	A	20	C	B
1703	B	21	B	A
1704	C	22	A	GF
1705	D	23	F	E
1706	E	24	E	D
1707	F	25	D	C
1708	G	26	C	B
1709	A	27	B	A
1710	B	28	A	GF
1711	C	29	F	E
1712	D	30	E	D
1713	E	31	D	C
1714	F	1	C	B
1715	G	2	B	A
1716	A	3	A	GF
1717	B	4	F	E
1718	C	5	E	D
1719	D	6	D	C
1720	E	7	C	B
1721	F	8	B	A
1722	G	9	A	GF
1723	A	10	F	E
1724	B	11	E	D
1725	C	12	D	C
1726	D	13	C	B
1727	E	14	B	A
1728	F	15	A	GF
1729	G	16	F	E
1730	A	17	E	D
1731	B	18	D	C
1732	C	19	C	B
1733	D	20	B	A
1734	E	21	A	GF
1735	F	22	F	E
1736	G	23	E	D
1737	A	24	D	C
1738	B	25	C	B
1739	C	26	B	A
1740	D	27	A	GF
1741	E	28	F	E
1742	F	29	E	D
1743	G	30	D	C
1744	A	31	C	B
1745	B	1	B	A
1746	C	2	A	GF
1747	D	3	F	E
1748	E	4	E	D
1749	F	5	D	C
1750	G	6	C	B
1751	A	7	B	A
1752	B	8	A	GF
1753	C	9	F	E
1754	D	10	E	D
1755	E	11	D	C
1756	F	12	C	B
1757	G	13	B	A
1758	A	14	A	GF
1759	B	15	F	E
1760	C	16	E	D
1761	D	17	D	C
1762	E	18	C	B
1763	F	19	B	A
1764	G	20	A	GF
1765	A	21	F	E
1766	B	22	E	D
1767	C	23	D	C
1768	D	24	C	B
1769	E	25	B	A
1770	F	26	A	GF
1771	G	27	F	E
1772	A	28	E	D
1773	B	29	D	C
1774	C	30	C	B
1775	D	31	B	A
1776	E	1	A	GF
1777	F	2	F	E
1778	G	3	E	D
1779	A	4	D	C
1780	B	5	C	B
1781	C	6	B	A
1782	D	7	A	GF
1783	E	8	F	E
1784	F	9	E	D
1785	G	10	D	C
1786	A	11	C	B
1787	B	12	B	A
1788	C	13	A	GF
1789	D	14	F	E
1790	E	15	E	D
1791	F	16	D	C
1792	G	17	C	B
1793	A	18	B	A
1794	B	19	A	GF
1795	C	20	F	E
1796	D	21	E	D
1797	E	22	D	C
1798	F	23	C	B
1799	G	24	B	A
1800	A	25	A	GF
1801	B	26	F	E
1802	C	27	E	D
1803	D	28	D	C
1804	E	29	C	B
1805	F	30	B	A
1806	G	31	A	GF

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Connaître la personnalité des mathématiciens célèbres n'est pas chose aisée. Leur oeuvre publiée a gommé toute trace d'émotion et de sentiment pour présenter les résultats mathématiques dans toute leur rigueur et leur vérité. Vérité souvent très belle sans doute et admirable, "honneur de l'esprit humain", mais abstraite et froide, figée dans son éternité comme un ciel étoilé par une nuit d'hiver glacée. Ce qui en a éloigné plus d'un, curieux de sciences mais rebuté par son aridité. A tort : les lettres écrites par les mathématiciens à leurs amis ou collègues nous révèlent des personnalités sensibles et passionnées, essayant de résoudre au mieux, non seulement les problèmes scientifiques qu'ils se sont posés mais aussi les mille et un tracas de leur vie quotidienne et les difficultés causées par les événements politiques et sociaux. Cette rubrique vous présente des lettres, ou de larges extraits que nous pensons représentatifs et révélateurs de la personnalité profonde, mais quelquefois méconnue, de nos illustres savants. Dans ce numéro :

Le voyage d'Abel en Europe (suite et fin)

Le voyage à Paris s'est révélé plutôt décevant pour Abel, qui quitte la capitale française sans regret à la fin de 1826.

"*J'aurais diablement envie de passer par Berlin avant de rentrer au pays*" écrit-il à son ami Holmboe, car là il se sentait bien mieux apprécié et soutenu, en particulier par Crelle. Il aurait aussi dû passer chez Gauss à Göttingen, mais décidément ce ne sera pas encore pour cette fois-ci, faute d'argent. Abel a pratiquement épuisé les ressources de sa bourse, après avoir différé au maximum son départ de Paris, dans l'espoir toujours déçu d'une réponse de Cauchy ou de Legendre, au sujet de son grand mémoire "*sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes*"*

Abel à Ch. Boeck

[Berlin, 15 janvier 1827]

Cher ami Boeck,

Tu seras sans doute étonné que je sois déjà à Berlin. Mais je ne pouvais pas tenir plus longtemps, faute d'argent. J'ai donc dû me hâter de partir au plus tôt tandis que j'avais encore de quoi faire le voyage jusqu'ici. Lorsque je suis arrivé ici il y a 5 jours, ma fortune entière s'élevait à 14 thalers. De Backer j'en ai reçu 50. Je suis obligé de te demander au plus vite ce que tu me dois.

© L'OUVERT 94 (1999)

* voir l'Ouvert n° 92, p.25.

J'ai vraiment peur de l'avenir. J'aurais presque envie de rester pour toujours ici en Allemagne, ce que je peux faire sans difficulté. Crelle m'a terriblement poussé dans mes retranchements pour me faire rester ici. Il est un peu fâché contre moi parceque je refuse. Il ne comprend pas ce que je veux faire en Norvège, qui lui paraît être une autre Sibérie.

Mon voyage de Paris ici a été terriblement vide. Je suis parti de Paris par la diligence pour Bruxelles par Valenciennes. J'ai été tout le temps seul avec une danseuse, non du grand opéra mais d'un des théâtres secondaires. - Dangereux voisinage, la nuit. Elle a dormi dans mes bras, bien entendu, mais c'est tout. D'ailleurs j'ai tenu avec elle une conversation très édifiante sur l'instabilité des choses en ce monde. A Bruxelles, qui est une très jolie ville, je ne suis resté qu'une nuit et un jour et j'ai couru tout le temps par la ville. J'en suis parti de même avec la diligence pour Aix la Chapelle par Liège. J'étais en compagnie d'un garçon fort poli de Francfort sur le Main. Jusqu'à Liège tout le monde parle français. A Aix il me semblait être comme un peu plus chez nous. Puis séjour à Cologne sur le Rhin ; ville extrêmement vieille et laide avec beaucoup de filles. J'y suis resté un jour et deux nuits, et suis parti avec la Poste pour Cassel par Elberfeld et Arnsberg. Il paraît que cette région est extraordinairement belle, mais la nuit et l'hiver m'on empêché de la remarquer. Entre Elberfeld et Arnsberg nous eûmes le malheur de passer sur le corps d'un garçon de 7 à 8 ans. Il est resté mort sur place. La voiture lui avait roulé sur le ventre. - On continua la route sans s'arrêter. - A Cassel, qui est une très jolie ville, j'ai passé la nuit et j'ai été à la Comédie. Le théâtre est très joli et on y jouait bien. - A Cologne j'ai aussi été au théâtre, mais [il était] mauvais. De Cassel je suis parti avec la voiture de poste spéciale (Extrapost) pour Magdebourg en compagnie d'un négociant qui allait à Berlin et à Königsberg. Nous traversâmes le Harz. Ça doit être très beau l'été. De Quedlinburg à Magdebourg, la route est la plus détestable que j'aie suivie. Nous étions deux dans la voiture et bien que nous eussions fait atteler 4 chevaux, nous n'avancions qu'à grand peine. A Magdebourg je passai encore la nuit, et j'en partis pour Berlin avec un cocher de louage. La route est excellente, mais la compagnie fut affreuse, un cordonnier, un gantier et un soldat libéré. Constamment ils buvaient de l'eau de vie. Je m'ennuyais, et personne n'a été plus heureux que moi, lorsqu'après deux jours de voyage, je suis entré dans Berlin par la Porte de Potsdam. - Je n'ai pas entendu parler avant mon départ du mémoire que j'ai déposé à l'Académie de Paris.

Abel à Holmboe

[Berlin, 20 janvier 1827]

Je te remercie vivement de tes deux lettres; tu auras appris sans doute par Skjelderup que je les ai reçues. Certes, j'aurais dû t'écrire depuis longtemps, mais j'attendais d'abord la solution au sujet de mon mémoire que j'ai déposé à l'Institut. Mais ces hommes lents n'en finissaient pas. Legendre et Cauchy étaient juges.

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Cauchy "rapporteur"*. Legendre a dit "ça prendra"*. La-dessus mon voyage de Berlin m'est arrivé comme la Noël sur la bonne femme. - Cette fois-ci encore tu n'auras pas grand chose de moi; j'ai si terriblement à faire pour le Bulletin de Ferussac et le Journal de Crelle. A bientôt davantage.

Et maintenant ce que je voulais surtout - de l'argent. Tu as été assez bon pour me promettre de m'aider. Comme je me trouve dans un embarras du diable, je voudrais naturellement avoir tout ce que tu pourras et le plus possible. - Quand à la remise, le mieux est que tu en parles au professeur Maschmann. Il a un commissionnaire à Hambourg. Ici son fils a promis d'en écrire deux mots à son père. C'est bien le plus commode que tout soit adressé en Hamburger-Banco. - Ne te fâche pas si je t'importune tellement, mais que veux tu que je fasse, moi "pauvre diable" ?

Abel à Holmboe

[Berlin, 4 mars 1827]

Le résultat de ton dévouement, excellent Holmboe, et de mon bout de lettre, je l'ai appris déjà depuis plusieurs jours, en recevant par l'intermédiaire de Cordes, de Hambourg, 293 B 10β. Mille fois merci de ta générosité. Cela m'a rendu un grand service, car j'étais plus pauvre qu'un rat d'église. Maintenant je vais vivre ici là-dessus aussi longtemps que je pourrai, puis je filerai vers le nord. Je resterai un moment à Copenhague, où ma fiancée viendra me rejoindre, puis au pays, où j'arriverai si dénué que je serai bien obligé de tendre la main à la porte de l'église. Je ne me laisse pourtant pas abattre; je suis si bien habitué à la misère et au dénuement. Ça ira toujours. Je t'ai envoyé par Peckel il y a un mois le 3e numéro du Journal de Crelle et un peu plus de la moitié du quatrième, qui est achevé maintenant. Que te semble de mon mémoire ? Je me suis efforcé d'être si rigoureux qu'on ne puisse faire aucune objection fondée.

J'ai déjà préparé un mémoire considérable où l'on voit beaucoup de choses curieuses ("Fonctions elliptiques").* Mais ce que j'ai de plus beau, c'est dans la "Théorie des fonctions transcendentes en général et celle des fonctions elliptiques en particulier".* Mais cela, il faut que je le garde jusqu'à mon retour pour te le faire connaître. Au total j'ai fait une masse effrayante de découvertes. Si seulement je les avais mises en ordre et rédigées, car la plupart ne sont encore que dans ma tête. Il n'y a pas à penser à quoi que ce soit avant que je me sois installé convenablement chez nous. Alors il me faudra travailler dur comme un cheval de fiacre; mais avec plaisir, bien entendu. - Je mène une vie assez ennuyeuse, car elle est sans variété. Etudier, manger, dormir, et pas grand chose de plus. Je joue aux cartes deux ou trois fois par semaine chez le pharmacien Monrad, de Bergen, qui est ici avec sa mère et sa femme. Je plume les gens. Crelle est toujours extrêmement obligeant. J'ai été malade et suis resté au lit pendant quelques jours, je suis remis et je parle allemand mieux que l'an dernier. Il a fait un froid de chien cet hiver, mais il semble que ce soit fini. On a eu à Munich - 24° R. - Il me tarde de rentrer

* En français dans le texte.

au pays, car je ne peux guère avoir d'avantage à rester ici. Quand on est chez soi ou se fait de l'étranger de diables d'idées, autres qu'il ne faudrait. Il ne sont pas si forts. - Les gens en général sont mous, mais assez droits et honnêtes. Nulle part il n'est plus facile d'arriver qu'en Allemagne et en France, chez nous c'est 10 fois plus difficile.

Ton Abel

Nous ne savons pas combien de temps les ressources d'Abel lui auront permis de rester à Berlin. Le 20 mai en tout cas, il est de retour à Christiania. Crelle aurait aimé le garder auprès de lui, mais Abel se faisait un honneur de rentrer au pays et de respecter en priorité ses devoirs envers l'Etat Norvégien qui lui avait permis ce voyage si riche en expériences pour lui.

Il informe rapidement le Conseil de l'Université de son retour, précisant qu'il avait fait de son mieux pour atteindre les objectifs fixés pour ce voyage, et profitant de l'occasion pour solliciter l'examen de sa situation.

Le Conseil était prêt à l'aider mais regrettait que "la situation financière de l'Université la mette dans l'impossibilité absolue d'offrir à M. Abel l'aide dont il a besoin, étant pour le moment sans situation".

Ne pouvant obtenir un poste, Abel ne se décourage pas et fait une nouvelle demande d'aide provisoire en ces termes :

Déjà depuis longtemps j'avais l'idée, en me consacrant complètement à l'étude des mathématiques, de me rendre digne un jour d'être nommé professeur à l'Université. J'ose me flatter, maintenant que j'ai terminé mon voyage à l'étranger, d'avoir acquis des connaissances qui peuvent être considérées comme suffisantes pour une situation à l'Université, lorsque les circonstances le permettront. Mais dans l'attente du jour où une telle situation pourra m'échoir, je suis absolument sans ressources pour me procurer même le simple nécessaire, et il en a été ainsi depuis mon retour. Pour pouvoir vivre, je vais me voir obligé d'abandonner complètement mes études, ce qui me serait excessivement douloureux, au moment où j'espérais justement pouvoir rédiger plusieurs travaux mathématiques commencés. Cela me ferait d'autant plus de tort que je serais alors obligé d'interrompre une carrière d'auteur déjà commencée à l'étranger, comme collaborateur du Journal der reinen und angewandten Mathematik, de Crelle, paraissant à Berlin, dont je me permets de joindre les livraisons parues jusqu'à présent. J'ose donc demander au Conseil une subvention, aux conditions que le Conseil trouvera convenables."

Après beaucoup de discussion et de renvois d'une administration à l'autre, le Conseil accorde une bourse de 200 Thalers prélevés sur son propre budget, sans obligation de remboursement.

De son côté, Crelle continue à se préoccuper du sort d'Abel et cherche à lui procurer un poste à Berlin. Les deux hommes correspondent régulièrement sur des questions mathématiques, et chaque livraison du "Journal" voit la publication des nombreux articles du mathématicien norvégien : pas moins de quinze articles, sur les quatre premiers volumes.

Le 8 avril 1829, Crelle peut enfin annoncer à Abel l'obtention d'un poste à l'Université de Berlin :

“Enfin, mon cher, très cher ami, je peux vous donner de bonnes nouvelles. Le Ministère de l'Instruction a décidé de vous appeler à Berlin et de vous y nommer. Je viens de l'entendre à l'instant même de la bouche de l'homme qui s'occupe de cette affaire au Ministère. Il n'y a donc à ce sujet aucun doute (...) Vous pouvez être dorénavant sans souci pour ce qui est de votre avenir. Vous êtes des nôtres, et en sécurité. Je m'en suis réjoui comme si cela avait répondu à mes propres souhaits. Cela n'a pas été sans beaucoup d'efforts mais, Dieu merci, cela a réussi (...). Avant tout, faites en sorte de retrouver une bonne santé, et que le Ciel fasse que cette lettre vous trouve rétabli. (...) Soyez heureux et rassurez-vous tout à fait. Vous venez dans un bon pays, où le climat est meilleur, plus près de la science et d'amis sincères qui vous apprécient et vous aiment.”

Il était hélas trop tard. Abel était mort, deux jours auparavant le 6 avril 1829, des suites d'une phtisie, de celles que l'on appelle galopantes. Il avait 26 ans. Crelle écrira dans son “Journal” :

“Tous les travaux d'Abel portent l'empreinte d'une sagacité et d'une puissance d'esprit extraordinaires et vraiment étonnantes, même sans considérer sa jeunesse. Il pénétrait son sujet à fond avec une vigueur qui semblait irrésistible, il le saisissait avec une si extraordinaire énergie et de si haut, et il s'est élevé à tel point au-dessus du niveau de son époque, que les difficultés semblaient s'évanouir devant son génie victorieux.”

“Il était également distingué par la pureté et la noblesse de son caractère, et par une rare modestie, qui le rendait aussi aimable que son génie était extraordinaire. La jalousie des mérites d'autrui lui était chose tout-à-fait étrangère. Il était bien éloigné de cette avidité d'argent ou de titres, ou même de renommée, qui porte souvent à se servir de la science comme d'un moyen de parvenir. Il estimait trop haut les vérités qu'il cherchait pour les vendre à si bas prix. Il trouvait la récompense de ses efforts dans leur résultat même, il était presque aussi heureux d'une découverte nouvelle, qu'elle eût été faite par lui ou par un autre. Les moyens de se faire valoir étaient pour lui chose inconnue; il ne faisait rien pour lui-même, mais tout pour sa chère science. Tout ce qui a été fait pour lui provient exclusivement de ses amis, sans la moindre intervention de sa part... Il a sacrifié sa vie pour la science, sans songer à sa propre conservation... Gloire à la mémoire de cet homme également remarquable par ses talents extraordinaires et la pureté de son caractère. Il a été un de ces êtres rares dont il apparaît à peine un par siècle.”

Indications bibliographiques

• Les extraits des lettres d'Abel ont été pris dans : Niels Henrik ABEL, “*Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*”, Jacob Dybwad, Kristiania, 1902, qui contient l'ensemble de la correspondance d'Abel, traduite pour l'essentiel en français, et précédée d'une “Introduction historique à sa correspondance” par Elling HOLST.

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

- Ore Oystein : *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary*, University of Minesota, 1957 : traduit en français par Gilles Châtelet, dans la collection “Un savant, une époque” sous le titre “*Abel, un mathématicien romantique*”, Belin 1989.

BJERKNES C.A : *Niels Henrik Abel, Tableau de sa vie et de son action scientifique, Paris 1885.*

Pour ceux qui lisent le norvégien, une nouvelle biographie très complète et détaillée vient d’être publiée récemment, par Arild STUBHAUG, sous le titre *Et torauskudt lyn, Niels Henrik Abel og hans tid*, ASCHEHOUG 1996 (598 pages).

Voici un extrait de la préface du livre “La saga des calendriers” de Jean LEFORT dont vous trouverez une présentation au dos de cette page.

Mesurer le temps, c’est une façon de le défier, de se sentir plus fort que lui, car il entre alors dans le corset de la mesure. C’est l’illusion d’accéder à l’éternité des dieux (ou de Dieu), de partager leur pouvoir et d’acquérir la connaissance de leurs volontés. Dominer le temps, c’est transcender la vie et la mort, en devenant capable de repérer des événements bien avant sa naissance et de se projeter bien après sa mort. On comprend alors l’influence du pouvoir, religieux souvent, civil parfois, ou même des deux à la fois selon les époques, sur la construction d’un calendrier. Selon l’intérêt de ce pouvoir, le calendrier sera simple, afin que tous puissent le comprendre et suivre naturellement les maîtres du moment, ou bien compliqué, afin que la plupart des individus soient obligés de consulter les sages (prêtres, spécialistes, etc.). Une analyse historique, culturelle et religieuse, sans négliger la part de contingence, révélerait peut être pourquoi le calendrier musulman est plus simple que notre calendrier civil (dit grégorien), lui même plus simple que le calendrier grégorien religieux (avec la date de Pâques), le plus compliqué de tous étant sans nul doute le calendrier juif.

LA SAGA DES CALENDRIERS OU LE FRISSON MILLENARISTE

par Jean LEFORT

Au 31 décembre 1999, nous serons aussi le 22 Têvêth 5760 de l'ère juive de la création, le 23 Ramadan de l'année 1420 de l'hégire, le 18 décembre 1999 selon le calendrier julien, le 10 Nivôse de l'an 209 pour les révolutionnaires obstinés... et à un an du troisième millénaire de l'ère chrétienne. L'an 2000 est ainsi l'occasion de s'interroger sur la diversité des calendriers et la maîtrise du temps.

Comment compter le temps, concilier les astres et accorder les périodes du jour, du mois lunaire et de l'année solaire? Depuis l'érection des premiers monolithes destinés à repérer le lever du Soleil d'équinoxe, jusqu'à la réforme du pape Grégoire XIII, qui fixe la longueur de nos années, les civilisations ont fait preuve d'ingéniosité dans le choix de calendriers qui leur évitent de procéder à d'éternels ajustements. Certaines ont choisi de suivre la Lune, d'autres le Soleil, d'autres encore ont tenté de suivre les deux astres. Construire un calendrier, c'est alors croiser les problèmes mathématiques et les aspects culturels, mêler la commune ingéniosité des hommes à l'histoire particulière d'un peuple.

Une version Mapple des algorithmes de transposition d'un calendrier dans l'autre (période julienne, calendrier julien, calendrier grégorien, calendrier juif, calendrier arabe) peut être demandée à l'auteur en envoyant une disquette PC pour Mapple.



Le temps et les astres

1. Origines et unités

De l'utilité de l'unité de mesure

Annexe astronomique

2. Un calendrier vraiment universel

Le plus simple est de compter les jours

3. Les calendriers lunaires

Suivre la Lune au fil des mois

Annexe mathématique

4. Les calendriers solaires

365 jours ne font pas le compte

5. Les calendriers luni-solaires

Suivre la Lune sans perdre le Soleil

6. La date de Pâques

Une périodicité de 57000 siècles

Annexe informatique

7. Quelques systèmes exotiques

Des Mayas aux Gaulois

Les calendriers au péril du temps

Une vaine recherche de la perfection

Index

Bibliographie

Certaines études qui constituent ce livre ont été publiées dans 'L'Ouvert' de 1988 à 1990.

Ed. Belin (1998) – Collection Pour la Science – ISBN 2-9029-003-5 – 140 F

A VOS STYLOS

PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$\operatorname{tg} x = \frac{x - \frac{1.3.5 x^3}{1.2.3 3!} + \frac{1.3.5.7.9 x^5}{1.2.3.4.5 5!} - \dots}{1 - \frac{1.3 x^2}{1.2 2!} + \frac{1.3.5.7 x^4}{1.2.3.4 4!} - \dots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \frac{a(a+2)(a+4) x^3}{a(a+1)(a+2) 3!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8) x^5}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4) 5!} - \dots}{1 - \frac{a(a+2) x^2}{a(a+1) 2!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6) x^4}{a(a+1)(a+2)(a+3) 4!} - \dots}$$

Solution (par P. Renfer) :

1) Deux fonctions auxiliaires

Soit la fonction $f(z)$ définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+2)(a+4) \cdots (a+2n-2) z^n}{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n) n!}$$

qui est entière, car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} : \frac{u_n}{n!} = 0.$$

On pose $g(z) = e^{-z} f(z)$; pour x élément de on a

$$f(ix) = e^{ix} g(ix) = g(ix) \cos x + i g(ix) \sin x = D(x) + iN(x),$$

où $D(x)$ et $N(x)$ désignent respectivement les numérateur et dénominateur de la fraction de l'énoncé.

Si l'on démontre que g est une fonction paire, le problème est résolu, car alors $g(ix)$ est réel, d'où $D(x) = g(ix) \cos x$, $N(x) = g(ix) \sin x$, $\tan x = \frac{N(x)}{D(x)}$

A cet effet, nous allons prouver que, pour tout n , $g^{(2n+1)}(0) = 0$.

2) Parité de g quand a est un entier strictement positif

On a, pour tout n , $u_{n+1} = \frac{a+2n}{a+n}u_n = 2u_n - \frac{a}{a+n}u_n$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} \frac{z^n}{n!} = 2f(z) - a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^n}{(n+a)n!}$$

$$z^a f'(z) = 2z^a f(z) - a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^{n+a}}{(n+a)n!}$$

En dérivant membre à membre,

$$az^{a-1}f'(z) + z^a f''(z) = 2az^{a-1}f(z) + 2z^a f'(z) - az^{a-1}f(z),$$

d'où une équation différentielle satisfaite par f :

$$zf''(z) + (a-2z)f'(z) - af(z) = 0,$$

d'où l'on déduit, en dérivant $f(z) = e^z g(z)$, une équation différentielle satisfaite par g :

$$zg''(z) + ag'(z) - zg(z) = 0.$$

On a $g'(0) = 0$. Dérivant $2n$ fois la relation $ag'(z) = z[g(z) - g''(z)]$ grâce à la formule de Leibniz, on trouve :

$$ag^{(2n+1)}(z) = z[g^{(2n)}(z) - g^{(2n+2)}(z)] + 2n[g^{(2n-1)}(z) - g^{(2n+1)}(z)],$$

d'où $(a+2n)g^{(2n+1)}(0) = 2ng^{(2n-1)}(0)$, et, par induction sur n , $g^{(2n+1)}(0) = 0$.

3) Parité de g dans le cas général

Développons g en série entière :

$$g(z) = e^{-z} f(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \frac{z^n}{n!},$$

où

$$v_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u_k.$$

Ainsi, v_n est une fraction rationnelle de la variable a . En particulier, le numérateur de v_{2n+1} est un polynôme de la variable a dont on sait qu'il s'annule pour toute valeur entière > 0 de a . Ce polynôme est donc identiquement nul.

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1, D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de $(D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2)$, puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de $(D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3)$.

Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des 2-mélanges réguliers (pour la définition d'un 2-mélange, voir les articles sur les tours de cartes dans les numéros 90 et 93 de l'Ouvert).

1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.

2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

PROBLÈME 54

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Montrer que si x, y et z sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.

2°) Soit n un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = n$$

est égal au nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$(2) \quad xy + yz + zx = n.$$

Exemple. — $n=35$. L'équation (1) possède six solutions : $(1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3)$ et $(5, 3, 1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1, 5, 5), (5, 1, 5), (5, 5, 1), (1, 1, 17), (1, 17, 1)$ et $(17, 1, 1)$.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 55

Énoncé (proposé par J. Lefort) : Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(x + 1)$$

dans l'ensemble le plus vaste possible.

