ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ ET MODÉLISATION ALGÉBRIQUE

Gisèle Cirade & Yves Matheron
IREM & IUFM d'Aix-Marseille

Avertissement au lecteur

L'analyse des organisations mathématique et didactique ainsi que l'évaluation de l'organisation mathématique que le lecteur trouvera ici ne suivent pas la présentation qui a été adoptée lors des séances de visite d'Atelier et de TD de l'Université d'été. Dans un souci de clarté, nous avons préféré présenter tout d'abord les analyses faites à partir du compte rendu, puis celles relatives aux traces écrites de l'activité d'une classe. Ces analyses s'appuient sur les notions théoriques présentées dans le cours donné par Yves Chevallard, qu'il faut donc avoir au préalable étudié.

Le lecteur qui désire tirer profit des analyses qui suivent doit savoir qu'il est nécessaire de s'engager dans un travail exigeant, la simple lecture du corpus et de son analyse ne nous paraissant pas suffisante pour une bonne compréhension des phénomènes. Nous proposons le mode de travail suivant :

- Prendre connaissance du corpus.
- Prendre connaissance de l'analyse des organisations mathématique et didactique, ainsi que de l'évaluation de l'organisation mathématique, celles-ci ne pouvant prendre leur sens que par référence au corpus considéré.
- Relire le corpus à la lumière des éléments d'analyse qui sont proposés.

Pour chacune des parties analysées, figurent trois paragraphes :

A – Organisation mathématique.
B – Organisation didactique.
C – Évaluation de l'organisation mathématique.

Nous avons choisi d'illustrer notre propos par des extraits du compte rendu d'observation et des traces écrites de l'activité d'une classe. Ceux-ci figurent en retrait et en caractères plus petits.

Dans les pages qui suivent figurent les éléments essentiels du corpus (pages 218 à 249) sur lequel nous avons travaillé lors de l'Université d'été. On trouvera ensuite les analyses portant sur le compte rendu d'observation et sur les traces écrites de l'activité d'une classe.

COMPTE RENDU D'OBSERVATION EN CLASSE DE QUATRIEME

Structure et contenu de la séance

- Relevé des devoirs faits à la maison.
- Correction des exercices faits à la maison :
  1. Résoudre l'équation : $-8(3-x)-(7-8x)=4(5x+9)$.
  2. Résoudre l'équation : $\frac{x}{3}-1=x-\frac{6}{13}-\left(\frac{-2x}{13}\right)$.
- Cours : III – Résolution de problèmes
- Distribution d'une fiche d'exercices, dont le premier est à faire pour la séance suivante.

On rencontre ici les deux types de tâches T et T' suivants :
T : Résoudre une équation du premier degré.
T' : Résoudre un problème du premier degré.

Étude du type de tâches T (première partie du compte rendu, pages 218, 219 et 220)

A – Organisation mathématique

Type de tâches étudié
T : Résoudre une équation du premier degré.
Les exercices constituent deux tâches t^1 et t^2 qui relèvent de ce type de tâches :
t^1 : Résoudre l'équation : $-8(3-x)-(7-8x)=4(5x+9)$.
t^2 : Résoudre l'équation : $\frac{x}{3}-1=x-\frac{6}{13}-\left(\frac{-2x}{13}\right)$.
On peut remarquer que dans l'exercice 1 les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$, alors que dans l'exercice 2 ils appartiennent à $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Technique d'étude utilisée
La technique utilisée pour étudier le type de tâches T induit un découpage en sous-tâches qui relèvent des types de tâches suivants :
T_1 : Développer une expression algébrique.
T_2 : Effectuer les produits.
T_3 : Transposer les termes.
T_4 : Réduire chacun des membres.
T_5 : Résoudre une équation de la forme $ax = b$.
Ce découpage peut sembler arbitraire. Il ne faut cependant pas oublier qu'il s'agit là d'un modèle : les sous-tâches considérées sont d'une certaine dimension et ce découpage permet de mettre correctement en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer.

Remarque concernant le type d'organisation mathématique
La décomposition de la tâche t considérée en sous-tâches t_1, …, t_5 peut conduire à considérer une organisation mathématique *régionale*, l'élément fixe étant la théorie Θ : « Les équations algébriques à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ». C'est une modélisation possible, mais il semble plus pertinent d'en rester au stade d'une organisation mathématique *ponctuelle*, les sous-tâches indiquées ci-dessus apparaissant comme secondes par rapport au problème considéré.

L'élément théorique Θ : « Les équations algébriques à coefficients dans **Q** », valable pour tous les types de tâches T, T_1, …, T_5 ne sera plus précisé par la suite.

Type de tâches T_1 : Développer une expression algébrique.
- Il s'agit ici de supprimer les parenthèses dans chacun des membres de l'équation :

> P : « Bon, on avait vu que la première étape c'était d'enlever les parenthèses… » [page 218]

- La technique utilisée s'appuie sur les résultats technologiques que sont les règles usuelles de calcul dans **Q**, en particulier la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Type de tâches T_2 : Effectuer les produits
- Il s'agit de calcul de *produits* – comme $8\times 3=24$ et $4\times 5x=20x$ – visant à supprimer le signe « × » dans les deux membres de l'équation :

> S'adressant ensuite à la classe : « On peut commencer par faire les calculs, non ? 8 fois 3 par exemple… On va pas laisser 8 fois 3. » Une élève : « Non, 24, on marque –24 » [page 218]

- Éléments technologiques : produit de deux nombres dans **Q** et associativité de la multiplication.

Type de tâches T_3 : Transposer les termes
- La tâche considérée consiste à transposer les termes en x à gauche et les termes constants à droite :

> P : « Maintenant on fait les opérations qu'on peut faire… » Sous l'œil vigilant de P, qui la conseille pas à pas, l'élève rassemble les termes en x dans le membre de gauche et les termes indépendants à droite. [page 219]

- Élément technologique : tout élément de **Q** est régulier pour l'addition, $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$.

Type de tâches T_4 : Réduire chacun des membres
- L'étape suivante consiste à obtenir une équation de la forme $ax=b$; à droite, il s'agit d'un simple calcul numérique :

> P : « Donc $8x$ plus $8x$ ça fait ?… » L'élève : « $16x$ » P : « Moins $20x$? Combien j'en ai ? » […]
> Toujours étroitement contrôlée par P, l'élève au tableau écrit : « $-4x = 61$ » [page 219]

- Élément technologique : la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Type de tâches T_5 : Résoudre une équation de la forme $ax=b$
- La technique n'est pas détaillée. On passe directement de $-4x=61$ à $x=-\frac{61}{4}$. On pourrait décomposer cette sous-tâche en de nouvelles sous-tâches, en introduisant une étape supplémentaire comme par exemple $-4x=61 \Leftrightarrow x=\frac{61}{-4} \Leftrightarrow x=-\frac{61}{4}$. Cependant cela n'apparaît pas pertinent ici : la technique d'étude semble routinisée.
- Élément technologique : « Si $a\neq 0$, l'équation $ax=b$ admet une solution et une seule : $x=b/a$ ».

Quelques remarques concernant la technique d'étude utilisée et sa technologie
Une élève propose une petite variation qui consiste à effectuer, dans l'ordre, T_1 / T_2 / T_4 / T_3 / T_4 / T_5 (on réduit chacun des membres avant la transposition des termes en x et des termes constants). La professeur valide la réponse de cette élève :

> « Oui, voilà. Elle, elle a préféré regrouper. Si vous voulez commencer ici [elle montre la troisième ligne] , c'est bon aussi. Si vous voulez écrire $16x - 31 =$…, c'est pareil ! » [page 219]

Par ailleurs, dans la discussion qui s'engage avec la classe lors de la correction du 2e exercice, la professeur mentionne :

> « […] Donc pour résoudre, il faut se ramener à la forme qu'on connaît, c'est-à-dire ce truc-là [elle pointe une expression sur le cahier de l'élève], $ax+b = cx+d$, et pour se ramener à ce truc-là tu es

obligé de développer. OK ? » [page 6]
Il s'agit ici de considérations *technologiques*, la professeur tenant un discours sur la technique.

Quelques remarques concernant la résolution du 2^e^ exercice

Il s'agit ici de résoudre l'équation $\frac{x}{3}-1=x-\frac{6}{13}-\left(\frac{-2x}{13}\right)$ pour laquelle les coefficients sont rationnels non entiers. On trouve d'autres sous-tâches correspondant aux types de tâches suivants :
T_6 : Réduire des fractions au même dénominateur.
T_7 : Calculer sur des fractions.

B – Organisation didactique

La liste des exemples proposés pour illustrer les diverses notions abordées dans l'organisation didactique n'est pas exhaustive ; le lecteur pourra en rechercher d'autres par lui-même
Les moments de l'étude étant imbriqués les uns dans les autres, il nous a paru plus pertinent de les présenter de façon synthétique et de les illustrer dans chaque cas par des extraits significatifs. Le lecteur pourra les replacer par lui-même dans la chronologie de ce compte rendu.

Moments de l'étude

Lors d'une correction d'exercices pour laquelle un élève passe au tableau, on pourrait s'attendre à se trouver principalement dans le moment de l'évaluation. En fait, et comme on va le voir ci-dessous, dans ce compte rendu on se trouve essentiellement dans le cadre de deux autres moments : celui de l'institutionnalisation et celui du travail de la technique.

Moment du travail de la technique

On peut distinguer d'une part le travail de la technique relative au type de tâches T, qui consiste en un certain découpage en sous-types de tâches T_i, et le travail de certaines des techniques τ_i relatives à ces sous-types de tâches. On peut noter par exemple le travail de la technique τ_1 relative au développement d'expressions algébriques :

> L'élève s'exécute et écrit : « $-8\times 3-8\times x-7+8x=4\times 5x+4\times 9$ » [page 218]

La correction de l'exercice constitue aussi un moyen de retravailler des techniques qui sont considérées officiellement comme routinisées, mais restent problématiques pour certains élèves (règle des signes de la multiplication) :

> « [P] prend la craie et remplace $-8x$ par $+8x$... » [page 219]

Moment de l'institutionnalisation

Lors de la correction d'exercices, on retrouve fréquemment ce cinquième moment. Peuvent être institutionnalisées des techniques ou des éléments technologiques. C'est le cas dans ce compte rendu duquel nous extrayons quelques exemples significatifs :

> « Bon, on avait vu que la première étape, c'était d'enlever les parenthèses. » [page 218]
> « [...] D'abord il faut commencer par développer ! » [page 218]
> « [...] Quand on résout une équation, on cherche le x qui va marcher. Si tu dis directement qu'il est égal à 1, ça va pas marcher. D'accord ? Donc pour résoudre, il faut se ramener à la forme qu'on connaît, c'est-à-dire à ce truc-là [elle pointe une expression sur le cahier de l'élève], $ax+b=cx+d$, et pour se ramener à ce truc-là tu es obligé de développer. OK ? » [page 219]

Moment de l'évaluation

On peut trouver quelques *traces* d'évaluation dans le repérage des erreurs, aussi bien de la part du professeur :

P intervient : « Déjà, là, il devait y avoir un signe. » [page 218]

que des élèves :

De sa place une élève signale une erreur dans le calcul proposé au tableau. [page 219]

Tâches problématiques / routinières

Le compte rendu permet de repérer, au travers des erreurs commises par des élèves ou des questions posées, quelques tâches qui sont problématiques et d'autres qui sont routinières. Par exemple :

La technique correspondant au découpage de T en sous-tâches reste problématique pour l'élève qui passe au tableau lors de la correction du premier exercice :

> P : « Bon, on avait vu que la première étape c'était d'enlever les parenthèses… » À l'élève au tableau : « Là je ne comprends pas du tout ce que tu fais ! D'abord il faut commencer par développer ! » [page 218].

La professeur est obligé de montrer de manière ostensive à l'élève passée au tableau quels sont les gestes à accomplir pour effectuer le développement ; l'élève parvient alors à l'effectuer :

> « D'abord il faut commencer par développer ! » L'élève au tableau semble ne pas avoir bien compris. P commente tout en poursuivant la vérification des cahiers : « -8 fois 3… Tu développes ? ! » L'élève s'exécute et écrit : « $-8 \times 3 - 8 \times x - 7 + 8x = 4 \times 5x + 4 \times 9$ » [page 218].

Cependant la désignation des ostensifs à mettre en œuvre, comme « Tu développes », semble rester problématique pour cette élève. Par contre le développement, une fois la reconnaissance effectuée sous la direction du professeur qui montre le geste, semble, à l'erreur de signe près, être une tâche routinière pour cette élève. (page 218).

Pour une majorité d'élèves, le calcul sur les fractions semble encore problématique :

> Les étapes suivantes (réduction au même dénominateur, addition dans chacun des membres, division d'un quotient par un autre) sont toutes conduites par P en collaboration avec quelques élèves de la classe qui répondent sporadiquement à ses questions. Le rôle de l'élève est pratiquement réduit à écrire ce que le professeur lui dit. [page 220]

Certaines tâches sont problématiques sinon pour la classe, du moins pour un élève particulier :

> « Madame, mais moi quand je me trompe c'est sur les signes. Des fois j'oublie. » [page 220].

Topos

La place laissée aux élèves par l'organisation didactique est changeante selon les tâches effectuées. Par exemple, lors de la correction du premier exercice, les élèves interviennent pour corriger des erreurs commises par celui qui passe au tableau et poser des questions au professeur (pages 218 et 219), alors que dans le deuxième exercice leur topos est plus réduit :

> Les étapes suivantes (réduction au même dénominateur, addition dans chacun des membres, division d'un quotient par un autre) sont toutes conduites par P en collaboration avec quelques élèves de la classe qui répondent sporadiquement à ses questions. Le rôle de l'élève est pratiquement réduit à écrire ce que le professeur lui dit. [page 220]

Cependant à la fin de la correction de ce deuxième exercice, une occasion d'apprentissage a été rencontrée par au moins une élève, celle qui est passée au tableau, qui identifie une des causes de ses erreurs :

> « Madame, mais moi quand je me trompe c'est sur les signes. Des fois j'oublie. Y a pas une règle pour pas oublier ? » P : « Les amis de tes ennemis, les ennemis de tes amis, les ennemis de tes ennemis… » L'élève : « Ah, comme l'autre jour, comme on a fait… » [page 220]

Toujours dans le cadre de son topos défini par le contrat didactique traditionnel qui a été mis en place dans la classe, l'élève qui passe au tableau doit résoudre l'exercice, alors que la professeur a pour rôle de vérifier la validité de ce qui est proposé par l'élève :

> L'élève au tableau semble ne pas avoir bien compris. P commente tout en poursuivant la vérification des cahiers : « -8 fois 3… Tu développes ? ! » L'élève s'exécute et écrit : « $-8 \times 3 - 8 \times x - 7 + 8x = 4 \times 5x + 4 \times 9$ » [page 218]

C – Évaluation de l'organisation mathématique

Évaluation du type de tâches T

Ce type de tâches est identifié en compréhension par des expressions telles que :

> « Quand on résout une équation, on cherche le x qui va marcher. » [page 219]

L'identification en extension correspond à la mise en œuvre de la technique d'étude. L'évaluation de l'organisation mathématique ponctuelle relative au type de tâches T va maintenant s'effectuer à travers l'évaluation des différentes composantes techniques et technologiques ainsi que des différents sous-types de tâches qui structurent la technique τ.

Évaluation de la technique τ d'étude de T

La structuration de cette technique d'étude en sous-types de tâches T_i fournit un découpage qui permet d'aborder la tâche T et que les élèves pourront remettre en œuvre ultérieurement. Cette appropriation est déjà réalisée pour au moins une élève de la classe ce qui est attesté par la mention d'un autre ordonnancement des sous-types de tâches T_i pour accomplir T :

> « Oui, voilà. Elle, elle a préféré regrouper.[...] » [page 219]

C'est une technique tout à fait classique dont la répétition (les deux exercices corrigés ainsi que la résolution du problème de la page 223 font appel à cette technique) peut être interprétée à l'intérieur du contrat didactique comme attestant sa portée et sa fiabilité. Cependant le découpage selon la proposition faite par une élève page 219 (T_1 / T_2 / T_4 / T_3 / T_4 / T_5 : on réduit chacun des membres avant la transposition des termes en x et des termes constants) permet d'assurer une plus grande fiabilité.

Évaluation de la technologie θ justifiant la technique τ

La technologie est juste évoquée par l'intermédiaire d'une interaction avec l'élève envoyée au tableau :

> P indique que résoudre une équation, c'est chercher le x qui « marche » [...] [page 219]

Ce qui amène par la suite la professeur à tenir un discours sur la nécessité de mettre en œuvre la technique élaborée :

> « D'accord ? Donc pour résoudre, il faut se ramener à la forme que l'on connaît, c'est-à-dire à ce truc-là [elle pointe une expression sur le cahier de l'élève], $ax+b=cx+d$, [...] » [page 219]

Évaluation du type de tâches T_1 : Développer une expression algébrique

Il s'agit visiblement d'un type de tâches bien identifié, que la professeur désigne – en compréhension – par des expressions telles que :

> « Bon, on avait vu que la première étape c'était d'enlever les parenthèses... » [page 218]
> « D'abord il faut commencer par développer ! » [page 218]

Lorsque cette désignation ne suffit pas comme on peut le vérifier pour une élève qui passe au tableau :

> « D'abord il faut commencer par développer ! » L'élève au tableau semble ne pas avoir bien compris. [page 218]

la professeur est amenée à donner en acte une définition en extension de ce type de tâches :

> « -8 fois 3... Tu développes ! » [page 218]

ce qui permet à l'élève de reconnaître le type de tâches dans lequel elle doit s'engager :

> L'élève s'exécute et écrit : « $-8\times 3-8\times x-7+8x=4\times 5x+4\times 9$ » [page 5]

Remarque :

Qu'est-ce que *développer* une expression algébrique ? Développe-t-on seulement les produits ou des expressions plus compliquées (combinaisons linéaires de produits) ? Considère-t-on qu'effectuer la transformation suivante : $-(3x)=-3x$ est un développement ? Dans le compte rendu, deux expressions sont employées pour exprimer l'idée de développement :

> « Bon, on avait vu que la première étape c'était *d'enlever les parenthèses...* »
> « [...]. D'abord il faut commencer par *développer* ! ».

Par ailleurs, la plupart des manuels de Quatrième font la distinction entre développer des expressions telles que $5(x + 3)$ et supprimer des parenthèses comme dans $-(-3x) = 3x$; ne pas faire cette distinction permet peut-être de mieux identifier ce type de tâches.

Évaluation du type de tâches T_2 : Effectuer les produits

Ce type de tâches est identifié par des expressions telles que :

> « Maintenant tu fais les calculs que tu peux faire ! » [page 218]
> « On peut commencer par faire les calculs, non ? 8 fois 3 par exemple… On va pas laisser 8 fois 3 » [page 218]

Il permet de passer de l'équation $-8\times 3-8\times x-7+8x=4\times 5x+4\times 9$ à l'équation $-24+8x-7+8x=20x+36$. Mais la définition de ce type de tâches renvoie à un implicite dont le partage avec les élèves est vérifié à travers l'exécution correcte des instructions données. Il n'est donc pas clairement identifié en compréhension.

Par ailleurs une dernière interaction entre la professeur et l'élève qui est passée au tableau indique que pour cette élève au moins la tâche qui consiste à effectuer le produit de deux nombres de signes quelconques n'est pas encore routinisée.

La technique τ_2 fait appel au produit de nombres relatifs, entiers ou fractionnaires, dont la mise en place a été assurée antérieurement dans la classe.

Le calcul des produits semble être considéré par la professeur comme mettant en œuvre des techniques routinisées, ce qui explique l'absence de discours du professeur ou de l'élève lorsqu'elles sont mises en œuvre. Cependant la réaction d'un élève qui interpelle la professeur :

> « Madame, mais moi quand je me trompe c'est sur les signes. Des fois j'oublie. Y'a pas une règle pour pas oublier ? » [page 220]

montre que pour cet élève cette technique reste problématique. La professeur est alors amenée à redonner une règle mnémotechnique :

> « Les amis de tes ennemis, les amis de tes ennemis, les ennemis de tes ennemis… » [page 220]

Évaluation du type de tâches T_3 : Transposer les termes

Ce type de tâches existe cependant il est mal identifié, aussi bien en extension

> « Maintenant on fait les opérations qu'on peut faire… »

qu'en compréhension : le terme de *transposition* n'est pas utilisé. Tout est donc dans l'implicite et renvoie au contrat didactique qui veut qu'à cette étape de la résolution, on accomplisse ce type de tâches.

Évaluation du type de tâches T_4 : Réduire chacun des membres

Ce sous-type de tâches n'est pas repéré par une expression particulière ; la professeur guide seulement les calculs de l'élève pas à pas :

> « Donc $8x$ plus $8x$ ça fait ?… » [page 219]

on trouve aussi :

> « elle a préféré *regrouper* » [page 218]

Le terme de *réduction* n'est jamais prononcé. Comme pour le type de tâches T_3, ce type de tâches n'est pas bien identifié.

Évaluation du type de tâches T_5 : Résoudre une équation de la forme $ax = b$

Ce type de tâches existe et on peut le repérer comme par exemple dans la résolution du premier exercice :

> Toujours étroitement contrôlée par P, l'élève au tableau écrit : « $-4x = 61$ » « $x = -\frac{61}{4}$ » [page 219]

On le retrouve à deux reprises pages 220 et 223 et il semble que la professeur le considère comme routinisée, ce qui justifierait alors qu'il ne soit pas désigné explicitement.

Le deuxième exercice corrigé fait intervenir deux nouveaux types de tâches relatifs au calcul dans **Q**.

Évaluation du type de tâches T_6 : Réduire des fractions au même dénominateur
Évaluation du type de tâches T_7 : Calculer sur des fractions
Les techniques correspondantes semblent ne pas être encore routinisées pour l'ensemble de la classe :

> Les étapes suivantes (réduction au même dénominateur, addition dans chacun des membres, division d'un quotient par un autre) sont toutes conduites par P en collaboration avec quelques élèves de la classe qui répondent sporadiquement à ses questions. Le rôle de l'élève au tableau est pratiquement réduit à écrire ce que le professeur lui dit : [...]

Il ne semble pas pertinent d'introduire à ce stade une telle difficulté

Étude du type de tâches T' (deuxième partie du compte rendu, pages 221, 222 et 223)

A – <u>Organisation mathématique</u>

Type de tâches étudié
T' : Résoudre un problème du premier degré
La *tâche* t' de type T' à accomplir ici correspond à la question suivante qui est inscrite au tableau par la professeur :

> « Aïcha et Arthur vont acheter des chocolats. Aïcha achète 100 grammes de truffes et pour 27 francs de fondants. Arthur achète 200 grammes de truffes et pour 15 francs de fondants. Ils paient tous les deux le même prix. Quel est le prix du kilogramme de truffes ? »

Technique d'étude utilisée
La *technique* τ mise en place correspond à la réalisation de trois sous-tâches qui renvoient aux types de tâches suivants :
T'_1 : Mettre en équation.
T'_2 : Résoudre l'équation.
T'_3 : Interpréter le résultat obtenu.
On remarque que T'_2 est le type de tâches étudié précédemment à travers les deux premiers exercices : $T'_2 = T$.

Type de tâches T'_1 : Mettre en équation
La technique associée à cette tâche peut se décrire de la manière suivante :
- Noter x le prix du kilo de truffes.
- Exprimer en fonction de x les prix de 100g et 200g de truffes ; calculer ce que chacun a payé ; exprimer par une égalité le fait que les deux enfants ont payé la même somme.

L'extrait suivant donne un aperçu de la démarche adoptée ici :

> P : « Ouais, combien ils ont payé chacun... C'est bien ça qu'il va falloir faire. Bon, ce qu'on cherche, c'est le prix d'un kilo de truffes ». Une élève : « x ». P : « Voilà. D'accord ? On va poser x égale le prix du kilo de truffes, parce qu'on va pas se payer « prix du kilo de truffes » tout le temps ! Et une fois qu'on aura x, comme dit Roland, on va exprimer avec des x ce qu'a payé chacun. Donc deuxième étape... » Elle écrit : « Poser une inconnue $\rightarrow$ Soit x le prix du kilo de truffes » P : « Deuxième étape : c'est ce qui disait Roland, on traduit le français en mathématiques ». Elle écrit : « Traduire l'énoncé par une équation $\rightarrow$ Aïcha a payé : $27 + x$ » [page 222]

Type de tâches T'_2 : Résoudre l'équation
La résolution renvoie au type de tâches étudié dans la première partie de la séance. Il s'agit ici de travailler le modèle algébrique : le travail du modèle produit des connaissances sur le système.

Type de tâches T'_3 : Interpréter le résultat obtenu

Cela revient à examiner la cohérence des résultats obtenus avec la situation étudiée :

> P : « Voilà, c'est bien. La réponse est 120 francs. À ce niveau, il faut penser à vérifier que ce résultat est valide. C'est-à-dire que si on trouve –10 par exemple... On va pas nous payer pour prendre du chocolat... D'accord ? Si on avait trouvé 3000 francs, 3000 francs le kilo de truffes, ou 2 francs le kilo de truffes, bon ! Donc on vérifie si c'est à peu près cohérent. Donc là... » Elle écrit au tableau : « Vérifier la cohérence du résultat »

B – <u>Organisation didactique</u>

Moments de l'étude

Dans le cadre de cette deuxième partie du compte rendu, on va rencontrer quatre des six moments de l'étude : le moment du travail de la technique et celui de l'évaluation n'apparaîtront pas ici.

<u>Moment de la première rencontre</u>

Tout d'abord, P indique que l'on va résoudre des problèmes et renforce cet engagement en notant au tableau :

> « Les mathématiques permettent de résoudre de nombreux problèmes de la vie courante ou liés à d'autres matières » [page 221]

Puis les élèves découvrent un spécimen de ce type de tâches qui va engager l'étude (cf. les trois premiers paragraphes de la page 221). Peu après, la professeur insiste sur la problématicité de la tâche en mentionnant :

> « Vu comme ça, trouver la solution sans rien faire, ça paraît pas évident ! » [page 221]

<u>Moment de l'exploration du type de tâches T' et de l'élaboration d'une technique τ'</u>

On peut noter qu'à plusieurs reprises les élèves s'engagent dans l'exploration du type de tâches et proposent des embryons de technique :

Tout d'abord certains élèves s'y engagent pour démarrer la résolution du problème posé :

> Réaction de quelques élèves, qui veulent faire des propositions de combinaison des nombres entre eux. [page 221]

Ensuite, on retrouve ce moment pour un élève :

> L'élève propose alors un début de raisonnement sur les achats respectifs d'Aïcha et d'Arthur. Il s'oriente vers une soustraction (27-15), mais sa difficulté à aboutir joint au peu de crédit que semble accorder P à sa méthode, lui imposent rapidement silence. [page 221]

Enfin, on le retrouve (premier paragraphe de la page 222) lorsque les élèves font plusieurs propositions pour aborder la résolution du problème, ainsi qu'au milieu de cette page :

> « Soit y, 100 grammes... » [page 222]

Parallèlement, la professeur propose une technique d'étude de ce type de tâches, en notant les différentes étapes à suivre dans la partie gauche du tableau.

<u>Moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique</u>

La professeur commence par justifier la nécessité de l'existence d'une technique pour aborder ce type de tâches, ce qui constitue un embryon d'environnement technologique :

> « D'accord ? Si on le prend comme ça, rien qu'en le regardant, on va avoir du mal ! Première étape, on lit l'énoncé [...] » [page 221]

Plus loin, la professeur justifie une des étapes du raisonnement :

> « On va poser x égale le prix du kilo de truffes, parce qu'on va pas se payer "prix du kilo de truffes" tout le temps ! » [page 222].

<u>Moment de l'institutionnalisation</u>

Lors du dialogue avec la classe, la professeur distingue parmi les différentes réponses des élèves celles qu'elle retient et les note alors sur le tableau de gauche. Cette manière de faire contribue à fixer les éléments qui entreront de manière définitive dans l'organisation mathématique. Ceux-ci sont notés sur le cahier de cours, ce qui permet aux élèves de savoir ce qu'ils auront à connaître. Ces moments d'institutionnalisation sont repérables par des phrases, qui sont notées au tableau, telles que :

> « Pour aborder un problème, il faut procéder par étapes »
> « Poser une inconnue »

Topos

Comme dans la première partie de la séance, le topos de l'élève varie suivant les moments de l'étude. Par exemple, à l'issue de la première rencontre certains élèves se lancent dans l'élaboration d'une technique (relative au type de tâches T'_1) :

> Réaction de quelques élèves, qui veulent faire des propositions de combinaison des nombres entre eux.
> P les ignore et poursuit : [...] [page 221]

Leurs possibilités d'initiative sont alors très faibles. Mais par la suite, une discussion s'établit qui laisse aux élèves plus de place. La professeur leur donne l'autorisation de s'engager dans la recherche :

> P : « Oui, mais là on va le faire ensemble. Alors, première étape... Ce serait quoi ? » [page 221]

Les élèves effectuent diverses propositions :

> « On va au magasin et on regarde le prix ! » [page 221]
> Une élève propose alors : « 100 grammes et 27 francs égale 200 grammes et 15 francs. Après on résout. » [page 222]

Celles-ci sont ou non validées par la professeur :

> P n'entend pas cette proposition ou l'ignore. [page 221]
> P réagit : « Tu additionnes des grammes et des francs ! » [page 222]

C – <u>Évaluation de l'organisation mathématique</u>

Évaluation du type de tâches T'

Ce type de tâches est identifié en compréhension dès le début de la deuxième partie du cours :

> « Allez, grand 3, résolution de problèmes ! » [page 221]
> « Allez, tout ce qu'on a fait là, c'était pour réussir à résoudre des problèmes [...] » [page 221]

Les protestations des élèves montrent qu'ils ont identifié le genre de tâches qu'ils auront à accomplir !

Évaluation de la technique τ' d'étude de T'

Comme pour la tâche T, c'est la structuration de la technique d'étude en sous-types de tâches T'_i qui permet d'aborder la tâche T'. Ce découpage classique et recommandé par le programme officiel fournit une technique d'étude pertinente pour ce type de problèmes.

Évaluation de la technologie θ' justifiant la technique τ'

La *technologie* θ justifiant cette technique τ est ici absente. Cette technologie (discours sur la technique, justification de la technique) pourrait être nourrie des questions suivantes :

- Pourquoi procède-t-on ainsi ?
- Pourquoi cette méthode permet-elle d'obtenir le résultat ?
- Pourquoi n'emploie-t-on pas un modèle arithmétique ? On peut objecter que par l'algèbre, on trouve le résultat, mais on ne comprend pas pourquoi.
- Pourquoi emploie-t-on un modèle algébrique ? Une réponse pourrait être : dans le cas d'un problème avec paramètres(s), le modèle arithmétique est insuffisant alors que le modèle algébrique, lui, donne une formule en fonction des paramètres, et fournit ainsi un programme de calcul.
- Pourquoi n'accepte-t-on pas la démarche proposée par un élève ?

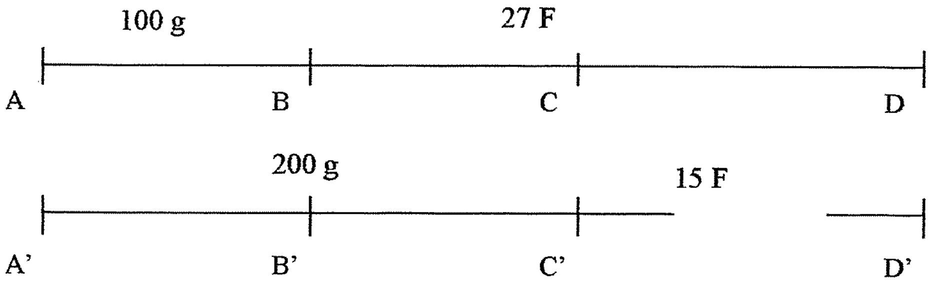
> « On va au magasin et on regarde le prix » [page 221]

La réponse à cette dernière question réside dans l'efficacité des mathématiques qui montrent qu'il est inutile de retourner au magasin pour avoir le prix : on peut l'obtenir sans cela.

Quelques remarques concernant le type de modélisation.
Ici, la professeur impose la modélisation algébrique, alors qu'il aurait été possible de résoudre cette situation autrement. Le choix du type de modèles (arithmétique, algébrique ou autre) n'est pas abordé explicitement dans la classe :

P fait comprendre qu'elle attend une équation pour résoudre ce problème [page 222]

Voici quelques modélisations possibles :
- Modélisation arithmétique : « Arthur achète 100 grammes de truffes en plus et pour 12 francs de fondants en moins par rapport à Aïcha. Par conséquent, 100 grammes de truffes valent 12 francs, et 1 kilogramme de truffes vaut 120 francs. ».
- Modélisation segmentaire (ces modèles ont en général une durée de vie très brève).



À deux segments de même longueur sont associés sur ce modèle segmentaire des grandeurs égales. Les segments [BC] et [B'C'] représentent respectivement (27-15)F et (200–100)g. On obtient donc l'égalité suivante entre grandeurs : 100g = 12F, ce qui donne le résultat.

- Modélisation en termes de grandeurs.
On considère ici deux *grandeurs* définies à partir de la quantité de truffes achetées : d'une part la *masse* de truffes, d'autre part le *prix* payé. La masse de truffes sera exprimée en fonction de la grandeur g, représentant un gramme de truffes ; le prix des truffes sera exprimé en fonction de la grandeur F, représentant un franc. La masse de truffes étant proportionnelle au prix payé, on obtient le prix d'un gramme (resp. d'un hectogramme ou d'un kilogramme) de truffes en utilisant la relation trouvée entre g (resp. 100g ou 1000g) et F.
$200g - 100g = 27F - 15F$, donc $100g = 12F$, donc $1kg = 1000g = 10\times100g = 10\times12F = 120F$.

<u>Remarque</u> : il faut noter que la distinction entre le modèle et le système n'est pas bien perçue par un des élèves :

« Ici on a 15 francs et on en prend 27. C'est impossible ! » [page 221]

Cet élève travaille sur le système et non pas sur le modèle.

Évaluation du type de tâches T'_1 : Mettre en équation
Le problème du choix de l'inconnue n'est pas réellement abordé. La professeur propose de poser : « Soit x le prix du kilogramme de truffes » uniquement au vu de la question à laquelle il faut répondre : « Quel est le prix du kilogramme de truffes ? ». Or il est ici plus judicieux de choisir pour x le prix d'un hectogramme de truffes.

Évaluation du type de tâches T'_2 : Résoudre l'équation
Ce type de tâches T'_2 a déjà été étudié dans la première partie du compte rendu ($T'_2 = T$).

Évaluation du type de tâches T'_3 : Interpréter le résultat obtenu
Ce type de tâche est bien identifié par la professeur qui à la fois tient un discours sur sa nécessité

« [...] À ce niveau, il faut penser à vérifier que ce résultat est valide. C'est-à-dire que si on trouve −10 par exemple... On va pas nous payer pour prendre du chocolat... D'accord ? Si on avait trouvé 3000 francs, 3000 francs le kilo de truffes ou 2 francs le kilo de truffes, bon ! Donc on vérifie si c'est à peu près cohérent. [...] » [page 223]

et la renforce en notant au tableau :

"Vérifier la cohérence du résultat" [page 223]

Ici la technique n'est pas explicite, elle s'appuie sur un « bon sens » qui est sensé être partagé avec les élèves.

Compléments : tâches génériques

Nous avons recensé quelques tâches génériques, qui ne sont donc pas spécifiques des types de tâches étudiés. La liste ci-dessous fournit des repères pour les caractériser.

« Donc vous *sortez ou l'exercice ou le carnet* [de liaison], comme d'habitude ! » [page 218]

P *circule et contrôle les cahiers* tout en demandant : « [...] » [page 218]

P poursuit sa *tournée de vérification* des travaux. [page 218]

Une autre élève est alors *envoyée au tableau*. [page 218]

P termine son tour de classe et vient à nouveau *aider l'élève au tableau*. [page 218]

Une autre *élève la sollicite* : « [...] » [page 219].

Les étapes suivantes [...] sont toutes conduites par P *en collaboration* avec quelques élèves de la classe qui répondent sporadiquement à ses questions. [page 220]

Au tableau P *crée une séparation verticale* et *note en titre* de chacune des parties ainsi déterminées ce qu'elle représente. Certains élèves demandent s'il faut recopier cette mention. P ne répond que par un sourire entendu. [page 220]

C'est une tâche que P voudrait générique, mais qui n'a pas encore été identifiée comme telle par certains élèves.

P distribue pour terminer une fiche d'exercices en annonçant que chacun des problèmes proposés est faisable en employant la technique donnée au cours de la séance. Ce travail est à commencer tout de suite et à terminer chez soi. [...] P annonce le travail à faire [...] rappel, jeudi il y a interrogation écrite ! [fin de la page 223]

C'est un dispositif didactique générique.

ETUDE DE TRACES ECRITES DE L'ACTIVITE D'UNE CLASSE

Dans ces actes, pour des raisons de place, nous n'avons gardé de ces traces écrites que les documents proposés par le professeur aux élèves, ainsi que le cours pris par un élève ; les autres documents de cet élève ne seront pas étudiés ici.
Dans ce qui suit, on étudiera les organisations mathématiques et didactiques relatives aux types de tâches abordés ; l'évaluation des organisations mathématiques sera laissée à la charge du lecteur.
Les transitions didactiques ménagées en début d'étude, ainsi que les tests 7α, 7β et 7χ seront étudiés séparément des types de tâches rencontrées dans ce corpus. Le devoir donné à la maison et le contrôle ne seront pas examinés dans le cadre de ces actes.

Structure et contenu de la séquence – du 20 décembre au 30 janvier (page 224)

Le professeur a consacré 11 heures de travail à ce thème. Au cours de cette période, les élèves ont pu faire : un test d'entrée dans l'étude du thème (15 min), 55 exercices, trois tests courts – de 10 à 15 min – répartis sur la période d'étude, un devoir à la maison ainsi qu'un contrôle d'une heure.
On peut noter que le professeur apporte une certaine attention au travail donné à la maison. Le type d'exercices donnés a déjà été abordé en classe. S'y ajoutent presque toujours des indications (cf. 5 janvier, 9 janvier, 16 janvier, 19 janvier).
L'organisation mathématique est structurée autour des trois types de tâches suivants :
T_1 : Mettre en équation un problème.
T_2 : Résoudre une équation du premier degré à une inconnue.
T_3 : Résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.
Cette structure apparaît clairement à travers le cours pris par l'élève, pages 246 à 249.

Nous étudions tout d'abord les transitions didactiques, sans discriminer les types de tâches auxquels elles se rapportent.

Transition didactique (pages 226, 227 et 228)

Les élèves ont déjà rencontré les trois types de tâches indiqués ci-dessus dans les classes précédentes du collège ; il s'agit donc en Quatrième d'une reprise et d'un approfondissement de l'étude du thème qui nécessite qu'une transition didactique soit ménagée. Celle-ci est assurée d'abord par un test d'entrée suivi, pour certains élèves, d'exercices d'entraînement faisant fonction de remédiation. Vient ensuite un travail effectué en classe entière le 5 janvier, lors de la première séance de l'étude : il consiste à diriger dans le cadre du système didactique principal, un *travail transitionnel spécifique* sur ce thème.

A – <u>Organisation mathématique</u>

Test d'entrée
D'une durée de 15 minutes, il comporte trois exercices qui correspondent aux types de tâches suivants :
- Résolution d'équations du type $a + x = b$ ou $ax = b$.
- Dans un problème, savoir exprimer certaines grandeurs à l'aide d'une expression littérale utilisant une inconnue.

<u>Premier exercice</u> : on retrouve ici des types de tâches du programme de Cinquième en vigueur jusqu'en 1996-1997 : « Résoudre une équation à coefficients numériques du type : $a + x = b$,

où a et b sont des nombres décimaux relatifs, ou $ax = b$, où a et b sont des nombres décimaux positifs. ». Différents cas de figures sont proposés, qui couvrent bien le programme de Cinquième. Il est à noter l'emploi de lettres différentes pour désigner l'inconnue (t, z, t, d, e, x).

Deuxième exercice : il s'agit ici d'une sous-tâche qui apparaît lors de la modélisation d'une situation : « Traduire un énoncé par une expression littérale ». On retrouve l'utilisation de lettres différentes (x, y) pour désigner l'inconnue. L'équation à obtenir est du type indiquée ci-dessus, à savoir $a + x = b$ ou $ax = b$.

Exercices d'entraînement

Ce travail de remédiation est proposé en travail personnel aux élèves ayant échoué sur le type de tâches « Traduire un énoncé par une expression littérale ».

La première partie de ce travail reprend le type de tâches travaillé dans le deuxième exercice du test d'entrée. On note toujours l'emploi de lettres différentes pour désigner l'inconnue.

La deuxième partie de ce travail, intitulé « Passage d'un langage à l'autre », est relatif à un deuxième type de tâches, décomposé lui-même en deux sous-types de tâches :

- Traduire un énoncé par une expression littérale comportant deux inconnues.
- Interpréter en langage « habituel » une expression littérale comportant deux inconnues.

Mise en équation d'un problème (1)

Il s'agit toujours du même type de tâches, T_1, la nouveauté résidant dans le type d'équations que l'on obtient. Dans le cadre du programme de Cinquième, on trouve le type de tâches suivant « Mettre en équation un problème dont la résolution conduit à une équation à coefficient numériques de l'un des types précédents » (i.e. $a + x = b$ ou $ax = b$).

Il ne s'agit pas ici d'une reprise de ce type de tâches, mais de l'étude d'un nouveau type de tâches, la différence résidant dans le *type* de l'équation à résoudre. En effet, en Quatrième il s'agit de « mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue » (cf. programmes officiels).

La technique utilisée consiste à choisir une lettre pour désigner une des grandeurs inconnues, puis à traduire le problème par une équation. La deuxième partie de la page 228 est relative au type de tâches T'_1 « Associer un problème et une équation ».

B – Organisation didactique

Test d'entrée

Ce test a été donné le 20 décembre 1997 alors que l'étude du thème ne débute que le 5 janvier 1998. Il permet à chaque élève de reconnaître les savoir-faire qui lui seront nécessaires pour la suite de l'étude et d'évaluer s'il les maîtrise ou non.

Exercices d'entraînement

Ce travail de remédiation consiste à proposer à *certains élèves* un travail personnel adapté avant de reprendre l'étude du thème. Le test d'entrée ayant montré que leur rapport personnel antérieur au savoir n'était pas adéquat pour poursuivre l'étude du thème, il leur est signifié que celui-ci doit être retravaillé.

Mise en équation d'un problème (1)

On peut noter ici un travail transitionnel portant sur un type de tâches situé à la frontière des classes de Cinquième et de Quatrième et permettant de retravailler la technique vue en Cinquième sur la mise en équation.

À l'intérieur du type de tâches T_1 (mise en équation), est assurée la première rencontre avec une équation du type $ax + b = c$ spécifique du programme de Quatrième. Cette première

rencontre a lieu en plusieurs fois, avec des types d'équations qui varient selon les énoncés et qui aboutissent tous, après développement et réduction, à la résolution d'une équation du type $ax+b=c$. On se trouve aussi dans le cadre du deuxième moment, qui est celui de l'exploration du type de tâches et de l'élaboration d'une technique, (« On choisit la lettre... », « On traduit le problème »). La technologie, et donc le troisième moment, qui consisterait à justifier la technique utilisée et à répondre à des questions telles que : « Pourquoi procède-t-on ainsi ? », « Pourquoi cette méthode permet-elle d'obtenir le résultat ? » est ici absente.
La répétition d'une dizaine de tâches relevant de T_1 « Mettre en équation un problème » ou de T'_1 « Associer un problème et une équation » vise à constituer un habitus permettant de réaliser plus facilement l'entrée des élèves dans le contrat didactique relatif à la mise en équation.

Étude du type de tâches T_1 : Mettre en équation un problème

Les occasions de rencontrer ce type de tâches sont multiples comme l'indique le récapitulatif des situations dans lesquelles on retrouve T_1.

- Mettre en équation un problème (2) : 5 et 8 janvier, page 229.
  Le premier exercice de ce corpus est traité en classe, et les exercices 2 et 3 sont donnés en travail à la maison.
- Situations d'étude et de recherche : 8 janvier (2 heures), pages 230 et 231.
- Résolution d'équations, exercices 3, 4 et 5 : 12 et 15 janvier, page 232.
- Résolution de problèmes du premier degré : du 15 au 22 janvier, page 233.
- Cours : I. Mise en équation, page 246.

A – **Organisation mathématique**

La technique consistant à choisir une lettre et à l'utiliser pour traduire le problème a été déjà élaborée lors de la transition didactique. La technologie et la théorie sont absentes, comme dans l'analyse du compte rendu. Les deux exemples qui sont donnés dans le cadre du cours (page 246) permettent de montrer la technique dans deux cas typiques, mais non de la justifier.

B – **Organisation didactique**

Les exercices proposés à la page 229 – Mise en équation d'un problème (2) – permettent de travailler la technique (quatrième moment). Lors de ce travail de la technique, l'élève n'est plus aussi guidé que dans la première partie de ce corpus d'exercices : les sous-tâches qui permettent d'obtenir l'équation ne sont plus mentionnées. Cependant pour l'exercice 2 (à faire à la maison) des indications sont données : il y a une certaine prise en compte de cette tâche didactique « Préparation du travail à la maison » généralement assez écrasée. Ces exercices étant corrigés en classe, on se trouve aussi dans le cadre du cinquième moment, celui de l'institutionnalisation. Dans le cahier de cours (page 246), le premier paragraphe du chapitre 4 (I. Mise en équation, 5 janvier), réalise l'institutionnalisation de la technique τ_1 relative à T_1.

Étude du type de tâches T_2 : Résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Ce type de tâches se rencontre très fréquemment comme l'indique le nombre d'exercices dans lesquels on retrouve T_2.

- Situations d'étude et de recherche : 8 janvier (2 heures), pages 230 et 231.
  Cet exercice composé de quatre situations est traité entièrement pendant cette séance de deux heures. Chacune des situations est bâtie autour d'une « expérience de pensée » : sur une balance en équilibre figure une masse inconnue (éventuellement en plusieurs

exemplaires) ainsi que des masses connues ; en enlevant une ou plusieurs masses de chaque côté, l'équilibre est conservé. Après avoir traduit ces équilibres par des équations (cela correspond au type de tâches T_1), il faut dégager sous forme de règle ce qui permet de passer d'une équation à l'autre (type de tâches T_2). La dernière partie de chaque situation consiste à résoudre des équations du même type (types de tâches T_{2i} définies ci-dessous).

- Résolution d'équations : du 8 janvier au 15 janvier, page 232.
- Cours : II. Résolution d'équations : 9 et 12 janvier, pages 246 et 247.

A – <u>Organisation mathématique</u>

Il s'agit d'abord, dans les pages 230 et 231, d'un travail sur les quatre types de tâches suivants (chacune des situations est relative à l'un d'entre eux), qui correspondent à des sous-types de tâches de T_2 :
T_{21} : $x+a=b \Leftrightarrow x=b-a$; transposition portant sur les termes constants.
T_{22} : $ax=b \Leftrightarrow x=b/a$; résolution d'une équation de la forme $ax=b$.
T_{23} : $ax+b=cx \Leftrightarrow (c-a)x=b$; transposition portant sur les termes en x.
T_{24} : $ax+b=a'x+b' \Leftrightarrow (a-a')x=b'-b$; transposition des termes afin d'obtenir une équation de la forme $ax=b$.

<u>Remarque</u> sur la terminologie employée : équation / égalité. Il est demandé de « Traduire cet équilibre par une *équation* », mais de compléter la phrase : « Une *égalité* est conservée lorsqu'on… ».
Pour chacune des sous-tâches, la technique est justifiée par le modèle de la balance, qui constitue ainsi un élément technologique de l'organisation mathématique mise en place.
C'est une organisation mathématique qui fait partie de l'organisation didactique, dans le sens où elle rend intelligible et justifie la technique qui sera ensuite institutionnalisée dans le cours. Par contre, il ne sera plus demandé à l'élève de faire appel à ce modèle, une fois que les techniques classiques de résolution d'équations seront routinisées.

Dans l'exercice 2 de la page 232, on trouve des équations très diversifiées. Dans les premières, les coefficients sont des nombres entiers ou rationnels, positifs ou négatifs. Ensuite, il faut commencer par développer les deux membres, etc. Dans le n°13, il faut résoudre une équation de la forme $P(x)/Q(x)=k$, où P et Q sont des fonctions affines. Par ailleurs, certaines équations n'ont aucune solution, alors que d'autres sont indéterminées, ce qui est un sous-type de tâches particulier de T_2 correspondant à une équation du type $0x=b$.

B – <u>Organisation didactique</u>

L'entrée des élèves dans chacune de ces situations d'étude et de recherche (pages 230 et 231) s'appuie sur un type de tâches qui vient d'être retravaillé, à savoir T_1, ce qui assure la transition didactique dans l'avancée du cours. On se trouve ici essentiellement dans le cadre du deuxième moment de l'étude, celui de l'exploration du type de tâches T_2, et de l'élaboration d'une technique τ_2 relative à ce type de tâches. On peut noter qu'à cette occasion on rencontre le cinquième moment, celui de l'institutionnalisation, à travers les remarques qui figurent à la fin des situations 1 et 2. On retrouve en toile de fond le troisième moment, celui de la constitution de l'environnement technologico-théorique, la balance constituant un modèle permettant de justifier la technique utilisée.
Les situations 3 et 4 correspondent, dans la résolution de l'équation, à l'enchaînement des types de tâches T_{23} puis T_{22}, et T_{24} puis T_{22}. À travers le cahier d'exercices de l'élève, on peut

remarquer que le professeur demande aux élèves de vérifier systématiquement que le nombre trouvé est bien solution.

L'exercice 1 de la page 232 reprend les équations déjà rencontrées lors de la mise en équation (pages 228 et 229), la consigne étant maintenant de les résoudre. Il est à noter que ces exercices, abordés lors de l'étude du type de tâches T_1, ont été laissés en attente et sont maintenant repris, lors de l'étude du type de tâches T_2. Cet exercice fournit l'occasion de travailler la technique τ_2 (quatrième moment) ; ce travail se poursuit dans l'exercice 2 de façon plus systématique. On pourra noter que certains exercices (1,2,3,4,5,10) font partie de ce que l'on pourrait nommer la ZEN (zone d'étude normale) alors que les autres font partie de la ZEP (zone d'étude proche) : il suffit alors d'effectuer un petit travail (sous-tâche de développement par exemple) pour se retrouver dans la ZEN.

Dans le cadre du cours (pages 246 et 247), on trouve la définition de la tâche T_2 : « Résoudre une équation d'inconnue x, c'est chercher l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vérifiée ». On note ensuite l'institutionnalisation de techniques : celles relatives aux sous-types de tâches T_{21} et T_{22}, ainsi que celle relative à T_2 (ces trois techniques étant exemplifiées). Cette partie du cours se termine par une étude de cas particuliers (pas de solution, infinité de solutions).

Étude du type de tâches T_3 : Résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

Ce type de tâches T_3 se rencontre lors des occasions suivantes :
- Résolution d'équations, exercices 3, 4 et 5 : 12 et 15 janvier, page 232.
- Résolution de problèmes du premier degré : du 16 au 22 janvier, page 233.
- Cours III. Résolution de problèmes du premier degré : 15 janvier, pages 248 et 249.

A – **Organisation mathématique**

L'exercice 1 de la page 232, outre qu'il fournit l'occasion de travailler la technique τ_2, donne surtout de la cohérence à l'articulation T_1/T_2, c'est à dire T_3.
L'exercice 3 de la page 232 aborde l'étude d'une situation à modéliser par un système de deux équations (non linéaires) à deux inconnues, la résolution de celui-ci passant par la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.
L'exercice 4 de la page 232 conduit à une modélisation par une équation de la forme $P(x)/Q(x)=k$, où P et Q sont des fonctions affines, assortie d'une condition sur l'inconnue : la solution doit être entière.
Dans l'exercice 5 de la page 232, il s'agit d'une situation arithmétique se modélisant par une équation du premier degré. La solution d doit être entière et le reste $d-2$ doit être positif et inférieur au diviseur $d+5$.
Nous laissons le soin au lecteur de s'exercer à déterminer avec précision les organisations mathématiques correspondant au corpus des neuf exercices de la page 233.

B – **Organisation didactique**

Dans les exercices 3, 4 et 5 de la page 232, il s'agit du premier moment de l'étude, celui de la première rencontre avec le type de tâches T_3 en classe de Quatrième. Dans un premier temps, les élèves ont rencontré le type de tâches T_1 (mise en équation) et dans un second le type de tâches T_2 (résolution d'une équation) : il faut maintenant articuler, à travers les mêmes exemples, les deux techniques correspondantes.

Les exercices donnés à la page 233 (résolution de problèmes du premier degré) se placent clairement dans le cadre du quatrième moment, le moment du *travail de la technique*, relativement à la tâche T_3. Les situations étudiées font appel à des domaines très *variés* et bien *identifiés* (problèmes d'aire, d'angle, de moyenne, etc.).

Le cours (pages 248 et 249) constitue une institutionnalisation exemplifiée de la technique relative à T_3.

Test n°7 – 12 janvier, 16 janvier et 22 janvier – pages 234, 236 et 238

Il faut noter ce *dispositif didactique* mis en place par le professeur, qui consiste à donner en cours d'étude trois petits test (d'environ 15 min chacun) qui permettent à chaque élève de s'évaluer en cours d'apprentissage. Ces tests permettent aussi d'institutionnaliser l'organisation mathématique qui est en train de se mettre en place. Nous le décrivons rapidement ci-dessous, sans en faire d'analyse particulière.

Test 7α – 12 janvier
Ce test est constitué de trois exercices. Les deux premiers sont des problèmes du premier degré, qui sont relatifs au type de tâches T_3. Leur résolution est guidée par trois questions : mise en équation, résolution de l'équation, vérification du résultat trouvé. Le troisième exercice – relatif au type de tâche T_1 – propose cinq équations et trois problèmes, et il faut déterminer pour chacun des trois problèmes l'équation qui va permettre de le résoudre. Ce test est rendu avec un corrigé très détaillé, tapé à la machine.

Test 7β – 16 janvier
Ce deuxième test est constitué de 7 équations à résoudre : il est donc relatif au type de tâches T_2. On retrouve des équations du même type que celles étudiées lors des exercices. Le corrigé utilise des copies d'élèves, ce qui permet de montrer à l'ensemble de la classe que le savoir attendu est un savoir dépersonnalisé, avec lequel certains élèves ont un rapport personnel qui correspond au rapport institutionnel.

Test 7χ – 22 janvier
Ce test est constitué de deux exercices, qui sont tous les deux des problèmes du premier degré (type de tâches T_3). Le premier est choisi dans le domaine de la géométrie et est du même type que l'exercice 2 du corpus « Résolution de problèmes du premier degré » (page 233). Le second relève de l'arithmétique et est analogue à un des exercices traités dans le cours. Ce test est rendu accompagné d'un corrigé commenté. Celui-ci mentionne, pour le deuxième exercice, que l'on a trois possibilités pour le choix de l'inconnue ; la photocopie de la solution proposée par un élève dans son test fournit l'une d'entre elles (la mise en équation n'est pas présentée dans les autres cas).

ANNEXE

Compte rendu d'observation en classe

La classe observée est une Quatrième de 21 élèves, que P décrit comme relativement hétérogène, avec 3 ou 4 élèves de très bon niveau, 5 ou 6 élèves « totalement perdus », le reste suivant plus ou moins. La séance observée a eu lieu le vendredi 6 février 1998, de 9h à 10h.

9h10 : 19 élèves sont présents. P, s'adressant aux élèves : « Les devoirs à la maison pour commencer ! ». Elle passe dans les rangs pour ramasser les devoirs que quelques retardataires ne lui avaient pas remis lors du dernier cours : il s'agit du devoir n°9. P, à un élève qui semble avoir oublié son travail : « Ça fait quinze jours que vous l'avez, il n'y a pas d'excuse ! » P sanctionne par un zéro les élèves qui ne rendent pas le devoir – en précisant que, pour elle, ça n'est pas un problème, et même que ça lui fait une copie de moins à corriger...

P : « Donc on va maintenant commencer par corriger les exercices que je vous ai donné à faire hier. Puis on verra comment on fait pour résoudre un problème. Donc vous sortez ou l'exercice ou le carnet [de liaison], comme d'habitude ! »

P circule et contrôle les cahiers tout en demandant : « Pour le premier, y a-t-il un volontaire ? » Une élève, à P : « J'ai pas trouvé, mais je l'ai fait ». Une autre élève est alors envoyée au tableau. Elle écrit :

$$-8(3-x)-(7-8x)=4(5x+9)$$

Il s'agit de résoudre l'équation. Elle continue sur la même ligne en écrivant un nouveau signe =, mais P l'arrête dans son élan : « Hop là ! On ne met pas les = à côté, d'accord ? Tu passes à la ligne en dessous et tu réécris ton égalité en changeant... » L'élève s'exécute. P poursuit sa tournée de vérification des travaux. L'élève au tableau a continué :

$$-8-3+8$$

P intervient : « Déjà, là, il devait y avoir un signe ». Elle montre l'espace qui sépare le 8 de la parenthèse dans la première ligne. Les élèves : « Non... » P : « Bon, on avait vu que la première étape c'était d'enlever les parenthèses... » À l'élève au tableau : « Là je ne comprends pas du tout ce que tu fais ! D'abord il faut commencer par développer ! »

L'élève au tableau semble ne pas avoir bien compris. P commente tout en poursuivant la vérification des cahiers : « –8 fois 3... Tu développes ?! » L'élève s'exécute et écrit :

$$-8\times3-8\times x-7+8x=4\times5x+4\times9$$

P termine son tour de classe et vient à nouveau aider l'élève au tableau : « Voilà... Maintenant tu fais les calculs que tu peux faire ! ». S'adressant ensuite à la classe : « On peut commencer par faire les calculs, non ? 8 fois 3 par exemple... On va pas laisser 8 fois 3. Une élève : « Non, 24, on marque –24 ». P : « Voilà ! On écrit –24 puis –8x ». L'élève au tableau écrit :

$$-24-8x-15x$$

P intervient : « Pourquoi 15 ? Vous mettez des x et des "pas x" automatiquement ensemble ! » L'élève efface et recommence :

$$-24 - 8x - 7 + 8x =$$

De sa place une élève signale une erreur dans le calcul proposé au tableau. P réagit : « Oui, *moins* par *moins*, *plus* ! OK ! » Puis elle va au tableau et explique l'erreur à l'élève, prend la craie et remplace $- 8x$ par $+ 8x$ dans chacune des deux dernières lignes.

L'élève au tableau termine l'écriture de la dernière ligne sous le contrôle du professeur :

$$-24 + 8x - 7 + 8x = 20x + 36$$

P : « Maintenant on fait les opérations qu'on peut faire... » Sous l'œil vigilant de P, qui la conseille pas à pas, l'élève rassemble les termes en x dans le membre de gauche et les termes indépendants à droite.

$$8x + 8x - 20x = 24 + 7 + 36$$

P : « Donc $8x$ plus $8x$ ça fait ?... » L'élève : « $16x$ » P : « Moins $20x$? Combien j'en ai ? » L'élève : « Moins... Euh... » P : « On fait directement 16 moins 20 ? » L'élève : « Euh... 16 moins 20, euh... » Une autre élève, de sa place : « –4 !» P reprend : « $-4x$, c'est bien ». Toujours étroitement contrôlée par P, l'élève au tableau écrit :

$$-4x = 61$$
$$x = -\frac{61}{4}$$

P à l'adresse de la classe : « Tout le monde est d'accord ? » Une élève l'arrête : « Madame, j'arrive pas à comprendre pourquoi elle a mis *moins* là. Ah oui ! C'est parce qu'après elle a changé ! Parce qu'elle a... Au début, à la troisième ligne, elle peut faire encore un calcul ». P : « Oui... ». L'élève continue : « Elle peut faire 24... » P ne la laisse pas terminer sa phrase : « Oui, voilà. Elle, elle a préféré regrouper. Si vous voulez commencer ici [elle montre la troisième ligne], c'est bon aussi. Si vous voulez écrire $16x-31 = ...$, c'est pareil ! »

Une autre élève la sollicite : « Madame, je peux faire le suivant ? J'ai pas compris, j'ai pas compris pour le deuxième ! » P : « Pour le deuxième, attends. On va envoyer quelqu'un ! » Un autre élève : « Madame, ce que j'ai fait, c'est faux ce que j'ai fait, Madame ? » P envoie la volontaire au tableau, puis regarde un court instant le cahier de l'élève qui l'interroge. P : « Oui, c'est faux... Si tu avais commencé par développer tu t'en serais sorti ! Je sais pas d'où il sort ton 1 ». L'élève fait une réponse inaudible. P indique que résoudre une équation, c'est chercher le x "qui marche" : « Tu ne peux pas dire que x est égal à 1. Quand on résout une équation, on cherche le x qui va marcher. Si tu dis directement qu'il est égal à 1, ça va pas marcher. D'accord ? Donc pour résoudre, il faut se ramener à la forme qu'on connaît, c'est-à-dire ce truc-là [elle pointe une expression sur le cahier de l'élève], $ax + b = cx + d$, et pour se rameuer à ce truc-là tu es obligé de développer. OK ?

L'attention de P se porte maintenant sur ce que vient d'écrire l'élève qui corrige le nouvel exercice au tableau. L'élève a écrit :

$$\frac{x}{3}-1=x-\frac{6}{13}-\left(\frac{-2x}{13}\right)$$

P : « Tu es sûre que c'est ça l'énoncé ? » L'élève : « Oui, c'est ça l'énoncé ». P, après avoir eu confirmation par d'autres élèves : « OK ! Bon alors, il n'y a pas à développer pour l'instant. On va pas développer. Entre ça et ça, il y a = entre eux, d'accord ? Pour l'instant on fait comme là [elle montre une ligne du calcul précédent]. On commence par enlever les parenthèses qui restent. Allez !. Donc de ce côté il n'y a pas de parenthèses, ça va, pas de problème, jusqu'ici pas de parenthèses. Là il y en a, on les fait sauter ».

L'élève semble attendre la suite... P : « Comment on fait pour faire sauter les parenthèses ? On a *moins moins* 2x sur 13 ». L'élève ébauche une réponse que P interprète immédiatement comme la bonne et la répète : « *Plus* 2x sur 13 ».

$$\frac{x}{3}-1=x-\frac{6}{13}+\frac{2x}{13}$$

P : « Maintenant qu'on a plus les parenthèses, on arrive où ? » L'élève répond de façon inaudible mais, semble-t-il, correcte, puisque P acquiesce : « Voilà... On fait passer tous les x d'un côté et les pas-x de l'autre... À gauche on a déjà $\frac{x}{3}$ et ceux qui sont à droite on les fait passer à droite. D'accord ? » Sous la direction très étroite du professeur, l'élève écrit :

$$\frac{x}{3}-x-\frac{2x}{13}=-\frac{6}{13}\div 1$$

Les étapes suivantes (réduction au même dénominateur, addition dans chacun des membres, division d'un quotient par un autre) sont toutes conduites par P en collaboration avec quelques élèves de la classe qui répondent sporadiquement à ses questions. Le rôle de l'élève au tableau est pratiquement réduit à écrire ce que le professeur lui dit :

$$\frac{13}{39}x-\frac{39}{39}x-\frac{6}{39}x=\frac{39}{39}-\frac{18}{39}$$

$$\frac{32}{39}x=\frac{21}{39}$$

$$x=\frac{21}{39}\times\frac{39}{32}=\frac{21}{32}$$

La séquence de correction se termine. Courte interaction entre P et l'élève au tableau qui est retournée à sa place : « Madame, mais moi quand je me trompe c'est sur les signes. Des fois j'oublie. Y a pas une règle pour pas oublier ? » P : « Les amis de tes ennemis, les ennemis de tes amis, les ennemis de tes ennemis... » L'élève : « Ah, comme l'autre jour, comme on a fait... » P : « Allez, vous prenez votre cahier de cours, de telle sorte que vous ayez une page à gauche et une page à droite ».

Au tableau P crée une séparation verticale et note en titre de chacune des parties ainsi déterminées ce qu'elle représente. Certains élèves demandent s'il faut recopier cette mention. P ne répond que par un sourire entendu.

P, tout en écrivant sur la partie de gauche : « Allez, grand 3, résolution de problèmes ! » Un élève : « Ah non ! » P : « Quoi, "Ah non" ? » L'élève : « Madame, je déteste les problèmes ! » P : « C'est pourtant pas compliqué ! » Un autre élève : « Madame, y en aura au contrôle ? » P : « Pourquoi pas ? » Protestations de quelques élèves. P précise alors que le prochain devoir à la maison ne sera constitué que de problèmes. Les protestations continuent.

P coupe court : « Allez, tout ce qu'on a fait là, c'était pour réussir à résoudre des problèmes. Parce qu'en fait les maths, ça sert à résoudre plein de problèmes ! » Elle écrit au tableau :

> Les mathématiques permettent de résoudre de nombreux problèmes
> de la vie courante ou liés à d'autres matières

Les élèves copient. P poursuit : « Je vous donne un problème... » Elle écrit sur la partie droite du tableau :

> Aïcha et Arthur vont acheter des chocolats. Aïcha achète 100 grammes de truffes et pour 27 francs de fondants. Arthur achète 200 grammes de truffes et pour 15 francs de fondants. Ils paient tous les deux le même prix. Quel est le prix du kilogramme de truffes ?

Le mot de *truffe* trouble les élèves. L'un d'eux évoque même les champignons pour expliquer à sa voisine ce que sont les truffes. P intervient, clarifie les choses. Les élèves achèvent de copier l'énoncé. P reprend : « Vu comme ça, trouver la solution sans rien faire, ça paraît pas évident ! » Réaction de quelques élèves, qui veulent faire des propositions de combinaison des nombres entre eux. P les ignore et poursuit : « Il va falloir procéder par étapes... » Elle écrit dans la partie gauche :

> Pour aborder un problème, il faut procéder par étapes.

Puis prenant les élèves à témoin : « D'accord ? Si on le prend comme ça, rien qu'en le regardant, on va avoir du mal ! Première étape : on lit l'énoncé. Et si on comprend pas, on le lit plusieurs fois. Mais c'est pas rien qu'en le lisant qu'on va arriver ! » Un élève : « On commence par le lire correctement ». P, à la classe : « Le lire correctement, ça veut dire quoi ? » Des réponses fusent : « Ça veut dire le comprendre ! », « Ça veut dire lire bien l'énoncé et comprendre ce qui est écrit ». P : « Ouais. Comprendre ce qui est demandé. Cela veut dire bien voir ce qu'on a, ce qu'on veut. Hypothèses, conclusion. On procède donc par étapes ». Une élève : « On fait d'abord dans le brouillon, Madame ». P : « Oui, mais là on va le faire ensemble. Alors, première étape... Ce serait quoi ? »

Plusieurs propositions sont faites. Une élève : « 27 plus 15... ». Un autre : « Lire l'énoncé... » P : « Ouais, on va le mettre.. » Elle écrit, en complétant : « ... lire l'énoncé en analysant ce que l'on a et ce que l'on veut ». En aparté un élève propose sur le ton de la plaisanterie : « On va au magasin et on regarde le prix ! » P n'entend pas cette proposition ou l'ignore, et revient à la première proposition : « Toi, tu es en train de partir en mettant 27 plus ça, etc. C'est un peu rapide ! 27 plus quoi alors ? » L'élève propose alors un début de raisonnement sur les achats respectifs d'Aïcha et Arthur. Il s'oriente vers une soustraction (27–15), mais sa difficulté à aboutir jointe au peu de crédit que semble accorder P à sa méthode, lui imposent rapidement silence.

P fait comprendre qu'elle attend une équation pour résoudre ce problème. Une élève propose alors : « 100 grammes et 27 francs égale 200 grammes et 15 francs. Après on résout ». P réagit : « Tu additionnes des grammes et des francs ! » Plusieurs propositions sont faites qui échouent également. Puis un élève dit : « Il aurait pas fallu déjà savoir combien ils avaient tous les deux ? Mais ça on peut pas savoir ! » P : « Ouais, combien ils ont payé chacun... C'est bien ça qu'il va falloir faire. Bon, ce qu'on cherche, c'est le prix d'un kilo de truffes ». Une élève : « x ». P : « Voilà. D'accord ? On va poser x égale le prix du kilo de truffes, parce qu'on va pas se payer "prix du kilo de truffes" tout le temps ! Et une fois qu'on aura x, comme dit Roland, on va exprimer avec des x ce qu'a payé chacun. Donc deuxième étape... » Elle écrit :

Poser une inconnue → Soit x le prix du kilo de truffes

P : « Deuxième étape : c'est ce que disait Roland, on traduit le français en mathématiques ». Elle écrit :

Traduire l'énoncé par une équation → Aïcha a payé : $27 + x$

P continue : « Tout le monde est d'accord ? » Certains élèves protestent : « Non ! » P insiste : « x, c'est le prix d'un kilo, est-ce qu'elle a acheté un kilo ? » Les élèves : « Non !... » P : « Elle ne peut pas avoir payé x pour 100 grammes. Si x est le prix d'un kilo... » Une élève : « Soit y, 100 grammes... » P ignore la réponse : « On a x le prix d'un kilo de truffes... » D'autres propositions fusent : « x exposant moins... On a le droit de mettre un exposant à x ? » P les ignore toutes : « 100 grammes, c'est combien de kilos ? » Un élève : « 100 grammes, c'est 0,1 ». Un autre : « 10 fois 100 grammes c'est un kilo. » Un autre encore : « Madame, on multiplie 100 par 100, ça fait un kilo, ça fait mille grammes, ça fait un kilo ». P : « 100 fois 100 égale 1000 ? » Une autre élève : « Non, ça fait x » Des rires fusent. P : « Bon, on reprend... ». P explicite le raisonnement à faire : « Si je paie x pour un kilo, combien est-ce que je paie pour 2 ? Et pour 0,1 ? » Au tableau, elle corrige la dernière ligne écrite et ajoute :

Aïcha a payé : $27 + 0{,}1x$
Arthur a payé : $15 + 0{,}2x$

Des protestations timides s'élèvent dans la classe. Certains disent ne plus comprendre. P les ignore et répond à la remarque d'un élève : « Les unités, quand vous me dites "francs", les unités dans les équations on ne les met pas ! On les met en conclusion, on ne les met pas dans les équations ».

Un élève, visiblement gêné : « Madame, on peut pas faire ça, parce que ça va toujours être des grammes. Donc ça va pas atteindre le kilo ». P : « C'est pour ça qu'on a fait ça ! C'est pour ça qu'il y a une virgule. Les 200 grammes, je les ai mis en kilos. 100 grammes, c'est 0,1 kilo ». Une élève : « Après on convertit ». P : « Oui. Maintenant on en arrive à une équation ».

Une élève, doucement : « J'y comprends rien ». P : « Tu comprends rien ? Pourquoi ? Où est le problème ? » Un autre élève : « Ben, justement, c'est ça... » L'élève qui dit ne pas comprendre : « Mais pourquoi vous avez fait + 0,1 ? » P : « Combien elle a payé Aïcha ? Elle a payé 27 francs de fondants. Ces 27 francs elle les a payé. Et après elle a payé 100 grammes de truffes. Ces 100 grammes c'est des grammes, c'est pas des francs.

Donc, il faut mettre ça en francs. Ensuite un kilo de truffes, ça fait x francs. D'accord ? Moi je prends 100 grammes, c'est-à-dire que je prends 10 fois moins qu'un kilo ».

L'élève : « En fait on sait que... On sait qu'elle a payé. Bon, ça va, j'ai compris, Madame. On sait une partie de la somme qu'elle a payée, mais pas l'autre partie ». P : « Voilà. Donc il faut traduire les 100 grammes, il faut les traduire avec des francs. Donc comme un kilo tu le payes x francs, tu prends 100 grammes, c'est à dire 10 fois moins, tu vas payer 10 fois moins. D'accord ? $\frac{1}{10}$ fois x, si tu veux. Donc 0,1 fois x ». P poursuit en écrivant l'équation qui résume la situation :

$$27 + 0{,}1\,x = 15 + 0{,}2\,x$$

P : « Étape suivante ! » Elle écrit sur la partie gauche du tableau :

Résoudre l'équation

P : « Là, je vous laisse faire ! » Elle circule dans les rangs pendant que les élèves cherchent. Certains élèves discutent du sens des opérations indiquées ; l'une d'elles explicite : « Ici on a 15 francs et on en prend 27. C'est impossible ! » P intervient et propose une situation analogue qu'elle traite sur un mode naturel, imposant ainsi comme allant de soi un résultat négatif. Mais les réactions montrent que l'incompréhension persiste. Un élève est envoyé au tableau qui résout l'équation sans coup férir :

$$27 + 0{,}1x = 15 = 0{,}2x$$
$$0{,}1x - 0{,}2x = -27 + 15$$
$$-0{,}1\,x = -12$$
$$x = \frac{-12}{-0{,}1} = 120$$

P : « Voilà, c'est bien. La réponse est 120 francs. À ce niveau, il faut penser à vérifier que ce résultat est valide. C'est-à-dire que si on trouve –10 par exemple... On va pas nous payer pour prendre du chocolat... D'accord ? Si on avait trouvé 3000 francs, 3000 francs le kilo de truffes, ou 2 francs le kilo de truffes, bon ! Donc on vérifie si c'est à peu près cohérent. Donc là... » Elle écrit au tableau :

Vérifier la cohérence du résultat

P : « Dernière étape : on conclut par une phrase. Tout le temps ! » Une élève est invitée à le faire pour le cas examiné. La phrase est consignée au tableau dans la partie droite :

Le prix du kilogramme de truffes est 120 F.

P distribue pour terminer une fiche d'exercices en annonçant que chacun des problèmes proposés sont faisables en employant la technique donnée au cours de la séance. Ce travail est à commencer tout de suite et à terminer chez soi. Il est 10h05. La sonnerie retentit. P annonce le travail à faire : pour lundi prochain, faire le problème 1 ; rappel : jeudi il y a interrogation écrite !

La séance est terminée.

Traces écrites de l'activité d'une classe

La séquence didactique dont on a reproduit ci-après les traces écrites figurant dans les "archives" d'un élève d'une classe de quatrième – l'élève 6 – a occupé environ 11 heures, entre le samedi 20 décembre 1997 et le vendredi 30 janvier 1998. La chronique de l'étude établie par le professeur de la classe est reproduite ci-dessous.

Date	*Durée*	*Contenu*
20 décembre	15 mn	Test d'entrée dans l'étude du thème
5 janvier	1 heure	Activités et exercices : mise en équation d'un problème (1) ; mise en équation d'un problème (2) : exercice 1 et indications relatives à l'exercice 2. Cours : Mise en équation. Travail à la maison : exercices 2 & 3 de (2).
8 janvier	2 heures	Correction : exercices 2 & 3. Activités et exercices : exercice 4 de (2) ; situation d'études et de recherches... ; résolution d'équations : exercice 1, deux premières colones. Travail à la maison : 3ᵉ colonne de l'exercice 1 de la feuille *Résolution d'équations*.
9 janvier	1 heure	Correction : 3ᵉ colonne de l'exercice 1... Cours : sans changer l'ensemble des solutions d'une équation, que peut-on faire ? Activités et exercices : équations 1, 2, 3, 4, 5, 8 de l'exercice 2 de la feuille *Résolution d'équations*, avec indications pour l'équation 5. Travail à la maison : équation 10 de l'exercice 2 & exercices 3 et 5.
12 janvier	1 heure	Correction : équation 10 de l'exercice 2 & exercices 3 et 5. Cours : technique de résolution d'une équation du 1ᵉʳ degré. Activités et exercices : équations 6 & 7 de l'exercice 2. Test 7α. Travail à la maison : équations 9, 12 et 13 de l'exercice 2.
15 janvier	2 heures	Correction : équations 9, 12 et 13 de l'exercice 2. Activités et exercices : équations 14, 11, 15 de l'exercice 2 & exercice 4 de la feuille *Résolution d'équations* ; exercices 1 & 2 de la feuille *Résolution de problèmes du 1ᵉʳ degré*. Cours : technique de résolution d'une équation du 1ᵉʳ degré. Activités et exercices : exercice 5 Travail à la maison : exercice 3 ; devoir à la maison 7 (pour le 23.01).
16 janvier	1 heure	Correction : exercice 3. Activités et exercices : exercice 6 & 7 ; indications pour l'exercice 8. Test 7β. Travail à la maison : exercice 8.
19 janvier	1 heure	Correction : exercice 8. Activités et exercices : exercice 9 ; questions sur le devoir à la maison ; indications sur l'exercice 4. Travail à la maison : exercice 4.
22 janvier	25 min	Correction : exercice 4. Test 7γ.
23 janvier	–	Remise du devoir à la maison.
30 janvier	1 heure	Contrôle 5.
12-23 janvier et au-delà	–	Correction perlée des tests et du devoir à la maison.

On trouvera dans les pages qui suivent, précédant et éclairant les documents extraits des archives de l'élève 6, les documents distribués aux élèves par le principal (feuilles d'exercices, etc.).

DOCUMENTS DISTRIBUÉS AUX ÉLÈVES

TEST D'ENTREE DANS L'ETUDE DU THEME :
« Equations et problèmes »

Résoudre les équations suivantes :

$t + 52 = 21$	$-3 + z = 14$	$17.3 = -10.3 + t$
$25d = 40$	$0.04\,e = 1.8$	$\frac{1}{3}x = \frac{1}{4}$

Claude mesure x centimètres .Tom mesure 15cm de moins que lui. Quelle est la taille de Tom ?
Réponse :

Une maison d'édition propose ses publications à 80% de leur tarif habituel. Le prix habituel d'une de ces publication est de y francs. Quel est le prix promotionnel de cette publication ?
Réponse :

Exercices d'entraînements

‣ La construction d'un tronçon d'autoroute de 35 kms a coûté x millions de francs.
Quel est en million de francs , le prix de revient de cette autoroute au kilomètre ?

‣ Une conversation téléphonique dure y minutes à une période où le tarif est de 0.77 franc la minute.
Quel est le coût de la communication ?

‣ Un cycliste parcourt t kilomètres en 5 heures.
Quelle est sa vitesse moyenne en kilomètreheure ?

‣ Liquidation totale : 15% de réduction sur tous les articles.
Quel sera le prix d'un article qui coûtait r francs avant cette réduction ?

Passage d'un langage à l'autre :

On note x le prix d'un coca et y le prix d'un orangina.
Compléter le tableau suivant :

langage habituel	langage algébrique
	$3x$
Prix de cinq oranginas	
Prix de deux cocas et cinq oranginas	
	$4x+5y$

On note x et y les notes de Tom à ses deux derniers devoirs de Maths
Compléter le tableau suivant

Langage habituel	Langage algébrique
	$\dfrac{x+y}{2}$
Moyenne des deux devoirs sachant que le dernier compte double	
	$\dfrac{2x+y}{3}$

MISE EN EQUATION D'UN PROBLEME (1)

Voici 5 énoncés. Pour chacun d'eux , mettez en évidence une grandeur que vous ne connaissez pas et que l'on pourrait calculer à partir des informations de l'énoncé.
Ensuite, choisissez une lettre pour désigner cette grandeur inconnue, et traduisez le problème afin d'obtenir une équation.

Enoncé 1 : «Julien a acheté 7 ballons de foot et 5 balles de tennis qu'il a payées 10 F pièce. En tout il a payé 750 F »
On choisit la lettre.......... pour désigner __________
On traduit le problème : prix de 7 ballons + ... = prix total
d'où l'équation : __________

Enoncé 2 : « Jean a acheté 3 classeurs à 12.50F l'un et des paquets de copies à 5.20F l'un. Il a payé 68.70F »
On choisit la lettre .... pour désigner ....
On traduit le problème : __________
d'où l'équation :...

Enoncé 3 : « Kate va faire des courses .Elle achète du poisson à 72F le kilo. Elle paye 43.20F »
On choisit la lettre .... pour désigner ....
On traduit le problème :...
d'où l'équation : ....

Enoncé 4 : « la longueur d'un rectangle est le double de sa largeur , son périmètre est 465m »
On choisit la lettre .... pour désigner ....
On traduit le problème : __________
D'où l'équation :__________

Enoncé 5 : « Un grand-père a 50 ans de plus que son petit-fils .A eux deux ils ont 56 ans »
On choisit la lettre .... pour désigner__________
On traduit le problème : __________
D'où l'équation :...

Voici 5 équations et 5 énoncés. Pour chaque énoncé trouver l'équation correspondante et préciser la grandeur désignée par la lettre y.

Equations : **A** $(y + 175) \times 2 = 650$ **B** $2y + 3y = 650$ **C** $11y = 165$

D $(2y + 10) \times 10 = 650$ **E** $50 \times 0.420 + 90y = 165$

Enoncé 1 : « En ajoutant le double et le triple d'un nombre on trouve 650 »
Equation : .... La lettre y désigne : ....

Enoncé 2 : « Un jardin a pour aire $165m^2$ et sa largeur est 11m. »
Equation : .... La lettre y désigne : ....

Enoncé 3 : « Un champ rectangulaire a pour périmètre 650m et sa longueur est 75m. »
Equation : .... La lettre y désigne : ....

Enoncé 4 : « On a acheté 420g de sole à 50F le kilo et un rôti de bœuf à 90F le kilo. On a payé 165F. »
Equation : .... La lettre y désigne : ....

Enoncé 5 : « J'ajoute 10 au double d'un nombre , je multiplie le résultat par 10.Je trouve 650. »
Equation : .... La lettre y désigne : ....

MISE EN EQUATION D'UN PROBLEME (2)

Exercice 1 : Traduire le problème suivant par une équation :
« Je pense à un nombre , je le multiplie par 10.J'enlève 20 au résultat , je trouve 10 »

Exercice 2 : « Si on augmente de x mètres la longueur d'un rectangle de 16m sur 20m, son aire augmente de 60m^2 »

1°) Faire un croquis
2°) Traduire cet énoncé par une équation

Exercice 3 :1°) « Dans un magasin on fait une remise de 30% sur les prix marqués. Vous y avez acheté un pull. Vous ne vous souvenez plus du prix marqué ,mais vous vous rappelez que le montant de la remise était de 90F »

En désignant par x le prix marqué en F de ce pull , traduire cet énoncé par une équation.

2°) « Une maison d'édition propose ses publications à 80%de leur tarif habituel.Le prix habituel d'une de ses publications est y F et son prix promotionnel est 40F »

Traduire cet énoncé par une équation.

Exercice 4 « Ma grand-mère a 5 ans de moins que mon grand-père. A eux d'eux ils ont 117 ans »

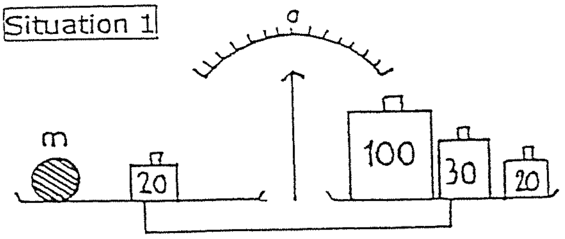
a°) Désigner par x l'âge de mon grand-père
Exprimer en fonction de x l'âge de ma grand-mère.

b°)Traduire cet énoncé par une équation.

SITUATIONS D'ETUDES ET DE RECHERCHES

m désigne la masse de l'objet à peser (l'unité de masse est le gramme)

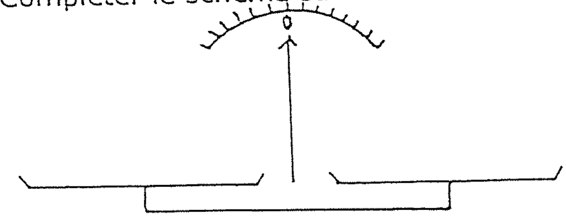
Situation 1



Traduire cet équilibre par une équation :

....(1)

On enlève maintenant 20g sur chaque plateau de la balance
Compléter le schéma suivant :



Traduire cet équilibre par une équation :

....(2)

Qu'a-t-on fait pour passer de l'équation (1) à l'équation (2) ?
Réponse : ....
....
....

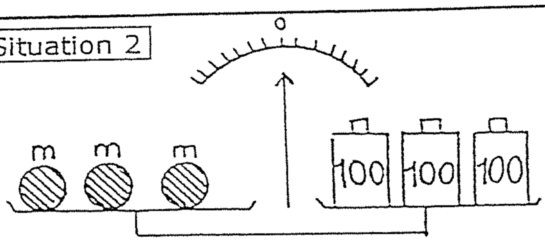
Que remarque-t-on ? ____
....

Application 1.1 :Résoudre $t + 52 = 21$; $x + \frac{2}{7} = -\frac{31}{35}$. Vérifier les résultats.

Remarque : Retrancher un nombre c'est .... Une égalité est donc conservée lorsqu'on ....

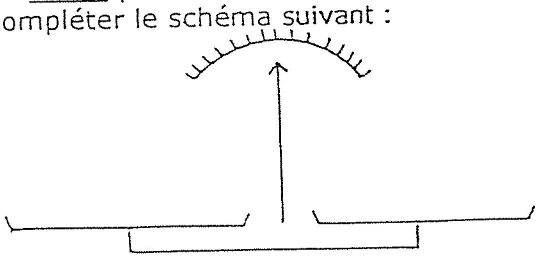
Application 1.2 : Résoudre $-3 + z = 14$; $17.3 = -10.3 + t$

Situation 2



Traduire cet équilibre par une équation
....(3)

On divise par 3 la masse de chaque plateau .
Compléter le schéma suivant :



Traduire l'équilibre par une équation
....(4)

Qu'a-t-on fait pour passer de l'équation (3) à l'équation (4) ?
....

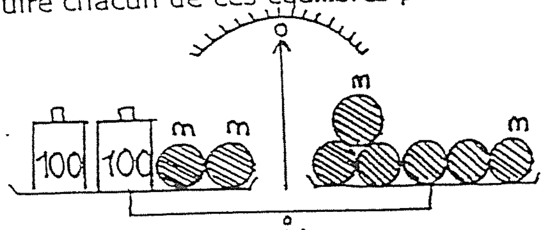
Que remarque-t-on ? ---

Remarque : Diviser par un nombre non nul c' est ....
Donc ....

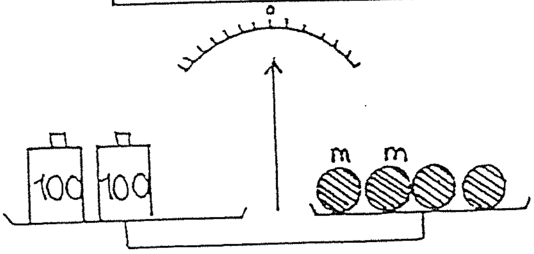
Application 2 : Résoudre $3x = 2$; $-4x = 1$; $\frac{1}{2}y = 1$; $0.004e = 1.8$; $\frac{1}{3}t = \frac{1}{4}$

Situation 3

Traduire chacun de ces équilibres par une équation



....

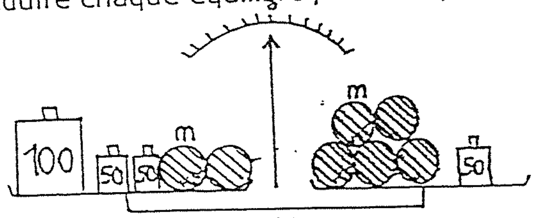


....

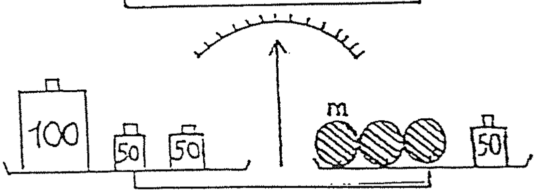
Comment a-t-on fait pour passer du premier équilibre au second équilibre ?
Réponse :...
Résolvons l'équation : $200 + 2m = 6m$
....
....
....
....
Application 3 : Résoudre $2x = 10 + x$; $1.25x + 1.75x - 8 = 8x$ Vérifier vos résultats.

Situation 4

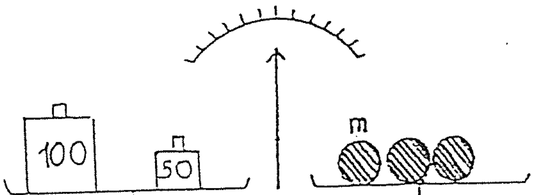
Traduire chaque équilibre par une équation



....



....



....

Comment a-t-on fait pour passer du 1^{er} au 2^{nd} équilibre ?...
Comment a-t-on fait pour passe du 2^{nd} au $3^{ième}$ équilibre ? ....

Résolvons l'équation : $200 + 2m = 5m + 50$
....
....
....
....
....

Application 4 : Résoudre $x - 5 = -2x + 7$; $-\frac{2x}{3} + 6 + x = 4x - 6$

RESOLUTIONS D'EQUATIONS

Exercice 1 : Voici quelques équations que l'on a déjà rencontrées.
Maintenant résolvons les ! On n'oubliera pas de faire une vérification des résultats obtenus.

$7g + 50 = 750$

$37.5 + 5.20x = 68.70$

$43.20\,y = 72$

$6x = 465$

$50 + x = 56 - x$

$2(y+175) = 650$

$2y + 3y = 650$

$11y = 165$

$10(2y + 10) = 650$

$50 \times 0.420 + 90y = 165$

$10x - 20 = 10$

$16(20+x) = 320+60$

$\frac{80}{100}y = 40$

$y + (y+5) = 117$

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes

1. $\frac{4}{6} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9} - x$
2. $\frac{10}{21} - x = \frac{1}{7}$
3. $-2x = -8$
4. $\frac{2}{7}x = \frac{5}{9}$
5. $-\frac{6}{7}x + \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x - 1$
6. $2(x-1) + 5(x-3) = 6x + 1$
7. $(x+1) - (2x+3) = -x + 2$
8. $4(5x-3) - 2(2+3x) = 5(3+3x) - (x-5)$
9. $\frac{4(x-1)}{5} = \frac{8(x-3)}{6}$
10. $\frac{3}{4}x - \frac{x}{2} + 10 = \frac{10}{4} - x + \frac{5}{2}$
11. $(2x+4)(x-5) = (x+2)(2x-10)$
12. $\frac{x+1}{3} - \frac{2x+1}{5} + \frac{x+4}{6} = \frac{x+8}{10}$
13. $\frac{5(8+x)}{4(10+x)} = \frac{1}{3} \qquad x \neq -10$
14. $\frac{x+5}{2(x+8)} = 4 \qquad x \neq -8$
15. $3x - 6[4x + 2 - 2(x+1)] = 0$

Exercice 3 :

a et b sont deux nombres dont le produit vaut 240. En faisant le produit de b par a+3 on obtient 276.
Calculer le nombre b puis le nombre a.

Exercice 4 : En ajoutant un entier x au numérateur de la fraction $\frac{15}{17}$ et en retranchant le même entier x à son dénominateur on obtient $\frac{5}{3}$. Calculer x.

Exercice 5 : On a : $\begin{array}{r|l} 793 & d+5 \\ \hline d-2 & 31 \end{array}$. Trouver d .

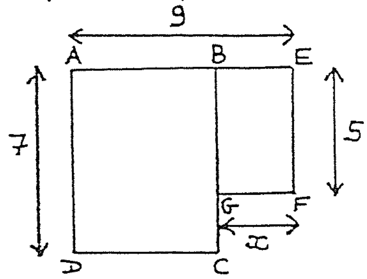
RESOLUTION DE PROBLEME DU PREMIER DEGRE

Exercice 1 : 1°)« Je pense à un nombre .Je le multiplie par 5.J'enlève 28 au résultat. Je trouve alors le triple du nombre de départ. » A quel nombre ai-je pensé ?

2°)« Je pense à un nombre .Je le multiplie par 4 puis j'ajoute 15.Je multiplie ce résultat par 5,j'obtiens alors le décuple (10 fois) du nombre de départ ». A quel nombre ai-je pensé ?

Exercice 2 :(Problème d'aire)

Trouver x pour que les rectangles ABCD et BEFG aient la même aire.

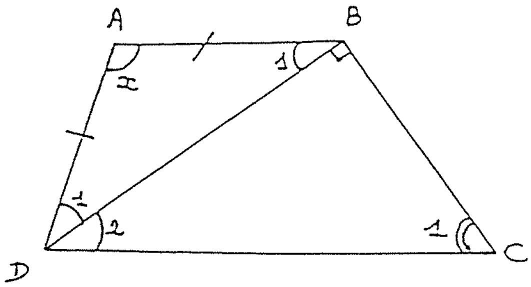


Exercice 3 : Un père a 25 ans de plus que sa fille Mélina. Dans 6 ans l'âge du père sera le double de celui de sa fille .Quels sont les âges de Mélina et de son père ?

Exercice 4 :(Problème d'angle)

Le quadrilatère de la figure ci-contre est un trapèze de base AB et DC tel que AB=AD.
On note x la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$: $x=\widehat{BAD}$

1°) Calculer les angles $\hat{B}_1, \hat{D}_1, \hat{D}_2$ et $\hat{C}_1$ en fonction de x.(il y a sur la figure deux angles alterne-interne)
2°)Quelle doit être la valeur de x pour que le triangle DBC soit isocèle.

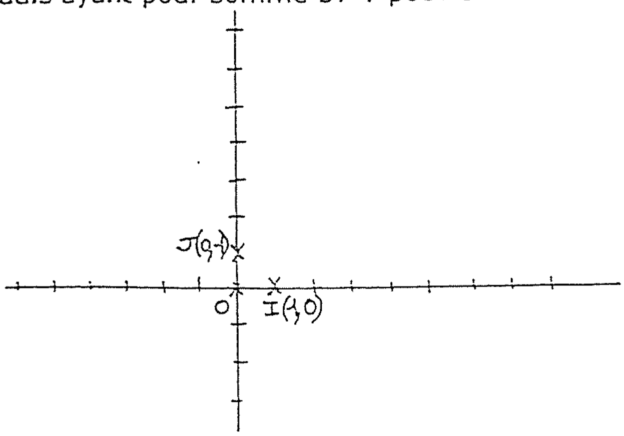


Exercice 5 : (Problème de moyenne)
Julie a eu 9 notes .Sa moyenne est 9.5.Quelle doit être sa note au prochain devoir pour que sa nouvelle moyenne soit 10 ? (Tous les devoirs sont comptés coefficient 1).

Exercice 6 : Existe-t-il deux nombres entiers consécutifs ayant pour somme 57 ? pour somme 126 ?

Exercice 7 : (Problème de milieu !)

On se donne dans un repère (O ,I ,J) les points : A(4 ; -2) B(1 ;-3) C(-2 ;6)
1°) Compléter la figure et calculer les coordonnées de K milieu de [AC].
2°)Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.



Exercice 8 : (Problème d'héritage)

« Un notaire veut partager 25110F entre trois personnes de manière à ce que la seconde ait les $\frac{3}{4}$ de la part de la première et la troisième les $\frac{9}{5}$ de la part de la seconde . »

Calculer la part de chacune des trois personnes .

Exercice 9 :
« Deux négociants ont respectivement 30000F et 100000F.Leur capital à chacun s'accroît chaque année de 5000F.Déterminer au bout de combien de temps le capital du premier sera égal à la moitié du capital du second. »

NOM : ……………………

Prénom :………………………

TEST N° 7 α

Exercice 1 : « Je pense à un nombre. Je le multiplie par 3, puis j'ajoute 5. Je trouve 44. »

1°) Traduire cette phrase par une équation.

2°) Résoudre cette équation.

3°) Vérifier votre résultat.

Exercice 2 : « Une bouteille et son bouchon coûte 1.10F. Sachant que la bouteille vaut 1F de plus que le bouchon, calculer le prix de la bouteille et du bouchon ».

Pour cela : 1°) En notant x le prix du bouchon, exprimer en fonction de x le prix de la bouteille.

2°) Traduire le problème par une équation puis, la résoudre.

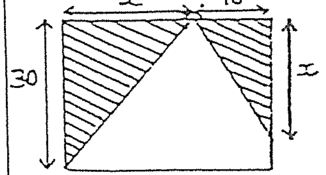
3°) Vérifier votre résultat et conclure.

Exercice 3 : Voici 5 équations et 3 problèmes. Il s'agit de trouver l'équation correspondante à chacun des problèmes. (on ne demande pas de résoudre les équations)

A	$\frac{30x}{2} + \frac{10x}{2} = \frac{30(x+10)}{2}$
B	$30x + 10x = \frac{30(x+10)}{2}$
C	$2 + 10x = 2x + 30$
D	$10 + 2x = 30$
E	$30 + 10x = 2x + 2$

PROBLEME 1

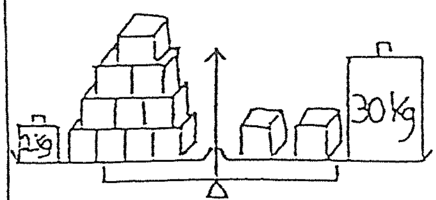
Déterminer x pour que l'aire hachurée soit égale à la moitié de l'aire du rectangle.



EQUATION : ……………………

PROBLEME 2

Tous les cubes ont la même masse. La balance est en équilibre. Quelle est la masse d'un cube ? (on note x cette masse en kg)



EQUATION : ………………………………………

PROBLEME 3

Un rectangle a une largeur de 5cm et un périmètre de 30cm. Quelle est sa longueur ? (on note x sa longueur en cm)

EQUATION : …………

Barème : chaque exercice est sur 2 points

Test 7 α : correction et commentaires

Exercice 1 : On pense à un nombre , on le multiplie par 3 , puis on ajoute 5 et on trouve 44.Ce que l'on veut trouver c'est ce nombre en question .Notons le n (par exemple).
Traduisons pas à pas :

Je pense à un nombre $\rightarrow n$
Je le multiplie par 3 $\rightarrow 3n$
Puis on ajoute 5 $\rightarrow 3n + 5$
On trouve alors 44 $\rightarrow 3n + 5 = 44$

Résolvons cette équation : $3n + 5 = 44$

$$3n + 5 - 5 = 44 - 5$$
$$3n = 39$$
$$\frac{3n}{3} = \frac{39}{3}$$
$$n = 13$$

vérification : $3 \times 13 + 5 = 39 + 5 = 44$

Exercice 2 : Il faut se laisser guider par l'énoncé et ne pas se précipiter.
1°) On note x le prix du bouchon , on veut savoir en fonction de x le prix de la bouteille.
La bouteille coûte un franc de plus que le bouchon donc : prix bouteille = prix bouchon + 1
soit : prix bouteille = $x + 1$

2°) On traduit le problème :

prix bouteille + prix bouchon = 1.10
$x + 1 \quad + \quad x \quad = 1.10$

$$2x + 1 = 1.10$$
$$2x + 1 - 1 = 1.10 - 1$$
$$2x = 0.10$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{0.10}{2}$$

$x = 0.05$. Le prix du bouchon est 0.05F . Vérification : $0.05+1+0.05=1.10$.

Exercice 3 : Le conseil que l'on peut encore une fois donné pour faire cet exercice est de lire l'énoncé de chaque problème et de traduire pas à pas les informations données.

Problème 1 : Calculons l'aire du rectangle , c'est $30(x +10)$.La moitié de l'aire du rectangle sera donc : $\frac{30(x+10)}{2}$.

L'aire hachurée est la somme des aires de deux triangles rectangles dont les mesures des deux côtés relatifs à l'angle droit sont données ; cette aire est donc égale à : $\frac{30x}{2} + \frac{10x}{2}$.

On traduit le problème : Aire hachurée = moitié de l'aire du rectangle

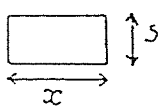
soit : $\frac{30x}{2} + \frac{10x}{2} = \frac{30(x+10)}{2}$

L'équation correspondante au problème 1 est donc l'équation A.

Problème 2 : La balance est en équilibre. Cela signifie que la masse du plateau de gauche est égale à la masse du plateau de droite . Sur le plateau de gauche , il y a notamment 10 cubes ; sachant qu'un cube a une masse de x Kg , 10 cubes auront une masse de 10x Kg.
Masse plateau de gauche = $2 + 10x$ Masse plateau de droite = $2x + 30$
On traduit le problème : Masse plateau de gauche = masse plateau de droite
soit : $2 + 10x = 2x + 30$

L'équation correspondante au problème 2 est donc l'équation C.

Problème 3 : Au brouillon , il est conseillé de faire un petit croquis



Périmètre d'un tel rectangle = $2 (5 + x) = 10 + 2x$
Traduction du problème : périmètre rectangle = 30
d'où : $10 + 2x = 30$

L'équation correspondante au problème 3 est donc l'équation D.

Nom : ………………….

Prénom : ……………

TEST 7β

Résoudre les équations suivantes :

- Equation 1 : $4x - 8 = 0$
- Equation 2 : $\frac{8}{9}y = -4$
- Equation 3 : $5x - 5 = 6x + 9$
- Equation 4 : $\frac{t-4}{t+2} = \frac{1}{2}$ $\quad t \neq -2$
- Equation 5 : $y - 1 - (2y + 5) = -y + 4$
- Equation 6 : $\frac{4}{7} - \frac{3}{4}x = \frac{5}{7} - \frac{7}{8}x$
- Equation 7 : $x - (x + 1)(x + 2) = -x(x + 2) - 2$.

Barème : chaque équation : 1 point

CORRECTION DU TEST 7β

① $4x - 8 = 0$ Vérif : $4 \times 2 - 8 = 0$

$4x - 8 + 8 = 0 + 8$ $8 - 8 = 0$

$4x = 8$

$x = \frac{8}{4}$

$x = 2$

② $\frac{8}{9} y = -4$ Vérif : $\frac{8}{9} \times \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{8}{2} = -4$

$\frac{8}{9} y \times \frac{9}{8} = -4 \times \frac{9}{8}$

$y = -\frac{36}{8}$

$y = -\frac{9}{2}$

Equation 3 : $5x - 5 = 6x + 9$

$5x - 5 + 5 = 6x + 9 + 5$

$5x = 6x + 14$

$5x - 6x = 6x - 6x + 14$

$-1x = 14$

$-x = 14$

$-14 = x$

Vérification :

$5 \times (-14) - 5 = -70 - 5 = -75$

$6 \times (-14) + 9 = -84 + 9 = -75$

Equation 4 : $\frac{t-4}{t+2} = \frac{1}{2}$ $t + 2$

$(t-4) \times 2 = (t+2) \times 1$

$2t - 8 = t + 2$

$2t - 8 - 2 = t + 2 - 2$

$2t - 10 = t$

$2t - 10 + 10 = t + 10$

$2t = t + 10$

$2t - t = t - t + 10$

$t = 10$

Vérification :

$$\frac{10-4}{10+2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Equation 5

$y - 1 - (2y + 5) = -y + 4$

$y - 1 - 2y - 5 = -y + 4$

$y - 2y - 1 - 5 = -y + 4$

$-1y - 6 = -y + 4$

$-1y - 6 + 6 = -y + 4 + 6$

$-1y = -y + 10$

$-1y + y = 10$

$0 = 10$

Impossible

Il n'y a donc pas de solution à cette équation

Equation 6

$\frac{4}{7} - \frac{3}{4} x = \frac{5}{7} - \frac{7}{8} x$

$\frac{4}{7} - \frac{4}{7} - \frac{3}{4} x = \frac{5}{7} - \frac{4}{7} - \frac{7}{8} x$

$-\frac{3}{4} x = \frac{1}{7} - \frac{7}{8} x$

$-\frac{3}{4} x + \frac{7}{8} x = \frac{1}{7} - \frac{7}{8} x + \frac{7}{8} x$

$\frac{1}{8} x = \frac{1}{7}$

$\frac{1}{8} x \times \frac{8}{1} = \frac{1}{7} \times \frac{8}{1}$

$x = \frac{8}{7}$

Vérification :

$$\frac{4}{7} - \frac{3}{4} \times \frac{8}{7} = \frac{4}{7} - \frac{24}{28} = \frac{16}{28} - \frac{24}{28} = -\frac{8}{28} = -\frac{2}{7}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{7}{8} \times \frac{8}{7} = \frac{5}{7} - 1 = \frac{5}{7} - \frac{7}{7} = -\frac{2}{7}$$

Equation 7 :

$x - (x+1)(x+2) = -x(x+2) - 2$

$x - (x^2 + 2x + x + 2) = -x^2 - 2x - 2$

$x - (x^2 + 3x + 2) = -x^2 - 2x - 2$

$x - x^2 - 3x - 2 = -x^2 - 2x - 2$

$-x^2 - 2x - 2 = -x^2 - 2x - 2$

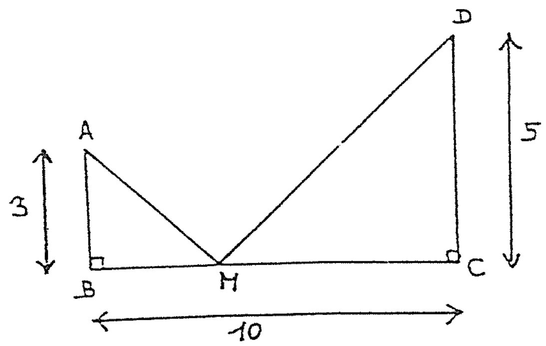
Il y a une infinité de solution

TEST 7 χ

Nom : ....

Prénom :..................

Exercice 1 : A quelle distance de B doit-on placer le point M sur le segment [BC] pour que les triangles ABM et DMC aient la même aire ?



Exercice 2 : La somme de trois nombres entiers consécutifs est 54.Quels sont ces nombres ?

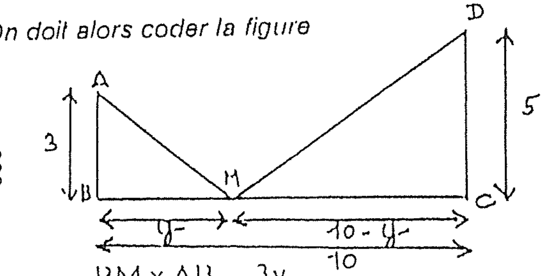
Barème : 3.5 points chaque exercice

Correction du test 7χ (et commentaires)

Exercice 1 :
On veut savoir à quelle distance de B on doit placer le point M sur le segment [BC] pour que les triangles ABM et DMC aient la même aire. C'est à dire que l'on veut connaître la distance BM de manière à ce que les aires des triangles ABM et DMC soient égales.

Notons y la distance BM . y = BM

On doit alors coder la figure



Aire ABM= $\frac{BM \times AB}{2} = \frac{3y}{2}$

Aire DMC = $\frac{DC \times MC}{2} = \frac{5(10-y)}{2}$

D'où l'équation à résoudre :

$\frac{3y}{2} = \frac{5(10-y)}{2}$

3y=5(10-y)

3y=50-5y

3y+5y=50-5y+5y

8y=50

$y = \frac{50}{8}$

y = 6 25

Vérification : $\frac{3 \times 6.25}{2} = 9.375$

$\frac{5(10-6.25)}{2} = 9.375$

On doit donc placer le point M sur [BC] à 6,25 (unité de longueur) du point B.

Exercice 2 : On veut trouver 3 nombres entiers consécutifs tel que leur somme soit égale à 54.

Il faut être conscient que si l'on trouve l'un de ces trois nombres alors on aura les deux autres.

1ère possibilité : On prend comme inconnue le plus petit de ces trois nombres .On le note n. Les deux autres sont alors n+1 et n+2.
2ème possibilité :On prend comme inconnue le plus grand de ces trois nombres. On le note r. Les autres sont alors r-1 et r-2.
3ème possibilité : On prend comme inconnue l'entier intermédiaire .On le note u .Les deux autres sont alors u-1 et u+1.

C'est la 1ère possibilité qui est présentée ci-dessous.

Exercice 2 :

1ère étape : choix de l'inconnue

Je choisi n pour désigner le premier nombres donc les autres sont : n+1
n+2

2ème étape : Mise en équation
n+n+1+n+2=54

3ème étape : Résolution

3n+3=54
3n=54-3
3n=51
$n = \frac{51}{3}$
n=17

Les nombres entiers consécutifs sont 17, 18 et 19

4ème étape : Vérification
17+18+19=54

DEVOIR A LA MAISON N° 7 (D.M 7)
A rendre le 23/01/98

On rappelle que l'on doit porter une grande application à la rédaction.

Exercice 1 : 1°) En ajoutant le même nombre x au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{5}{7}$ on obtient $\frac{9}{10}$.

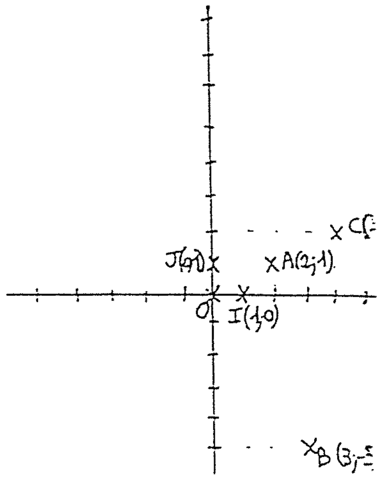
Calculer x.

2°) Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{9x+7}{2}-\left(x-\frac{x-2}{7}\right)=36$$

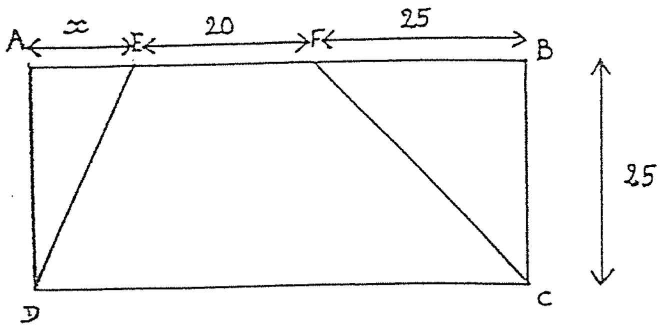
$$10x^2-5x(2x+3)=15$$

$$\frac{\frac{x}{3}}{4}=\frac{1}{2}x-4$$



3°) Dans un repère (O,I,J) on donne les points A(2 ; 1) B(3 ; -5) C(4 ; 2)
a°) Calculer les coordonnées de K milieu de [AC].
b°)Déterminer alors les coordonnées du point D de manière à ce que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

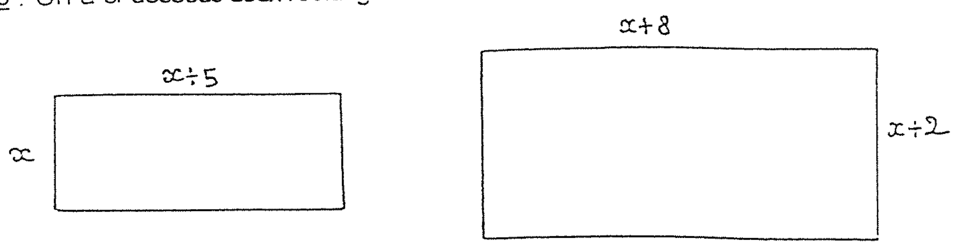
Exercice 2 : Pour quelle valeur de x l aire du trapèze DEFC ci-dessous est-elle égale aux trois cinquièmes de celle du rectangle ABCD ?



Exercice 3 : Dans un jardin le tiers de la surface est recouvert par des fleurs, un sixième par des plantes et le reste soit 150m^2 est occupé par de la pelouse. Calculer l'aire de ce jardin.

Exercice 4 : On partage une somme de 9800F entre trois personnes.
La première doit recevoir 240F de moins que la deuxième et la part de la troisième doit être égale au trois quarts de la somme des parts des deux autres.
Calculer la part de chaque personne.

Exercice 5 : On a ci-dessous deux rectangles dont les dimensions sont indiquées en cm.



Sachant que l'aire du plus grand rectangle est égale à l'aire du plus petit rectangle augmentée de 51cm^2,calculer x.

Bon travail

Correction du D.M 7 et commentaires

Exercice 1 :

1°) $\frac{5+x}{7+x}=\frac{9}{10}$

(Remarquons que x ne peut être égal à –7 (sinon 7 + (-7) = 0 et, on ne peut pas diviser par 0)

$10(5+x)=9(7+x)$

$50+10x=63+9x$

$10x-9x=63-50$

$x=13$

Vérification : $\frac{5+13}{7+13}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$

2°)

$$\frac{9x+7}{2}-(x-\frac{x-2}{7})=36$$

$$\frac{9x}{2}+\frac{7}{2}-(\frac{7x}{7}-\frac{x}{7}+\frac{2}{7})=36$$

$$\frac{9x}{2}+\frac{7}{2}-(\frac{6x}{7}+\frac{2}{7})=36$$

$$\frac{9x}{2}+\frac{7}{2}-\frac{6x}{7}-\frac{2}{7}=36$$

$$\frac{63x}{14}-\frac{12x}{14}+\frac{49}{14}-\frac{4}{14}=36$$

$$\frac{51x}{14}+\frac{45}{14}=36$$

$$\frac{51x}{14}=\frac{504}{14}-\frac{45}{14}$$

$$51x=459$$

$$x=\frac{459}{51}$$

$$x=9$$

Vérification : $\frac{9\times9+7}{2}-(9-\frac{9-2}{7})=44-(\frac{63}{7}-\frac{7}{7})=36$

• $10x^2-5x(2x+3)=15$

$10x^2-10x^2-15x=15$

$-15x=15$

$x=-1$

Vérification : $10(-1)2-5\times(-1)\times(-2+3)=10+5=15$

•

$$\frac{x}{3}=\frac{1}{2}x-4$$

4

$$\frac{4}{3}x=\frac{1}{2}x-4$$

$$\frac{4}{3}x-\frac{1}{2}x=-4$$

$$\frac{5}{6}x=-4$$

$$x=-4\times\frac{6}{5}$$

$$x=-\frac{24}{5}$$

Vérification : $\frac{1}{2}(-\frac{24}{5})-4=-\frac{12}{5}-4=-\frac{32}{5}=-6.4$

$\frac{-24}{5}\times\frac{4}{3}=-\frac{96}{15}=-6.4$

3°a°) A (2 ; 1) B(3 ; -5) C(4 ; 2)

Calculons les coordonnées de K milieu de [AC]

$$x_K=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1.5$$

Donc K (3 ; 1.5)

b°) Pour que ABCD soit un parallélogramme il **suffit** que ses diagonales se coupent en leur milieu ; c'est à dire que le point K soit le milieu de [AC] et de [BD].

$x_K=\frac{x_B+x_D}{2}$	$y_K=\frac{y_B+y_D}{2}$
$3=\frac{3+x_D}{2}$	$1.5=\frac{-5+y_D}{2}$
$6=3+x_D$	$3=-5+y_D$
$x_D=3$	$y_D=8$

Vérification : $\frac{3+3}{2}=\frac{6}{2}=3=x_K$ $\frac{-5+8}{2}=\frac{3}{2}=1.5=y_K$

Exercice 2 :

Aire trapèze DEFC= $\frac{(x+20+25+20)\times 25}{2} = \frac{(65+x)\times 25}{2}$

Aire rectangle ABCD =25(x+20+25)=25(x+45)

Mise en équation : Aire trapèze = $\frac{3}{5}$ Aire rectangle

$\frac{25(65+x)}{2} = \frac{3}{5}\times 25(x+45)$

25(65+x)=15(x+45)×2

25(65+x)=30(x+45)

1625+25x=30x+1350

275=5x

x=275/5

x=55

Vérification : $\frac{25(65+55)}{2} = 1500$

$\frac{3}{5}\times 25(55+45) = 1500$

Exercice 3 :

Notons x l'aire de ce jardin

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x + 150 = x$

$\frac{3}{6}x + 150 = x$

$150 = x - \frac{1}{2}x$

$150 = \frac{1}{2}x$

$x = 300$

L'aire de ce jardin est donc 300m^2.

Vérification : $\frac{1}{3}(300) + \frac{1}{6}(300) + 150 = 300$

Exercice4 :

Notons x la part de la seconde personne.

La part de la première est alors x –240

La part de la 3^{ième} est $\frac{3}{4}(x+x-240) = \frac{3}{4}(2x-240)$

On a alors l'équation suivante :

$x + x - 240 + \frac{3}{4}(2x-240)=9800$

$2x + \frac{6x}{4} - 240 - 180 = 9800$

$\frac{7x}{2} = 9800 + 420$

$x = \frac{2}{7}(10220)$

$x = 2920$

La part de la 2nde personne est donc de 2920F, celle de la 1ère de 2680F(2920-240) et celle de la 3^{ième} de 4200F ($\frac{3}{4}(2\times 2920 - 240)$).

Vérification : 2920+2680+4200=9800

Exercice 5 : (x +8) (x + 2)=x(x + 5) + 51

$x^2 + 2x + 8x + 16 = x^2 + 5x + 51$

10x+16=5x+51

5x=35

x=7

Vérification : (7 + 8) (7 + 2) = 135 et 7 (7+5) +51 = 135

Mémo :

$-\frac{x-2}{7} = -(\frac{x-2}{7}) = -(\frac{x}{7} - \frac{2}{7}) = -\frac{x}{7} + \frac{2}{7}$

$\frac{x}{\frac{3}{4}} = x \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}x$

Si A et B sont deux points de coordonnées respectives (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B) alors les coordonnées de I milieu de [AB] sont :

$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme , il suffit par exemple de démontrer que ses diagonales se coupent en leur milieu.

(a + b) (c + d) = ac +ad +bc +bd

Ex : (x + 2) (y – 3) = xy - 3x + 2y – 6

$(x-2)(x-4) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8$

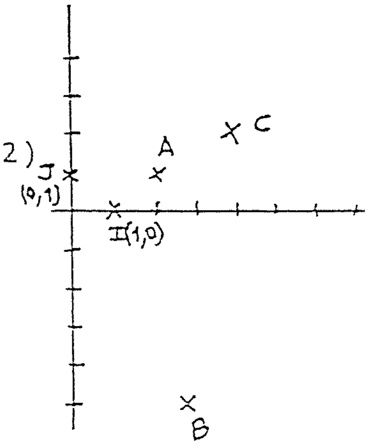
MATHEMATIQUES CONTROLE N° 5

Exercice 1 : Résoudre l'équation suivante et vérifier le résultat

$$8(4-3x)+2=57-(31x-5)$$

Exercice 2 : Un triangle ABC d'aire 6 cm^2 est tel que le segment [BC] est fixe et de longueur 3cm.
Sur quelle(s) ligne(s) fixe(s) le point A peut-il se déplacer ?
(*Faire un schéma*)

Exercice 3 : Dans un repère (O ,I , J) on donne les points : A(2 ; 1) B (3 ; -5) C (4 ; 2)



1°) Calculer les coordonnées de K milieu de [AC]
2°) Déterminer alors les coordonnées du point D de manière à ce que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

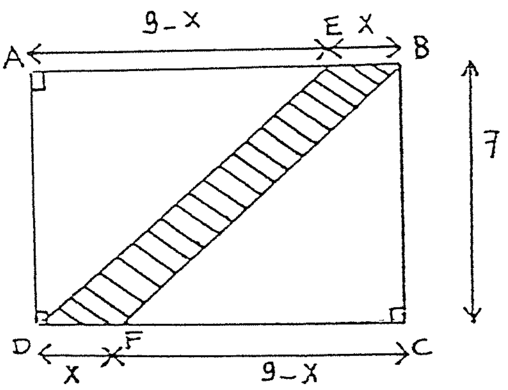
Exercice 4 : Un automobiliste parcourt 570 Kms en trois étapes.

La longueur de la seconde étape est égale au $\frac{2}{3}$ de la première

La longueur de la troisième étape est égale au $\frac{2}{3}$ de la seconde.

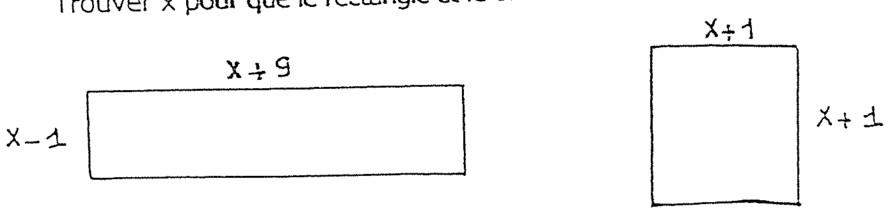
Quelle est la longueur de chaque étape ?

Exercice 5 :



1°) Démontrer que EBFD est un parallélogramme.
2°) Que vaut x pour que l'aire hachurée soit le double de l'aire restante ?

Exercice 6 :
Trouver x pour que le rectangle et le carré ci-dessous aient la même aire.



Exercice 7 : Factoriser les expressions suivantes

A= 7x + 14b
B = 15ax + 7a

C= $3a^3 + 4a^2 - 5a$
D=7x + 7

Barème : Exo 1 : 2pts Exo 2 : 2pts Exo 3 : 3.5pts Exo4 : 4 pts Exo 5 : 4 pts Exo6 : 2.5pts Exo7 : 2 pts

Bon travail à tous.

Correction CONTROLE 5

Exercice 1

$8(4-3x)+2 = 57-(31x-5)$

$32-24x+2 = 57-31x+5$

$32+2-24x = 57+5-31x$

$34-24x = 62-31x$

$-24x+31x = 62-34$

$7x = 28$

$x = \frac{28}{7}$

$x = 4$

Vérification :

$8(4-3\times4)+2 = -62$

$57-(31\times4-5) = -62$

exercice n° 5

1°) EBFD est un parallélogramme car 2 de ses côtés opposés sont parallèles et égaux. (précisez lesquels : EB = DF = x et (EB) // (DF) car ABCD est un rectangle.)

2°) $7x = 2(\mathcal{A}_{AED}+\mathcal{A}_{BCF})$ ($\mathcal{A}$: aire).

$7x = 2\left(\frac{7(9-x)}{2}+\frac{7(9-x)}{2}\right)$

$7x = 7(9-x)+7(9-x)$

$7x = 14(9-x)$

$7x = 126-14x$

$14x+7x = 126$

$21x = 126$

$x = \frac{126}{21}$

$x = 6$

vérification : $7\times6 = 42$

$2\left(\frac{7(9-6)}{2}+\frac{7(9-6)}{2}\right) = 2(7(9-6)) = 2(7\times3) = 42$

Exercice 3

Aire rectangle = Aire carrée

$(x-1)(x+9) = (x+1)(x+1)$

$x^2+9x-1x-9 = x^2+x+x+1$

$9x-x-9 = 2x+1$

$8x-9 = 2x+1$

$8x-2x = 1+9$

$6x = 10$

$x = \frac{10}{6}$

$x = \frac{5}{3}$

Vérification :

$\left(\frac{5}{3}-1\right)\left(\frac{5}{3}+9\right) = \left(\frac{5}{3}-\frac{3}{3}\right)\left(\frac{5}{3}+\frac{27}{3}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{32}{3} = \frac{64}{9}$

$\left(\frac{5}{3}+1\right)\left(\frac{5}{3}+1\right) = \left(\frac{5}{3}+\frac{3}{3}\right)\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{3}\right) = \frac{8}{3}\times\frac{8}{3} = \frac{64}{9}$

Exercice 1

$A = 7x+14b$

$A = 7(x+2b)$

$B = 15ax+7a$

$B = a(15x+7)$

$C = 3a^3+4a^2-5a$

$C = a(3a^2+4a-5)$

$D = 4x+4$

$D = 4(x+1)$

Exercice 2 :

On a un triangle ABC d'aire 6cm² tel que le segment [BC] est fixe et de longueur 3cm.

Calculons la hauteur h relative au côté BC. (La hauteur relative au côté BC est la distance de A à la droite (BC).

$\frac{3h}{2} = 6$

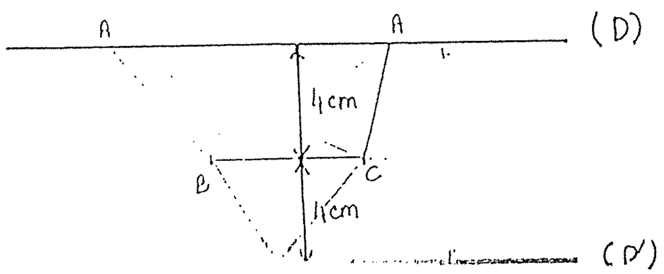
$3h = 6\times2$

$h = \frac{12}{3}$

$h = 4$

Or l'ensemble des points situés à une distance de 4 cm de (BC) sont les deux droites parallèles à (BC) et distantes de (BC) de 4 cm.

Donc le point A peut se déplacer sur les droites (D) et (D') ainsi construites(*voir schéma*).



Exercice 4 :

Notons L la longueur de la 1ère étape.

Celle de la seconde sera alors $\frac{2}{3}L$, et celle de la troisième sera $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}L\right) = \frac{4}{9}L$.

D'où l'équation : $L+\frac{2}{3}L+\frac{4}{9}L = 570$

$\frac{9}{9}L+\frac{6}{9}L+\frac{4}{9}L = 570$

$\frac{19}{9}L = 570$

$\frac{9}{19}\times\frac{19}{9}L = \frac{9}{19}\times570$

$L = 270$

La longueur de la 1ère étape est donc 270kms, celle de la seconde $\frac{2}{3}\times270 = 180$Kms et celle de la troisième $\frac{4}{9}(270) = 120$ Kms .

Vérification : 270+180+120 = 570

Elève 6

TEST D'ENTREE DANS L'ETUDE DU THEME :
« Equations et problèmes »

Résoudre les équations suivantes :

$t + 52 = 21$ $t = 21 - 52$ $t = -31$	$-3 + z = 14$ $z = 14 + 3$ $z = 17$	$17.3 = -10.3 + t$ $t = 17,3 + 10,3$ $t = 27,6$
$25d = 40$ $d = \frac{40}{25}$ $d = \frac{\cancel{5} \times 8}{\cancel{5} \times 5}$ $d = \frac{8}{5}$	$0.04\, e = 1.8$ $e = 1,8 - 0,04$ $e = 1,76$	$\frac{1}{3} x = \frac{1}{4}$ $x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}$ $x = \frac{1}{4} \times 3$ $x = \frac{3}{4}$

Claude mesure x centimètres .Tom mesure 15cm de moins que lui. Quelle est la taille de Tom ?

Réponse : $x = \cancel{x} - 15$

$15 = 0x - x$

$2x = 15$

Une maison d'édition propose ses publications à 80% de leur tarif habituel. Le prix habituel d'une de ces publication est de y francs. Quel est le prix promotionnel de cette publication ?

Réponse : Le prix de cette publication est :

$y = \frac{80}{100}$

$y = \frac{40 \times \cancel{5}}{50 \times \cancel{5}}$

$y = \frac{8 \times \cancel{5}}{10 \times \cancel{5}}$

$y = \frac{4}{5}$

CHAPITRE 4 — Équations et problèmes.

I Mise en équation

En mathématiques, une grandeur que l'on ne connaît pas et que l'on peut calculer à partir des informations de l'énoncé. Elle s'appelle une inconnue.
Très souvent, pour résoudre un problème, on désigne cette grandeur inconnue par une lettre, puis on traduit ce problème pour obtenir une équation.

exemple : Julie a acheté 2 CD roms et 7 disquettes à 4 F pièce. Elle a payé 450,5 F.
On ne connaît pas le prix d'un CD rom en F. On choisi la lettre c pour le désigner.
On traduit le problème : prix de 2 CD roms + prix de 7 disquettes = 450,5
d'où l'équation $2c + 7 \times 4 = 450,5$ F

exemple : Je pense à un nombre, je le multiplie par 8, puis j'ajoute 72. Je trouve alors 150.
Notons x ce nombre.

$8x + 72 = 150$

II Résolution d'équations

Résoudre une équation d'inconnu x, c'est chercher l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vérifiée.
Pour résoudre une équation on peut sans changer l'ensemble des solutions :

* ajouter ou retrancher un même nombre ou même expression aux deux membres de l'équation

ex : $x + 8 = 27$

$x + 8 - 8 = 27 - 8$

$x = 19$

vérif : $19 + 8 = 27$

* multiplier ou diviser par un même nombre non nul ou une expression les 2 membres d'une équation

ex : $45x = -15$

$\frac{45}{45}x = \frac{-15}{45}$

$x = -\frac{1}{3}$

vérif $45\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{45}{3} = -15$

Technique

Pour résoudre une équation du 1er degré (de la forme $ax + b = cx + d$) on utilise les traitements précédents afin :

- regrouper d'un côté du signe "=" tous les termes dans lesquels l'inconnue figure

- regrouper de l'autre côté tous les termes numériques

On vérifie à la fin que la solution obtenue convient bien (en reportant la solution dans l'équation de départ).

Exemple : Résoudre l'équation 8(4-3x)+2=53 -(31x-5)

32-24x+2=53-31x+5

34-24x=58-31x

34-34-24x=58-31x -34

-24x=24-31x

-24x+31x=24-31x+31x

7x=24

$\frac{7x}{7} = 24$

$\boxed{x = \frac{24}{7}}$

Vérification :

$$8(4-3\times\frac{24}{7})+2 = 8(4-\frac{72}{7})+2 = 8(\frac{28-72}{4})+2 = 8(-\frac{44}{77})+2 = -\frac{352}{7}+\frac{14}{7} = -\frac{338}{7}$$

$$53-(31\times\frac{24}{7}-5) = 53-(\frac{744}{7}-5) = 53-(\frac{744-35}{7}) = 53-\frac{709}{7} = \frac{371-709}{7} = -\frac{338}{7}$$

Attention :
Le plus souvent une équation du 1^{er} degré admet une solution et une seule mais, il peut arriver qu'elle n'en admette aucune ou que tout nombre soit solution

ex $2x = 2x + 1$

$2x - 2x = 2x - 2x + 1$

$0 = 1$ impossible

il n'y a pas de solution

ex : $x + 1 = 2\left(4 + \frac{1}{2}x\right) - 7$

$x + 1 = 8 - 7 + x$

$x + 1 = x + 1$

il y a une infinité de solutions

III Résolution de problème du 1^{er} degré

Beaucoup de problèmes concrets se résolvent facilement si on les traduit par une équation

Technique
$1^{ère}$ étape : choix de l'inconnue
2^{e} étape : mise en équation
3^{e} étape : résolution de l'équation
4^{e} étape : vérifier que la solution obtenue convient et qu'elle est acceptable pour le problème concret posé

ex d'application
trouver 3 entiers consécutifs dont la somme est égale à 306
1^{er} étape : choix de l'inconnue
notons n le premier de ces 3 entiers consécutifs, les deux autres s'écrivent $n+1$ et $n+2$

2ᵉ étape : mise en équation

$$n + n + 1 + n + 2 = 306$$

3ᵉ étape : résolution

$$3n + 3 = 306$$

$$3n = 306 - 3$$

$$n = \frac{303}{2}$$

$$n = 101$$

4ᵉ étape : vérif

$$3 \times 101 + 3 = 306$$

Conclusion : les nombres cherchés sont 101, 102, 103 ($101 + 102 + 103 = 306$)

Remarque : le choix de l'inconnu n'est pas unique. On aurait pu par exemple choisir l'entier intermédiaire. Notons x, les 2 autres seraient $x - 1$ et $x + 1$, on a alors :

$$x - 1 + x + x + 1 = 306$$

$$3x = 306$$

$$x = 102$$

$$x + 1 = 103, \; x - 1 = 101$$