





---

# GROUPE PREMIER CYCLE

*année scolaire 2013 - 2014*

Annie BOURDIL

Miquela CATLLA

Florence LARUE

Françoise SAVIOZ

Yves CHASSIN (*responsable du groupe*)

Bertrand TOQUEC

Bernard VIDAL

**IREM de Toulouse**

Université Paul Sabatier

Bâtiment 1 R 2

31062 TOULOUSE cedex 9

---

## SOMMAIRE

- Présentation .....page 3
- Quelques réflexions sur les priorités opératoires .....page 5
- Des grandeurs aux nombres .....page 27
- Les apports de la sémiologie saussurienne aux thèses développementales de Vygotski .....page 61
- Extraits de L'erreur n'est pas une faute .....page 76





## PRÉSENTATION

« Éléments 0 » inaugurerait une série de brochures « périodiques » (à périodicité variable) intitulées « Éléments n ». Voici donc « Éléments 2 ».

On y trouvera d'abord deux articles du groupe : l'un est un compte rendu d'une suite d'activités menées en classe de sixième allant des grandeurs aux nombres ; l'autre est une réflexion sur les priorités opératoires en classe de cinquième.

Enfin, on pourra lire un article de Jean-Paul Bronckart et Ecaterina Bulea de la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de Genève, intitulé « Les apports de la sémiologie saussurienne aux thèses développementales de Vygotski ». Nous voulons ici les remercier de l'amabilité qu'ils nous ont faite en nous permettant la publication de cet article.

Il est possible qu'on puisse trouver quelques redites d'un article à l'autre, mais, se trouvant dans des contextes et des éclairages différents, elles peuvent peut-être aider à mieux cerner les propositions concernées.

Nous rappelons enfin que nous sommes prêts à publier dans les prochains numéros les réactions suscitées par nos diverses propositions.

Bonne lecture.

Le groupe Premier Cycle de l'IREM de Toulouse



# QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LES PRIORITÉS OPÉRATOIRES

## I. Introduction

Notre intérêt pour l'enseignement de l'algèbre au collège nous a conduit à nous intéresser aux concepts sur lesquels les concepts algébriques s'enracinent puisque comme l'écrit Vygotski :

« Un nouveau stade de généralisation ne peut apparaître que sur la base du précédent. Une nouvelle structure de généralisation a pour source non pas une nouvelle généralisation directe des objets à laquelle procéderait la pensée mais la généralisation des objets généralisés dans la structure précédente. Elle apparaît en tant que généralisation de généralisations et non pas simplement comme nouveau mode de généralisation d'objets singuliers. Le précédent travail de la pensée, qui s'est traduit dans les généralisations dominant au stade précédent, n'est pas annulé, n'est pas perdu mais s'intègre à titre de prémisses nécessaires dans le nouveau travail de la pensée. »

(L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 391)

Ainsi nous avons dû examiner plus en détails les concepts de grandeur mesurable, de nombre, d'opération, d'égalité, de calcul, entre autres, et leurs développements, puisque c'est en partie sur ces concepts que les concepts algébriques se fondent. Cela nous a en particulier amenés à définir le « calcul chiffral »<sup>1</sup> pour le distinguer du calcul littéral et à tenter de circonscrire une signification du mot calcul<sup>2</sup>. Et nous avons proposé de « définir » le calcul d'un nombre comme un changement de forme de ce nombre soit en vue de l'écrire sous une forme adaptée au problème dans lequel il intervient, soit de l'écrire sous sa « forme réduite »<sup>3</sup>.

Cela nous a également poussés à examiner le concept de « priorités opératoires » conçu dans l'esprit des programmes du collège comme un « préalable au calcul algébrique » et à son enseignement.<sup>4</sup> Ce dernier consiste essentiellement à apprendre aux élèves comment calculer des nombres écrits à l'aide de plusieurs symboles opératoires en vue d'obtenir leur forme réduite. Il

---

<sup>1</sup> Le « calcul chiffral » ne s'effectue qu'avec des nombres écrits à l'aide de chiffres contrairement au calcul littéral où certains nombres peuvent être écrits à l'aide de lettres. (Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, p. 5)

<sup>2</sup> Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, pp. 4-18.

<sup>3</sup> Rappelons que nous avons défini la forme réduite d'un nombre comme la forme de ce nombre qui nécessite le moins de signes possible pour l'écrire. (Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, p. 15)

<sup>4</sup> « L'acquisition des priorités opératoires est un préalable au calcul algébrique. Les questions posées à propos de résultats obtenus à l'aide de calculatrices peuvent offrir une occasion de dégager les priorités opératoires usuelles. » (B.O. spécial du 28 août 2008)



revient le plus souvent à énoncer des « règles » plus ou moins justifiées et à les faire appliquer par les élèves dans diverses situations.

L'analyse de cet enseignement nous a semblé soulever quelques questions tant mathématiques que didactiques. Il nous a poussés à nous interroger sur la nécessité d'un tel enseignement et de la possibilité d'une autre approche de ces questions. C'est ce que nous allons tenter de faire dans cet article. Nous rappelons que notre réflexion s'inscrit dans une approche historico-socio-culturelle de l'apprentissage dont Vygotski est l'un des fondateurs essentiels.

## II. Bref examen de l'enseignement « habituel »<sup>5</sup> des priorités opératoires

L'enseignement des priorités opératoires s'effectue au collège en classe de cinquième. Il consiste donc à enseigner aux élèves comment calculer des nombres dans l'écriture desquels apparaissent plusieurs symboles d'opérations, comme dans les nombres  $2 + 3 \times 4$  ou  $24 \div (12 - 4) - 0,5 \times 3$ . Il suppose que la plupart des élèves sont incapables de calculer de tels nombres avec leurs connaissances antérieures de l'école primaire et de la classe de sixième.

Pour le vérifier, nous avons demandé à des élèves de deux classes de sixième<sup>6</sup>, dès le début de l'année, de calculer les nombres et les grandeurs suivants :

**P1.** Calculer les nombres suivants en indiquant toutes les étapes des calculs :

$$A = 3 \times 4 + 2$$

$$B = 15 - 2 + 3$$

$$C = 12 + 4 \div 2$$

$$D = 2 \times 3 + 5 \times 4 + 1$$

$$E = 15 + 3 - 2$$

$$F = 4 \div 2 + 12$$

$$G = 2 + 3 \times 4$$

$$H = 2 \times 3 + 1 + 5 \times 4$$

**P2.** Calculer les grandeurs suivantes en indiquant toutes les étapes des calculs :

$$A = 3 \text{ kg} \times 4 + 2 \text{ kg}$$

$$B = 15 \text{ m} - 2 \text{ m} + 3 \text{ m}$$

$$C = 12 \text{ g} + 4 \text{ g} \div 2$$

$$D = 2 \times 3 \text{ €} + 5 \times 4 \text{ €} + 1 \text{ €}$$

$$E = 15 \text{ m} + 3 \text{ m} - 2 \text{ m}$$

$$F = 4 \text{ g} \div 2 + 12 \text{ g}$$

$$G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$$

$$H = 2 \times 3 \text{ €} + 1 \text{ €} + 5 \times 4 \text{ €}$$

Ces questionnaires ont été distribués sans préparation, alors que nous étudions les premiers éléments de géométrie et qu'avaient été abordés en tout début d'année l'écriture décimale des

<sup>5</sup> Nous appelons l'enseignement « habituel » des priorités opératoires celui qui est proposé dans tous les manuels de cinquième et effectivement dispensé par l'immense majorité des professeurs. Pour avoir brièvement enquêté auprès de ces derniers dans six collèges de l'académie de Toulouse, tous ont répondu pratiquer ainsi.

<sup>6</sup> Cette activité a été proposée à 48 élèves de 6e au collège V. Hugo de Carmaux en octobre 2011.

nombre décimaux et quelques rappels sur les grandeurs mesurables comme la longueur, la masse, l'aire, entre autres, l'addition et la soustraction. À cette occasion, nous avons réfléchi au problème du calcul et avons défini le calcul comme nous l'avons proposé dans l'introduction de cet article. De plus, ils ont été donnés à une quinzaine de jours d'intervalle, le questionnaire P1 avant le questionnaire P2 dans une classe et le questionnaire P2 avant le questionnaire P1 dans l'autre. Il nous semblait en effet intéressant de voir si les élèves calculaient mieux avec des grandeurs mesurables qu'avec des nombres, ou inversement, et si l'ordre dans lequel ces questionnaires avaient été posés influait sur les réponses.

Finalement nous avons obtenu les résultats suivants :

Nombres	Effectifs	Réponses exactes (en %)
A	44	91,6 %
B	46	95,8 %
C	5	10,4 %
D	31	64,6 %
E	42	87,5 %
F	44	91,6 %
G	15	31,2 %
H	25	52,1 %

Grandeurs	Effectifs	Réponses exactes (en %)
A	42	87,5 %
B	46	95,8 %
C	5	10,4 %
D	34	70,8 %
E	46	95,8 %
F	44	91,6 %
G	11	22,9 %
H	30	62,5 %

Nous avons pu ainsi constater que l'ordre dans lequel les questionnaires avaient été donnés n'avait pas d'influence notable et que nos élèves calculaient sensiblement de la même manière en grandeur ou en nombre. Pour le questionnaire P1, les calculs des nombres  $C = 12 + 4 \div 2$  et  $G = 2 + 3 \times 4$  ont été ceux occasionnant le plus d'erreurs. Plus précisément, sur les 48 élèves interrogés, 5 élèves ont trouvé  $C = 14$  ; 40 élèves ont trouvé  $C = 8$  ; un élève a trouvé  $C = 9$  ( $16 \div 2 = 9$ ) et 2 n'ont pas répondu. Pour le nombre G, 15 élèves ont trouvé  $G = 14$  ; 31 élèves ont trouvé  $G = 20$  ; un élève  $G = 25$  ( $5 \times 4 = 25$ ) et un élève n'a pas répondu. Ce qui signifie que 85,4 % des élèves ont calculé C en effectuant les calculs de gauche à droite et que 66,6 % des élèves ont calculé G de la même manière. Il est à noter que tous les élèves qui ont trouvé que  $G = 20$  ont trouvé que  $C = 8$  en procédant dans les deux cas de la même façon.

De même pour le questionnaire P2, les calculs des grandeurs  $C = 12 \text{ g} + 4 \text{ g} \div 2$  et

$G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$  ont été ceux causant le plus d'erreurs. Sur 48 élèves, 5 ont trouvé  $C = 14 \text{ g}$  ; 37 ont écrit  $C = 8 \text{ g}$  ; 1 élève a trouvé  $C = 7 \text{ g}$  ( $12 - 2 = 10$  ;  $10 + 4 = 14$  ;  $14 \div 2 = 7$ ) ; 1 élève a trouvé  $C = 16,2 \text{ g}$  ( $16 \div 2 = 16,2$ ) ; 1 élève a trouvé  $C = 24 \text{ g}$  ( $12 + 4 = 16 \div 2 = 8 + 16$ ) ; 3 élèves n'ont rien répondu. Pour la grandeur  $G$ , 11 élèves ont répondu  $G = 14 \text{ kg}$  ; 31 élèves ont trouvé  $G = 20 \text{ kg}$  ; 3 élèves ont écrit  $G = 24 \text{ kg}$  ( $2 + 3 = 6 \times 4$  ou  $2 \times 3 = 6 \times 4$ ) ; 1 élève a trouvé  $G = 25 \text{ kg}$  ( $4 \times 5 = 25$ ) ; 1 élève a trouvé  $G = 32 \text{ kg}$  ( $2 + 3 = 8 \times 4 = 32$ ) ; 1 élève a trouvé  $G = 17 \text{ kg}$  ( $5 + 12$ ). Donc, 79,2 % des élèves ont calculé  $C$  en effectuant les calculs de gauche à droite et 75 % d'entre eux ont fait de même pour le calcul de  $G$ . Il faut noter que 87 % des élèves qui ont écrit  $G = 20 \text{ kg}$ , en calculant de gauche à droite, ont trouvé  $C = 8 \text{ g}$  en calculant de la même façon et qu'il semble que le calcul en grandeur ait désarçonné certains d'entre eux, sans doute par manque d'habitude ou de pratique.

Quoi qu'il en soit, cette brève enquête montre avec évidence qu'un enseignement est nécessaire quant à l'apprentissage de tels calculs, ce à quoi semble répondre la notion de priorités opératoires.

Pour cela, les manuels de cinquième proposent d'établir quelques « règles », qu'ils présentent le plus souvent comme des conventions<sup>7</sup> et qu'ils énoncent pratiquement tous de la manière suivante :

R1 : « Dans une expression **sans parenthèses** ne comportant que des additions et des soustractions, on effectue les opérations **de la gauche vers la droite**. »<sup>8</sup>

R2 : « Dans une expression **sans parenthèses**, les multiplications et les divisions sont **prioritaires** sur les additions et les soustractions.

R3 : « Dans une expression **avec parenthèses**, on effectue en priorité les calculs entre les parenthèses les plus intérieures.<sup>9</sup> »

De cette façon, lorsqu'un élève aura à calculer un nombre comme  $2 + 3 \times 4$ , appliquant la règle R2, il pourra écrire  $2 + 3 \times 4 = 2 + 12$  puisque les « multiplications sont prioritaires sur les additions » et que le calcul de la somme  $2 + 3$  ne peut donc être effectué d'abord.

<sup>7</sup> Certains manuels définissent le mot convention. Par exemple, le manuel de 5e de la collection Transmath édité par Hachette la définit ainsi : « C'est une règle de conduite adoptée par un groupe, ici les mathématiciens. »

<sup>8</sup> Il est à noter qu'à la lumière de cette enquête, une règle comme la règle R1 paraît moins s'imposer vis les pourcentages de calculs exacts des nombres B et E.

<sup>9</sup> Mathématiques 5e, *Collection Délic*, Hachette Livre, 2010.

On trouve des formulations équivalentes dans la plupart des manuels de 5e, le mot "expression" étant parfois remplacé par le mot "calcul" ou par "suite d'opérations" ou par des tournures comme "Pour calculer une expression numérique...".

(Voir : Collection Transmath, Nathan, 2010 ; Collection Myriade, Bordas, 2010 ; Collection Triangle, Hatier, 2010 ; Collection Nouveau Prisme, Belin, 2010 ; Collection Phare, Hachette, 2010...)



## II.1. Quelques questions soulevées par un tel enseignement

Un tel enseignement ainsi présenté très succinctement soulève quelques questions dont nous voudrions rapidement rendre compte.

Tout d'abord les formulations choisies indiquent une forme de confusion entre le concept d'opération et celui de calcul, en particulier dans l'expression « on effectue les opérations de gauche à droite ».

« Il arrive [...] toujours, à quelque niveau que ce soit, et plus ou moins rapidement, un moment où il faut procéder à une élucidation essentielle au sens de tout le complexe numérique : celle de la différence entre une opération et un calcul. » (S. BARUK, *Si 7 = 0*)

Rappelons en effet qu'une opération sur un ensemble de nombres, IR par exemple, est une loi de composition interne sur cet ensemble IR, qui à deux nombres réels, leur associe un nombre réel qui peut être leur somme (si l'opération est l'addition), leur différence (si l'opération est la soustraction), leur produit (si l'opération est la multiplication) ou leur quotient (si l'opération est la division et que le deuxième nombre n'est pas nul), puisque seules ces opérations sont étudiées au collège. Cela signifie donc que lorsqu'on écrit le nombre  $13 - 7$  l'opération soustraction a été effectuée, qu'aux nombres 13 et 7 a déjà été associé leur différence  $13 - 7$  : le symbole « - » en est en quelque sorte la preuve, montrant ainsi que 13 et 7 sont liés par soustraction et non par une autre relation. Sans ce symbole, nous ne pourrions savoir ce qui relie 13 et 7, si 13 et 7 sont liés par addition, soustraction ou par une autre opération. Le symbole « - » entre 13 et 7 dans l'écriture du nombre  $13 - 7$  atteste donc bien que l'opération n'est plus à « effectuer » puisqu'elle a déjà été « faite ». C'est pourquoi, lorsque nous écrivons par exemple le nombre  $13 - 7 + 5$ , nous ne pouvons pas « effectuer les opérations de gauche à droite » puisque les symboles « - » et « + » attestent que la soustraction et l'addition ont déjà été faites.

Par contre, le nombre  $13 - 7 + 5$  peut être calculé, c'est-à-dire que nous pouvons l'écrire sous une autre forme comme  $6 + 5$  ou  $13 - 2$  ou bien encore 11, qui est sa forme réduite, ou sous tout autre forme. Nous disons parfois à nos élèves qu'un symbole opératoire comme le symbole « - » est la « cicatrice » de l'opération par métaphore avec l'opération chirurgicale. Ce terme de « cicatrice » leur permet de mieux différencier le concept d'opération et celui de calcul. Il nous semble en conséquence qu'une formulation où il serait dit « on calcule de gauche à droite » aurait été préférable.

Ensuite, ces règles données ci-dessus posent un problème mathématique dans leur expression même puisque, écrites telles quelles, elles ne peuvent être comprises ni comme des conditions nécessaires ni comme des conditions suffisantes. En effet lorsque la règle R1, par exemple, est énoncée ainsi : « on effectue les opérations de gauche à droite », nous ne pouvons savoir s'il faut lire « il faut effectuer les opérations (plutôt les calculs) de gauche à droite » ou plutôt « il suffit d'effectuer les calculs de gauche à droite pour que le calcul soit exact » ? La formulation choisie

par les manuels reste imprécise et ne permet pas de trancher. Or, si la règle R1 doit être lue comme une condition nécessaire, elle est fautive puisqu'on peut calculer correctement le nombre  $A = 15 - 5 - 2$  de la façon suivante :  $A = 15 - 5 - 2 = 15 - 7 = 8$  même si, dans ce cas, les calculs n'ont pas été effectués de gauche à droite. Il ne faut donc pas, nécessairement, « dans une expression **sans parenthèses** ne comportant que des additions et des soustractions, effectuer les opérations (calculs) **de la gauche vers la droite**. » En conséquence, cette règle ne peut être, comprise que comme une condition suffisante, c'est-à-dire qu'elle indique comment il suffit de calculer pour qu'un tel calcul soit exact. Mais, dans ce cas, la règle R1 est impuissante à justifier le calcul du nombre A tel qu'il a été mené ci-dessus, ce qui laisse ce calcul exact sans justification possible et l'enseignant dans une position délicate.

De même pour la règle R3 : si la règle R3 doit être comprise comme une condition nécessaire, elle s'avère fautive car on peut débuter le calcul du nombre  $B = 6 \times (14 - 5) + 3 \times 2$  par  $B = 6 \times (14 - 5) + 6$  et même le continuer en écrivant  $B = 6 \times (14 - 5 + 1)$ , sans respecter la règle R3 lue comme une condition nécessaire. Il n'est donc pas nécessaire « dans une expression **avec parenthèses**, d'effectuer en priorité les calculs entre les parenthèses les plus intérieures ». Comme la règle R1, la règle R3 ne peut donc être entendue comme une condition nécessaire : elle ne peut l'être que comme condition suffisante, ce qui la rend, elle aussi incapable de justifier le calcul du nombre B tel qu'il a été conduit plus haut.

Enfin ces règles ont essentiellement un caractère prescriptif et indiquent, comme le mot règle le signifie, ce qui doit être fait dans un cas déterminé<sup>10</sup>. Elles ne semblent pas pouvoir se déduire de connaissances antérieures, rompent ainsi le fil du sens, et ne sont donc pas justifiées, puisqu'elles sont vues comme des conventions arbitraires. Comme on peut lire dans un manuel de cinquième :

« Comme en navigation fluviale, les priorités dans les calculs sont des conventions, c'est-à-dire que l'on s'est mis d'accord pour que ce soit comme cela. Une convention ne se prouve pas. » (Manuel de 5e, collection Myriade, Bordas, p. 13)

Pourtant d'autres manuels, peut-être sensibles au fait qu'un tel enseignement puissent être senti comme une rupture dans l'édifice hypothético-déductif des mathématiques, semblent tenter de convaincre les élèves que ces règles sont bien valides par l'utilisation de la calculatrice comme les programmes le suggèrent. Mais il est évident que l'usage de la calculatrice ne peut en aucun cas faire office de preuve ni même de « justification » puisque les calculatrices ont été construites pour respecter ces mêmes principes.

---

<sup>10</sup> Rappelons ici la définition du mot "règle" donnée par A. Lalande : « Formule indiquant ou prescrivant ce qui doit être fait dans un cas déterminé. » A. LALANDE, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, P.U.F, 2006

## II.2. La question du sens

Malgré les quelques réserves rapidement évoquées plus haut, on peut concéder qu'un tel enseignement puisse permettre à un certain nombre d'élèves, avec un entraînement intensif, de répondre « juste », c'est-à-dire en l'occurrence de calculer exactement dans les cas évoqués précédemment, du moins au moment de cet apprentissage. Mais quel sens peut revêtir pour eux un tel apprentissage ? Que leur permet-il de comprendre ? Comment un telle présentation peut-elle s'articuler avec les connaissances de l'élève sur les nombres, sur les opérations et leur sens, sur tous les concepts arithmétiques élaborés au cours de sa scolarité ?

Pour examiner ces questions, il faut peut-être commencer par nous arrêter un instant sur la signification de l'expression « donner un sens » ou du mot « comprendre ».

Comme le rappelle G. Deniau, dans son ouvrage *Qu'est-ce que comprendre ?* :

« Comprendre, c'est voir des connexions, et voir des connexions, c'est saisir un sens. Les connexions saisies dans la compréhension sont signifiantes. » (G. DENIAU, *Qu'est-ce que comprendre ?*, p. 27)

Or, comme l'écrit P. Ricœur dans son article *Signe et sens* du *Dictionnaire de la philosophie* :

« Pour Émile Benveniste, dans *Problèmes de linguistique générale*, le fonctionnement du langage repose sur deux sortes d'unités irréductibles l'une à l'autre : les unités sémiologiques ou signes, les unités sémantiques, qui se ramènent à une seule sorte, la phrase. Le sens est du côté de la phrase et non du signe. Le sens n'est donc pas une annexe du signifié et du signe. [...] au contraire, le sens de la phrase, que l'on appellerait mieux l'« intenté » que le signifié, est un contenu global de pensée que l'on peut se proposer de dire autrement à l'intérieur de la même langue, ou de traduire dans une autre langue ; alors que le signifié est intraduisible, l'intenté est éminemment traduisible. »

(P. Ricœur, *Signe et sens*, pp. 1875-1876)

Ce qui signifie que comprendre quelque chose, lui donner un sens, pourrait se manifester par le fait d'être capable de le dire autrement, de le traduire, de l'expliquer d'une autre manière, avec d'autres mots, à partir de différents points de départ conceptuels ou en mobilisant d'autres représentations sémiotiques, par exemple.<sup>11</sup>

On retrouve en fait ici ce qu'exprime Vygotski dans *Pensée & langage*, en particulier dans le chapitre VI : lorsque qu'un domaine de connaissances est maîtrisé, c'est-à-dire compris, que ces connaissances prennent tout leur sens, ces dernières étant pensées dans une structure de

---

<sup>11</sup> Cette conception de la compréhension rejoint, dans une certaine mesure, celle exprimée par Wittgenstein dans ces *Remarques philosophiques* : « Nous parlons de la compréhension d'une phrase au sens où la phrase peut être remplacée par une autre qui dit la même chose... » (L. Wittgenstein, *Remarques philosophes*, § 531) ; ou celle de Duval : « Il n'y a pas de compréhension en mathématiques sans la capacité de changer de type de représentation (sémiotique). » (R. Duval, *La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée*)



généralisation<sup>12</sup> par concepts, la loi d'équivalence des concepts<sup>13</sup> permet l'expression d'une idée de façons extrêmement variées. De plus, l'expression même de cette idée devient, à mesure du développement, de moins en moins dépendante de toute forme particulière de formulation.

« Au fur et à mesure du développement des rapports de généralité augmente l'indépendance du concept à l'égard du mot, du sens à l'égard de son expression et les opérations portant sur le sens deviennent de plus en plus libres en elles-mêmes et dans leur expression verbale. » (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 389)

C'est sans doute pour cela qu'un enseignant, voulant s'assurer qu'un élève a compris un certain domaine de connaissances et le maîtrise correctement, lui demandera de reformuler de plusieurs manières diverses relations entre concepts de ce domaine de connaissances. De même il pourra lui demander d'expliquer un point particulier de ce domaine, car :

« « savoir expliquer » c'est être capable d'effectuer un parcours parmi d'autres dans un système de relations entre des concepts en choisissant son point de départ en fonction des questions que se pose l'interlocuteur. » (M. Brossard, *Vygotski. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, p. 136)

À la lumière de ces considérations, il nous semble difficile d'exprimer ce qu'un élève pourrait bien avoir compris, lorsqu'on lui enseigne « les priorités opératoires » à l'aide de telles règles. En effet, puisque comprendre revient à dire autrement, avec d'autres mots, en « choisissant son point de départ », il nous apparaît peu probable qu'un élève, de lui-même, puisse expliquer un quelconque calcul autrement qu'en répétant les règles utilisées dans des formulations proches de celles données plus haut. De plus, la formulation même de ces règles induit une pensée par complexes, c'est-à-dire un mode de généralisation qui s'effectue de proche en proche, suivant une perception « d'aspects » communs, sans le « fil conducteur » des significations, en quelque sorte. La dynamique de ce mode de pensée ne naît pas alors d'une reconnaissance de relations d'après le sens, mais plutôt d'une élaboration de traits d'union entre éléments de ressemblance. L'élève, grâce à la perception de certains symboles opératoires, devra savoir comment organiser son calcul : lorsqu'il percevra le symbole «  $\times$  » dans le nombre  $2 + 3 \times 4$  à calculer, il saura qu'il lui faut calculer d'abord  $3 \times 4$  sans qu'une quelconque lecture du nombre lui soit réellement nécessaire. Son attention sera toute entière accaparée par cette reconnaissance de symboles particuliers (parenthèses, symboles opératoires) sans se soucier de lire le nombre à calculer, à se demander si c'est une somme ou un produit, s'il pourrait s'écrire autrement par exemple. Cet enseignement semble donc figer la dynamique de pensée dans une pratique de type « mécanique », renforçant

---

<sup>12</sup> Une structure de généralisation est un mode de généralisation dans un certain domaine de pensée. Vygotski distingue plusieurs structures de généralisation : pensée syncrétique, pensée par complexes, par préconcepts, par concepts.

<sup>13</sup> « La substance de cette loi est que *tout concept peut être désigné à l'aide d'autres concepts selon un nombre infini de procédés.* » (L. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 385)

l'idée que tout calcul est mécanique, alors qu'un calcul n'est qu'un changement de forme du nombre calculé en vue de répondre à une question qui n'est pas toujours celle de la forme réduite d'un nombre.

En outre, puisqu'un tel enseignement est conçu comme un préalable « au calcul algébrique », il nous est difficile d'entrevoir comment les élèves pourraient édifier leurs concepts algébriques sur une telle pratique du calcul fondée en grande partie sur la vision et qui semble s'exempter d'une nécessaire lecture du nombre, le mot lecture étant compris comme une activité qui permet de « donner une signification à des signes »<sup>14</sup>. D'ailleurs certains auteurs de manuels, comme les concepteurs des programmes des collèges, semblent ressentir cette difficulté, car ils proposent des activités ou des exercices sous la rubrique « vocabulaire » où il s'agit de :

« traduire chaque phrase par une expression mathématique : 1) A est la somme de treize et du produit de trois par deux... » (Collection Déclic, éd. Hachette, 2008, p. 19.)

ou de :

« traduire, par une phrase, chaque expression : a.  $27 - 3 \times 4...$  » (Collection Myriade, éd. Bordas, 2008, p. 15.)

rejoignant ainsi dans une certaine mesure une recommandation des concepteurs des programmes concernant les expressions algébriques :

« La prise en compte de l'aspect « structural » d'une expression dans l'enseignement est moins « visible » pour les élèves que l'aspect « procédural ». [...] Plusieurs activités peuvent aider les élèves à faire la distinction entre ces deux aspects d'une expression algébrique : • La description en langue naturelle d'une expression algébrique conduit à la considérer sous son aspect « structural » : par exemple, énoncer que  $(3x - 1)(x^2 + 2)$  est le produit d'une différence et d'une somme... » (Documents d'accompagnement, *Du numérique au littéral*, Ministère de l'Éducation nationale, 2008)

Il s'agit bien dans ce type d'activités ou d'exercices d'apprendre à lire des nombres, ce que l'utilisation des règles R1, R2, R3 n'enseignent pas, mais cette lecture semble s'effectuer en quelque sorte en marge, séparée des problèmes de calcul, comme si savoir lire un nombre ne permettait pas de le calculer. On pourrait à cet égard se demander si l'adoption par les concepteurs des programmes des thèses de Sfard qui, s'appuyant sur une analyse historique de l'algèbre, affirme l'« antériorité de l'approche opérationnelle sur l'approche structurale des concepts mathématiques »<sup>15</sup>, ne conduit pas à favoriser l'aspect procédural des expressions numériques qui peut être à l'origine de nombreuses erreurs tant en calcul chiffral que littéral :

---

<sup>14</sup> Voir Une activité en classe de cinquième, *Éléments 0*, IREM de Toulouse, pp. 29-32.

<sup>15</sup> Bardini, C., *Le rapport au symbolique algébrique : une approche didactique et épistémologique*.

« Ainsi, le registre usuel favorise la conception procédurale, et à défaut de la conception structurale, elle peut être à l'origine des erreurs typiques liées à la lecture linéaire de gauche à droite (par exemple :  $3 + 2 \times 5 = 5 \times 5 = 25$  ou  $7 - 3(x + 1) = 4(x + 1)$ ). » (H. Chaachoua, J. Trgalova, *Représentation sous forme d'arbre d'expressions algébriques : un scénario pédagogique avec le logiciel Aplusix*)

### III. Une enquête

Pour mieux approcher comment nos élèves lisaient le nombre  $G = 2 + 3 \times 4$  ou la grandeur  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$  et comment ils les calculaient, nous leur avons proposé deux problèmes à environ deux semaines d'intervalle. Pour cela, nous leur avons distribué chaque fois une feuille où était écrit le problème, sans préparation, sans les prévenir, chaque fois au moment où nous étudions des notions géométriques. Nous leur avons posé les problèmes suivants :

**P3.** Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.

**a)** Sans calculer, écrire la masse totale du sac.

**b)** Calculer la masse totale du sac.

**P4.** Soit la grandeur  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ . Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur  $G$  est solution. Résoudre ce problème.

Il faut préciser que jusque-là nous avons étudié l'écriture décimale des nombres décimaux, les grandeurs plus en détail que lors de l'enquête précédente, l'addition et la soustraction et défini le calcul comme changement de forme d'un nombre lié à une intention. Nous avons à cette occasion expliqué la différence entre opérer et calculer pour qu'ils puissent comprendre ce que signifiait pour nous l'expression « sans calculer ». Nous n'avons pas étudié la multiplication.

Pour le problème P3, pour la question b), le calcul de la masse totale du sac, nous avons obtenu :



Réponses	Effectifs	Pourcentages
14 kg ou 14	41	85,4 %
9 kg (2 + 3 + 4)	4	8,3 %
11 (2 + 3 + 3 + 3)	1	2,1 %
12 kg (2 + (4 × 3)) ou 15 (12 + 3)	2	4,2 %

Il est à noter que les deux élèves qui ont répondu respectivement 12 kg ou 15 ont raisonné correctement puisqu'ils ont répondu à la question a) " $2 + (4 \times 3)$ " pour l'un et "2 kg + 4 paquets de 3 kg" pour l'autre. Mais ils ont commis une erreur de calcul, l'un écrivant  $12 \text{ kg} = 2 + (4 \times 3)$  et l'autre écrivant  $4 \times 3 = 12$  et  $12 + 3 = 15$ . On peut donc considérer que près de 90 % des élèves résolvent correctement ce problème.

Pour la question a) du problème P3, nous avons obtenu :

Réponses	Effectifs	Pourcentages
$2 + 4 \times 3$ ou 2 kg + 4 × 3 ou 2 kg + 4 × 3 kg	21	43,8 %
$4 \times 3 \text{ kg} + 2 \text{ kg}$	2	4,2 %
$2 \text{ kg} + (4 \times 3 \text{ kg})$ ou $2 + (4 \times 3)$	7	14,6 %
$(4 \times 3) + 2$	3	6,2 %
Pas de réponse ou réponse incorrecte	15	31,2 %

Nous avons donc 68,8 % des élèves qui répondent correctement à la question a), c'est-à-dire qui sont capables d'écrire exactement, sans calcul, à l'aide d'expressions diverses, la masse ou la mesure de la masse du sac plein. De plus, 43,8 % des élèves expriment cette masse ou cette mesure de la masse en écrivant l'expression du nombre  $G$  ( $2 + 4 \times 3$ ) ou de la grandeur  $G$  ( $2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ )<sup>16</sup> que nous leur avons demandé de calculer dans la première enquête. Il est même remarquable de constater que, sur les 21 élèves qui donnent la réponse  $2 + 4 \times 3$  ou  $2 \text{ kg} + 4 \times 3$  ou  $2 \text{ kg} + 4 \times 3 \text{ kg}$ , 17 d'entre eux avaient mal calculé  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$  et 12 d'entre eux avaient mal calculé  $G = 2 + 4 \times 3$ . Nous nous attarderons plus loin sur ce point qui méritera quelques éclaircissements et une tentative d'explication.

<sup>16</sup> Il faut remarquer qu'aucun élève n'a écrit  $2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$  mais plutôt  $2 \text{ kg} + 4 \times 3 \text{ kg}$ , les notions de multiplicande et de multiplicateur n'étant pas connues des élèves.

Mais regardons auparavant, les réponses obtenues au problème P4 :

Réponses	Texte cohérent avec l'énoncé proposé	Texte cohérent avec la réponse fausse	Texte incohérent	Pas de texte	
14 kg ou 14	8	0	1	0	9 (18,8%)
20 kg ou 20	0	20	6	3	29 (60,4%)
Pas de réponse	2	0		4	6 (12,5%)
3kg ou 10 kg ou 26 kg ou 32 €	0	0	3	1	4 (8,3%)
	10 (20,8%)	20 (41,7%)	10 (20,8%)	8 (16,6%)	48 (100%)

Il faut noter ici que seul 20,8 % proposent un énoncé qui suppose une lecture correcte de la masse  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ , ce qui est à comparer avec les 22,9 % qui la calculent correctement en dehors de tout contexte autre que celui du calcul « pur ». Mais seuls 4 élèves ou 8,3 % des élèves calculent correctement  $G$  et écrivent à la fois un énoncé cohérent avec la solution  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ . Cela semble indiquer que la lecture d'un nombre ou plus précisément d'une valeur d'une grandeur est encore souvent dépendante du contexte dans lequel cette valeur intervient, montrant par là-même que la lecture de tels nombres ou grandeurs n'est pas maîtrisée par la plupart des élèves. Ceci n'est en fait guère surprenant puisque cet apprentissage n'a pas encore eu lieu. Mais cela ne signifie pas pour autant qu'ils soient incapables de toute lecture, comme le montrent les réponses au problème P3. Pour préciser encore davantage ce point, il aurait sans doute été opportun de s'entretenir avec les élèves individuellement pour tenter de cerner ce qui, dans ces variations de contextes, aurait pu induire ces lectures de nombres ou de grandeurs différentes, contradictoires en apparence, et ces calculs erronés. Mais, dans le cadre normal d'une classe de collège, cela n'a pas été possible.

### III.1. Quelques réponses d'élèves

$G = 2 + 3 \times 4 = 2 + 3 = 5 \times 4 = 20$

$G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4 = 3 \text{ kg} + 3 \text{ kg} = 5 \text{ kg} \times 4 = 20 \text{ kg}$

② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.

a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac  $2 \text{ kg} + 4 \times 3 \text{ kg}$

b) Calculer la masse totale du sac  $\text{la masse du sac est de } 14 \text{ kg}$

Soit la grandeur  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ . Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur  $G$  est solution. Résoudre ce problème.

J'ai un caillou qui pèse 2 kg. J'en ajoute un autre de 3 kg. Et puis j'en ajoute 4 autres de 3 kg.  
Combien mon sac de cailloux pèse-t-il ?  
 $2 + 3 = 5$   
 $5 \times 4 = 20$   
Mon sac pèse 20 kg

Réponses de l'élève E1 aux 4 questions P1, P2, P3, P4.

$G = 2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = 14$

$G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4 = 5 \times 4 = 20 \text{ kg}$

② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.

a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.

b) Calculer la masse totale du sac.

a) La masse totale du sac est égale à  $2 \text{ kg} + 4 \times 3 \text{ kg}$ .

b)  $4 \times 3 \text{ kg} = 12 \text{ kg}$      $12 + 2 = 14 \text{ kg}$ .

Soit la grandeur  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ . Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur  $G$  est solution. Résoudre ce problème.

Pierre prend une grande balance. Il y met 10 pommes et 10 bananes et sa balance lui indique et sa balance lui indique 2 kg. Il enlève les pommes et met à la place 10 bananes et la balance lui indique 3 kg. Il enlève les bananes et pour finir met 4 fois plus de pommes et de bananes. Que lui indique la balance? La balance lui indique  $2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ .  
 $2 + 3 \times 4 = 20$   
© La balance lui indique 20 kg.

Réponses de l'élève E2 aux 4 questions P1, P2, P3, P4.

$$G = 2 + 3 \times 4 = 2 + 3 = 5 / 5 \times 4 = 20$$

② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.

- a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.  
b) Calculer la masse totale du sac.

a) La masse totale du sac est  $2 \text{ kg} + (4 \times 3 \text{ kg})$ .

$$b) 4 \times 3 \text{ kg} = 12 \text{ kg} / 12 \text{ kg} + 2 \text{ kg} = 14 \text{ kg}.$$

$$G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4 = 3 \times 4 = 12 / 12 \text{ kg} + 2 \text{ kg} = 14 \text{ kg}.$$

Soit la grandeur  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ . Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur  $G$  est solution. Résoudre ce problème.

Dans un parc, il y a 2 bassins dans le 1<sup>er</sup> bassin on peut mettre 2 kg d'eau par min. dans le 2<sup>ème</sup> bassin on peut mettre 3 kg d'eau par min. On les laisse ouvert 4 mins. Combien de kg d'eau est-ce gaspillé ?  
 $2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} = 5 \text{ kg} \times 4 = 20$  →

Réponses de l'élève E3 aux 4 questions P1, P2, P3, P4.

$$G = 2 + 3 \times 4 \quad 2 + 3 = 5 \quad 5 \times 4 = 20$$

② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.

- a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.  
b) Calculer la masse totale du sac.

$$a) 2 \text{ kg} + 3 \times 4$$

$$b) 2 + 3 \times 4 = 14$$

$$\begin{array}{l} 2 + 2 = 4 \\ G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4 \quad 14 \text{ kg} \quad | \quad 20 \text{ kg} \\ 3 \times 4 = 12 \\ 12 + 2 = 14 \quad \text{oui} \quad | \quad 2 + 3 = 5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 5 \times 4 = 20 \end{array}$$

Soit la grandeur  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ . Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur  $G$  est solution. Résoudre ce problème.

Un sac de farine pèse 2 kg. On rajoute 4 sacs de 3 kg sur la balance. Combien indiquera la balance ?

Elle indiquera  $2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$  donc 14 kg  
 $2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4 = 14 \text{ kg}$

Réponses de l'élève E4 aux 4 questions P1, P2, P3, P4.

$$G = 2 + 3 \times 4 = 3 \times 4 = 12 \quad 12 + 2 = 14$$

② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.

a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.

b) Calculer la masse totale du sac.

a)  $2 \text{ kg} + 4 \times 3 \text{ kg}$

b)  $2 \text{ kg} + 4 \times 3 \text{ kg} = 2 \text{ kg} + 12 \text{ kg}$

Total le sac pèse 14 kg.

$$G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4 \quad 3 \times 4 = 12 \quad 12 + 2 = 14$$

Soit la grandeur  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ . Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur  $G$  est solution. Résoudre ce problème.

J'achète 2 kg de pomme de terre plus 4 boîtes de pommes à 3 kg chacune. Quelle est la masse totale entre mes Pomme de terre et mes pommes ?

On opère :  $2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ .

On calcule :  $3 \times 4 = 12 \quad 12 + 2 = 14$ .

On conclue : la masse totale est 14 kg.

Réponses de l'élève E5 aux 4 questions P1, P2, P3, P4.

Ces travaux d'élèves ici exposés montrent la diversité de leurs réponses et leurs cohérences semblent parfois difficile à établir, du moins de prime abord. Par exemple, l'élève E1 calcule « de gauche à droite » le nombre et la masse  $G$  dans les exercices P1 et P2 ; il lit incorrectement la masse  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$  dans l'exercice P4 ; mais, dans l'exercice P3, il écrit  $2 \text{ kg} + 4 \times 3 \text{ kg}$ , lorsqu'on lui demande d'écrire sans calcul la masse du sac plein et calcule cette masse correctement ; pourtant, il avait calculé  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ , qui est exprimé presque de façon identique ( $3 \text{ kg} \times 4$  est remplacé par  $4 \times 3 \text{ kg}$ ), incorrectement dans l'exercice P2.

L'élève E2 calcule correctement le nombre  $G$  mais pas la masse  $G$  et, comme l'élève E1, résout correctement l'exercice P3, en écrivant bien que la masse totale du sac plein est  $2 \text{ kg} + 4 \times 3 \text{ kg}$ . Mais il lit mal  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$  dans l'exercice P4.

L'élève E3 calcule mal le nombre  $G$  mais bien la masse  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ . Mais, dans l'exercice P4, quand il s'agit de lire de nouveau la masse  $G$ , exprimée exactement de la même manière que dans l'exercice P2, il la lit incorrectement. Par contre, il réussit l'exercice P3.

L'élève E4 se trompe dans les calculs du nombre  $G$  et de la masse  $G$ . Par contre, il réussit les exercices P3 et P4, montrant ainsi une lecture correcte de la masse  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$  qu'il n'a pas su calculer précédemment et la calcule bien.

L'élève E5 répond correctement à tous les exercices.



### III.2. Une tentative d'interprétation

Il nous faut maintenant revenir sur le fait, apparemment quelque peu contradictoire, que, bien qu'une grande majorité des élèves ne sachent pas calculer la masse  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$  (22,9 % de calculs justes), ils soient capables, à partir d'un texte de problème (P3), d'écrire la masse G comme solution du problème (43,8 % des élèves) et de la calculer correctement, l'expression de cette masse ne différant que de peu avec celle donnée sans problème préalable. Pour cela, il nous semble que les notions de concepts quotidiens et de concepts scientifiques développées par Vygotski peuvent nous aider à mieux appréhender ce phénomène. Dans le chapitre 6 de *Pensée & langage*, il développe la distinction entre concepts quotidiens et concepts scientifiques, ce qui permet de mieux comprendre la place primordiale qu'il assigne à l'école dont le rôle essentiel est l'enseignement d'un système de connaissances scientifiques.

Par concepts spontanés, Vygotski entend des formes de pensées qui ne se développent pas dans le cadre institutionnel de l'enseignement, mais qui se construisent dans le processus de l'activité pratique de l'enfant et dans sa communication immédiate avec l'environnement. Ils se forment donc dans l'expérience de l'enfant, dans le contact direct avec le monde ce qui explique leur faible niveau d'abstraction.

Au contraire, les concepts scientifiques sont des généralisations de généralisations et la référence au monde qu'ils opèrent n'est jamais immédiate et directe mais toujours médiatisée par d'autres concepts, en particulier par des concepts quotidiens.

« On peut dire que l'assimilation des concepts scientifiques s'appuie autant sur les concepts élaborés dans le processus de l'expérience propre de l'enfant que l'étude d'une langue étrangère s'appuie sur la sémantique de sa langue maternelle. De même que ce dernier cas implique l'existence d'un système déjà développé de significations de mots, de même dans le premier cas la maîtrise d'un système de concepts scientifiques suppose un tissu conceptuel déjà largement élaboré, qui s'est développé grâce à l'activité spontanée de la pensée enfantine. Et, tout comme l'assimilation d'une nouvelle langue ne s'effectue pas à l'aide d'une relation nouvelle avec le monde des objets ni par la répétition d'un processus de développement déjà accompli une fois mais se fait par l'intermédiaire d'un autre système verbal, assimilé auparavant, qui s'interpose entre la nouvelle langue que l'enfant assimile et le monde des choses, de même l'assimilation d'un système de concepts scientifiques n'est possible que par un rapport également médiatisé avec le monde des objets, que par l'intermédiaire d'autres concepts, élaborés au préalable. Et une telle formation des concepts nécessite de tout autre actes de pensée, liés à un libre mouvement dans le système des concepts, à la généralisation des généralisations déjà formées, à un maniement plus conscient et plus volontaire des anciens concepts. » (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 297)

Les concepts scientifiques ne peuvent exister qu'à l'intérieur d'un système de concepts, ce qui n'est pas le cas des concepts spontanés.

« [...] la caractéristique la plus décisive qui distingue les concepts spontanés des concepts non spontanés, en particulier scientifiques, c'est qu'ils se présentent en dehors d'un système. » (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 318)

Leur développement suit en quelque sorte une voie opposée à celui des concepts quotidiens. Si les concepts quotidiens se développent comme happés par des champs de forces que les concepts scientifiques rendent possibles, les concepts scientifiques se développent en prenant pour ainsi dire racine dans le terreau des concepts quotidiens.

« Si l'on désigne les propriétés du concept qui viennent à maturité plus tôt, qui sont plus élémentaires, plus simples, comme des propriétés inférieures et celles plus complexes et liées à un maniement conscient et volontaire, comme des propriétés supérieures, on pourrait dire conventionnellement que *le concept spontané de l'enfant se développe de bas en haut, des propriétés plus élémentaires et inférieures aux propriétés supérieures, alors que les concepts scientifiques se développent de haut en bas, des propriétés plus complexes et supérieures aux propriétés plus élémentaires et inférieures.* »  
(L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 368)

À la lumière de ces deux notions essentielles ainsi rapidement présentées, nous pouvons peut-être tenter un début d'explication au phénomène évoqué plus haut : en effet, lorsqu'on demande à un élève de sixième de calculer directement la masse  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$ , calcul nouveau pour lui, il ne peut le rattacher à quelque concept quotidien que ce soit, cette écriture ne pouvant être mise en relation avec aucun contexte qui permettrait qu'elle prenne sens pour lui. On pourrait dire en quelque sorte que cette écriture est trop « abstraite » pour lui, c'est-à-dire coupée, sans relation possible avec ses concepts quotidiens. Et, devant cette absence de sens, il calcule comme il en a le plus l'habitude, de gauche à droite. Par contre, le problème P3 mobilise ses concepts quotidiens par le contexte qu'il précise. En lien avec ces derniers, l'élève peut alors plus aisément écrire la masse du sac plein, à peu près de la même manière qu'elle lui était proposée dans le problème P2, les signes écrits prenant sens pour lui par leur relation même avec le contexte. Et dans ces conditions, le calcul devient d'une certaine manière « naturel ». Il est d'ailleurs à noter qu'aucun des élèves qui donnent une expression correcte de la masse ne la calcule fautivement. En schématisant un peu, on pourrait affirmer que les significations circulent mieux dans le sens concepts quotidiens / concepts scientifiques que dans le sens concepts scientifiques / concepts quotidiens, les concepts scientifiques nécessaires à la lecture de la masse  $G = 2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} \times 4$  manquant pour ainsi dire de "chair" pour que le sens de cette grandeur émerge et, en conséquence, la possibilité de son calcul. Cette remarque nous paraît importante et nous devons sans aucun doute en tenir compte quand nous aurons à imaginer des séquences d'activités pour nos élèves.

#### **IV. Une autre proposition d'enseignement**

Devant les difficultés que pose l'enseignement habituel des priorités, conjuguées à celles qu'occasionne celui de l'algèbre élémentaire, nous nous sommes posé la question de savoir comment concevoir et organiser un enseignement qui permettrait d'atténuer ces obstacles au

collège. Sans entrer dans les détails, nos recherches et nos expérimentations en classe nous ont tout d'abord convaincus que l'enseignement du calcul littéral ne pouvait être abordé qu'après avoir structuré le plus solidement possible les concepts de nombre, d'opération, de calcul, d'égalité, entre autres. Elles nous ont aussi conduits à penser qu'aborder la notion de nombre, de son écriture et de sa lecture, à partir des concepts de grandeurs mesurables et de leur mesure permettait aux élèves de « garder le sens » en quelque sorte, puisque le concept de grandeur mesurable était fortement ancré dans leur expérience quotidienne et constituait en cela un terreau fertile pour enraciner les notions de nombre, d'opération, de calcul étendues aux nombres, même si ces concepts de grandeur et de mesure étaient encore pensés comme des complexes au sens de Vygotski. La séquence d'activités relatée dans l'article *Des grandeurs aux nombres* de cette même brochure a été conçue dans ce sens.

C'est d'ailleurs l'activité 1 de cette séquence qui a initié notre travail sur les grandeurs mesurables et les nombres au cours de l'année de sixième. Ce travail<sup>17</sup>, dont nous n'indiquerons que les grandes lignes, s'est poursuivi par des activités<sup>18</sup> sur des grandeurs mesurables ou des nombres où les concepts d'opération, de calcul, d'égalité étaient mobilisés, afin d'en permettre une structuration plus systématique. Cela nous a amené à nous poser la question de la signification plus particulièrement des concepts d'opération, de calcul et d'égalité. Nous avons ainsi été conduits, au cours de ces activités, à tenter « définir » le calcul sur les grandeurs mesurables ou sur les nombres<sup>19</sup>, c'est-à-dire d'essayer d'en circonscrire le sens, insistant sur le fait qu'un calcul est toujours un changement de forme de la grandeur ou du nombre, ce changement répondant à une intention soit d'obtenir une forme plus adaptée au problème dans lequel la grandeur ou le nombre intervient, soit une « forme réduite », qui correspond à la forme dite « achevée » du calcul. Dans un même temps, nous avons travaillé la notion d'opération, vue comme une action sur deux grandeurs mesurables ou deux nombres, elle aussi répondant, le plus souvent, à une intention, de trouver une grandeur ou un nombre solution d'un problème, dans diverses situations. Il n'était en effet pas question de définir mathématiquement une opération comme loi de composition interne en classe de sixième. Ce travail nous a permis de distinguer clairement le moment où nous devons opérer et celui où nous devons calculer, le calcul se réalisant toujours sur des grandeurs mesurables ou des nombres résultant d'opérations sur d'autres grandeurs ou nombres, l'antériorité de ces opérations étant marquées par les « cicatrices » des

---

<sup>17</sup> Ce travail a été mené dans une ou deux classes de sixième, de façon voisine à celle décrite ici, durant les années scolaires 2008-2009, 2009-2010, 2010-2011 et 2011-2012.

<sup>18</sup> Toute cette étude s'est effectuée au travers d'activités de verbalisation orale et écrite, recherchées en groupes de deux ou trois élèves, conçues sur la notion de dialogisme tirée des écrits de Bakhtine, Voloshinov et Medvedev, dans un esprit analogue à celui décrit dans l'article *Des grandeurs aux nombres* de cette même brochure auquel nous renvoyons.

<sup>19</sup> Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, pp. 4-18.

opérations effectuées que sont les symboles opératoires. Et nous avons demandé aux élèves, lors de la rédaction de solutions de problèmes de distinguer ces deux moments de la résolution. Par exemple, nous avons proposé, en fin de premier trimestre, l'énoncé suivant à nos classes de sixième :

Sur un marché, j'achète 2,5 m de tissu à 6 € le mètre et 2 bobines de fil à 3,5 € l'une.

Après un bref examen des questions que l'on pouvait se poser à la lecture d'un tel énoncé et auxquelles on pouvait répondre, sont apparues trois questions pour les élèves :

- Quel est le prix des 2,5 m de tissu ?
- Quel est le prix des deux bobines de fil ?
- Quel est le prix total ?

Lors de la rédaction d'une solution, nous avons donc fini par écrire, après quelques débats, que nous pouvions obtenir le prix du tissu par multiplication, c'est-à-dire que le prix du tissu était  $6 \text{ €} \times 2,5$ , marquant ainsi le moment de l'opération. Il est à noter que, dans un premier temps, des élèves ont considéré qu'une telle écriture était d'une certaine façon « incorrecte », parce que « ce n'était pas fini », ce qui a occasionné des discussions intenses, cette écriture restant pour certains élèves celle d'une « opération » et non d'une somme d'argent. D'autres élèves ont préféré l'écriture  $2,5 \times 6 \text{ €}$  que nous avons acceptée : cela nous a permis de rappeler que « 2 fois 3 » ( $3 + 3$ ) et « 2 multiplié par 3 » ( $2 + 2 + 2$ ) ne signifiaient pas la même chose mais étaient des nombres égaux. Dans certaines classes, cette même écriture a soulevé d'autres interrogations, des élèves se demandant où étaient passés les « mètres » dans l'écriture  $6 \text{ €} \times 2,5$ . Nous avons alors été obligés de préciser que le prix du tissu devait s'écrire plus précisément  $6 \text{ €/m} \times 2,5 \text{ m}$ , mais sans insister sur cette dernière écriture, disant en quelque sorte que d'une certaine manière la première expression « suffisait ». Ainsi, nous avons également écrit que le prix des deux bobines étaient de  $3,5 \text{ €} \times 2$ . Puis nous sommes passés au calcul, demandant aux élèves dans un premier temps d'écrire ce mot « calcul » sur leur cahier, avant de l'effectuer.

Pour la question « Quel est le prix total ? » nous avons fini par écrire :

Le prix total est  $6 \text{ €} \times 2,5 + 3,5 \text{ €} \times 2$ .

Calcul :  $6 \text{ €} \times 2,5 + 3,5 \text{ €} \times 2 = 15 \text{ €} + 7 \text{ €} = 22 \text{ €}$ .

Ou, si le calcul s'effectuait en euros,  $6 \times 2,5 + 3,5 \times 2 = 15 + 7 = 22$ .

Nous avons ainsi pu introduire des écritures de grandeurs mesurables ou de mesures de ces grandeurs comportant plusieurs symboles opératoires.

Ces activités se sont poursuivies tout au long de l'année, sur des problèmes de plus en plus complexes, faisant intervenir les quatre opérations. Elles se sont également accompagnées d'autres types d'activités variées parfois plus théoriques, et, en particulier, de problèmes, qui, à partir d'expressions de grandeurs mesurables ou de nombres, conduisaient à l'écriture d'énoncés de

problèmes en langue naturelle. Par exemple, au troisième trimestre de la classe de sixième, nous avons pu soumettre l'énoncé suivant à nos élèves :

Soit la longueur  $4m \times 5 + 3m \div 2$ . Écrire le texte d'un problème où cette longueur serait solution du problème posé.

Il est à noter que cet exercice n'a guère posé de difficultés à plus de 50 % des élèves durant les quatre années où ce travail a été expérimenté, ce taux dépassant 70 % lors de certaines années. La même proportion d'élèves a été capable en fin d'année de sixième de résoudre correctement des problèmes du type :

On remplit à moitié 8 verres d'une contenance de 6 cl avec une bouteille d'eau de 75 cl. Sans aucun calcul, écrire le volume d'eau qui reste dans la bouteille. Sans aucun calcul, écrire la mesure du volume restant dans la bouteille en cl. Calculer cette mesure.

Ou encore :

Sur un marché, j'achète 0,350 kg d'olives à 12,80 € le kg et 2,4 kg d'oranges à 1,9 € le kg. Je donne un billet de 20 €. Combien va-t-on me rendre ?

Il faut ici remarquer que, pour ce dernier problème, nous avons rencontré, à plusieurs reprises, comme expression de la somme rendue, l'écriture  $0,35 \times 12,8 \text{ €} + 2,4 \times 1,9 \text{ €} - 20 \text{ €}$ . Le calcul écrit qui suivait aboutissait à l'expression  $9,04 \text{ €} - 20 \text{ €}$  qui était égale à 10,96 €, ce qui est la somme exacte rendue. Cela semble montrer que l'aspect chronologique des actions représentées dans ce problème étaient encore présentes à l'esprit de l'élève, l'expression de cette somme suivant d'une certaine façon strictement l'action : j'achète les olives puis les oranges et finalement je paie en donnant un billet de 20 €. La solution paraît donc encore fortement liée à la perception de la situation concrète, même si le début d'un processus d'abstraction est identifiable. Le concept de différence semble encore pensé comme un pseudo-concept au sens de Vygotski.

## V. Conclusion

Il serait trop long de présenter l'ensemble des activités effectuées sur ce sujet, surtout dans le cadre d'un article. Ce serait même précisément impossible puisque nous n'avons effectué aucun enregistrement vidéo ou audio d'une quelconque séance et qu'un certain nombre de ces activités ont émergé de discussions durant les cours, « bricolées » dans l'instant, dictées par des questions

d'élèves, souvent inattendues et imprévisibles<sup>20</sup>. Mais ce travail mené tout au long de l'année, durant plusieurs années scolaires, nous a semblé porter ses fruits, même si une enquête plus approfondie et plus rigoureuse aurait été nécessaire. De façon générale, nous avons pu observer que la plupart des élèves qui avaient suivi un tel enseignement en classe de sixième, n'ont guère montré de difficultés quand, en cinquième, la question des priorités opératoires s'est posée. Plus précisément, selon les classes et les années scolaires, entre 30 % et 40 % des élèves que nous avons eus en sixième, ont montré, dès le début de la séquence sur les calculs en cinquième, qu'ils étaient capables de lire et d'écrire des nombres qui s'écrivaient à l'aide de plusieurs symboles opératoires et de les calculer correctement. Pour les autres, des activités en partie analogues à celles exposées dans cet article ont été proposées, activités qui rappelaient comment s'écrivent et se lisent des nombres dans l'écriture desquels apparaissent plusieurs symboles opératoires et des parenthèses parfois. Ces activités visaient en particulier à souligner la « cohérence » de ces écritures avec les connaissances antérieures et à montrer que tout calcul nécessite une lecture attentive du nombre à calculer avant toute action de calcul, lecture essentielle qui, une fois effectuée, dépouille en quelque sorte le calcul de la plupart de ses difficultés. Dans toutes nos classes de cinquième, nous avons constaté, qu'après une à deux semaines de ce travail succinctement décrit, entre 60 % et 80 % des élèves, selon les classes,<sup>21</sup> calculaient correctement des nombres comme  $7 + 3 \times 8$  ou  $(8 - 3) \times 4$ ,  $5 + 2$  sans qu'aucune « règle de priorité » n'est été énoncée. Il faut aussi préciser que parmi ceux qui ont échoué à calculer de tels nombres, se trouvaient une majorité d'élèves qui, ayant découvert les « règles de priorités » exposées plus haut, soit en feuilletant leur manuel, soit par un parent, soit à l'étude du soir, voulaient coûte que coûte les appliquer sans se donner la peine de lire le nombre à calculer.

Ces résultats mériteraient certes confirmation. Mais ils semblent montrer qu'un enseignement des priorités opératoires est possible, sans avoir recours à ces règles habituelles qui ne vont pas sans poser de nombreux problèmes, en particulier celui de rendre la construction de certains concepts mobilisés dans le calcul littéral incertaine.

---

<sup>20</sup> Faire cours se fait en cours, durant le cours, et non avant. Préparer un cours ne consiste peut-être qu'à tenter d'être « prêt » pour l'émergence de questions que seul le cours « en cours » révélera, si l'on favorise la parole de l'élève et qu'il peut ou sait s'en saisir.

<sup>21</sup> Pour établir ces statistiques, nous nous sommes appuyés sur les évaluations effectuées en classe, dans le cadre « normal » d'un cours de mathématiques au collège, après les séances d'enseignement sur le sujet. Il faut noter que ces pourcentages de réussite ont baissé, sensiblement de moitié, à la fin de l'année, lors d'une évaluation annuelle.



## Références bibliographiques

- BARDINI, C. (2003), *Le rapport au symbolique algébrique : une approche didactique et épistémologique*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- BARUK, S. (2004), *Si 7 = 0*, Paris, Odile Jacob.
- BOURDIER-SAVIOZ F. (2008), *L'erreur n'est pas une faute*, Paris, L'Harmattan.
- BROSSARD, M. (2004), *VYGOTSKI. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion.
- CHAACHOUA, H., TRGALOVA, J. (2009), Représentation sous forme d'arbre d'expressions algébriques : un scénario pédagogique avec le logiciel Aplusix, *EMF*, 6-10 avril 2009, Dakar (Sénégal).
- DENIAU, G. (2008), *Qu'est-ce que comprendre ?*, coll. Chemins Philosophiques, Paris, Vrin.
- DUVAL, R. (2007), La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée, *Conversion*, coll. Du mot au concept, Grenoble, P.U.G.
- FRIEDRICH, J. (2010), *Lev Vygotski : médiation, apprentissage et développement*, Genève, Carnets des sciences de l'éducation, Université de Genève.
- LALANDE, A. (2006), *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Paris, PUF.
- RICCEUR, P. (2006), Signe et sens, *Dictionnaire de la philosophie*, Paris, Universalis.
- SFARD, A. (1991). On the dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.
- TODOROV T. (1981), *Mikhail Bakhtine, le principe dialogique*, Paris, Seuil.
- VYGOTSKI, L. S. (2003), *Conscience, inconscient, émotion*, Paris, La Dispute.
- VYGOTSKI, L. S. (1997), *Pensée & langage*, Paris, La Dispute.
- WITTGENSTEIN, L. (2004), *Recherches philosophiques*, Paris, Gallimard.

## Des grandeurs aux nombres

(Activités en classe de sixième)

« Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie; et d'autre part cette mesure fournit le nombre, c'est à dire l'objet même de l'Analyse.

Aussi parle-t-on de la mesure des grandeurs dans les trois enseignements : primaire, secondaire, supérieur; le rapprochement de ce que l'on fait dans les trois ordres d'enseignement fournit un exemple de ces efforts de compréhension d'ensemble, de coordination qui me paraîtraient pouvoir servir plus efficacement à la formation des futurs professeurs que le travail exigé d'eux : le figlage de leçons isolées. »

Henri Lebesgue

*La mesure des grandeurs, réédition*

*A. Blanchard*

*Cette séquence a été proposée à l'identique, à quelques détails près, à celle commentée ci-dessous, à trois classes de sixième lors de deux années scolaires.*

### Considérations générales

Cette séquence d'activités est élaborée à partir d'une approche historico-socioculturelle de l'enseignement, d'inspiration vygotskienne.

Sa conception s'articule plus particulièrement autour de la notion de *praxis*, la praxis de l'élève en situation, de la *mise en relation dialectique* des concepts quotidiens et des concepts scientifiques et du *dialogisme* tout en s'appuyant sur l'ensemble des idées-clé de cette approche que sont celles de ZPD, de médiation sémiotique, de médiation de l'enseignant, d'objectivation... dont nous pensons qu'elles fournissent les fondements nécessaires à l'élaboration de situations didactiques et d'activités en classe [A]<sup>1</sup>. Premièrement, la praxis sera prise dans l'acceptation de Castoriadis, c'est à

---

<sup>1</sup> Pour faciliter la tâche du lecteur et éviter de multiplier les notes de bas de page, des notes, de nature plutôt théoriques, sont reportées à la fin de l'article. On peut donc lire le texte de manière linéaire et se reporter ensuite sur ces notes.

dire «un faire dans lequel l'autre ou les autres sont visés comme êtres autonomes et considérés comme l'agent essentiel du développement de sa propre autonomie» [B].

Deuxièmement, la mise en relation dialectique des Concepts Scientifiques et des Concepts Quotidiens [C] est un levier d'enseignement destiné entre autres à éviter que l'apprentissage de l'élève ne débouche que sur une capacité d'abstraction empirique qui ne permettrait au mieux qu'une pensée par complexe et à éviter que l'enseignement soit uniquement du *verbalisme*, fort justement signalé par Vygotski comme un écueil possible de la pratique enseignante.

La dialectique dont il est question ici est vue comme inscrivant l'agir humain dans un monde qui le conditionne mais qu'il façonne en retour. En s'inspirant de Merleau-Ponty<sup>2</sup> on peut affirmer que la pensée dialectique est par essence porteuse d'historicité, elle est développement, enchâssement de ce qui était avant elle, conservatrice de tous les processus qui ont conduit aux conclusions qu'elle permet, conclusions elles-mêmes non bornées, en évolution permanente.

Praxis et pensée dialectique sont intimement liées dans la perspective qui est la nôtre; ce qui entraîne que cette approche signifie refuser des séparations artificielles entre sujet et objet, pratique et connaissance théorique et au contraire profiter de leur enrichissement mutuel.

Troisièmement, la conception de cette séquence repose sur la notion de dialogisme à partir des travaux de Voloshinov/Bakhtine. Pour éviter de rentrer dans une réflexion qui déborderait le cadre de cet article, nous limiterons notre «emprunt» au dialogisme aux prolongements possibles en classe décrits par des auteurs comme Bronckart, Schneuwly, Brossard... L'analyse des échanges langagiers se déroulant en classe entre élèves et sa pertinence en termes de genres du discours a des effets fructueux pour rendre la médiation de l'enseignant plus efficace de notre point de vue.

De manière très générale et très schématique, lorsque deux ou plusieurs individus échangent oralement, les propos sont formulés dans une langue commune et relativement spontanée qui nécessite souvent peu de rigueur, peu de structuration langagière, la présence physique de l'autre (interpellations brèves, réponses, gestes...) suffit à établir un niveau d'intercompréhension, de communication localement suffisant. Les significations partagées sont alors plutôt vagues et floues. On peut dire que ce type d'échange est du genre premier. Reprenons ce qu'en dit Bronckart :

A la suite de Bakhtine, on peut distinguer des textes premiers (ou libres), qui entretiendraient un rapport « immédiat » avec les situations dans lesquelles ils sont produits, et des textes seconds (standardisés) qui entretiendraient un rapport « médiat » avec leur situation de production. Alors que les discours premiers seraient ainsi « structurés à l'action », les discours seconds (narration, discours théorique, etc.) s'en détacheraient et seraient soumis à un structurant propre, conventionnel de nature spécifiquement langagière ; ils seraient, eux, « structurés en action » » (p. 76),

Bronckart, Aspects génériques, typiques et singuliers de l'organisation textuelle, 1994

---

<sup>2</sup> Maurice Merleau-Ponty, Cours au Collège de France

Lorsque les significations partagées, les significations individuelles, intériorisées doivent être plus opérantes comme dans un travail de conceptualisation, de résolution de problèmes... «l'élévation» du genre du discours à un niveau second s'impose. Ce genre second peut être oral mais le plus souvent il sera sous forme écrite. Ce passage du genre premier au genre second permet de circonscrire plus nettement les significations partagées et donc l'intériorisation des significations, les rendant plus opérantes, permettant ainsi un développement de concepts qui en découlent. Ce travail de changement du genre du discours qui s'effectue au travers d'activités langagières (parole puis écriture) peut être vu comme une brique servant à construire un pont entre niveaux de généralité, les structures de généralisation [D] définies par Vygotski, lors du développement de concepts.

La séquence présentée a plusieurs objectifs :

- en ce qui concerne l'aspect disciplinaire

Le travail de recherche de notre groupe orienté sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire a montré la nécessité d'une structuration forte du concept de nombre avant l'introduction en classe du calcul littéral<sup>3</sup>. D'aiguille en fil, nous sommes arrivés à la conclusion que l'abord du nombre par les élèves, de ses écritures, des opérations, de la compréhension du *calcul*<sup>4</sup> ne pouvait faire sens qu'en s'enracinant dans les *grandeurs mesurables*. La raison principale en est que les grandeurs mesurables sont des notions très «ancrées» dans la vie quotidienne : tous les élèves à l'arrivée au collège ont «entendu parler» de longueur, d'aire, de durée... Par contre, une rapide évaluation fait apparaître, comme on pouvait s'y attendre, que ces notions sont peu structurées, peu articulées entre elles et qu'ils n'existent pas de lien véritable avec les *objets mathématiques* qui en sont en quelque sorte les supports comme le segment, la surface... Pour employer la terminologie vygotkienne, on dira qu'à ce stade là, la pensée des élèves est encore une *pensée par complexes*.

Comme nous voulons que la notion de grandeur mesurable serve de terreau à celui de nombre, cela implique qu'il faut placer le élèves dans des situations propices à déclencher une montée en généralité de l'idée de grandeur puis de grandeur mesurable, c'est principalement la fonction de l'activité 1. Cette dernière est également le point de départ d'une *mise en système* des différents notions : objets géométriques - grandeur mesurable - mesures - nombres - opérations - calcul... Un des rôles primordiaux du professeur sera alors de faire focaliser les élèves sur cette mise en système, de leur en faire prendre conscience.

---

<sup>3</sup> Séquence d'introduction au calcul littéral in *Éléments 1* - IREM de Toulouse

<sup>4</sup> Quelques réflexions sur le calcul in *Éléments 1* - IREM de Toulouse

Un des autres objectifs importants est la poursuite du travail d'appropriation de la relation d'égalité, de l'idée même de relation et de la relation du tout et des parties du tout, pierres angulaires de l'activité mathématique consciente future de chaque élève.

L'utilisation d'une «même unité de comptage» pour comprendre le comptage et donc la mesure comme rapport (dans les deux sens, celui de relation et celui de quotient particulier), l'importance de savoir «en quoi on compte», le savoir «opérer» pour résoudre un problème, la réflexion sur comment répondre à «est-ce calculable ?»... sont par conséquent les autres objectifs de cette séquence.

Ces objectifs doivent conduire les élèves à une compréhension du nombre et des concepts systématiquement associés comme ceux d'opération, de calcul, d'égalité...

Nous devons ici faire remarquer qu'il serait impropre et faux, voire contreproductif, de concevoir cette compréhension comme aboutie et définitive, un concept étant toujours en développement; l'idée de structure de généralisation prenant ici toute sa pertinence.

- en ce qui concerne l'aspect apprentissage/enseignement<sup>5</sup> de manière non spécifiquement disciplinaire

- La poursuite du travail de verbalisation (orale et écrite) comme facteur incontournable du développement de la pensée des élèves à travers des activités langagières est une tâche permanente qu'il s'agit d'anticiper le plus possible au moment de la conception des activités.

- La poursuite de *l'institution de l'apprenant comme élève*, c'est à dire, sommairement, faire advenir l'apprenant comme sujet le plus autonome possible au sein d'une communauté éducative en vue de sa construction/constitution comme citoyen «de plein exercice»<sup>6</sup> (dans une acception aristotélicienne du terme).

C'est en particulier par le biais de l'activité dialogique que peut s'établir un rapport conscient et mutuel entre l'élève dans sa singularité et son appartenance à un collectif «d'autres lui-même».

La mise en évidence pour l'élève que la connaissance se construit par lui-même dans l'interaction avec les autres et ainsi montrer la nécessité de son implication en classe.

---

<sup>5</sup> Le terme apprentissage nous paraît trop réducteur tel qu'il est connoté actuellement pour exprimer ce qu'il se passe en classe; dans la plupart des textes il renvoie à une vision centrée sur l'élève, cet apprentissage étant considéré comme un processus extérieur à l'élève. L'expression apprentissage/enseignement (empruntée à B.Schneuwly) nous paraît plus représentative de notre conception.

<sup>6</sup> Il est peut-être intéressant d'insister ici sur ce qui transparait derrière l'approche dont nous nous réclamons : l'éducation scolaire doit avoir pour partie importante de ses finalités l'émancipation de l'individu et sa construction comme citoyen. «C'est la cité qui éduque l'homme» disait déjà Simonide.

Cette conception de l'éducation s'oppose à une visée utilitariste de l'enseignement. Nous retrouvons l'idée grecque de «paideia» chère à Castoriadis.

Il est d'autre part intéressant de remarquer que le terme de paidologie utilisé par Vygotski reprend la même racine dans Analyse paidologique du processus pédagogique (page 141 et suivantes) in Vygotski, une théorie du développement et de l'éducation, 2012.

Le développement de *l'attention volontaire* car, comme l'affirme Michel Brossard «Les régulations internes sont l'application à soi-même des contrôles initialement exercés par autrui, de même que l'attention est d'abord, dans l'ordre de la psychogenèse, attention conjointe». Attention volontaire qui est une des fonctions psychiques supérieures incontournables pour rendre l'autonomie effective.

### Activité 1

Voici une liste «de choses» : sac à dos ; mi-temps ; boule de pétanque ; parfum ; affiche ; ficelle ; air ; peinture ; train ; trousse ; récréation ; ballon ; camion ; champ ; table ; repas ; spaghetti ; route ; vacances ; classe ; électricité.

- On dira que **deux** «choses» choisies dans la liste sont **comparables** si la question « **laquelle de ces deux choses est la plus grande ?** » a un sens. Parmi ces choses, en trouver qui sont comparables ? **En quoi** sont-elles comparables ? [ on fera une phrase à chaque fois pour exprimer cette comparaison ].

[Activité librement inspirée par un article de Marc Picot publié dans la brochure «Des mathématiques en Sixième» de la Commission Inter-IREM Premier Cycle - 1996].

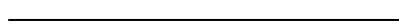
### Activité 2

[on fera une phrase à chaque fois pour exprimer la réponse].

Voici deux segments :



segment (1)

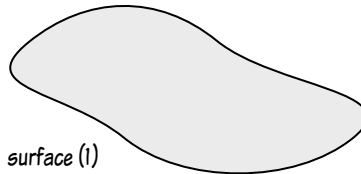


segment (2)

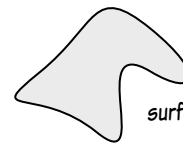
- Quel est le plus long ?

Voici deux surfaces :

- Quelle est la plus étendue ?



surface (1)

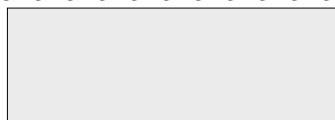


surface (2)

### Activité 3

[on fera une phrase à chaque fois pour exprimer la réponse]

Voici deux surfaces



surface (1)



surface (2)

- comparer les aires de ces deux surfaces
- comment obtenir l'aire de la surface (2) à partir de l'aire de la surface (1) ?
- faire une phrase pour exprimer l'aire de cette troisième surface
- comment obtenir l'aire de la surface (1) à partir de la surface (2) ?
- quelle remarque peut-on faire sur ces deux réponses ?
- que peut-on dire de l'aire (1) par rapport à l'aire (2) et à l'aire (3) ?



#### Activité 4

On veut comparer deux segments mais ces deux segments sont dessinés sur deux feuilles qui ne sont pas dans la même pièce.

- Que peut-on «faire» pour comparer leur longueur ?

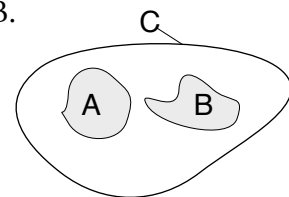
#### Activité 5

- Un sac (sans masse) contient deux «choses», la chose A et la chose B.

→ quelle est la masse de C qui est le sac rempli ?

→ exprimer la masse de la chose A par rapport aux deux autres masses.

Pour les deux questions, faire une phrase en «français» puis une phrase «plus mathématique».

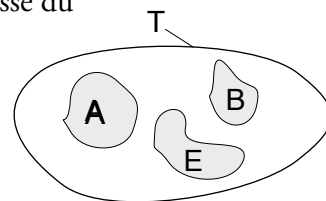


- Un autre sac est rempli de 3 «choses». On désigne par a la masse de la chose A, par b celle de B, par e la masse de E et par t la masse du sac rempli.

en utilisant une écriture «mathématique»

→ exprimer la masse de T par rapport aux 3 autres masses

→ exprimer la masse de B.

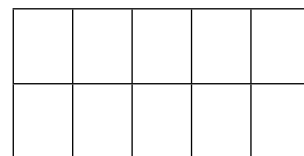


#### Activité 6

On donne la surface (1) ci-contre.

On veut évaluer son aire.

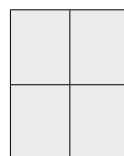
Pour cela, voici trois «aires-étalon»



aire-étalon  $u$



aire-étalon  $x$



aire-étalon  $y$



- Exprimer l'aire de la surface (1) pour chacune des aires-étalon.
- Quelle remarque peut-on faire ?

### Activité 7

.....

#### \* Version 1

Dans une baguette de bois de longueur 300 cm , on coupe un morceau de 85 cm et deux autres de 70 cm chacun.

- Sans procéder à aucun calcul, écrire la longueur de la baguette restante.

Calculer cette longueur.

#### \* Version 2

Dans une baguette de bois de longueur a , on coupe un morceau de longueur x et deux autres de longueur t chacun.

Écrire la longueur de la baguette restante.

#### \* Version 3

Dans une baguette de bois, on coupe un morceau de longueur x et deux autres de longueur z chacun. La longueur de la baguette restante est k.

Écrire la longueur de la baguette du départ.

### Activité 8

.....

Soit la longueur  $4m + 3m \times 2$ .

Écrire le texte d'un problème où cette longueur serait solution du problème posé.

### Activité 9

.....

Sur un camion vide ayant une masse de 3,2 t, on charge 81 caisses de 40 kg chacune.

- Sans procéder à un calcul, écrire la masse totale du camion chargé.
- Sans procéder à un calcul, écrire la mesure de la masse en tonnes du camion chargé.
- Calculer cette mesure.

En tenant compte des considérations générales qui constituent le fil directeur de l'élaboration de cette suite d'activités, nous préciserons pour chacune les éléments mathématiques en jeu et nous commenterons quelques passages des échanges; nous signalerons également les moments et les contenus de la médiation de l'enseignant pour au moins deux raisons : ce sont des facteurs très importants dans l'approche qui est la nôtre (différente en cela d'autres conceptions telle le constructivisme interactionniste dans lequel les mêmes termes peuvent être utilisés) et cela peut indiquer le rythme du déroulement de l'activité.

### Activité 1

Tout d'abord l'utilisation du mot «choses» répond à deux considérations : premièrement, donner aux élèves des éléments, sur lesquels le travail va porter, qui font partie de la vie courante et qui à première vue n'ont pas de point commun et deuxièmement, en anticipant ce qui sera une première montée en généralisation, ne pas employer le mot «objet» qui sera gardé pour ce qui sera construit à partir de cette première généralisation. Ce mot n'est pas choisi par hasard puisqu'il reprend grosso modo la définition donnée par Aristote<sup>1</sup> et qui correspond bien à la première phase de l'activité qui est de passer du «voir» au «lire», de la «chose» à «l'objet».

L'utilisation de deux mots différents, à ce stade là de la réflexion conjointe en train de se réaliser, nous semble devoir faciliter le travail de différenciation/discrimination exigé de l'élève, en posant une forme langagière explicite, un vocabulaire singulier.

Il faut se garder de tomber dans le piège qui consiste à croire que le «voir» serait *naturellement* un «voir comme», qu'il y a derrière chaque perception une activité conceptuelle *innée*, alors qu'en réalité c'est le rôle de l'apprentissage/enseignement que d'amener chaque individu à construire une pensée conceptuelle; c'est ce que nous entendons quand nous disons que l'activité doit/va guider l'élève dans cette évolution.

Comme l'affirme Sandra Laugier commentant les écrits de Ludwig Wittgenstein

«... comme si l'idée même de voir était toujours liée à une mythologie du sujet transcendantal, à qui le monde serait donné, tandis que regarder serait conçu comme une activité descriptive, une perception active du sens qui ne serait pas un jugement.»<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> La chose en tant que partie du réel est ce qui présente les caractéristiques suivantes : tridimensionnalité, accessibilité sensorielle multiple, indépendance des représentations sémiotiques et possibilité de séparation matérielle des autres parties de la réalité, des autres «choses» (citée par Bruno D'Amore - Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques).

<sup>2</sup> Sandra Laugier - Ludwig Wittgenstein, le sens de l'usage, page 95.

On s'attend à ce que le début de l'activité soit assez chaotique, que les énonciations des élèves partent dans de nombreuses directions, que des doutes se fassent jour... en effet, que peuvent avoir de «commun» parfum et trousse...?

La mise en questionnement est difficile pour les élèves, l'amorçage implique l'intervention de l'enseignant qui peut reprendre des propos d'élèves et demander à les repréciser, les reformuler ou bien il peut poser des questions complémentaires.

Les premiers appariements de «choses» qui sont énoncés font apparaître une «lecture» basée uniquement sur une forme/ressemblance comme par exemple ballon-boule... «parce que c'est rond», camion-train... «parce que les deux roulent».

La question «en quoi sont-elles comparables?» va entraîner les élèves à essayer, à tâtonner.

À partir de ce magma d'idées volantes et floues», formulées ou pas, elle va provoquer petit à petit une première organisation/catégorisation qui à son tour fait résonner les mots «lourd», «long», «léger»... Cette classification nécessite l'élaboration de moyens psychologiques permettant une analyse particulière, c'est à dire un autre niveau de «lecture» en quelque sorte, supérieur au premier. Dans cette phase, les acteurs sont en train de passer d'une perception à une lecture, ce qui correspond à une généralisation. Ils commencent à discriminer, à lire différentes caractéristiques pour une même chose que l'on peut retrouver pour certaines dans une autre chose et ainsi de suite.

Les échanges intersubjectifs, les désaccords qui s'affichent, les négociations qui s'effectuent, balisées par l'enseignant, mettent à jour les différences/ressemblances concernant les «choses» à comparer, des traits communs émergent. Ces différences, une fois mises à jour, jouent un rôle important pour la co-construction des significations partagées, toujours par l'apport régulateur de l'enseignant. Sans le dialogue, la discussion instituée en classe, ces différences resteraient souterraines, subjectives. Il faut donc les faire apparaître...

«Comment une telle différence peut-elle apparaître ? Il faut qu'elle puisse apparaître aux intéressés eux-mêmes dans une discussion entre eux, par la voie dialogique. Cela n'est concevable que dans le contexte d'institutions communes qui permettent d'assigner le sens.» (Vincent Descombes, Les institutions du sens, page 94)

On peut donner un exemple d'un moment d'abstraction : pour les élèves qui ont apparié ficelle et affiche, a commencé de s'imposer la *lecture* de la ficelle comme une ligne droite... presque comme un «segment», quitte pour certains à joindre le geste à la parole, alors que la ficelle «de la vie courante» apparaît souvent repliée, de forme confuse.

En ce qui concerne l'enseignant, son intervention peut consister à attraper deux choses, un stylo et une trousse par exemple, à rapprocher les deux et poser la question «le stylo rentre-t-il dans la trousse?», pour renforcer l'idée que là, ce sont deux «segments» que l'on observe et non plus deux

choses, que c'est un attribut commun construit sur lequel on focalise et non plus sur la totalité des deux choses.

Il est important de comprendre ici que la médiation de l'enseignant ne se limite pas à cette intervention, qui pourrait prendre une autre forme et intervenir à un autre moment dans une classe différente; elle doit être pensée en amont comme un champ de possibles lors de l'élaboration des activités, elle doit être en capacité de faire rebondir les échanges «en cours», autrement dit l'enseignant doit être prêt à une grande partie d'imprévisible avec comme préoccupation principale que sa médiation soit le catalyseur permettant que chaque élève et que le groupe-classe «soient en» Zone de Proche Développement.

Le fait de reprendre également une phrase où la comparaison n'a pas de sens (à ne pas confondre avec une phrase fautive comme «le spaghetti est plus long que la route» - puisque pour faire sens, il faut savoir juger du vrai et du faux) participe à donner plus de force à ce que c'est que d'avoir du sens, justement en n'éliminant pas le non-sens de la discussion mais en s'en servant pour borner la signification partagée, à la rendre plus opérante.

En effet, une autre erreur serait de croire que la signification est quelque chose de totalement déterminée, d'abouti, de définitif. Pour reprendre Castoriadis «Nous ne pouvons la décrire [la signification] que comme un faisceau indéfini de renvois interminables à *autre chose que.*» Ce qui signifie que pour qu'il y ait intercompréhension, signification partagée entre individus, il est nécessaire de chercher à baliser suffisamment ce faisceau, ce qui ne veut pas dire en tracer une frontière ce que l'on sait impossible, mais tenter de faire repérer dans ce magma les points nodaux, les cristallisations; c'est à ce niveau que le travail sur le non-sens prend sa pertinence.

En complément des échanges oraux, de la formulation orale des phrases, intervient l'écriture de ces phrases. Cette tâche est incontournable pour un développement durable de la pensée, du fait du rôle majeur du langage écrit, comme l'affirme Vygotski :

«C'est pourquoi le langage écrit est la forme la plus prolix, la plus précise et la plus développée»... «Le langage écrit... est lié dès le début à l'intervention de la conscience et à la présence d'une intention.» ...

«Il va de soi que le langage écrit est l'opposé polaire du langage oral» (Lev Vygotski, *Pensée et langage* 1997, page 471 et suivantes).

L'écriture a pour rôle la représentation, la mise en forme des savoirs. On l'utilise ici pour sa fonction réflexive à la fois spécifique et complémentaire de celle de l'activité orale. Elle va marquer une forme de concrétisation du passage d'un genre premier à un genre second du discours. Contrairement à l'oral, plus volatile, elle est la trace de l'avancée de la réflexion collective et des significations en train de se constituer. Elle sert de témoin de l'historicité de la construction des connaissances.

L'étape suivante consiste à faire se recentrer l'attention des élèves en sélectionnant quelques unes des phrases précédemment écrites :

le camion est plus lourd que la trousse

l'affiche est plus courte que la table

le train est plus long que le camion...

et à les regrouper par catégorie en s'appuyant sur les adjectifs, *long, lourd, vaste...*

À ce niveau, le *concept potentiel* de grandeur est présent, en attente, portant en lui les déclinaisons de longueur, masse, durée... À ce point, que l'on pourrait appeler «point de collision» reprenant en cela une expression de Bernard Prot, commence un double développement : celui des concepts quotidiens des élèves «vers le haut» (montée en généralité, changement de structure de généralisation) et celui des concepts scientifiques qui s'étendent «vers le bas», naissant et/ou s'enrichissant dans la conscience de l'apprenant par leur lien avec l'expérience.

Dans *Pensée et Langage* (page 255), Vygotski précise la définition :

«Ces concepts sont potentiels, premièrement, par leur *référence pratique à un cercle déterminé d'objets* et en second lieu, par le processus d'*abstraction isolante* qui en constitue la base. Ce sont des concepts en puissance qui n'ont pas encore réalisé cette potentialité.»

L'enseignant va *faire venir* le mot (ou l'expression) qui va désigner le concept, en s'aidant de la verbalisation de phrases synonymes aux premières comme par exemple

le camion est plus lourd que la trousse... qui devient

la masse du camion est plus *grande* que la masse de la trousse

En prenant prétexte que l'adjectif *grand* se retrouve dans le vocabulaire utilisé, le mot *grandeur*<sup>3</sup> est introduit. Nous avons suivi en cela la démarche logique de Vygotski :

«Le point essentiel de cette opération [au cours de laquelle adviennent les concepts] est l'utilisation fonctionnelle de la parole comme moyen d'orientation volontaire de l'attention, pour l'abstraction, pour la distinction d'attributs séparés et leur synthèse, et pour leur symbolisation à travers les signes»

La suite est constituée par le remplissage du tableau (autre élément de la médiation sémiotique) qui par son côté synoptique fait ressortir la mise en système des différents concepts en train de se construire et de se développer mutuellement, assurant ainsi une augmentation de structuration de la pensée des élèves.

Comme il ne s'agit pas d'évoquer exhaustivement l'ensemble des grandeurs qui peuvent exister, la colonne de droite laisse la porte ouverte à l'élaboration d'autres types de grandeurs; l'attention des élèves attirée sur ce point concourt à entretenir l'idée d'une pratique principielle en mathématiques, à savoir qu'une même démarche sera réutilisée «au besoin», par la mise en pratique d'un *principe d'extension* en quelque sorte.

Une re-focalisation sur les trois grandeurs plus «mathématiques» que sont longueur, aire, volume et le lien avec les objets mathématiques correspondants, segment, surface, solide va alors être guidée par le professeur.

---

<sup>3</sup> Sera ensuite travaillée l'évolution entre grandeur et grandeur mesurable, sans mention de grandeur repérable.

Une remarque s'impose ici : sont intervenues au cours des échanges du début de l'activité d'autres caractéristiques des «choses» comme la couleur. Rapidement, les élèves ont bien perçu que cette caractéristique-là ne pouvait pas s'établir comme comparable en termes «de plus grand que». Cela a permis à l'enseignant de commencer à évoquer le fait que certaines comparaisons relèveront du domaine scientifique, d'autres non<sup>4</sup>.

Pour revenir au tableau, certaines «choses» se retrouvent dans plusieurs colonnes. Ce point est crucial. Faire insister les élèves sur cette observation participe à l'abstraction instancielle. En effet, non seulement l'abstraction est une activité par laquelle un individu devient conscient de similitudes, mais aussi, pour le dire comme Ilenkov, l'abstraction est un *appauvrissement délibéré* de la réalité. C'est ce que l'on va faire pointer par les élèves en reprenant le fait que si «trousse» se retrouvant dans plusieurs colonnes, quand on lit «trousse» dans la colonne «longueur» c'est que la trousse est, ici et maintenant, «*lue comme*» un segment.

Nous reviendrons sur l'abstraction comme participant à la construction/formation des concepts scientifiques plus loin pour distinguer *abstraction empirique* et *abstraction théorique*<sup>5</sup> [E], distinction capitale si l'on veut comprendre le potentiel éducatif de l'approche historico-socio-culturelle.

On peut d'ores et déjà affirmer que l'idée de travailler en contexte est essentielle pour toute activité humaine significative. Les concepts scientifiques à enseigner (ceux connus de l'enseignant, c'est à dire ceux qui font partie de la culture humaine, socialement et scientifiquement constituée) sont ici contextualisés comme éléments d'un *donner à voir*, piloté par l'activité; ce *donner à voir* (que l'on pourrait qualifier de théorie dans sa première acception) fonde «la» signification particulière des objets en cours de construction.

Le fait de mettre en correspondance un mot (un signe) avec une des caractéristiques des «choses» implique que l'objet visé, ici la grandeur, a été constitué comme objet à part, qu'il y a eu objectivation de la grandeur. Pour reprendre les propos de Castoriadis «il faut pouvoir poser ces objets comme définis au sens d'une définition décisive-pratique, et distincts».

Deux citations de Ignace Meyerson éclairent également cette étape de l'objectivation :

«Précisons ce que l'on peut entendre par objectivation. C'est d'abord une direction vers autre chose que le pur état mental. Dès que nous pensons, nous pensons à, il y a un contenu de notre pensée et notre pensée est la relation à ce contenu. Notre pensée est intentionnelle. Ce n'est pas de ses propres opérations qu'elle est consciente d'abord, mais de ses produits.» (Les fonctions psychologiques et les œuvres - page 31)

---

<sup>4</sup> Il n'est évidemment pas question ici de discuter le fait qu'ultérieurement la couleur considérée comme longueur d'onde pourra donner lieu à comparaison.

<sup>5</sup> Nous reprenons ici cette terminologie, utilisée dans plusieurs articles dans la littérature étrangère, pour ne pas créer une nouvelle expression bien qu'elle ne nous semble pas la plus adaptée.

«Le langage nous montre un double aspect de l'objectivation : création d'êtres doués de pouvoir, création d'objets dotés de propriétés.» (Les fonctions psychologiques et les œuvres - page 33)<sup>6</sup>

L'enseignant commence par faire écrire que la grandeur est une caractéristique d'une «chose» ou d'un «objet mathématique» et ensuite que longueur, masse ... sont des grandeurs. Là aussi, le texte écrit a pour rôle de matérialiser ce qui a été dit, discuté, partagé par les apprenants.

Il reste un problème important si l'on veut que le concept que l'on vient de co-construire prenne toute sa capacité opérante, c'est à dire qu'à son tour il devienne «concept-outil» pour résoudre des problèmes, ce qui implique qu'il puisse être efficacement contextualisé ailleurs, se projeter dans de nouveaux contextes pour employer une expression de Wittgenstein.

En réalité, ce problème est double : d'abord, tout au long de l'activité, les élèves ont travaillé pour aboutir au concept de grandeur à partir de ses déclinaisons, masse, longueur... et la définition donnée porte sur la *grandeur* en général et deuxièmement, il n'existe pas vraiment de définition normative de grandeur (et de grandeur mesurable). Comme il est évident que cette seule activité ne peut suffire à faire du concept de grandeur un concept de «plein exercice», nous pensons qu'une définition des différentes grandeurs doit être donnée aux élèves, même si le texte n'est pas scientifiquement parfait (ce qu'il ne pourra jamais être d'ailleurs). Nous pensons que c'est à ce prix que la mise en système pourra se développer pour chaque élève. Cette étape peut être vue comme poser un élément stabilisateur (ce qui ne veut pas dire immuable) au cours de la médiation sémiotique, une référence pour les élèves.

Nous voyons dans cette définition, «La longueur est la quantité de place occupée par un segment sur une droite», plusieurs avantages :

- la part d'implicite laissée à l'élève est réduite (nos travaux sur l'analyse des erreurs<sup>7</sup> des élèves depuis plusieurs années nous ont conduit à la constatation que lorsqu'on laisse trop d'implicite aux élèves, ils cherchent «logiquement» à le combler, à leur manière, ce qui va entraîner des incompréhensions difficiles ensuite à corriger). Nous avons déjà écrit que la signification n'était pas totalement délimitable et qu'elle ne pouvait l'être sous peine d'empêcher toute vie du langage. Réduire la part d'implicite signifie donc ne pas la supprimer et si nous prenons une image on pourrait dire que le rapport implicite/explicite correspond au «jeu» entre deux pièces mécaniques : trop de jeu implique que le mécanisme ne peut fonctionner, pas assez de jeu conduit à ce que les deux pièces grippent.
- la mise en évidence du lien avec l'idée de quantité (que l'on retrouve dans *nombres-de*)
- la focalisation engendrée par cette définition sur l'idée de *principe directeur* dans la pratique mathématique. À partir d'elle, suivant le même principe donc, on pourra donner des définitions

---

<sup>6</sup> Nous renvoyons également à l'article de Luis Radford, Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation - Éléments 1 - IREM de Toulouse.

<sup>7</sup> Voir l'article Des erreurs dans Éléments 0 - IREM de Toulouse.



des autres grandeurs, qui pourront reprendre la même démarche et globalement la même syntaxe de la phrase (l'aire est la quantité de place occupée par une surface dans le plan...). D'insister sur cette idée que les mathématiques fonctionnent suivant des principes est un point important à saisir pour les élèves et il est bon de le faire remarquer le plus souvent possible. Deux principes forts sont au cœur de la pensée mathématique : celui de cohérence et celui d'extension.

Les deux sont par exemple à l'œuvre au niveau de la somme. Une fois que l'on a compris que «5 dm + 4 cm» est une longueur (cohérence) et que cette somme n'est calculable que si les deux termes ont la même unité de comptage, on peut passer à  $\frac{4}{3} + \frac{2}{7}$  (extension) sans être amené à

introduire une nouvelle «routine de calcul» pour les élèves, ce qui peut être dévastateur. Sans cette base conceptuelle, en effet, l'élève risque d'être perdu, en attente d'une «technique miracle», chaque fois qu'il va rencontrer un nouvel ensemble de nombre. Un des apports possibles de cette séquence est justement sa contribution à la mise en avant de ce travail par principe. Nous reviendrons plus loin avec plus d'insistance sur cet aspect là.

- la mise en relation de la grandeur et de l'objet mathématique correspondant, renforçant ainsi l'idée de mise en systèmes de concepts
- l'approche de la notion de grandeur en dehors de tout activité de mesurage
- l'accentuation du rôle de la trace écrite, de cette nécessité du texte qui est peu évidente encore pour beaucoup d'élèves car comme le dit Laugier «le texte a une fonction qui est la matérialisation de ce qui a été dit pour ceux qui étaient présents.»

Poser cette définition est aussi jeter un pont vers une autre idée forte de la pratique mathématique, l'idée de relation. Dans la phrase, la copule «est» intervient ici comme signifiant l'existence, celle du concept de longueur. Elle va intervenir ailleurs comme signifiant l'égalité.

Sa «lecture» est un facteur important de compréhension mathématique, en particulier dans le domaine numérique : entre la verbalisation en langue naturelle (échanges oraux notamment) et la sémiotisation des relations avec des signes graphiques (symboles) spécifiquement mathématiques, mais également par exemple, lors de la modélisation d'un problème par le passage d'un énoncé textuel à une équation ou une inéquation.

Faire écrire cette définition est aussi un artefact impliquant l'idée de représentation, primordiale en mathématiques, étant donné qu'il n'y a pas «quelque chose» à exhiber à la place d'un objet mathématique, qu'il ne peut y avoir un autre accès. C'est un début de prise de conscience par l'élève de l'importance de la représentation, de sa *lecture totale*, d'autant plus qu'il y a rarement ressemblance visuelle entre l'objet et sa représentation (et pour cause). Cette relation entre l'objet

et le signe graphique est uniquement fourni par une définition que l'on peut qualifier de fonctionnelle.

Cette focalisation, ici, est un pas supplémentaire dans la prise de conscience de la spécificité de l'activité mathématique, du fait que justement il n'y a rien à exhiber : apprendre aux élèves à ne pas confondre les objets/concepts avec leur représentation sémiotique, puis à être capable pour le même objet de changer de représentant sans que l'objet, lui, en soit modifié.<sup>8</sup>C'est également ce qu'affirme Luis Radford «Dans le cas des objets conceptuels, le perçu et en fait non perceptible, de sorte qu'il n'est accessible qu'indirectement, à travers les moyens sémiotiques d'objectivation.» (Luis Radford - La généralisation mathématique, page 13)

Pour clore les commentaires sur cette activité 1, quelques considérations plus générales qui s'appliquent à l'ensemble de la séquence.

Nous avons employé l'expression «concepts quotidiens» (que nous préférons à celle de concepts spontanés également employée dans la littérature) au moment où débute l'activité. Nous entendons par là les notions et la façon dont elles sont structurées. Il est clair que, i) tous les élèves ne disposent pas des mêmes concepts quotidiens, c'est à dire en réalité la même manière d'aborder le problème posé - d'où l'importance des échanges langagiers du début et la mise en situation d'interaction, ii) les concepts quotidiens évoluent, se restructurent - justement par le développement des concepts scientifiques.

L'activité et le langage (qui reprend les énonciations, toutes les formulations langagières rencontrées) fusionnent, aidant l'élève à s'affranchir du domaine de la perception simple pour arriver à celui de la lecture. On pourrait dire qu'à ce niveau, l'élève est davantage théoricien que [voyeur] et manipulateur.

Pour reprendre ce que dit Veresov, la force motrice du développement est donnée par le passage de la «forme réelle» à la «forme idéale» au cours des échanges, qui se traduit par le passage de discours du genre premier au discours du genre second. La forme idéale, par exemple le concept de grandeur et sa définition, n'est pas donné a priori aux élèves, elle est découverte/élaborée en coopération avec l'enseignant. Les relations sociales entre apprenants vont se transformer en fonctions psychiques supérieures et l'intériorisation est rendue possible.

Concernant la forme que prennent les interventions de l'enseignant, il s'agit souvent d'une question : Pourquoi dis-tu cela ? Pourquoi écris-tu cela ? Qu'en penses-tu ? Que penses-tu de ce qu'a écrit Pierre ? ... Mais nous devons préciser qu'il ne s'agit pas ici d'une logique : question - réponse - validation. La demande de l'enseignant consiste à faire verbaliser, à faire préciser... de façon à faire atteindre «asymptotiquement» la «forme idéale» dont il est question ci-dessus, soit

---

<sup>8</sup> On peut renvoyer utilement et de manière complémentaire aux travaux de Raymond Duval sur les cadres et les changements de registres.

directement par un élève, soit par l'intermédiaire d'un enchaînement de réponses émanant de plusieurs individus.

L'avancée dans le travail de développement des concepts est guidé par ce que Vygotski appelle la loi d'équivalence des concepts «... tout concept peut être désigné à l'aide d'autres concepts selon un nombre infini de procédés.» (Pensée et Langage, page 385) et «La loi d'équivalence des concepts joue différemment et de manière spécifique à chaque stade de développement de la généralisation.» (Pensée et Langage, page 388).

## **Activité 2**

Il s'agit d'une activité de transition, destinée à mettre en œuvre les concepts construits dans l'activité 1 et à préparer les activités suivantes. C'est aussi un changement de monde : on est de plein pied dans le monde mathématique puisque le travail porte directement sur des segments. Ce passage dans ce cadre mathématique permet de faire agir les concepts (qui de potentiels, tout en se projetant dans de nouveaux contextes, vont gagner en *opérance*), de les mettre en usage. Cette mise en action favorise le développement de leur fonction effective. Cette activité, loin d'être anodine, crée aussi les conditions de mettre un maximum d'apprenants au même niveau, le plus possible, de conceptualisation, en particulier par les échanges verbaux; c'est en quelque sorte une manière de laisser le temps à l'intériorisation (pour chaque acteur) de s'enrichir, de se solidifier; c'est un palier de régulation.

L'énonciation et la rédaction de phrases correctes concourt à concrétiser cela.

L'autre versant, que l'on peut considérer comme une porte ouverte pour la suite, sous l'impulsion de l'enseignant, va consister à faire remarquer qu'il n'est peut-être pas toujours facile de comparer, en particulier ici les deux aires, que la forme des surfaces va prendre une grande importance et donc qu'il faudra trouver des moyens autres que la simple vision pour fournir une réponse.

## **Activité 3**

Ciblée sur les aires, cette activité concourt à un travail sur le «continu» alors que très souvent les élèves sont aux prises avec du «discret», avec l'utilisation d'une règle graduée par exemple ou lors de placement de points sur un axe qui implique que cela «tombe juste». D'autre part, les élèves n'ont pas d'étalon d'aire à leur disposition et le passage par l'idée de mesure est évitée.

Comme les deux aires sont données côte à côte, le premier temps de la comparaison est perceptif «l'aire 1 est plus grande que l'aire 2» qui sous-tend la mobilisation cognitive de la définition de l'aire. La deuxième question doit provoquer la mise en évidence de la «différence» et sa

caractérisation comme aire. On passe de phrases comme «ces deux aires sont différentes» à «l'aire 1 est plus grande que l'aire 2».

Professeur : comment fait-on ?

Élève : si on découpe... [comme tous les élèves ne sont pas nécessairement à ce même stade, des discussions/confrontations émergent]

P : faites le... [ les élèves ayant à leur disposition des photocopies, ils peuvent placer les surfaces côte à côte, les découper...]

La manipulation effectuée par les élèves - découpage, superposition...- conduit à «il faut ajouter un petit bout à la surface 2» puis sous la médiation de l'enseignant «il faut ajouter une petite aire à l'aire 2 pour obtenir l'aire 1»...

P : [en indiquant le «petit bout»] on l'appelle surface 3 d'aire 3... pour que tout le monde parle de la même chose...

Une association / dissociation entre le découpage de surfaces et la soustraction d'aires est en train de s'opérer.

Le professeur demande alors aux élèves de faire une phrase et ils aboutissent à «l'aire 3 est l'aire qu'il faut ajouter à l'aire 2 pour obtenir l'aire 1» puis «l'aire 3 est la différence de l'aire 1 et de l'aire 2». Pendant tous ces échanges, l'intervention de l'enseignant est primordiale pour amener le plus grand nombre d'élèves, par des incitations, des encouragements, en suggérant aux uns de regarder ce que font les autres, à un questionnement intérieur et à un auto-questionnement. Ce dernier prend naissance à partir des influences que les apprenants exercent les uns sur les autres; ils doivent en quelque sorte synchroniser leur comportements individuels, l'enseignant assurant une forme de régulation qui doit être à la fois souple et orientée.

On aborde la deuxième possibilité de signification du signe «égale», compris ici comme indiquant une relation d'égalité, c'est à dire que les deux membres sont à la fois de même nature et de même valeur. Ce jeu à 3 aires donne la possibilité d'écrire des histoires, suivant que l'on choisit telle ou telle aire comme sujet de la phrase :

l'aire 1 est la somme de l'aire 2 et de l'aire 3

l'aire 3 est la différence de l'aire 1 et de l'aire 2...

De la manipulation et de sa verbalisation associée, les élèves sont passés à un discours plus élaboré faisant intervenir des objets mathématiques. La relation d'égalité<sup>9</sup> (dont nous pensons que c'est un concept central dans le système conceptuel des mathématiques), étant une relation, «fait lien»,

---

<sup>9</sup> On ne peut pas s'étendre sur cette idée ici mais elle devrait ultérieurement faire l'objet d'un article, en particulier parce que la notion vygotkienne de pseudo-concept éclaire les difficultés de compréhension du «=» des élèves. Connaissant ces difficultés, il nous semble chaque fois que possible important de faire travailler les élèves sur sa conceptualisation.

«fait lire», met en évidence le tout et les parties du tout. Elle fédère un certain nombre de concepts comme grandeur ici, nombre ailleurs, opérations, calcul...

#### Activité 4

Cette activité peut se dérouler en situation réelle, c'est à dire en plaçant un ou deux élèves dans le couloir avec par exemple une chose fournie servant de support matériel au segment intervenant dans la comparaison ou bien en laissant faire le travail d'imagination avec tous les élèves en classe.

L'important étant que la perception seule ne suffise plus à comparer.

On peut assister à des échanges nombreux et fournis, de multiples possibilités sont évoquées puis on commence à discerner l'idée de référence même si le mot en lui-même n'est pas prononcé. L'enseignant demandant des précisions, c'est bien l'intervention d'une troisième chose qui est en jeu, qui serait «commune» aux deux parties. Progressivement, les élèves s'approprient cette idée.

Une nouvelle question apparaît : quoi choisir ? À ce niveau les échanges sont vifs, jusqu'à ce que les élèves conviennent que la référence choisie n'a pas d'importance, du moment que c'est «la même». Tout ce passage est une manifestation d'abstraction et en même temps des occasions de projeter les concepts de segment et de longueur dans cette nouvelle situation. Ce moment fait de confrontations, de négociations, d'argumentation est d'une grande importance pour arriver à construire la signification d'étalon (comme objet) qui pourra être tout segment.

Une fois, un étalon-chose choisi, la question de l'enseignant est de demander «maintenant, comment faire pour savoir quel est le segment le plus long?».

Nouvelles discussions. L'idée de report de l'étalon émerge finalement (on est encore là pour beaucoup d'élèves dans une forme de manipulation; certains même mimant l'action).

Mais il est facile de déceler que la notion de quantité de place (donc de la définition de la longueur) augmente en *opérance*<sup>10</sup>; en effet, même formulée à leur manière, elle est très présente dans les échanges, en particulier quand il s'est agi de trouver l'étalon : un des critères de choix a été que la longueur de l'étalon soit plus petite que la longueur à évaluer... mais comme les deux segments, à cet instant, n'étaient toujours pas comparés, comment savoir.

La phase d'écriture va prendre ici toute son importance quand il va falloir «traduire» tout cela en «mots».

L'autre intérêt de cette activité, et non des moindres, est de faire appréhender l'idée de comptage qui se dégage après le report. Ce n'est pas comme cela que les élèves ont l'habitude de faire lorsqu'ils sont en situation de mesurage utilisant une règle «déjà» graduée. Généralement, ils

---

<sup>10</sup> Niveau d'opérance : plus un concept monte en généralité (sa structure de généralisation) plus il permet d'embrasser un champ de problèmes grand et donc est plus à même d'être concept-outil dans la résolution de problèmes.

plaquent la règle sur le segment et ils associent la deuxième extrémité avec le nombre en regard. Ici, ils sont tenus de compter en nombres-de fois où la longueur-étalon rentre dans la longueur à déterminer... Le concept de grandeur-mesurable commence à se construire, relié à une longueur-étalon, au nombre (nombres-de dans un premier temps). Se mettent à jour deux points de vue convergents et par là-même signifiants : la longueur à déterminer peut-être lue à la fois comme la somme de tant de longueurs-étalon et comme «le produit» de la longueur-étalon par un nombre. Ce nouveau concept se construit à partir d'un système d'autres concepts. Encore une mise au jour du point-clé qu'«un concept isolé n'a pas de sens». Le fait de posséder l'étalon (nous dirons ensuite l'unité de comptage) entraîne de pouvoir utiliser le nombre via l'idée de mesure. Le comptage prend un aspect différent.

Le fait de faire se centrer les élèves sur cette idée d'étalon va être déterminante pour le passage à l'écriture d'une longueur sous forme mathématique comme par exemple «8 cm» pour ne pas qu'elle soit lue (ou plutôt vue) comme «un nombre suivi d'une unité» (une simple concaténation). Intervention de l'enseignant : «que se passe-t-il si on prend un autre étalon?». Cette question peut-être immédiatement suivie de l'expérience consistant à prendre la longueur de la brosse à tableau et la longueur d'un cahier pour évaluer la longueur du tableau. Alors que la longueur du tableau se conserve, le nombre-de fois dans les deux cas n'est pas le même.

Ce qui est intéressant à remarquer ici est la richesse des propositions des élèves : par exemple, de commencer avec une longueur-étalon et si le nombre-de fois n'est pas un nombre entier, de continuer, de compléter avec une deuxième longueur-étalon, plus petite, ce qui se traduira peu de temps après par une écriture quasi-mathématique symbolique :  $longueur = u \times 5 + z \times 3$ .

On est très proche de la compréhension de l'écriture décimale et de l'idée de valeur de position.

### Activité 5

Le travail sur la relation entre le tout et les parties, commencée dans les activités précédentes, est poursuivi ici. Mais aucun étalon, pas de mesurage possible. L'objectif est une réflexion plus conceptuelle mettant au centre la relation d'égalité et le principe de décomposition. Très souvent dans une égalité qui exprime un problème comme celui-ci : Paul a deux billes, il en gagne trois, quel est le nombre de billes dont il dispose ?» On écrit 2 billes + 3 billes = 5 billes. Dans ce genre d'égalité, une fois que l'on a écrit 5 billes, il y a comme une disparition des deux parties initiales, celle de 2 billes et celle de 3 billes. Si l'on n'y prend garde, cette manière de lire crée une oblitération de ce qu'il y a à gauche du «=» et induit, nolens volens, une habitude et finit par imposer un «sens» de lecture. On sait que cela est préjudiciable à toute conceptualisation du calcul et est une entrave à la compréhension de l'activité algébrique ultérieure (on peut se référer à

toute la littérature sur ce sujet qui existe depuis une trentaine d'années). Nous pensons que l'activité, s'appuyant sur la grandeur mesurable en jeu, établit les conditions d'une appropriation de la signification *mathématique* de l'égalité (réflexivité, symétrie, transitivité). En effet, quand l'élève va écrire  $t = a + b + e \dots$  il n'y a pas disparition d'un des deux membres. D'autre part, le fait d'imposer le «sujet» de la phrase, formulée en premier en «français», mène à une certaine focalisation de la lecture. Si on complète cette tâche, comme cela est demandé par la suite, par d'autres phrases racontant la même histoire mais en changeant de sujet, s'active le changement de point de vue et la mobilité langagière<sup>11</sup>. Apprendre à changer de point de vue et faire un choix dans tous ceux possibles est une étape obligée, au vu des répercussions que cela a dans tout ce qui touche au calcul. La tâche demandée aux élèves concourt à la déconstruction de l'habitude du «sens unique» évoqué plus haut.

### Activité 6

Retour sur l'idée d'étalon. Les élèves ont déjà été conscientisés à la nécessité de choisir un étalon pour comparer deux segments. La réflexion collective a débouché sur la notion de mesure. La contextualisation va demander une mise en œuvre des concepts de grandeur, mesure... Ce travail sera poursuivi par l'écriture symbolique et la discussion du «=».

Avec chaque étalon, les élèves vont «reporter» mentalement et arriver à écrire

$$aire(1) = u \times 5 = x \times 2,5 = y \times 10$$

En reprenant par exemple  $aire(1) = u \times 5$ , l'idée que la surface 1 occupe «cinq fois plus de place» que la «surface étalon» est validée en lien avec la définition. La cohérence est mise en avant en focalisant sur les deux membres de l'égalité qui sont de même nature et donc que 5 est ici la mesure quand l'unité de comptage est  $u$  et que 5 est un nombre.

En reprenant  $aire(1) = u \times 5 = x \times 2,5 = y \times 10$  on insiste sur le fait qu'il s'agit de la même aire mais qu'elle est exprimée de plusieurs manières. Cela conduit à exprimer que la mesure dépend de l'unité de comptage choisie.

Nous en sommes ici aussi avec les élèves à un point d'inflexion où, grâce aux actions langagières conjointes qui se déroulent depuis l'activité 1, l'on peut passer, plus franchement et plus rigoureusement, d'une activité d'observation à un système d'écriture symbolique et par conséquent s'écarter (sans la nier) de la connaissance «uniquement» sensible.

C'est à ce moment là que l'enseignant peut introduire, en continuité logique et cohérente, une réflexion sur une écriture comme « $AB = 8 \text{ cm}$ » :

---

<sup>11</sup> Pour cet aspect, nous renvoyons plus particulièrement aux travaux de Savioz F., De la mobilité langagière en classe, avec l'exemple de l'apprentissage des mathématiques.

- d'abord en rattachant le signe «AB» au segment [AB] et en formulant «AB est la longueur du segment [AB]» où on retrouve bien à la fois le lien et la séparation entre l'objet mathématique «segment» et sa longueur, grandeur mesurable associée.
- à la *relation d'égalité* qui dit ici ce qu'est AB et ce qu'elle vaut
- enfin, à la lecture de 8 cm comme 1 cm x 8.

### Activité 7

La contextualisation (la projection) d'un concept (ici, il s'agit davantage d'un champ de concepts) dans un problème participe à ce que l'on pourrait appeler «le principe de complétude ou de consistance», c'est à dire que cela fait naître un autre jeu de possibles dans la lecture du concept et provoque une extension et une solidification de sa sphère de significations. Ces contextualisations multiples concourent à la structuration d'un «concept de plein exercice».

Ces trois activités vont être aussi le lieu d'une préparation du passage du cadre des grandeurs au cadre numérique : profitant de la cohérence induite par la lecture des grandeurs, on peut passer aux mesures, puis aux nombres et ainsi faire «lire» des nombres (en écriture composée, pas sous forme réduite) en revenant chaque fois que nécessaire aux grandeurs «nourricières». Cette préparation est matérialisée par l'activité 7.

Le «sans-calculer» dérouté la quasi-totalité de élèves de prime abord et c'est là un effet recherché pour continuer à mettre en œuvre la distinction, fondamentale de notre point de vue, entre opérer et calculer.

Les deux premières versions de l'activité 7 entraînent les apprenants à écrire des histoires qui ont en quelque sorte le même sujet, la longueur de la baguette restante. Nous sommes persuadés que de ne pas donner de valeurs chiffrées dans la version 2 accentue le soulignement entre opérer et calculer : opérer s'entendant comme choisir logiquement et intentionnellement les opérations perçues ici comme des abstractions de couper et ajouter, qui sont fiables comme des gestes imaginables de celui qui agit physiquement sur la baguette. On reste ici très proche de l'activité manipulatoire que l'on peut mobiliser à tout instant pour faire sens ou pour «justifier» la vérité de l'histoire écrite.

In fine, on aboutit à l'écriture de *ce qu'est* la longueur de la baguette, c'est donc bien une longueur que l'on écrit et pas une «opération» qui resterait à faire.

Calculer la longueur va entraîner la question «quelle forme prendra la réponse?». Ce travail se poursuivra au cours de l'année avec une séquence *Nombres - Opérations - Calcul* avec la donnée de la définition d'une opération numérique puis de celle de calcul<sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup> Pour toute la partie concernant *opérer et calculer* voir l'article Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, pp. 4-18.



On peut recenser les écritures des élèves

$$\begin{aligned} \text{longueur de la baguette restante} &= 300\text{cm} - 85\text{cm} - 70\text{cm} - 70\text{cm} \\ &= 300\text{cm} - 85\text{cm} - 70\text{cm} \times 2 \\ &= 75\text{cm} \end{aligned}$$

Plusieurs choses à remarquer

- avec  $70\text{cm} - 70\text{cm}$  et  $70\text{cm} \times 2$  on retrouve la réflexion de l'activité 4 : à la fois les deux choses (morceaux de baguettes) sont physiquement discernables et ont la même longueur (attribut identique) et cela revient à enlever deux fois la même longueur; revenir à cette réflexion concourt à augmenter la «circulation de la pensée» entre deux structures de généralisation, à accentuer le travail de montée en abstraction entre le passage de deux choses distinctes mais ayant un attribut commun égal à l'idée d'identique puis à celle d'unité.

- ce produit  $70\text{cm} \times 2$  ne pouvant se lire que comme une grandeur implique que 2 est un nombre.

- il peut sembler positif de faire pointer aux élèves que la première phrase (le premier = pris comme dire ce que c'est) raconte l'histoire de la baguette exactement, on retrouve donc par la lecture le déroulement de l'action.

- la forme  $75\text{cm}$  fait perdre toutes ces informations (on ne peut plus raconter d'histoire ou bien plusieurs).

La version 3 complète avec insistance le travail précédent.

À travers cette activité, continuent à être visée la signification de l'égalité et la déconstruction d'une habitude instituée que «toute résolution de problème est calcul» sans anticiper sur «est-ce calculable en l'état ?» ou «calculer, mais pour quoi ?»

### Activité 8

Afin que lors du passage au cadre numérique, les opérations et les nombres (au niveau de leur écriture composée) gardent du sens, nous pensons qu'une activité de cette nature est pertinente pour plusieurs raisons :

- en donnant la solution du problème, tout en imposant une *forme non réduite*, c'est l'imagination de l'élève qui est sollicitée, mais bornée par la *structure de l'écriture* de la grandeur fournie comme réponse.
- la lecture de la grandeur conditionne une *histoire* et fait s'établir un lien logique / dialectique avec des concepts quotidiens, eux-mêmes en développement.

La mise en commun des énoncés et leur critique est certainement la phase la plus importante : les échanges langagiers vont porter sur le sens, la pertinence des textes proposés. Au cours de la discussion le niveau du discours et son genre vont nécessairement évoluer. Le fait que tous les énoncés se retrouvent en quelque sorte *condensés* dans la même solution  $4m + 3m \times 2$  ne peut que favoriser l'incontournable travail d'abstraction.

### **Activité 9**

L'introduction d'unités de comptage (ou unités de mesure mais on fera remarquer que cette expression recèle une ambiguïté sur le mot mesure) différentes va permettre d'affiner la réflexion sur opérer et calculer. La masse totale pouvant s'exprimer comme  $3,2t + 40kg \times 81$ , le passage à la mesure nécessite de choisir une même unité de comptage d'où un calcul. Il s'agit bien d'un choix et donc on touche là à ce que d'aucuns appellent l'intelligence du calcul.

On pourra orienter les élèves sur la question suivante «Écrire une égalité comme  $3,2t = 3200kg$  relève-t-elle du calcul ou pas ?». On pourra aussi insister, en fonction du niveau des échanges, sur le fait que calculer cette mesure induit un passage dans le cadre numérique qui va donner le nombre de *en-quoi-on-compte*.

Cette séquence porte en germe tout ce qu'un élève va rencontrer dans sa scolarité concernant les nombres. En créant les conditions d'enracinement des concepts scientifiques dans les concepts quotidiens, elle pourra permettre de garder du sens lorsque les notions de calcul, de priorités opératoires, de calcul littéral... seront traitées. Elle permettra également, et c'est là un point qui nous semble crucial, de ne pas faire appel à des règles ou routines mais au contraire de travailler par extension et par cohérence, ce qui devrait grandement faciliter la compréhension du domaine des nombres par les élèves et les rendre plus autonome face aux problèmes rencontrés.

Tableau donné en fin d'activité 1...

Nom de la grandeur	Longueur			Durée		autres ??
adjectifs	long, court	étendu, vaste	volumineux, spacieux	long, court	lourd, léger	
exemples						
« objet mathématique »	segment de droite					

[A]

*(Nous rappelons et explicitons dans cette partie quelques unes des idées-forces de l'approche historico-socio-culturelle)*

L'approche historico-socio-culturelle prend ses sources dans les travaux de différents auteurs au premier rang desquels Lev Vygotski mais également Henri Wallon. Il n'est pas ici le lieu de développer ces travaux tellement ils sont riches en prolongements possibles pour l'éducation. Nous reprendrons seulement quelques idées-forces sur lesquelles s'appuie la séquence proposée. Il est également nécessaire de préciser que toutes ces idées forment un tout, qu'il n'est pas possible de les lire de manière disjointe (ce serait d'ailleurs en perdre tout l'intérêt). Nous nous contenterons d'exposer quelques points et comme la lecture que nous faisons de ces idées-forces est forcément réductrice nous renverrons le lecteur pour une étude plus approfondie aux œuvres fondatrices suivantes

Pensée et langage de Lev Vygotski qui constitue l'ossature de cette conception,

De l'acte à la pensée de Henri Wallon

On peut ajouter également Avec Vygotski, sous la direction de Yves Clot, qui a l'avantage de faire le lien entre des auteurs comme Vygotski, Wallon, Bakhtine...

D'une manière générale, pour l'approche historico-socio-culturelle (AHSC), le développement des fonctions psychiques supérieures (extension de la pensée et de la conscience) est sociale et découle de modifications des fonctions psychiques à partir de l'appropriation/intériorisation des différents types «d'outils» culturels construits par les générations précédentes. Il s'ensuit que l'enseignement-apprentissage doit précéder le développement (c'est un des points qui différencient cette approche des autres conceptions d'éducation).

Pour citer Bernard Schneuwly : «Le développement à l'âge scolaire n'est possible que grâce à l'enseignement». L'enseignement, étant conçu sur une base disciplinaire, doit être systématique. Il doit susciter la réflexion, la prise de conscience et le contrôle dirigé de sa propre activité psychique.»

Un point capital de l'AHSC est le concept de médiation : par les «instruments psychologiques» qui modifient radicalement la relation de l'homme à lui-même et à son environnement social, par la médiation sémiotique qui permet un développement conjoint de la pensée et du langage, par la médiation humaine (entre élèves ou entre élève et enseignant).

L'extension/développement des fonctions psychiques supérieures (attention, volonté, mémoire, formation de systèmes de concepts, langages écrits...) procède de la différenciation des fonctions antérieurement indifférenciées. L'intégration de «signes» re-structure leur fonctionnement et leur

forme. De ce fait, les «instruments psychologiques» ne sont pas seulement des prothèses (avec une seule fonction d'aide) mais sont des «transformateurs» de l'individu.

Le langage comme outil de construction et de maîtrise de la pensée

Les interactions entre élèves et entre élève et professeur provoquent des réorganisations mentales. L'édification de la «pensée» se fait de manière interpersonnelle puis intrapersonnelle.

Quand on est conscient de l'existence ce processus, il n'est pas rare de le rencontrer en classe : lors de débats, il arrive qu'un élève s'approprie l'idée d'un autre et que l'on entende « toi, tu dis ça [phrase] mais.....» et en même temps on constate la transformation de la pensée du locuteur... en une sorte de réflexion «par contradiction».

La notion de Zone de Proche Développement (ZPD) est certainement celle la plus utilisée parmi toutes celles contenues dans les travaux de Vygotski mais également celle qui a le plus grand nombre d'interprétations.

Revenons au texte : «La possibilité plus ou moins grande qu'a l'enfant de passer de ce qu'il sait faire tout seul à ce qu'il sait faire en collaboration avec quelqu'un est précisément le symptôme le plus notable qui caractérise la dynamique de son développement et de la réussite de son activité intellectuelle. Elle coïncide entièrement avec sa ZPD.» (Pensée et langage - page 353)

Pour nous, elle n'est pas une «zone» dans un sens géographique. Citons Françoise Savioz : «sous la locution zone de proche développement, est souvent entendu un aspect morphologique du développement intellectuel, voire quasi topologique ; ceci peut découler de sa traduction par «zone proximale de développement», formulation qui fait porter l'accent logique sur le mot "zone" (une étendue), plutôt que sur le mot «développement» (une dynamique) ; mais peut-être aussi, cette acception s'adapte-t-elle au flou qui entoure la notion d'âge mental».

Elle n'indique pas qu'il y aurait des situations d'enseignement «parfaites».

Elle ne signifie pas non plus qu'il y aurait pour chaque élève un «potentiel», vu comme «caractéristique intrinsèque à apprendre» qu'il suffirait de déclencher (cette conception est proche du modèle biologique avec la métaphore «du germe à la plante» et de l'enseignant comme jardinier).

En accord avec le modèle de développement d'un individu exposé par Vygotski, la ZPD concourt à révéler les fonctions psychologiques en cours de maturation, à en connaître leur état et à trouver les médiations qui vont favoriser leurs extensions et transformations.

La ZPD peut être vue comme espace-temps d'une tension entre l'extérieur et l'intérieur d'un élève, «croisement entre deux logiques, l'une d'enseignement, l'autre de développement» pour reprendre les propos de B.Schneuwly.

[B]

### Autonomie

Ce terme est tellement utilisé qu'il nous paraît nécessaire de donner la manière dont nous l'entendons, en droite ligne de Castoriadis et de Vygotski.

L'individu n'est pas «naturellement» autonome comme le laisse à penser certaines conceptions. Comme a dit Érasme, «on ne naît pas humain, on le devient». ce qui signifie que cette autonomie se construit justement au contact des autres, mais pas de manière automatique, où il suffirait de laisser immerger un jeune enfant dans un groupe/la société, et linéairement, de par sa propre évolution, il se transformerait en sujet autonome. Autonomie doit être entendue ici comme autonomie intellectuelle. Individu autonome comme se dirigeant lui-même, conscient de lui-même, de ses buts et de ses moyens et des Autres. C'est à ce niveau qu'intervient, de façon cruciale, l'école, par son vecteur, l'enseignant, non pas comme «maître tout puissant», ni comme «maître accoucheur». Mais comme celui, qui en connaissance de cette idée d'autonomie va créer les conditions (situations, problèmes posés, questionnement...) pour rendre cette construction de l'autonomie possible. D'où, encore une fois, l'importance de la médiation de l'enseignant.

Lev Vygotski conçoit le développement de l'enfant comme un processus d'appropriation de l'expérience sociale accumulée. Et l'apprentissage doit donc devancer le développement présent.

[C]

### La formation des concepts

Vygotski distingue les concepts quotidiens («appris sur le tas» - ils ont une portée locale - ils sont contextualisés - ils sont relativement isolés les uns des autres ) et les concepts scientifiques (ils ont une portée générale - ils forment des systèmes - ils se créent avec le concours essentiel du langage). Autrement dit : les concepts spontanés/quotidiens peuvent être compris comme une forme de généralisation, quasi-exclusivement empirique, des expériences quotidiennes, sans enseignement systématique alors que les concepts scientifiques doivent être entendus comme généralisation de l'expérience de l'ensemble de l'humanité - les sciences au sens large embrassant toutes les connaissances humaines.

L'école est le lieu où les concepts scientifiques sont en cours d'appropriation / de constitution. Bien évidemment l'appui sur les autres concepts est incontournable.

Pour faire suite à ce qui est écrit précédemment, certains traits distinctifs prennent plus de force. Parmi les objets une différenciation s'opère, une «première» généralisation a lieu puis l'abstraction. On peut dire que le concept est une synthèse de «pensées».

L'idée d'un concept «isolé» n'a pas de sens. Les concepts sont toujours en perpétuel développement chez chaque individu, insérés dans un système de concepts. Le développement de cette «structure de concepts» modifie la nature de la pensée de l'élève qui en retour accroît le développement de sa «structure de concepts». Ceci permet d'expliquer pourquoi l'enseignement de notions isolées n'a pas de sens.

[D]

Structure de généralisation

À elle toute seule cette idée-force de Vygotski mériterait un article. Comme ce n'est le lieu ici, nous citerons quelques passages fondamentaux de *Pensée et Langage*.

« [...] les concepts scientifiques de type supérieur ne peuvent naître dans l'esprit de l'enfant qu'à partir des types de généralisation plus élémentaires et inférieurs qui existaient auparavant, et ne peuvent nullement être apportés de l'extérieur dans la conscience de l'enfant. » (pp. 290-291)

« Si la prise de conscience d'un concept équivaut à une généralisation, il est alors parfaitement évident que la généralisation, à son tour, ne signifie rien d'autre que la formation d'un concept supérieur qui inclut dans son système de généralisation le concept donné en tant que particulier. Et, s'il apparaît derrière le concept donné un concept supérieur, celui-ci implique nécessairement l'existence non pas d'un mais d'une série de concepts subordonnés, avec lesquels le concept donné a des rapports déterminés par le système du concept supérieur – sans quoi le concept supérieur ne serait pas supérieur au concept donné. Mais ce concept supérieur suppose en même temps une systématisation hiérarchique des concepts inférieurs au concept donné, qui lui sont subordonnés, et auxquels il est de son côté lié par un système tout à fait déterminé de rapports. Ainsi la généralisation d'un concept a pour conséquence que celui-ci est placé dans un système déterminé de rapports de généralité, qui représentent les liaisons les plus fondamentales, les plus naturelles et les plus importantes entre les concepts. La généralisation signifie donc à la fois prise de conscience et systématisation des concepts. » (p.319)

« Nous avons tout d'abord réussi à découvrir que la généralité (la différence de généralité) ne coïncide pas avec la structure de généralisation et ses différents stades tels que nous les avons dégagés dans l'étude expérimentale de la formation des concepts : images syncrétiques, complexes, préconcepts et concepts.

Premièrement, des concepts de généralité différente sont possibles dans une même structure de généralisation : ainsi, dans la structure des concept-complexes, « fleur » et « rose » sont également possibles. Nous devons, il est vrai, faire d'emblée une réserve : le rapport de généralité « fleur-

rose » ne sera néanmoins pas le même dans chaque structure de généralisation, par exemple dans la structure des complexes et dans celle des préconcepts.

Deuxièmement, il peut y avoir des concepts de même généralité dans des structures de généralisation différentes. Ainsi « fleur » peut, dans la structure des complexes comme dans celle des concepts, être également la signification pour toutes les sortes de fleurs et se rapporter à toutes les fleurs. Ici encore, il est vrai, une réserve s'impose : cette généralité ne s'avérera identique dans des structures de généralisation différentes qu'au sens logique et concret et non au sens psychologique, c'est-à-dire que le rapport de généralité « fleur-rose » ne sera pas le même dans la structure des complexes et dans celle des concepts. Chez un enfant de deux ans ce rapport est plus concret ; le concept plus général coexiste en quelque sorte avec le concept plus particulier, il le remplace, alors que chez l'enfant de huit ans l'un est au-dessus de l'autre, le plus général inclut le plus particulier. (p. 382-383)

« [...] : à chaque structure de généralisation (formation syncrétique, complexe, préconcept, concept) correspond un système spécifique de généralité et de rapports de généralité entre les concepts généraux et particuliers, une mesure propre d'unité du concret et de l'abstrait, mesure qui détermine la forme concrète d'un mouvement donné de concepts, d'une opération donnée de la pensée à tel ou tel stade de développement des significations de mots. » (pp. 383-384)

« ... chaque structure de généralisation détermine l'équivalence des concepts qui est possible dans sa sphère. » (p. 388)

« Si l'on étudie le rapport de généralité d'un concept quelconque, sa mesure de généralité, on obtient le critère le plus sûr pour déterminer la structure de généralisation des concepts réels. Être porteur de signification équivaut à avoir certains rapports de généralité avec d'autres significations, c'est-à-dire à avoir une mesure spécifique de généralité. Ainsi c'est dans ses rapports spécifiques avec les autres concepts que se manifeste le plus complètement la nature d'un concept – formation syncrétique, complexe, préconcept. » (pp. 388-389)

« La nouvelle étude montre que le passage s'effectue autrement : l'enfant forme une nouvelle structure de généralisation d'abord avec quelques concepts, le plus souvent fraîchement acquis, par exemple dans le processus d'apprentissage ; il suffit qu'il ait maîtrisé cette nouvelle structure pour qu'il réorganise, transforme aussi la structure de tous les concepts précédents. Ainsi le travail antérieur de la pensée n'est pas perdu, les concepts ne sont pas réélaborés à chaque nouveau stade, chaque signification n'a pas à refaire tout le travail d'organisation de la structure. Grâce à la maîtrise du nouveau principe, cela s'opère, comme d'ailleurs toutes les opérations structurales de



la pensée, sur quelques concepts qui sont ensuite étendus et transférés en vertu des lois de la structure à toute la sphère des concepts dans son ensemble.

Nous avons vu que la nouvelle structure de généralisation, à laquelle accède l'enfant au cours de l'apprentissage scolaire, permet à sa pensée de passer à un plan nouveau et plus élevé d'opérations logiques. Les anciens concepts, entraînés dans ces opérations mentales d'un type supérieur au précédent, se modifient eux-mêmes dans leur structure. » (p. 395)

[E]

Abstraction empirique et abstraction théorique

On peut parler d'abstraction empirique lorsque s'opèrent des classements, des regroupements. Qu'est-ce qui distingue alors cette abstraction de ce que nous appelons abstraction théorique ? C'est le fait notamment, qu'à tout moment, l'intervention de l'enseignant va orienter, alimenter, documenter cette abstraction en relation avec d'autres concepts. En quelque sorte, fournir un coup de pouce aux élèves dans la montée en généralité à laquelle ils procèdent, par cette mise en lien et par l'expression de cette montée en généralité au moyen d'autres concepts (l'enseignant est acteur de la construction du sujet et de la construction du sujet en lien avec le savoir). C'est ne pas laisser les élèves seuls dans cette phase, prendre garde que des relations logiques s'établissent. C'est amener les apprenants à une intériorisation plus grande, en poussant les instruments psychologiques à leur plus haut niveau d'opérance, à chaque moment, en fonction de l'analyse de la situation en train de se dérouler, par des questionnements, par de nouvelles demandes de reformulation, voire par le blocage des négociations des significations. C'est être vigilant à l'établissement d'une relation/tension entre les concepts qui émergent, ici et maintenant, et les objets de savoir «fondés».

Vygotski dit que l'appropriation des concepts scientifiques évolue «à la condition d'une coopération systématique entre l'enfant et le professeur». Il nous semble que le «systématiquement» doit être compris dans les deux acceptions i) sans relâche, interpellé les élèves de manière permanente ii) par la mise en système des notions abordées.

Une «simple» abstraction empirique, du fait de cette non-systématicité, empêche, ou en tout cas contrarie, toute possibilité d'évolution du concept potentiel en concept de plein exercice.

L'abstraction théorique n'est plus un appauvrissement de la réalité en extrayant seulement une ressemblance mais permet un enrichissement par l'adjonction d'un attribut à l'objet dans notre manière de penser.

Plus les concepts en construction ont une base d'action grande (opérance), plus d'équivalence est possible... plus ils constituent une base conceptuelle solide, plus cette base est porteuse de plus

grande potentialité à développer la compréhension d'autres concepts (comme l'exemple déjà cité de la somme de deux grandeurs et de la somme de deux fractions).

Ce processus n'est pas déterminé à l'avance, il comporte une grande part d'indéterminité. D'où l'importance de concevoir une séquence d'activités, permettant par le choix le plus riche possible un plus grand champ de possibles, ceci s'opposant à l'idée d'une seule activité-miracle. la succession d'activités complémentaires concourt par la mobilité langagière à faire naviguer les élèves entre les structures de généralisation et à l'intérieur d'une même structure, travailler les rapports de généralité.

Une autre manière d'aborder la compréhension de cette idée d'abstraction théorique est d'examiner deux exemples (certes un peu caricaturaux) de situations en classe :

- donner aux élèves une situation-problème, les laisser seuls au prise avec le problème, en regardant leur découverte de la solution (sans trop intervenir), puis finalement synthétiser et institutionnaliser. Nous pouvons penser que nous ne sommes pas loin d'une conception platonicienne.
- écrire une leçon, présenter le concept que l'on veut étudier, puis demander quelques applications. Nous sommes typiquement là en présence de ce que Vygotski dénonce comme verbalisme et au lieu de passer de l'objet au signe, pour reprendre Meyerson, nous en sommes à faire passer du signe à l'objet. L'enseignement dans ce cas conduit au seul développement de compétences.

Exemples caricaturaux puisque dans le premier cas, on sait pertinemment que l'enseignant ne peut pas rester sans réagir tout au long de l'activité et dans le deuxième cas, des questions d'élèves vont apparaître.

Ce processus est aussi création de la part de chaque élève au moment de l'intériorisation, non pas création ex nihilo, mais par re-structuration des fonctions psychiques supérieures. Création d'un monde nouveau, monde vu sous le rapport d'avoir plus de manières de le voir. C'est cette part de création qui donne d'autres potentialités à chaque individu tout en lui permettant de réaliser qu'il est parmi les Autres.

## Bibliographie

- Bronckart JP., *Les genres de textes et leur contribution au développement psychologique*, Langages, n° 153, 2004
- Bronckart JP., *Interactions, discours, significations*, Langue française n° 74, 1987
- Brossard M., *Espace discursif et activités cognitives : un apport de la théorie vygotkienne*, Enfance - Tome 42, 1989
- Brossard M., *Vygotski. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, Presses Universitaires du Septentrion, 2004
- Castoriadis C., *L'institution imaginaire de la société*, Seuil / Collection Essais, 1975
- Chevallard Y. Bosch M., *Les grandeurs en mathématiques au collège*, «Petit x» n°55 et n°59
- Clot Y. (ouvrage collectif dirigé par), *Avec Vygotski*, Éditions La Dispute, 2002
- Condillac, *La langue des calculs*, Presses Universitaires de Lille, 1981
- D'Amore B., *Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques*, Scientia Paedagogica Experimentalis, 2001
- Descombes V., *Les institutions du sens*, Les Éditions de Minuit, 1996
- ÉduScol - MEN, *Document d'accompagnement des programmes de Mathématiques - Grandeurs et mesures*, 2007
- ÉduScol- MEN, *Document d'accompagnement des programmes de Mathématiques - Les nombres au collège*, 2006
- ÉduScol - MEN, *Document d'accompagnement des programmes de mathématiques - Du numérique au littéral*, 2006
- ÉduScol - MEN, *Programmes d'enseignement des Mathématiques - Collège*, 2008
- Friedrich J., *L'idée d'instrument psychologique chez Vygotski*, RIFL (vol.6), 2012
- Laugier S., *Wittgenstein Les sens de l'usage*, Vrin, 2009
- Lebesgue H., *Sur la mesure des grandeurs*, L'enseignement mathématique - Vol.31, 1932
- Lebesgue H., *Grandeurs mesurables*, L'enseignement mathématique - Vol.33, 1934
- Meyerson I., *Les fonctions psychologiques et les œuvres*, Albin Michel, 1995
- Radford L., *Théorie de l'objectivation*, Éléments 1 - IREM de Toulouse, 2011
- Radford L., *La généralisation mathématique comme processus sémiotique*, In G. Arrigo (ed.), Atti del Convegno di didattica della matematica, Alta Scuola Pedagogica. Locarno - Suisse, 2004
- Savioz F., *De la mobilité langagière en classe, avec l'exemple de l'apprentissage des mathématiques*, Thèse de doctorat, 2007, Université de Toulouse 2

- Schneuwly B., *Vygotski, l'école et l'écriture*, Cahier de la section des sciences de l'éducation n°118, Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation
- Van Oers B., *The Recontextualization of Inscriptions: an Activity-Theoretical Approach to the Transferability of Abstractions*, Paper for the Invited Symposium Rethinking Abstraction and Decontextualization in Relationship to the «Transfer Dilemma» San Diego, 2004
- Veresov N., *Introducing cultural historical theory: main concepts and principles of genetic research methodology*, 2010
- Vygotski L., *Pensée et langage*, La Dispute, 1997
- Whitney H., *The mathematics of physical quantities (Part I : Mathematical models for measurement)*, American Mathematical Monthly, 1968
- Yvon F. et Zinchenko Y., (sous la direction de), *Vygotsky, une théorie du développement et de l'éducation*, Université d'État de Moscou / Université de Montréal, 2012
- MEN - Groupe National d'Équipes de Recherche en Didactique des Mathématiques, *Algèbre et fonctions*, 1998 ?

# LES APPORTS DE LA SÉMIOLOGIE SAUSSURIENNE AUX THÈSES DÉVELOPPEMENTALES DE VYGOTSKI.

Jean-Paul Bronckart & Ecaterina Bulea  
Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation  
Université de Genève

## 1. Les thèses de Vygotski

L'une des thèses fondamentales de Vygotski, argumentée en particulier dans *Pensée et langage* (1934/1997 – ci-après *PL*) est que l'appropriation et l'intériorisation du langage provoquent une véritable *révolution* dans le fonctionnement psychologique humain. Sous l'effet de ces deux processus, le psychisme du jeune enfant, fonctionnant jusque là selon des modalités analogues à celles des autres espèces animales supérieures, et s'inscrivant ce faisant dans la continuité d'un développement *naturel*, serait entièrement réorganisé par les signes et les structures langagières, et s'inscrirait désormais dans un développement d'ordre *sociohistorique* : en d'autres termes encore, avec l'appropriation du langage, les significations historiquement élaborées par un groupe social, telles qu'elles sont cristallisées dans les unités et structures d'une langue naturelle, prendraient en charge l'ensemble du fonctionnement psychologique humain.

Dans le chapitre 4 de *PL* (*Les racines génétiques de la pensée et du langage*) Vygotski a appuyé cette thèse par un schéma développemental en Y.

Dans une première étape de l'ontogenèse humaine, on observerait, comme dans le monde animal, la co-existence de deux racines développementales disjointes, l'une qualifiée de « stade pré-verbal de l'intelligence », l'autre de « stade pré-intellectuel du langage ». Ce schéma revient ainsi à considérer qu'avant l'apparition du langage, l'enfant poursuivrait en parallèle deux formes de développement. La première procéderait de son interaction, non médiatisée par le langage et les relations sociales, avec le monde en ce qu'il a de physique : sur ce plan, il se construirait des capacités de représentation des objets et des actions telles que Piaget (cf. 1936 et 1937) les a décrites dans son analyse du stade sensori-moteur. La seconde forme procéderait de l'interaction, médiatisée cette fois par le langage et les autres outils sémiotiques, avec les partenaires sociaux (avec le monde en ce qu'il a de social) : sur ce plan, l'enfant se construirait des capacités de communication (co-actions, proto-langage), telles qu'elles ont été décrites notamment dans les travaux issus de l'école de Bruner (1973).

L'appropriation du langage procéderait de la fusion de ces deux racines, thèse qui, comme l'a souligné Schneuwly (1988), a deux implications. Elle signifie d'une part que les capacités de représentation sont désormais investies dans les échanges communicatifs ; elle signifie d'autre part et corollairement que les représentations du monde antérieurement constituées (dans l'interaction avec le monde physique) se trouvent désormais investies et réorganisées par les signifiés des signes de la langue naturelle de l'entourage : les images mentales constituant jusque là des entités inorganisées et idiosyncrasiques deviendraient de véritables unités délimitées, ce qui permettrait que se mettent en place les opérations de la pensée proprement dite.

Ce processus de fusion pensée-langage a été abordé plus ou moins directement par Vygotski dans le chapitre 7 de *PL (La pensée et le mot)*, dans une argumentation portant sur le statut de la pensée consciente et que nous résumerons comme suit :

a) Une critique des conceptions anciennes et/ou dominantes, qui abordent le langage et la pensée comme deux phénomènes séparés :

(1) « [...] le défaut méthodologique fondamental de l'immense majorité des recherches sur la pensée et le langage, défaut qui est cause de la stérilité de ces travaux, [est] de considérer ces deux processus comme deux éléments indépendants, autonomes et isolés, dont la réunion externe est la source de la pensée verbale avec toutes les propriétés qui lui sont inhérentes. » (Vygotski, 1997, p. 416)

b) L'affirmation de la nécessité d'identifier une unité de la pensée verbale comme tout, et la thèse selon laquelle celle-ci réside dans la *signification* du mot :

(2) « C'est dans la *signification* du mot que nous avons trouvé cette unité de base qui reflète sous la forme la plus simple l'unité de la pensée et du langage. » (*ibid.*, p. 417)

La signification est donc conçue comme un phénomène psychique unique, relevant à la fois et indissolublement de la pensée et du langage :

(3) « Ainsi la signification du mot est à la fois un phénomène verbal et un phénomène intellectuel, cependant cela ne signifie pas pour elle une appartenance purement extérieure à deux domaines de la vie psychique. La signification du mot est un phénomène de la pensée dans la mesure seulement où la pensée est liée au mot et incarnée dans le mot — et inversement elle est un phénomène de langage dans la mesure seulement où le langage est lié à la pensée et éclairé par elle. C'est un phénomène de la pensée ou du langage doué de sens, c'est l'*unité* du mot et de la pensée. » (*ibid.*, p. 418)

c) L'introduction d'un argument décisif aux yeux de Vygotski, issu de ses propres recherches empiriques : les significations se *développent* dans l'ontogenèse, se modifient, ou encore sont *dynamiques*. Or les conceptions antérieures ne pouvaient expliquer cette dynamique permanente dans la mesure où elles considéraient que les significations n'étaient que les produits d'une association conventionnelle entre le mot (entité sonore) et une idée préalable, association qui une fois établie n'aurait plus aucune raison d'être modifiée :

(4) « La découverte que les significations du mot ne sont pas immuables, constantes, invariables, et qu'elles se développent est une découverte capitale, qui seule peut sortir la théorie de la pensée et du

langage de l'impasse où elle est engagée. » (*ibid.*, p. 427)

d) L'affirmation selon laquelle, pour expliquer cette dynamique, il faut analyser « le rôle fonctionnel de la signification du mot dans l'acte de pensée » ou « le fonctionnement des significations dans le cours vivant de la pensée verbale » (*ibid.*, p. 427).

Cette analyse débouche alors sur deux constats :

d1) L'unité que constitue la signification est de l'ordre non de l'objet, mais du *processus*, d'un mouvement permanent :

(5) « le rapport de la pensée avec le mot est avant tout non une chose mais un processus, c'est le mouvement de la pensée au mot et inversement du mot à la pensée [...] La pensée ne s'exprime pas dans le mot mais se réalise dans le mot. C'est pourquoi on pourrait parler d'un devenir (d'une unité de l'être et du non-être) de la pensée dans le mot ». (*ibid.*, p. 428)

d2) Ce processus est éminemment *complexe* :

(6) « Dès la première tentative, un tableau grandiose, d'une extrême complexité, s'offre à nous d'emblée, qui surpasse par la finesse de son architectonique tous les schémas qu'ont pu envisager les plus riches imaginations des chercheurs. » (*ibid.*, p. 428)

(7) « L'unité du langage est une unité complexe, non homogène. » (*ibid.*, p. 429)

e) Après un long examen du développement du langage chez l'enfant, dans ses dimensions externe et interne (langage intérieur), deux types de conclusions :

- une ayant trait au mouvement d'élaboration de la pensée verbale :

(8) « Dans le drame vivant de la pensée verbale, le mouvement s'effectue [comme suit] : du motif, qui donne naissance à la pensée, à la mise en forme de cette pensée elle-même, à sa médiation dans le langage intérieur, puis dans la signification des mots extériorisés, et, enfin, dans les paroles. » (*ibid.*, p. 496)

- l'autre ayant trait au statut même de la pensée consciente :

(9) « Le mot est bien dans la conscience ce qui, selon Feuerbach, est absolument impossible à l'homme seul, mais possible à deux. C'est l'expression la plus directe de la nature historique de la conscience humaine. [...] Le mot doué de sens est un microcosme de la conscience humaine. » (*ibid.*, p. 500)

## 2. Une évaluation de ces thèses

Cette approche est fondatrice de l'interactionnisme social, ou à tout le moins de la branche de ce courant qui met l'accent sur le rôle décisif du langage (eu égard à l'activité), et nous adhérons pour notre part sans réserve à son orientation générale, en l'occurrence aux deux points qui suivent :

- le caractère décisif ou révolutionnaire de la transformation du psychisme sous l'effet de l'appropriation/intériorisation du langage : investi par ce langage, le psychisme humain cesse bien

d'être soumis aux seules modalités de fonctionnement naturel, et se trouve réorganisé par des valeurs d'ordre sociohistorique ;

- l'affirmation de l'existence d'une véritable unité de pensée verbale, intégralement psychique, qui est dynamique, processuelle et complexe.

Mais cette approche pose aussi divers types de problèmes.

a) Comme l'un de nous l'avait soutenu ailleurs (cf. Bronckart, 1997), la thèse de l'existence de deux racines développementales disjointes doit être récusée, et plus largement la teneur du chapitre 4 de *PL* n'est pas à la hauteur de celle du chapitre 7, notamment parce qu'elle est encore marquée par l'acceptation de la validité du parallélisme entre phylo- et ontogenèse hérité notamment de Levy-Bruhl (1927). Dans le chapitre évoqué, nous avons relevé quelques contradictions dans la description de ces deux racines, que nous ne pourrions détailler ici. Mais pour l'essentiel, Vygotski semble y sous-estimer le fait que, entre la naissance et l'acquisition du langage, le jeune enfant est intégré à des formes d'activités humaines régulées par le langage des adultes, et que cette activité constitue le cadre médiatisant l'ensemble de ses interactions avec le monde physique, en même temps et sous des modalités analogues à celles de ses interactions avec le monde social : de ce fait il ne peut y avoir à cette période, ni constructions pré-intellectuelles pures, ni constructions pré-langagières indépendantes des élaborations cognitives. Mais si cette thèse relative à l'amont est ainsi en quelque sorte inutile, son complément, selon lequel le langage verbal humain est, en essence, fusion des processus de représentation et de communication, ne doit pas être récusé pour autant.

b) On relèvera aussi divers problèmes terminologiques : le terme « pensée » désigne dans certains cas des processus psychiques antérieurs à l'acquisition du langage, parfois la pensée verbale consécutive à cette acquisition ; il en va de même pour le terme « langage » qui désigne parfois les premières formes d'interactions communicatives, parfois les interactions verbales proprement dites.

c) Cette question terminologique renvoie en réalité au problème théorique suivant : que seraient cette pensée avant le langage et ce langage avant la pensée verbale ? La citation 8 laisse entendre qu'il y aurait d'abord constitution d'une première forme de pensée, qui se trouverait, secondairement, transformée sous l'effet de l'acquisition du langage. Une telle analyse demeure compatible avec la thèse selon laquelle coexisteraient deux formes de pensée humaine, l'une non sémiotisée ou proprement cognitive, l'autre sémiotisée ou verbalisée. C'est cette forme de thèse qui sous-tend la distinction entre mémoire sémantique et mémoire cognitive, ou qui est exploitée par certains courants cognitivistes pour poser la prééminence de la pensée pure, universelle, par rapport aux formes de pensées qui seraient sémiotisées et socioculturellement dépendantes.



d) Enfin, la citation 9 et l'emprunt à Feuerbach posent clairement que la pensée consciente est d'ordre historique et requiert les interactions sociales. Mais force est de constater que, dans les analyses antérieures de ce chapitre, ne sont clairement mis en évidence et approfondis : - ni le rôle effectif des interactions sociales dans ce processus ; - ni le statut des signes/significations et ce qui, dans leur structure même, explique qu'ils soient dynamiques ou perpétuellement changeants ; - ni en définitive le mécanisme par lequel la pensée consciente devient sociohistorique.

### **3. Les apports des réflexions saussuriennes sur le signe**

Les réflexions de Ferdinand de Saussure nous paraissent pouvoir contribuer puissamment à la clarification des problèmes qui viennent d'être évoqués, pour autant que l'on prenne en considération le corpus effectif de son œuvre. Si l'on excepte son *Mémoire sur le système primitif des voyelles en indo-européen* (1879/1922), Saussure n'a pratiquement rien publié de son vivant, et le *Cours de linguistique générale* (1916/1975) qui l'a rendu célèbre a été composé sur la base de notes d'étudiants des cours éponymes qu'il a donnés à Genève de 1907 à 1911, par deux rédacteurs qui n'avaient pas assisté auxdits cours. Ce texte ne donne qu'un reflet à la fois partiel et déformé de la position effective de Saussure, position que l'on peut néanmoins reconstituer aujourd'hui à partir de nouveaux cahiers d'étudiants (cf. Constantin, 2005) ou de ses multiples notes manuscrites, dont une partie a été récemment retrouvée et publiée dans les *Écrits de linguistique générale* (2002). Nous sommes pour notre part engagés dans ce travail de réinterprétation de la théorie saussurienne effective, avec un ensemble de collègues linguistes (cf. Bronckart, Bulea & Bota, 2010).

On relèvera d'abord que les propositions théoriques de Saussure se fondent sur un impressionnant travail empirique antérieur portant sur la comparaison de multiples langues se distribuant dans l'espace et dans le temps ; travail ayant mis en évidence la permanence des changements qui affectent aussi bien les mots que les idées qu'ils véhiculent et que le rapport de signification entre ces deux pôles.

On relèvera ensuite que Saussure adressait aux courants linguistiques antérieurs une critique analogue à celle que Vygotski adressait à ses prédécesseurs : ce que ce dernier qualifiait de position associationniste était qualifié par Saussure de position conventionnaliste simple, concevant la langue comme une « nomenclature », c'est-à-dire comme un ensemble de termes renvoyant aux choses, telles que ces dernières se présentent et sont organisées dans le monde. Pour les deux auteurs, les conceptions de ce type ne permettaient pas de comprendre pourquoi les signes des langues se transforment en permanence, et elles semblaient par ailleurs ignorer la dimension intégralement psychique des signes, que Saussure présentait comme suit :

(10) « La troisième [manière de se représenter le mot] est de comprendre que **le mot pas plus que son sens n'existe hors de la conscience que nous en avons**, ou que nous voulons bien en prendre à chaque moment. Nous sommes très éloigné de vouloir faire ici de la métaphysique.<sup>1</sup> » (*Ecrits de linguistique générale*, 2002, p. 83)

La démarche de Saussure a alors été de comprendre ce qu'est un *signe* en général et un *signe verbal* en particulier, et dans ce qui suit, nous reconstituerons son analyse en six étapes, qui ont été présentées plus en détail ailleurs par l'une d'entre nous (cf. Bulea, 2005 ; 2006 ; 2010).

### 3.1. Le caractère double des entités sonores

Dans ses travaux antérieurs de phonologie, Saussure avait d'une part mis en évidence que les productions sonores comportent des dimensions physiques et physiologiques accessibles. Mais il avait également relevé que, dans leur fonctionnement langagier effectif, les productions sonores ne pouvaient se réduire à cette seule dimension matérielle ; il avait souligné plus précisément que leur accessibilité directe ne devait pas occulter le fait qu'en même temps, en tant qu'ils sont proférés et perçus par les humains, les sons comportent nécessairement une dimension d'*impression acoustique*, inanalysable en elle-même, et pour cette raison *ne relevant pas spécifiquement de l'étude phonologique*<sup>2</sup> :

(11) « Il s'agit d'observer le mécanisme par lequel est produite chaque espèce de son. En dehors du côté phonatoire, il y a un côté acoustique qui rentre aussi dans la physiologie. **Mais il est une chose (l'impression acoustique) qui ne fait pas partie de l'étude phonologique.** On ne peut l'analyser [...] On pourrait croire que les sons sont la première partie de la linguistique. **La langue est un système qui court sur des impressions acoustiques inanalysables** (différence de *f* avec *b*). Or l'analyse <phonatoire> de cela n'intéresse pas le linguiste. » (Constantin, 2005, pp. 151-154)

Cette impression acoustique, qui sera ultérieurement qualifiée d'*image acoustique*, est proprement *psychique* (ce qui constitue d'ailleurs la raison de son inaccessibilité directe) : elle procède de traces ou d'« empreintes » que les humains ont et/ou gardent des productions sonores, *en présence ou en absence* de toute profération effective. Elle *se* constitue comme un *dégagement* des propriétés de sa base empirique, et se trouve de la sorte pourvue d'une existence autre, *immatérielle*, qui a notamment la propriété de transcender aussi bien la singularité d'exécution de chaque acte phonique, que le caractère irréductiblement éphémère de ses propriétés strictement physiques.

En outre, cette image acoustique ne *devient* signe qu'à la condition que lui soit associée une

---

<sup>1</sup> Dans l'ensemble de nos citations, les soulignements en italiques sont des auteurs et les soulignements en gras sont de nous.

<sup>2</sup> Dans plusieurs manuscrits de Saussure, le terme de « phonologie » désigne de fait la discipline que l'on qualifie aujourd'hui de phonétique (analyse des propriétés physiques des sons, abstraction faite de leur valeur distinctive dans le cadre d'une langue naturelle).

idée, et dans les conditions où l'idée lui est associée. Ce qui a donné lieu à la formule bien connue du *Cours de linguistique générale* :

(12) « Le signe linguistique unit non une chose et un nom, mais un concept et une image acoustique. Cette dernière n'est pas le son matériel, chose purement physique, mais l'empreinte psychique de ce son, la représentation que nous en donne le témoignage de nos sens ; elle est sensorielle, et s'il nous arrive de l'appeler "matérielle", c'est seulement dans ce sens et par opposition à l'autre terme de l'association, le concept, généralement plus abstrait. » (*Cours de linguistique générale*, 1975, p. 98)

Sur cette base, Saussure dissocie donc, sur le versant sonore des signes, d'une part la *figure vocale*, qui désigne la dimension matérielle ou perceptible des sons ou mots, et *l'image acoustique*, comme forme entrant dans la composition du signe, pour autant que lui soit associée une idée :

(13) « **Il est faux (et impraticable) d'opposer la forme et le sens.** Ce qui est juste en revanche c'est d'opposer la *figure vocale* d'une part, et la *forme-sens* de l'autre. » (*Ecrits de linguistique générale*, 2002, p. 17)

Cette analyse implique que ce qui fonctionne sémiotiquement sur le versant sonore, c'est une image psychique dégagée de la matérialité des sons, et que celle-ci ne se construit que dans et par son association à une signification.

### 3.2. Le caractère radicalement spécifique ou sémiotique des significations

Sur ce versant du sens, Saussure conteste d'abord que *les contenus des signes puissent être donnés d'avance*, au niveau des objets ou référents existant dans le monde. Et il conteste aussi en conséquence que la structuration des signes s'effectue conformément à celle des objets auxquels ils renvoient. Il récuse en d'autres termes *toute base ou tout fondement externe* (mondain) pour et lors de la constitution-configuration des signes :

(14) « *D'abord* l'objet, puis le signe ; donc (ce que nous nierons toujours) base extérieure donné au signe. [...] Il est malheureux certainement qu'on commence par y mêler comme un élément primordial cette donnée des objets désignés, lesquels n'y forment aucun élément quelconque. » (*ibid.*, pp. 230-231)

Mais il conteste tout autant que les structures de pensée conditionnent la structuration des signes d'une langue :

(15) « Ce qui est faux, c'est de penser qu'il y ait quelque part des formes (existant par elles-mêmes hors de leur emploi) ou quelque part des idées (existant par elles-mêmes hors de leur représentation). » (*ibid.*, p. 31)

En fait la position de Saussure sur ce thème peut être résumée comme suit : - certains soutiennent qu'il existe des « idées » préalables à leur mise en signe, mais en tout état de cause, si c'est le cas, ces idées n'ont rien de linguistique ; - en réalité l'auteur doute, voire conteste, que puissent préexister aux signes de véritables « idées », en tant qu'unités de pensée distinctes,

accessibles et opérationnelles :

(16) « I. Domaine non linguistique de la pensée pure, ou **sans signe vocal, et hors du signe vocal**. C'est dans ce domaine, de quelque science qu'il relève, que doit être reléguée toute espèce de catégorie absolue de l'idée, si on la donne vraiment comme absolue, si on prétend poser par exemple la catégorie soleil ou la catégorie du futur ou celle du substantif *pour autant qu'on les donne comme vraiment absolues et indépendantes des signes vocaux d'une langue, ou des infinies variétés de signes quelconques.* » (*ibid.*, p. 44)

En outre, tout comme les images acoustiques ne s'élaborent que dans leur association aux significations, ces significations elles-mêmes sont des entités psychiques qui ne s'élaborent que dans et par leur association à une image acoustique.

(17) « Psychologiquement, que sont nos idées, abstraction faite de la langue ? Elles n'existent probablement pas, ou sous une forme qu'on peut appeler amorphe. Nous [n']aurions <d'après philosophes et linguistes> probablement <pas> le moyen de distinguer <clairement> deux idées sans le secours de la langue (langue intérieure naturellement). Par conséquent, prise en elle-même, la masse purement conceptuelle de nos idées, la masse dégagée de la langue représente une espèce de nébuleuse informe où l'on ne saurait rien distinguer dès l'origine Aussi donc réciproquement pour la langue, les différentes idées ne représentent rien de préexistant. Il n'y a pas : a) des idées qui seraient toutes établies et toutes distinctes les unes en face des autres, b) des signes pour ces idées. Mais il n'y a rien du tout de distinct dans la pensée avant le signe linguistique. Ceci est le principal. D'un autre côté il vaut la peine de se demander si en face de ce royaume des idées tout à fait confus le royaume du son offrirait d'avance des unités bien distinctes (pris en lui-même en dehors de l'idée). Il n'y a pas non plus dans le son des unités bien distinctes, circonscrites d'avance. C'est entre deux que le fait linguistique se passe. » (Constantin, 2005, p. 285)

Combinée à la précédente, cette analyse conduit à la *désubstantialisation* radicale du signe, et ce sur ses deux versants. Au plan sonore, ce ne sont pas les figures vocales (les sons dans leurs propriétés physiques perceptibles) qui interviennent en tant que tels dans le signe, mais les images acoustiques dégagées de ces figures, et qui sont donc des formes psychiques. Au plan idéal, les significations qui s'articulent à ces images ne sont conditionnées ni par les propriétés des référents mondains, ni par des unités ou opérations de pensée qui préexisteraient à la langue ; ce sont des formes psychiques, mais qui sont particulières ou propres à l'ordre sémiotique.

### 3.3. Le signe comme entité purement processuelle

Les signes n'existent donc qu'en tant qu'union, qu'une *association* de ces deux formes psychiques. Ces formes, dont le substrat est hétérogène (sonore et idéal), deviennent homogènes dans et par cette association ; "homogènes" au sens où elles interagissent et se constituent en une unité duale d'un autre ordre, l'ordre sémiotique précisément. Le signe est donc fondamentalement de l'ordre du *processus*, mais pas d'un processus de mise en correspondance d'entités pré-organisées : il est une sorte de *mécanisme psychique* d'engendrement d'entités significatives, par association :

(18) « II. Domaine *linguistique* de **la pensée qui devient IDÉE DANS LE SIGNE ou de la figure vocale qui devient SIGNE DANS L'IDÉE : ce qui n'est pas deux choses, mais une**, contrairement à la première erreur fondamentale. Il est aussi littéralement vrai de dire que le mot est le signe de l'idée que de dire que l'idée est le signe du mot ; elle l'est à chaque instant, puisqu'il n'est pas possible, même, de fixer et de limiter matériellement un mot dans la phrase sans elle. » (*Ecrits de linguistique générale*, 2002, pp. 44-45)

Le signe est création ou émergence d'un nouvel ordre, qui est une *forme autonome* de ré-exploitation conjointe des deux domaines, un « accouplement » de ceux-ci par-delà leur hétérogénéité constitutive ; il est donc fondamentalement *actif* :

(19) « [...] le langage n'offre sous aucune de ses manifestations une *substance* mais seulement des *actions* combinées ou isolées de forces physiologiques, physiques, mentales [...] » (*ibid.*, p. 197)

Ceci implique que le mode d'existence du signe coïncide avec sa perpétuelle (re)production ; puisque la « 'pensée-son' implique des divisions » qui brisent la continuité amorphe, ce processus de discrétisation même est illimité et potentiellement reproductible à l'infini. Le signe relève d'une « activité incessante » dira Saussure.

### 3.4. Le signe comme phénomène complexe

Saussure introduit cette problématique de la complexité du signe par la métaphore de la constitution de l'air ou de l'eau, comme Vygotski l'avait fait pour introduire à la question de la complexité des unités d'analyse de la psychologie :

(20) « On pourrait comparer l'entité linguistique à un corps chimique composé, ainsi l'eau où il y a de l'hydrogène et de l'oxygène <(H<sub>2</sub>O)>. Sans doute, la chimie si elle sépare les éléments a de l'oxygène et de l'hydrogène mais on reste dans l'ordre chimique. **Au contraire, si on décompose l'eau linguistique <en prenant l'hydrogène ou l'oxygène> on quitte l'ordre linguistique <(on n'a plus d'entité linguistique)>**. (Constantin, 2005, p. 224)

Néanmoins, ce type de comparaison ne fournit pas de modèle ou d'analogie qui serait directement exploitable pour l'ordre des signes. Comme Saussure s'empresse de le souligner, les ordres physique ou chimique *peuvent* comporter (et comportent de fait) aussi bien des entités simples pourvues d'une structuration propre (l'azote, l'oxygène, l'hydrogène) que des entités complexes, issues de la synthèse des premières. Mais précisément, cette différence même met en évidence ce qui constitue l'une des caractéristiques *irréductibles* de l'ordre des signes : celui-ci possède *exclusivement* des entités complexes et n'existe qu'en vertu de cette forme d'organisation. Mais en quoi réside cette complexité ?

Sur le versant sonore, toute forme doit en fait être considérée comme relevant foncièrement d'un *engendrement*, c'est-à-dire comme procédant d'un travail de différenciation *appliqué aux figures vocales*. Plus précisément, la notion de forme a trait à un *processus de mise en contraste* de figures vocales, ou encore à un processus de sélection, d'identification et d'extraction contrastives

d'ensembles de traits, par lesquels ces figures se trouvent effectivement différenciées les unes des autres. A défaut de mise en œuvre de ce processus, la figure vocale demeure ce qu'elle est au plan physique, c'est-à-dire une séquence phonique quelconque ou "vide" ; pour qu'elle puisse devenir une entité d'ordre linguistique, elle doit être investie d'une existence pour et dans la conscience des sujets parlants, c'est-à-dire être ressentie, délimitée ou encore déterminée :

(21) « Une forme est une figure vocale qui **est pour la conscience des sujets parlants déterminée**, c'est-à-dire à la fois **existante et délimitée**. Elle n'est rien de plus ; comme elle n'est rien de moins. Elle n'a pas nécessairement « un sens » précis ; mais elle est **ressentie comme quelque chose qui est ; qui de plus ne serait plus, ou ne serait plus la même chose, si on changeait quoi que ce soit à son exacte configuration.** » (*Ecrits de linguistique générale*, 2002, p. 37)

Dans cette première approche, la notion de forme renvoie donc au *traitement psychique discriminatif des figures vocales*, tel que celui-ci est *réalisé et ressenti par les sujets parlants*. Mais Saussure souligne en outre que ce premier processus de différenciation se réalise conjointement à la différenciation des idées ou du sens ; et que c'est en vertu de ce caractère double de ce premier régime de différenciation que les produits qui en résultent se trouvent potentiellement associables :

(22) « On ne peut pas définir ce qu'est une forme à l'aide de la figure vocale qu'elle représente, – pas davantage à l'aide du sens que contient cette figure vocale. On est obligé de poser comme fait primordial le fait GÉNÉRAL, COMPLEXE et composé de DEUX FAITS NÉGATIFS : de la *différence* générale **des figures vocales** jointe à la *différence* générale **des sens qui s'y peuvent attacher.** » (*ibid.*, p. 29)

La modalité d'existence des signes est dès lors tout à fait particulière, en ce qu'elle est inéluctablement : - *négative*, c'est-à-dire non définissable *a priori* ou en référence à un fondement externe quelconque ; - *corrélative*, au sens où les formes se définissent les unes par rapport aux autres ; - *complexe*, en ce que ni les formes ni les sens n'existent en tant que tels en dehors de leur association :

(23) FORME = Non pas une certaine entité *positive* d'un ordre quelconque, et d'un ordre simple ; mais l'entité à la fois *négative* et *complexe* : résultant (sans aucune espèce de base matérielle) de la *différence* avec d'autres formes combinée avec la *différence* de signification d'autres formes » (*ibid.*, p. 36)

Cette modalité particulière d'individuation réside en d'autres termes dans la *co-détermination des formes et des sens dans leur union* ; ce qui implique que toute délimitation d'entités se réalise exclusivement à *l'intérieur* de l'ordre sémiologique. Dès lors, l'ordre des signes n'est autre que l'espace de co-établissement d'entités complexes, dont l'unité n'est que le produit irréductible de *trois rapports simultanément actifs* : - les rapports différentiels des formes entre elles ; - les rapports tout aussi différentiels des significations entre elles ; - enfin les rapports associatifs entre formes et significations :

(24) « Nous sommes toujours ramené aux **quatre termes irréductibles et aux trois rapports**

**irréductibles** entre eux **ne formant qu'un seul tout pour l'esprit** : (un signe / sa signification) = (un signe / et un autre signe) et de plus = (une signification / une autre signification). [...] Mais en réalité il n'y a dans la langue aucune détermination ni de l'idée ni de la forme ; **il n'y a d'autre détermination que celle de l'idée par la forme et celle de la forme par l'idée**. [...] C'est là ce que nous appelons **le QUATERNION FINAL** et, en considérant les quatre termes dans leurs rapports : le triple rapport irréductible. » (*ibid.*, p. 39)

Ce « quaternion » intégralement psychique, qualifié aussi d'« être quadruple » (*ibid.*, p. 42) faisant néanmoins « un seul tout pour l'esprit » (*ibid.* p. 39), constitue la formulation opérationnelle de la solution alternative qu'oppose Saussure à la dualité traditionnelle « forme *vs* sens ». Et si l'on admet que cet être constitue bien une seule entité, il s'agit alors d'une entité qui comporte, en tant que l'un de ses ingrédients constitutifs, *le mécanisme même qui l'engendre* ; ce qui en fait un être instable par nature, dont les concrétisations demeurent fragiles, voire précaires, dans la mesure où elles ne résultent que de la mobilisation d'éléments de l'entour sémiologique coexistant qui sont tout aussi fragiles.

### 3.5. Le signe comme entité vide

La réflexion qui précède conduit alors à affirmer que le signe est une « essence relative », que *sa réalité est purement relationnelle et oppositive*, ou encore que cette réalité ne relève que de la coexistence et des positions réciproques de formes, de sens, ou de signes dans leur intégralité :

(25) « [...] il n'y a jamais rien qui puisse résider dans *un* terme (par suite directe de ce que les symboles linguistiques sont sans relation avec ce qu'ils doivent désigner), que *a* est impuissant à rien désigner sans le secours de *b*, celui-ci de même sans le secours de *a* ; ou que tous deux ne valent donc que par leur réciproque *différence* ». (*ibid.*, p. 218)

(26) « Il n'y a pas *la* forme et une idée correspondante ; il n'y a pas davantage *la* signification et un signe correspondant. Il y a *des* formes et *des* significations possibles (nullement correspondantes) ; il y a même seulement en réalité des *différences* de formes et des *différences* de significations ; d'autre part chacun de ces ordres de *différences* (par conséquent de choses déjà négatives en elles-mêmes) n'existe comme différences que grâce à l'union avec l'autre. » (*ibid.*, pp. 42-43)

(27) « FORME = Non pas une certaine entité *positive* d'un ordre quelconque, et d'un ordre simple ; mais l'entité à la fois *négative* et *complexe* : résultant (sans aucune espèce de base matérielle) de la *différence* avec d'autres formes COMBINÉE avec la *différence* de signification d'autres formes. » (*ibid.*, p. 36)

Allant jusqu'au bout de son analyse, Saussure en conclura que les signes sont en réalité des *entités vides*, c'est-à-dire des entités dont l'essence même n'est constituée ni par des éléments physiques (les sons ou les objets externes), ni par les opérations cognitives d'un sujet. Les signes ne sont pour lui en définitive que des fantômes, des « bulles de savon » :

(28) « *Aucun signe n'est donc limité dans la somme d'idées positives qu'il est au même moment appelé à concentrer en lui seul* ; [...] et il est donc vain de chercher quelle est la somme des signification d'un mot. » (*ibid.*, p. 78)

(29) « [...] c'est la leçon de tous les jours pour qui étudie de voir que l'association — que nous chérissons parfois — n'est qu'une *bulle de savon*, n'est même pas une bulle de savon, laquelle possède au moins son unité physique et mathématique [...] » (In Turpin, 2003, pp. 387-388)

### 3.6. La positivité des signes (ou leur *valeur*) ne procède que de l'histoire sociale, et les signes sont donc intégralement sociaux

De l'analyse qui précède, Saussure conclut que les signes sont fondés « sur l'*irraison* même », et que l'organisation du système de la langue n'est pas « corrigeable ou dirigeable par la raison humaine » :

(30) « [...] parce qu'en effet rien ne garantit plus depuis le moment où le système de signes appartient à la collectivité que ce soit une raison intérieure, une raison faite à l'image de notre raison individuelle, qui va continuer à gouverner le rapport du signe et de l'idée. **Nous ne savons plus quelle force et quelle loi** (forces et loi ou par quelles lois au pluriel) **vont être mêlées à la vie de ce système de signes**, nous ne pouvons pas le savoir, deviner, avant précisément de les avoir étudiées, observées par une étude profondément différente de celle qui consiste à se représenter les conditions *normales ou purement rationnelles* du signe vis-à-vis de l'idée (selon une mesure rationnelle [...]). » (*Ecrits de linguistique générale*, 2002, p. 289)

a) Mais les signes ont néanmoins une positivité, ou acquièrent une valeur, et cette valeur ne découle que de l'usage social ; elle n'est que le produit des échanges ou des interactions sociales, en synchronie (dans les échanges quotidiens) ou en diachronie :

(31) **Un mot n'existe véritablement, et à quelque point de vue qu'on se place, que par la sanction qu'il reçoit de moment en moment de ceux qui l'emploient.** » (*ibid.*, p. 83)

(32) « — L'*échange*, comme seule expression véritable de tout mouvement dans la langue. [...] Dans l'*échange* l'unité est établie par la valeur idéale, au nom de laquelle on déclare adéquats entre eux des objets matériels qui peuvent d'ailleurs être absolument dissemblables et de plus constamment renouvelés chacun dans leur substance. C'est exactement le caractère de tous les « changements » ou « mouvements » linguistiques. » (*ibid.*, p. 60)

Le signe, et la langue comme système de signes sont donc fondamentalement sociaux, ou encore le social est le lieu, ou le milieu, de réalisation de la langue : **le social est une propriété interne de la langue**, et c'est même sa seule propriété positive.

(33) « [...] si ce milieu de la collectivité change toute chose pour le système de signes, ce milieu est aussi dès l'origine le véritable endroit de développement où tend dès sa naissance un système de signes : un système de signes proprement fait pour la collectivité comme le vaisseau pour la mer. **Il n'est fait que pour s'entendre entre plusieurs ou beaucoup et non pour s'entendre à soi seul.** C'est pourquoi à aucun moment, contrairement à l'apparence, **le phénomène sémiologique quel qu'il soit ne laisse hors de lui-même l'élément de la collectivité sociale** : la collectivité sociale et ses lois est un de ses éléments *internes* et non *externes*, tel est notre point de vue. » (*ibid.*, pp. 289-290)

b) Où s'opèrent ces échanges, cette activité sociale littéralement fabricatrice des significations ? La réponse de Saussure, totalement éludée par les rédacteurs du *CLG*, était pourtant claire ; ces



échanges ne s'effectuent que dans l'activité de parole, c'est-à-dire dans le discours.

(34) « **Toutes les modifications**, soit phonétiques, soit grammaticales (analogiques) **se font exclusivement dans le discursif**. Il n'y a aucun moment où le sujet soumette à une révision le trésor mental de la langue qu'il a en lui, et crée à tête reposée des formes nouvelles [ ] qu'il se propose, (promet) de « placer » dans son prochain discours. **Toute innovation** arrive par improvisation, en parlant, et pénètre de là soit dans le trésor intime de l'auditeur ou celui de l'orateur, mais **se produit donc à propos du langage discursif**. » (*ibid.*, p. 95)

(35) « Seulement, la linguistique, j'ose le dire, est vaste. Notamment elle comporte deux parties : l'une qui est plus près de **la langue, dépôt passif**, l'autre qui est plus près de **la parole, force active et origine véritable des phénomènes** qui s'aperçoivent ensuite peu à peu dans l'autre moitié du langage. » (*ibid.*, p. 273)

(36) « Du côté interne (sphère langue), il n'y a jamais préméditation, ni même de méditation, de réflexion sur les formes, en dehors de l'acte, de l'occasion de la parole, sauf une activité inconsciente presque passive, en tout cas non créatrice : l'activité de classement. Si **tout ce qui se produit de nouveau s'est créé à l'occasion du discours**, c'est dire en même temps que c'est du côté social du langage que tout se passe. » (In Engler, 1968, p. 384)

c) Et c'est la socialité de la langue qui explique son mouvement, son dynamisme permanent : les langues changent parce que leurs ingrédients ne sont que de nature socio-historique, quand bien même ils sont ancrés dans le psychisme des individus :

(37) « [...] le phénomène socio-historique [...] entraîne le tourbillon des signes dans la colonne verticale et défend alors d'en faire ni un phénomène *fixe* ni un langage *conventionnel*, puisqu'il est le résultat incessant de l'action sociale, imposé hors de tout choix. » (*Ecrits de linguistique générale*, 2002, p. 102).

#### 4. En guise de synthèse

La conception vygotkienne du développement humain peut être résumée et symbolisée par la formule célèbre de *Pensée et langage* :

(38) « La pensée de l'enfant [...] dépend dans son développement de la maîtrise des moyens sociaux de la pensée, c'est-à-dire dépend du langage. [Avec l'émergence de la pensée verbale], **le type même de développement s'est modifié, passant du biologique au sociohistorique** » (*Pensée et langage*, 1997, p. 187)

Ce que nous avons voulu démontrer dans cette contribution, c'est que l'analyse saussurienne du signe fournit tous les éléments nécessaires pour comprendre comment s'effectue cette transformation du biologique au sociohistorique. Selon cette analyse en effet, les processus mobilisés dans la confection des signes sont des processus psychiques *élémentaires* (la construction d'images mentales, la différenciation et l'association) dont Piaget (1992) a clairement démontré qu'ils étaient communs à l'humain et aux animaux. Les processus de construction des signes se situent donc dans le prolongement direct des processus communs au vivant : c'est l'aspect de *continuité* découlant de l'évolution des espèces. Mais une fois constitués, ces signes transforment

radicalement le psychisme hérité et le font passer, selon la formule de Vygotski, du régime bio-comportemental au régime sociohistorique : c'est l'aspect de la *rupture* fondatrice de la spécificité humaine.

Le signe est donc *le lieu même de la continuité-rupture*, et l'élément déterminant de la rupture tient au fait que les processus biologiquement hérités s'appliquent non plus seulement à des objets physiques comme dans le monde animal, mais à des *objets sociaux*, à ces « petits bruits émis par la bouche » (selon l'expression de Bloomfield, (1933/1970), qui sont conventionnellement associés à des dimensions de l'activité humaine. En d'autres termes, les signes ont cette propriété radicalement nouvelle dans l'évolution de constituer des *crystallisations psychiques d'unités d'échange social* et c'est cette socialisation du psychisme qui est fondatrice de l'humain.

## Bibliographie

- Bloomfield, L. (1970). *Le langage*. Paris : Payot [Edition originale : 1933].
- Bronckart, J.-P. (1997). Action, discours et rationalisation; l'hypothèse développementale de Vygotsky revisitée. In Ch. Moro, B. Schneuwly, & M. Brossart, (Ed.), *Outils et signes. Perspectives actuelles de la théorie de Vygotsky* (pp. 199-221). Berne : P. Lang.
- Bronckart, J.-P., Bulea, E. & Bota, C. (2010). *Le projet de Ferdinand de Saussure*. Genève : Droz.
- Bruner, J.S. (1973). *Beyond the Information Given*. New-York : Norton.
- Bulea, E. (2005). Est-ce ainsi que les signes vivent ? *Texto ! [en ligne], Volume X, N° 4* (Disponible sur <http://www.revue-texto.net/>).
- Bulea, E. (2006). La nature dynamique des faits langagiers, ou de la « vie » chez Ferdinand de Saussure. *Cahiers Ferdinand de Saussure*, 59, 5-19.
- Bulea, E. (2010). Le défi épistémologique de la dynamique temporalisée. In J.-P. Bronckart, E. Bulea & C. Bota, *Le projet de Ferdinand de Saussure* (pp. 213-235). Genève : Droz.
- Constantin, E. (2005). Linguistique générale. Cours de M. le professeur F. de Saussure. *Cahiers Ferdinand de Saussure*, 58, 71-289.
- Engler, R. (1968). *Cours de linguistique générale, tome I*. Wiesbaden : Harrassowitz.
- Engler, R. (1974). *Cours de linguistique générale, tome II, appendice*. Wiesbaden : Harrassowitz.
- Komatsu, E. & Wolf, G. (1996). *Premier cours de linguistique générale (1907) d'après les cahiers d'Albert Riedlinger*. Oxford/Tokyo : Pergamon.
- Levy-Bruhl, L. (1927). *L'âme primitive*. Paris : Alcan.
- Piaget, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- Piaget, J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

- Piaget, J. (1992). *Biologie et connaissance*. Paris : Delachaux et Niestlé.
- Saussure, F. (de) (1922). *Mémoire sur le système primitif des voyelles dans les langues indo-européennes*. In Ch. Bally & L. Gauthier (Ed.). *Recueil des publications scientifiques de Ferdinand de Saussure*. Genève : Sonor [Edition originale : 1879]
- Saussure, F. (de) (1975). *Cours de linguistique générale*. Paris : Payot. [Edition originale : 1916]
- Saussure, F. (de) (2002). *Ecrits de linguistique générale*. Paris : Gallimard.
- Schneuwly, B. (1988). *Le langage écrit chez l'enfant: la production des textes informatifs et argumentatifs*. Paris : Delachaux et Niestlé.
- Turpin, B. (2003). La légende de Sigfrid et l'histoire burgonde. *Cahiers de l'Herne – Saussure*, 76, 351-429.
- Vygotski, L.S. (1997). *Pensée et langage*. Paris : La Dispute [Edition originale : 1934].

Toujours dans l'objectif annoncé dès Eléments 0 de «créer un espace de débat ouvert», le choix de ces extraits part de l'idée qu'ils peuvent inviter à considérer que des comportements d'élèves individuels similaires sont davantage engendrés par des caractéristiques communes à la majorité de leurs vécus scolaires collectifs, que par des types de qualités individuelles dont ils seraient dotés.

Cette inversion des éclairages peut alors, selon nous, suggérer d'interroger certaines habitudes qui amènent plus de réflexion pour adapter l'enseignement à des élèves figurés, que pour mettre en évidence diverses façons de penser ce qui est enseigné.

• • • • •

L'Erreur n'est pas une faute ; l'Harmattan 2008  
*Extrait du chapitre 5*

### IC. Des écarts essentiels

Si pour enseigné et enseignant (ou pour petit enfant et adulte, ou ...) les significations se révélaient toujours en coïncidence, non seulement au niveau des mots, mais aussi au niveau des mouvements de la pensée, les savoirs seraient transmissibles prêts à l'emploi et chacun sait aujourd'hui que ce n'est pas le cas.

Surtout il n'y aurait aucune évolution possible des capacités de penser qui seraient efficaces d'emblée et fixées une fois pour toutes.

En effet, par exemple, c'est parce que ses parents et lui se comprennent dès ses premiers mots que le petit enfant peut apprendre à parler, au fur et à mesure qu'il sera amené à emprunter non seulement les mots, mais aussi la façon et l'occasion de les dire, pour faire face à l'expérience du manque d'efficacité de ses paroles.

Pour l'enfant scolarisé, ses expériences du manque d'efficacité de ses manières de penser sont, *en tendance*, plus ou moins systématiquement dirigées. En fait, un tel *écart fonctionnel* satisfait à la définition par VYGOTSKI d'une zone de proche développement.

#### Une remarque :

sous la locution *zone de proche développement*, est souvent entendu un aspect morphologique du développement intellectuel, voire quasi topologique ; ceci peut découler de sa traduction par "zone proximale de développement", formulation qui fait porter l'accent logique sur le mot "zone" (une étendue), plutôt que sur le mot "développement" (une dynamique) ; mais peut-être aussi, cette acception s'adapte-t-elle au flou qui entoure la notion d'âge mental. Ne pas différencier les deux expressions s'accorde en tout cas, aux habitudes déjà mises en cause, de ramener le développement à des étapes de renouvellement de l'outillage de la pensée, à ne prendre en compte que son aspect structurel.

D'après la lecture ici proposée, parler de *zone de proche développement* fait moins référence à un état général de développement qu'à un cinétisme local du système pensée-langage ; cinétisme dont la fonction serait d'assurer l'évolution vers davantage d'abstraction de *la mesure de généralité d'un concept* en voie de complexification systémique.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Cf. ci-dessus, chapitre 5, point I.A. et chapitre 6, point IV.

VYGOTSKI y a insisté :

*... du point de vue psychologique le développement des concepts et celui des significations des mots sont un seul et même processus qui ne diffèrent que par la dénomination.*<sup>2</sup>

### **Auparavant il avait affirmé :**

*Paulhan a rendu un grand service à l'analyse psychologique du langage en introduisant une distinction entre le sens d'un mot et sa signification. Le sens comme il l'a montré, représente l'ensemble de tous les faits psychologiques que le mot fait apparaître dans notre conscience. Le sens d'un mot est ainsi une formation toujours dynamique, fluctuante, complexe, qui comporte plusieurs zones de stabilité différentes. La signification n'est qu'une des zones du sens que le mot acquiert dans un certain contexte verbal, mais (c'est une zone) stable (...).*

*La signification (...) reste stable en dépit de toutes les modifications qui affectent selon le contexte le sens du mot.(...) Le mot pris isolément dans le dictionnaire (a une signification qui) n'est rien de plus qu'une potentialité qui se réalise dans le langage vivant, où elle n'est qu'une pierre dans l'édifice du sens.*<sup>3</sup>

Une **zone de proche développement** peut s'imaginer comme un champ de forces porté par le méridien d'appartenance<sup>4</sup> d'un concept ; concept dont elle lie le hier et le demain. Elle manifeste le présent des modifications qui adviennent dans **la nature du potentiel fonctionnel du concept** : autres rapports de l'objet au mot, autres rapports de généralité, **autres possibilités opératoires de la pensée.**<sup>5</sup>

*On peut dire que la force des **concepts scientifiques** se manifeste dans la sphère qui est entièrement définie par les propriétés supérieures des concepts, **le caractère conscient et volontaire** ; (...)*

*Les **concepts spontanés** commencent à se développer dans la sphère du concret et de l'empirique et évoluent vers les propriétés supérieures des concepts, (tandis que les concepts scientifiques poursuivent leur développement) en germant vers le bas, dans la sphère de l'expérience personnelle et du concret.*

*La véritable nature du lien qui unit dans leur développement ces deux lignes de sens opposés (...) c'est celui qui unit la zone de proche développement et le niveau de développement présent.*

*(Non seulement)*

*le développement des concepts scientifiques implique un certain niveau de concepts spontanés, niveau auquel le caractère conscient et le caractère volontaire apparaissent dans la zone de proche développement, mais encore (...) les concepts scientifiques transforment les concepts spontanés et les élèvent à un niveau supérieur en leur constituant une zone de proche développement ; ...*

*... L'APPRENTISSAGE N'EST VALABLE QUE S'IL DEVANCE LE DÉVELOPPEMENT. Il suscite alors, fait naître toute une série de fonctions (...) qui sont dans la **zone de proche développement** (...) C'est là*

---

<sup>2</sup> VYGOTSKI ; 1985 ; *Pensée et langage*, page 226.

<sup>3</sup> VYGOTSKI ; 1985 ; *Ibidem*, page 370.

<sup>4</sup> Cf. point I. A. ci-dessus.

<sup>5</sup> Cf. point IV. du chapitre 6.

*ce qui différencie l'apprentissage qui a pour but le développement intégral et harmonieux de l'enfant et l'apprentissage de savoir-faire techniques spécialisés qui n'exercent aucune influence essentielle sur le développement.*<sup>6</sup>

Cette compréhension de la zone de proche développement éclaire la contradiction dans le projet d'un enseignement efficace au moyen de réductions des assises théoriques et de banalisations langagières.<sup>7</sup>

## ***Extrait du chapitre 8***

### II. Pour chaque élève une double histoire scolaire des notions abordées spécifiquement en classe

Nous allons maintenant engager notre schéma d'intelligibilité dans une démarche explicative de freins au **développement fonctionnel** de la pensée des élèves, à partir de la sous-estimation des caractères historiques des significations à la fois au plan de la cognition individuelle et au plan des acceptions scolaires.

#### **A. Le fil ontologique cassé de significations chosifiées**

○ **Nombre de ...** ⇒ **nombre** ⇒ **forme numérique** : des filiations scolairement variables.

- Nombre de ... est **un concept quotidien saturé de concret**.

Des correspondances termes à termes bijectives questionnent l'enfant à répétition dès son plus jeune âge :

- assiettes, verres, couverts, chaises, personnes autour de la table familiale,
- chaussures, pieds, chaussettes, mains, bras, manches, jambes, jambières, col, cou, ceinture taille, etc., selon diverses combinaisons liant gestes ou vêtements ;
- distributions/partages, et toutes sortes d'affectations d'objets aux membres d'un groupe.

C'est de la succession des situations qui vérifient ou pas la qualité bijective des relations, que, par exemple, les notions de autant de et de combien? émergent progressivement.

Se profile alors implicitement le concept de cardinal d'un ensemble, dans les mailles d'une pensée consciente engageant et engagée par **le langage de la perception et de la désignation**. Dans les mêmes temps arrivent aussi des actions de classements qui font advenir les expressions nombre de ..., avant, après, au-dessus, au-dessous, en plus, en moins, ... dans lesquelles s'enracine, implicitement, le registre ordinal de la signification des nombres. Le préconcept arrive à la phase

---

<sup>6</sup> VYGOTSKI ; 1985, *Pensée et langage*, chapitre 6, page 160.

<sup>7</sup> Nous y reviendrons diversement, mais notamment au chapitre 8.

du rôle médiateur de la comptine *dans les mots de laquelle va se réaliser l'idée de* NOMBRE DE ..., la phase où la signification de ces mots prend son essor.

Selon notre approche cette phase est particulièrement sensible à la variété dans les sollicitations langagières de l'environnement et donc de l'école.

• **Si la représentation qui prévaut alors**

part de l'idée qu'un élève qui répond correctement à ce qui lui est demandé, c'est qu'il est à même de bien faire fonctionner ses schèmes de pensée adéquatement mobilisés, elle conduit à proposer aux élèves des comptages concrets à répétition, comprenant cela comme un objectif opérationnel aux résultats observables et évaluables ; dans ce cas les attentes de l'enseignant(e) telles qu'elles «interceptent» l'esprit de l'écolier font devoir à celui-ci d'arriver au bon nombre ; on est dans le domaine de la performance, l'élève doit être entraîné à mettre en oeuvre les capacités ad hoc, dans la mesure où il(elle) en est pourvu(e).

Selon nos interprétations, les dynamiques d'une situation scolaire de ce type mettent en perspective *la juxtaposition* des notions de NOMBRE et de NOMBRE DE... qui deviennent empiriquement interchangeables, mais pas celle d'un apprentissage du concept de NOMBRE.

En effet, si on revient dans la cohérence de notre schéma explicatif, pour que s'organise une *zone de proche développement* polarisée par *le concept quotidien de* NOMBRE DE ... déjà spontanément recatégorisable, et par *le concept attracteur-social* de NOMBRE abstrait, il faut que celui-ci soit engagé par une expérience mentale qui donne à le rencontrer en implication dans une activité initiée et partagée du dehors, activité qui lui «dessinera» une désignation le distinguant de son «ancêtre» sur leur méridien d'abstraction.<sup>8</sup>

Une telle expérience mentale se réalise grâce à la déstabilisation intellectuelle que notre schéma d'intelligibilité assimile à *une brisure spontanée de symétrie de l'activité de la conscience* ; elle «s'épanouit» par une prise de conscience négociée en *langage pour soi* dont le cinétisme agite la manière de creuset fugace avec lequel *une zone de proche développement* peut faire image.

Sous ces auspices, dans une même activité, jeux de mise en correspondance ou autre, la systématisation du nouveau concept a pour substrat *une mobilité langagière* présidant à divers rapprochements et à de réelles discussions par groupes ou classe entière :

- nombres de ... et nombres figurés,
- langage numérique, écriture des nombres et système de numération,
- langues numériques parlée et écrite,

---

<sup>8</sup> Sur la *Terre des concepts*, entre le pôle de l'idée la plus concrète et le pôle de l'idée la plus abstraite de la réalité convoquée par un concept donné, cf. thèse **chapitre 5, point I. C.** et **point IV du chapitre 6.**

- compositions additives et soustractives,<sup>9</sup>

ce dans des domaines variés, et selon des suites affranchies de tout ordonnancement linéaire convenu.

On retrouve ainsi le processus d'une croissance de l'arbre conceptuel médiée par les fonctions langagières,<sup>10</sup> à la fois suivant les racines dans l'expérience du concret au coeur de divers domaines de réalité, et suivant ses frondaisons dans l'abstraction/généralisation appropriée à la culture disciplinaire.

- **Si la représentation qui prévaut**

suppose l'obligation d'une décomposition en éléments simples des compétences qui s'acquièrent au fur et à mesure qu'elles sont montrées, cela entraîne par exemple à enseigner la numération en s'arrêtant à vingt ; il y a alors grand risque que la prise de conscience de la loi-moteur et du principe de position des chiffres ne puisse advenir.

L'élève peut être à même de compter avec les mots qu'il faut et avoir conscience qu'il compte, mais ne pas avoir **conscience de son activité consciente** : la généralisation du processus de formation des nombres ne peut pas se poser si l'attention porte sur une chaîne relationnelle trop restreinte où ce qu'il y a à abstraire ne se distingue pas.

C'est ainsi que l'élève peut répondre dix à bon escient et donner une écriture numérique correcte en pensant «*en chiffres, dix s'écrit avec un 1 et un 0 après*», autrement dit sans recourir à une idée mathématique. **Les fonctions langagières** sont alors, tendanciellement, drainées par la sollicitation enseignante en communication d'accompagnement des conduites, ***l'activité de la conscience restant symétrique***.

---

<sup>9</sup> Un enfant de quatre-cinq ans, scolarisé, est déjà capable, hors milieu scolaire, d'énoncer en jouant sur ses doigts et alors que les adultes autour ne s'occupent pas de lui : *Grand-mère, trois plus quatre ça fait sept ?*

S'il se trouve que l'école lui propose à cette période de son cheminement, des activités de comptage *sèches* à répétition, il se peut que le fil de l'intérêt *s'use* ; par ailleurs il est reconnu que *compter sur les doigts* correspond le plus souvent à ***un passage à l'abstraction*** qui n'a pas à être régenté de l'extérieur.

<sup>10</sup> En cohérence avec la ligne d'intelligibilité à l'épreuve.



○ **Système de numération** ⇒ **comptage** ⇒ **calcul** ⇒ **opérations : des filiations scolairement variables.**

• La signification de nombre décimal se présente le plus souvent comme un complexe-collection.<sup>11</sup>

Illustration *concrète*.

Classe de troisième normale ; milieu socioprofessionnel familial majoritaire aisé et plutôt intellectuel.

On donne<sup>12</sup>

On sait que  $a$  est un nombre décimal; parmi les nombres qui suivent, donner ceux qui à coup sûr sont différents de  $a$ .

$$\frac{13}{3}; (3,6)^2; (-53)^3; \frac{32}{8}; \frac{7}{3}; 3,14; \frac{49}{7}; \pi; \sqrt{3}; \frac{22}{7}; \frac{333}{111}$$

↪ sur 24 élèves,

- individuellement, un seul fournit la réponse exacte ;
- neuf participent à donner la réponse exacte en groupes ;
- onze, individuellement, ne proposent que les entiers ;
- quatorze participent à une réponse collective qui ne comporte que les entiers.

Pour ces élèves de troisième, un nombre décimal est identifié par sa graphie chiffrée, c'est un nombre à virgule.

L'exemple est renouvelable à l'envi ; cela tient, pour beaucoup, à l'histoire scolaire individuelle façonnée par des vécus scolaires collectifs ayant les mêmes caractéristiques.

- **Si la représentation qui prévaut** considère qu'aider à apprendre c'est, entre autre, simplifier la tâche en supprimant des intermédiaires fastidieux ou déroutants, de telle façon que l'élève puisse contrôler lui-même sa démarche et vérifier s'il "colle" bien aux exigences qui ont été fixées (réduction des degrés de liberté)<sup>13</sup>

---

<sup>11</sup> Soit :

*une généralisation des choses sur la base de leur participation à une opération pratique unique, sur la base de leur collaboration fonctionnelle*

VYGOTSKI, (1934) ; 1985 ; page 167.

<sup>12</sup> Extrait du *matériau* présenté **point I. A. du chapitre 2.**

<sup>13</sup> Cité d'un document d'accompagnement d'un stage intitulé *JOURNÉE PÉDAGOGIQUE : MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE*, émanant d'une Inspection Pédagogique Régionale en mathématiques ; *l'italique y est d'origine*, comme guillemets et parenthèses, *ce qui vaut, selon nous, forme d'insistance.*

... il est alors judicieux de proposer à des élèves qui découvrent le système de numération, des exercices comme ceux qui, relevés fortuitement, viennent ci-après.

14 **Les nombres de dix à vingt**

① Groupe par dix et complète les tableaux.

Two 2x2 grids labeled 'd' and 'u' are provided for grouping the objects.

② Complète les tableaux.

③ Observe l'exemple. Complète.

<table border="1"><tr><td>d</td><td>u</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>	d	u	1	3		$13 = 10 + 3$
d	u					
1	3					
<table border="1"><tr><td>d</td><td>u</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	d	u	1	2		$\text{---} = \text{---} + \text{---}$
d	u					
1	2					
<table border="1"><tr><td>d</td><td>u</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td></tr></table>	d	u	1	6		$\text{---} = \text{---} + \text{---}$
d	u					
1	6					
<table border="1"><tr><td>d</td><td>u</td></tr><tr><td>1</td><td>9</td></tr></table>	d	u	1	9		$\text{---} = \text{---} + \text{---}$
d	u					
1	9					
<table border="1"><tr><td>d</td><td>u</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr></table>	d	u	1	5		$\text{---} = \text{---} + \text{---}$
d	u					
1	5					

Il est clair que les degrés de liberté sont réduits à l'extrême : il est peu probable que l'élève qui observe bien ne réponde pas ce qui est attendu, surtout avec une assistance orale.

Mais si cela arrive ? Imaginera-t-on que cet(te) élève a peut-être pensé, par exemple,

• au premier exercice,

... groupe par dix ??? des groupes de dix, il n'y en qu'un, ... j'peux pas en faire plus; ... sais pas faire;

d'autant qu'il est habitué à ce que la classe se range par deux, ou se mette en équipes de quatre, etc.

<sup>14</sup> Math et calcul, C.P ; 1989, HACHETTE.

• au deuxième exercice,

... pourquoi “dizaine” c’est rouge et “unité” bleu ? ... pourquoi faut commencer par les rouges ?

En maternelle il(elle) excellait à colorier des pavages en respectant des rythmes, par exemple.

• au troisième exercice,

... pourquoi des fois c’est un “+” pour séparer les bleus et les rouges ?

À gauche, le d et le u sont séparés par un trait ; dans les tableaux ces signes sont placés séparément dans les colonnes, ...

On dira peut-être quelque chose comme

- pauvre petit(e), avec sa situation familiale ... ;
- oh il est gentil, mais il ne comprend pas vite !
- celui-là ? Il est bien vif quand il veut, mais il s’en fiche de l’école ;
- il ne veut pas travailler,<sup>15</sup> en ajoutant peut-être : sa sœur était pareille.

Et ceux qui ont bien répondu ? Quelles capacités ont-ils, à coup sûr, mises en œuvre ?

Sans nul doute l’aptitude à compléter des mini-tableaux après avoir cherché et réussi à deviner ce que l’on attendait de lui (d’elle).<sup>16</sup>

Mais il n’est certainement pas exclu que nombre reste amalgamé à nombre de ... et que *l’écriture numérique* s’apparente à un étiquetage : maître et élève se comprenant au niveau des signes tracés, des mots prononcés, sans nécessité d’une élaboration partagée en *pensée mathématique*.

Ici encore il apparaît, sous le jour du *schéma d’intelligibilité* construit, que les apprentissages envisagés en conformité avec le type de représentations distingué, se montrent à la remorque de la perception et de la communication.

Le concept de système de numération n’est pas mis en perspective, n’est pas mis en puissance d’attracteur pour que se constitue une *zone de proche développement* pour le pré-concept de nombre de ... ; le concept d’unité est plaqué au registre d’une place dans un tableau, même pas à celui d’un rang pour chiffres d’un nombre.

Or si le concept d’unité simple n’advient pas comme unité de comptage et comme opposable à des unités pas simples mais aussi à compter, et qui pourront être, par la suite, fractionnaires ou encore facteur commun aux termes d’une somme,<sup>17</sup> les filiations entre les opérations risquent de manquer de rigueur.

Le *système décimal de numération* organise l’activité de comptage selon les prémisses des quatre opérations.

Sa maîtrise engendre littéralement le concept de relation numérique.

---

<sup>15</sup> Il est remarquable qu’au verbe **étudier** on semble fréquemment préférer **travailler**. Pourtant, on peut penser que : **travailler** c’est apporter **d’abord à la société**, alors qu’**étudier** c’est apporter **d’abord à soi**.

<sup>16</sup> L’idée que *le bon élève* est celui qui *suit toujours bien les consignes* est commune, et de plus les énoncés d’exercices sont couramment assimilés à des *consignes*, voire **sont** des consignes.

<sup>17</sup> Voir, par exemple, ci-dessus, l’encart dans le **point I. B. du chapitre 3**.

Son emprisonnement dès l'abord par la grille d'un tableau, chosifie les entiers dans leur enveloppe chiffrée.

La restriction voulue des degrés de liberté dans l'exécution d'une tâche vaut, pour l'élève, appel à penser vite et comme il faut en suivant des signaux langagiers aisément repérables ; le mode langagier qui s'active est essentiellement celui de la communication spontanée et des savoir-faire machinaux.

Les découpages et simplifications d'une notion proposée à l'étude sont en disjonction avec l'histoire propre à chaque élève concernant cette notion, en conséquence :

◆ La structuration d'*une zone de proche développement* entre ce qui est acquis et ce qui est à acquérir se retrouve hors propos et les contenus d'apprentissage sont dépouillés de contexte disciplinaire.

◆ L'expérience mentale se réalise principalement dans le mode langagier de la pensée linéaire, étant donné que ce qui pourrait être déroutant, disciplinairement parlant, est élagué, aucune rupture de symétrie dans l'activité de la conscience n'est provoquée sur la dimension des savoirs en jeu.<sup>18</sup>

Ce qui n'a cependant pas, en général, d'impact négatif si l'élève a abordé la leçon en sachant tout déjà ... essentiellement.

Le fait que, heureusement, des élèves "réussissent" dans le système tel qu'il est, ne saurait venir en contre nos propositions qui contiennent tout à fait l'advenir d'une telle réalité ; ce qu'elles tendent à montrer, c'est que, pour certains élèves *considérés à un moment* donné, le développement, au présent comme au passé, n'est pas et n'a pas été précisément en mesure de progresser à la faveur de leur vécu scolaire.<sup>19</sup>

---

<sup>18</sup> Si déséquilibre il y a, il intervient plutôt sur la dimension affective et de l'image de soi, ce qui est susceptible de court-circuiter l'activité rationnelle, d'autant qu'existent des confluences avec les retombées des modes d'évaluation par notation.

<sup>19</sup> 1° Tel quel, le système assure, en tendance, la **fonction économique-politico-sociale** attendue,

2° Le **développement peut s'y retrouver pris à contre-pied**, ce qui peut conduire à penser, par exemple, que des élèves sont *intellectuellement précoces*, aussi bien que certains *manquent de maturité*, des interprétations qui ne trouvent pas d'à-propos dans la cohérence de nos propositions.





Titre	<b>Éléments 2</b>
Auteurs	Groupe Premier Cycle de l'IREM de Toulouse
Public	Professeurs de collège et de lycée et professeurs des écoles
Date	Septembre 2013
Mots clefs	Vygotski, Saussure, nombres, opérations, calcul, priorités opératoires, grandeurs mesurables, activité-classe, erreurs, Pensée et Langage, égalité, concepts quotidiens/ concepts scientifiques
Résumé	<p>« Éléments 0 » inaugurerait une série de brochures « périodiques » (à périodicité variable) intitulées « Éléments n ». Voici donc « Éléments 2 ».</p> <p>On y trouvera d'abord deux articles du groupe : l'un est un compte rendu d'une suite d'activités menées en classe de sixième allant des grandeurs aux nombres ; l'autre est une réflexion sur les priorités opératoires en classe de cinquième.</p> <p>Enfin, on pourra lire un article de Jean-Paul Bronckart et Ecaterina Bulea de la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de Genève, intitulé « Les apports de la sémiologie saussurienne aux thèses développementales de Vygotski ».</p>
Brochure	<p><b>n° 183</b></p> <p>N° ISBN : 978-2-918013-06-8 N° EAN : 9782918013068</p>
Édition	<p><b>IREM de Toulouse</b> <i>Université Paul Sabatier</i> Bâtiment 1 R 2 31062 TOULOUSE cedex 9 mél : <a href="mailto:irem@cict.fr">irem@cict.fr</a></p>