Actes du 15e colloque de la CORFEM

Antony – Val de Bievre
19-20 Juin 2008
Universite de Cergy-Pontoise, IUFM de Versailles

Coordonnes par Brigitte Grugeon-Allys

Sommaire

Thème 2 : Questions autour de l'évaluation par compétences

Introduction

Brigitte Grugeon-Allys, responsable de la CORFEM

Depuis maintenant une quinzaine d'années, la commission Inter IREM des formateurs des professeurs de mathématiques du second degré organise tous les ans un colloque. Le présent document constitue les actes du 15ième colloque de la CORFEM, qui s'est déroulé les 19 et 20 juin à l'IUFM de Versailles – Université de Cergy Pontoise sur le site d'Antony Val de Bièvre.

La CORFEM est la commission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré. La commission regroupe des formateurs associés, soit à plein temps – PRCE, PRAG ou enseignants-chercheurs –, enseignant tous à l'IUFM, qui souhaitent réfléchir sur les stratégies de formation, produire des documents pour améliorer leur action auprès des professeurs stagiaires, et mutualiser des ressources. La CORFEM se donne pour buts d'accompagner la formation des formateurs d'enseignants de mathématiques, ainsi que d'échanger, de mutualiser et d'élaborer un ensemble de ressources pour la formation, en particulier, *via* son colloque annuel qui regroupe entre 60 et 80 participants. Ces colloques donnent lieu à des publications. Des informations sont disponibles sur le site **http://www.lyon.iufm.fr/corfem/math_colloque.html**
La CORFEM, les membres de son bureau[1], espèrent ainsi favoriser une meilleure visibilité de la formation des professeurs dans l'enseignement secondaire et contribuer à la prise en compte de thèmes de formation pour la recherche.

Les deux thèmes :

- La notion de fonction dans l'enseignement du collège à l'université et la formation des PLC2,
- Questions autour de l'évaluation par compétences,

ont été le fil directeur du colloque. Ce document rend compte en partie des conférences et des ateliers qui ont eu lieu ces deux journées.

[1] Isabelle Bloch – IUFM d'Aquitaine, Pascale Boulais, IUFM et IREM des Pays de Loire, Alain Bronner – IUFM et IREM de Montpellier, J. François Chesné, IUFM de Créteil, Sylvie Coppé – IUFM et IREM de Lyon, Xavier Gauchard – IUFM de Basse Normandie, Brigitte Grugeon-Allys – IUFM d'Amiens et IREM Paris 7 (responsable), Mirène Larguier – IUFM et IREM de Montpellier, Christine Mémier, IUFM et IREM de Paris.

Thème 1 : La notion de fonction dans l'enseignement du collège à l'université et la formation des PLC2

Grandeurs et fonctions

André PRESSIAT

IUFM Centre Val de Loire

Équipe DIDIREM - Université Denis Diderot (Paris 7)

Résumé :

Le passage de l'emploi d'expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » à la notion de fonction telle qu'elle est prescrite dans les programmes de 3^e et de 2^e est problématique, du point de vue de l'enseignement comme de celui de l'apprentissage. Des éléments de réponse figurant dans les projets de documents d'accompagnement des programmes de collège seront rapidement présentés. Concernant le thème de la proportionnalité, ils proposent de donner d'abord une visibilité plus grande aux grandeurs en jeu, non seulement comme éléments de contextualisation, mais également comme moyens de traitement "pré - fonctionnels" ; puis de légitimer ensuite le passage à un unique modèle fonctionnel numérique. Cette dernière étape fera l'objet d'un examen plus détaillé, compte tenu de son importance aussi bien en 3^e (classe dans laquelle ce modèle ne peut guère vivre et être véritablement exploité s'il n'est pas mis en relation avec le travail fait dans les classes qui précèdent) qu'au lycée où son étude est reprise : caractérisation des fonctions affines, lien avec la dérivation … Un travail analogue sera proposé pour d'autres "fonctions de référence" du programme de 2^e : des grandeurs inversement proportionnelles à la fonction "inverse", …

1. Introduction

En avril dernier, lors d'une émission sur une chaîne privée[2], a eu lieu un de ces moments qui "font du bruit" : le ministre de l'Education nationale a été confronté par les organisateurs de l'émission à la résolution d'un problème de "règle de trois", un tableau vert et de la craie lui étant fournis, pour bien montrer le caractère scolaire de l'exercice. Le problème était le suivant : "Sachant que 4 stylos valent 2,42 €, combien valent 14 stylos ?". Face à ce problème qu'on n'aurait pas osé poser lors du Certificat d'Etudes Primaires[3], le ministre déclare d'emblée : "Je ne sais pas le faire du tout. Comment faites-vous ? Montrez-moi !", ce qui en dit long sur ce qui est acceptable dans les médias et sans doute dans la société à propos de ce qu'il est possible d'ignorer concernant les mathématiques scolaires, sans pour autant ruiner sa réputation. L'animatrice Ariane Massenet écrit alors au tableau les données du problème sous la forme suivante :

$$\begin{array}{cc} 4 & 2{,}42 \\ 14 & \end{array}$$

puis introduit la lettre *x* pour désigner le prix cherché. S'en suivent alors ces échanges :

– On va l'appeler *x*, d'accord ? On va multiplier 14 par 2 euros 42…

– Certes.

– C'est le signe de la règle de trois : là, on multiplie, et là on divise… par 4. Vous comprenez ?

Le signe de la règle de trois en question est dessiné ainsi :

$$\begin{array}{cc} 4 & 2{,}42 \\ 14 & x \end{array}$$

et le résultat, 8,47 €, est écrit au tableau pour terminer. Les spectateurs ayant fréquenté l'école jusque dans les années 60 auront été surpris de voir ce qu'est devenue la "règle de trois" depuis cette époque. Elle était alors indissociable d'un petit discours bien ritualisé (parfois intériorisé) accompagnant la mise en œuvre de ladite règle :

[2] Le Grand Journal du 3 avril 2008, sur Canal +.

[3] Son énoncé n'a certainement guère été examiné, comme on le verra plus loin.

4 stylos coûtent 2,42 €. Donc 1 stylo coûte 4 fois moins : $\frac{2{,}42 \times}{4}$. Et 14 stylos coûteront donc 14 fois plus : $\frac{2{,}42 \times 14}{4}$.

Ensuite, pour des raisons liées aux techniques de calcul disponibles, l'élève était incité à effectuer la multiplication en premier et enfin la division, l'ordre inverse pouvant, lorsque la division "ne tombe pas juste", être à l'origine d'erreurs d'arrondis. On notera que cette mise en œuvre contient sa propre justification, et ne nécessite ni l'emploi d'une lettre x bien mystérieuse, ni de signe autre que le trait de fraction. La solution proposée par l'animatrice, corrigé en main, n'a pas les mêmes qualités : elle est à peu près incompréhensible (pourquoi commencer par multiplier 2,42 € par 14 ?) ; la lettre x est introduite, mais n'est intégrée à aucun calcul ; son seul rôle est de rendre possible la mise en place d'un signe accompagnant la suite des calculs à faire ("là, on multiplie, et là on divise… par 4"), sans aucunement justifier cette dernière. Le lecteur aura reconnu la justification manquante à laquelle ce signe renvoie : l'égalité des "produits en croix" dans une égalité de deux quotients. Tout irait pour le mieux (une technique n'intègre pas en général sa justification) si ce signe n'était pas étiqueté "signe de la règle de trois". Cette manière de parler montre la vie difficile dans la société de cet objet d'enseignement : nombreux sont ceux qui en parlent (et notamment les ministres, qui en font souvent un emblème), sans toujours se rendre compte qu'ils ne parlent pas de la même chose (dispositif de la technique ; gestes – notamment leur ordre – de la technique ; justification de la technique).

Ariane Massenet, après avoir présenté cette technique hybride "de la règle de trois", précise que l'on peut procéder de manière beaucoup plus simple : on divise 2,42 € par 4 et on multiplie par 14. On reconnaît ici la technique dite de "réduction à l'unité", qui a en commun avec la règle de trois des années 60 les gestes sans en respecter l'ordre, mais se dispense d'un dispositif particulier (comme le trait de fraction structurant les données et les opérations sur ces dernières) en restant dans le registre de la langue naturelle. Or il se trouve que la mise en œuvre de cette dernière méthode conduit à un prix de 0,605 € pour un stylo, ce qui n'est guère conforme aux usages commerciaux. L'emploi de cette technique n'a donc été conduit à son terme ni par l'animatrice ni par ses "conseillers". En résumé, la technique montrée en premier est compliquée et n'est guère intelligible, alors que la mise en œuvre de la dernière, beaucoup plus simple, met en évidence le manque de pertinence des données de l'énoncé (Voir la note 2). L'image donnée au public des mathématiques enseignées n'est guère plus flatteuse que celle du ministre dans cette aventure.

Il est temps d'examiner les techniques de résolution suggérées par les documents d'accompagnement (appellation qui a disparu depuis et a été remplacée par "ressources pour les classes de 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, et 3^{e} du collège"), techniques qui vont nous rapprocher du cœur du thème de cette intervention : grandeurs et fonctions. La plus élémentaire s'appuie sur le fait que pour trouver le prix de 14 stylos connaissant le prix de 4, on peut prendre comme intermédiaire le prix de 2 stylos : c'est la moitié du prix de 4, c'est-à-dire 1,21 €. Quant au prix de 14 stylos, on l'obtient en multipliant par 7 ce prix de 2 stylos. L'oralisation de cette technique ne pose guère de problème. Si on veut en rendre compte par écrit, les choses se compliquent. Les documents d'accompagnement proposent d'utiliser un langage pré-fonctionnel, de type "algèbre syncopée", comme le suivant :

p. de 4 st. = 2,42 €. Donc p. de 2 st. = 1,21 €, et donc p. de 14 st. = 7 × 1,21 € …

Ces mêmes outils sémiotiques peuvent être utilisés pour la mise en œuvre de la technique de réduction à l'unité :

p. de 4 st. = 2,42 €. Donc p. de 1 st. = 2,42 € ÷ 4 = 0,605 € (résultat bizarre !), et donc p. de 14 st. = 14 × 0,605 € …

Le lecteur aura remarqué qu'au lieu de se focaliser sur la réduction à l'unité, cette technique s'appuie sur la définition suivante de deux grandeurs proportionnelles : Deux grandeurs

proportionnelles sont des grandeurs telles que, si l'on multiplie (ou divise) l'une d'elles par un nombre, la grandeur correspondante est multipliée (ou divisée) par *le même* nombre.
Le programme de 6^e agrandit la portée de cette technique : alors qu'à l'école cette dernière est mise en œuvre en multipliant l'une des grandeurs par un nombre entier (ou décimal simple), en 6^e on introduit les quotients d'entiers pour résoudre des problèmes du type : par quel nombre convient-il de multiplier l'entier *a* pour trouver l'entier *b* ? Ici, pour trouver par quel nombre multiplier 4 st. pour obtenir 14 st., on cherche le nombre par lequel il faut multiplier 4 pour trouver 14. Il est ici facile à trouver : 14 est "le milieu" de 12 et 16, produits respectifs de 4 par 3 et 4. Donc, 14 c'est 3,5 fois 4. On peut donc éviter le passage par l'écriture fractionnaire du quotient : $\frac{14}{4}$. On peut donc mettre en œuvre la technique améliorée :

14 st. = 3,5 × 4 st. Donc, p. de 14 st. = 3,5 × 2,42 € = …

L'introduction des quotients d'entiers permet d'étendre la technique aux nombres rationnels, écrits sous forme fractionnaire : c'est la raison d'être de ces quotients, dont le lien avec les problèmes de proportionnalité est vital :

b choses = $\frac{b}{a} \times a$ choses. Donc p. de b choses = $\frac{b}{a} \times$ p. de a choses.

On notera que ces moyens sémiotiques (pré-fonctionnels, et employant des abréviations) se présentent comme un substitut aux tableaux usuels, dont ils n'ont pas la lourdeur. Ils constituent un registre de représentation (au sens de Duval) dans lequel le traitement est congruent[4] avec celui fait dans le registre oral de la langue naturelle.

Du point de vue de l'enseignement de la notion de fonction, ils constituent un premier contact avec cette dernière, non pas axé sur la définition d'une fonction, mais sur une des propriétés essentielles (homogénéité ou "linéarité multiplicative"), qui plus tard sera résumée par : $f(k\,x) = k\,f(x)$. Sur le plan historique, l'exemple des logarithmes le montre bien[5], l'équation fonctionnelle – ou la fonction vue comme une relation qui la caractérise – est apparue avant la notion de fonction, et en particulier avant toute précision d'un domaine de définition, objet auquel l'enseignement actuel reste très attaché malgré les "assouplissements" à son encontre.

Dans la classification de Vergnaud, la procédure précédente est appelée "procédure scalaire", alors qu'il nomme précisément "procédure fonction" la technique dite du "coefficient de proportionnalité". Que dire de cette dernière, si on s'intéresse aux grandeurs dans une situation de proportionnalité, et pas seulement à leurs mesures ?

2. Techniques mathématiques scolaires et besoins co-disciplinaires et sociaux : nombres seuls ou grandeurs mesurées ?

Considérons le problème suivant, dit "de l'eau sucrée" :

> Pour faire une expérience de chimie, un professeur verse dans un récipient 6 dL d'eau et 15 g de sucre. Il distribue à chacun de ses élèves un récipient contenant de l'eau. Dans le récipient de Jacques, il y a 8 dL d'eau, dans celui de Pierre il y a 18 dL, dans celui d'Isabelle 15 dL, dans celui de Benoît il y a 30 dL et dans celui de Laurence il y a 12 dL. Le professeur demande ensuite à chaque élève de mettre juste ce qu'il faut de sucre dans son récipient pour obtenir une eau aussi sucrée que la sienne, pas plus, pas moins.
> Quelle quantité de sucre doit mettre chaque élève dans son récipient ?

[4] Deux représentations sémiotiquement différentes représentant au moins partiellement le même contenu sont dites congruentes lorsqu'il y a correspondance sémantique entre leurs unités signifiantes, univocité sémantique terminale et même ordre possible d'appréhension de ces unités dans les deux représentations. Lorsque deux représentations sont congruentes, le passage de l'une à l'autre se fait spontanément, sinon le passage n'est plus immédiat (Duval ,1995).

[5] $f\left(\sqrt{xy}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$: le logarithme transforme une moyenne géométrique en une moyenne arithmétique.

La procédure dite “du coefficient de proportionnalité” peut être décrite comme suit : il faut 15 g de sucre pour 6 dL. Pour obtenir 15, on peut multiplier 6 par 2,5. Donc, pour 8 dL, on multiplie 8 par 2,5 : on trouve 20. Il faut donc 20 g de sucre pour 8 dL.
Avec le registre des tableaux, cette procédure se traduit ainsi :

× 2,5

6	8	15
15		

Le traitement précédent s’appuie sur les nombres (mesures de grandeur) plutôt que sur les grandeurs. On peut rester dans le cadre des grandeurs, comme le montre ce qui suit :

× 2,5 g/dL

6 dL	8 dL	15 dL
15 g		

Il apparaît alors que 2,5 est la mesure, exprimée en grammes par décilitre, d’une troisième grandeur : la concentration en sucre, grandeur quotient de la masse (de sucre) par le volume d’eau. Ces grandeurs quotients figurent explicitement au programme de 4^e et de 3^e. Cette procédure trouve sa justification dans la définition suivante de deux grandeurs proportionnelles, que l’on trouve dans les dictionnaires d’aujourd’hui :

> Deux grandeurs sont proportionnelles si leur rapport est constant.

Si on ne s’intéresse qu’aux mesures des grandeurs en question, ce rapport constant est un nombre, appelé *coefficient de proportionnalité* (entre les deux suites de mesures apparaissant dans le tableau) : 2,5 dans l’exemple. Si on reste dans le cadre des grandeurs, ce rapport est une grandeur constante, appelée “concentration en sucre” : 2,5 g/dL dans l’exemple, et cette grandeur est irréductible à un nombre. Alors qu’en multipliant 6 dL par le nombre 2,5 (le “scalaire” 2,5) on obtiendrait un volume (ici, 15 dL), en multipliant 8 dL par 2,5 g/dL, on obtient une masse. La même opération numérique – multiplication par 2,5 – a donc deux significations bien différentes quand on s’intéresse aux traitements faits sur les deux grandeurs en question : la première est une étape de la technique “procédure scalaire” qui, à la fin du 1. a été mise en rapport avec la propriété d’homogénéité d’une fonction linéaire ; la deuxième est l’étape cruciale de la technique “procédure fonction”, procédure qui est en rapport avec la définition “explicite” d’une telle fonction.

L’exemple qui précède met bien en évidence le travail qui reste à faire à partir du seul traitement numérique pour que ce dernier prenne (ou garde) du sens quand on passe dans le cadre des grandeurs. La proportionnalité des grandeurs est un objet d’enseignement qui concerne plusieurs disciplines scolaires : peut-on en découper l’enseignement en consignant les professeurs de mathématiques dans son seul traitement numérique, réservant le passage du cadre numérique au cadre des grandeurs aux professeurs des autres disciplines ? Cette solution n’est guère tenable.

Elle ne l’est pas davantage quand il s’agit de traiter de questions plus familières telles que les achats de marchandises. L’affichage du “prix au litre, au kilogramme, au mètre …” est imposé par la loi, et l’interprétation (et vérification) d’une “facturette” comme la suivante fait partie des compétences de base du futur citoyen que l’école doit former :

QuickTime™ et un décompresseur TIFF (non compressé) sont requis pour visionner cette image.

On remarque que la balance électronique qui produit la facturette affiche par défaut les facteurs de produits de la forme : x kg × a €/kg, puis dans la dernière colonne, le résultat (arrondi à deux chiffres) : xa €.

Mais le commerçant vendant également des marchandises “à la pièce”, elle traite également ce cas, de manière dérogatoire : s’affichent alors le nombre de “pièces”, le prix à la pièce et enfin le prix du nombre de pièces : 2 pièces × 0,88 €/pièce = 1,76 €.

Compte tenu de l'enseignement reçu, il est certain que les élèves ne rencontrent jamais de telles écritures durant leur scolarité à l'école et fort rarement au collège : phénomène exceptionnel où les pratiques mathématiques de la vie ordinaire n'ont jamais été rencontrées durant la scolarité obligatoire. Qu'il le veuille ou non, le professeur de mathématiques manipule les grandeurs sous-jacentes, les évoque – souvent seulement à l'oral, parfois même pour faire des appels au "bon sens". Cette manipulation est explicite dans l'enseignement des mathématiques en Allemagne, comme le montre l'extrait suivant d'un manuel en ligne sur Internet :

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

Le lecteur aura remarqué que dans ce manuel (qui correspond au niveau de la classe de 5^{e} en France) :
- la relation de proportionnalité est d'abord décrite en faisant allusion à la propriété d'homogénéité (si une grandeur est doublée, triplée …, la grandeur correspondante est doublée, triplée …)
- la grandeur quotient k est introduite pour définir la "relation de proportionnalité" sous la forme $x \longrightarrow k \bullet x$, dans laquelle x, k et $k \bullet x$ désignent des grandeurs mesurées, comme l'illustre l'exemple traité, ainsi que la formule entre la masse et le volume. Le "facteur de proportionnalité" k est ici une grandeur, qui n'est pas réduite à sa mesure, le coefficient de proportionnalité.

Les moyens modernes de calcul facilitent ce calcul avec les grandeurs mesurées, comme le montrent les copies d'écrans suivantes, obtenues à l'aide d'une calculatrice symbolique dotée du calcul avec unités :

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

On calcule avec des grandeurs : on peut ajouter des mètres avec des mètres, mais aussi des mètres avec des centimètres …
On peut calculer des grandeurs quotients, par exemple diviser une masse par un volume …
On peut créer ses propres grandeurs et unités, pour calculer par exemple une densité de population, en exigeant que le résultat soit exprimé en habitant/km^{2}…
On peut calculer une aire comme produit de deux longueurs.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

En multipliant une vitesse par une durée, on trouve une distance … sauf si on oublie de mettre des parenthèses autour de “15_s”, auquel cas on divise la une distance par 15 avant de la multiplier par 1_s, ce qui donne une unité bizarre : le “mètre-seconde”, ce qui constitue une alerte …

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

On peut diviser une distance exprimée sous forme littérale (*d* mètres) par une durée exprimée sous forme numérique (15 Cs) : on obtient une vitesse, exprimée sous forme littérale, avec la bonne unité (m/s).

On peut également retrouver la formule $d = vt$, en introduisant des unités : la calculatrice donne le résultat *tv*, au lieu de *vt* … en mettant en évidence l'unité.

Les relations entre grandeurs, et notamment le cas où cette relation est la proportionnalité, sont au cœur des enseignements concernant la notion de fonction, et particulièrement lors du passage de l'emploi d'expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » à la mise en place de la notion de fonction telle qu'elle est prescrite dans les programmes de 3^{e} et de 2^{e}. Dans le paragraphe suivant, ce passage sera examiné en ce qui concerne les programmes de collège et les documents ressources associés : “Proportionnalité – Fonctions”, et “Grandeurs et mesures”.

3. Passage du “en fonction de” à la mise en place de la notion de fonction

Les programmes proposent de travailler l'emploi de la locution “en fonction de” ou “est fonction de” de la classe de 6^{e} à la classe de 4^{e} (les occasions ne manquent pas), et d'introduire la notion de fonction en classe de 3^{e} et de 2^{e}. Deux questions relatives à ce passage sont examinées ici :

- Comment préparer ce passage ?
- Comment le justifier ?

L'idée développée dans les documents ressources est la suivante :
- Travailler dans le cadre des grandeurs mesurées (et pas seulement dans le cadre numérique des mesures de ces grandeurs) (1);
- Avec des registres allant de la langue maternelle à l'emploi d'un langage pré-fonctionnel, permettant de mettre en œuvre la propriété d'homogénéité puis la multiplication par une grandeur-quotient (de la 6^{e} à la 4^{e}) (2);
- Pour mettre en évidence en début de 3^{e} que toutes les situations de proportionnalité entre de deux grandeurs – qu'elles soient ou non de même espèce – se modélisent dans le cadre des grandeurs avec des fonctions de l'une des grandeurs vers l'autre ayant toujours les mêmes propriétés (3).
- L'examen de ces modélisations montre que la nature des grandeurs d'une part, le choix des unités d'autre part ne change pas le modèle. Ceci justifie que l'on remplace tous ces modèles locaux par un seul modèle : la fonction linéaire (de l'ensemble des nombres positifs dans lui-même) (4).

Illustrons chacune de ces étapes.

• Pour illustrer l'étape 1, avec le problème de l'eau sucrée, on passe de traitements dans le registre de la langue naturelle tels que le suivant :

30 dL = 5 × 6 dL, donc il faudra 5 × 15 g de sucre, c'est-à-dire 75 g de sucre. …

à un traitement dans le même registre mais élargissant le domaine des scalaires aux décimaux ou rationnels :

$8\text{ dL} = \frac{8}{6} \times 6\text{ dL}$ ou $8\text{ dL} = \frac{4}{3} \times 6\text{ dL}$, donc il faudra $\frac{4}{3} \times 15\text{ g}$, c'est-à-dire 20 g de sucre.

Puis à un traitement dans le registre pré-fonctionnel suivant[6], remplaçant avantageusement le registre des tableaux :

30 dL = 5 × 6 dL, donc m. pour 30 dL = 5 × m. pour 6 dL = …

et plus généralement : m. pour *k* fois 6 dL = *k* × m. pour 6 dL,

registre que l'on peut rendre plus performant en introduisant une notation proche de la notation fonctionnelle :

m(30 dL) = 5 × m(6 dL),

plus généralement : m(*k* × 6dL) = *k* × m(6 dL),

• Puis (étape 2), en mettant en place l'emploi de la concentration, avec chacun des registres précédents :

$\frac{15\text{ g}}{6\text{ dL}}$, ou encore 2,5 g/dL. Ainsi pour 8 dL, il faudra : $2{,}5\text{ g/dL} \times 8\text{ dL}$, soit 20 g de sucre.

Plus généralement : m. pour *v* dL = 2,5 g/dL × *v* dL = 2,5*v* g

m(*v* dL) = 2,5 g/dL × *v* dL = 2,5*v* g.

• Pour illustrer (3), il convient de comparer les traitements de deux ou trois situations de proportionnalité, où les deux grandeurs en question sont ou non de même espèce. On peut donner un autre exemple de proportionnalité de deux grandeurs d'espèces différentes, par exemple le prix d'une denrée en fonction de sa masse, sachant que 100 g coûtent 16 €. La fonction sera alors notée p. comme "prix", et des écritures telles que les précédentes permettent de travailler dans les mêmes registres :

150 g = 1,5 × 100 g, donc le prix de 150 g est 1,5 fois le prix de 100 g.

p. de 150 g = 1,5 × p. de 100 g …

p. de *k* fois 100 g = *k* × p. de 100 g

p. de 140 g = 0,16 €/g × 140 g = 0,16 × 140 €

p(150 g) = 1,5 × p(100 g)

p(*k* × 100g) = *k* × p(100 g) et plus généralement p(*k* × *m* g) = *k* × p(*m* g)

p(*x* g) =0,16 €/g × *x* g = 0,16 *x* g.

Il est également indispensable de considérer le cas où les deux grandeurs proportionnelles sont de même espèce (deux longueurs, comme dans le cas des échelles ; deux prix comme dans le cas d'augmentation de prix ou de rabais). Par exemple, une augmentation de prix de 5,2%, notée a, associe à chaque prix *p* € une augmentation a(*p* €) et on peut la calculer en utilisant l'une des relations suivantes :

a(*k* × 100 €) = *k* × a(100 €) = *k* × 5,2 € et plus généralement a(*k* × *p* €) = *k* × a(*p* €)

a(*p* €) = 0,052 × *p* €

La particularité d'un tel cas réside dans le fait que la grandeur quotient est un "nombre pur", ce qui se traduit par l'absence d'unité accolée au coefficient de proportionnalité. Ici, le coefficient de proportionnalité et la grandeur quotient sont confondus.

• Enfin, pour l'étape 4, la comparaison de ces trois modélisations en termes de grandeurs permet de dégager les aspects communs aux trois situations, en passant des grandeurs à leurs mesures. On est alors amené à considérer les trois fonctions numériques, notées respectivement *m*, *p* et *a* :

[6] Pour alléger l'exposé, l'emploi de la procédure additive n'est traité pour aucun des exemples qui suivent.

$m(v) = 2{,}5v$ ou encore : $m : v \mapsto 2{,}5v$	$p(m) = 0{,}16m$ ou encore : $p : m \mapsto 0{,}16\,m$	$a(p) = 0{,}052\,p$ ou encore $a : p \mapsto 0{,}052\,p$
Elle possède la propriété : $m(k\,v) = k\,m(v)$	Elle possède la propriété : $p(k\,m) = k\,p(m)$	Elle possède la propriété : $a(k\,p) = k\,a(p)$

On mesure mieux l'élévation du niveau d'abstraction pour passer de ces fonctions "linéaires" (contextualisées par le choix de la lettre pour les désigner, et par le choix de la lettre pour désigner la variable, sans que les ensembles de définition et d'arrivée soient clairement précisés) à *l*a fonction linéaire (qui est désignée par une lettre – initiale du mot "fonction" – indépendante de tout contexte, dont les ensembles de départ et d'arrivée sont précisés et étendus sans justification à l'ensemble des nombres en 3e et à **R** en classe de 2e) :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto a\,x$$

c'est-à-dire telle que $f(x) = ax$, et qui possède la propriété : $f(k\,u) = k\,f(u)$.

Les exemples contextualisés du type "prix de *m* kg", puis leurs formes plus symboliques "p. de *m* kg" et p(*m* kg) aident à donner du sens à la lecture orale "*f* de *x*" de $f(x)$.
Il reste à donner un nom à cet objet "*f* de *x*", nom qui évoque le moins possible un contexte précis. Le mot "image" à institutionnaliser, fait référence de manière métaphorique au domaine de l'optique, la fonction étant comparée à un faisceau lumineux qui prend des éléments dans l'ensemble de départ et les "projette" dans l'ensemble d'arrivée[7]. Notons que l'expression "valeur de *f* en *x*" fait implicitement allusion à une mesure de grandeur, non précisée. Quant au mot "antécédent", son emploi fait référence à son étymologie. Dans les pays anglo-saxons, on le remplace parfois par "*preimage*" ou par "*inverse image*".

Faire vivre auprès des élèves les modélisations en termes de fonctions d'une grandeur dans une autre est un moyen pour le professeur de montrer aux élèves ce que l'on va pouvoir abstraire dans toute situation de proportionnalité, … moyen dont il se prive en passant directement à la fonction linéaire abstraite, faute de disposer de notations disponibles pour traiter les grandeurs (présence des unités dans les relations manipulées).
Notons cependant que la modélisation en termes de fonctions d'une grandeur dans une autre est implicitement exigé dans le registre graphique, car il est souvent demandé à l'élève d'indiquer les unités aux extrémités des axes, ce qui revient à utiliser la grandeur longueur $\mathbf{R}^+$[unité graphique] pour représenter symboliquement chacune des deux grandeurs $\mathbf{R}^+$[u] et $\mathbf{R}^+$[v] en question[8].

Tout ce qui précède légitime le choix de $\mathbf{R}^+$ comme ensembles de départ et d'arrivée d'une fonction linéaire, mais ne justifie pas qu'on l'étende à **R** tout entier. Le traitement de cette difficulté, souvent esquivée dans l'enseignement, est abordé dans le paragraphe suivant.

4. Comment justifier le choix de R comme ensemble de départ d'une fonction linéaire ?

Une réponse possible consiste à traiter un exemple de grandeur qui soit une fonction affine d'une autre, et s'intéresser aux accroissements (des mesures) de la première grandeur autour d'une valeur : $x - x_0$. Ceux-ci sont des nombres relatifs, et la prise en considération de tels

---

[7] Source (entre autres) : Bertrand Hauchecorne, 2003, *Les mots & les Maths*, Ellipses.

[8] Ces notations traduisent le fait qu'une grandeur peut être modélisée comme une demi-droite vectorielle, ayant pour base n'importe quel élément non nul : ici, les lettres u et v désignent les unités choisies dans chacune des deux grandeurs, dont elles constituent une base.

accroissements est une des raisons mathématiques principales de l'introduction de ces nombres (la question de leur dénomination sera abordée au paragraphe suivant). Ces accroissements et ceux qui correspondent pour la deuxième : $f(x) - f(x_0)$, sont tels que leur quotient demeure constant.
Illustrons-le avec l'exemple simpliste suivant :
f est la fonction qui à tout nombre positif x associe $3x + 2$.
On se place en 6, et on considère les accroissements $x - 6$ et $f(x) - f(6)$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

$x - 6$	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
$f(x) - f(6)$	– 15	– 12	– 9	– 6	– 3	0	3	6	9	12

La fonction g, dont la table est esquissée ci-dessus, à un accroissement h (ou Δx) de la variable x, associe $3h$ (ou $3\Delta x$), quel que soit le signe de h. Ce résultat justifie l'idée d'étendre l'ensemble de départ d'une fonction linéaire aux nombres "relatifs".

Il reste à trouver une situation dont la modélisation peut faire intervenir des fonctions affines, et rendant assez naturel l'examen de son comportement local autour d'un point. Le modèle empirique de la marée[9], connu sous le nom de "règle des douzièmes", peut être utilisé.
Cette règle s'énonce ainsi : pendant la première heure qui suit la marée basse, la mer monte d'un douzième ; pendant la deuxième heure, la mer monte de deux douzièmes ; pendant la troisième heure, la mer monte de trois douzièmes ; pendant la quatrième heure, de nouveau trois douzièmes puis deux douzièmes dans l'heure suivante et enfin un douzième pour atteindre la marée haute. Sachant que dans un port, les niveaux de la mer à marée basse et haute sont respectivement de 1 m et 3,5 m, l'application de la règle conduit à la tabulation suivante :

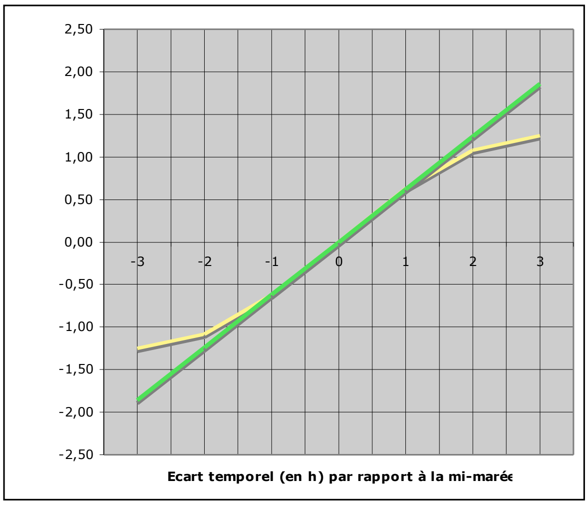
Horaire	0	1	2	3	4	5	6
Niveau (en m)	1	1,21	1,63	2,25	2,87	3,29	3,5

En considérant les écarts par rapport à 3, et les écarts correspondants pour le niveau, on obtient la table suivante :

Écart par rapport à la mi-marée	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
Écart de niveau correspondant	– 1,25	– 1,04	– 0,62	0	0,62	1,04	1,25

On voit qu'il ne s'agit pas de la table d'une fonction linéaire. Mais, si l'on se restreint à l'intervalle [– 1 ; 1], on constate que la représentation graphique de la fonction affine par morceaux résultant de la méthode des douzièmes coïncide avec celle de la fonction linéaire qui à x associe $0,63\,x$. (Voir la figure de gauche ci-dessous).
L'emploi d'une fonction trigonométrique constitue un modèle encore meilleur, et permet de voir en quoi la règle des douzièmes constitue une assez bonne approximation, facile à élaborer (Voir la figure de droite, où les trois modèles sont confrontés).

[9] L'exemple développé dans ce qui suit est une adaptation d'une situation proposée sur ce thème par Philippe Huet, professeur stagiaire en 2005 à l'IUFM d'Orléans.



QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (Uncompressed)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (Uncompressed)
sont requis pour visionner cette image.

On remarque que la propriété de proportionnalité des accroissements de la variable et des accroissements correspondants de la fonction a été sollicitée précédemment.
La démonstration de sa réciproque montre bien l'intérêt de considérer des accroissements par rapport à une valeur donnée x_0, et les accroissements correspondants par rapport à la valeur y_0.
En effet, si le quotient de $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ est constant, et égal à k, alors de $f(x) - f(x_0) = k(x - x_0)$, on déduit immédiatement $f(x) = kx + b$. Ainsi, f est une fonction affine.

La manière de décrire les grandeurs auxquelles on s'intéresse (accroissement ? écart ? absolu ? relatif ?) est un problème délicat, au cœur des approches pluri-disciplinaires. Cette question fait l'objet du paragraphe suivant.

5. Fonctions et grandeurs : éléments de langage

Le programme de Terminale ES de 1997 attirait l'attention sur ce point, dans un paragraphe intitulé "Liaison avec d'autres disciplines", en particulier autour de la notion de croissance, d'où les deux premières colonnes du tableau ci-dessous sont extraites, la dernière faisant l'objet de commentaires de ma part.

Objets mathématiques	Expressions courantes	Commentaires
$f(b) - f(a)$	Accroissement absolu de f entre a et b	Cet accroissement absolu est un nombre relatif, ce qui ne facilite pas le travail du professeur de mathématiques.
$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$	Accroissement moyen de f entre a et b	Cette dénomination suppose connu le fait que pour une fonction affine, cet accroissement est constant. D'où l'idée, pour une fonction quelconque, de qualifier cet accroissement de "moyen", comme on le fait pour une vitesse moyenne.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{f(a)}$	Accroissement relatif de f entre a et b	Cet accroissement est qualifié de “relatif” car on le compare à la valeur “initiale” prise par f. C’est un nombre sans dimension (rapport de deux grandeurs de même espèce), contrairement au taux d’ac-croissement précédent, qui en général n’en est pas un (et qui, selon certaines définitions, n’est donc pas un taux !).

Pour décrire la croissance d’une fonction sur un intervalle, le programme de 2^e évoque des formulations provisoires telles que “*f* conserve l’ordre” avant de donner la définition formelle attendue, dont la difficulté est bien connue aussi bien du point de vue de l’enseignement que de celui de l’apprentissage.
L’approche par les grandeurs permet des explications d’un autre type : une fonction f est croissante sur l’intervalle I si tous les accroissements moyens de f entre deux valeurs a et b de I sont positifs. Ces accroissements moyens ne sont autres que les coefficients directeurs des sécantes à la courbe passant par deux de ses points. Autrement dit, on peut traduire qu’une courbe “monte” par le fait que toutes ses sécantes “montent”. Formulation qui a l’avantage de mettre en valeur l’utilité de la quantification sur deux éléments de I, avantage que la formulation transitoire – et très souvent employée – “si x augmente, $f(x)$ augmente” ne présente aucunement.
Savoir interpréter un quotient tel que $\dfrac{f(t)-f(2)}{t-2}$ en termes de grandeurs sous-jacentes, par exemple : $\dfrac{f(t)\text{ m}-f(2)\text{ m}}{t\text{ s}-2\text{ s}}$, égal à $\dfrac{f(t)-f(2)}{t-2}$m/s, est indispensable pour comprendre une introduction de la notion de nombre dérivé à partir de la notion de vitesse moyenne et de vitesse instantanée. De même que des écritures telles que :

$$v_0=\frac{72\text{ km}}{1\text{ h}}=\frac{72000\text{ m}}{3600\text{ s}}=20\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v=\frac{36\text{ km}}{1\text{ h}}=10\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a=\frac{v-v_0}{t}=\frac{10\frac{\text{m}}{\text{s}}-20\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\times 60\text{ s}}=\frac{-10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{240\text{ s}}\approx -0{,}04\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

font comprendre que accélération moyenne pour une vitesse passant en 4 minutes de 72 km/h à 36 km/h est égale à – 4 cm/s par seconde, ce que l’on note – 4 cm/s^2.

Le lecteur trouvera dans les actes des journées APMEP de La Rochelle une description de l’enseignement en Allemagne des fonctions en relation avec les grandeurs[10]. Le paragraphe suivant examine comment cette question est abordée en Grande Bretagne.

6. Fonctions de référence et grandeurs en Grande Bretagne

[10] Conférence intitulée “La place des grandeurs dans la construction des mathématiques” aux Journées de l’APMEP 2008, à La Rochelle, André Pressiat.

L'introduction d'une fonction polynomiale du second degré à l'aide de situations de recherche de maximum d'une fonction décrivant une grandeur en fonction d'une autre est classique. L'aspect grandeur y est souvent rabattu sur leurs mesures. Les manuels anglais montrent l'intérêt de mettre en avant non pas la fonction "carré" elle-même, mais la proportionnalité d'une grandeur au carré d'une autre. Ils utilisent pour cela le symbole α qui signifie "être proportionnel à".

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

Le mot "quantities" signifie "grandeurs". Dans tous les exemples, les lettres x et y désignent des mesures de grandeurs, les unités étant à chaque fois précisées dans les exemples et exercices. Le lecteur notera que les fonctions sont définies à l'aide d'une égalité de la forme $y = \ldots$, la notation f ou $f(x)$ n'étant jamais utilisée. Cette manière de faire facilite la modélisation mathématique de phrases telles que : "La violence d'un choc est proportionnelle au carré de la vitesse", à l'aide de formalisme tels que : $V \alpha v^2$, $V = k\, v^2$. Dans le manuel qui sert ici de référence[11], les lettres utilisées ne se limitent pas au couple x, y. Un autre exemple classique concerne la chute des corps : la phrase "La distance parcourue par un corps en chute libre varie comme le carré du temps", après le choix convenable d'une origine et d'une unité (m) pour mesurer la distance parcourue $x(t)$ et le choix d'une origine et unité de temps (s) se traduit par : $x(t) = a\, t^2$. La nature un peu mystérieuse du coefficient a peut être éclairée par une formulation moderne du travail de Galilée, qui utilise le langage des proportions et énonce ce que nous noterions aujourd'hui sous la forme[12] :

$$\frac{x(t)}{x(t')} = \left(\frac{t}{t'}\right)^2$$

En donnant à t' une valeur fixée t_0, on en déduit : $x(t) = \frac{x(t_0)}{t_0^{\,2}}\, t^2$. Le coefficient a est donc la mesure d'une grandeur qui est le quotient d'une longueur par le carré d'une durée, dont l'unité est donc : m/s^2.

Le fait de mettre l'accent sur la proportionnalité à une fonction telle que "$y = x^2$" permet de ne pas se limiter à des situations qui se modélisent avec cette fonction, ce qui conduit parfois à

11 Tony Banks and David Alcorn, Mathematics for AQA GCSE Higher Tier, 2005, Causeway Press Limited.

12 Galilée ne s'autorise que la considération de rapports de grandeurs de même espèce. Cette utilisation des proportions est souvent considérée comme un obstacle à l'émergence de la notion de fonction.

ajuster d'une manière artificielle les paramètres de la situation à modéliser. Il permet par ailleurs d'expliquer en quoi cette fonction est une fonction "de référence".

Examinons le traitement dans le manuel anglais du sens de variation des fonctions précédentes :

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

Dans la partie précédant le résumé ci-dessus :

- pour $n = 1$, c'est-à-dire pour les fonctions linéaires, la justification donnée est la suivante : lorsque x augmente avec un pas constant, y augmente avec un pas constant ; k, constante de proportionnalité est donné par le gradient de la représentation graphique.
- Pour $n > 1$, lorsque x augmente avec un pas constant, y augmente avec un pas qui est lui-même croissant ; lorsque k augmente, la courbe est plus pentue.
- Pour $0 < n < 1$, lorsque x augmente avec un pas constant, y augmente avec un pas qui est cette fois décroissant …

Un chapitre ultérieur, intitulé "Using graphs", donne une large place au traitement graphique des relations fonctionnelles "temps-distance" et "temps-vitesse", comme le montrent les extraits figurant sur la page suivante.

Le lecteur aura remarqué que la notion de proportionnalité inverse tient une place égale à la proportionnalité directe (la notion de proportionnalité étant étendue par rapport à sa signification en France, en passant des seules fonctions linéaires – $y = kx$ – aux fonctions de la forme $y = k\,x^2$, $y = k\,x^3$, …, $y = k\,x^n$). Pour ce qui concerne la proportionnalité inverse, restreignons-nous au cas des fonctions de la forme $y = k\,/\,x$. Au lieu de focaliser l'attention sur la fonction "inverse", l'approche à partir des grandeurs conduit à considérer des fonctions y telles que $y \alpha 1/x$, ce qui conduit à travailler avec des grandeurs inversement proportionnelles (selon la terminologie française). Cette manière de faire – l'emploi de la locution "grandeurs inversement proportionnelles est assez rare dans les pratiques en 2e –évite l'introduction d'exemples artificiels dans lequel les paramètres de la situation sont ajustés pour déboucher sur la fonction "inverse". Ainsi, l'exemple des rectangles d'aire constante, où l'on étudie la dépendance d'une des dimensions en fonction de l'autre, est plus facile à mettre en scène pour une aire constante égale à 12 cm^2, que pour une aire égale à 1 cm^2.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

La formalisation proposée précédemment, mobilisant le registre des grandeurs mesurées, donne lieu ici à une mise en forme du type suivant. La longueur d'un rectangle d'aire 12 cm^2 est une fonction, qui à chaque largeur l cm associe la longueur $\dfrac{12\text{ cm}^2}{l\text{ cm}}$, c'est-à-dire $\dfrac{12}{l}$ cm :

$$l\,\text{cm} \mapsto \frac{12}{l}\,\text{cm}$$

Le traitement d'un autre exemple classique (vitesse moyenne en fonction de la durée, la distance à parcourir étant constante, égale par exemple à 25 km, conduit de même à la fonction :

$$t\,\text{h} \mapsto \frac{25}{t}\,\text{km/h}$$

La comparaison de ces deux modélisations incite à s'intéresser aux seules mesures des grandeurs en jeu, en faisant abstraction de leur nature et des unités. On est alors conduit à considérer les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{k}{x}$$

La fonction "inverse" est, parmi celle-ci, la fonction "de référence" : c'est d'ailleurs celle dont le manuel anglais donne la représentation graphique (en remarquant qu'elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$).

Une remarque au sujet du choix du repère pour faire de telles représentations : lorsqu'on représente graphiquement une fonction traduisant la dépendance d'une grandeur G_1 par rapport à une autre grandeur G_2, on choisit sur chacun des axes une unité graphique en relation avec les unités choisies dans G_1 et G_2. Le repère ainsi constitué n'a alors aucune raison d'être orthonormal (il est orthogonal pour des raisons pratiques : quadrillage des feuilles …). En revanche, lorsqu'on passe aux "fonctions de référence" que ces situations contextualisées en termes de grandeurs permettent de dégager, le recours à un repère orthonormal peut être motivé : c'est précisément le cas si l'on veut évoquer le lien entre la représentation graphique de la fonction "carré" et celle de la fonction "racine carrée", ou si l'on veut faire remarquer que la représentation graphique de la fonction "inverse" admet la droite d'équation $y = x$ comme axe de symétrie.

Le passage de fonctions de la forme $y = k\,x^2$ à la fonction carré, de fonctions de la forme $y = k / x$ à la fonction "inverse" trouve un écho dans les programmes actuels de Terminale. La prise en considération de l'équation différentielle $y' = k\,y$ (au lieu de la seule équation différentielle $y' = y$) est liée au fait que les unités choisies pour mesurer les "quantités" y' et y forcent la présence d'un coefficient k dans l'équation, coefficient qui ne peut pas être rendu égal à 1. L'introduction par ce moyen de la fonction exponentielle "naturelle" est plus délicate …
L'emploi de la "modélisation" pour enseigner les mathématiques rend incontournable la prise en compte du cadre des grandeurs, intermédiaire entre les phénomènes et le divers empirique et les objets mathématiques qui les schématisent (nombres, formules, fonctions, équations, …), les mathématiques ainsi construites permettant en retour une modélisation des phénomènes les plus divers. L'objet de cet exposé était de mettre en évidence certaines étapes de cette schématisation qu'une longue tradition a eu tendance à passer sous silence dans l'enseignement en France, et ceci dès le collège. Ces étapes, prises en charge facilement par certains élèves, manquent à d'autres, les privant de moyens de contrôle de leurs raisonnements et calculs, et du sens de ces derniers. La contrepartie pour le professeur consiste à faire vivre des moyens de représentation transitionnels, à propos desquels des exemples ont été proposés, relatifs à l'articulation entre l'étude des grandeurs et des fonctions.

Éléments de bibliographie

A.P.M.E.P, (1982) Grandeur, mesure, collection Mots, brochure n° 46.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. (1999-2000) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée, *Petit x* **55**, 5-32.
CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., 2002, Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II : Mathématisations, *Petit x* n°59, pp. 43-76, IREM de Grenoble.
Document "Ressources pour les classes de 6^{e}, 5^{e}, 4^{e} et 3^{e}" :
http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm

- Proportionnalité – Fonctions :
  http://eduscol.education.fr/D0015/doc_acc_clg_proportionnalite.pdf
- Grandeurs et mesures :
  http://eduscol.education.fr/D0015/doc_acc_clg_grandeurs.pdf

DUVAL R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang (SA), Berne.
PRESSIAT A., (à paraître 2009), *La place des grandeurs dans la construction des mathématiques*, Actes des Journées APMEP 2008 de La Rochelle.

L’enseignement des fonctions à la transition lycée – université

Michèle Artigue
Laboratoire de Didactique André Revuz,
Université Paris Diderot – Paris 7

Résumé : Dans ce texte, nous présentons d’abord un ensemble d’outils conceptuels que la recherche didactique a progressivement développés, utiles pour comprendre ce qui se joue à la transition lycée-université en ce qui concerne l’enseignement des fonctions. Nous abordons ensuite cette transition, en considérant des tâches qui nous semblent emblématiques de la culture du lycée dans le domaine des fonctions, et en les comparant à celles proposées au début de l’université. Enfin, nous en venons à des informations concernant les étudiants eux-mêmes, en nous appuyant notamment sur des travaux récents réalisés dans le cadre des IREM.

I. Introduction

Ce texte concerne l’enseignement des fonctions. Il cherche à préciser ce qui se joue concernant cet enseignement dans la transition lycée-université en France. Il aborde donc, à travers un domaine mathématique précis, une question plus globale, celle de la transition lycée-université qui a fait l’objet de nombreux travaux en didactique des mathématiques et nous renvoyons le lecteur intéressé à (Holton, 2001), (Artigue, 2004, 2005), (Gueudet, 2008) pour une présentation synthétique de l’état des connaissances dans ce domaine. L’enseignement et l’apprentissage des fonctions est lui aussi un thème qui a fait l’objet de recherches très nombreuses (cf. (Dubinsky & Harel, 1992), (Tall, 1996), (Kieran, 2007) pour des visions synthétiques) et, pour aborder la question de la transition lycée-université, nous disposons donc en particulier d’un certain nombre d’outils conceptuels que cette recherche a développés ou exploités. Nous présentons brièvement dans la première partie de ce texte ceux qui nous semblent les plus pertinents pour aborder la question à l’étude. La transition étudiée est d’abord, comme toute transition, un phénomène institutionnel. C’est pourquoi nous l’approchons d’abord sous cet angle dans la seconde partie du texte, en essayant de cerner les continuités et discontinuités existantes entre les tâches proposées au lycée et à l’université. Pour cela, nous considérons quelques sujets de baccalauréat récents qui nous semblent emblématiques de la culture développée aujourd’hui au lycée en ce qui concerne les fonctions dans la filière S, et nous les comparons aux tâches proposées dans des fiches de début d’université après avoir évoqué la thèse de Praslon (1999) qui a constitué un travail pionnier dans ce domaine. Nous en venons ensuite dans la troisième partie aux étudiants eux-mêmes et, en nous appuyant notamment sur des travaux récents menés au sein de la commission inter-IREM Université (CI2U), nous montrons la fragilité des connaissances avec lesquelles beaucoup d’étudiants arrivent à l’université, par rapport à ce qui est attendu à la fin de la scolarité secondaire. Cette fragilité ne peut que renforcer les difficultés de la transition[13].

II. Des outils conceptuels pour approcher la transition dans le domaine des fonctions

Comme mentionné ci-dessus, de nombreux outils sont disponibles pour approcher l’apprentissage et l’enseignement des fonctions. Nous présentons dans cette partie un certain

[13] Le fait que l’université constitue en France, pour beaucoup d’étudiants de mathématiques, un choix par défaut contribue sans aucun doute à cette distance observée entre les attentes et la réalité.

nombre d’entre eux qui nous semblent particulièrement efficaces pour l’étude de la transition lycée-université. Cette présentation est très synthétique et nous renvoyons le lecteur aux références données pour plus de détail. Nous abordons successivement des outils qui concernent :

- l’identification de niveaux de conceptualisation de la notion de fonction ;
- l’identification de différents registres de représentation de cette notion et l’analyse des caractéristiques des interactions entre ces registres ;
- l’identification de différents points de vue possibles sur cette notion ;
- l’identification de différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu dans la résolution de tâches engageant la notion de fonction ;
- la caractérisation des organisations mathématiques dans lesquelles intervient cette notion.

II.1. L’identification de niveaux de conceptualisation de la notion de fonction

Nous souhaiterions mentionner dans cette rubrique deux constructions initialement proches mais qui se sont progressivement différenciées. La première, initiée par Ed Dubinsky, est connue sous le nom de théorie APOS (Action – Processus –Objet – Schéma) (Dubinsky & Mc Donald, 2001). Inspirée des théories piagétiennes, cette théorie conçoit la progression conceptuelle comme un mouvement qui partant d’actions sur des objets conduit à des processus puis à des objets qui encapsulent ces processus, objets qui à leur tour peuvent être ensuite engagés dans de nouvelles actions et conduire à de nouveaux processus et objets. Actions, processus et objets s’organisent à leur tour en schémas. Cette construction permet de pointer le saut cognitif qui sépare un niveau conceptualisation où la fonction peut être appréhendée comme un processus de type entrée / sortie et un niveau de conceptualisation où la fonction peut être appréhendée comme un objet en soi, partiellement détaché du ou des processus dont elle émerge. Il est raisonnable de postuler, au vu des résultats des recherches, qu’un niveau de conceptualisation de type processus suffit à la réalisation de nombreuses tâches du secondaire tandis qu’un niveau de conceptualisation de type objet s’impose rapidement dans l’enseignement supérieur.
A cette distinction hiérarchique entre action, processus et objet, la théorie APOS a plus récemment superposé une autre hiérarchie, inspirée des travaux de Piaget et Garcia (1989), la triade « Intra – Inter – Trans ». Elle a elle aussi une valeur générale mais nous l’explicitons ci-après dans le cadre des fonctions.

- au niveau Intra, le sujet considère les fonctions comme des objets isolés et se concentre sur les processus dans lesquels elles sont engagées ;
- au niveau Inter, il commence à faire des connexions entre objets fonctionnels, à donner sens à l’idée de transformation engageant des fonctions ;
- au niveau Trans, il peut considérer des systèmes de transformations et les structures qui en émergent.

La deuxième construction que nous souhaiterions évoquer est celle de Tall (2004) qui perçoit le développement cognitif comme la rencontre de trois mondes successifs :

- l’ « embodied world » des expériences sensori-motrices de la quantité et des variations ;
- le « proceptual world » des actions encapsulées en concepts, portées par un symbolisme qui permet de jouer avec flexibilité entre processus et concepts ;
- le « formal world » où les objets sont assujettis à des définitions formelles et les propriétés déduites via des preuves formelles.

Très tôt, pour ce qui concerne le domaine des fonctions, le premier monde est accessible et peut permettre d'approcher des notions généralement considérées comme relevant des mathématiques avancées comme celle de vitesse et d'accélération (Nemirovsky & Borba, 2004). Dans l'enseignement secondaire, l'algèbre des fonctions, les débuts d'une analyse encore très algébrisée, ce que les anglo-saxons appellent Calculus, sont au cœur du second monde, tandis que le troisième serait plus spécifiquement représentatif du rapport aux fonctions développé dans l'enseignement supérieur.

II.2 Les différents registres de représentation

La notion de registre de représentation sémiotique, introduite en didactique des mathématiques par Duval (1995) et très largement utilisée aujourd'hui est aussi une construction qui nous semble utile pour analyser la transition lycée-université dans le domaine des fonctions. A la base de cette notion, se situe le constat que les objets mathématiques ne nous étant pas directement accessibles, nous les approchons et manipulons à l'aide de représentations sémiotiques diverses. La distinction entre l'objet et ses représentations, la capacité à former, transformer, convertir des représentations d'un registre dans un autre sont des éléments clefs de la conceptualisation en mathématiques.
Pour ce qui concerne les fonctions, de nombreux registres sont susceptibles d'intervenir (Coppé, Dorier & Yavuz, 2007) :

- le registre de la langue naturelle ;
- le registre numérique des tables de valeurs ;
- le registre algébrique des formules ;
- le registre graphique des courbes ;
- le registre graphique des tableaux de variation ;
- le registre symbolique intrinsèque (celui des notations comme f, fog, f^{-1}) qui est en particulier mobilisé dans le monde des mathématiques formelles.

La recherche a bien mis en évidence les difficultés que beaucoup d'élèves éprouvent à détacher l'objet fonction de ses représentations, notamment ses représentations algébriques qui sont les plus utilisées, ainsi qu'à jouer avec flexibilité des différents registres, pour choisir le plus approprié à la résolution de telle ou telle tâche. Elle a aussi montré les difficultés qu'engendrent pour beaucoup d'élèves le passage d'un registre à un autre dès qu'il n'y a pas congruence entre eux, c'est-à-dire dès que la conversion ne se résume pas à une traduction mot à mot fidèle à l'ordre des termes. Un exemple souvent cité en est fourni par le cas des fonctions conjointes (cf. figure 1 ci-après)

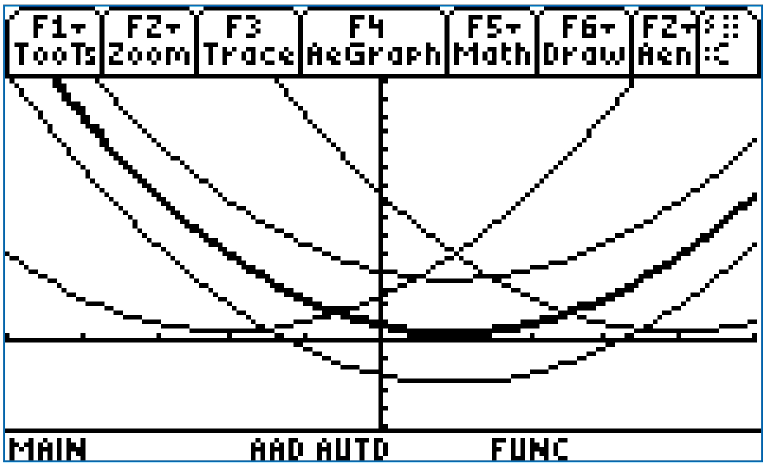


Figure 1 : Fonctions conjointes

Sur cette figure 1, sont tracées plusieurs représentations graphiques associées à des fonctions conjointes de la fonction f dont la représentation graphique est tracée en gras. Il est bien connu que si l'on demande à des élèves de lycée d'associer les représentations tracées à celles des fonctions : $x \to f(x)+3$, $x \to f(x)-3$, $x \to f(x+3)$, $x \to f(x-3)$, il y aura peu d'erreurs dans les deux premiers cas qui sont des cas de conversion congruente, tandis que les réponses tendront à être inversées pour les deux derniers où les conversions sont non congruentes (une translation vers la droite se traduit par une soustraction). On peut là encore raisonnablement postuler que la transition lycée - université s'accompagne de besoins accrus de flexibilité entre registres de représentation dans des cas de non congruence et également d'une mobilisation accrue du registre symbolique intrinsèque.

II.3 Les différents points de vue sur la notion de fonction

A la distinction entre registres de représentation s'ajoute, dans le cas des fonctions, une nouvelle distinction, celle résultant de la diversité des points de vue qui peuvent être développés à propos de cet objet. Nous en distinguerons ici trois : les points de vue ponctuel, local et global. C'est avec une combinaison de points de vue ponctuel et global que débute l'enseignement des fonctions : le point de vue ponctuel de la correspondance entre un élément et son image, mais aussi le point de vue global qui permet de reconnaître les fonctions et les classer en familles : fonctions linéaires et affines, fonctions polynomiales du second degré et fonctions homographiques, fonctions sinusoïdales… Avec l'entrée dans le champ de l'analyse, un autre point de vue doit se mettre en place et s'articuler avec les précédents : le point de vue local, ce qui ne va en rien de soi tant sur le plan mathématique que cognitif comme l'ont montré divers travaux de recherche (Maschietto, 2003), (Chorlay, 2007), (Rogalski, 2008). Cette diversité des points de vue est à articuler également avec celle des registres et le rapport à ces derniers lui-même doit bouger pour leur permettre de supporter un point de vue local alors qu'il n'avaient porté jusqu'alors que des points de vue ponctuel et /ou global. Par un processus de zoom physiquement ou mentalement réalisé, la vision globale de la linéarité dans le registre graphique doit par exemple se localiser mais l'élève doit aussi devenir conscient de l'impossibilité dans le registre graphique de distinguer clairement une proximité d'ordre 0 de la proximité d'ordre 1 qui caractérise la tangence. Cette reconstruction de l'idée de linéarité nécessaire pour faire de la notion de dérivée un objet de l'analyse vue comme champ de l'approximation au-delà de son statut algébrique et formel nous apparaît comme un des enjeux de l'enseignement de l'analyse à la transition lycée – université

.

II.4 Les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

Une autre notion qu'il nous semble pertinent d'introduire est celle de niveau de mise en fonctionnement des connaissances due à Robert (1998). Cette dernière distingue en effet trois niveaux différents :

- le niveau technique, qui est celui des mises en fonctionnement isolées, des applications immédiates de théorèmes, définitions, formules…
- le niveau mobilisable, qui est celui des mises en fonctionnement guidées mais dépassant l'application simple d'une seule propriété
- le niveau disponible, qui est celui des mises en fonctionnement sans indication des connaissances nécessaires à la résolution

Les travaux de recherche montrent bien comment ces niveaux de mise en fonctionnement des connaissances peuvent varier pour une même tâche, suivant la façon dont elle est énoncée, suivant ensuite la façon dont elle est gérée. On peut raisonnablement faire l'hypothèse que, dans la transition lycée-université, en ce qui concerne les fonctions comme d'autres notions déjà rencontrées au lycée, on observe des sauts dans les demandes faites aux étudiants qui peuvent s'interpréter en utilisant ces niveaux.

II.5 Les organisations mathématiques

Cette dernière construction se situe, quant à elle, dans le cadre plus vaste de la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard (1992, 2002). Dans cette théorie, la notion d'institution est une notion première et différentes notions ont été introduites pour soutenir l'analyse des pratiques institutionnelles qui façonnent les pratiques individuelles, et donc les apprentissages possibles des élèves et des étudiants. Les pratiques sont modélisées en termes de quadruplets dénommés praxéologies. Au niveau le plus élémentaire se situent les praxéologies dites ponctuelles constituées d'un type de tâche, d'une technique ou manière de réaliser la tâche, d'un discours technologique qui sert à expliquer et justifier la technique et d'une théorie qui structure et légitime ce discours technologique. Les praxéologies ponctuelles s'organisent ensuite en praxéologies locales fédérées autour d'un type de discours technologique, voire régionales autour d'un corpus théorique. Et c'est via l'étude de ces organisations praxéologiques que s'effectue celle des organisations mathématiques de l'enseignement. Des travaux sur la transition secondaire-supérieur exploitant cette approche comme ceux de Bosch, Fonseca & Gascón (2004) concernant la notion de limite en Espagne ont mis en évidence des différences importantes entre les organisations mathématiques du secondaire et du supérieur. Selon ces travaux, dans les praxéologies de l'enseignement secondaire, souvent incomplètes, c'est le pôle pratique constitué des tâches et des techniques qui est dominant. Les praxéologies ponctuelles vivent souvent relativement isolées sans qu'un effort systématique soit fait pour les structurer au niveau local ou régional. Les associations tâches-techniques apparaissent ainsi comme des associations rigides : à un type de tâche correspond une technique bien précise qui est routinisée. A l'opposé, les praxéologies universitaires sont centrées sur leur pôle théorique et envisagées d'abord à un niveau très général, souvent régional, avec la supposition implicite que les praxéologies ponctuelles et locales développées dans l'enseignement secondaire constituent un socle sur lequel ces praxéologies régionales peuvent prendre sens. La réalité qui est décrite ici est une réalité étrangère et une extrapolation à la situation française risque d'être abusive mais les catégories introduites nous semblent utiles pour questionner cette situation.

III. La transition lycée – université : du côté des tâches

III.1. Le lycée

Comme annoncé, nous allons tout d'abord essayer de cerner les attentes du lycée à travers l'examen de quelques sujets de baccalauréat. Les fonctions étant introduites dans l'enseignement secondaire dans le contexte des fonctions d'une variable réelle, c'est le travail sur ces objets qui façonne le rapport au monde fonctionnel pour les élèves du lycée, et c'est à travers les exercices du baccalauréat qui les concernent que nous avons essayé de cerner les attentes. Ce faisant, nous sommes bien conscients de ne pas envisager le paysage fonctionnel des élèves dans sa globalité. Le travail sur les nombres complexes, l'étude des transformations géométriques par exemple contribue au monde fonctionnel des élèves, même si c'est de façon moins directe que pour les fonctions d'une variable réelle. Nous nous sommes de plus bornés à sélectionner quelques exemples qui nous paraissaient, au vu de l'ensemble des sujets proposés en 2006 et 2007 en filière S, relativement représentatifs mais nous n'avons pas cherché à justifier a posteriori cette

représentativité par une étude systématique de l'ensemble des sujets sur une période donnée. Ce travail reste à faire.
Les sujets sélectionnés sont au nombre de trois : les sujets de bac pour la métropole en 2006 (sujet 1) et 2007 (sujet 2) et le sujet de Pondichery en 2006, plus particulièrement les parties de ces sujets concernant l'étude de fonctions. Les sujets passés en métropole sont ceux qui concernent la grande majorité des étudiants et c'est pourquoi nous les avons choisi. Nous leur avons ajouté le sujet de Pondichery 2006 parce qu'il est différent, au moins pour ce qui concerne les fonctions, et représente un type de sujet qui est apparu avec la réforme du lycée de 2000. Nous reproduisons ci-après les parties des sujets concernées :

Sujet 1 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)= x^2 \exp(1-x)$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O,i,j) d'unité graphique 2 cm.
a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Quelle conséquence graphique pour (C) peut-on en tirer ?
b. Justifier que f est dérivable sur IR. Déterminer sa fonction dérivée f'.
c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe (C).

Sujet 2 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par : $f(x)= x - \ln(1+x)/(1+x)$
La courbe (C) représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Etude de certaines propriétés de la courbe (C)
1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle de définition de f : $]-1,+\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1,+\infty[$, on pose $N(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1,+\infty[$. Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit (D) la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D).

Partie B : Etude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f
1. Démontrer que si x appartient à $[0,4]$, alors $f(x)$ appartient à $[0,4]$
2. On considère la suite (U_n) définie par $U_0=4$ et $U_{n+1}=f(U_n)$ pour tout n de IN.
a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe (C) et la droite (D), placer les points de (C) d'abscisses U_0, U_1, U_2, U_3.
b. Démontrer que pour tout n de IN, U_n appartient à $[0,4]$.
c. Etudier la monotonie de (U_n).
d. Démontrer que la suite (U_n) est convergente. On désigne par l sa limite.
e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de l.
Une représentation graphique de f, non reproduite ici, est donnée.

Sujet 3 :

Evolution d'une population animale en laboratoire
On effectue une étude sur un échantillon de population dont l'effectif initial est égal à 1000 et, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps qui, d'après le modèle choisi est dérivable, strictement positive sur $[0,+\infty[$ et satisfait l'équation différentielle (E) $y'=-y(3-\ln y)/20$

1. Démontrer que f dérivable, strictement positive sur $[0, +\infty[$, et vérifie pour tout t $f'(t)=-f(t)(3-\ln(f(t))/20$ si et seulement si, pour tout t, $g=\ln(f)$ vérifie $g'(t)=g(t)/20-3/20$
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle (H) $z'=z/20-3/20$.

3. En déduite qu'il existe un réel C tel que f(t)=exp[3+Cexp(t/20)]
4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :
f(t)=exp[3-3exp(t/20)]
   a) Déterminer la limite de la fonction en $+\infty$.
   b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$
   c) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'inéquation $f(t)<0{,}02$
   Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Dans le sujet 1, l'exercice qui correspond à l'extrait proposé est classique : étude d'une fonction combinant exponentielle et polynômes conduisant à un tableau de variation et un tracé de courbe et limité. Dans le second sujet, la fonction étudiée est cette fois une combinaison un peu plus complexe incluant une fonction logarithme. Cette fois-ci une représentation graphique est fournie. L'étude des variations passe par l'étude d'une fonction intermédiaire correspondant au numérateur de la dérivée qui est donnée comme c'est l'usage mais le sens de variation de cette fonction auxiliaire est lui-même donné. On associe ensuite à la fonction f une suite récurrente dont on fait montrer qu'elle converge vers 0, le seul point fixe de f sur l'intervalle considéré (résultat démontré auparavant dans le cadre géométrique et qu'il faut réinterpréter). Le thème du sujet 3 est, lui un peu différent et représentatif d'un type de sujet apparu avec la réforme des années 2000, comme indiqué plus haut. Il concerne l'étude de l'évolution d'une population par l'intermédiaire d'une modélisation faisant appel à une équation différentielle. Celle-ci est donnée directement à l'élève sans aucune justification et il ne lui est pas non plus demandé de la commenter. Par un changement de fonction inconnue, on se ramène à une équation différentielle linéaire que l'élève peut résoudre (pour une fois, le modèle n'est cependant pas le modèle logistique). Puis l'on revient à la solution de l'équation initiale (qui est donnée) et on pose quelques questions dont une dans le langage de la situation après l'avoir faite résoudre mathématiquement.
Nous n'entrerons pas dans les détails de l'analyse de ces sujets mais voudrions souligner qu'ils présentent un certain nombre de caractéristiques qui nous semblent bien représentatives de la culture du lycée, même si l'on peut légitimement penser que les expériences vécues au lycée sont plus riches que ce que nous montrent des sujets de baccalauréat :

- les tâches sont découpées en de multiples sous-tâches ; les niveaux de fonctionnement des connaissances mis en jeu se situent au plus au niveau mobilisable et il y a peu d'adaptations à effectuer ;
- la résolution suit une organisation routinière, tout à fait prédictible ;
- les aides fournies, de manière directe ou indirecte, sont très nombreuses ;
- il n'y a pas d'autonomie donnée à l'élève dans le choix des registres de représentation
- les besoins techniques de la résolution des tâches sont assez limités, les fonctions en jeu familières et spécifiées ;
- des représentations graphiques sont présentes mais elles sont relativement peu exploitées ;
- l'analyse qui y est en jeu est une analyse très algébrisée, encapsulée dans quelques théorèmes puissants, qui peut se satisfaire de conceptions ponctuelles et globales de la notion de fonction.

A quelle distance de cette culture se situe l'enseignement au début de l'université ? C'est ce que nous allons considérer maintenant, en évoquant d'abord un travail pionnier dans ce domaine : la thèse de Frédéric Praslon, un travail déjà ancien puisque la thèse a été soutenue en 1999 mais dont les analyses nous semblent toujours d'actualité.

III.2 La thèse de Frédéric Praslon

Dans sa thèse, Praslon étudie la transition lycée – université en utilisant comme filtre la notion de dérivée et son environnement et il combine pour ce faire une perspective institutionnelle et des critères d'analyse hérités des travaux d'inspiration cognitive et épistémologique comme ceux évoqués dans la parttie I. L'étude des rapports institutionnels, très fine, est effectuée à travers celle des programmes du secondaire, de différents manuels, de fiches d'exercices de DEUG. L'étude des rapports personnels des étudiants de première année à la notion de dérivée et celle de l'évolution s'effectue à travers un test d'entrée à l'université, ainsi que des ateliers organisés sur des questions sensibles (définitions, généralisation…) au fil de l'année.

Que ressort-il de l'étude institutionnelle ? Tout d'abord qu'à la fin du lycée, l'univers des élèves de la filière S en ce qui concerne cette notion de dérivée est déjà un univers conséquent mais qu'il s'enrichit considérablement dans la première année de DEUG. Pour le mettre en évidence, Praslon utilise ce que l'on appelle des cartes conceptuelles où les notions et leurs inter-relations comme les types de problèmes qui leur sont associés sont visualisés. Autre résultat qui n'a rien d'évident à l'époque, il montre que la transition qui n'est pas une transition brutale du proceptuel vers le formel, de l'intuition vers la rigueur, mais qu'elle est le terrain d'une accumulation de micro-ruptures. La transition s'accompagne en effet d'une modification entre divers équilibres :

- entre les dimensions outil et objet de la dérivée, au sens de (Douady 1986) ;
- entre l'étude d'objets particuliers et celles d'objets définis par des conditions générales ;
- entre des techniques algorithmiques et des méthodes plus générales ;
- entre des démonstrations *ornementales* et des démonstrations *outils*.

Elle s'accompagne aussi d'une plus grande autonomie donnée dans le processus de résolution (choix de cadres, de registres de représentation, moins de questions intermédiaires), et du passage d'un répertoire réduit de tâches bien travaillées à une grande diversité de tâches impossibles à routiniser. Il s'ensuit à ses yeux un vide didactique que les étudiants doivent combler essentiellement par eux mêmes. Pour sensibiliser étudiants et enseignants à cette situation, il construit des tâches qu'il estime entre les deux cultures. Nous en donnons ci-dessous un exemple.

On considère la fonction f d'une variable réelle périodique de période 1 définie par :

f(x)=x.(1-x) sur l'intervalle [0, 1[(une représentation graphique sur [-2, 2] est donnée)

Q1 : On demande si cette fonction est continue, dérivable.

Q2 : On introduit la notion de dérivée symétrique et on demande de calculer les dérivées et dérivées symétriques si elles existent en ½, ¼ et 0 et de les comparer.

Q3 : On demande de statuer sur les trois conjectures suivantes :

- C1. Toute fonction paire définie sur IR admet une dérivée symétrique en 0.
- C2. Toute fonction paire définie sur IR admet une dérivée en 0.
- C3. Si une fonction définie sur IR admet une dérivée en a, elle admet aussi une dérivée symétrique en a et les deux sont égales.

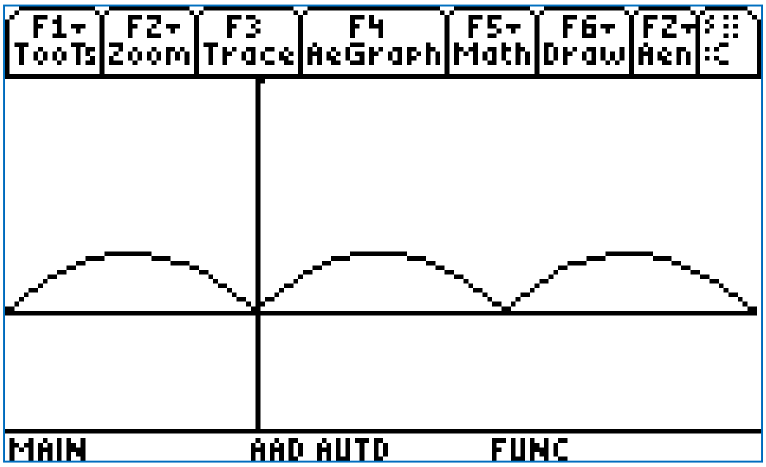


Figure 2 : Représentation graphique de la fonction f avec une calculatrice symbolique

Cette tâche ne nécessite a priori pas à l'époque d'autres connaissances que celles du lycée pour être résolue et pourtant elle est clairement hors de la culture du lycée. On y définit par exemple une fonction par morceaux et il faut comprendre que l'expression algébrique donnée n'est valable que sur un intervalle. On pose des questions sur la continuité et la dérivabilité, ces questions ne sont pas complètement nouvelles, surtout avec l'aide fournie par la représentation graphique mais elles sont marginales au lycée où la dérivée est avant tout un outil. On introduit ensuite une nouvelle notion, celle de dérivée symétrique directement par une définition formelle et il s'agit d'exploiter cette définition. Ceci aussi est non usuel, tout comme les trois conjectures générales qui sont soumises aux étudiants, même s'ils disposent, du fait des questions précédentes, des réponses à certaines d'entre elles.

Nous reviendrons dans la partie suivante sur les réponses des étudiants à ces questions. La thèse de Praslon a maintenant 10 ans, certains vides didactiques ont peut-être été au moins partiellement comblés dans les efforts faits par les universités pour s'adapter aux étudiants qu'elles reçoivent. Par ailleurs, la thèse n'aborde la transition entre lycée et université sur les fonctions que dans un contexte particulier : celui des fonctions d'une variable réelle, et même dans ce contexte, elle se centre sur la notion de dérivée. Il nous faut donc élargir la perspective si nous souhaitons appréhender la réalité de la transition. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant en rendant compte de l'analyse que nous avons faite de fiches proposées à des étudiants en début de licence.

III.3 Les fiches de DEUG (L1)

Encore une fois, nous nous appuyons sur des exemples qui nous semblent représentatifs de certains phénomènes mais l'étude menée n'est en rien systématique. Considérons d'abord deux fiches de début d'année (2007-2008) provenant respectivement de l'université Paris 7 et de l'université Bordeaux 1. Elles s'intitulent respectivement ; « Introduction ensembles, raisonnement et applications » et « Bases de logique et théories des ensembles ». La première comporte 14 exercices dont 7 sur fonctions et applications, la seconde 9 exercices dont 7 sur fonctions et applications. Elles attestent clairement qu'au début de l'université apparaît pour la notion de fonction un nouvel habitat : celui de la théorie des ensembles. Comme visible dans le chapitre concernant les fonctions de (Nardi, 2008) et dans la thèse en cours de Ridha Najar sur les modes de raisonnement à la transition lycée – université justement centrée sur le thème des fonctions, l'extension des objets fonctionnels aux ensembles et ensuite à l'algèbre des structures fait rentrer les étudiants dans un univers fonctionnel très différent de celui avec lequel ils s'étaient progressivement familiarisés dans l'enseignement secondaire. Les heuristiques, les modes d'appréhension, les modes de raisonnement et de preuve s'en trouvent profondément modifiés.
Les 7 exercices proposés dans la première fiche concernent respectivement :

- l'expression formelle de propriétés (exercice 10) ;
- la négation de propriétés (exercice 11) ;
- un calcul de limite (différence de radicaux) (exercice 12) ;
- les applications : relations avec inclusion, intersection, complémentaire (exercice 13) ;
- les notions d'injection, surjection, bijection sur un exemple $f(x)=2x/(1+x^2)$ et la détermination de l'image (exercice 14) ;
- les résultats généraux sur l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de la composée d'applications entre ensembles (exercice 15) ;
- la détermination d'ensembles de départ et d'arrivée pour la fonction de variable réelle qui à t associe e^{it} pour la rendre bijective (exercice 16).

Les 7 exercices proposés dans la seconde fiche concernent, quant à eux :

- le tracé du graphe de la fonction caractéristique d'une réunion d'intervalles (exercice 4) ;
- la détermination des images directes et réciproques de parties de IR (singletons, intervalles) par la fonction valeur absolue (exercice 5) ;
- la détermination de toutes les applications entre deux ensembles finis (2 et 3 éléments) et l'identification parmi elles des injections, surjections, bijections (exercice 6) ;
- la détermination des composées de deux applications données de IR dans IR² et IR² dans IR, et l'étude de leur injectivité, surjectivité, bijectivité (exercice 7) ;
- le résultat général sur l'injectivité (respectivement la surjectivité) de la composée de deux applications surjectives (respectivement injectives) (exercice 8) ;
- l'étude des fonctions affines de IR dans IR du point de vue de l'injectivité et de la surjectivité (exercice 9) ;
- la formule du binôme : développement de $f(x)=(1+x)^n$, et exploitation pour obtenir des formules de sommation (exercice 10).

La lecture des énoncés montre bien qu'un effort réel est fait pour assurer un lien avec les connaissances antérieures, aider la prise de sens des nouvelles notions introduites en s'appuyant sur des exemples familiers (exercice 14 dans la première fiche, exercices 5 et 9 dans la seconde fiche), préparer les énoncés généraux par l'étude d'un exemple (enchaînement des exercices 6 et

7 par exemple dans la deuxième fiche), limiter la complexité technique (simplicité de la fonction rationnelle dans l'exercice 14 de la première fiche et des fonctions dont la composition est demandée dans l'exercice 7 de la seconde fiche), aider l'étudiant par des questions intermédiaires ou la donnée des résultats à établir (donnée de l'image de la fonction dans l'exercice 14 de la première fiche, de formules de sommation intermédiaires à établir dans l'exercice 10 de la seconde fiche…). Malgré ces précautions, il est indéniable que ce que demande la réalisation des exercices proposés aux étudiants ne s'inscrit pas dans la continuité des pratiques du lycée en matière de fonctions. Les nouveautés introduites sont multiples et nous nous bornerons à souligner les plus évidentes :

- La formalisation :

La formalisation avec usage des quantificateurs est une nouvelle demande particulièrement explicite dans les exercices 10 et 11 de la première fiche. Dans le premier, 9 propriétés sont à formaliser pour des fonctions f et g de IR dans IR : f est majorée ; f est paire ; f ne s'annule jamais ; f est croissante ; f n'est pas la fonction nulle ; f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ; f atteint toutes les valeurs de IN, f est inférieure à g ; f n'est pas inférieure à g. Les expressions formelles attendues sont en majorité simples au sens où elles ne comportent pas, à l'exception de deux d'entre elles, des alternances de quantifications mais elles ne sont pas ordonnées dans le sens d'une complexité croissante : la première par exemple comporte une alternance de quantificateurs et la thèse de Faïza Chellougui (2004) a bien montré les problèmes qu'elle pose aux étudiants de première année, plusieurs énoncés se présentent sous la forme de négation et demandent un reformulation, le dernier enfin demande la négation d'une implication. L'exercice 11, quant à lui, renforce le travail sur la négation des inégalités et rajoute la négation d'une conjonction mais sans introduire la négation d'une alternance de quantificateurs puisqu'il s'agit de nier les propositions suivantes : pour tout x de IR, $f(x)\leq 1$; f est croissante ; f est croissante et positive ; il existe un réel positif tel que $f(x)\leq 0$.

- La dimension ensembliste :

La description des exercices donnée ci-dessus le met clairement en évidence. Ce sont les questions d'injectivité de surjectivité, bijectivité qui sont travaillées, même lorsque ce sont des fonctions familières de IR dans IR qui sont concernées. L'exercice 14 de la première fiche et l'exercice 9 de la seconde l'illustrent clairement et nous en reproduisons ci-après les énoncés :
Exercice 14 : Soit f : IR $\rightarrow$ IR définie par $f(x)=2x/(1+x^2)$. f est-elle injective ? Surjective ? Montrer que f(IR)=[-1,1]. Montrer que f restreinte à [-1,1] est une bijection sur [-1,1]. Retrouver le résultat par l'étude des variations.
Exercice 9 : Soient $(a,b)\in IR^2$ et $f_{a,b}$ l'application $f_{a,b}$: IR$\rightarrow$ IR, $x\rightarrow ax+b$

1. Déterminer pour quelles valeurs de (a,b) la fonction $f_{a,b}$ est injective, pour quelles valeurs elle est surjective.
2. Montrer que si $f_{a,b} = f_{c,d}$, alors a=c et b=d.
3. Facultatif : Interpréter cette condition en termes d'injectivité d'une certaine application.
4. Lorsque $f_{a,b}$ est bijective, déterminer son inverse.

C'est dans ce nouveau langage ensembliste qu'il faut se situer pour démontrer les propriétés des fonctions. On notera la dernière question de l'exercice 14 qui marque le changement de contrat : l'étude familière des variations n'est que le moyen de retrouver un résultat à établir autrement. On notera aussi la question 3 de l'exercice 9 qui oblige à considérer cette fois une fonction de IR^2 dans l'ensemble des applications de IR dans IR, un changement de niveau d'abstraction dont la complexité n'a pas échappé à l'auteur de la fiche comme l'atteste la mention facultatif.

Même les exercices portant sur des fonctions spécifiques ne se limitent pas aux seules fonctions de IR dans IR. L'exercice 16 de la première fiche concerne l'exponentielle complexe, l'exercice 7 de la seconde fiche concerne l'application de IR^2 dans IR qui au couple (x,y) associe xy et celle de IR dans IR^2 qui à x associe le couple (x, x^2).
Enfin on trouve dans les deux fiches les exercices visant à établir les résultats classiques concernant l'image et l'image inverse d'une réunion et d'une intersection, ou les propriétés des composées de fonctions injectives et surjectives.
Les premières fiches sur les fonctions numériques montrent elles aussi des différences évidentes avec les pratiques du lycée, en particulier via l'accent mis sur la dimension locale dans l'étude des fonctions par rapport à la dimension globale et les formes renouvelées d'étude de cette dimension locale :

- études de continuité et de dérivabilité au voisinage d'un point ;
- calculs de limites et de développements limités ;
- problèmes de raccord dérivables ou continus pour des fonctions dépendant de paramètres ;
- preuve d'énoncés généraux.

Nous utiliserons pour illustrer ce point la première fiche sur les fonctions numériques de l'université de Bordeaux 1. Cette fiche comporte 16 exercices qui se répartissent de la façon suivante :

- détermination des domaines de définition de fonctions (exercice 1) ;
- utilisations directes de la définition formelle de la limite (exercice 2) ;
- montrer que la fonction qui à x associé cos(1/x) n'a pas de limite en 0 (exercice 2) ;
- calcul de limites (exercices 3, 15) ;
- continuité, dérivabilité en un point et prolongement par continuité sur des exemples (exercices 4, 5, 10, 11, 12) ;
- convergence d'une suite récurrente (exercice 6) ;
- démonstration d'un énoncé général : continuité sur [a,b] et image finie implique constance (exercice 7) ;
- application du théorème des valeurs intermédiaires à la résolution de P(x)=0 (polynôme particulier puis polynôme impair général) (exercice 8) ;
- montrer qu'une application spécifiée est une bijection. Questions sur la fonction réciproque (exercices 9, 16) ;
- démonstration d'un énoncé général : dérivées fonctions paires et impaires (exercice 13) ;
- calcul de dérivées (exercice 14).

Citons-en quelques exemples :
Exercice 2 :

1. Montrer en utilisant des quantificateurs que $\lim_{x\to 0} x^2=0$.
2. Quelle est la limite l quand x tend vers $+\infty$ de la fonction $f : x \to x/(1+x)$. Pour tout réel strictement positif ε, déterminer A tel que $(x>A \Rightarrow (|f(x)-l|< \varepsilon)$.
3. Ecrire en utilisant des quantificateurs : $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=0$ et $\lim_{x\to -1^+}\ln(1+x)=-\infty$. Déterminer un intervalle J centré en 0 tel que : $(x\in J \Rightarrow |\ln(1+x)|<10^{-3})$.
4. En utilisant des suites, montrer que la fonction $x\to\cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 11 : Soit f la fonction définie sur IR par : f(x)=cos(x) si x>0 et f(x)=1 – sin(x)² si x≤0.

1. Montrer que f est continue sur IR.
2. Montrer que f est dérivable sur]- ∞,0[et sur]0,+ ∞[et calculer sa dérivée.
3. Montrer que f est dérivable en 0. Quelle est sa dérivée ?
4. Vérifier que $\lim_{x\to 0}$f'(x)=f'(0) et donc que f' est également continue en 0.

Exercice 12 : Déterminer a et b dans IR de manière à ce que la fonction f définie sur IR+ par : f(x)= rac(x) si 0≤x≤1 et f(x)=ax²+bx+1 sinon soit dérivable sur IR+*.
Exercice 16 : On considère la fonction f définie sur I=]0,π/2[par f(x)=1/(xtanx).

1. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
2. Soit g sa fonction réciproque. La fonction g est-elle continue sur J ? Dérivable sur J ?
3. Soit b=f(π/4) ; montrer que g est dérivable en b et calculer g'(b).

On voit bien dans ces exercices le travail sur la formalisation, même s'il reste d'une technicité modeste et si l'on n'observe pas un basculement vers une analyse formelle en ε, η ; la prédominance de la dimension objet sur les dimensions outil ou processus dans le travail sur les fonctions numériques associée à la prédominance du point de vue local ; la réduction du nombre de guidages intermédiaires ; la domination des registres symbolique intrinsèque et algébrique et la quasi-disparition du registre graphique dans ses usages traditionnels sans que s'amorce la reconstruction nécessaire d'un autre rapport iconique et heuristique au registre graphique (Maschietto, 2001) ; la quasi-disparition enfin des problèmes emblématiques du lycée. Comment cela se traduit-il du côté des étudiants ?

IV. La transition lycée – université : du côté des étudiants

Nous reviendrons d'abord dans cette partie sur la thèse de Frédéric Praslon et plus particulièrement sur les réponses des étudiants à la tâche présentée dans la partie précédente, puis nous évoquerons les résultats de deux questionnaires récents posés à des étudiants entrant à l'université.

IV.1. Retour sur la thèse de Praslon

Que nous apprennent les réponses des étudiants à la tâche analysée plus haut, située à la transition entre les deux cultures secondaire et universitaire ?
A la question Q1, un tiers environ des étudiants ne perçoivent pas qu'il y a un problème : la fonction est définie par une expression polynomiale donc pour eux continue et dérivable, ou elle est continue et dérivable sur [0,1[pour cette même raison et par périodicité continue et dérivable sur IR tout entier ; un quart environ repère la non-dérivabilité en 0 et/ou en 1 et essaie de la justifier de façon algébrique ou graphique. La nécessité d'une étude locale est visiblement davantage perçue en 1 qu'en 0 et l'on peut sans doute relier ce phénomène au fait que, dans la définition de f donnée, l'intervalle est ouvert en 1 et non en 0. Cette marque symbolique est sans doute attachée pour eux aux cas où les choses ne vont pas de soi. Les arguments de ceux qui repèrent la non-dérivabilité sont du type : « f n'est pas dérivable en 0 car la courbe admet deux demi-tangentes distinctes (respectivement un point anguleux, un pic) », pour les justifications graphiques. Pour les justifications algébriques, les plus élaborées reposent en général sur l'argumentation suivante : f est dérivable ssi f(0)=f(1) et f'(0)=f'(1), puis, en utilisant l'expression donnée f(x)=x(1-x), ils concluent que la seconde condition n'est pas vérifiée puisque f'(x)=-

2x+1. On constate de plus un cloisonnement des réponses suivant les registres utilisés : graphique ou algébrique.

La question Q2, contrairement à ce que l'on aurait pu penser, montre que l'introduction formelle d'une nouvelle notion ne provoque que peu de blocages ; les calculs des dérivées et dérivées symétriques en ½ et 1/.4 donnent respectivement 95% (dérivée) et 75% (dérivée symétrique) de réponses correctes, tandis qu'au point 0, l'existence et le calcul éventuel ne sont gérés correctement que dans 14% et 3% des cas respectivement. Les étudiants utilisent l'expression algébrique donnée pour f(x) pour mener les calculs, et même lorsque le résultat obtenu est en contradiction avec leur réponse à Q1, ils ne le repèrent pas.

Il y a peu de réponses à la question Q3 et ce n'est pas la fonction f qui est en général utilisée comme contre-exemple à C2 mais la fonction valeur absolue qui est l'une des fonctions de référence au lycée.

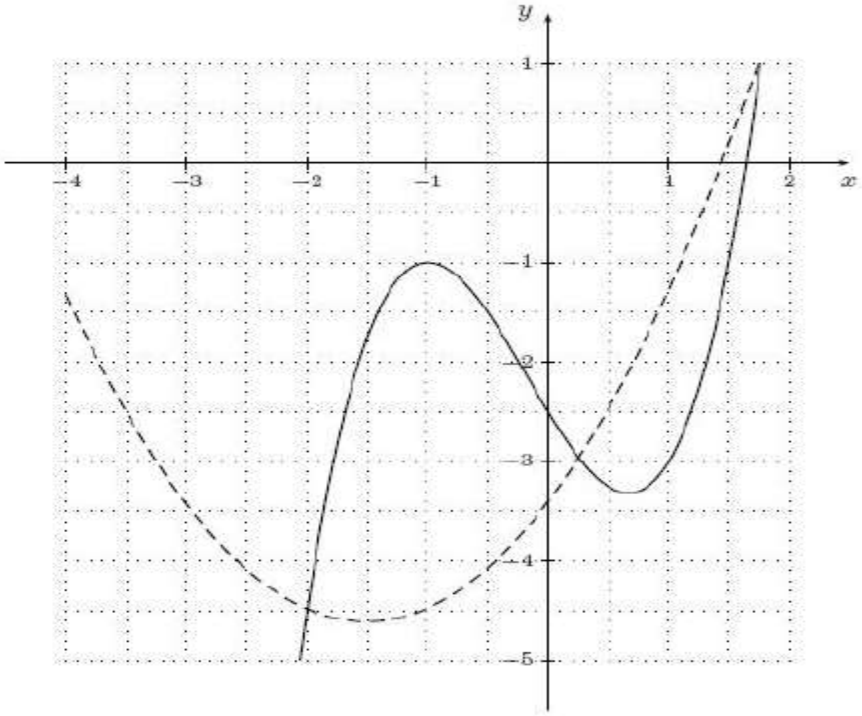
On le voit donc, les étudiants ne sont d'une part pas bloqués face à ces questions non usuelles mais ils sont très peu outillés pour les résoudre. Ceci se trouve confirmé par les différentes expérimentations menées dans le cadre de la thèse, et notamment les ateliers sur les définitions ou sur l'étude des fonctions définies par une propriété générale dite de croissance forte.

IV.2 Des questionnaires réalisés dans le cadre des IREM

Le premier questionnaire a été élaboré par le groupe transition lycée-université de l'IREM Paris Nord et proposé aux étudiants de l'université Paris 13 en 2004/2005. Nous en avons extrait quelques tâches qui concernent plus spécifiquement les fonctions et notamment la suivante qui concerne la résolution graphiques d'équations et d'inéquations.

3. Voici la représentation graphique des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5 \text{ et } g(x) = 0{,}53x^2 + 1{,}6x - 3{,}4$$



a) Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

- $x^3 + 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5 = -1$ Réponse : ....

Les équations données à résoudre sont les suivantes :
$x^3+0,5x^2-2x-2,5=-1$; $x^3+0,5x^2-2x-1,5=0$; $x^3+0,5x^2-2x-2,5>-2$; $f(x) \leq g(x)$
Il s'agit d'une résolution graphique d'équations a priori dans son principe familière aux élèves entrant à l'université. Vu la façon dont les équations sont données, la résolution nécessite pour les trois premières une reformulation dans le langage fonctionnel : $f(x)=-1$ pour la première, $f(x)+1=0$ pour la seconde qui ramène à la première équation, $f(x)>-2$ pour la troisième, mais ces reformulations ne demandent aucun calcul et l'on pourrait donc s'attendre en début d'université à de très bons taux de réussite. Le tableau ci-après présentant les résultats montre qu'il n'en est rien. Seule la première équation obtient plus de 50% de réussite et elle dépasse à peine ce score médian et la petite transformation que nécessite la seconde équation suffit à faire chuter le score à 14%.

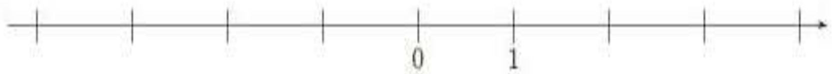
Equation	% réussite	Principaux types d'erreurs
$f(x)=-1$	54%	Une seule valeur – confusion avec $f(x)=0$
$f(x)+1=0$	14%	Confusion avec $f(x)=0$ et $f(0)$
$f(x)>-2$	27%	Un seul intervalle
$f(x) \leq g(x)$	27%	Un intervalle ; erreur de bornes

Tableau 1 : Pourcentages de réussite dans la résolution des équations et inéquations

Un autre exercice de ce questionnaire a attiré notre attention. Il concerne des connaissances élémentaires sur les valeurs absolues, fondamentales pour le traitement des fonctions à l'université et que l'on espère consolidées à la fin du lycée, même si les difficultés rencontrées par les élèves avec la notion de valeur absolue ont été bien mises en évidence dans les recherches didactiques. Les questions posées sont les suivantes :

1. a) x est un nombre réel tel que $|x-3|<1,2$.
Traduire cette inégalité à l'aide d'un intervalle : ....

b) Sur la droite des réels ci-dessous, représenter les nombres réels tels que $|x+1|<0,5$.



2. Exprimer au moyen de valeurs absolues les expressions suivantes :

a) $-1 \leqslant x \leqslant 3$ ....

b) $x \in]2;3[$ ....

c) $5,5 \leqslant x \leqslant 6,5$ ....

Les résultats sont les suivants :

Question	Réussite	Non réponses
1a	20%	35%
1b	21%	31%
2a	8%	64%
2b	7%	69%
2c	3,5%	70%

Tableau 2 : Pourcentages de réussite aux tâches portant sur les valeurs absolues

Ils montrent, pour toutes les questions, un très faible taux de réussite et une difficulté plus grande encore quand il s'agit d'exprimer un intervalle en termes de valeur absolue, même si dans les trois cas considérés, le centre de l'intervalle est un nombre simple : 1, 2,5 et 6. On peut se demander d'ailleurs si le décalage observé ne reflète pas une différence de fréquence des tâches correspondantes dans l'enseignement secondaire. Les réponses erronées engagent les nombres en présence dans des combinatoires variées et une erreur fréquente pour la première inégalité est la réponse $]-\infty, 4,2[$ qui consiste simplement à résoudre l'inéquation sans prendre en compte la valeur absolue.
Le deuxième questionnaire a été élaboré par la commission inter-IREM Université (CI2U) et passé par des étudiants provenant de sept universités. Nous en extrayons une tâche sur les limites de suites et fonctions. Les limites concernées et les pourcentages de réussite sont donnés dans le tableau ci-après. Ils concernent la seule correction des limites données.

Suite ou fonction et limites considérées	Réussite
$(-1)^n+1$	48%
$\sqrt{n} - n$	46%
$\sin(2\pi n)$	18%
$\cos(2\pi/n)$	41%
$\exp(x)/x^3$ en $+\infty$, 0 et $-\infty$	78%, 9% et 67%
$x^{10}\exp(x)$ en $+\infty$, 0 et $-\infty$	87%, 71% et 55%
$\cos(2\pi x)$ en $+\infty$	20%
$(\ln x-\ln 2)/(x-2)$ en $+\infty$ et en 2	53% et 13%

Tableau 3 : Pourcentage de réussite aux calculs de limites

Encore une fois, les pourcentages de réussite sont loin de montrer une situation satisfaisante, et ce d'autant plus qu'ils correspondent à des réponses brutes hors justification. Pour la suite de terme général $\sin(2\pi n)$ par exemple, 35% répondent que la suite n'a pas de limite, ne faisant visiblement pas de différence entre cette suite et la fonction sinus. Concernant les fonctions, visiblement, les résultats sur les croissances comparées des fonctions exponentielles, logarithmes et polynomiales au voisinage de l'infini semblent bien installés, avec un écart cependant entre ce qui concerne $+\infty$ et $-\infty$. Comme le montrent les analyses faites par les membres de la commission (Vandebrouck & CI2U, 2008), les étudiants oscillent dans leurs réponses entre conceptions ponctuelles et globales des fonctions, ce qui engendre de nombreuses erreurs dans la détermination de limites qui nécessite une appréhension locale de ce concept.

V. Conclusion

En conclusion, nous voudrions souligner le fait que la transition lycée – université dans le cadre des fonctions met en jeu des discontinuités suivant de très nombreuses dimensions. Elle s'accompagne d'abord d'une extension conceptuelle au monde ensembliste et à l'algèbre des structures qui introduit de nouvelles praxéologies, de nouveaux modes de raisonnement, et demande une maîtrise accrue du symbolisme fonctionnel intrinsèque. Pour ce qui concerne les fonctions d'une variable réelle, objets déjà familiers, la centration sur le local marginalise les praxéologies d'études de fonction routinisées au lycée et crée une réelle nécessité de coordonner ce point de vue local avec les points de vue ponctuel et global prédominants au lycée. Les tâches proposées rendent les conceptions de niveau processus tout à fait insuffisantes et le niveau « Trans » commence à s'affirmer, tout comme l'entrée dans le monde formel. On note enfin un changement important du rapport au graphique accompagné très souvent d'un rejet des outils technologiques (calculatrices graphiques notamment) à travers lesquels beaucoup d'élèves ont élaboré leur rapport au monde fonctionnel au lycée. Ces discontinuités ne signifient en aucun cas

que l'enseignement universitaire reste immobile sans essayer de s'adapter aux étudiants qu'il reçoit comme le montrent bien les premières fiches de travaux dirigés que nous avons analysées. Des tâches y sont proposées qui essaient d'établir des ponts entre les deux cultures et de favoriser l'adaptation mais on voit bien aussi qu'en dépit de ces efforts, les discontinuités sont réelles. De plus, ces tâches s'adressent à des étudiants dont les acquis, même pour ce qui concerne les attentes du lycée, sont fragiles et limités comme le montrent les deux questionnaires dont nous avons présenté quelques tâches. Il y a à cet état de fait des raisons structurelles et notamment le fait que l'université correspond pour beaucoup d'étudiants à un choix par défaut (Convert, 2006), mais ceci aggrave notablement les difficultés d'une transition par essence problématique comme le sont toutes les transitions institutionnelles.
Face à cette situation, il nous semblerait déraisonnable que l'enseignement secondaire cherche à courir après l'enseignement supérieur. Il a à construire sa cohérence propre mais pour cela aussi des évolutions substantielles sont nécessaires, permettant aux élèves de développer progressivement un travail fonctionnel autonome et sûr dans des situations relativement simples sans enfermer pour autant l'enseignement des fonctions dans celui d'un corpus de routines et discours ritualisés, habituant aussi les étudiants à mobiliser leurs ressources pour faire face aux multiples adaptations que requiert la rencontre avec des situations non routinières, car c'est de telles capacités qu'il leur faudra faire preuve à l'université

Remerciements : Je remercie Fabrice Vandebrouck pour les nombreuses fiches de TD qu'il m'a communiquées et les échanges fructueux que nous avons eus lors de la préparation de cette contribution.

Références

Artigue, M. (2004). Le défi de la transition secondaire /supérieur : que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine ? *Premier Colloque Franco-Canadien de Mathématiques,* Juillet 2004, Toulouse.

Artigue, M. (2005). Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. *Annales de Sciences Cognitives et Didactique,* n° 11, 269-288.

Bosch.M., Fonseca, C., Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2.3, 205-250.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 77-111.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. In J.L. Dorier y al. (Eds), *Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques,* pp. 3-22 & 41-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chellougui, F. (2004), *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire, entre l'explicite et l'implicite,* Thèse de doctorat en co-tuelle entre l'Université Claude Bernard Lyon 1 et l'Université de Tunis.

Chorlay, R. (2007). La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique. *Actes du Colloque IREM – INRP « Histoire et Enseignement des Mathématiques : rigueur, erreurs, raisonnements »*, Clermont-Ferrand, mai 2006. IREM de Clermont-Ferrand.

Convert, B (2006). *Les impasses de la démocratisation scolaire. Sur une prétendue crise des vocations scientifiques.* Editions Raisons d'Agir. Paris.

Coppé, S., Dorier, J.L., Yavuz, I. (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27/2, 151-186.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-32.

Dubinsky, E., Mc Donald, M. (2001). APOS: A constructive theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E, Harel, G. (1992). *The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes n°25. Mathematical Association of America.

Duval R. (1995). *Semiosis et Noesis*. Berne : Peter Lang.

Gueudet, G. (2008). La transition secondaire-supérieur : résultats de recherches didactiques et perspectives. In, A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en Didactique des Mathématiques. Cours de la XIIIe école d'été de didactique des mathématiques,* p. 159-176. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Holton D. (ed.) (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels : Building Meaning for Symbols and their Manipulation. In, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 707-762. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut.

Maschietto M. (2001). Fonctionnalités des representations graphiques dans la resolution de problems d'analyse à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21 (1-2), 123-156.

Maschietto, M. (2003). *L'enseignement de l'analyse au lycée: les débuts du jeu local/global dans l'environnement de calculatrices*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7. Paris: IREM Paris 7.

Nardi, E. (2008). *Amongst Mathematicians. Teaching and Learning Mathematics at University Level*. Springer.

Nemirovsky, R., Borba (Eds.) (2004). Bodily Activity and Imagination in Mathematics Learning. PME Special Issue. *Educational Studies in Mathematics*, 57(3).

Piaget, J., Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. New York: Colombia University Press.

Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dan la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat, Université Paris 7. Paris: IREM Paris 7.

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/2. 139-190.

Rogalski M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In, L.Viennot (Ed.) Didactique, épistémologie et histoire des sciences, p. 61-87. Paris : Presses Universitaires de France.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (eds). *International handbook of mathematics education*. 289-325. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education 2004.*

Vandebrouck, F. & CI2U (2008). Functions at the transition between French upper secondary school and university. Communication à ICME-11, Monterey, Juillet 2008. http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique28

Fonctions et TICE

J-F. Chesné, M-H. Le Yaouanq
IUFM de Créteil

Résumé : C'est par un travail sur les représentations d'une fonction dans différents registres que l'élève construit peu à peu ce concept. L'atelier propose des exemples d'utilisation des TICE pour articuler différentes représentations d'une fonction, mais aussi pour aider l'élève à négocier la transition entre arithmétique et algèbre, à produire des relations fonctionnelles, à travailler différents aspects d'une expression algébrique. Un moment de réflexion et d'échanges sur la formation initiale des professeurs à l'utilisation des TICE en algèbre est également prévu.

L'utilisation d'outils informatiques figure dans les programmes du second cycle, dans des documents ressources pour le collège ou documents d'accompagnement pour le lycée. En particulier, le travail sur la notion de fonction peut être l'occasion d'utiliser de nombreux logiciels : tableurs, grapheurs, logiciels de géométrie dynamique et logiciels de calcul formel. La modification des programmes de collège consistant à introduire la notion générale de fonction en classe de 3^{e}, auparavant introduite en classe de seconde, est un élément nouveau favorisant la comparaison entre collège et lycée.

Nous commencerons par présenter rapidement la place de cette notion de fonction dans les programmes considérés puis nous nous intéresserons plus spécifiquement sur une situation donnée à l'utilisation de différents outils informatiques en collège et en classe de seconde.

I. **Fonction et TICE dans les programmes de collège et de seconde** (programme de collège Août 2008, programme de seconde Mai 2002).

Au collège

Les objectifs figurant dans le Préambule pour le collège pour l'Organisation et Gestion de données sont les suivants :

- *maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ;*
- *approcher la notion de fonction (exemples des fonctions linéaires et affines) ;*
- *s'initier à la lecture, à l'utilisation et à la production de représentations, de graphiques et à l'utilisation d'un tableur*
- *acquérir quelques notions fondamentales de statistique descriptive et se familiariser avec les notions de chance et de probabilité*

Deux thèmes relatifs aux fonctions sont dorénavant à étudier en classe de 3^{e} :

- l'approche de la notion de fonction de façon générale
- l'étude des fonctions linéaires et affines, apparaissant comme des cas particuliers de fonctions.

L'algèbre est un outil de modélisation, extra mathématique avec des situations de la vie courante ou issues d'autres disciplines, mais aussi intra mathématique avec l'étude de grandeurs associées à des situations géométriques et l'étude des fonctions linéaires et affines qui apparaissent en synthèse du travail effectué sur la proportionnalité depuis l'école primaire.

La notion de fonction est cependant utilisée comme outil implicite depuis la classe de 6^e^ comme le montrent ces extraits des programmes dans le domaine « Organisation et gestion de données, fonctions ».

- En 6^e^, au sujet des représentations usuelles :
  « La capacité visée concerne l'aptitude à faire une interprétation globale et qualitative de la représentation étudiée (évolution d'une grandeur en fonction d'une autre).»
- En 5^e^ :
  « Il est possible d'envisager, dans une formule, des variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur mais toute définition de la notion de fonction est exclue. »
- En 4^e^ :
  « Comme en classe de cinquième, le mot 'fonction' est employé, chaque fois que nécessaire, en situation, et sans qu'une définition formelle de la notion de fonction soit donnée. »

Le programme de 3^e^ propose donc une première prise de contact avec la notion de fonction en tant qu'objet :

« *L'un des objectifs est de faire émerger progressivement, sur des exemples, la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre, à un nombre, un autre nombre. »*

Ceci s'accompagne sur le plan symbolique de deux nouvelles notations, la flèche d'association ainsi que la notation composée $f(x)$. La notation f n'apparaît pas en revanche dans le programme.

Le travail dans le cadre fonctionnel avec les types de tâches évoqués dans ce programme met en jeu différents registres de représentation de l'objet fonction. Outre le registre de la langue naturelle, les registres graphique et algébrique, le registre des tableaux (tableaux de données) sont mentionnés dans le programme.

D'un point de vue informatique, l'utilisation du tableur-grapheur est mentionnée explicitement dans le programme en lien avec les concepts de fonction et de variable : « *l'usage du tableur-grapheur contribue à la mise en place du concept, dans ses aspects numériques comme dans ses aspects graphiques* ».

Ceci prolonge le travail proposé par le programme en classe de 4^e^ :

« *Les tableurs-grapheurs, dont l'usage a été introduit dès la classe de cinquième, donnent accès à une façon particulière de désigner une variable : par l'emplacement de la cellule où elle se trouve dans le tableau. Cette nouveauté est un enrichissement pour le travail sur la notion de variable, effectué sur des exemples variés* ».

En classe de seconde :

Les fonctions sont toujours des outils de résolution de problèmes mais l'objet fonction acquiert une plus grande visibilité par l'étude de certaines de ses propriétés : variation, périodicité, propriétés de symétrie de sa courbe représentative. C'est par un travail sur ses différents registres de représentations que la construction du concept de fonction est visée peu à peu. Le travail sur la mise en équation est conduit en liaison très étroite avec le cadre fonctionnel et les résolutions graphiques.

Contrairement à la classe de troisième, figure dans le programme de seconde un unique « chapitre » intitulé « Calculs et fonctions ». Le travail en algèbre sollicite donc régulièrement plusieurs cadres, géométrique, numérique, fonctionnel, et plusieurs registres de représentation ; certains changements de registres sont favorisés par l'utilisation de calculatrices graphiques dont « *l'utilisation raisonnée et efficace pour les calculs et les graphiques* » figure comme un des objectifs du programme.

L’usage d’autres outils TICE comme les tableurs, grapheurs et logiciels de géométrie dynamique est également prescrit. Le document d’accompagnement précise ainsi que :

- La calculatrice « *permet de relier très facilement et de façon quasi instantanée, les domaines numérique et graphique, et d'enrichir ainsi considérablement l'approche des fonctions*.»
- Le tableur « *apporte un éclairage complémentaire de la notion de variable et de fonction et facilite la mise en œuvre de différentes activités numériques riches d'enseignement en particulier sur les différentes formes possibles d'une même expression* ».
- Les logiciels de géométrie dynamique «*permettent aussi de représenter simultanément une situation géométrique et la représentation graphique d'une fonction liée à cette situation*».

II. Quelle notion de fonction ?

La notion de fonction peut être appréhendée de deux façons différentes, par une définition ensembliste ou comme une relation de dépendance. D’un point de vue épistémologique, c’est la relation de dépendance qui fonde les concepts de fonction et de variable. Aucune définition formelle ensembliste n’est donnée dans l’enseignement secondaire en tant que correspondance arbitraire f d’un ensemble A dans un ensemble B et c’est l’aspect de co-variation, de relation asymétrique entre deux variations qui est privilégié. Le concept se construit alors par des représentations visuelles, des images mentales, des expériences, comme concept-image (Vinner, Tall).
On dispose alors de plusieurs registres de représentation de cet objet mathématique fonction et l’utilisation des technologies peut favoriser les conversions entre registres. Elle peut également favoriser les articulations entre différents cadres intervenant dans la situation étudiée, par exemple les cadres géométrique et numérique.
Concernant le registre graphique et la représentation graphique d’une fonction, nous serons amenés à distinguer deux aspects :
- un aspect statique, comme ensemble de points ; le processus de construction n’y est pas visible.
- un aspect dynamique de la trajectoire « d’un point P qui bouge, représentant une variable dépendante en fonction d’un autre point variable M sur l’axe des abscisses qui représente la variable indépendante » (Laborde)

III. L’utilisation des TICE

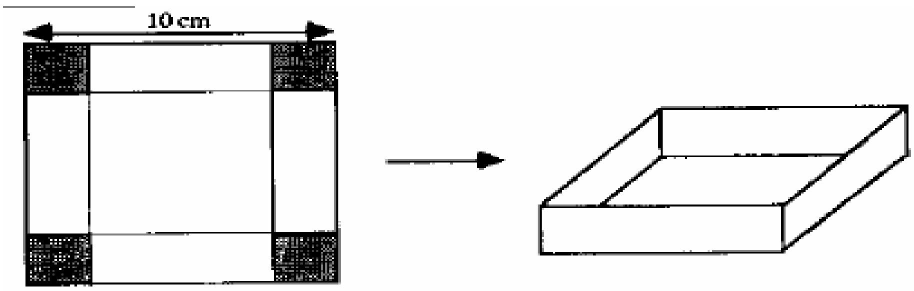
Nous avons choisi une situation particulière et nous sommes intéressés à diverses exploitations à l’aide de logiciels de cette situation.

1. Une situation : le volume de la boîte

Le passage de relation de dépendance entre grandeurs exprimées depuis la classe de 6^{e} par l’expression « en fonction de » à « *la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre, à un nombre, un autre nombre* » s’accompagne du passage des grandeurs aux nombres. Cependant le travail sur les grandeurs reste très présent dans le programme de seconde puisque le document d’accompagnement de seconde précise que « *le programme propose de s’appuyer sur quelques situations simples. On privilégiera celles pour lesquelles l’explicitation du lien entre deux grandeurs permet de répondre à une question : ainsi on peut trouver de nombreux exemples de situations géométriques, faisant intervenir comme variable une longueur et comme deuxième grandeur une longueur ou une aire : la question à traiter est alors souvent* *un problème de maximum, de minimum, ou même de recherche de valeurs particulières* ».

Nous avons donc choisi une situation mettant en jeu des grandeurs et les questions mentionnées précédemment. Il s'agit de considérer le volume d'une boîte sans couvercle dont le patron est obtenu en enlevant quatre carrés identiques aux sommets d'une feuille carrée. Cette situation, bien connue, figure dans le document ressource « Du numérique au littéral » sous la forme suivante :

On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. Dans chaque coin de la plaque, on découpe un carré comme indiqué sur le dessin. On obtient alors le patron d'une boîte parallélépipédique, sans couvercle.
Quelle doit être la mesure du côté du carré que l'on découpe dans chaque coin pour que le volume de la boîte soit 72 cm^3 ?



Cette situation qui est posée dans le cadre géométrique et dans le cadre des grandeurs, est exploitée depuis longtemps en lycée en particulier en classe de 1^{re} puisqu'elle conduit dans le cadre algébrique à la résolution d'une (in)équation polynomiale de degré 3 ou à l'étude d'une fonction polynomiale de degré 3 en cas de recherche du maximum du volume.
Nous retrouvons désormais cette situation au fil des années, la notion de fonction étant implicite ou explicite, de la classe de 4^{e}, voire de la classe de 5^{e}, à la classe de 1^{re}. Nous nous intéresserons dans la suite aux classes de 4^{e}, 3^{e} et 2^{nde}, excluant ainsi les outils d'analyse ou d'algèbre disponibles en classe de 1^{re}.

Du point de vue des TICE, des animations informatiques avec un logiciel de géométrie dynamique offrant la possibilité de lier la situation dans l'espace à la représentation plane étaient déjà disponibles dans des imagiciels développés par le CNAM en 1992, mais des outils informatiques divers sont utilisables : tableur, grapheur, logiciels de géométrie dynamique, logiciels de calcul formel, calculatrice graphique en classe de 2^{nde}.

2. Dans des manuels scolaires : tableur (ou calculatrice)

En annexe figurent trois exercices issus de manuels des classes de 4^{e}, 3^{e}, 2^{nde} traitant de cette situation de la boîte sans couvercle. Ces trois exercices utilisent explicitement un tableur, le choix étant donné en seconde avec une calculatrice graphique.
Il s'agit dans chaque cas de trouver les dimensions de la boîte répondant à une contrainte donnée :
- obtenir une boîte de volume maximal (classes de 2^{nde} et 3^{e})
- obtenir une boîte de volume 72 cm^3 (classe de 4^{e}). On reconnaît là le problème exposé dans le document ressource « Du numérique au littéral ».

Ces énoncés présentent des différences évidentes entre eux : une ou plusieurs variables sont introduites, les étapes de la mise en équation sont plus ou moins détaillées, les notations symboliques fonctionnelles sont utilisées ou non, l'utilisation d'un tableur (ou d'une calculatrice graphique) est plus ou moins guidée, le choix de la longueur du côté de la feuille carrée permet ou non la construction de patrons et influence la nature des solutions trouvées.

Cependant, outre le fait d'être tous situés en fin de chapitre, ces énoncés présentent de grandes similarités du point de vue de leur construction :

- Le passage au cadre algébrique est forcé dès la première question, il est simplement plus ou moins détaillé suivant l'exercice.
- Le problème de l'ensemble de définition est immédiatement posé a priori.
- Un tableur (ou une calculatrice graphique en seconde) est utilisé pour « résoudre » de façon approchée numériquement ou graphiquement (classes de 3^{e} et 2nde)

En 2nde, conformément au programme, le travail est complété par une activité transformationnelle permettant de trouver de façon algébrique le résultat souhaité. Le fait que la solution soit non décimale permet de mettre en évidence l'intérêt de la méthode algébrique.

Du point de vue de l'usage des TICE, nous pouvons noter que :

- Ces activités respectent l'introduction du tableur ou de la calculatrice graphique préconisée dans les instructions officielles.
- Les capacités calculatoires et dynamiques (recopie de formules et réactualisation immédiate des calculs) sont exploitées.
- L'usage d'un tableur ou d'une calculatrice impose le passage des grandeurs aux nombres.
- L'usage d'un tableur (3^{e}, 2nde) permet de faire intervenir le registre graphique, de façon simple et rapide.
- Le travail sur tableur effectué par l'élève nécessite une petite autonomie pour améliorer la précision de la réponse apportée.

Cependant on constate une très faible distance entre cette activité avec tableur et en environnement papier crayon. En effet la « trame » de l'activité est la même que l'on soit dans un environnement tableur ou papier-crayon avec une mise en équation puis l'obtention d'une fonction donnée par son expression algébrique puis l'obtention d'un tableau de valeurs ou d'une représentation graphique ; l'instrumentation requise à l'utilisation du tableur pour répondre aux questions peut être réduite à son minimum.

L'utilisation du tableur se fait donc de façon essentiellement pragmatique pour produire rapidement et facilement des résultats mais dans des tâches qui se différencient peu de celles traditionnellement pensées pour l'environnement papier/crayon et avec un accès privilégié par le cadre algébrique.

Mariam Haspekian a noté dans sa thèse qu'outre une stabilité des pratiques enseignantes, une dimension institutionnelle joue sans doute dans ces choix. Ce sont en effet des tâches conformes au travail en environnement papier-crayon qui guident les objectifs définis pour l'enseignement. Le papier-crayon, "référent", rend les relations entre environnement papier-crayon et environnement technologique dissymétriques.

Cependant de nombreuses difficultés sont ainsi laissées à la charge des élèves en particulier du point de vue de l'activité générationnelle :

- Cette situation met en jeu des grandeurs. Une exploitation de cette situation en problème ouvert en classe de 2nde nous a montré qu'une difficulté apparaît déjà dans le cadre des grandeurs : « le volume d'une boîte sans couvercle est-il le même que celui d'une boîte avec couvercle ? ».

- Une seconde difficulté consiste dans le passage des grandeurs aux nombres. Nous avons ainsi observé des élèves qui effectuent des calculs sur les nombres n'ayant aucun sens en termes de grandeurs.
  Par exemple, pour une feuille de 10 cm de côté, et la recherche d'une boîte de volume 72 cm^3 certains élèves proposent la solution suivante :
  100 – 72 = 28
  28 : 4 = 7 (car il y a 4 carrés).
  Donc l'aire d'un carré est 7 cm².
  Le côté du carré est $\sqrt{7}$.
  L'utilisation des unités dans les écritures (100 cm² - 72 cm^3) leur aurait-elle permis de ne pas s'engager dans cette voie ?
- Des difficultés classiques liées à l'introduction de la lettre apparaissent sans surprise, notamment le fait de travailler avec l'inconnue. L'exemple ci-dessus montre que des élèves restent dans une démarche arithmétique, même en seconde et après avoir traité la séquence sur les généralités sur les fonctions.
- D'autres difficultés sont liées à l'articulation de plusieurs cadres ainsi qu'à celle de plusieurs registres de représentation, par exemple pour lier variable géométrique et variable algébrique.

Apparaissent ensuite d'autres difficultés, que nous ne détaillerons pas ici car elles sont bien connues, dans le traitement et l'utilisation des expressions algébriques trouvées.

3. D'autres utilisations des TICE

D'autres utilisations des TICE sont envisageables afin d'aider à comprendre les objets mathématiques mis en jeu ou de pas confronter l'élève à l'ensemble des difficultés réunies. Ceci nécessite souvent des tâches qui n'ont pas d'analogue direct dans l'environnement papier/crayon, ou pour les tâches *a priori* envisageables dans cet environnement, une reconstruction des scénarios didactiques associés.

a. Un tableur pour travailler la mise en relation et faciliter la mise en équation

Un tableur peut ainsi être utilisé en amont de la mise en équation sous forme algébrique afin de la faciliter, en classe de 5^e ou de 4^e, voire après pour certains élèves.
Un certain nombre de telles utilisations sont maintenant disponibles, par exemple sur Internet, des exemples sont détaillés dans le document ressource « Du Numérique au littéral ». On y trouve bien souvent la construction de tableaux analogues à celui reproduit ci-dessous qui sont obtenus par recopie de formules.

	A	B	C	D
1	Côté du carré découpé	Côté de la base	Aire de la base	Volume de la boîte
2	0	10	100	0
3	0,5	9	81	40,5
4	1	8	64	64
5	1,5	7	49	73,5
6	2	6	36	72
7	2,5	5	25	62,5
8	3	4	16	48
9	3,5	3	9	31,5
10	4	2	4	16
11	4,5	1	1	4,5
12	5	0	0	0

Ecrire la première ligne de calcul, en automatisant les calculs, permet à l'élève de travailler dans un cadre numérique en partant du « connu » comme dans une démarche arithmétique, d'effectuer des calculs arithmétiques. Ces calculs produisent un résultat numérique, évitant ainsi le dilemme processus/produit existant avec l'expression algébrique. Le problème du choix de la mesure du côté et de l'ensemble de définition peut alors apparaître avec l'obtention de longueur et volume négatifs.
Cependant l'élève doit entrer ces calculs en utilisant des formules et des lettres avec une syntaxe précise, pour les automatiser. De plus, pour créer une telle feuille de calcul, il est nécessaire de structurer et de planifier son travail.
L'utilisation d'un tableur peut donc être une aide pour mettre en évidence les relations entre variables dans un problème sans avoir à manipuler d'inconnues. Il sert alors d'intermédiaire entre numérique et algébrique permettant un travail progressif sur la mise en équation.

En observant les ressources et en s'appuyant sur les échanges en formation, deux questions se sont posées à nous, liées à cet usage du tableur comme aide à l'introduction de l'algèbre.

Un tableau

La création d'un tableau comme celui présenté précédemment est la solution proposée dans la très grande majorité des ressources existantes. Ce sont de tels tableaux qui sont présentés comme exemples dans le document ressource « Du numérique au littéral ».
Une autre possibilité nous semble devoir être interrogée : celle d'utiliser une seule ligne en changeant la valeur entrée dans la cellule.

	A	B	C	D
1	Côté du carré découpé	Côté de la base	Aire de la base	Volume de la boîte
2	2,8	4,4	19,36	54,21

L'interprétation d'un tableau complet est certes beaucoup plus aisée pour répondre à la question posée, mais en utilisant une seule ligne, rien n'empêche l'élève de recopier les résultats à la main dans un tableau.
En classe de 4^{e} le programme mentionne que *« Les tableurs-grapheurs, dont l'usage a été introduit dès la classe de cinquième, donnent accès à une façon particulière de désigner une variable : par l'emplacement de la cellule où elle se trouve dans le tableau. Cette nouveauté est un enrichissement pour le travail sur la notion de variable, effectué sur des exemples variés ».*

Ces deux utilisations du tableur par création d'un tableau de plusieurs lignes ou par utilisation d'une seule ligne donnent-elles la même idée de la variable (emplacement d'une cellule dans laquelle on change la valeur numérique ou ensemble de cellules contenant différentes valeurs numériques) ?
La réalisation de plusieurs tableaux différents, statiques, avec différents pas comme 0,1 puis 0,01 et 0,001, dans lesquels les valeurs antécédentes ne seront pas modifiées, et le changement dans une seule cellule des valeurs choisies, avec son aspect dynamique, induisent-elles les mêmes images mentales de la notion de fonction ?

L'imbrication de connaissances mathématiques et technologiques, variable, formule, fonction, qui se co-contruisent, rend cette utilisation du tableur plus délicate que l'utilisation proposée dans les énoncés figurant en annexe. La question de la recopie de formules est en particulier au cœur de la notion de formule et son introduction nous semble nécessiter des précautions, en particulier, malgré son aspect pratique, ne pas intervenir trop tôt lors des premières utilisations du tableur.

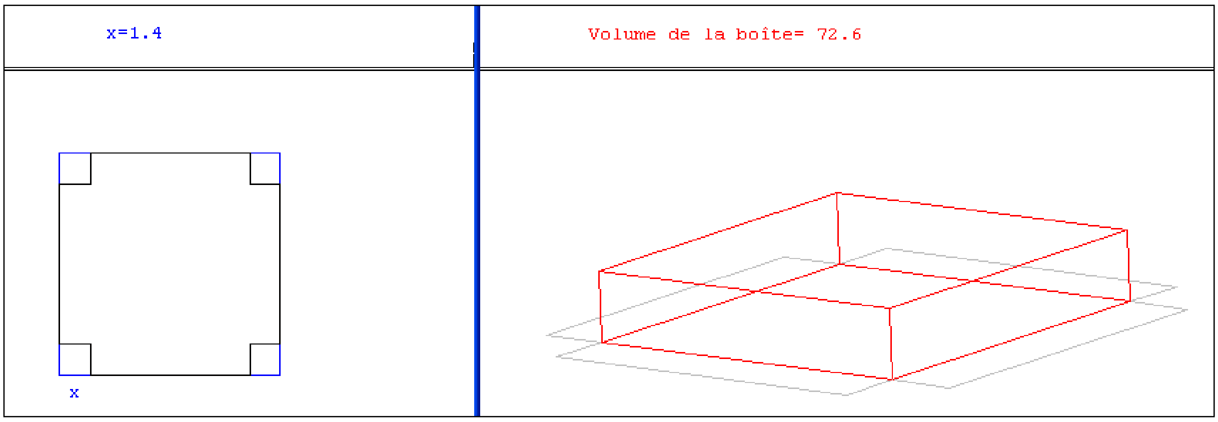
Entrer une formule
Pour entrer l'adresse d'une cellule dans une formule, le clic sur la cellule ou l'écriture de l'adresse sont souvent proposés comme totalement interchangeables.
Cependant est-il indifférent du point de vue de l'entrée dans l'algèbre de cliquer sur une cellule pour « prendre le nombre qu'elle contient » ou d'écrire l'adresse de la cellule, ce qui nécessite le respect d'une syntaxe bien précise et l'usage de lettres ?
Entrer la formule en cliquant sur les cellules concernées facilite l'écriture des relations en restant sur un aspect numérique, mais peut permettre de ce fait à l'élève de rester uniquement du côté numérique. En revanche, faire écrire les formules peut se révéler une vraie difficulté pour certains élèves, leur demandant d'entrer trop vite dans la création de formules.

Une solution intermédiaire nous semble pouvoir être de cliquer sur les cellules dans un premier temps en demandant de lire et de recopier sur une feuille de papier la formule ainsi entrée dans la barre de formules. Cette première étape vers la formule algébrique est suivie d'une seconde où l'élève écrit directement la formule. Le lien entre l'environnement informatique et l'environnement papier-crayon nous semble ici une piste exploitable pour éviter que l'élève ne reste que du côté numérique et s'engage vers la formule algébrique.

b. Des logiciels de géométrie dynamique

Dans le cas de la situation étudiée, le logiciel Geoplan-Geospace permet de relier les figures du plan et de l'espace. Cette réalisation est ici trop technique pour être réalisée entièrement par les élèves. L'étude de nombreuses autres activités à support géométrique portant sur des grandeurs de figures planes (longueurs, aires en particulier) sont cependant accessibles aux élèves par l'utilisation d'un logiciel de géométrie.

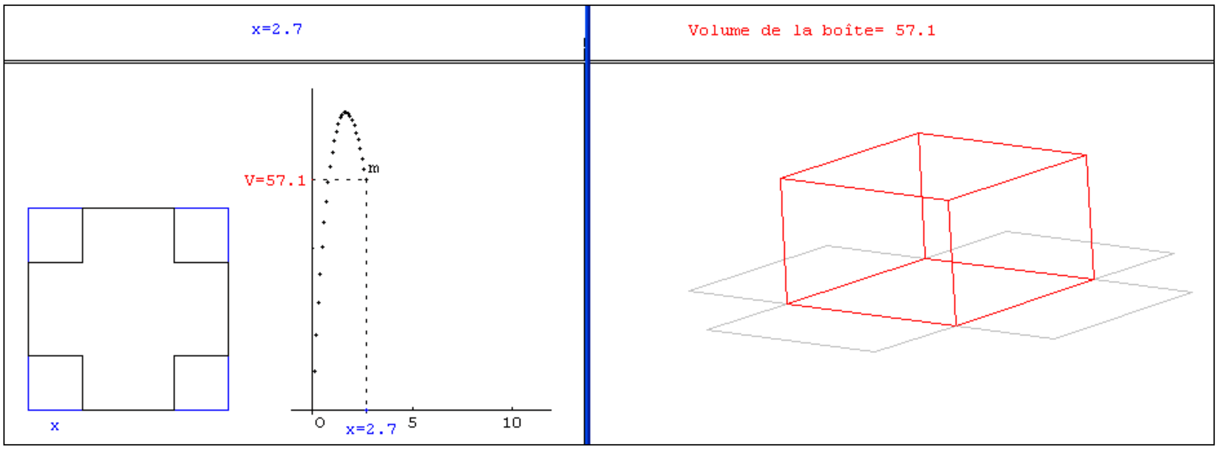
Il est possible de faire afficher directement la longueur variable du côté des carrés enlevés dans les coins de la feuille et le volume de la boîte. Le logiciel ne nécessite donc aucun passage par l'algèbre puisqu'il fournit directement les mesures. L'animation permet d'avoir de plus une illusion du continu.



Cette expérimentation sur logiciel peut venir en complément d'une manipulation à la main avec création d'un patron, d'une boîte et le calcul de son volume, afin de faire varier la mesure des côtés des carrés enlevés, de recueillir automatiquement des mesures des grandeurs en jeu. Ceci permet de répondre au problème posé de façon approchée.

L'aspect dynamique permet de visualiser la co-variation de deux grandeurs, l'une étant « pilote », ce qui met en évidence la dissymétrie. Le pilotage peut se faire en pilotant une variable géométrique, un point, non pas un nombre. La proximité avec la situation initiale est donc grande, le cadre géométrique restant présent.

Il est ensuite possible de faire afficher point par point la représentation graphique de la fonction volume ainsi définie.



La représentation graphique, construite point par point, devient la trajectoire d'un point qui représente une variable dépendante en fonction d'une variable indépendante, contrairement au tableur où la représentation graphique obtenue est statique et son procédé de construction n'est pas visible.

c. Un logiciel de calcul formel

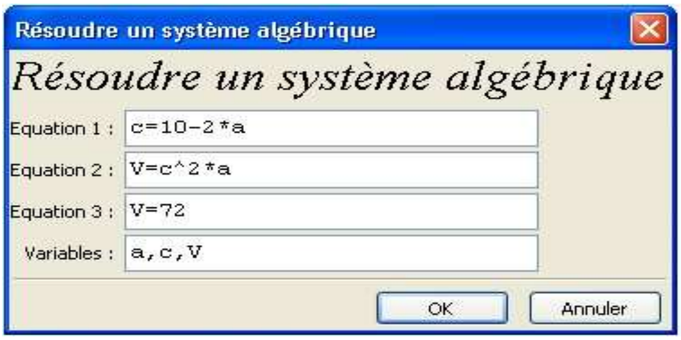
La situation de la boîte figurant dans le document ressource « du numérique au littéral » est accompagnée de la proposition de l'utilisation d'un outil de calcul formel.

> En permettant la résolution de systèmes, l'utilisation d'un outil de calcul formel autorise l'introduction d'inconnues auxiliaires qui facilite la mise en équation et que seul l'expert, qui dispose d'une gamme de problèmes de référence, sait ne pas être indispensable.
> *Dans le problème de la boîte, on voit ainsi des élèves introduire les variables suivantes :*
> *a la mesure des côtés des carrés découpés dans les coins ;*
> *c la mesure du côté du fond de la boîte ;*
> *V le volume de la boîte;*
> *et écrire cette suite d'équations pour rendre compte du problème :*
> $c = 10 - 2a$; $V = c^2 \times a$ et $V = 72$

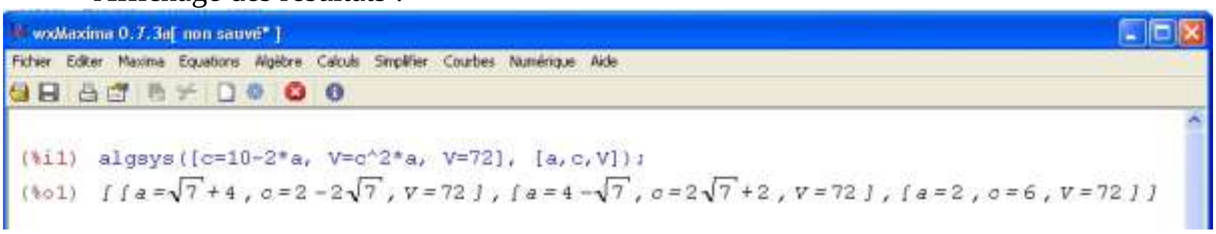
L'objectif visé est donc de travailler la mise en relation des différentes variables et l'écriture générale de ces relations dans un langage algébrique. Un logiciel de calcul formel évite de recourir de façon trop précoce à une résolution experte avec le choix d'une unique inconnue et des transformations obtenues par l'application du principe de substitution.

Nous nous sommes donc interrogés sur les outils qu'il est possible d'utiliser pour résoudre un tel système en collège. De nombreux outils de calcul formel sont disponibles par téléchargement sur Internet : Maxima, Xcas, Scilab, etc.
Monaghan a mis en avant, lors de recherches sur des enseignants anglais, que plus le besoin d'instrumentation est fort, plus l'outil semble difficile à intégrer par l'enseignant. De plus la prise en main nécessaire peut engendrer une augmentation des interventions concernant des questions d'ordre technologique et une diminution de celles consacrées au contenu mathématique. Le choix d'un logiciel paraît donc assez crucial dans le cas de logiciel de calcul formel notamment pour des élèves jeunes.
Voici un exemple d'utilisation d'un logiciel de calcul formel (Maxima) dont l'interface permet une entrée relativement simple du système à résoudre.

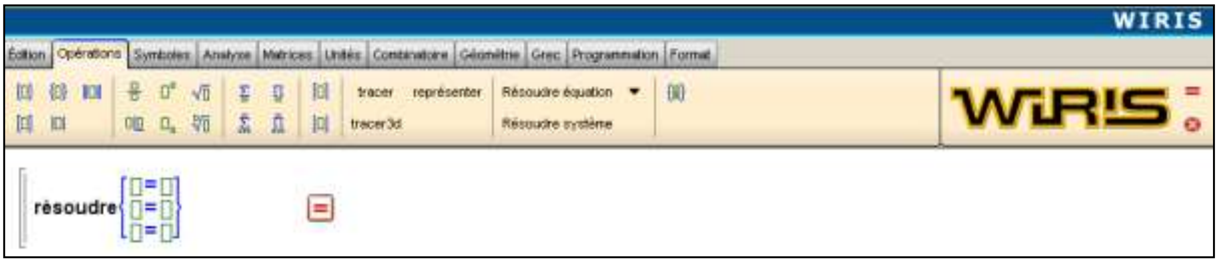
Entrée du système



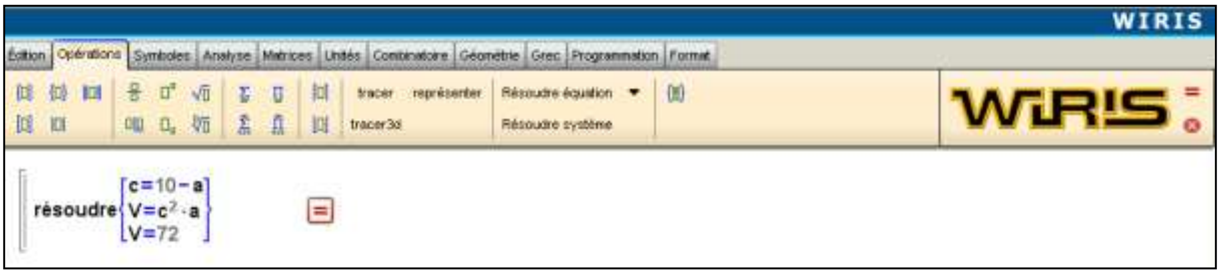
Affichage des résultats :



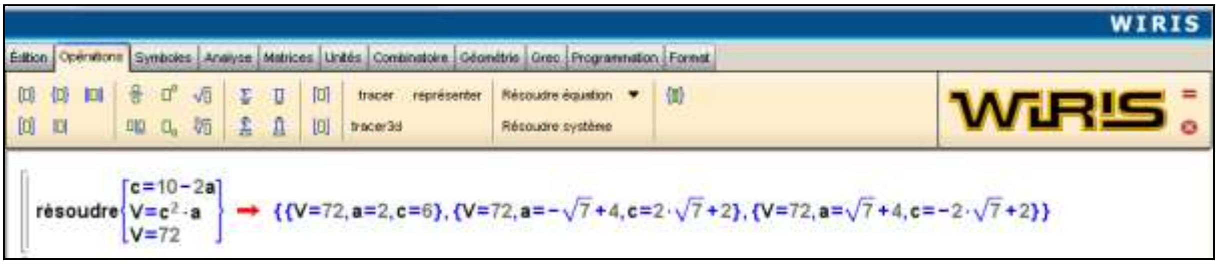
Cependant un outil de calcul formel a retenu plus particulièrement notre attention pour des élèves de collège ou de seconde. Il s'agit de Wiris utilisable en ligne à l'adresse suivante : www.wiris.com
En sélectionnant l'outil « Résoudre un système » on obtient un système avec des zones de texte à compléter dans les différents membres des équations.



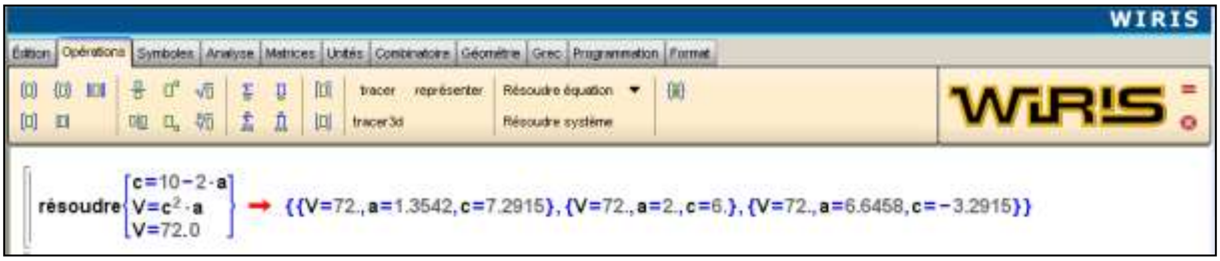
Les opérations, le carré dans le cas présent, mais aussi les écritures fractionnaires, les racines carrées, peuvent être entrées avec la syntaxe algébrique habituelle. La déclaration des inconnues n'est pas demandée.



Les solutions sont alors fournies après avoir cliqué sur le signe d'effectuation (signe d'égalité en rouge), sous la forme suivante :



Les solutions fournies sont bien sûr les solutions exactes. La demande de valeurs approchées décimales n'est pas toujours accessible de façon très simple sur tous les logiciels de calcul formel. Sur Wiris l'entrée d'une des données sous forme décimale permet d'obtenir directement des valeurs approchées sous forme décimale ; nous pouvons supposer que ceci provoque, d'un point de vue informatique, une coercion.



Cependant la validité des solutions fournies par le logiciel est à examiner. Ceci peut apparaître assez facilement ici en constatant la valeur négative donnée à c dans la troisième solution fournie ; la donnée des formes exactes peut en revanche masquer la difficulté. Sinon le problème de la construction des boîtes solutions peut être posé pour provoquer la prise de conscience et montrer à l'élève la nécessité d'opérer un contrôle sur les résultats fournis.
On retrouve ainsi la question de l'ensemble de définition mais il ne s'agit plus d'une question posée a priori, ce sont les résultats fournis par le logiciel qui engendre une nouvelle question mathématique.

Lors des différents stages de formation continue dans lesquels nous avons fait prendre en main cet outil, nos collègues ont apprécié sa facilité d'utilisation et ont considéré que leurs élèves pourraient l'utiliser sans difficulté.
Cependant l'idée même d'utiliser un logiciel de calcul formel se heurte à une résistance très forte de la part des collègues de collège : la crainte de ne pouvoir ensuite enrôler les élèves dans l'apprentissage de la résolution d'équation est exprimée de façon très forte.

IV. Conclusion

Suivant les logiciels utilisés, les chemins de l'antécédent à l'image sont différents, les cadres en jeu sont également différents, la représentation graphique apparaît sous des aspects statique ou dynamique et la distance avec la situation initialement exposée est plus ou moins grande, le travail algébrique est prépondérant ou inexistant.
Même dans le cas de l'utilisation d'un même logiciel, un tableur, sa place, en amont ou en aval d'un travail algébrique est à questionner. En aval, il s'appuie sur l'une des images très répandues de la notion de fonction, à savoir l'expression algébrique avec un signe d'égalité ; en amont, il peut servir d'intermédiaire entre numérique et algébrique et permettre aux élèves d'entrer dans une activité générationnelle de façon plus progressive. Cependant les scénarios didactiques sont dans ce cas à modifier, et la distance avec le travail habituel en environnement papier-crayon est beaucoup plus importante.

Nous constatons d'un point de vue des ressources que, en mai 2008, parmi les ressources disponibles sur Educnet sur les fonctions, on dénombrait :
- pour la classe de 3^{e}, 22 ressources utilisant un tableur, 16 un logiciel de géométrie dynamique.
- pour la classe de 2nde, 14 utilisant un tableur, 50 un logiciel de géométrie dynamique, 6 des calculatrices graphiques.

L'étude des variations d'une fonction en classe de 2nde suggère sans doute davantage l'utilisation des logiciels de géométrie pour leur caractère dynamique. En revanche le tableur est mentionné de façon répétée dans le programme de collège pour travailler sur les concepts de variable et de fonction, les logiciels de géométrie n'apparaissant que dans la partie géométrie. Quant aux 10 manuels de 4^{e} et 3^{e} consultés, les outils informatiques y interviennent en exercices et non pas en activité d'introduction, le tableur étant plus fréquemment présent.

Il ne faut pas négliger les difficultés matérielles pour les auteurs de manuels pour présenter certaines activités en respectant les contraintes de format d'un manuel. Cependant des recherches sur les pratiques enseignantes nous apprennent que les représentations des enseignants concernant le rôle des outils informatiques est essentiellement une projection de leurs représentations concernant l'enseignement des mathématiques et que la tendance observée consiste à utiliser les outils technologiques pour leur valeur pragmatique au détriment de leur valeur épistémique. Les usages qui semblent les premiers accessibles aux enseignants ne sont pas ceux qui tirent le mieux parti des potentialités des technologies considérées (Laborde, 2001),(Monaghan, 2004).

Pourtant, concernant l'usage des technologies, « un point essentiel dans cette approche [l'approche instrumentale] est que ce que nous apprenons et non simplement la façon dont nous l'apprenons est étroitement dépendant des artefacts utilisés pour cet apprentissage (ici calculatrices et logiciels notamment). » (Artigue, 2007, Séminaire national « Utilisation des outils logiciels dans l'enseignement des mathématiques »).
D'autres scénarios de séquences d'enseignement, souvent riches et complexes, existent mais comme l'a montré Haspekian dans sa thèse, il s'agit de ressources ponctuelles, isolées, qui ne suffisent pas à organiser dans la durée l'articulation cohérente d'une progression mathématique et instrumentale. De plus, quand des accompagnements existent, ils sont davantage d'ordre mathématique que d'ordre technologique.
Imaginer concrètement la mise en œuvre d'une séance à partir d'un document écrit par quelqu'un qui n'a jamais utilisé l'informatique de la façon envisagée représente une difficulté certaine. Cette difficulté nécessite pour nous formateurs d'envisager un accompagnement très concret en formation initiale et continue pour tirer un meilleur profit de l'utilisation des TICE.

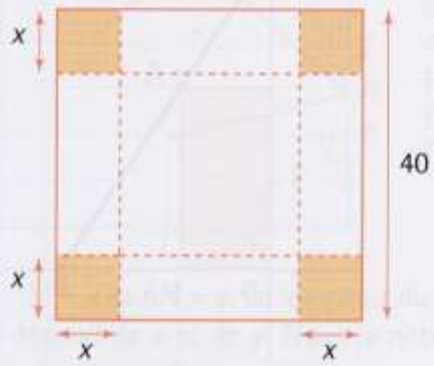
Annexes

En classe de seconde :

92 Boîte optimale

Dans une feuille de carton carrée de 40 cm de côté on découpe les quatre coins puis on replie en suivant les pointillés afin d'obtenir une boite dont la base sera carrée (voir figure). On souhaite obtenir une boîte de volume maximal.

On appellera L le côté (en cm) de la base de la boîte et $\mathcal{V}$ le volume de la boîte (en cm^3).



1. Calculer L, puis $\mathcal{V}$, en fonction de x. Pour quelles valeurs de x ces calculs ont-ils un sens ?

2. La formule obtenue pour $\mathcal{V}$ permet de définir une fonction de x. Quel est son ensemble de définition ?

3. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un tableur, observer la représentation graphique de la fonction $\mathcal{V}$. Quelle conjecture peut-on formuler pour le maximum de cette fonction ? Donner une estimation du volume maximal (à 1 près) et une estimation (à 0,1 près) de x permettant d'obtenir ce volume.

4. Calculer le volume $\mathcal{V}_M$ correspondant à $x = \frac{20}{3}$.

Vérifier que :

$$\mathcal{V}_M - \mathcal{V} = \frac{-4(3x-80)(3x-20)^2}{27}.$$

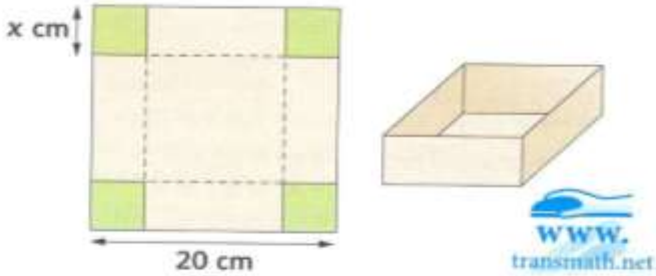
En déduire que $\mathcal{V}_M \geqslant \mathcal{V}$. Comparer avec les observations réalisées en 3 et conclure.

Manuel Fractale 2$^{\text{nde}}$, p.85, éditeur Bordas, 2004

En classe de 3e

47 Avec un ordinateur

Une boîte est fabriquée dans une plaque de carton carrée de côté 20 cm. Pour cela, on découpe les carrés de côté x cm en vert et on plie le long des pointillés comme indiqué ci-dessous.



1. a. Pourquoi x est-il compris entre 0 et 10 ?

b. Quelle est la hauteur de la boîte obtenue ?

c. Quelle est l'aire A(x), en cm², du carré au fond de la boîte obtenue ?

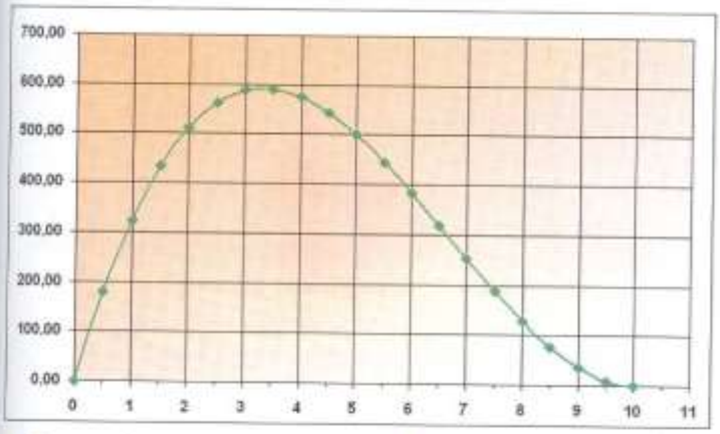
d. Quel est le volume V(x), en cm³, de la boîte obtenue ?

2. On se propose de savoir pour quelle valeur de x, la boîte obtenue a le volume maximal.

a. Avec un tableur, réaliser la feuille de calcul ci-dessous et la compléter jusqu'à la ligne 22.

	A	B	C
1	x	A(x)	V(x)
2	0	=(20-2*A2)^2	=A2*B2
3	0.5		
4	1		
5	1.5		
6	2		

b. Sélectionner la plage C1:C22 et, avec l'assistant graphique, réaliser le graphique suivant (en effectuant les réglages nécessaires).



c. Reprendre la feuille de calcul du **a** avec, pour x, les valeurs :
3,0 ; 3,1 ; 3,2 ; 3,3 ; 3,4 ; 3,5 ; 3,6 ; 3,7 ; 3,8 ; 3,9 ; 4.
Conjecturer un encadrement de la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximal.

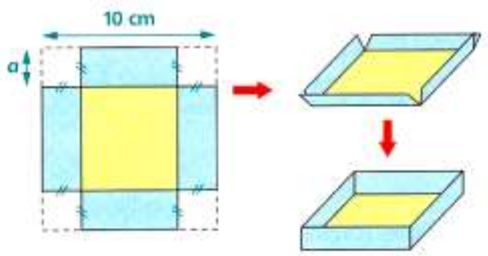
Manuel Transmath 3^e, p.119, éditeur Nathan, 2008

Classe de 4^e

Avec l'ordinateur

115 Volume d'une boîte

On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. Dans chaque coin de la plaque on découpe un carré de côté a cm comme indiqué sur la figure.
On obtient alors le patron d'une boîte parallélépipédique, sans couvercle.
On se propose de trouver a pour que le volume V de la boîte soit 72 cm^3.



1. Formule du volume V

a. Expliquer pourquoi a est compris entre 0 et 5.

b. On note c la longueur en cm du côté du fond de la boîte (en jaune ci-dessus). Exprimer c en fonction de a.

c. Quelle est la hauteur de la boîte ?
Exprimer son volume V en fonction de a et c.
Expliquer pourquoi $V = a(10-2a)^2$.

2. Essais successifs

On se propose donc de résoudre l'équation :

$$a(10-2a)^2 = 72\,.$$

Pour cela, on utilise un tableur.

a. Réaliser la feuille de calcul ci-dessous et compléter la plage B2:B7.

	A	B
1	**a**	**V**
2	0	=A2 * (10 - A2)^2
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

b. En déduire une solution de l'équation.

c. Reprendre la feuille de calcul précédente en complétant la plage A2:A12 par les nombres 1 ; 1,1 ; 1,2 ; ... ; 2.
Conjecturer la présence d'une deuxième solution ; en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

d. Réaliser de nouvelles feuilles de calcul pour obtenir un encadrement de cette deuxième solution :
- d'amplitude 10^{-2},
- d'amplitude 10^{-3}.

Manuel Transmath 4^e, p. 122, éditeur Nathan, 2007

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions en seconde

Dépendances didactiques des connaissances et de leurs formes.

Eugène COMIN
Lycée Arnaud Daniel et DAESL - Bordeaux

Résumé : Le passage à l'algèbre nécessite, de la part de l'élève, une évolution des formes d'une même connaissance pour modifier son rapport à un savoir donné, ce qui peut expliquer en partie, les difficultés qu'il rencontre dans le passage du collège au lycée. Pour extraire les relations numériques de l'univers des grandeurs et accéder progressivement à des niveaux d'abstraction qui conduisent vers les modèles algébriques, les élèves doivent appréhender la multi-dimensionnalité conceptuelle des notions de variables et de fonctions. Pour accéder à ce processus de conceptualisation, les élèves et les professeurs rencontrent des difficultés dans la mise en ouvre d'une dialectique entre l'arithmétique des grandeurs et l'algèbre élémentaire. L'atelier propose des outils pour l'élaboration d'un curriculum adapté à une évolution possible des connaissances des élèves.

1 Introduction

Le passage à l'algèbre nécessite, de la part de l'élève, une évolution des formes de connaissances pour modifier son rapport à un savoir donné, ce qui peut expliquer en partie, les difficultés qu'il rencontre dans le passage du collège au lycée.

Pour extraire les relations numériques de l'univers des grandeurs et accéder progressivement à des niveaux d'abstraction qui conduisent vers les modèles algébriques, les élèves doivent appréhender la multidimensionnalité conceptuelle des notions de variables et de fonctions. Pour accéder à ce processus de conceptualisation, les élèves et les professeurs rencontrent des difficultés dans la mise en œuvre d'une dialectique entre l'arithmétique des grandeurs et l'algèbre élémentaire.

L'atelier avait pour objectif de sensibiliser les participants à ces changements conceptuels en mettant à leur disposition plusieurs résultats d'enquêtes qui les illustrent. L'atelier proposait aussi différents outils pour analyser ces résultats, expliquer les comportements des élèves et élaborer des curriculums adaptés aux évolutions possibles de leurs connaissances.
Le présent texte rapporte ces principaux éléments plus qu'il ne relate le déroulement de l'atelier.

2 De la formule arithmétique à la formule algébrique

Pour dégager de l'univers des grandeurs le formalisme des fonctions numériques, il faut transformer le statut des différents objets qui constituent l'environnement des fonctions et leur signification : les grandeurs deviennent des variables numériques et la dépendance entre grandeurs devient une correspondance entre nombres abstraits (les réels).
Nous envisageons une organisation didactique qui débute par les fonctions modélisables par des formules (que nous nommons « fonctions performatives »), et qui fait évoluer leur statut de l'arithmétique vers l'algèbre. En effet, nous faisons l'hypothèse que la formule est « l'outil transactionnel » le plus apte à assurer la transposition de la notion de fonction d'un cadre à l'autre. Puisque nous prévoyons une transformation progressive du sens que les élèves peuvent attribuer à une formule, il nous faut observer l'état de leurs connaissances à l'issue du collège.

2 – 1 Etats des connaissances des élèves

Les deux exercices suivants, qui référent aux fonctions affines, avaient pour objectif de tester les connaissances des élèves de seconde avant les leçons sur les fonctions. Les participants à l'atelier étaient invités à comparer les structures de ces deux exercices, à montrer en quoi les énoncés sollicitaient différemment les connaissances des élèves puis à conjecturer des différences de réussites pour les confronter aux réponses obtenues.
Les fréquences de réponses sont données en pourcentages pour faciliter les comparaisons ; elles sont calculées sur 34 élèves en 2002-2003 et sur 90 élèves en 2004-2005.

Année 2002-2003 (34 élèves d'une même classe) ; **les contrats de location**

> Une personne veut louer une voiture. Elle a le choix entre trois contrats :
> Au contrat A : la personne paie un forfait de 80 € et 0,12 € par kilomètre parcouru.
> Au contrat B : la personne paie un forfait de 60 € et 0,15 € par kilomètre parcouru.
> Au contrat C : la personne paie un forfait de 150 €.
> Choisir parmi les fonctions suivantes celle qui modélise chacun des contrats A, B, C :
>
> $f_1(x)=150x$; $f_2(x)=60+0,15x$; $f_3(x)=80x+0,1$; $f_4(x)=80,12x$;
> $f_5(x)=80+0,12x$; $f_6(x)=150$.

Fréquences des réponses en pourcentage :

Contrat A :	f_1 0	f_2 3	f_3 3	f_4 3	f_5 **97**	f_6 0
Contrat B :	f_1 0	f_2 **97**	f_3 0	f_4 0	f_5 3	f_6 0
Contrat C :	f_1 9	f_2 0	f_3 0	f_4 0	f_5 0	f_6 **94**

Remarquons que presque tous les élèves interrogés donnent la bonne réponse, ce qui laisse entendre que les élèves sont familiers avec ce type de questions.

Année 2004-2005 (trois classes de seconde : environ 90 élèves) ; **les rémunérations**

> Trois voyageurs de commerce : Adrien, Marie, Simon ont élaboré un programme pour calculer leur rémunération : la rémunération d'Adrien est fixe, celle de Marie est proportionnelle au montant des ventes et celle de Simon comporte une partie fixe à laquelle s'ajoute une partie proportionnelle au chiffre d'affaire réalisé. Retrouver parmi les fonctions suivantes celle qui permet de calculer la rémunération de chacun des trois voyageurs :
>
> $f_1(x)=685+0,04x$; $f_2(x)=0,15x^2$; $f_3(x)=1375$; $f_4(x)=\frac{0,15}{x}+785$;
> $f_5(x)=0,07x$; $f_6(x)=0,05x^2+785$.

Fréquences des réponses en pourcentages :

Adrien :	f_1 1	f_2 0	f_3 **74**	f_4 0	f_5 2	f_6 3
Marie :	f_1 6	f_2 8	f_3 1	f_4 6	f_5 **49**	f_6 8
Simon :	f_1 **57**	f_2 0	f_3 1	f_4 14	f_5 0	f_6 6

Sur cet exercice, trois quarts des élèves interrogés donnent la bonne réponse pour la rémunération d'Adrien mais seulement la moitié des élèves interrogés fournissent la bonne formule pour Marie et Simon. La réussite est donc plus faible que dans le premier exercice et les réponses sont aussi plus dispersées.

Cette différence de réussite est significative (un test avec la variable normale confirme que les écarts de fréquences entre les réponses des deux exercices sont significatifs au seuil de 1%, pour la fonction constante et la fonction affine). Doit-on pour autant se limiter à l'interpréter comme une différence de niveau entre deux classes ? Ne serait-ce pas la formulation des questions, le milieu de référence, la nature des connaissances qui sont différents ?
Nous allons voir que l'analyse des énoncés et leur comparaison ont apporté des éléments de réponses à ces questions et ont préparé les participants aux concepts de formule arithmétique et de formule algébrique (COMIN ; 2005).

2 – 2 Analyse des formules et caractérisation

Nous allons expliquer comment la distinction entre conception arithmétique et algébrique de la notion de fonction se cristallise dans la différence d'interprétation d'une même formule d'un cadre à l'autre.

Exercice : les contrats de location
Dans cet exercice, les grandeurs mesurées sont fournies et le programme de calcul du montant à payer est suggéré par le prix au kilomètre. Pour calculer le montant de la location au contrat A, il faut ajouter, aux 80 euros forfaitaires, autant de fois 12 centimes qu'il y a de kilomètres parcourus. Programme que l'on peut résumer par une égalité de la forme : *montant à payer = 80 € + 0,12 €* $\times$ *nombre de kilomètres* ou encore $m = 80 + 0,12n$. Dans cette expression, les signes « = » et « + » ne sont que des sténogrammes de l'arithmétique et la formule $80 + 0,12 \times n$ résume un raisonnement de type arithmétique.

Nous avons caractérisé une formule arithmétique de la manière suivante :
Dans les formules arithmétiques :

- Les lettres ou les mots désignent des grandeurs mesurées ou des mesures.
- Les variables sont des grandeurs.
- Le sens est porté par la structure des grandeurs ; chaque situation nécessite un raisonnement arithmétique (qui est résumé par la formule) et le résultat attendu est une mesure accompagnée d'une unité.

Ce qui peut être représenté de manière plus schématique, par :

Formules arithmétiques	$\longrightarrow$	Grandeurs
far	$\longmapsto$	*g*
Exemple : $80 + 0,12 \times n$	$\longmapsto$	*Montant à payer*

Exercice : les rémunérations
Un des objectifs de l'enseignement en seconde est de conduire les élèves à reconnaître la structure du problème précédent, en multipliant les occasions de rencontre avec une telle structure. On peut considérer que cet objectif est atteint lorsque les élèves reconnaissent à coup sûr une modalité de la fonction affine. C'est ce que nous voulions évaluer avec l'exercice sur les rémunérations.

Dans cet exercice, l'énoncé décrit, dans le cadre des grandeurs, la structure de chacune des trois situations et affirme l'existence d'un programme qui permet le calcul de la rémunération pour chacune d'elles. Les mesures des grandeurs ne sont pas données et on ne demande pas aux élèves de calculer une mesure, mais de reconnaître une structure ainsi que la formule qui modélise la fonction numérique correspondante : soit la fonction constante pour la rémunération d’Adrien, soit la fonction linéaire pour la situation de proportionnalité de Marie, soit la fonction affine pour la rémunération de Simon. Les valeurs numériques, qui figurent dans les formules, apportent des informations qui ne sont d’aucune aide pour la résolution. C’est la forme de l’expression littérale qui doit renvoyer à la bonne situation.

Cet exercice mobilise des connaissances algébriques, chaque formule réfère à une classe de situations.

Nous avons caractérisé une *formule algébrique*, de la manière suivante :

Dans les formules algébriques :

- Les lettres désignent des nombres réels.
- Les variables sont des ensembles numériques (*x* et *y* sont des variables muettes).
- Le sens est porté par la structure de **R** et par le programme de calcul itératif qui engendre une correspondance (donc une fonction). La formule algébrique peut comporter des paramètres quand elle modélise une classe de situations : par exemple, l'expression "$f(x)=ax+b$" regroupe toutes les situations modélisables par une fonction affine.

Ce qui peut être représenté schématiquement par :

Formules algébriques $\longrightarrow$ Fonctions {}

fal $\longmapsto$ *f*

Exemple : $\longmapsto$

Conclusion

Ces analyses comparatives montrent qu’une formule ne désigne pas le même objet dans les deux cas. Dans le premier exercice, la formule résume les calculs à faire pour obtenir le montant de la rémunération, dans le second exercice, la formule modélise une classe de situations. Pour distinguer les deux significations, nous parlerons de « formule arithmétique » dans le premier cas et de « formule algébrique » dans le second cas (les écarts de fréquences de réussites témoignent de cette distinction).

La difficulté de passage d’une formule arithmétique à une formule algébrique est liée au changement de cadre et de registre. Elle résulte principalement de la différence d'interprétation d’une même formule d’un cadre à l’autre : la formule représente une grandeur en arithmétique alors qu’elle représente une fonction (ou un type de fonction et donc une structure) en algèbre.

Hypothèse :

Cette analyse permet d'envisager deux types de comportements chez un élève correspondant à deux conceptions :

- S'il se place dans le cadre arithmétique, la formule représente une procédure de calcul ou son résultat (une grandeur mesurée) donc pour cet élève :
    - La formule désigne un nombre (en tant que mesure).
    - Les lettres qui entrent dans sa constitution désignent des mesures donc des nombres.
- S'il se place dans le cadre algébrique, la formule représente une fonction (la correspondance) ou une variable fonction (ensemble des images) et pour cet élève :
    - La formule désigne une variable ou une fonction.
    - Les lettres qui entrent dans sa composition désignent des variables.

Bien qu’il soit difficile, en général, de trouver dans les productions des élèves des indices de ces deux conceptions (arithmétique ou algébrique), nous avons vu que le libellé des exercices influence le taux de réussite, car il active de manière privilégiée tel ou tel type de connaissances. Pour conforter l’hypothèse précédente, un questionnaire a été soumis à des élèves de seconde pendant trois ans. Les participants étaient invités à analyser son contenu et à expliquer en quoi ses questions permettent de discriminer une conception arithmétique d’une conception algébrique.

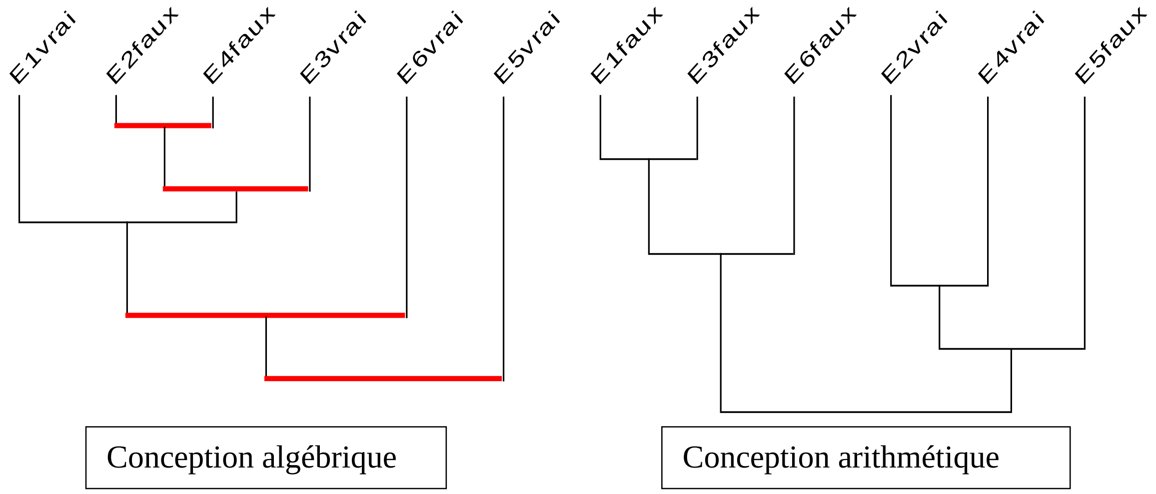
3 Les conceptions des élèves ; utopie ou réalité ?

Les questions qui figurent dans le tableau suivant, avaient pour objet de faire apparaître qu’à l’issue du collège, les élèves attribuent différentes significations aux notions de variable et de fonction. Aucune référence n’est faite aux grandeurs et pourtant la répartition des réponses sur les trois modalités « vrai, faux, je ne sais pas » indique que certains élèves mobilisent le registre de l’arithmétique et d’autres celui de l’algèbre conformément à l’analyse précédente des formules. Ces questions ont été soumises à des élèves de seconde pendant trois années scolaires (2002-03, 2003-04, 2006-07). La comparaison des fréquences de réponses, entre ces trois années, fait apparaître une grande régularité dans les manières de répondre. Un test du chi-2 pour chacune des six questions confirme que les écarts de fréquences ne sont pas significatifs au seuil de 10%. Cette régularité dans les réponses manifeste une stabilité dans la culture des élèves à l’issue du collège. Nous avons regroupé les réponses des trois années scolaires, comme on le ferait de trois échantillons issus d’une même population mère, et nous avons obtenu les fréquences suivantes exprimées en pourcentages calculés sur 98 élèves :

	On considère l'expression suivante : $\frac{1}{3}x^2 - 4$.			
E1	Dans cette expression "*x*" désigne une variable.	vrai 46	faux 26	Je ne sais pas 29
E2	Dans cette expression "*x*" désigne un nombre.	vrai 78	faux 14	Je ne sais pas 08
E3	" $\frac{1}{3}x^2 - 4$ " désigne une variable.	vrai 38	faux 26	Je ne sais pas 37
E4	" $\frac{1}{3}x^2 - 4$ " désigne un nombre.	vrai 65	faux 30	Je ne sais pas 05
E5	" $\frac{1}{3}x^2 - 4$ " définit une fonction.	vrai 70	faux 19	Je ne sais pas 10
E6	" $\frac{1}{3}x^2 - 4$ " est l'image de *x* par une fonction.	vrai 36	faux 34	Je ne sais pas 31

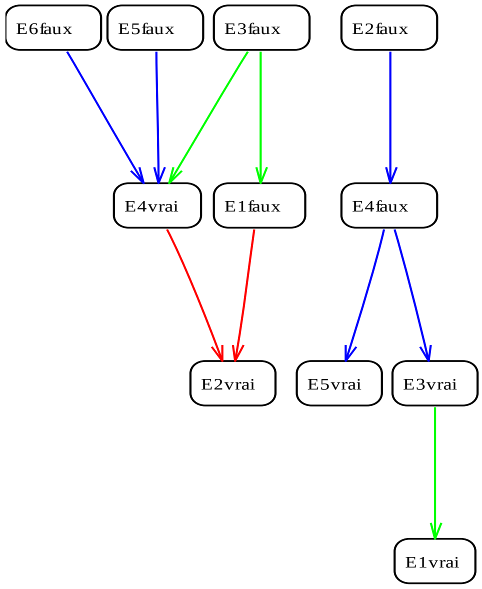
Les analyses de données, faites sur les six questions communes aux trois questionnaires et sur l’ensemble des élèves interrogés sur trois ans (98 élèves), fournissent des indices significatifs de leurs connaissances à l’issue du collège. Elles font apparaître des groupements de réponses caractéristiques selon notre étude, de deux conceptions que nous avons dénommées arithmétique et algébrique.

Pour chaque question, chacune des modalités « vrai » et « faux » a été éclatée en caractères booléens. Le caractère « E_i vrai » prend la valeur 1 si l’élève a répondu vrai sinon il prend la valeur 0. Le caractère « E_i faux » prend la valeur 1 si l’élève a répondu faux sinon il prend la valeur 0. La classification hiérarchique fait alors apparaître les groupements suivants :



Arbre des similarités : C:\Documents and Settings\xxxx\Mes documents\Cadre E-02-03-06-chic.csv

L'arbre des similarités sépare deux groupes de réponses. Les caractères du premier groupe sont caractéristiques d'une conception algébrique : x et $\frac{1}{3}x^2-4$ désignent des variables (E_1vrai, E_3vrai) et non des nombres (E_2faux, E_4faux) ; $\frac{1}{3}x^2-4$ définit une fonction (E_5vrai) et est l'image de x par une fonction (E_6vrai). Les caractères du deuxième groupe sont plutôt caractéristiques d'une conception arithmétique : x et $\frac{1}{3}x^2-4$ désignent des nombres (E_2vrai, E_4vrai) et non des variables (E_1faux, E_3faux) ; une formule ne définit pas une fonction (E_5faux, E_6faux). Ce partage des réponses s'accompagne d'une discrimination des élèves en deux groupes ; la majorité des élèves (59 sur 98) se trouvent dans la conception arithmétique, 11 élèves sur 98 seulement se trouvent dans la conception algébrique. Les réponses des autres élèves semblent moins cohérentes entre elles.



L'analyse implicative conforte cette dichotomie en faisant apparaître des implications au sein de chaque groupe de caractères.

Dans le graphe implicatif, la première chaîne d'implications montre que les élèves qui ne reconnaissent pas une variabilité dans une formule disent que x ou $\frac{1}{3}x^2-4$ désignent des nombres. Ces élèves restent dans le cadre arithmétique. L'autre chaîne implicative est une sorte de contraposée partielle de la chaîne précédente : les élèves qui rejettent l'idée que x ou $\frac{1}{3}x^2-4$ désignent des nombres interprètent la formule comme une « variable-fonction » et pour eux la lettre x désigne une variable. Ces élèves se situent dans le cadre algébrique.

Ces résultats montrent que les conceptions arithmétique et algébrique, des notions de variables et de fonctions, cohabitent encore chez les élèves en début de seconde et que la majorité d'entre eux ne sont pas encore passés à l'algèbre.

Les participants à l'atelier devaient critiquer la méthode et commenter ces résultats qui ont suscité les questions suivantes :

1) Les conceptions des élèves ont-elles une influence sur la résolution des exercices, sur les nouveaux apprentissages, … ? (Les résultats aux deux exercices sur les contrats et les rémunérations semblent indiquer que oui.)
2) Est-ce que le professeur de lycée peut repérer ces conceptions chez les élèves qui lui sont confiés ? (La méthode proposée ici requière un questionnaire spécifique.)
3) Comment faire évoluer les connaissances des élèves pour les faire passer d'une conception arithmétique à une conception algébrique de la notion de fonction ?

La dernière phase de l'atelier proposait des modèles et des outils qui apportent des éléments de réponses à cette dernière question.

4 Les contraintes didactiques

4 – 1 Les formes de connaissances

Construire un curriculum (ou une organisation didactique) nécessite d'articuler logiquement les savoirs à enseigner, mais sa mise en œuvre suppose une organisation adaptée à une évolution possible des connaissances des élèves.
Pour décrire l'avancement du processus d'apprentissage, nous considérons une suite de situations, dans lesquelles les connaissances des élèves, lors d'une situation donnée, évoluent grâce à la confrontation entre leurs anciennes connaissances et cette situation nouvelle. Pour que la situation opère le changement espéré, pour qu'elle éveille la pensée du sujet, elle doit être suffisamment proche des situations précédentes. En effet, l'action du sujet est conditionnée par le sens qu'il peut attribuer à chaque situation, or ce sens résulte de la fréquentation des situations antérieures. L'articulation des situations entre elles vise à développer les connaissances des élèves ; mais elle vise aussi à modifier la forme de leurs connaissances en une autre forme. Cette évolution dans l'usage des connaissances conditionne les comportements des élèves et leurs apprentissages futurs.

Nous avons retenu trois formes de connaissances pour analyser un curriculum. Pour les présenter, nous les illustrerons à l'aide des fonctions linéaires et affines.

Usage implicite (Im) : ce premier usage par les élèves concerne les connaissances en cours d'acquisition. Face à une situation nouvelle, un élève n'active pas uniquement des connaissances et des savoirs « anciens » (c'est-à-dire qu'il maîtrise relativement bien). En essayant d'adapter ses anciennes connaissances aux nouvelles questions, il construit des « modèles implicites d'action » (schèmes, axiomes et théorèmes en acte), qui lui permettent d'intervenir sur son milieu, sans toutefois contrôler intégralement ses décisions. Une situation ne sollicite qu'une des modalités d'une notion mathématique ; elle participe à sa conceptualisation sans en recouvrir tous les aspects. Par exemple, au cours des premiers apprentissages, à l'école primaire, l'élève réalise la proportionnalité à partir de la connaissance qu'il a des grandeurs et des opérations sur ces grandeurs, il ne réfère pas encore à un savoir correspondant à ce concept. « La proportionnalité » est en réalité une étiquette commode pour rassembler une multitude de savoirs : nombreuses grandeurs possédant chacune leurs particularités (masse, volume, temps, débit, aire, vitesse, …), variabilité de leur nature mathématique (discrète ou continue) ou de celle des rapports numériques (entiers, rationnels, irrationnels), pluralité des raisons d'y recourir (logique, physique, sociale), etc. Les enseignants sont donc conduits à proposer un vaste choix de situations qui modifient l'idée que les élèves se font de la notion. Les situations nouvelles vont infléchir plusieurs fois leurs conceptions, conférer des sens nouveaux et diversifier leurs prises d'initiative à ce sujet. Ces rencontres enrichissent le répertoire des élèves jusqu'à leur permettre de percevoir la structure mathématique sous-jacente à ces situations, de repérer l'invariant qui autorise une institutionnalisation des techniques propres à la proportionnalité.

Pour modéliser une relation affine entre grandeurs, l'élève peut alors s'appuyer sur ses connaissances de la proportionnalité. En particulier, le repérage de la quantité à l'unité permet à l'élève d'inférer un raisonnement arithmétique approprié à cette nouvelle situation, sans savoir ce qu'est une fonction affine.

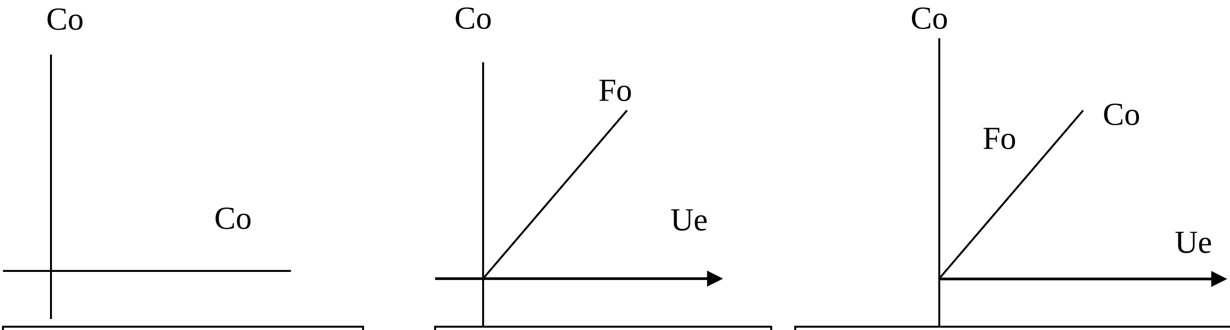
Usage canonique (Ca) : c'est l'usage d'un savoir institutionnalisé.
Lorsque le professeur estime que le processus de conceptualisation a suffisamment avancé, il institutionnalise les différents objets de savoir et la forme de leurs écritures. Pour la proportionnalité, il peut demander aux élèves d'écrire le raisonnement arithmétique en trois lignes en utilisant la quantité à l'unité (une ligne par calcul : règle de trois), ou de résumer cette procédure par une formule arithmétique où figurent les unités de grandeurs, ou de décrire la situation à l'aide d'un tableau en faisant apparaître les têtes de listes et les différents rapports (la quantité à l'unité devient un opérateur ou un coefficient de proportionnalité). La reconnaissance par les élèves de l'équivalence de ces écritures suppose un entraînement et donc une organisation didactique adaptée en amont de l'institutionnalisation. A ce stade de l'avancement didactique, l'élève est supposé capable, lors d'un nouvel exercice sur la proportionnalité, de présenter correctement la solution attendue sous une de ses formes canoniques, conformément aux règles institutionnalisées dans sa classe.
Pour les situations affines, l'organisation didactique peut s'appuyer sur les savoirs de la proportionnalité pour conduire l'élève à produire des solutions sous des formes institutionnelles : tableau, programme écrit sur plusieurs lignes, formule arithmétique résumant ce programme. L'accès au contrôle de ces nouvelles techniques suppose un assortiment de situations qui conduit l'élève à conceptualiser cette nouvelle structure et autorise alors le professeur à institutionnaliser les objets qui lui sont propres et attendus dans la production des élèves.
Le premier exercice sur les tarifs de location sollicite cet usage canonique.

Usage familier (Fa) : C'est un niveau d'expertise.
L'institutionnalisation des techniques résolutoires des problèmes de l'arithmétique élémentaire ancre ces outils dans le cadre des grandeurs. Un élève ne peut pas par lui-même transformer le coefficient de proportionnalité entre deux grandeurs en coefficient de la fonction linéaire associée. Pour décontextualiser ce savoir et en faire un objet algébrique, le professeur devra multiplier les occasions de rencontrer ce même coefficient dans un cadre puis dans l'autre. C'est au professeur de modéliser chaque correspondance entre grandeurs mesurées par une fonction numérique à l'aide des ostensifs propres à l'algèbre. Seule une forte fréquentation de telles activités permet de dégager les structures communes à certaines situations et de leur donner un sens proto algébrique en modélisant chacune de ces structures par une même formule algébrique ($f(x)=ax$ pour les fonctions linéaires ; $f(x)=ax+b$ pour les fonctions affines). Cette familiarisation progressive contribue à une conceptualisation algébrique de la notion de fonction et permet l'institutionnalisation des objets qui lui sont propres.
Le second exercice sur les voyageurs de commerce sollicite cet usage familier.

Conclusion : Les changements de formes de connaissances induisent des réorganisations de répertoires d'élèves qui scandent le temps didactique. Les connaissances et leurs formes sont structurées par des relations de dépendance qu'il faut analyser pour ordonnancer les unités d'enseignement (situations, leçons, séquences, programmes, …) et élaborer les situations qui visent à provoquer leur évolution.

Stratégie d'analyse a priori d'un curriculum
Pour organiser un curriculum (non limité au curriculum institutionnel), il ne suffit pas de lister les savoirs visés par le projet. L'organisation de l'enseignement, nécessité par les dépendances

mathématiques entre ces objets de savoir, doit s'articuler sur les possibilités des élèves, c'est-à-dire l'état de leurs connaissances. Il nous reste encore à déterminer une méthode « simple » pour décrire et traiter toutes les dépendances potentielles entre les connaissances et les comportements des élèves (ceux que l'on peut prévoir a priori).
Nous proposons d'inventorier les dépendances à l'aide de trois matrices.
Le rôle de ces matrices est d'interroger les possibilités de modification des connaissances des élèves afin d'élaborer une organisation didactique adaptée à ce qui peut se produire effectivement dans une classe.



Dépendances logiques entre connaissances : Matrice « cc »	Evolution des formes de connaissances : Matrice « cf »	Evolution des formes des dépendances entre connaissances : Matrice « ccf »

Les dépendances logiques entre les objets à enseigner déterminent un pré ordre sur les unités d'enseignement ; pour décrire ces dépendances, la première matrice de dimension 2, croise les connaissances entre elles. Leurs formes (Im, Ca, Fa) sont des états didactiques temporaires appelés à évoluer avec les unités d'enseignement ; la deuxième matrice, de dimension 3, croise les connaissances avec leurs formes et les unités d'enseignement. Or les formes de connaissances affectent aussi les différentes relations entre connaissances, qui elles mêmes évoluent avec les différents apprentissages. La troisième matrice, de dimension 4, a pour objet de décrire cette évolution.

Mais il n'existe pas de méthode qui serait indépendante des contenus. L'atelier proposait de mettre à l'épreuve l'usage de ces matrices après avoir repéré les tâches que doivent réaliser les élèves pour résoudre les exercices sur les contrats et les rémunérations.

4 – 2 Les dépendances logiques

Analyse a priori des tâches potentielles

Pour accéder progressivement à des niveaux d'abstraction qui conduisent vers les modèles algébriques, les élèves doivent extraire les relations numériques de l'univers des grandeurs. C'est dans l'action que les élèves construisent des connaissances qui étayent les concepts de variable et de fonction. Les contraintes des situations qu'ils rencontrent, les obligent à agir en réalisant des tâches significatives de ces connaissances.
Ces principales tâches, décrites en termes d'action pour les élèves, ont été répertoriées suivant trois niveaux de complexité, et ordonnées de T1 à T9 en fonction de nécessités mathématiques (Comin, 2005).

Les tâches

Niveau des connaissances : *milieu des grandeurs et connaissances culturelles, folkloriques.*
T1) Repérer dans une situation : les variables, la dépendance entre ces variables, la correspondance entre les valeurs de ces variables. (Le milieu objectif, en général celui des

grandeurs pour les fonctions linéaires et affines, active des connaissances qui produisent des modèles implicites d'action).

Niveau d'abstraction simple : *milieu numérique et explicitation des relations fonctionnelles*.

T2) Décrire cette relation (situation) avec un des quatre outils : programme, tableau, formule, courbe (P, T, F, C).

T3) Isoler (abstraire) une fonction numérique d'une relation entre grandeurs (la fonction linéaire pour la proportionnalité)

T4) Associer deux des objets : programme, tableau, formule, courbe (P, T, F, C).

T5) Etudier les variations relatives des variables avec un des quatre outils : P, T, F, C (élaborer un tableau de variation)

T6) Prévoir avec des fonctions des valeurs, des évolutions, …

Niveau d'abstraction réfléchissante : *milieu algébrique où les modélisations nécessitent une certaine familiarité avec les objets précédemment décrits.*

T7) Reconnaître dans une fonction numérique (une formule algébrique) le représentant d'une classe de situations, un type de fonction (par exemple la fonction linéaire résume l'ensemble des situations de proportionnalité).

T8) Faire des opérations sur les fonctions avec les différents ostensifs P, T, F, C.

T9) Considérer une fonction comme l'élément d'un ensemble structuré (la formule est une variable qui entre dans des calculs algébriques).

Les participants à l'atelier pouvaient choisir parmi ces tâches celles qui sont à la charge de l'élève pour résoudre les exercices sur les contrats et les rémunérations. Ils devaient ensuite décrire leurs dépendances logiques à l'aide d'une matrice de type cc. Rappelons que dans l'exercice sur les contrats de location, l'élève doit repérer que le montant de la location dépend du prix au kilomètre parcouru (tâche 1) ; puis élaborer un programme de calcul de ce montant qui prend en compte la part forfaitaire (tâche 2). Le choix de la bonne formule (tâche 4) dépend donc des deux grandeurs (prix unitaire et forfait) qui entrent dans le programme. Dans l'exercice sur la rémunération des voyageurs de commerce, l'élève doit reconnaître des structures (tâche 7) après avoir repéré les dépendances entre grandeurs (tâche 1).

Matrice des dépendances logiques :

Nous proposons une illustration de l'usage que l'on peut faire des matrices de dépendances. Nous avons porté en ligne et en colonne, les tâches décrites précédemment. Dans chaque cellule (c_{ij}), le « 1 » indique que la réalisation de la tâche qui figure dans la $i^{\text{ème}}$ ligne nécessite la connaissance correspondant à la tâche qui figure dans la $j^{\text{ème}}$ colonne. Par exemple, pour pouvoir expliciter une relation fonctionnelle avec un programme, un tableau, une courbe ou une formule (tâche 2), l'élève doit avoir préalablement repéré les variables de la situation et leur dépendance (tâche 1) ; ce que nous figurons par un « 1 » dans la cellule c_{21}.

	T1)	T2)	T4)	T7)
T1) Repérer la dépendance entre variables				
T2) Décrire S avec PTCF	1			
T4) Associer deux des ostensifs PTCF	1	1		
T7) Reconnaître le représentant d'une classe	1	1		

4 – 3 Les dépendances didactiques et leurs évolutions

Nous venons d'expliquer que les dépendances logiques entre les objets à enseigner conditionnent l'ordre de leur enseignement. Mais le choix d'une organisation didactique pèse sur le sens que les élèves peuvent attribuer aux objets enseignés : l'idée que les élèves peuvent se faire d'une

relation numérique extraite d'une relation entre grandeurs diffère de la notion de fonction qui résulte d'une présentation formelle de ce concept. Une organisation ergonomique, apte à produire les effets didactiques attendus, doit aussi prendre en considération les formes de connaissances qui conditionnent le sens que les élèves peuvent attribuer aux objets mathématiques qu'ils rencontrent dans les situations didactiques. Les trois formes : usage implicite (Im), usage canonique (Ca), usage familier (Fa), concernent non seulement les objets de savoir mais aussi les relations que les élèves peuvent établir entre ces objets ; ce qui multiplie par trois les états didactiques envisageables. A cette lourdeur s'ajoute, pour le professeur, la difficulté d'attribuer, a priori, à une classe, une forme à une connaissance. Les conjectures du professeur s'appuient sur son expérience professionnelle et sur les informations qu'il peut recueillir auprès des élèves qui lui sont confiés. Il dispose des interactions qu'il a avec les élèves en situation didactique, des observations qu'il peut faire en situation adidactique (interactions entre élèves pendants les phases d'autonomie), des productions écrites (devoirs surveillés ou en temps libre).
Les participants étaient invités à mettre à l'épreuve l'usage des matrices de dépendances didactiques (cf et ccf) pour les quatre tâches repérées précédemment en conjecturant des formes de connaissances chez des élèves d'une classe de seconde.

Pour conjecturer des formes aux connaissances que les élèves de seconde vont activer pour réaliser ces tâches, nous nous appuyons sur les pratiques supposées des élèves. Depuis l'école primaire, les élèves travaillent sur les grandeurs et la proportionnalité et les programmes scolaires prévoient l'institutionnalisation, en fin de collège, des savoirs sur les fonctions linéaires et affines. A l'entrée en seconde, les élèves sont donc supposés capables de présenter un programme de calcul, permettant de résoudre une situation linéaire ou affine, sous une forme canonique (tâches T1 et T2). Par contre, ils ont plus de difficultés à associer la formule algébrique au programme de calcul (COMIN, 2005) et à reconnaître une structure dans une situation. Nous envisageons une connaissance implicite des tâches T4 et T7.
Dans la matrice suivante, figurent nos différentes conjectures sur les formes de connaissances que les élèves vont activer pour réaliser ces tâches T1, T2, T4, T7. Toute évaluation auprès des élèves peut conduire à invalider ces conjectures et à ajuster l'organisation didactique en conséquence.

Matrice cf : évolution des formes de connaissances pour les fonctions linéaires et affines en seconde.

	Formes supposées des connaissances à l'entrée en seconde	Formes supposées des connaissances après les leçons en seconde
T1) Repérer la dépendance	**Ca**	**Fa**
T2) Décrire S avec PTCF	**Ca**	**Fa**
T4) Associer deux des ostensifs PTCF	**Im**	**Ca**
T7) Reconnaître le représentant d'une classe	**Im**	**Ca**

Un travail identique de conjectures sur la forme supposée du lien que les élèves sont capables d'établir entre les différentes tâches nous a conduit à dresser la matrice suivante. Nous nous intéressons plus particulièrement aux tâches T1, T2, T4, T7. Par exemple, les élèves savent que pour décrire une situation avec au moins un des quatre ostensifs P, T, C, F (tâche T2), il faut préalablement repérer la dépendance entre les grandeurs (tâche T1) ; nous conjecturons que cette connaissance a été institutionnalisée au collège, ce qui est noté Ca dans la cellule c_{21} du tableau suivant.

Matrice ccf : formes supposées des dépendances entre connaissances avant les leçons de seconde, pour les fonctions linéaires et affines.

	T1	T2	T4	T7
T1				
T2	**Ca**			
T4	**Ca**	**Ca**		
T7	**Im**	**Im**	Im	

La reprise de l'étude des fonctions linéaires et affines en seconde a pour but de faire évoluer les connaissances des élèves et les formes de leurs dépendances. Il conviendrait maintenant de refaire cette matrice en projetant les nouvelles formes de connaissances des élèves après les leçons de seconde.

Ces analyses montrent que la complexité engendrée par l'étude des formes de connaissances, peut être maîtrisée, au moins ponctuellement, grâce à la fonctionnalité des différentes matrices des dépendances didactiques.

5 Conclusion et perspectives

Pour que l'étude des fonctions n'apparaisse pas, aux yeux des élèves, comme la construction d'une théorie sans objet, nous avons envisagé un curriculum où les fonctions numériques sont abstraites de relations entre grandeurs avant de devenir des entités algébriques qui résument et réfléchissent les connaissances de l'arithmétique.
Nous avons expliqué l'évolution des comportements d'élèves en modélisant leurs connaissances par des formes qui conditionnent la signification qu'ils peuvent attribuer à différentes situations et objets mathématiques.
Les matrices de dépendances logiques et didactiques peuvent être des outils mis à la disposition des professeurs, pour les aider à élaborer des projets didactiques adaptés aux évolutions supposées des connaissances des élèves et de leurs formes. Mais les répertoires des élèves placés dans les mêmes conditions d'apprentissage, n'évoluent pas tous de la même manière ni à la même vitesse. Or le professeur ne peut pas faire un suivi clinique individualisé. Il doit conduire toute une classe ; au mieux, il peut moduler son enseignement avec des groupes d'élèves. Il faudrait donc lui fournir les moyens de discriminer des groupes homogènes relativement aux formes de connaissances nécessitées par les situations, pour qu'il puisse ajuster l'organisation didactique aux besoins réels des élèves.

Références bibliographiques

BALACHEFF Nicolas. (1995). *Conception, connaissance et concept*. In : Denise Grenier (ed.) Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques, pp. 219-244. Grenoble : IMAG.
BLOCH Isabelle. (2002). *Un milieu graphique pour l'enseignement de la notion de fonction*. Petit x n° 58
BROIN Dominique. (2002). *Arithmétique et algèbre élémentaires scolaires*. Université de Bordeaux I.
BROUSSEAU Guy. (1988). *Le contrat didactique : le milieu*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol.9, n°3, pp.309-336
CHAUVAT Gérard. (1998-1999). *Courbes et fonctions au collège*. Petit x n°51.

CHEVALLARD Yves. (1985-1990). *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*. Petit x, n°5, n°19 ; n°23.
CHOPIN Marie-Pierre. (2007). *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques. Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités didactiques*. Bordeaux 2.
CIRADE Gisèle et MATHERON Yves. (2001). *Structures, fonctionnement, écologie des organisations didactiques, à propos de fonctions*. Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques. La Pensée sauvage éditions.
COMIN Eugène. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : Université de Bordeaux 1.
COMIN Eugène. (2002). *L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 22, n°2-3, p.141.
COMIN Eugène. (2005). *Variables et fonctions, du collège au lycée*. Petit x n°67.
COMIN Eugène. (2008). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions*. Publication prévue dans petit x.
COPPE Sylvie, DORIER Jean-Luc, YAVUZ Ilyas. (2007). *De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol.27, n°2, pp.151-186
RENE DE COTRET Sophie. (1985). *Etude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique*. Université du Québec.
DOUADY Régine. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol.7, n°2, pp.5-31.
ESMENJAUD-GENESTOUX Florence. (2006). *Le travail personnel au collège ou le partage des responsabilités didactiques*. Petit x, n°70.
GENESTOUX Florence. (2001). *Les assortiments didactiques* ; Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques ; La pensée sauvage éditions.
LACASTA Eduardo. (1995). *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles*. Thèse, Université de Bordeaux I.
MAUREL Maryse, SACKUR Catherine, DROUHARD Jean Philippe. (2001). *Le symbolisme de l'algèbre dans l'approche de l'analyse*. SFIDAXVI-Gènes.

Comment aborder en formation la question de l'enseignement du concept de fonction dans une mise en perspective entre collège et lycée?

Y. Girmens
IUFM de Montpellier

Résumé : Pour les professeurs –stagiaires de mathématiques, à l'issue de leurs études, la familiarité avec le concept de fonction est telle qu'ils n'envisagent son enseignement que comme celui d'objet existant à partir d'une définition langagière. L'atelier présente un exemple de démarche utilisée en formation visant à permettre aux professeurs stagiaires de découvrir l'organisation de l'apprentissage du concept de fonction, de l'entrée en collège à la fin de la seconde, conformément aux programmes, conjointement avec une mise en perspective historique. L'atelier montrera comment, à partir du cas « exemplaire » de la fonction, il est possible de dégager, pour les professeurs-stagiaires, les modalités de l'apprentissage, par les élèves, d'un concept mathématique, en relation avec la théorie des concepts de Gérard Vergnaud et la théorie des registres de Raymond Duval.

I- Les dispositifs de formation des PLC2 à l'IUFM de MONTPELLIER

Les stagiaires participent à trois groupes de travail de formation :

- Le Groupe de Formation Disciplinaire dans lequel sont abordés les grands repères didactiques et épistémologiques.
- Le Groupe d'Accompagnement Professionnel consacré à l'analyse des pratiques et à l'accompagnement du stage en responsabilité.
- Le Groupe de Formation Transversale qui regroupe des stagiaires de disciplines différentes pour des travaux sur les aspects de l'enseignement transdisciplinaires.

II- Un témoignage d'une démarche de travail, en groupe de formation disciplinaire, sur l'enseignement de la notion de fonction.

L'expérience des années antérieures a permis d'observer chez beaucoup de professeurs-stagiaires des représentations robustes :

- On ne peut pas commencer un travail sur les fonctions sans commencer par donner une définition de la notion de fonction.
- Un apprentissage ne peut être fait que si l'on dispose de tous les moyens de « représentation » d'une fonction
- L'enseignement sur les fonctions ne commence qu'en fin de collège, dés que l'on introduit les fonctions linéaires et affines.

Pour amener à une remise en cause de ces représentations, les objectifs spécifiques de cette formation sont de permettre aux stagiaires:

- d'identifier comment l'apprentissage de la fonction se structure dans la continuité des programmes.
- De faire un pas de côté par rapport aux connaissances académiques de type « objet ».

Sur un plan plus général, ce travail peut être mis à profit pour :

- analyser un apprentissage par processus dialectique outil/objet

- s’interroger sur la nature d’un objet mathématique et sur l’activité mathématique.

III- La démarche mise en œuvre

<u>Première étape</u> : entrée par les programmes

Un premier travail personnel est demandé aux stagiaires avec la consigne suivante :

« *Au niveau où vous enseignez, relever des types de tâches qui vous semblent avoir un rapport avec l’apprentissage de la notion de fonction* ».

A l’issue de cette première entrée par les programmes, une première mise en commun est organisée, sous la forme d’un travail en groupes par niveau de classe, avec la consigne :
« Comparer les éléments relevés et se mettre d’accord sur une conclusion commune »
Les différents compte-rendus des groupes sont présentés et rassemblés, ce qui permet de mettre en évidence une vue d’ensemble, de la 6e à la 2e, de l’enseignement relatif aux fonctions, tel qu’il apparaît dans les programmes.
Un questionnement collectif permet, en s’appuyant sur cette vision « curriculaire », d’apporter une première clarification sur les aspects suivants :

- le moment de la rencontre de la notion de fonction?
- la notion de « représentation »
- une notion mathématique intervenant en tant qu’ « outil implicite ».

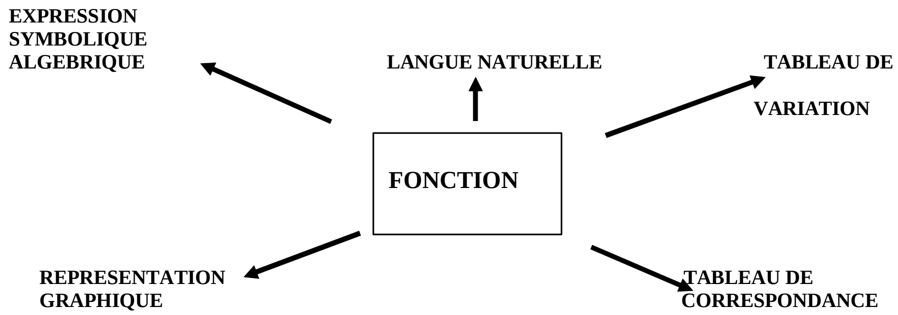
Dans un deuxième temps, toujours sous forme de questionnement en collectif, on est opportun :

- d’expliciter la logique de la structuration de l’enseignement/apprentissage sur la notion de fonction.
- S’interroger sur le moment où intervient l’étiquette « fonction » et une définition langagière d’une « fonction »?
- Se questionner sur la nécessité et rôle d’une définition.

En prolongement, à un deuxième niveau, un éclairage théorique est apporté sur les aspects suivants :
-La nature d’un « objet mathématique » (Selon Raymond Duval)
-La notion de registre de représentation sémiotique (R.Duval)
-Les dimensions outil et objet (R.Douady).

« D’une part, l’appréhension des objets mathématiques ne peut être que <u>conceptuelle</u> et d’autre part, c’est seulement par le moyen de <u>représentations sémiotiques</u> qu’une activité sur les objets mathématique est possible »
Raymond DUVAL *:* « Paradoxe Cognitif de la pensée mathématique »

Il est souligné, qu’un objet mathématique est un objet de la pensée que l’on rend <u>visible</u> par l’intermédiaire d’une représentation sémiotique



Chaque représentation apporte un POINT DE VUE différent sur l'objet étudié

Chaque représentation fournit des connaissances sur l'objet dans le registre correspondant.

La notion de registre de représentation est introduite comme un système de signes permettant trois activités :

- La reconnaissance de l'objet représenté (par l'intermédiaire de signes structurés par une syntaxe)
- Le traitement pour tirer des informations (par des règles propres à chaque registre).
- La conversion dans un autre registre (à l'aide de règles de conversion).

En illustrant par des exemples rapportés par les groupes, il est précisé que :

- Une notion est un « outil » quand elle intervient pour étudier une situation ou résoudre un problème.
- Une notion devient un objet quand elle est formulée de la façon la plus générale avec des mots et un langage approprié.

Enfin, en synthèse, une mise au point est faite sur l'apprentissage d'un concept, se déclinant selon quatre axes :

- Les situations où le concept intervient comme « outil »
- Les moyens d'expressions et de représentations (registres)
- Les invariants opératoires
- Les techniques et savoir-faire

En complément, deux stagiaires sont sollicités pour mettre au propre une synthèse explicitant, pour chaque niveau, de la 6e à la 3e, les principaux « types de tâches » relatifs aux fonctions.

Ce document sera la « trace écrite » de cette première partie du travail.

Deuxième étape : entrée par l'histoire de la notion de fonction.

Il est d'abord demandé à chaque stagiaire, sous forme d'un travail personnel, d'étudier comment la notion de fonction s'est construite dans le temps.

Le support fourni est le document schématique, figurant en annexe 1, extrait de l'ouvrage « Enseigner les Mathématiques » Fascicule 1 –IREM de Poitiers.

La consigne donnée est la suivante : *« Pour chaque époque repérée, expliciter le savoir concernant la fonction, préciser le contexte, identifier la « forme » sous laquelle la fonction est présente »*

Le retour est organisé sous la forme d'une mise en commun suivie de la recherche d'une synthèse.

L'élaboration de la synthèse se fait autour de deux questions :

- Essayer de décrire comment la notion de fonction a été construite et développée par les mathématiciens.
- Peut-on voir un parallèle entre ce processus historique et l'apprentissage prévu par les programmes ?

<u>Troisième étape</u> : entrée par l'apprentissage

Le premier travail, réalisé en collectif, est une analyse critique de définitions de la notion de fonction fournies par des manuels de différentes époques (voir annexe 2):

Pour guider la réflexion, une question est formulée : *Quelles connaissances sur la fonction apporte chaque définition*?

A l'issue de cette analyse, pour amener à une conclusion, la question suivante est formulée :

- *Quelle définition vous semble le mieux convenir comme une formulation de l'objet « fonction »?*

L'étape suivante est un travail en groupes (niveaux de classe mélangés) qui prend appui sur des travaux d'apprentissage relatifs aux fonctions, relevés dans des ouvrages de différents niveaux de classe.

Les consignes sont les suivantes : Pour chaque travail proposé,

- *Préciser si la fonction intervient comme « outil » ou « objet »*
- *Décrire les types de tâches et les registres de représentation en jeu.*

La restitution du travail en groupes permet, à partir des conclusions de chaque groupe, de lancer des discussions et de rechercher une réponse commune.

En synthèse, en s'appuyant sur les travaux étudiés, les mises au point suivantes sont faites :

- Chaque type de tâche met en jeu l'articulation entre deux registres de représentation. (ex : graphique/langue naturelle)
- Chaque registre de représentation fournit un point de vue sur la fonction (les connaissances sont différentes selon la représentation qui est choisie).
- La mise en relation des registres permet l'accès au concept de fonction

En complément, deux types de situations rencontrées sont mises en avant :

-Travail à partir d'une représentation donnée

Le type de tâches est dans ce cas:

- Extraire des informations (connaissances sur l'objet) à partir de chaque représentation à l'aide des règles de traitement internes à chaque registre.

-Travail de passage d'une représentation à une autre

Dans ce cas, on relève deux types de tâches :

- Associer des informations relatives à deux registres.
- Prélever des connaissances dans un registre et les traduire dans un autre registre.

Ces deux types de tâches font appel aux règles de passage d'un registre à un autre (règles de conversion).

En prolongement, un travail personnel est proposé aux stagiaires **:**

« Au niveau où vous enseignez, bâtir une séquence d'apprentissage intégrant les différents aspects mis en évidence »

Bibliographie :

R.Duval « Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée »-Annales Didactique N°5-IREM Strasbourg.
G.Vergnaud « Théorie des Champs Conceptuels »-RDM N°2.3 .
R.Douady « Jeux de cadre et dialectique outil-Objet »-RDM N°7.2 .
Y.Chevallard « Sensibilité de l'activité mathématique aux Ostensifs »-RDM N°19.1.

ANNEXE 1

GENESE DU CONCEPT DE FONCTION DANS L'HISTOIRE

Epoque	Quel savoir ?	Dans quel contexte ?	Sous quelle forme la fonction est présente ?
Antiquité	- tableau de valeurs pour rendre compte de la dépendance entre deux grandeurs.	Etude de la dépendance entre deux quantités : - grandeurs (carré, cube) - valeurs de cordes d'un cercle (sinus)	-tables de nombres ***(tableau de correspondance)***
Moyen-âge	-quantités variables explicites. -dépendance définie.	Etude et analyse d'une dépendance entre deux quantités -grandeurs physiques :chaleur, vitesse, densité…	-description verbale - graphe
16^e et début 17^e siècle	-corrélation de différents aspects : courbes, tableaux, formules et expressions analytiques. - introduction du terme « fonction »(Leibniz)	-Etude des mouvements et des phénomènes physiques.	- courbe - formules (algèbre littérale de Viète)

Milieu 18e siècle.	-expression analytique inadéquate. -définition générale d'une fonction (Bernoulli)	-Etude des mouvements et phénomènes physiques (ex : équations des cordes vibrantes)	-emploi du symbole f et de x.
19e siècle	-théorie des fonctions	-la « fonction » devient un objet d'étude pour lui-même. -Caractéristiques des fonctions : continuité, dérivabilité….	- emploi de f(x²) ou de f(ax +b)
20e siècle	-définition générale du concept de fonction - cadre d'une théorie globale des mathématiques.	Recherche d'une théorie englobant toutes les mathématiques.	- toutes les formes connues à ce jour.

ANNEXE 2

- ***Bordas 3e (1999):***

-a est un nombre connu et fixé.

La fonction linéaire de coefficient a est définie par la relation suivante: à un nombre quelconque ***x***, on fait correspondre le nombre a ***x*.**

- ***Hachette 3e (1999)*** :

-Etant donné deux nombres a et b, le procédé qui à tout nombre ***x*** fait correspondre le nombre a***x*** + b s'appelle une fonction affine.

On note : $x \longrightarrow ax + b$

- ***Hachette 2e (1998) :***

-Une fonction f définie sur un ensemble D est un lien qui à chaque nombre ***x*** de D associe un unique résultat f **(*x*)**

- ***Didier 2e (1995) :***

-Définir une fonction sur un intervalle [a ; b], c'est donner un procédé qui à chaque élément ***x*** de [a ; b] fait correspondre un nombre noté f (***x***).

- ***Nathan 4 e (1973)***

-On dit qu'une relation f d'un ensemble A vers un ensemble B est une fonction si et seulement si, pour tout élément ***x*** de A, il y a au plus un élément ***y*** de B tel que le couple (***x*, *y***) soit lié par f.

La notion de fonction dans la formation initiale des professeurs : Quelles difficultés ? Quelles solutions ?

Gisèle Cirade *

Résumé. Au plan historique comme au plan scolaire, l'introduction de la notion de *fonction* fait passer d'un monde mathématique à un autre. De là découlent, pour les professeurs de mathématiques, un certain nombre de problèmes, avec lesquels les professeurs en formation initiale à l'IUFM, et tout particulièrement ceux ayant en responsabilité une classe de seconde, se trouvent d'emblée aux prises. Lorsque, en effet, on doit vivre et faire vivre dans les classes le passage des notions (plus ou moins « naturalisées ») de *programme de calcul* et de *formule* à celle de *fonction*, de la notion de *proportionnalité* à celle de *fonction linéaire* puis de fonction *affine*, pour arriver ultérieurement à la notion de fonction *dérivable*, les difficultés sont multiformes.
En nous appuyant sur une recherche ayant eu pour objet la formation dispensée durant plusieurs années à l'IUFM d'Aix-Marseille, nous nous proposons d'examiner à la fois les *questions* soulevées par les professeurs stagiaires confrontés à l'enseignement de la notion de fonction et les *éléments de réponse* apportés dans le cadre de la formation qu'ils reçoivent, dans laquelle les difficultés ainsi mises en débat sont regardées de façon générale comme révélatrices de problèmes que tout professeur de mathématiques peut avoir à affronter pour assurer un enseignement fonctionnel (et non pas formel) des fonctions en classe de seconde. La prise en charge, au fil des années, des questions formulées par les professeurs stagiaires aboutit à un apport non négligeable de la formation étudiée à la culture professionnelle des professeurs de mathématiques, apport dont nous exposerons, sur le point examiné, quelques éléments, en présentant certains des dispositifs mis en place dans la formation afin de pouvoir assurer cette prise en charge.

1. La notion de fonction dans les programmes

L'introduction et les usages de la notion de fonction font basculer d'un monde mathématique dans un autre, tant au plan historique qu'au plan scolaire. De là découlent alors un grand nombre de problèmes de la profession avec lesquels les professeurs stagiaires, notamment ceux qui enseignent en classe de seconde, se trouvent d'emblée aux prises. Dans la période actuelle, l'*idée* de fonction est censée être présente dans la classe de mathématiques depuis la 6^{e}. Le programme en vigueur [14] dans cette classe jusqu'à l'année 2004-2005 comportait par exemple ce subtil commentaire : « Certains travaux conduiront à décrire des situations qui mettent en jeu des fonctions. Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que "en fonction de", "est fonction de" pourront être utilisées. » Cette distinction est reprise par le programme de la classe de 5^{e}, à un détail près : « Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que "en fonction de", "est fonction de" seront utilisées. » Alors que les expressions mentionnées *peuvent* être utilisées en 6^{e}, elles *doivent* l'être en 5^{e}. Le programme de 4^{e} reconduit ces prescriptions : « Comme en 5^{e}, le mot "fonction" sera employé, chaque fois que nécessaire, en situation, et sans qu'une définition formelle soit donnée. » L'idée clé semble être celle de progressivité dans la montée en puissance du concept de fonction. C'est ainsi que, à propos du calcul littéral, le document d'accompagnement du programme du cycle central (5^{e}-4^{e}) précise :

---

* Université de Toulouse II-Le Mirail, IUFM de Midi-Pyrénées & ERT 64 GRIDIFE.

14. Les développements présentés dans cette section reposent sur les « anciens » programmes de collège car la recherche sur laquelle nous nous appuyons a été menée avant la mise en place des « nouveaux » programmes du collège, entrés en vigueur en classe de 6^{e} à la rentrée 2005. Pour ce qui nous occupe ici, ces programmes (anciens et nouveaux) ne présentent pas de différences essentielles.

> En classe de 5^e, la substitution de nombres à des lettres permet, comme en classe de 6^e, d'exécuter des calculs numériques, de comprendre et de maîtriser les règles d'écriture d'expressions littérales. Cette substitution, accompagnée de la constitution de tableaux de nombres et de la construction de points dans un plan muni d'un repère, prépare à la notion de fonction.

Ce même document annonce ce qui devrait être un changement crucial à opérer en classe de 3^e. Commentant la place donnée à l'étude des situations de proportionnalité, ses rédacteurs écrivent en effet :

> La proportionnalité est un concept capital. Elle est indispensable pour l'étude et la compréhension des relations entre grandeurs physiques ; sous l'aspect des pourcentages, elle joue un rôle essentiel dans la vie du citoyen. Sa bonne appréhension par les élèves est fondamentale, son apprentissage ne peut être que progressif. L'étude de situations familières permet de développer chez les élèves un « mode de pensée proportionnel ». C'est en classe de 3^e que les fonctions linéaires sont introduites pour modéliser les situations de proportionnalité.

Ce qui était donc jusqu'alors une manière de penser cède la place à un *modèle mathématique*, celui des *fonctions linéaires* (et, plus largement, des fonctions *affines*). En vérité, le concept de fonction se voit doté d'une double ascendance : d'un côté il fournit un cadre conceptuel général à des entités fonctionnelles particulières, les fonctions linéaires et affines, qui modélisent les situations de proportionnalité ; d'un autre côté, il est un rejeton des manipulations sur les expressions littérales – le programme parle à cet égard « de compléter les bases du calcul littéral et d'approcher le concept de fonction ». Dans l'introduction au secteur des fonctions que propose le programme de 3^e, la synthèse de cette double filiation est esquissée dans les termes suivants :

> L'un des objectifs est de faire émerger progressivement, sur des exemples très simples, la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre un nombre à un autre nombre. Les exemples mettant en jeu des fonctions peuvent être issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires. L'utilisation des expressions « est fonction de » ou « varie en fonction de », déjà amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie et sera associée à l'introduction prudente de la notation $f(x)$, où x a une valeur numérique donnée.

Le programme s'attache à marquer le lien qui doit être fait entre l'outil fonctionnel ainsi renouvelé et le passé mathématique des élèves. À propos des fonctions linéaires, indique-t-il ainsi, les élèves devront « connaître la notation $x \mapsto ax$, pour une valeur numérique de a fixée ». Un commentaire met en valeur cette indication dans les termes suivants :

> La définition d'une fonction linéaire de coefficient a s'appuie sur l'étude de situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est « je multiplie par a ».

Allant plus loin, le programme de 3^e ébauche un certain nombre de développements typiques de l'organisation mathématique classiquement mise en place autour de la notion de fonction. Ainsi inclut-il ce commentaire :

> L'étude de la fonction linéaire est aussi une occasion d'utiliser la notion d'image. On introduira la notation $x \mapsto ax$ pour la fonction. À propos de la notation des images $f(2)$, $f(-0{,}25)$…, on remarquera que les parenthèses y ont un autre statut qu'en calcul algébrique.

La notion de *représentation graphique* d'une fonction linéaire est un autre objet d'étude canonique, qui fait ici l'objet de ce commentaire :

> L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine ; cette droite a une équation de la forme $y = ax$. On interprétera graphiquement le nombre a, coefficient directeur de la droite.

Cette esquisse d'étude est reprise et complétée à l'occasion de l'abord des fonctions *affines*. Là encore, les élèves devront « connaître la notation $x \mapsto ax+b$ pour des valeurs numériques de a et b fixées », prescription qui est assortie de ce long commentaire :

> Pour des valeurs de a et b numériquement fixées, le processus de correspondance sera aussi explicité sous la forme « je multiplie par a puis j'ajoute b ». La représentation graphique de la fonction affine peut être obtenue par une translation à partir de celle de la fonction linéaire associée. C'est une droite,

> qui a une équation de la forme $y = ax+b$. On interprétera graphiquement le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b ; on remarquera la proportionnalité des accroissements de x et y.

D'autres éléments classiquement inclus dans l'étude des fonctions seront abordés en 3e, sans pour autant faire l'objet d'une mise en forme arrêtée, comme le précise *in fine* le commentaire suivant :

> On fera remarquer qu'une fonction linéaire est une fonction affine.
> Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction : coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum.
> Aucune connaissance n'est exigible à ce sujet.

C'est donc en principe en 3e qu'un basculement fort s'opère, comme le document d'accompagnement du programme le souligne encore :

> Jusqu'à la fin du cycle central, la notion de fonction n'a été utilisée que de manière implicite. Les transformations géométriques étudiées n'ont pas été présentées comme application du plan dans lui-même. Le travail sur la proportionnalité, et plus largement sur l'étude de relations entre données numériques, a permis d'utiliser des formules, des tableaux de nombres et des représentations dans le plan muni d'un repère, en particulier comme outils pour résoudre des problèmes. Ainsi, à l'occasion du traitement de situations numériques ou géométriques, les élèves ont été amenés à passer d'un langage à un autre (par exemple, d'une formule ou d'un graphique à un tableau de nombres). Mais, si des expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » ont été utilisées, les fonctions numériques associées à ces formules, à ces tableaux ou à ces représentations n'ont pas été explicitées.

On aura noté que ce basculement, bien qu'articulé essentiellement aux fonctions linéaires et aux fonctions affines, n'y est pas entièrement limité, ce que le document d'accompagnement rappelle dans le passage suivant :

> La classe de 3e est donc l'occasion du premier véritable contact des élèves avec cette notion de fonction, dans sa conception actuelle qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble. Mais il ne s'agit pas de donner une définition générale de la notion de fonction. Le travail est limité à l'étude de fonctions particulières : les fonctions linéaires et affines. D'autres exemples de fonctions simples seront également utilisés, en particulier pour montrer que toute représentation graphique ne se réduit pas à un ensemble de points alignés (par exemple, en représentant quelques points d'une fonction telle que $x \mapsto x^2$, sur un intervalle). Au lycée, la notion de fonction occupera une place centrale, dans le cadre de l'enseignement de l'analyse.

La classe de 3e est ainsi le lieu d'une récapitulation et d'une formulation renouvelée d'acquis des classes antérieures : elle constitue une préparation aux enseignements du lycée, et singulièrement aux enseignements de la classe de seconde. Le document déjà cité précise par exemple :

> La notion de fonction linéaire permet, en 3e, d'opérer une synthèse des différents aspects de la proportionnalité rencontrés tout au long du collège et de les exprimer dans un nouveau langage. Toute situation de proportionnalité est modélisable par une fonction linéaire. Dans cette perspective, il convient d'être attentif, avec les élèves, aux questions soulevées par le domaine d'adéquation du modèle mathématique avec la situation traitée, en ayant soin de préciser, chaque fois, le domaine de signification de la fonction (définie, elle, sur l'ensemble des réels) dans le contexte de la situation traitée (qui impose souvent une restriction à un intervalle ou à un nombre fini de valeurs).

Les points d'articulation avec le programme de seconde sont ainsi plus nombreux que beaucoup de professeurs semblent le penser, comme on peut le constater par exemple à travers les *questions* soulevées par les professeurs stagiaires lors de leur formation, notamment ceux ayant en responsabilité une classe de seconde.

2. Courbe et tableau de variation

2.1. Les questions de la semaine et le forum des questions

À l'IUFM d'Aix-Marseille, la formation des élèves professeurs de mathématiques intègre un dispositif dit des « questions de la semaine » [15]. Chaque semaine ouvrable, dans le cadre du séminaire de didactique des mathématiques, les professeurs stagiaires sont invités à consigner par écrit, individuellement, une difficulté qu'ils ont rencontrée et les interrogations que celle-ci soulève pour eux. Pour l'année 2007-2008, ce dispositif était présenté comme suit.

> La sous-rubrique *Questions de la semaine* requiert de chaque participant au Séminaire, chaque semaine ouvrable, qu'il consigne par écrit – au démarrage de la séance [du groupe de formation professionnelle] du mardi matin – une difficulté rencontrée dans le cadre de sa formation au métier de professeur de mathématiques, y compris bien sûr dans les stages de terrain, c'est-à-dire à l'occasion des enseignements qu'il assure ou auxquels il est associé. Les questions ainsi formulées sont regardées, sauf exception, comme des questions *qui se posent à la profession* à travers l'un de ses nouveaux membres, et non comme l'affaire personnelle de tel ou tel. Leur étude éventuelle dans le cadre de la formation concerne donc *tout professionnel de l'enseignement des mathématiques*, et pas seulement celui qui, ayant porté témoignage de la difficulté rencontrée, aura ainsi contribué au *développement de la profession* que cette année de formation doit promouvoir. Le contenu de ces questions sera présenté la semaine suivante dans la rubrique *Question de la semaine* du Séminaire de façon à dégager les *problèmes de la profession* rencontrés et soumis à l'étude par la classe.

Ce dispositif vit en étroite association avec le *forum des questions*, dans lequel sont apportés, par écrit, des « matériaux pour une réponse ». Ces éléments de réponse, dont il faut préciser qu'ils ne constituent pas tant une réponse à l'*auteur* de la question qu'une réponse à la *question* posée, fournissent un apport de *matériaux* en vue de permettre à chacun de *construire* une réponse qu'il mettra en œuvre personnellement, et provisoirement – en attendant d'autres matériaux éventuels qui le conduiront peut-être à déconstruire et à reconstruire la réponse établie.

2.2. Une question et des matériaux pour une réponse

En 2000-2001, lors de la 12e séance du séminaire, une stagiaire ayant en responsabilité une classe de seconde formule par écrit la question [16] suivante :

> En 2de, le programme prévoit au moment de l'introduction sur les fonctions, la tâche « connaissant la courbe représentative d'une fonction, dresser son tableau de variation ». Comment justifier cela auprès des élèves ? (2000-2001, 2de, semaine 12)

Cette question est prise en compte dès la séance suivante, mais les *Matériaux pour une réponse* figurant dans les notes du séminaire montrent que le formateur commence par substituer à la question posée une autre question qui lui paraît sans doute plus fondamentale et qu'il formule ainsi : « Comment justifier auprès des élèves qu'on s'efforce d'obtenir la représentation graphique d'une fonction donnée par son expression analytique ? Qu'est-ce qui motive cette quête ? » La réponse apportée à cette question – laissée depuis plusieurs décennies sans réponse institutionnelle claire – fait d'abord référence à un état antérieur du champ du calcul numérique, celui d'un temps où la disponibilité de représentations graphiques précises et toutes faites permettait de résoudre des équations de degré 2 et 3.

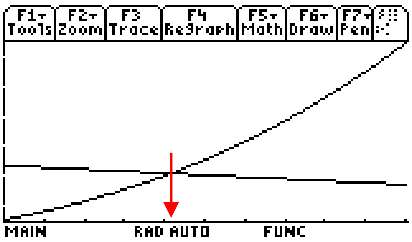
> – Classiquement, en fait, la représentation graphique constituait le point culminant, l'achèvement de l'étude de la fonction et *ne servait donc à rien*.
>
> – Elle servait autrefois à résoudre des équations et inéquations par *« calcul graphique »*.
>
> • Il fallait alors, pour cela, que la courbe représentative soit une *épure* (et non un tracé qualitativement correct mais quantitativement approximatif).
>
> • Ainsi, pour résoudre graphiquement les équations du type $x^3+px+q = 0$ (auxquelles se ramène *toute* équation de degré 3), on *tabule* une fois pour toutes l'application $x \mapsto x^3$, comme ci-après :

15. Pour une présentation de la formation dispensée, voir la communication d'Yves Chevallard & G. Cirade lors d'un précédent colloque de la CORFEM (2006).
16. Les questions présentées sont suivies de l'information codée suivante : année de la formation, classe en responsabilité, semaine dans l'année.

1,40 ↦ 2,74 ; 1,41 ↦ 2,80 ; 1,42 ↦ 2,86 ; 1,43 ↦ 2,92 ; 1,44 ↦ 2,99 ; 1,45 ↦ 3,05 ; 1,46 ↦ 3,11 ; 1,47 ↦ 3,18 ; 1,48 ↦ 3,24 ; 1,49 ↦ 3,31 ; 1,50 ↦ 3,38 ; …

Pour résoudre l'équation $x^3+px+q = 0$, il suffit alors de tracer la courbe $\mathcal{C}_3$ représentative de $x \mapsto x^3$, puis la droite $\mathcal{D}_{p,q}$ d'équation $y = -px-q$, enfin de lire l'abscisse de l'intersection de $\mathcal{C}_3$ avec $\mathcal{D}_{p,q}$. Ainsi, pour $4x^3+3x-11\sqrt{2} = 0$ on construit sur du papier finement quadrillé la courbe $\mathcal{C}_3$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -0,75x+2,75\sqrt{2}$, ou plutôt la droite $\mathcal{D}^*$ d'équation $y = -0,75x+3,89$ ($2,75\sqrt{2} \approx 3,89$). (De façon anachronique, on a réalisé l'opération, ci-après, avec une calculatrice graphique.)

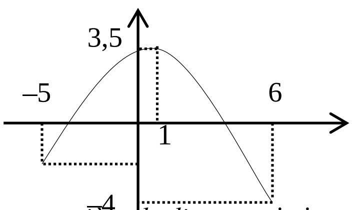
Il ne reste plus alors à « lire » la solution x^* par « *interpolation à vue* » : $x^* \approx 1,41$. (En fait, on a $4x^3+3x-11\sqrt{2} = 0$ pour $x = \sqrt{2} =_{\text{calc}} 1,414213562…$)



• Pour résoudre les équations du second degré $x^2+px+q = 0$ on peut, de même, opérer graphiquement par l'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ avec la droite $y = -px-q$, ou encore par l'intersection de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ avec la droite $y = -\frac{1}{q}x - \frac{p}{q}$ (ce qui pose le problème de la division par q).

La réponse aborde ensuite la question soulevée par l'élève professeure : pour quelles raisons doit-on apprendre aux élèves à passer de la courbe représentative – supposée disponible – d'une fonction à son tableau de variation ? Incontestablement, notons-le d'abord, le programme de seconde prescrit de faire travailler ce type de tâches – à propos duquel il parle d'ailleurs de « fonction définie par une courbe » – ainsi que quelques autres encore [17]. La réponse consignée dans les notes du séminaire s'appuie sur une distinction présente dans le texte du programme, mais qui peut paraître quelque peu opaque au néophyte : « S'il s'agit des courbes, y lit-on en effet, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. » S'agissant du premier type de courbes, la réponse est alors la suivante.

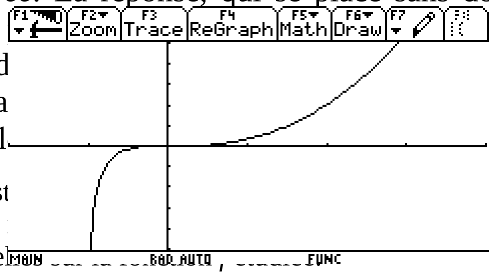
Dans le cas où la « courbe » apporte une « information exhaustive » sur les variations de la fonction, le passage de la « courbe » au tableau de variation n'est en fait qu'un changement de *code graphique* : il n'y a pas plus dans la courbe qu'il n'y a dans le tableau de variation, la courbe n'est qu'une expression graphique plus proche par l'apparence de la réalité représentée. Sur le schéma ci-contre, par exemple, on *voit* que $f(x)$ croît de –2,1 à 3,5 quand x croît de –5 à 1, puis décroît de 3,5 à –4 quand x croît de 1 à 6.



En vérité, le schéma *n'est qu'une autre manière de dire* ce qui vient d'être indiqué. Il s'agit donc purement et simplement d'apprendre à décoder les informations qui s'y expriment, et inversement à coder sous la forme d'un tel schéma les informations apportées par un tableau de variation ou sous forme discursive (comme ci-dessus : « $f(x)$ croît de –2,1 à 3,5 quand x croît de –5 à 1, puis décroît de… »).

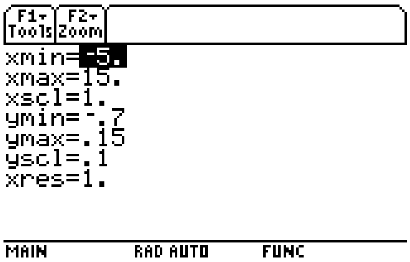
17. Notamment le type de tâches « réciproque » : « Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation. »

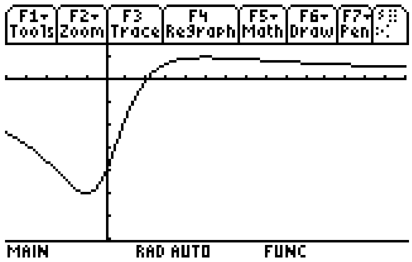
Le second type de « courbes » repéré par le programme est en fait d'une autre nature et soulève des problèmes qui seront résolus classiquement, à partir de la classe de première, au moyen de l'étude du signe de la *dérivée*. La réponse, qui se place sans doute dans la zone supérieure d'habilité calculatoire qu'on … aujourd'hui, propose sur ce point un exemple qui, à vrai d… le programme prescrit – tout cela, sans doute, pour fra… prétendre livrer un matériel d'enseignement prêt à l'empl…



Dans le cas où la « courbe » est … choses sont toutes différentes : le tableau de variation modélise, … graphique « empirique », qui apporte des informations partie…

– Supposons par exemple que l'on étudie la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$ sur l'intervalle [–5 ; 15]. Une calculatrice graphique livre par exemple le tracé suivant du graphe de *f*.





– On peut traduire le comportement observé par la *conjecture* suivante : *f* décroît d'abord sur [–5 ; α], où α ≈ –1, puis croît sur [α ; β], où β ≈ 5, enfin décroît sur [β ; 15].

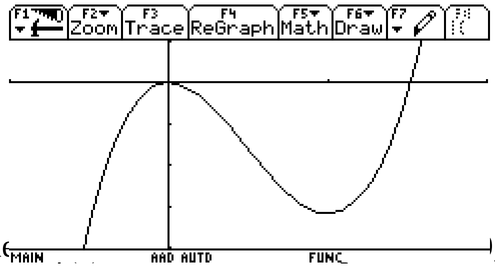
– Il resterait alors à vérifier qu'il en est bien ainsi, opération pour laquelle on ne dispose, en 2[de], que d'*outils rudimentaires*, mais néanmoins utilisables.

• Soit *a*, *b* ≥ 5, avec $a < b$; tentons d'établir que $f(a) > f(b)$, c'est-à-dire que $\dfrac{a-2}{a^2+5} > \dfrac{b-2}{b^2+5}$. On a successivement : $f(a) > f(b) \Leftrightarrow (a-2)(b^2+5) > (b-2)(a^2+5) \Leftrightarrow ab^2 + 5a - 2b^2 - 10 > a^2b + 5b - 2a^2 - 10 \Leftrightarrow ab(b-a) + 5(a-b) - 2(b^2-a^2) > 0 \Leftrightarrow ab - 5 - 2(a+b) > 0$.

• Pour $a \geq 5$, on a : $ab-5-2(a+b) \geq 5b-5-2(a+b)$. Or : $5b-5-2(a+b) = 3b-5-2a = (b-5)+2(b-a) > 0$ et donc $ab - 5 - 2(a+b) > 0$, comme demandé. On a ainsi établi que *f* est strictement décroissante sur [5 ; 15].

Pourquoi alors cherche-t-on à connaître les variations d'une fonction sur un intervalle, tel qu'un « tableau de variation » peut les donner à voir. La démonstration proposée dans l'extrait ci-dessus témoigne de ce qu'un tableau est supposé apporter une information validée « théoriquement », alors que le tracé « obtenu sur un écran graphique » est un objet empirique qui peut tromper l'observateur. Le phénomène est au cœur des changements qui affectent aujourd'hui la culture mathématique au lycée dans ses rapports avec l'emploi des calculatrices (ce qui suffirait à justifier le travail accompli sur ce point dans le séminaire). De cela témoigne par exemple le sujet proposé à l'ensemble des candidats au baccalauréat de la série scientifique en 2005 en Nouvelle-Calédonie : on y considérait la fonction définie sur]–1 ; +∞[par $f(x) = x^2 - 2{,}2\,x + 2{,}2\ln(x+1)$, qui s'annule en $x = 0$; si, comme le demande la première question de l'énoncé, on fait apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq 5$, on voit s'afficher ceci, qui porte à regarder *f* comme une fonction croissante.

Or l'étude analytique de f (dans laquelle l'énoncé guide les candidats) conduit à établir que la courbe représentative a en réalité l'allure suivante : f s'annule en une valeur $x > 0$.



Mais la valeur $x > 0$ en laqu ,151778066136 (valeur pour laquelle f prend la valeur $- 8{,}194539\ldots \times 10^{-14}$). Pour cela, la portion de courbe ci-dessus n'a pu être obtenue qu'en prenant pour fenêtre $-0{,}1 \leq x \leq 0{,}2$, $-4 \times 10^{-4} \leq y \leq 10^{-4}$, choix auquel on arriverait malaisément par de simples tâtonnements.

La réponse à la question examinée n'est pas achevée. Dans un paragraphe ultérieur, son rédacteur s'interroge sur l'intérêt de connaître les *variations* d'une fonction. À nouveau, la réponse qu'il apporte fait référence – de façon un peu implicite – à l'histoire de l'analyse élémentaire : l'étude des variations d'une fonction doit être située dans la perspective de la recherche des *extrémums* de la fonction sur un intervalle donné. Cette réponse est masquée, institutionnellement, par l'outil que l'on met aujourd'hui au service d'un tel projet : le calcul de la dérivée et l'étude de son signe. Contre cela, la réponse apportée fait l'économie de l'appareil mathématique devenu classique – la dérivée – et s'efforce d'aller à l'essentiel en recourant à des outils rudimentaires, mais exploités de façon judicieuse.

Qu'est-ce qui motive la connaissance des variations d'une fonction sur un intervalle ? Une réponse classique, liée à ce qu'on appelait autrefois les « *problèmes de maxima et de minima* », est que c'est là une voie – qui n'est pas la seule ni nécessairement la plus directe – pour déterminer les *extrémums* d'une fonction.

• On peut par exemple se demander (pour des raisons dans lesquelles on n'entrera pas ici) quel est le maximum (s'il existe) de la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par exemple.

• Le travail déjà fait à propos de f permet de répondre. On sait déjà que $f(5) > f(b)$ pour $b > 5$. Reprenons alors le travail sur l'inégalité $f(a) > f(b)$ au point où l'on n'avait encore fait usage d'aucune hypothèse sur a et b. On a : $f(a) > f(b) \Leftrightarrow ab(b-a) + 5(a-b) - 2(b^2-a^2) > 0$.

Faisons $a = 5$, et supposons $b < 5$. Il vient : $f(5) > f(b) \Leftrightarrow 5b - 5 - 2(b+5) < 0 \Leftrightarrow 3b - 15 < 0 \Leftrightarrow b < 5$. On obtient ainsi que $f(5) > f(b)$ sur $[0 ; 5[$: f atteint donc son maximum sur $[0 ; +\infty[$ en 5.

• On saisit mieux alors l'intérêt de l'étude préalable des variations d'une fonction f : dispenser d'études locales multipliées. Pour la fonction f déjà examinée, par exemple, les égalités ①, ②, ③

$$\begin{aligned} f(a)-f(b) &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}\,[ab-5-2(a+b)] \\ &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}\,[(a-5)b+(b-5)+2(b-a)] \qquad ① \\ &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}\,[(b-5)(a+1)+3(a-b)] \qquad ② \\ &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}\,[a(b+1)-3(a+1)-2(b+1)] \qquad ③ \end{aligned}$$

justifient respectivement les comportements de f conjecturés sur $[5 ; 15]$, $[-1 ; 5]$, $[-5 ; -1]$.

3. Fonction linéaire

3.1. « Observation et analyse »

On notera que les manipulations algébriques effectuées précédemment le sont de manière *fonctionnelle*, et non pas formelle. Mais le retour sur les « fondamentaux » de la théorie des fonctions est à peine amorcé par les considérations qui précèdent. Nous continuons notre exploration en suivant l'une des rubriques du séminaire, intitulée *Observation & Analyse*. Ce dispositif propose d'analyser les praxéologies professionnelles en s'appuyant notamment sur des comptes rendus d'observation de séance en classe réalisés lors des visites effectuées dans le cadre de la validation de la formation des élèves professeurs.

3.2. Proportionnalité et fonctions linéaires

Cette même année 2000-2001, le séminaire travaille sur une observation dans une classe de seconde à propos des *fonctions linéaires*. En seconde, le sujet n'est pas neuf. Est-il pour autant véritablement maîtrisé dans la culture des professeurs ? La séance choisie pour être analysée ne l'a pas été par hasard. On y voit le professeur stagiaire observé mettre en place une technique de calcul de la valeur d'une fonction linéaire qui ne nous semble pas être bien partagée, encore aujourd'hui, dans la culture mathématique du secondaire. Elle consiste, lorsqu'on sait par exemple que la fonction linéaire f vérifie $f(5) = 3$, à calculer $f(7)$ en écrivant : $f(7) = f\left(\frac{7}{5} \times 5\right) = \frac{7}{5}$ $f(5) = \frac{7}{5} \times 3 = \ldots$ Les notes du séminaire soulignent à cet égard que ce qui importe ici est la propriété qu'on peut noter $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, pour tout $x \in 3$, alors que, mû sans doute par un habitus engendré à l'université par l'étude de l'algèbre linéaire, le professeur stagiaire avait inséré dans son « cours » ce couple de propriétés présenté comme « caractéristique » des fonctions linéaires :

$$\begin{cases} f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x). \end{cases}$$

On voit ainsi de manière très concrète comment des connaissances acquises dans un autre contexte d'activité mathématique doivent être retravaillées pour être manipulées adéquatement en classe – ici, dans une seconde. Les fonctions linéaires ne sont pas, en l'espèce, des applications « de 3^n dans 3^m » en général, mais des applications de 3 dans 3. C'est ce que souligne implicitement le commentaire inclus dans les notes du séminaire.

> – L'organisation mathématique qui se met en place sous les yeux de l'observateur se forme autour de deux types de tâches, T_C et T_M, successivement abordés.
>
> – Les tâches du premier type, T_C, consistent, une fonction linéaire f étant connue par une de ses valeurs, $f(x_0) = y_0$, à calculer la valeur $f(x)$ pour une valeur x donnée quelconque.
>
> – Une technique classique, τ_C, consiste pour cela à calculer d'abord le *coefficient de proportionnalité* $k = \frac{y_0}{x_0}$ puis à calculer $f(x)$ par l'expression analytique $f(x) = kx$.
>
> – Une autre technique, τ_C*, que P s'efforce de mettre en place au cours de la séance observée, consiste à effectuer, oralement ou par écrit, la suite de calcul ci-après :
>
> $$f(x) = f\left(\frac{x}{x_0} x_0\right) = \frac{x}{x_0} f(x_0) = \frac{x}{x_0} \times y_0.$$
>
> – La justification de cette technique se trouve (plus ou moins implicitement) dans les deux « propriétés des fonctions linéaires » établies plus tôt dans la matinée.
>
> – On notera, plus exactement, que c'est en fait la *seconde* propriété, le fait que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, qui est *seule* utilisée dans cette justification. Ce fait n'est pas explicité, alors même que sa compréhension découle d'une simple utilisation « technologique » de la technique en cours de construction – en dimension 1, la première propriété, $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$, se déduit trivialement de la seconde, puisqu'on a :
>
> $$f(x_1+x_2) = f((x_1+x_2)\times 1) = (x_1+x_2)f(1) = x_1f(1)+x_2f(1) = f(x_1\times 1)+f(x_2\times 1) = f(x_1)+f(x_2).$$
>
> – La propriété d'additivité des fonctions linéaires ne peut donc avoir qu'une valeur *technique*, maladroitement exploitée par l'un des élèves à l'occasion du calcul de $f(5)$, et qui, puisque les élèves connaissaient $f(3)$ par définition de f et avaient calculé $f(5)$, aurait pu être beaucoup plus judicieusement

mise en jeu dans le calcul de $f(8)$, partie du travail proposé dont on sait qu'elle ne sera pas réalisée en séance…

La dynamique de travail du séminaire conduira à bien des développements encore. C'est ainsi que, s'agissant des techniques τ_C et τ_C*, il apparaîtra utile de préciser les techniques fort anciennes du type « règle de trois », en lesquelles on peut voir le germe des techniques « modernes » τ_C et τ_C*. De cette relativement longue incursion dans l'histoire des mathématiques de la proportionnalité, on ne retiendra ici, à titre d'illustration, que les éléments de conclusion reproduits ci-après.

– D'autres techniques ont été proposées avec le souci d'une moindre « pression » mathématique […], tout en étant « à technologie intégrée ». Ainsi en alla-t-il de la « méthode de *réduction à l'unité* », qui fut longtemps l'apanage de l'enseignement primaire élémentaire, et qui supposait de dérouler un texte *appris par cœur*, enchâssant de brefs *calculs*, qu'il fallait être capable de faire *de tête* (d'où le caractère très fonctionnel de l'entraînement au calcul mental), dans le déroulé même du discours, afin de ne pas interrompre celui-ci : « Trois cahiers coûtent 13,80. Un cahier coûte 3 fois moins, soit 13,80 F ÷ 3 = 4,60 F. Cinq cahiers coûteront 5 fois plus, soit 4,60 F × 5 = 23 F. »

– Au-delà de ces formes classiques de la *« règle de trois »* apparaît la forme « moderne », cristallisée dans l'égalité $y = kx$, et qui, en fait, n'est qu'une mise à jour de la technique de réduction à l'unité. C'est aussi la technique notée τ_C lors de la séance 10. Dans le cas pris pour exemple ici, le coefficient de proportionnalité k est le prix unitaire : « On a : $3k = 13{,}80$ et donc $k = 13{,}80 \div 3 = 4{,}60$. Le prix y de x cahiers est donc donné par : $y = 4{,}6\,x$. Pour $x = 5$, il vient $y = 4{,}6 \times 5 = ...$ »

– Une forme très utile, faiblement mathématisée et à technologie en partie intégrée (ce qui la distingue de la « règle pratique » vue plus haut, dont elle n'est qu'une version plus « intelligente »), a aussi été poussée en avant, notamment par l'ancien programme de la classe de 4e sous un libellé apparemment sibyllin, que les auteurs de manuels comme les professeurs semblent avoir ignoré sans états d'âme :

« L'image par une application linéaire d'une somme, ou du produit par un nombre donné, ce qui permet à l'occasion de faire fonctionner l'application linéaire sans utiliser son coefficient. »

Cette technique, très proche de la technique τ_C* de la séance en classe 2de en cours d'analyse, conduit à « produire » l'égalité $5 = \frac{5}{3} \times 3$ afin d'en déduire l'égalité attendue :

$$\begin{array}{ccccc} 5 & = & \frac{5}{3} & \times & 3 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ x & = & \frac{5}{3} & \times & 13{,}80 \end{array}$$

– La technique fonctionnelle τ_C* découle en fait de la technique précédente, en l'explicitant plus solidement par le recours à la notion de fonction et à la notation correspondante :

$$x = f(5) = f\left(\frac{5}{3} \times 3\right) = \frac{5}{3} f(3) = \frac{5}{3} \times 13{,}80 = \ldots$$

3.3. Modélisation par une fonction linéaire

Le travail porte aussi sur les questions de *modélisation* d'une situation par une fonction *linéaire*, ce qui correspond à ce que le texte reproduit plus haut nommait le type de tâches T_M, dont un autre passage précise ainsi la nature.

– Le type de tâches T_M consiste, étant donné un système $\mathcal{S}$,

- à identifier deux (grandeurs) *variables*, x et y, de ce système,
- à vérifier que, lorsque l'état du système $\mathcal{S}$ varie, il existe entre les variables x et y une relation *fonctionnelle*, et que cette relation fonctionnelle est *linéaire*, c'est-à-dire que x et y sont des « grandeurs directement proportionnelles », ce qu'on note classiquement $y \propto x$,
- à déterminer un couple (x_0,y_0) de valeurs des variables x et y (si $x_0 = 1$, y_0 n'est rien d'autre que le coefficient de proportionnalité).

Cela fait, on peut enclencher l'exécution de tâches du type T_C : une valeur x_1 étant donnée, calculer la valeur y_1 correspondante, etc.

Le travail amorcé conduit alors à expliciter une question qui semble peu et mal posée dans le curriculum mathématique du collège : « Qu'est-ce qui assure que la relation fonctionnelle entre *x* et *y* est linéaire, c'est-à-dire que nous avons bien affaire à une *situation de proportionnalité* ? » Là encore, le travail s'appuie sur l'enquête historique. Le rédacteur présente à cette fin un passage d'un « cours d'arithmétique élémentaire à l'usage des écoles primaires » datant du XIXe siècle, dans lequel on peut lire le discours classique sur le sujet, selon lequel la charge de la preuve est *extérieure au champ de l'arithmétique* – où l'on se contente d'enregistrer des résultats relevant d'autres domaines, mathématiques ou extra-mathématiques.

En arithmétique, on n'a jamais à démontrer que deux grandeurs varient dans le même rapport ou dans un rapport inverse ; tantôt c'est une convention ou bien un fait d'expérience, tantôt c'est une vérité de géométrie, de physique ou de mécanique.

Par exemple, on démontre, en géométrie, que les circonférences sont entre elles comme leurs rayons. – En physique, on prouve, par l'expérience, que les volumes occupés par une masse d'air sont, lorsque la température reste la même, en raison inverse des pressions qu'elle supporte. – L'observation a montré que les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil sont entre eux comme les cubes de leurs moyennes distances au centre de cet astre. – On fait voir, en mécanique, que les espaces parcourus par les corps qui tombent librement dans le vide sont proportionnels aux carrés des temps.

Dans les applications numériques, on admet ces vérités sans démonstration.

Le rédacteur saisit cette occasion pour souligner ce que nous avons nommé plus haut le basculement d'un monde mathématique dans un autre – du monde ancien, où l'on combinait proportionnalité directe et/ou inverse et puissances positives et/ou négatives des variables considérées, au monde actuel où de telles combinaisons se trouvent subsumées sous le concept général de fonction.

Cette remarque rappelle en passant l'usage *intensif*, quasiment *universel*, de la proportionnalité avant l'avènement de la notion de fonction : là où, par exemple, nous verrions une application $f : t \mapsto d = kt^2$ (donnant la distance parcourue en fonction du temps) on voyait jadis une proportionnalité $d \propto t^2$.

Mais la question du critère de la proportionnalité va donner lieu à un examen plus poussé. Celui-ci aboutit à la mise en avant d'un résultat mathématique non élémentaire, mais utile pour situer les notions enseignées et l'évolution de leur enseignement.

– Le fait qu'on ait bien affaire à une situation de proportionnalité fait l'objet d'un critère que les auteurs classiques présentent généralement comme le font les auteurs du manuel d'arithmétique pour la « classe de mathématiques » (correspondant à la terminale S d'aujourd'hui) cité ci-après : ayant défini la relation de proportionnalité entre les variables *x* et *y* par l'existence d'un nombre *k* tel que, pour tout couple (x, y) de valeurs de ces variables, on a $y = kx$, ils indiquent (F. Brachet et J. Dumarqué, *Arithmétique*, Delagrave, Paris, 1934, p. 114) :

Pour que deux grandeurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient proportionnelles, il faut et il suffit :

1° qu'à deux états égaux de l'une correspondent des états égaux de l'autre ;

2° qu'à la somme de deux états quelconques de l'une corresponde la somme des états correspondants de l'autre.

Cette définition revient à dire, d'abord que l'on a une bijection (une application « biunivoque ») entre « états » des variables considérées, ensuite que cette bijection (comme sa réciproque) est *additive*.

• Il est clair que si *f* est de la forme $f(x) = kx$, il y a bien additivité :

$f(x_1+x_2) = k(x_1+x_2) = kx_1+kx_2 = f(x_1) + f(x_2)$.

• La réciproque recèle une difficulté que les manuels d'autrefois ignoraient. Si *f* est additive, on a $f(x) = f(x+0) = f(x)+f(0)$, ce qui donne $f(0) = 0$; pour tout $n \in \angle^*$, on a alors

$f(nx) = f((n-1)x)+f(x) = (n-1)f(x) + f(x) = nf(x)$

si bien que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \angle$. Il vient ainsi, pour $n \in \angle$ et $m \in \angle^*$,

$$m\, f\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(m\frac{n}{m}x\right) = f(nx) = n\, f(x)$$

en sorte que $f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n\, f(x)}{m} = \frac{n}{m}f(x)$. On a donc $f(rx) = rx$ pour tout $r \in \Theta_+$. Mais, pour passer de Θ_+ à 3_+, il convient de faire sur f une hypothèse de régularité supplémentaire : telle est la difficulté que le texte classique ignore.

• Si, par exemple, on suppose que f est continue, même en un seul point $x_0 \in 3_+$, l'affaire est close. Tout d'abord, si (x_k) est une suite tendant vers $x \in 3_+$, on a

$$f(x_k) = f(x_k{-}x{+}x_0) + f(x) - f(x_0)$$

et donc $\lim f(x_k) = \lim f(x_k{-}x{+}x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x)$, de sorte que f est continue en tout point de 3_+. Alors, si $(r_k)_{n\in\angle}$ est une suite de rationnels positifs tendant vers $\lambda \in 3_+$, on a, pour tout $x \in 3_+$, $f(\lambda x) = \lim f(r_k x) = \lim r_k f(x) = (\lim r_k)\, f(x) = \lambda f(x)$.

• On peut aussi, au lieu de la continuité, supposer que f est *bornée sur un intervalle ouvert borné au moins*, « aussi petit qu'on veut », ou encore qu'elle est *mesurable* : on montre en effet que chacune de ces conditions, *jointe à l'additivité* de f, entraîne que f est linéaire. On montre aussi que l'absence d'une telle condition supplémentaire *ne permet pas de conclure* : il existe des fonctions *additives non linéaires*. Une telle fonction doit évidemment être *discontinue en tout point*, n'être *bornée sur aucun intervalle*, si petit soit-il, et n'est pas *mesurable* : la définition d'un tel « monstre » utilise l'axiome du choix (et, plus précisément, l'existence d'une base de Hamel, c'est-à-dire d'une base de 3 regardé comme espace vectoriel sur le corps Θ des rationnels).

L'analyse du compte rendu d'observation se révèle génératrice d'un véritable *parcours de formation*, aux propriétés « écologiques » analogues à celles des *parcours d'étude et de recherche* (PER) [18]. Le travail du séminaire, en l'espèce, va conduire à s'arrêter sur une question essentielle touchant à la dialectique de la modélisation, c'est-à-dire aux liens complexes entre modèle et système modélisé. Les notes du séminaire introduisent ainsi cette question.

…dès que le système $\mathcal{S}$ auquel on s'intéresse n'est pas strictement mathématique, le caractère linéaire du lien fonctionnel entre les variables x et y n'est qu'*approché* (à moins qu'il ne soit défini par « convention entre les hommes »). C'est ce que note par exemple un autre auteur, l'abbé Moreux, dans un ouvrage de vulgarisation intitulé *Pour comprendre l'Arithmétique* (Doin, Paris, 1931, p. 100-101) :

> Les règles énoncées sont applicables toutes les fois qu'il y a proportionnalité entre des nombres ou des grandeurs. Les cas de ce genre sont nombreux surtout en Géométrie et en Physique. En voici quelques cas.
>
> Deux rectangles de même base ont leurs surfaces proportionnelles à leurs hauteurs.
>
> Deux circonférences sont proportionnelles à leurs diamètres et à leurs rayons.
>
> Dans le mouvement régulier ou uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps, c'est-à-dire que si le temps est trois fois plus long l'espace parcouru sera trois fois plus grand.
>
> Tout ceci est exact et rigoureusement exact, mais il n'en est pas toujours de même dans la pratique.
>
> On admet en effet qu'un salaire doit être proportionnel au temps consacré par l'ouvrier à faire son travail ; et ceci est une pure convention. En fait, tout le monde sait qu'un ouvrier ne travaille pas toujours avec la même ardeur ; il y a des heures où son activité est plus grande ou plus ralentie.
>
> De même on admet que 3 ouvriers font 3 fois plus de travail qu'un seul, mais les entrepreneurs qui occupent des ouvriers n'ignorent pas cependant que pratiquement la valeur des hommes qu'ils emploient est toujours différente.
>
> On pourrait continuer longtemps sur ce thème ; ce que nous avons dit suffit pour la démonstration.

18. Concernant la notion de PER, on pourra par exemple consulter les « leçons données durant le deuxième semestre de l'année 2007-2008 aux étudiants de première année du master de sciences de l'éducation de l'Université de Provence » (Chevallard, 2008).
Documents disponibles sur Internet :
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=133.

Cette référence à un passé méconnu ouvre en fait la voie à un long développement nourri de matériaux historiques, dont l'un des objets est d'exposer le caractère inapproprié de la culture actuelle de la proportionnalité au collège, dans laquelle la relation entre deux grandeurs variables *est* ou *n'est pas* de proportionnalité, contre une très ancienne sagesse dans le maniement culturel des modèles, fussent-ils réduits à des « règles de trois ». Nous en reproduisons ici une partie.

> – L'idée que la proportionnalité n'est en général qu'*approchée* est fondamentale ; mais il faut regarder ce fait *positivement*, et non comme exprimant un « manque ». Lorsqu'on s'intéresse au lien entre des variables x et y, on peut en effet toujours essayer de modéliser ce lien par une fonction linéaire, le plus simple des modèles non triviaux, ce qui permettra souvent de produire des connaissances *utiles*, bien qu'« approchées », sur le système $\mathcal{S}$ considéré.
>
> • Supposons que l'on ait à vider un bassin pour le nettoyer. La hauteur de l'eau est d'environ 1,20 m. Ayant ouvert l'unique conduit qui permet de vider le bassin, on observe que, au bout d'un quart d'heure, l'eau a baissé d'à peu près 10 cm. En modélisant la relation entre le temps t pendant lequel l'eau s'écoule et la quantité q d'eau écoulée par un modèle linéaire ($q \propto t$), on peut conclure que l'on pourra revenir pour nettoyer le bassin dans environ $\frac{120\text{–}10}{10}$ quarts d'heures, soit 11 quarts heures : ainsi, en décidant de ne revenir que dans 3 heures, on est quasiment sûr de trouver le bassin entièrement vidé.
>
> • Le fait que les modèles linéaires les plus classiques (comme dans les problèmes de baignoire qui se remplissent, ou se vident, ou se remplissent et se vident en même temps…) ne sont en vérité que des modèles approchés *n'a jamais été ignoré*. Ainsi l'auteur de l'article *Règle* [de trois] de l'*Encyclopédie* (1751-1772) de d'Alembert et Diderot – l'abbé de La Chapelle – rappelait de manière tout à fait explicite :
>
> Cette *règle* est d'un usage fort étendu tant dans la vie civile que dans les sciences ; mais elle n'a lieu que quand on reconnaît la proportionnalité des nombres donnés. Supposons, par exemple, qu'un grand vaisseau plein d'eau se vuide par une petite ouverture, de manière qu'il s'en écoule trois piés cubes d'eau en deux minutes, qu'on demande en combien de temps il s'en écoulerait cent piés cubes ; il y a à la vérité dans cette question, trois termes donnés, & un quatrième qu'on cherche ; mais l'expérience fait voir évidemment que l'eau s'écoule plus vite au commencement qu'elle ne le fait à la suite ; d'où il résulte que la quantité d'eau qui s'écoule n'est pas proportionnelle au temps, & que par conséquent la question présente ne sauroit être résolue par une simple *règle* de trois.
>
> • Dans cette même tradition classique, les auteurs d'une *Arithmétique* pour les écoles primaires supérieures, A. Marijon et A. Péquignot, soulignent notamment ce fait qu'un modèle linéaire n'est souvent acceptable que dans une plage de valeurs déterminée des variables x et y (Hatier, Paris, 1928, p. 241-242) :
>
> Pour des charges qui ne dépassent pas 80 grammes, l'allongement du ressort est proportionnel à la charge. En désignant l'allongement par a, la charge par p, on a : $a = pk$, k étant un coefficient constant. Ce coefficient représente l'allongement correspondant à la charge de 1 gramme. Pour des charges supérieures à 80 grammes, l'allongement est plus grand que celui qui serait calculé par la formule $a = pk$. D'ailleurs pour des charges trop fortes le ressort subirait des déformations permanentes ou se briserait.
>
> Nous avons là un exemple de proportionnalité de deux grandeurs qui n'est réalisée que dans de certaines limites.

Les conclusions précédentes sont confortées par un développement qui rappelle que, lorsqu'une fonction f est régulière au voisinage d'un point, ses variations sont à peu près proportionnelles aux variations de la variable : on passe ainsi de l'opposition tranchée entre linéaire et non-linéaire à un univers plus complexe, où, « localement », la linéarité est partout. Le commentaire appelle alors à observer la progression en quelque sorte naturelle « qui conduit des fonctions *linéaires* aux fonctions *affines*, puis aux fonctions *dérivables* »[19]. À cet égard, le programme de seconde est appelé à témoigner de ce que le professeur doit avoir en tête deux soucis solidaires. D'un côté, il doit s'efforcer de faire que la classe situe les fonctions affines dans la filiation des fonctions linéaires – le programme demande, au reste, que les élèves sachent « caractériser les fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la

19. L'introduction de la dérivation se fait en classe de première : le programme de seconde ne mentionne donc pas les fonctions dérivables.

variable » [20]. D'un autre côté, le professeur devra, selon les termes mêmes du programme, faire une place, pour le contraste, à la *non-linéarité*, ce que les notes du séminaire expriment dans les termes suivants.

– L'usage extensif des modèles linéaires dans la vie quotidienne comme dans les différents domaines scientifiques et techniques doit évidemment être complété par l'examen des cas où une telle modélisation serait *grossièrement inadéquate* – ce que souligne cet autre passage du même programme de 2de :

Exemples de non-linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, … ne sont pas linéaires.

Les notations précédentes résument un travail conduit dans le cadre de la séance 11 du séminaire. Une question qui ne sera formulée qu'à la séance 18 va relancer brièvement, et quelque peu paradoxalement, le questionnement autour de la *non*-linéarité.

Peut-on donner un théorème de caractérisation des fonctions linéaires en seconde ? Car pour avoir une caractérisation par l'équation fonctionnelle $f(a+b) = f(a)+f(b)$ pour tous a, $b \in 3$, il faut mettre une contrainte (f continue ou monotone, etc.) pour que f soit de la forme $f(x) = mx$, $m \in 3$. Je me pose cette question car elle pourrait éviter les erreurs du style $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $(a+b)^2 = a^2+b^2$ ou $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$. (2000-2001, 2de, semaine 18)

La réponse apportée ici désigne deux directions de travail complémentaires. Tout d'abord, il convient de ne pas regarder comme une simple erreur le traitement linéaire des expressions rencontrées. Tout au contraire, et conformément aux principes posés plus haut concernant la modélisation, il faut le regarder comme un geste dont on doit amener les élèves à examiner toutes les conséquences, et notamment les incohérences qui en résultent.

…il faut, non pas éviter, mais *organiser* la *rencontre* des élèves avec *la non-linéarité*, et, au-delà, conduire *l'exploration* et *l'institutionnalisation*, dans la classe, du *« fait non linéaire »* en mathématiques : si par exemple on avait $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$, on aurait aussi $\sin 2a = 2 \sin a$, ce qui, pour $a = \frac{\pi}{2}$, conduirait tout droit à l'égalité $0 = 2$.

Ensuite, et en conséquence, il conviendra de rechercher les véritables « algorithmes » de manipulation des expressions rencontrés, algorithmes qui devront s'imposer ensuite à l'élève contre les modèles inadéquats vers lesquels il était porté à aller d'abord.

Au-delà d'une telle reconnaissance du fait non linéaire, ce qui nous empêche véritablement d'appliquer indûment le schéma linéaire, *c'est qu'un autre schéma s'impose plus fortement*. Si, par exemple, nous devons dériver l'expression $\sqrt{1+x^2}$, ce qui éloigne la tentation d'écrire l'égalité, fausse pour $x > 0$,

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1} + \sqrt{x^2} = 1 + x$$

c'est que nous sommes prioritairement « attirés » par la formule de dérivation dûment mémorisée

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

qui nous empêche de « succomber à la tentation linéaire ». De la même façon, nous serons sauvés par l'attraction – certes toujours résistible – créée par la formule

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

ou encore par

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

sans oublier le plus célèbre des attracteurs, la formule

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab.$$

De cette dernière on déduit d'ailleurs aisément une égalité instructive mais trop rarement mise en place :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

20. Cette propriété des fonctions affines était en principe connue depuis la 3e, on l'a vu. C'est sa réciproque qui fait la nouveauté de la classe de seconde.

4. Fonction et programme de calcul

4.1. Une rubrique : « Enseigner les fonctions »

Dans le cadre du séminaire de l'année 2001-2002, une rubrique va être consacrée, sous le titre *Enseigner les fonctions*, à la question mathématico-didactique qui nous occupe ici. Cette année-là, plusieurs rubriques analogues (enseigner *l'algèbre*, enseigner *les grandeurs et les nombres*, enseigner *la statistique*, enseigner *la géométrie*) permettront à la formation de prendre spécifiquement en charge des questions relatives à l'étude de ces domaines des mathématiques dans l'enseignement secondaire. Comme nous allons le voir ci-après, c'est toujours sur les *questions de la semaine* que la formation s'appuiera.

4.2. Des programmes de calcul aux fonctions

Le point de départ de cette rubrique est une question posée par un élève professeur ayant en responsabilité une classe de seconde à propos de la notion de *programme de calcul*. Celle-ci a été présentée dans le séminaire en relation avec les débuts de l'enseignement de l'algèbre au collège : l'idée essentielle est qu'une « expression algébrique » *exprime algébriquement* un programme de calcul – l'expression $x^2 - 3x$, par exemple, exprime algébriquement le programme dont une formulation rhétorique d'époque serait : « Prendre l'excès du carré du nombre sur le triple de celui-ci. » Le travail réalisé en cette occasion suscite donc la question que voici :

> Introduire les expressions algébriques comme des programmes de calcul ne revient-il pas d'une certaine façon à parler de fonctions aux élèves dès la 4e sans introduire toute la terminologie ? (2001-2002, 2de, semaine 13)

La réponse reprend soigneusement certains éléments du programme de seconde, avant de proposer, à titre de première conclusion du travail entrepris, le constat suivant.

> Les « programmes de calcul » sont ainsi généralisés sous le nom de fonction : au lieu de parler de « l'expression algébrique d'un programme de calcul » on va se mettre à parler maintenant de « l'expression algébrique d'une fonction » (lorsque la chose existe), comme dans le passage suivant du programme de 3e :
>
> Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.

La suite de la réponse explicite alors ce que le passage de la notion élémentaire de programme de calcul à la notion plus avancée de fonction permet, de fait, de gagner.

> La nouveauté qu'apporte le mot de fonction, c'est que, sous ce nom, les programmes de calcul vont se voir associés un certain nombre d'« attributs » : représentation graphique, sens de variation sur intervalle, etc. C'est déjà ce que suggèrent les passages suivants du programme de 3e :
>
> – C'est l'occasion de prendre conscience de l'existence de fonctions dont la représentation graphique n'est pas une droite (par exemple, en examinant comment varie l'aire d'un carré quand la longueur de son côté varie de 1 à 3).
>
> – Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction : coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum. Aucune connaissance n'est exigible à ce sujet.
>
> ❶ Jusqu'alors, on pouvait seulement dire d'un programme de calcul qu'il renvoie telle valeur numérique lorsque ses variables prennent telles et telles valeurs : par exemple le programme de calcul d'expression algébrique $x^2–8x+17$ renvoie les valeurs suivantes (colonne B) pour les valeurs indiquées de la variable x (colonne A) :

	A	B
1	0	17
2	0,5	13,25
3	1	10
4	1,5	7,25
5	2	5
6	2,5	3,25
7	3	2
8	3,5	1,25
9	4	1

❷ Il s’agit là d’un type de tâches encore inscrit au programme de 4e : « Calculer la valeur d’une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. » Mais le tableau de valeurs obtenu ici conduit maintenant à penser que, lorsque x croît de 0 à 4, la valeur numérique de l’expression décroît (de 17 à 1). C’est là une propriété – de décroissance – qu’on pourrait attribuer au programme de calcul (sur l’intervalle [0 ; 4]), mais qu’on va attribuer plus précisément à la *fonction* que ce programme de calcul permet de définir (sur ce même intervalle) – à condition, bien entendu, d’en apporter la preuve.

Comme souvent, le rédacteur a le souci d’articuler l’état présent à des états antérieurs du curriculum mathématique. De là le développement dont il fait suivre les lignes ci-dessus, que nous reproduisons.

La filiation entre programmes de calcul et fonctions était autrefois plus clairement attestée.

❶ Un manuel de 3e dû à de prolifiques auteurs (C. Lebossé & C. Hémery, 1940) proposait d’abord cette définition :

> Un nombre y est fonction d’un nombre variable x quand à chaque valeur de x correspond une valeur déterminée de y.
>
> x s’appelle la variable indépendante.

Puis ces auteurs indiquaient :

> Lorsque y est la valeur numérique d’une expression algébrique de la variable x, on dit que y est une *fonction algébrique* de x. Ainsi :
>
> $y = 2x + 3$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{x+2}$ $\qquad$ $y = \dfrac{x^2}{2} - 3x$
>
> sont des fonctions algébriques de x.

❷ Bien entendu, il existe des fonctions qu’on ne sait pas faire naître d’une expression algébrique, telle la fonction définie sur 3_+ par : $f : x \mapsto$ Card { $n \in$ ∠* / $n \leq x \wedge n$ premier }. On a ici $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(6) = 3$, $f(9) = 4$, etc. Les auteurs d’un manuel pour la formation des maîtres écrivaient à ce propos (J. Gal, A. Marijon, 1929) :

> La formule $y = x^2$ est appelé *équation* de la courbe tracée sur la figure 5. On dit aussi que cette courbe est la courbe représentant l’équation $y = x^2$, ou la fonction $y = x^2$. Ce n’est qu’exceptionnellement qu’on peut, comme dans cet exemple, donner une *expression algébrique* de la valeur d’une fonction. Il est clair qu’une telle expression n’existe pas pour le nombre d’habitants d’une commune en fonction de l’époque, ou pour la pression barométrique en un lieu en fonction de l’heure.

La conclusion générale est alors reformulée dans les termes suivants : « La notion de fonction généralise donc la notion de programme algébrique de calcul. Mais ce qu’elle apporte *surtout*, c’est qu’elle permet l’attribution de propriétés : une fonction sera croissante sur un intervalle, continue, dérivable, etc. » Cette entrée en matière à propos des fonctions est suivie, lors de la même séance du séminaire 2001-2002, d’un travail motivé par une difficulté que l’on retrouve au fil des années et des promotions, et qui, en l’espèce, a été formulée deux séances plus tôt par une stagiaire ayant en charge une classe de 4e : « Quelle est, demande-t-elle, la différence entre courbe, graphe et graphique ? » La réponse examine d’abord l’usage de ces mots dans les textes officiels : si l’expression « courbe représentative » apparaît bien dans le programme de 3e, ainsi qu’on vient de le voir, le mot de courbe n’a en fait qu’une autre occurrence, dans le programme de sixième [21]. Si le programme de seconde fait un usage beaucoup plus généreux du terme, c’est, au collège comme au lycée, l’expression de « représentation graphique » (abrégée parfois en « graphique ») qui prévaut. Le commentaire que nous suivons complète ces remarques par le propos suivant :

---

21. Où on lit en effet ceci : « Les mesures de longueur, intégrées à des activités telles que la construction de courbes point par point, peuvent conduire à de telles opérations. »

Bien entendu, en un sens naïf du mot, la représentation graphique d'une fonction est une… courbe – d'où l'emploi de ce mot en 2de –, alors que, notamment en statistique, il existe des représentations graphiques qui ne sont nullement des courbes (tels les diagrammes en bâtons, les histogrammes, etc.).

La question examinée portait aussi sur l'emploi du mot *graphe*, au sens de la théorie des fonctions [22]. En ce sens, le mot n'apparaît ni au collège, ni au lycée, même si, au collège, on parle de « grapheur » pour désigner un logiciel permettant le tracé de représentations graphiques. Pour préciser alors la différence que l'on peut voir entre graphe et graphique, la réponse proposée recourt à nouveau à l'histoire, et plus précisément à ce que le rédacteur des notes du séminaire appelle « l'histoire moderne de la notion de fonction ». Le développement qui s'ensuit est reproduit ici *in extenso*.

❶ L'apport clé est dû à Richard Dedekind (1831-1916), ainsi que le rappelle Jean Dieudonné (*Pour l'honneur de l'esprit humain*, 1987, p. 145) :

> Au lieu de se borner, comme dans les conceptions antérieures, aux fonctions réelles (ou complexes) d'une ou plusieurs variables complexes, Dedekind va d'un coup jusqu'au bout de la généralisation : étant donné deux ensembles *quelconques* E et F, une application f de E dans F est une loi (« Gesetz ») qui, à tout élément x de E, fait correspondre un élément *bien déterminé* de F, sa *valeur* en x que l'on note de façon générale $f(x)$ [...].

❷ Dedekind réalise ainsi une mathématisation de la notion « protomathématique » de *dépendance fonctionnelle*, et cela par la création de nouveaux objets mathématiques, les fonctions. Pourtant cette mathématisation reste incomplète, ne serait-ce qu'à cause du recours à la notion de *loi* (*Gesetz*), laissée par Dedekind *non mathématisée* : qu'est-ce au juste qu'une « loi » ? Dieudonné poursuit :

> Il manque encore à Dedekind une notion d'usage constant, introduite seulement par Cantor un peu plus tard, celle de *produit* (ou « produit cartésien ») E×F de deux ensembles quelconques : c'est l'ensemble des *couples* (x, y) pour tous les éléments x de E et tous les éléments y de F, généralisation naturelle et indispensable des coordonnées cartésiennes. On peut [alors] rattacher la notion d'application $f : E \to F$ à celle de partie du produit E×F : le *graphe* Γ_f de f est la partie de E×F formée des couples $(x, f(x))$ pour tous les éléments x de E, généralisation évidente du « graphique » classique d'une fonction réelle d'une variable réelle [...].

❸ On aboutit ainsi à la définition actuelle de la notion de fonction (empruntée ici à Chambadal et Ovaert 1966, p. 23) :

> Soient E et F deux ensembles, A une partie de E×F, et supposons que pour tout x appartenant à E, il existe un y et un seul appartenant à F tel que le couple (x, y) appartienne à A [...].
>
> DÉFINITION 2. – Un tel triplet f = (E, F, A) s'appelle fonction définie sur E, à valeurs dans F, ou encore application de E dans F.
>
> On dit que E est l'*ensemble de définition* de la fonction f, que F est l'ensemble dans lequel la fonction f *prend ses valeurs*, et que A est le *graphe* (ou le *graphique*) de la fonction f.

La fonction, qui est le triplet (E, F, Γ_f), s'identifie ainsi à peu près à son graphe Γ_f (duquel on peut tirer la connaissance de E, mais non celle de F).

❹ La synonymie indiquée par les auteurs entre *graphe* et *graphique* ne doit pas tromper : alors que le graphe est une entité *purement mathématique* (c'est un ensemble de couples – de réels, si E = F = 3 par exemple), qui n'a guère sa place au collège ou au lycée, « graphique » (ou, mieux, « représentation graphique ») y désigne une réalité… *graphique*, un *tracé*, c'est-à-dire en fin de compte un objet *non mathématique*. On se gardera donc de confondre « graphe » et « représentation graphique » : en toute rigueur, contrairement à ce que dit le programme de 2de par abus de langage, une « courbe » au sens graphique du terme, c'est-à-dire un tracé dessiné, ne saurait véritablement définir une fonction.

5. Les « généralités » sur les fonctions

---

22. Et non au sens de la théorie des graphes, laquelle ne sera introduite en terminale ES qu'à la rentrée 2002.

Le travail amorcé se poursuit en prenant appui sur deux questions dont la formulation semble quelque peu embarrassée :

1. Dans le chapitre sur les fonctions (généralités), l'écho qu'ont reçu les élèves est que tous les types de tâches et techniques sont triviaux, mais ils ont pris conscience de la subtilité de l'abstraction sous-jacente, ce qui a créé un malaise chez eux nuisant à leur apprentissage. Ce chapitre me pose donc la question du passage de l'étude locale d'un problème à une étude plus générale, plus abstraite. Comment graduer cette évolution ? (2001-2002, 2de, semaine 12)

2. À propos des fonctions, le programme précise qu'une définition formelle de la croissance et de la décroissance est attendue. Est-ce que cela implique que l'on doive insister sur des exercices – comme on peut en trouver dans quasiment tous les manuels de 2de – où une démonstration très formelle est attendue ? C'est peut-être un bon moyen d'illustrer les théorèmes de comparaison sur les réels. Cependant, si l'on doit insister, est-ce que les élèves ne vont pas trouver ces méthodes compliquées, surtout si l'on a travaillé auparavant sur les représentations graphiques ? (2001-2002, 2de, semaine 14)

Tout se passe ici comme si ces professeurs stagiaires rencontraient une difficulté qu'ils ne parviennent pas, à ce stade de leur formation, à décrire de façon précise et univoque : d'où l'impression que leurs propos tournent autour d'un problème qui reste à énoncer – leurs questions ressemblent à s'y méprendre à des questions écran. La stratégie de réponse va consister à aller droit au cœur du malaise. Alors que la culture professorale tend à présenter l'initiation aux fonctions, en seconde, à l'instar d'ailleurs de l'introduction à la statistique, comme une « affaire de vocabulaire » (dans un cas, « fonction croissante », « fonction décroissante », etc., dans l'autre, « moyenne », « médiane », etc.), l'exorde du commentaire est sans détour : « Comme avec toute notion, y lit-on, les "attributs" que l'on peut attacher à une fonction doivent être *motivés*. Pourquoi s'y intéresse-t-on ? Que permettent-ils de comprendre ou de faire ? Pour quelles raisons par exemple se demande-t-on si une fonction est croissante ou décroissante ? Quel intérêt cette connaissance peut-elle avoir ? » Ce questionnement ciblé est aussitôt illustré par un petit apologue présenté comme « l'argument mathématique d'une AER envisageable ». On le reproduit *in extenso*.

❶ Deux étudiants travaillant ensemble lors d'une séance de TD arrivent à l'expression suivante

$H = \dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$.

Ne disposant pas d'une calculatrice, ils décident d'en déterminer par leurs propres moyens l'ordre de grandeur : H est-il proche de 1, ou de 10, ou de 20, ou de 30, etc. ? Pour cela, ils décident d'utiliser 1,7 pour valeur approchée de $\sqrt{3}$. Chacun d'eux calcule de son côté afin de contrôler un résultat par l'autre.

❷ Le premier procède ainsi : il remplace $H = \dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$ par $H^* = \dfrac{100}{(2+1{,}7)^2}$ qui est supérieur à H (puisque le dénominateur en est plus petit) : $H < H^*$. Il obtient donc : $H^* = \dfrac{100}{3{,}7^2}$. Il calcule alors de tête le carré de 3,7 en procédant comme suit : $37^2 = (40-3)^2 = 1600 - 240 + 9 = 1369$. Il a ainsi : $H^* = \dfrac{100}{13{,}69}$. Pour simplifier les choses il décide alors de remplacer H^* par $H^{**} = \dfrac{100}{14} < H^*$. Afin de s'épargner de poser la division, il imagine alors le calcul suivant :

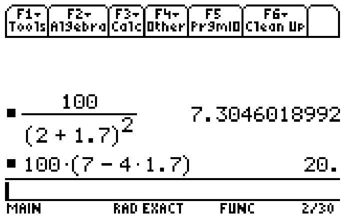
$H^{**} = \dfrac{100}{14} = \dfrac{100}{2\times 7} = \dfrac{100}{2\times 7}\times\dfrac{7}{7} = \dfrac{100}{2\times 49}\times 7 = \dfrac{100}{98}\times 7$.

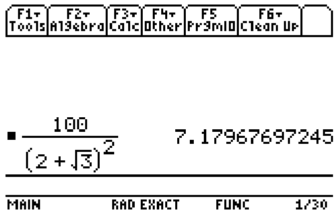
En observant que $\dfrac{100}{98} \approx 1$, il en déduit que $H \approx 7$.

❸ Le second étudiant, lui, commence par noter que l'on a $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ et écrit alors :

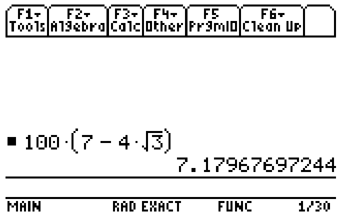
$H = \dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2} = \dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2}\times\dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{100(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{100(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}\times\dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 100(2-\sqrt{3})^2 = 100(7-4\sqrt{3})$. Il obtient ainsi : $H \approx 100(7 - 4\times 1{,}7) = 100(7 - 6{,}8) = 100\times 0{,}20$. Il arrive donc à : $H \approx 20$.

❹ Comparant leurs résultats, les deux étudiants en restent stupéfaits ! Chacun pense que *l'autre* a fait une erreur. Pour en avoir le cœur net, ils vont emprunter une calculatrice et vérifient d'abord, sans même calculer l'expression exacte de H, les valeurs $\dfrac{100}{(2+1{,}7)^2}$ et $100(7 - 4\times 1{,}7)$. À leur grande surprise, ils obtiennent ceci [ci-dessous, à gauche]. Puis ils interrogent la même calculatrice sur la valeur « véritable » de H [ci-dessous, à droite].





Le premier étudiant triomphe ! Le second calcule l'expression exacte obtenue, pensant que son calcul préalable pourrait contenir une erreur :



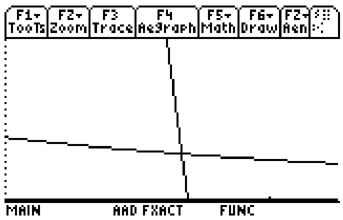
Une seconde calculatrice, plus puissante, fournit les valeurs suivantes :

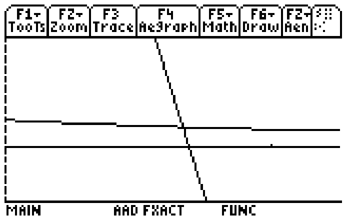
$$\frac{100}{(2+\sqrt{3})^2} = 7{,}17967697244908258902146339765105$$

$$100(7 - 4\sqrt{3}) = 7{,}17967697244908258902146339765105.$$

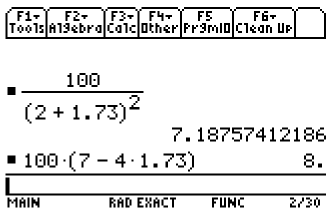
Où est la clé du mystère ? La suite de la réponse la révèle sans façon.

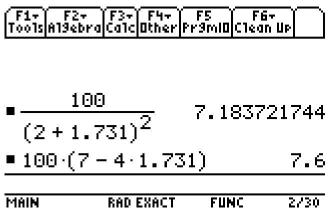
❺ Les étudiants se demandent alors d'où vient l'anomalie : si dans les expressions numériques *égales* $\dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$ et $100(7 - 4\sqrt{3})$ on remplace $\sqrt{3}$ par 1,7, on obtient des résultats *très* différents ! Pour cela ils ont l'idée d'introduire les fonctions f et g définies dans un voisinage de $\sqrt{3}$ par $f(x) = \dfrac{100}{(2+x)^2}$ et $g(x) = 100(7 - 4x)$ telles que l'on a : $H = f(\sqrt{3}) = g(\sqrt{3})$.





- Les deux courbes se coupent au point de coordonnées $(\sqrt{3}, H)$. La courbe représentative de g est une droite de pente –400 : si on remplace $\sqrt{3}$ par un nombre légèrement inférieur, comme 1,7, la valeur de $g(1{,}7)$ est *très supérieure* à $g(\sqrt{3}) = H$, comme on l'a vu : 20 au lieu de 7,179…
- En revanche, la courbe représentant f apparaît doucement descendante : on doit donc s'attendre à ce que $f(1{,}7)$ soit *à peine supérieure* à $f(\sqrt{3}) = H$, comme on l'a observé : 7,304… au lieu de 7,179…
- Cette différence se fait sentir même si l'on prend une valeur de x plus proche de $\sqrt{3}$, comme 1,73 :





On a ainsi un exemple où apparaissent de façon combinée deux propriétés attribuables à des fonctions : le sens de variation de f (la fonction est croissante ou décroissante, ce qui se traduit numériquement par le fait de donner une valeur approchée $f(x*)$ par défaut ou par excès de $f(x)$ lorsque $x*$ est une valeur approchée par défaut de x), la « pente » de f au voisinage de x (ou plutôt la valeur absolue de cette pente), notion qui peut être appréhendée qualitativement dès la seconde, même si elle n'est quantifiée qu'en première. Les notions correspondantes sont les clés de l'explication d'un certain phénomène, par exemple le fait que – chose paradoxale pour une culture du numérique un peu archaïque – l'expression « simplifiée » $100(7 - 4\sqrt{3})$ de l'expression numérique $\frac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$ fournit, pour une même précision sur $\sqrt{3}$, des valeurs approchées de qualité *très inférieure* à celles que fournit l'expression originale. La réponse apportée dans le séminaire se poursuit alors en généralisant légèrement l'argument mathématique exposé précédemment et met en évidence que, non seulement le travail mathématique use ici d'outils très élémentaires là où les élèves professeurs ont été accoutumés à employer la lourde panoplie de la dérivation, mais il énonce surtout une exigence qui est au cœur de la formation : celle d'une introduction *fonctionnelle*, et non pas *formelle*, des notions et entités mathématiques que le programme enjoint d'enseigner. La notion de fonction croissante, par exemple, ne se justifie pas du fait qu'il y aurait des fonctions croissantes, mais du fait que la croissance de certaines fonctions explique et permet de contrôler certains phénomènes mathématiques.

Conclusion

En survolant quelques-uns des problèmes avec lesquels les professeurs en formation initiale à l'IUFM se trouvent d'emblée aux prises lorsqu'il s'agit pour eux d'*enseigner les fonctions*, nous venons d'esquisser la construction d'une culture professionnelle au sein d'une formation *sur une suite d'années*, chaque promotion étant, d'une certaine manière, plongée dans la culture jusqu'alors élaborée. On notera que ce processus cumulatif, qui permet de n'avoir pas à tout recommencer *ab ovo* chaque année, s'est concrétisé en 2005-2006 par la création d'un nouveau dispositif de formation, les *archives du séminaire*, regroupant en l'espèce les notes des séminaires des années 2000-2001 à 2004-2005, où les élèves professeurs de la promotion étaient amenés, de façon plus ou moins régulière, à se plonger pour y rechercher des éléments de réponse aux questions officiellement soulevées, comme aux questions que leurs pratiques régulières d'enseignement les amenaient à se poser.

Références

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2006). Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques. In C.-M. Chiocca et I. Laurençot (éds), *De l'intégration des technologies aux dispositifs de formation de futurs enseignants*. Toulouse : ENFA & IUFM de Midi-Pyrénées. Disponible sur cédérom.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille I, Marseille.
Disponible sur Internet : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/.

Un parcours d'étude et de recherche sur les fonctions en classe de 2^{nde}

Nicolas Minet, Irem de Poitiers[23]

Résumé de l'atelier :
Les attaques récurrentes subies par l'enseignement des mathématiques semblent montrer que ni leur utilité ni leur sens profond ne sont visibles, que ce soit pour les décideurs, les élèves ou leurs parents. C'est l'ambition des équipes CDAMPERES (groupes issus d'un programme de recherche IREM/INRP) que d'essayer de proposer et d'expérimenter dans les classes des parcours d'étude et de recherche – notions issues de la TAD[24] - afin faire rencontrer et vivre par les élèves du secondaire, autour de questions problématiques, les raisons d'être des notions enseignées.
L'atelier a pour objectif de susciter une réflexion sur les programmes - essentiellement en Seconde - autour du travail mené au sein de l'Irem de Poitiers, à savoir une proposition de méthodologie pour structurer l'année de Seconde et le détail du parcours d'étude et de recherche consacré aux fonctions à travers des documents utilisés en classe cette année.

Nous pouvons lire dans l'introduction du programme de Seconde les intentions suivantes :

« Ce programme est composé de trois grands chapitres : statistique, calcul et fonctions, géométrie, pour chacun desquels les capacités attendues, en nombre volontairement limité, constituent la base commune des programmes des années ultérieures ». Etant donné l'objectif de notre recherche, nous avons recherché les raisons d'être de l'étude de ces trois domaines des mathématiques, qui constituent les trois « grands chapitres du programme » : les fonctions, la géométrie, les statistiques.

Il nous semblerait important de voir mis en exergue dans les programmes scolaires, et justifiant par là même pourquoi tel ou tel contenu est exigible, des *questionnements* qui ont été et sont encore importants dans la science mathématique ; mais jamais une telle liste n'est donnée. Son élaboration revient-elle à la profession ? Parmi les pistes pour la constituer, nous pouvons imaginer puiser dans l'Histoire (et l'histoire des mathématiques en particulier), dans les autres disciplines, en particulier dans les problématiques actuelles qui se posent à la société.

Nous nous proposons d'illustrer dans la suite comment nous avons amorcé un tel travail de recherche de questions dignes d'intérêt au sujet des fonctions et comment nous avons tenté de mettre en œuvre dans notre enseignement l'étude d'un tel problème en respectant les contenus du programme de Seconde. Notons que bien que nous envisageons rester dans le cadre légaliste des programmes devant les élèves, il nous semble judicieux pour faire notre recherche de ne pas nous y référer dans un premier temps.

Par rapport aux statistiques et à la géométrie, les fonctions peuvent apparaître moins présentes dans la vie des Hommes, du moins de manière moins « visible » ; du coup, on pourrait penser de prime abord que l'écologie de la notion de fonction est réduite et interne à la discipline. Pour éclaircir ce point, nous avons retenu ces pistes :

- Quelles situations relèvent du fonctionnel en dehors de la discipline mathématique ? Autrement dit, quelle est l'écologie de la notion de fonction ? Quels types de tâches sont associés à ces situations ?
- Dans quelles situations les Hommes ont-ils progressivement construit la notion de fonction ?

[23] Projet mené par l'équipe lycée de l'Irem de Poitiers : D.Gaud, N.Minet, Maryse Cheymol , Nathalie Chevalarias, Caroline Ducos, Cyrille Kirch, Loïc Jussiaume, Roger Terrochaire.
[24] Théorie anthropologique du didactique, voir par exemple http://yves.chevallard.free.fr

En cherchant à résoudre quels problèmes ? Avec quelles techniques y ont-ils répondu ?
- Pourquoi les fonctions ont-elles été introduites dans l'enseignement secondaire ? Quels étaient les contenus ?

Notre vision de la situation sera complétée par un retour critique sur les programmes actuels de Troisième et de Seconde, et nous proposerons alors un Parcours d'Etude et de Recherche sur les fonctions en Seconde, parcours guidé par la question de savoir comment résoudre des problèmes d'optimisation.

Recherche des raisons d'être : pourquoi étudier les fonctions ?

Comme dans chaque domaine des mathématiques, la recherche de types de tâches significatifs sur les fonctions peut se faire à deux niveaux : dans le cadre de la modélisation par des fonctions d'une situation réelle de dépendance entre deux phénomènes quantifiables, ou bien lors de la résolution d'un problème interne aux mathématiques pouvant faire appel à une fonction. Nous allons maintenant illustrer certains de ces types de tâches en précisant des techniques correspondantes.

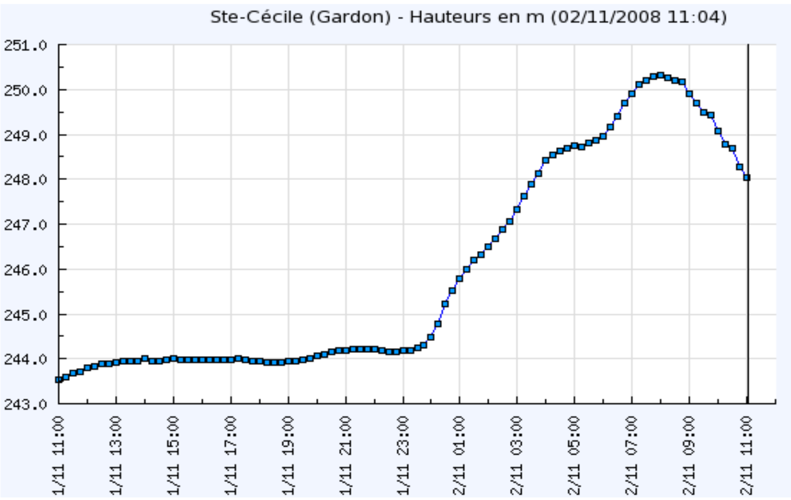
Décrire la dépendance entre deux quantités

La vie courante permet la rencontre dans un cadre non mathématique de la notion de dépendance : on dit par exemple que « le poids est fonction de la taille » ce qui signifie usuellement que le poids dépend de la taille mais pas que la quantité « poids » est une fonction - au sens mathématique - de la quantité « taille ». L'expression « en fonction de » est par contre souvent utilisée dans l'acception mathématique du terme en sciences expérimentales, en économie, etc…

Ainsi, les fonctions « vivent » dans toutes les disciplines qui cherchent à décrire le comportement des phénomènes quantifiables qu'elles étudient. On peut par exemple décrire comment le spectre d'une lampe est fonction de sa température, comment le volume molaire *(Vm)* est fonction des conditions de température *T* et de pression, comment l'énergie solaire reçue par les planètes est fonction de la distance au soleil[25] …

Même en dehors des mathématiques, remarquons que la présence des fonctions se manifeste à travers les trois registres habituels : numérique, graphique et algébrique, dans le but de décrire les phénomènes étudiés :

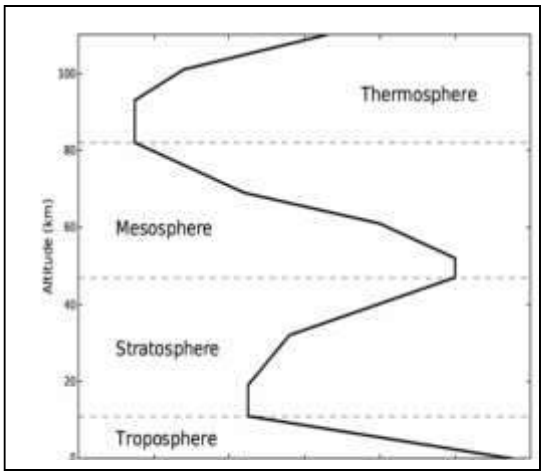
- Par des tableaux de données :
recensement de la population, relevé de mesures en physique,…
- Par des courbes :
graphique de température, hauteurs d'eau sur le site de surveillance des crues,…
- Par des formules :
en physique (U = Ri, PV = nRT,…) ou dans la vie courante (formule de calcul de l'impôt, indices type indice corporel…)

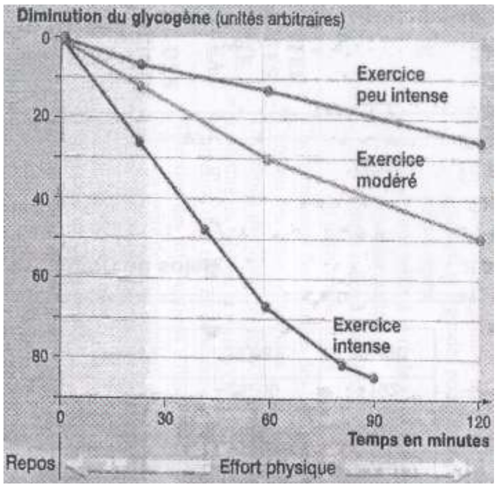


http://www.infoclimat.fr/bulletins-speciaux/images/Ste_Ccile_-_11h04.png
hauteur du Gardon à Ste Cécile (30) en 2008

[25] Exemples tirés des programmes de Physique ou de S.V.T. de Seconde

Remarquons les implicites véhiculés en mathématiques à propos des représentations graphiques :





- La position des axes ;
- Les repères souvent orthonormés en maths ne le sont ni dans d'autres disciplines ni dans la vie courante ;
- Les repères sont souvent orthogonaux dans les autres disciplines ;
- L'origine du repère n'a pas bien souvent pour coordonnées (0 ; 0) hors des mathématiques ;
- Les quantités étudiées ne sont pas toujours triviales !

Ces conventions pas toujours explicitées et parfois bafouées conduisent à des confusions chez les élèves.

Confirmation dans les programmes de 3ème de Physique (2008) de l'importance du registre graphique :

Connaissances	Capacités	Exemples d'activités
Tension continue et tension variable au cours du temps ; tension alternative périodique. Période. Valeurs maximale et minimale d'une tension.	Identifier une tension continue et une tension alternative.	*Comparaison d'une tension alternative et d'une tension continue en utilisant un générateur de très basse fréquence associé à : - une diode électroluminescente, deux DEL tête-bêche ou une diode associée à une lampe ; - un voltmètre en continu.*
	Construire une représentation graphique de l'évolution d'une tension alternative périodique ; en décrire l'évolution. Reconnaître une tension alternative périodique. *Déterminer graphiquement sa valeur maximale et sa période.*	*Relever point par point les variations au cours du temps d'une tension alternative périodique. Construire à la main et/ou à l'aide d'un tableur-grapheur la courbe représentant les variations d'une tension alternative périodique en fonction du temps.* [B2i]

Pour terminer au sujet de la description de la dépendance de deux quantités, signalons que l'utilisation d'une formule[26] est souvent nécessaire pour étudier de manière approfondie une dépendance fonctionnelle ; remarquons que la dépendance entre deux quantités peut être :

- *établie de manière nécessaire* ; c'est le cas par exemple de l'expression du volume d'un solide, ou de l'aire d'une figure en fonction d'une longueur dans une configuration géométrique donnée, où l'objectif est de démontrer une relation numérique.

- *choisie a priori*, pour un étalonnage ou lors de l'élaboration d'une échelle : citons le choix de conversion de la température de degrés Celsius en degrés Fahrenheit selon une correspondance affine,

[26] Voir partie B- pour des précisions historiques

mais aussi les lois de Fechner[27] ; si la validité de ces lois en termes de description de la réalité est contestable, elles ont cependant servi dans de nombreux domaines pour créer des unités ou étalonner des phénomènes : sismologie (échelle de Richter), acoustique (niveau sonore), astronomie (magnitude des étoiles),…

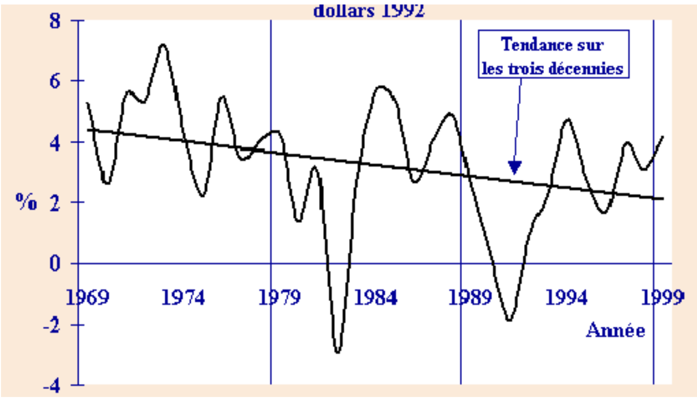
- *recherchée pour modéliser* la dépendance entre deux quantités suite à des mesures ; cela est précisé dans le paragraphe suivant.

Modéliser une situation de dépendance entre deux quantités par une formule

Que ce soit en sciences expérimentales (échanges atmosphériques en climatologie,…) ou en politique (démographie, évolution du taux de chômage,..), c'est dans un but d'interpolation ou d'extrapolation qu'un modèle se recherche.

L'interpolation est un problème interne aux mathématiques (polynômes de Lagrange, Tchebychev,..) ; dans l'enseignement, les méthodes utilisées en sciences expérimentales sont souvent basées sur la recherche de proportionnalité[28] ; elles utilisent des outils statistiques (droite de régression,..) mais aussi des fonctions rencontrées au lycée (fonctions affines, carré, inverse, racine carrée, exponentielle, sinus,..)

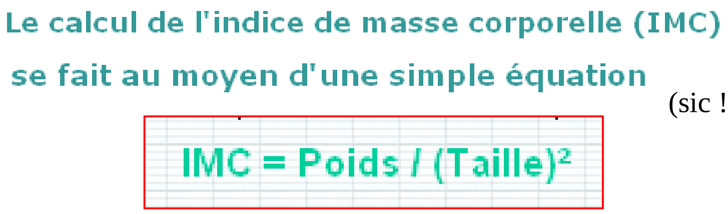
Notons que ce type de tâche n'est que rarement enseigné en cours de mathématiques (citons le cas des droites de régression en série ES) car il peut faire appel à des procédés de validation qualitatifs qui dépassent donc le cadre de la logique mathématique ; des critères quantitatifs peuvent cependant être donnés : un modèle, devant être à la fois assez simple pour être utilisé mais permettant d'approcher suffisamment la dépendance étudiée, est validé par exemple en fixant au préalable une marge de tolérance entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées.



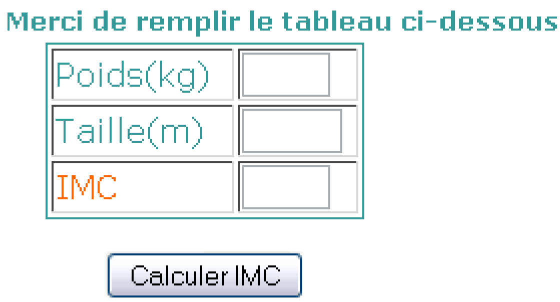
Evolution du PIB au Canada, 1969-1999 http://dsp-psd. tpsgc.gc.ca/Collection-/LoPBdP/images/prb0105f-1.gif

Déterminer une quantité à partir d'une autre

Sans être formulé en des termes d'images et d'antécédents, la détermination d'une quantité à partir d'une autre est un type de tâches omniprésent dans la lecture d'un tableau de nombres ou d'un graphique, qu'ils soient issus de la vie courante ou internes à une situation mathématique ; par contre, rares sont les déterminations ayant recours à l'algèbre dans la vie courante, hormis des calculs d'images tels le calcul de l'impôt sur le revenu, ou des calculs tel celui de l'indice de masse corporelle.



(sic !)



http://www.automesure.com/Pages/calculimc.html

[27] Theodor Fechner (1801-1887) psychophysicien, entendait établir des lois mathématiques du type S = k log (I) pour mesurer les sensations du corps humain en fonction de l'intensité du stimulus reçu.

[28] Voir la partie C sur le rôle des fonctions « de référence » dans le Secondaire

En revanche, la résolution algébrique de ce type de tâches est un domaine important des mathématiques, celui des équations, qu'ils soit possible de déterminer leurs solutions (telles les équations polynomiales de degré inférieur ou égal à 4) ou non (en faisant appel à une fonction, notamment par des méthodes d'approximations)

Comparer des quantités (qui sont fonction d'une même quantité) ;

Si la comparaison de quantités se retrouve dans les mêmes domaines de la vie courante que pour le type de tâches précédent, on peut y adjoindre des situations qui amènent à la comparaison de vitesses de croissance (d'individus[29], de populations, …) ; la notion de vitesse, liée à celles de taux d'accroissement et de fonction dérivée, tient une place prépondérante dans l'enseignement de la physique, alors que ce lien est rarement fait en cours de mathématiques où l'essentiel du temps est passé sur une étude formelle de fonctions.

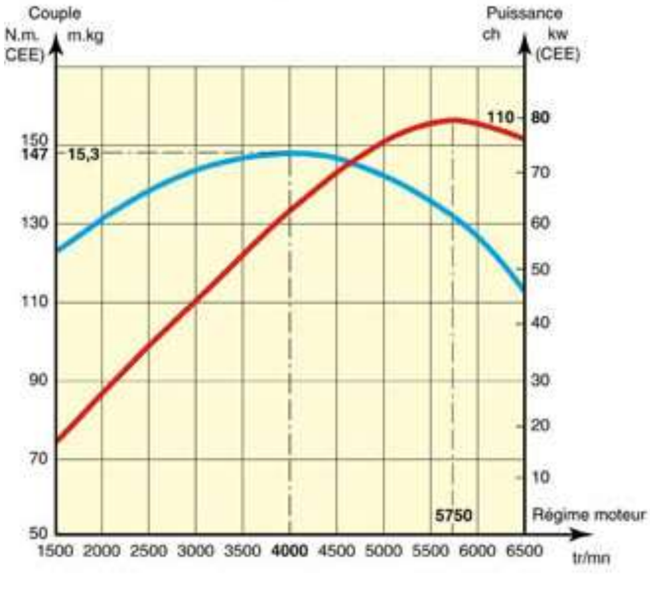
Etudier les variations d'une quantité ;

Il est fréquent (et historiquement essentiel[2]) que des phénomènes soient quantifiés en vue de l'étude de leur évolution ; les situations où une telle problématique intervient sont très nombreux, notamment pour étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre : évolution de la température à la surface du globe dans les prochaines décennies, variations de la pression en fonction de l'altitude, de l'intensité lumineuse reçue par un point en fonction de son éloignement de la source, fréquence du son d'une corde de guitare en fonction de la tension de la corde,…

L'étude mathématique des variations d'une fonction est un type de tâches important dans l'enseignement secondaire, via l'étude de la fonction dérivée à partir de la classe de Première, mais cette étude est souvent déconnectée des problématiques précédentes.

Optimiser une quantité ;

Les problèmes d'optimisation sont omniprésents dans notre société : ils consistent à la recherche d'un « meilleur compromis possible » selon des critères préalablement fixés : estimation de la température maximale pour la prévision du temps, quantité minimale d'objets à produire pour dégager un bénéfice, temps minimal pour atteindre un point donné du globe (routage maritime), fonctionnement le plus adapté d'une machine (couple maximal d'un moteur, cf ci-contre http://citroen.c4.free.fr/moteurs.html)



Un exemple frappant : le terme « optimisation » se lit de nombreuses fois sur la page d'accueil du CRAIN !(Centre de recherche pour l'architecture et l'industrie nautiques) http://www.craintechnologies.com/ qu'il concerne l'allongement du plan de voilure, d'angle de la quille, de formes, de performance ,…

[29] http://www.med.univ-angers.fr/discipline/pediatrie/Siteendoped/Web/page_11.html

Bilan

Il convient de distinguer les techniques finalement assez rudimentaires pour réaliser les types de tâches cités dans la vie courante, des techniques utiles lorsqu'on veut étudier un phénomène fonctionnel dans le cadre des sciences expérimentales et des mathématiques :

- Le vocabulaire (image, antécédent…), les définitions (fonction croissante, maximum d'une fonction,.…), la théorie mathématique (notation f(x), notion de fonction,…) et les techniques algébriques des fonctions (monotonie, extrema) sont absents de nombreux domaines de la vie courante, voire des autres disciplines, car ils ne sont utiles que dans les situations où une théorie mathématique est sous-jacente.
- Dans la même veine, les valeurs d'une quantité qui rendent optimales une autre quantité ainsi que les valeurs recherchées d'images ou d'antécédents sont des valeurs approchées, même avec une formule, car rechercher des valeurs exactes est souvent dénué de sens hors des mathématiques.
- Les interactions avec l'algèbre sont limitées à la recherche d'une quantité en fonction d'une autre.

Bien souvent, dans une formule, apparaissent plusieurs lettres qui ont, selon les moments de l'étude ou les situations, statut d'inconnues, de variables ou bien de paramètres.
Les méthodes pour élaborer ces lois et la recherche de la validité du modèle utilisent des outils qui dépassent
parfois le cadre de la théorie des fonctions

Ces conclusions amènent à se demander quand apparaît la nécessité d'imposer vocabulaire et le formalisme en cours de mathématiques, et pour résoudre quels types de tâches. Comment choisir les fonctions à étudier en cours de mathématiques ? Des réponses éclairantes se trouvent dans l'histoire de la construction progressive du concept de fonction, et nous amèneront à nous interroger ensuite sur les choix faits par les programmes scolaires.
Quelques éléments historiques utiles pour faire des choix d'organisations mathématiques

1. Construction du concept de fonction : quelques moments-clés

Historiquement, la gestation du concept de fonction a été longue. Les tables numériques apparues dans l'Antiquité (tablettes babyloniennes) constituent les prolégomènes à l'apparition de la notion de fonction (on établit des correspondances). Les tables numériques (tables trigonométriques, tables des carrés ou tables des logarithmes…) seront construites sans que le besoin d'une formalisation quelconque soit rendu nécessaire. Les tables suffisent à l'usage qui leur a été fixé, sans recours au graphique : répertoire de valeurs numériques (tables trigonométriques…) également utiles pour faciliter le calcul numérique (tables de logarithmes…)

La notion de fonction ne commence à se développer dans son principe qu'à partir du XIV^{ème} siècle par l'étude de quantification de certains phénomènes physiques[30] : chaleur, lumière, vitesse, etc... Cette recherche était facilitée par l'invention de divers instruments scientifiques. A cette époque apparaissent des représentations graphiques[31] pour décrire la dépendance d'une quantité en fonction d'une autre, en s'attachant notamment à la question des variations.

Au XVII^{ème} siècle, des éléments décisifs interviennent : la création de l'algèbre littérale symbolique par Viète et les notations algébriques de Descartes permettent d'envisager la description des objets géométriques et des lois de la nature par des relations entre quantités ; l'étude des mouvements est centrale, et des échanges s'effectuent entre pensée mathématique et considérations cinématiques. C'est

[30] Voit l'article de Adolf P. Youschkevitch, *le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle*, « Fragments d'histoire des
mathématiques », brochure 41, APMEP.
[31] Roger Bacon (1214-1294) et Nicole Oresme (1323-1382) sont parmi les précurseurs de telles représentations

pourquoi les fonctions considérées sont tout d'abord étudiées comme des courbes, elles-mêmes considérées comme des trajectoires.

http://abcmaths.free.fr/blog/uploaded_images/250px-Galilee-737943.jpg

Rappelons que c'est dans la recherche de lieux géométriques qu'apparaissent des courbes chez les Grecs même si aucune étude n'en est faite par ceux-ci, faute d'outils algébriques. C'est pour résoudre le célèbre problème de lieu de Pappus que Descartes (1637) explique le fonctionnement de sa géométrie (dite maintenant géométrie analytique) et aboutit à des équations reconnues comme étant celles vérifiées par des coniques. A partir des idées de Descartes, des études de courbes (issues au départ de relations géométriques ou mécaniques) seront entreprises durant les siècles suivants : ovales de Descartes, limaçon de Pascal, trident de Newton, cubique d'Agnesi, etc... Notons que les écrits de Descartes comportent la première équation différentielle correspondant à la courbe logarithme suite à problème posé par De Beaune à Mersenne. Descartes considère les courbes de la forme P(x,y)=0 où P est un polynôme ; cette condition, P(x,y)=0 permet d'introduire une dépendance entre x et y et ainsi calculer l'une d'elles en fonction de l'autre.

Cependant, l'objet géométrique qu'est la courbe est étudié en tant que tel : apparaissent alors des techniques permettant de déterminer les tangentes à ces courbes (Fermat, Descartes, Roberval etc.). Noter que parallèlement, le calcul d'aires s'était enrichi de nouvelles méthodes - les indivisibles - grâce aux mathématiciens italiens (Torricelli ; Cavalieri ; Galilée…) et que ces méthodes seront utilisées pour déterminer des aires sous une courbe (par exemple, Roberval réalise la quadrature de la cycloïde).

La détermination des tangentes à une courbe, définie au départ par son équation cartésienne f(x ; y)=0, et la recherche de techniques fiables pour calculer des aires sous une courbe (la technique des indivisibles ayant montré ses limites) mèneront à la création du calcul différentiel simultanément et parallèlement par Leibniz et Newton.

http://www.bbc.co.uk/radio4/science/media/NewtonLeibniz.jpg

Ce n'est qu'au milieu du XVIIe siècle – Mercator, Gregory, Newton –qu'apparaissent de manière explicite des correspondances fonctionnelles par l'intermédiaire de formules ou de séries.

Leibniz introduit le mot « fonction » de manière contextualisée pour expliquer la détermination de tangente à l'aide de son calcul infinitésimal : « *J'appelle **fonctions** toutes les portions des lignes droites, qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, et aux points de la courbe; comme son abscisse, ordonnée, corde, tangente..* ». Il introduit l'usage des mots *constante, variable, paramètre, coordonnées.*

Il faut attendre le XVIIIème siècle pour que les premières définitions des fonctions apparaissent :

Ainsi, Jean Bernoulli en 1718 : *"On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes." Notation* φx

Puis Euler en 1748 : « *Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur, une quantité variable est une quantité indéterminée ou, si on veut, une quantité universelle qui comprends toutes les valeurs déterminées… Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.*

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. par exemple $a+3z$, $az-4zz$, $az+b+b\sqrt{aa-zz}$*…sont des fonctions de z. Une fonction de variable est aussi une quantité variable.* »

Par expression analytique, il faut entendre une expression qui fait intervenir les opérations connues à l'époque (opérations algébriques, racines, séries et produits infinis ; fonctions trigonométriques, logarithmes et exponentielles). Autrement dit les fonctions sont données par des formules y compris des sommes de séries.

La polémique suscitée par la résolution du problème des cordes vibrantes[32] va amener Euler en 1755 à revoir sa définition car aucune fonction « analytique » ne répond au problème qui pourtant admet une réponse !

« *Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x."*) La notion de dépendance entre quantités variables est clairement énoncée.

Remarquons que les définitions générales n'étaient pas indispensables pour que se développe le calcul infinitésimal ; ainsi Fermat propose-t-il des méthodes pour résoudre des problèmes d'optimisation (« *Méthode pour la recherche du maximum et minimum* »). Quant au marquis de l'Hospital, il prend soin dans son *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, de donner tous les types de problèmes que celui-ci permet de résoudre, comme en témoigne le sommaire :

1- Où l'on donne les règles du calcul sur les différences.
2- Usage du calcul des différences pour trouver les tangentes à toute sorte de lignes courbes.
3- Usage du calcul différentiel pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées.
4- Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & les points de rebroussement.
5- Usages des différences pour trouver les développées.
6- Usage du calcul des différences pour trouver des caustiques par réflexion.
7- Usage du calcul des différences pour trouver des caustiques par réfraction.
8- Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes.
9- Solution de quelques problèmes qui dépendent des méthodes précédentes.
10- Nouvelle manière de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la méthode de M. Descartes & Hudde.

Quelles conclusions tirer suite à ce survol historique ?

- **le principe de la notion de fonction préexiste dans les tables numériques, facilitant les calculs**
- **l'étude de phénomènes naturels a été le point de départ de la construction du concept,**
- **la géométrie très prégnante historiquement a fait privilégier l'étude des courbes (tangentes, aires,..)**
- **les premières définitions données par Leibniz étaient nécessaires au contexte qu'il exposait,**
- **les premières définitions données d'une fonction faisaient intervenir des procédés de calcul,**
- **le calcul différentiel a pu se développer sans que la notion de fonction soit clairement définie,**
- **le développement de la notion de fonction (notations, définition) s'est fait tant par des considérations internes aux mathématiques qu'externes**

Les débuts de l'enseignement de la notion de fonction

L'un des points de notre démarche qui pourrait engager historiens et didacticiens dans notre profession, est l'étude de l'historique des programmes scolaires ; voici quelques éléments sur l'introduction des fonctions.

[32] IREM de Poitiers, *Enseigner les mathématiques*, fascicule 1, 1996.

Au début du XXe siècle, l'enseignement secondaire de la plupart des pays dits à l'époque « civilisés » est bouleversé par un mouvement de réforme. C'est à cette époque qu'est créé la CIEM dont la préoccupation principale est de redéfinir les programmes de mathématiques et la manière d'enseigner les mathématiques. Des options sont alors prises par d'éminents mathématiciens tel Emile Borel ; l'encadré ci-contre reproduit un extrait du numéro 16 de la revue « L'enseignement des mathématiques »

> « Ce ne serait pas sans danger qu'un enseignement se séparerait de plus en plus de la vie et de la réalité. Les applications des sciences pénètrent chaque jour davantage notre existence ; nous nous servons quotidiennement d'une bicyclette, nous voyons constamment dans les journaux des graphiques, nous construisons, chaque fois qu'un des nôtres est malade, des courbes de température. Si l'enseignement des mathématiques se rattache à de tels objets familiers, il risquera bien davantage d'intéresser, il échappera surtout à la mortelle scolastique. Quand un enseignement est trop scolastique, il dégoûte un grand nombre d'élèves et déforme plutôt qu'il ne forme l'esprit d'une partie des autres ; il n'est pas toujours sûr que l'enseignement des mathématiques ait toujours su éviter cet écueil. »[1]

C'est dans ce contexte qu'est créé en particulier en France un enseignement de l'analyse et en particulier qu'est introduit l'enseignement de la notion de fonction « *base de toute étude de phénomènes naturels*» selon Carlo Bourdet (un des protagoniste de la mise en place de la réforme en France). Cette évolution concerne du programme concerne les classes préparant le baccalauréat. Parmi les contenus: calcul infinitésimal dérivées de fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques, exponentielles et leurs inverses, calcul intégral. Il est en général appliqué pour rechercher des problèmes d'optimisation en géométrie et en physique.

Cet enseignement de mathématiques peut vivre car à l'époque, des enseignements conjoints aux mathématiques sont dévolus au professeur de mathématiques, tels l'astronomie, mécanique, cinématique…

Il est très intéressant de voir comment ces disciplines, dites " mathématiques mixtes [33] " étaient décrites par d'Alembert dans l'Enyclopédie qu'il dirigea avec Diderot :

« Les mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle mathématiques *pures*, considère les propriétés de la grandeurs d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...]

La seconde classe s'appelle mathématiques mixtes ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, .. »

Quelles conclusions tirer suite à cette recherche de l'histoire de l'enseignement de la notion ?

- L'analyse et en particulier la notion de fonction a été introduite dans l'enseignement car c'est une notion centrale pour étudier des phénomènes « naturels ».
- Le corpus enseigné par les professeurs de mathématiques comprenait des mathématiques mixtes et qui donnaient des raisons d'être et un lieu de vie des techniques liées aux fonctions.

Les mises en garde de Borel ci-dessus seraient-elles encore valables pour les programmes scolaires actuels du Secondaire ? C'est ce que nous allons tenter de voir maintenant.

Réflexions sur les programmes de Troisième et de Seconde

---

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_mathematiques_dans_les_formations_universitaires.pdf

Suite aux réflexions précédentes, nous nous sommes posé deux questions au sujet de l'enseignement des fonctions :

- Si nous voulons résoudre des types de tâches significatifs relativement à la notion de fonction, avons-nous besoin des notations et du vocabulaire liés aux fonctions ?
- Pourquoi certaines fonctions sont-elles étudiées (parfois sous le terme « fonction de référence ») plutôt que d'autres ? Quelles classes de problèmes ces fonctions « de référence » permettent-elles de résoudre ?

1. Quelle nécessité pour le « formalisme » ?

La longue maturation historique de la notion de fonction nous a apporté des éléments de réponse par la négative à la nécessité de l'introduction de vocabulaire, définitions et notations ; pourtant, le programme de Seconde (2000) le demande de manière très appuyée : "*Les notations $f(x)$, déjà introduite au collège, et f, seront systématiquement utilisées*"

Voici à ce sujet un extrait des modalités[34] des programmes de Troisième (en vigueur depuis la rentrée 2008)

« L'utilisation des expressions "est fonction de" ou "varie en fonction de", amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie et est associée à l'introduction de la notation f(x) » ; cet objectif se retrouve dans l'encadré ci-dessous ainsi que la demande d'introduire le vocabulaire d'image et d'antécédent :

Connaissances	Capacités	Exemples d'activités, commentaires
1.1. Notion de fonction [Thèmes de convergence]	*- Déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule.* [SVT, Histoire, Géographie, Physique…]	*Les activités prennent appui sur des situations simples issues, entre autres, de la géométrie (variation d'aires, de volumes), de la physique ou de problèmes de la vie courante. L'idée de variable est alors dégagée et rapprochée de celle de paramètre en SVT et de variable d'état en Physique. Toute définition générale de la notion de fonction et la notion d'ensemble de définition sont hors programme.* *La notion d'antécédent est introduite (et le terme antécédent utilisé), par lecture directe dans un tableau ou sur une représentation graphique. La détermination d'un antécédent à partir de l'expression algébrique d'une fonction n'est exigible que dans le cas des fonctions linéaires ou affines ce qui n'interdit pas de la solliciter dans d'autres cas. Le caractère exact des calculs quand la fonction est définie par une ''formule'' et le caractère approché de toute lecture graphique (sauf indication complémentaire) sont évoqués et distingués.* *La notation $x \mapsto f(x)$ est utilisée. Un travail est conduit sur le rôle différent joué par les parenthèses dans la notation $f(x)$ de l' image de x et dans les expressions algébriques comme par exemple $1,5\,(x-2)$.*

Alors pourquoi ce formalisme ? N'est-on pas dans ce qu'on pourrait appeler une « ***culture scolaire*** » ?

Cette impression peut se trouver étayée en Seconde (et au-delà) avec les tableaux de variation et les tableaux de signes ; ce sont des créations didactiques devenues objets d'enseignement ; leur importance peut pourtant être considérée comme relative, avec des interrogations plus dérangeantes encore au sujet du tableau de signes et de l'image que cet objet donne de la science mathématique ; en effet, si la localisation des solutions d'une équation à l'aide du signe des valeurs d'une fonction a une réalité historique, et est actuellement utilisée en algorithmique sur les calculatrices, autant le tableau de signes

[34] Programmes de mathématiques de collège : B.O. N°6, 19 avril 2007

propose la démarche inverse : connaissance des racines d'expression ad hoc, et recherche du signe correspondant…[35]

Finalement, des observations dans les classes montrent que la maîtrise du concept mathématique est loin d'être compris jusqu'en Terminale et au-delà :

- confusion entre f et f(x) ;
- confusion dans les notations des dérivées et primitives $(x^2)' = 2x$ ou bien $F(2x) = x^2$;
- difficultés de compréhension sur les équations différentielles et notations employées x ; y ; y' ;…

Si ces difficultés sont réelles, n'est-ce pas en partie parce que les concepts et notations sont présentés aux élèves avant la résolution de problèmes où les fonctions interviennent ?

La question des « fonctions de référence »

introduction de la notion de fonction au collège

Quelles fonctions rencontre-t-on à partir de la Troisième ? Au service de quels problèmes ?

Il est écrit dans les programmes de Troisième (colonne de droite ci-dessous) qu'une des raisons d'introduire les fonctions est l'identification d'une courbe donnée par un nuage de points afin de trouver une formule ; c'est l'un des types de tâches que nous avions relevé dans la partie A :

Fonction affine	*- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.* *- Déterminer une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images.* *- Représenter graphiquement une fonction affine.* *- Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.*	*Parmi les situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité, certaines sont cependant modélisables par une fonction dont la représentation graphique est une droite. Cette remarque peut constituer un point de départ à l'étude des fonctions affines. Pour ces fonctions, la proportionnalité des accroissements de x et y est mise en évidence. Le processus de correspondance $x \mapsto ax+b$ est associé à son expression verbalisée : "je multiplie par a puis j'ajoute b", ce qui permet de noter qu'une fonction linéaire est une fonction affine particulière. La recherche de l'image ou de l'antécédent d'un nombre permet de donner du sens au calcul littéral et à la résolution des équations.* *La relation $y = ax + b$ entre les coordonnées (x,y) d'un point M est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction $x \mapsto ax + b$.*
		Le problème de la détermination d'une fonction affine (ou linéaire) associée à une droite donnée dans un repère est intéressant comme contrepoint des études précédentes. Pour déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère, les élèves sont entraînés à travailler soit numériquement soit en exploitant directement la représentation graphique.

[35] Voir article de D. Gaud dans le Bulletin Vert de l'APMEP n°474 « Quelques interrogation à propos du tableau de signes »

L'introduction des fonctions affines par une situation comportant un nuage affine n'est-elle qu'un prétexte (une « remarque » et un « point de départ » selon l'encadré) pour lancer l'étude mathématique de fonctions affines ? Ou bien donner du sens aux concepts mathématiques via l'interdisciplinarité est-il un objectif, à la manière des mathématiques mixtes ? Certes l'appel à l'interdisciplinarité écrit ici fait écho à l'introduction de la partie de ce programme de Troisième sur les fonctions linéaires et affines : *« Les exemples mettant en jeu des fonctions sont issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires. Les fonctions linéaires ou affines apparaissent alors comme des exemples particuliers de tels processus »* mais au vu des types de tâches de la colonne centrale du programme, il semble qu'il soit davantage question de se centrer sur l'étude de l'objet mathématique, et **toujours autour du vocabulaire et du formalisme** …

Pourtant, résoudre des problèmes posés en 3ème dans le cadre des fonctions linéaires ou affines ne nécessite
que des outils tels la proportionnalité, le calcul algébrique et la lecture de graphiques et de tableaux chiffrés, pratiquée dans toutes les autres disciplines depuis la sixième…Et nous pourrions envisager traiter le programme – et notamment les encadrés ci-dessus – via des situations externes aux mathématiques ; en s'inspirant des types de tâches déjà cités dans la partie A, une formule peut servir à :

- estimer l'évolution d'une population ;
- décrire la dépendance de proportionnalité entre deux quantités (telle la hauteur de mercure dans un thermomètre et la pression,..)
- décrire la dépendance affine entre deux quantités (telle la correspondance degrés Celsius & Fahrenheit,..)
- …

Bien sûr le programme n'interdit pas de faire cela... Mais il ne met pas en évidence non plus ces types de tâches !

Et les manuels comportent une proportion très faible de tels exercices, se centrant bien davantage sur les contenus mathématiques demandés par le programme : image d'un nombre par une fonction linéaire de coefficient donné, liens avec les pourcentages (coefficient multiplicateur), avec le théorème de Thalès, avec la géométrie analytique (caractérisation d'une droite par une équation telle $y = ax$)

Pourtant les applications affines et linéaires interviennent à la fois dans et hors mathématiques comme apportant des réponses à des types de tâches :

des fonctions « de référence » pour modéliser des phénomènes

Nous venons d'en parler en Troisième, mais cela se prolonge au lycée ; voici, tiré de manuels de Physique au sujet de la loi des gaz parfaits ($pv/T = c^{ste}$) le déroulement suivant d'un TP en classe de 2^{nde} : « mesurer p, mesurer v, puis tracer p en fonction de 1/v ». Ainsi il n'est pas demandé de tracer la courbe de dépendance de p en fonction de v mais de p en fonction de 1/v pour faire apparaître le modèle d'une droite passant par l'origine. Il est légitime de se demander *pourquoi* il n'est pas demandé de tracer p en fonction de $1/v^2$ ou bien en fonction de $\sqrt{v}$… Ce type de démarche se retrouve d'ailleurs en terminale avec les lois exponentielles ou logarithmiques…Si la recherche systématique d'une relation linéaire peut-être justifiée pour déterminer graphiquement des constantes, elle est contraire à la formation scientifique puisqu'elle impose ce qu'il faut trouver, la démarche consistant en fait à valider le modèle. De plus les logiciels (tableurs en particulier) permettent grâce aux courbes tendance de conjecturer des formules, ce qui n'était pas possibles il y a encore quelques temps. La vision du nuage de points devrait être un prélude au choix de la formule utilisée (ici : la fonction inverse).

Nous en concluons qu'une raison d'étudier certaines fonctions et de leur donner un statut « de référence » peut être la fréquence avec laquelle elles modélisent une situation externe aux mathématiques. Mais cela ne justifie pas nécessairement une étude formelle dans le cours de mathématiques, par exemple des variations d'une fonction ; en effet, si l'on considère la chute d'un corps soumis à son seul poids, alors la distance parcourue est une fonction croissante du temps, il n'y a aucune nécessité à le démontrer pour un Physicien avec quelque formule que ce soit qui modélise la situation… Nous pensons qu'il faut parfois accepter de rentrer dans des considérations internes aux mathématiques pour justifier d'un vocabulaire et de notations spécifiques, mais dans le but de résoudre des problèmes.

des fonctions « de référence » pour étudier les variations d'une fonction

Le programme de 3ème effleure une autre raison de l'étude des fonctions affines : « le processus de correspondance x → ax + b est verbalisé : je multiplie par a et j'ajoute b » nous pouvons penser qu'il est question sans le dire de la composition de fonctions ; la même impression se trouve dans le programme de 2nde :

Fonctions et formules algébriques	- Reconnaître la forme d'une expression algébrique : somme, produit, carré, différence de deux carrés - Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de *x* à *f(x)* quand *f* est donnée par une formule. - Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…) - Modifier une expression ; la développer ; la réduire selon l'objectif poursuivi.

Cependant, la composition de fonctions n'est pas un objectif avant la classe de Première ; il serait par contre possible d'étudier les variations de l'ensemble des fonctions trinômes du 2nd degré et des fonctions homographiques à partir des variations des fonctions affines, de la fonction carré et de la fonction inverse, et leur donner un statut « de référence » cette fois pour des raisons *internes* à la discipline.

Cela serait-il pertinent ?

Rappelons que le terme même de « fonction de référence » est *une création didactique* née au début des années 1980 qui était liée à la recherche des limites dans le cadre de l'enseignement de l'analyse ou les mots d'ordre d'alors étaient « Majorer, Minorer, Approcher ». La notion de fonction de référence a semblé subir un glissement sémantique car dans les programmes plus récents il s'agit de ramener toute une classe de fonctions à ces fonctions de référence par le biais des fonctions associées. Autrement dit, identifier une fonction du type t **Erreur !** a cos(ωt+ φ) comme étant du type t **Erreur !** cos(t) après transformations. Ceci appelle deux remarques :

- ces techniques utilisant la composition de fonctions sont parfaitement justifiées et toujours utilisées en

physique mais rapidement abandonnées en mathématiques face à une technique beaucoup plus algorithmique (dérivées) mais pas nécessairement plus efficace dans un certain nombre de cas,

- le choix des fonctions de référence elles-mêmes prête à débat : pourquoi la fonction racine n'est-elle pas une fonction de référence en seconde ? Idem pour la fonction exp(-x), très présente en physique, pour les fonctions logistiques très utilisées en écologie ou bien en économie, …

Conclusions

Bien évidemment, choisir des contenus mathématiques à enseigner à un niveau donnée n'est pas aisé. Mais nous souhaitons faire deux critiques en direction des programmes actuels :

Première critique La conception des programmes en « petites marches »

Cette démarche qui veut qu'en introduisant « assez tôt » une notion, elle soit mieux acquise, la maturation aidant, implique un **morcellement des savoirs** qui peut être néfaste pour la compréhension par les élèves des raisons d'être de micro-contenus, si nombreux qu'ils peuvent sembler insignifiants aux élèves, dans le sens : « dont les raisons ne peuvent plus être perçues ».

La seule information, elliptique s'il en est, au sujet de ces « fonctions de référence » se trouve dans le bandeau : « Etudier quelques fonctions de référence, *préparant à l'analyse*. » **Faut-il donc attendre toujours le niveau ultérieur pour que les élèves sachent pourquoi ils devraient étudier les fonctions… ?**

Seconde critique : Les capacités attendues ne sont-elles pas trop souvent purement scolaires ?

Témoin, en Seconde :

- Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule.
- Déterminer, dans chacun des cas, l'image d'un nombre.
- Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.
- Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.

Des types de tâches plus essentiels sont annoncés mais il faut aller les chercher dans certains paragraphes du document d'accompagnement ! Extraits :

« On privilégiera celles [des situations] pour lesquelles l'explicitation du lien entre deux grandeurs permet de répondre à une question : ainsi, on peut trouver de nombreux exemples de situations géométriques, faisant intervenir comme variable une longueur et comme deuxième grandeur une longueur ou une aire ; *la question à traiter est alors souvent un problème de maximum, de minimum ou même de recherche d'une valeur particulière. »*

Nous regrettons que les savoirs à enseigner ne soient pas organisés autour de telles questions !

Pour pallier ces manques qui nous semblent desservir les mathématiques et leur enseignement, nous avons recherché un enseignement des contenus au programme de Seconde sur les fonctions en tentant un regroupement des techniques relevant d'un même type de tâches, afin d'organiser autrement un enseignement de la notion de fonction.

Détail d'un PER sur les fonctions en Seconde [36]

1. Description générale du parcours

Pour organiser l'enseignement des fonctions du programme de seconde, il reste à choisir parmi les types de tâches retenus ceux autour desquels on va organiser des contenus au programme.

Ces choix sont guidés par les analyses précédentes, et notamment :

- L'étude « écologique » : on doit montrer aux élèves où « vivent » les fonctions
- Les problèmes motivant les connaissances : nous devons être attentifs à l'introduction du formalisme

et du vocabulaire, et les contenus au programme de 2nde doivent être réorganisés pour répondre à des types de tâches significatifs, reformulés en termes de « grandes questions »

Nous proposons d'apporter en Seconde des réponses aux trois « grandes questions » suivantes :

- ***Comment optimiser une quantité ?***

On peut ajouter des sous questions qui feront l'objet d'études plus ponctuelles à l'intérieur du parcours :

- *Comment décrire la dépendance entre deux quantités ?*
- *Comment exprimer une quantité en fonction d'une autre ?*
- *Comment déterminer une quantité à partir d'une autre ?*

---

[36] Pour notre interprétation des notions d'AER, de PER, et questions à fort pouvoir générateur d'études (alias « grandes questions »), voir Gaud, Minet et al « Parcours d'étude et de recherche en Seconde » Petit x n° 79

Les contenus exigibles abordés pour répondre à cette question sont les déterminations d'images, la résolution d'équations et la recherche d'un extremum, tant graphiquement et algébriquement ; en fin de parcours sont abordés vocabulaire et notations de base sur les fonctions (images, antécédents, courbe représentative)

- ***Comment étudier les variations d'une quantité ?***

Les contenus exigibles abordés pour répondre à cette question sont la définition formelle des variations, des fonctions « de référence » (affine, carré, inverse) ainsi que leurs variations.

- ***Comment comparer deux quantités** ?*

Les contenus exigibles abordés pour répondre à cette question sont la résolution (graphique et algébrique) d'inéquations.

Nous avons choisi d'étudier nos trois « grandes questions » au cours de trois parcours différents, tous balisés par plusieurs activités d'étude et de recherche, qui seront des moments-clés révélateurs des techniques à utiliser dans les exercices qui suivront. La suite donne le détail du premier de ces trois parcours.

Détail du parcours : Comment optimiser une quantité ?

a. Première étape du parcours : présentation du parcours aux élèves

Les élèves doivent connaître la ou les questions que nous proposons de leur faire étudier. Autrement dit il doit y avoir dévolution de la ou des questions.

a- Premier temps

Intervention du professeur :

Dans quels domaines y a-t-il des quantités qui varient ? Quelles sont ces quantités ? Qu'est-ce qui les fait varier ?

Par ces questions et les réponses que l'on peut y apporter, les élèves doivent prendre conscience que l'étude des fonctions a d'autres buts que l'acquisition de connaissances purement scolaires.

b- Deuxième temps

Intervention du professeur :

Parmi les domaines et types de tâches listées dans les réponses des élèves, on retient certaines questions qui interviennent dans de nombreux domaines. On projette un diaporama[37] pour illustrer notre propos.

Synthèse du diaporama :

Les quelques mots suivants sont écrits avec les élèves en introduction de **l'historique du parcours :**

Nous allons étudier des quantités qui varient en fonction d'autres quantités afin d'apporter des réponses à la question : « *Comment optimiser une quantité ?* »

Quelques remarques brèves a posteriori :

Les réponses des élèves sont très .. variées ! On peut proposer d'en faire un classement avec eux :

- celles qui sont qualitatives, telle « la gourmandise dépend de l'individu »

[37] En ligne sur le site Educmaths et sur celui de l'Irem de Poitiers : http://irem.campus.univ-poitiers.fr/irem/index1.htm (« ressources » puis « productions en ligne »)

- *celles qui sont quantitatives et mais sans dépendance fonctionnelle, telle « le poids dépend de la taille »*

- *celles qui sont quantitatives et avec dépendance fonctionnelle, telle « la hauteur du niveau de la mer dépend des précipitations »*

On annonce qu'on va se centrer dans le cours de mathématiques sur celles du troisième type car nous devons pouvoir travailler sur des nombres.

Deuxième étape du parcours : approche discrète du problème

a- Dynamique de l'étude : *intervention du professeur :*

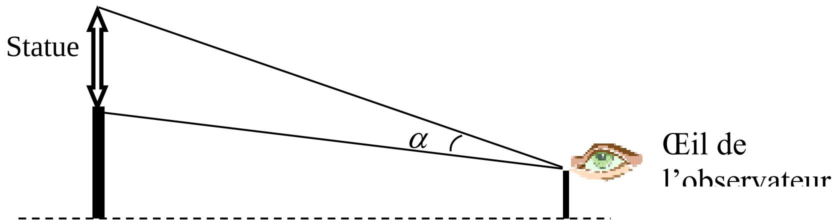
Comme on l'a annoncé suite au diaporama, on va étudier des quantités qui varient afin de savoir si elles peuvent être maximales ou minimales ; c'est le problème qui va être posé dans la situation suivante, et pour lequel il va falloir d'argumenter afin de justifier la réponse.

b- La première rencontre avec la tâche :

AER 1 : Comment varie l'angle sous lequel on voit un objet en fonction de la distance de l'observateur au pied de l'objet ? L'exemple de la statue de la Liberté de New York.

La situation et les données :
La statue de la Liberté, érigée en 1886, est haute de 46,50 m sans son socle et de 93 m avec socle. Arrivant à New York droit sur Liberty Island, un touriste placé à l'avant d'un bateau regarde la statue. Il a son œil placé à 5 m au-dessus de la mer. Pour un objet donné, ce qu'on appelle l'angle de vision est l'angle sous lequel la statue est vue dans sa totalité.

La figure ci-contre résume la situation



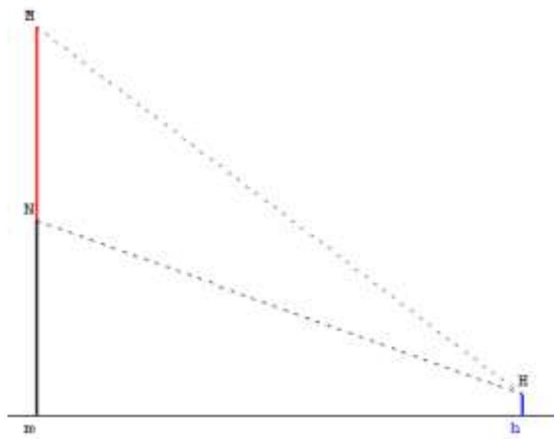
Partie A : *A votre avis :*
1- l'angle de vision ne varie pas quand on s'approche de la statue
2- l'angle de vision diminue quand on s'approche de la statue
3- l'angle de vision augmente quand on s'approche de la statue
4- autre proposition

Partie B : *On mathématise la situation de la manière suivante :*

- la statue et son socle sont assimilés à deux segments verticaux portés par la même droite,

- *l’observateur est assimilé à un segment vertical qui représente la hauteur de son œil par rapport au niveau de la mer,*

La situation est représentée sur une feuille A4 à l’échelle $\frac{1}{1000}$



1- *Expliquer en quelques mots comment une représentation à l’échelle va permettre de mesurer l’angle de vision réel de la statue, à partir d’une distance donnée entre l’observateur le centre du piédestal.*
2- *Résoudre le problème initial : comment varie l'angle de vision au fur et à mesure que le bateau se rapproche de la statue ?*

c- Commentaires sur l’AER

Place dans le parcours

L’origine du parcours d’étude et de recherche est, idéalement, une situation du monde[38], ce qui offre souvent l’occasion d’établir un relevé de valeurs (ou d’utiliser un tableau de mesures donné, ce qui n’est pas le cas ici), afin d’avoir une première idée sur l’évolution du phénomène, voire l’existence d’extrema ; s’il n’est pas construit, un graphique sera suggéré afin d’améliorer la visibilité du comportement du phénomène. Cela soulève, selon la situation, des questions de conventions, de choix des unités, de choix de lissage (relier ou non les points par des segments ?) dont dépendent les lectures graphiques qui sont faites ensuite.

Faire un graphique à partir d’un tableau de nombres et inversement, savoir pourquoi on joint les points d’un graphique, sont-ce des activités mathématiques ? Oui, si on considère que l’on travaille sur le concept de correspondance, et non si on pense que les mathématiques sont essentiellement démonstratives et donc discursives. Il serait pourtant dommage que cette phase non discursive soit réduite, car c’est probablement formateur au niveau du concept (cf l’histoire de la notion de fonction).

Il s’agit d’une première rencontre, en Seconde, avec la notion de fonction. La situation oblige l’élève à faire correspondre à chaque distance, un angle, donc à mettre en place une démarche fonctionnelle.
C'est une situation du monde qui fait rencontrer aux élèves la variation du diamètre apparent d'un objet.

Analyse de la situation

La réponse aux questions peut être fait soit par le tableau de données soit par le graphique.
La résolution fait intervenir deux registres (numérique et graphique) ; volontairement « inaccessible », la formule donnant l’angle α en fonction de d = mh est : α = Arctan (87,99/d) – Arctan (41,49/d).
L’angle croît, passe par un maximum légèrement supérieur à 21°, atteint pour d environ égal à 60m, puis décroît.

Indications sur la gestion

Partie A : Après débat entre les élèves, chacun note son avis sur sa feuille.

---

[38] *Les acteurs d’une situation du monde* – ici une promenade en bateau - *suite à la rencontre avec une tâche censée être d’un type culturellement, sinon pratiquement, familier aux élèves*, - ici prendre une photographie - *sont amenés à devoir accomplir une certaine tâche t, supposée pour eux problématique […] qu’il sera demandé aux élèves de chercher à accomplir en lieu et place des acteurs évoqués par l’énoncé du « problème* - ici, décrire les variations du diamètre apparent de la statue.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf

Partie B : On fait remarquer qu'un dessin à l'échelle conduit à des triangles semblables donc les angles entre le triangle réel et celui de la feuille A4 sont les mêmes. Chaque élève fait des relevés de mesures. On ne collecte pas les mesures car il y a risque d'avoir, pour une même distance, plusieurs mesures d'angles.

Pour convaincre certains élèves de l'intérêt de faire un relevé de plusieurs mesures, on pourra demander :

- ce qui se produit lorsqu'on est très proche de la statue (s'ils pensent que l'angle augmente ou est constant)
- de décrire aussi précisément que possible les variations du phénomène, ce qui fait apparaître l'extremum.
- de préciser à un degré près la valeur maximale qu'ils pensent obtenir

On peut faire remarquer que l'information donnée par un tableau de valeurs est peu visualisable car le but est d'amener les élèves à construire la courbe.

Ceci fait, peut-on relier les points ? Cela fait apparaître les problèmes de lissage. Un logiciel permet à la fois de vérifier l'inexactitude du tracé par segments en affinant et d'anticiper sur la future définition de la courbe comme ensemble des points de coordonnées (d , α). D'ailleurs, pour terminer, on peut montrer au vidéoprojecteur l'animation et un relevé fait par le logiciel de géométrie et faire reporter aux élèves les valeurs sur leur graphique, d'une couleur différente de leurs propres mesures.

Enfin, pour exploiter la courbe, on peut demander :

- quel est l'angle de visée pour une valeur non relevée (par exemple quand d = 110m)
- pour quelles distances entre le bateau et la statue l'angle de visée est supérieur à un angle donné (par exemple 18°), ou lui est égal.

<u>Remarques et sources :</u>

- L'angle de visée d'un appareil photo standard (focale 35 même) est de 40°. Mais pour les prises de vue, on parle plutôt en distance focale qu'en angle de visée ; ainsi les zooms permettent-ils de photographier dans de bonnes conditions à d' autres moments que celui où le diamètre apparent est maximal.
- Les bateaux utilisés voguent à environ 16 nœuds (1 nœud = 1 mile par heure ; 1 mile = 1,852 km)

Si on demande pour exploiter le graphique à quelle distance d de la statue l'angle est supérieur à 18°, on trouve que $35 < d < 110$; cela laisse à peine 10 s pour prendre la photo, ce qui est peu !

Dimensions de la statue : http://www.insecula.com/salle/MS01022.html
Vitesse du bateau : http://www.insecula.com/salle/theme_40039_M0089.html

d- Historique : **<u>Bilan de l'AER 1 :</u> (suite de l'historique)**

Pour étudier une situation où une quantité dépend d'une autre, on peut essayer de la traduire par des outils (tableau, graphique) suite à un relevé de mesures.

Plus on a de mesures, plus on a d'informations mais dans ce cas un tableau devient difficile à lire.

Par contre, un graphique, constitué d'un ensemble de points, a des avantages, car il permet de :

- *mieux visualiser* comment varie une quantité en fonction d'une autre
- *choisir* une manière de relier les points *pour estimer* d'autres valeurs que celles qui ont été mesurées, en
particulier rechercher s'il y a une valeur extrême

Exemple :
Ici, à chaque distance choisie, on a associé un angle de vision. On a exprimé cette correspondance par :
-un tableau de valeurs

- un graphique (en repérant en abscisse la distance et en ordonnée la mesure de l'angle de vision) grâce auquel on a estimé à quelle(s) distance(s) on a eu un angle de vision de 18°, l'angle de vision quand d = 110 m, l'angle maximal.

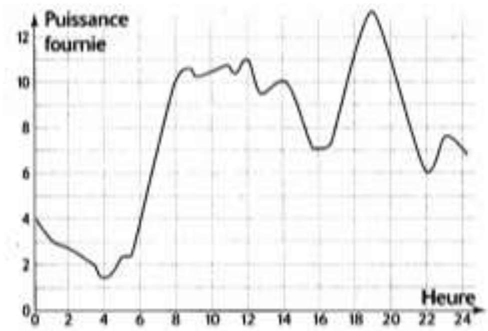
e- Synthèses avant l'AER suivante :

Méthode : sur la construction d'un graphique, avec le vocabulaire utilisé (coordonnées, repère, …) la représentation d'une grandeur A en fonction d'une autre B (en plaçant les points de coordonnées (B ; A) dans un repère), les choix à faire selon la situation (unités, lissage, erreur d'approximation des valeurs lues)

f- Exercices de travail de la technique :

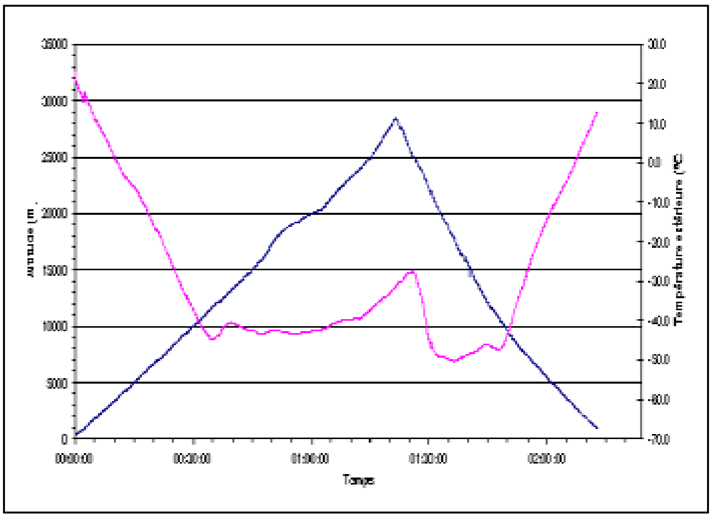
Les exercices sont centrés sur l'exploitation de tableaux et de graphiques dans des situations contextualisées (données issues des médias : populations, relevés de température, de niveaux d'eau, …)

<u>Exercice 1 :</u>
Ce graphique représente l'évolution de la puissance fournie en Gw (gigawatts) au cours d'une journée par l'ensemble des centrales hydrauliques en France.



1. Quelle puissance fournissent ces centrales :
   à 6h ? à 8h ? à 22h ?
2. A quel(s) moment(s) de la journée fournissent-elles :
- une puissance de 8 Gw ?
- la puissance maximale ?
- la puissance minimale ?

<u>Exercice 2 :</u>
Voici un graphique représentant les mesures de l'altitude et de la température de l'air au cours de l'ascension et de la descente d'un ballon sonde. Arrivé à une certaine altitude, le ballon sonde éclate. Alors, il chute, mais ... les données scientifiques (température, altitude , ...) sont toujours enregistrées et transmises à un ordinateur qui donne les courbes ci-dessous. Rechercher à l'aide de ces courbes :



a) le temps au bout duquel le ballon éclate
b) l'altitude maximale qu'il atteint
c) la durée de la descente
d) si le ballon descend plus vite qu'il ne monte
e) la température maximale entre 30 mn et 1h30mn de vol.
f) comment varie la température en fonction de la durée du vol.

Troisième étape du parcours : algébrisation en vue de l'automatisation des phénomènes

a- Dynamique de l'étude : *intervention du professeur :*

Maintenant qu’on sait lire des réponses sur des tableaux et des graphiques pour rechercher un extremum, on va voir ce que donnent ces techniques sur une nouvelle situation

b- La première rencontre avec la tâche :

AER 2 : Construction d’une boîte

Avec une feuille cartonnée de format A4, on construit une boite sans couvercle ayant la forme d’un parallélépipède rectangle en ôtant un carré à chaque coin puis en formant la boîte en pliant suivant les pointillés.

1. Est-il possible que le volume de la boîte soit de 0,7 dm^3 , à 2 cm^3 près ?
2. Quel côté du carré permet de construire la boîte de volume maximal ?

c- Commentaires sur l’AER

<u>Place dans le parcours :</u>

Au vu des analyses des trois premières parties, nous avons choisi de ne pas imposer *a priori* notations et vocabulaire, qui ne sont pas nécessaires à la compréhension des différents statuts de la lettre (variable, paramètre, inconnue), ni à l’utilisation d’une formule pour aborder certaines des techniques au programme de Seconde.

On propose maintenant une situation qui gagne à être mise en équation pour progresser par rapport à la technique précédente. En particulier grâce aux TICE, on peut produire rapidement un tableau de nombres, ou une courbe et ainsi se dégager des calculs numériques répétitifs afin de se concentrer sur les conjectures.

On peut souligner que les situations de la vie courante amenant la rencontre avec des fonctions ne font travailler que des valeurs approchées de la solution mathématique (des nombres décimaux), puisque rechercher des valeurs exactes est souvent dénué de sens dans des situations hors mathématiques. De plus, on travaille ici la construction du nombre réel en affinant la réponse (modification du pas, dichotomie, ..)

<u>Analyse de la situation</u>

Cette situation peut se gérer à l’aide des outils informatiques ou de calculatrices graphiques. Elle permet d’aborder l’intérêt d’une formule algébrique pour répondre à la question posée, même si aucune donnée ostensible n’apparaît (pas de x dans l’énoncé). Mais le passage par la formule, sans être incontournable, facilite énormément la tâche en particulier si on utilise un tableur. Certaines techniques se mettent alors en place sur :

- le tracé d’une courbe avec une formule
- la lecture d’une courbe (maximum, résolution graphique d’équations)

Il s’agit alors dans un premier temps de résoudre une équation voire une inéquation à condition de passer par la formule, puis ensuite de rechercher un extremum. Une équation qui se résout par tâtonnement fait apparaître de manière implicite la notion de fonction ; le problème possède deux solutions, et on peut donc prévoir qu’ayant rencontré par tâtonnement une solution des élèves s’arrêteront.

Le graphique permet une visualisation plus rapide du problème. Si les points peuvent être joints, doivent-ils l’être par des segments ? Pourquoi ? Ce questionnement déjà abordé lors de l’AER 1 est tranché par l’affinage du pas choisi. Certes il n’est pas possible en seconde d’utiliser l’outil mathématique pour résoudre l’inéquation… Mais cela est volontaire, puisque la situation ne réclame pas de solution exacte, étant externe aux mathématiques !

<u>Gestion :</u>

Lorsque les élèves ont constaté la longueur du travail demandé si on fait des relevés comme dans l'AER1, et si aucun n'en a l'idée, on peut leur demander comment ils ont résolu au collège des problèmes dans lesquelles une quantité inconnue est à trouver ; on va essayer de trouver une formule donnant le volume en fonction du côté du carré. La formule est ici facile à trouver. En quoi permet-elle de répondre à la question initiale ?

Elle permet de faire une courbe et surtout d'utiliser soit la calculatrice graphique (à avoir prévue ce jour-là) soit le tableur (dans ce cas on peut montrer que si on donne des valeurs aux côtés du carré, on calcule la longueur puis la largeur de la boîte et enfin de volume dans différentes colonnes du tableur ; dans ce cas, une explication collective sur le tableur est nécessaire lors de la correction). Pour que les élèves s'approprient le problème, on pourra montrer un patron déjà préparé et présenter une animation sous Geospace.

d- Historique : **<u>Bilan de l'AER 2 :</u> (suite de l'historique)**

Pour étudier une situation où il serait fastidieux de faire un relevé de mesure, on peut utiliser une formule pour exprimer une quantité en fonction d'une autre. Cette formule a plusieurs atouts car elle permet :

- *d'automatiser* le calcul des valeurs (tableur, calculatrice)
- *de fournir* des tableaux de valeurs de la taille souhaitée et, par suite, de *graphiques* aussi précis qu'on veut
- *de calculer* une quantité associée à une quantité donnée (par calcul direct ou résolution d'équation)

Exemple :
Ici, on a nommé x le côté du carré, et exprimé le volume V de la boîte en fonction de x grâce à la formule
$V = 4x^3 - 10x^2 + 6x$. Ensuite, comme $0 < x < 1$, on a choisi un pas de 0,1 et calculé différentes valeurs de V en fonction de x, puis représenté graphiquement V en fonction de x. Enfin, pour répondre aux deux questions avec davantage de précision, on a pris un pas plus petit.

e- Synthèses avant l'AER suivante :

Cours :
Les liens entre les trois registres permettant de *décrire la dépendance* entre deux quantités : tableau de valeurs, graphique, formule.
Ce que signifie qu'une quantité est une fonction d'une autre
Exemple de dépendances où l'expression « *en fonction de* » convient ou non.
Définition d'une quantité maximale, minimale.
Méthodes : construction d'un graphique à partir d'une formule à l'aide des TICE
résolution d'une équation du second degré

f- Exercices de travail de la technique :

Mise à l'épreuve de la technique algébrique (calculs, mise en équation, résolution d'équations,..) mettant en valeur l'automatisation des calculs permise par les formules, en utilisant un graphique devant une difficulté algébrique …

<u>Exercice 3 :</u>
1. Exprimer le périmètre d'un carré en fonction de son côté x.
2. Exprimer l'aire latérale d'un cube en fonction de son arête x.
3. a) Exprimer le périmètre d'un cercle en fonction de son diamètre d puis en fonction de son rayon r.

b) Exprimer maintenant le rayon d'un cercle en fonction de son périmètre

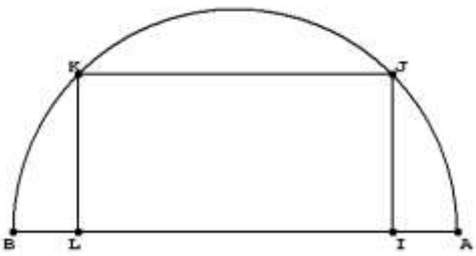
Exercice 4 :

La distance de freinage d'un véhicule est notée d et sa vitesse est notée v. En sciences expérimentales, on établit des lois liant d et v ; par temps humide, la loi est donnée par la formule $d = \dfrac{3\,v^2 + 100\,v}{400}$ (d en mètres, v en km/h)

1. Ecrire un tableau des valeurs de *d* en choisissant pour v des valeurs dans l'intervalle [0 ;160] avec un pas de 20, c'est-à-dire en choisissant une valeur de v tous les 20 km/h : v = 0, v = 20, v = 40, … jusqu'à v = 160.
2. Tracer le graphique correspondant au tableau de valeurs.
3. Utiliser ce graphique pour estimer la vitesse d'un véhicule qui a besoin :

a) d'une distance de freinage de 80 m b) d'une distance de freinage de 150 m

Exercice 5 :



[AB] est un segment de longueur 8. O est le milieu de [AB] et I est un point variable sur [OA]. On construit le point L symétrique de I par rapport à O. Enfin, on construit un rectangle IJKL inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AB]. On note x la longueur IO afin d'étudier l'aire, notée $\mathcal{A}$,du rectangle IJKL.

1. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de x

2. Quelle est la valeur maximale de l'aire $\mathcal{A}$? Pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?

Exercice 6 :

On veut clôturer un terrain rectangulaire de 450 m² dont un côté s'appuie sur le bord rectiligne d'une rivière, ce côté ne nécessitant pas de clôture. Déterminer les dimensions du terrain pour minimiser la longueur de clôture nécessaire

Quatrième étape du parcours : algébrisation pour des démonstrations

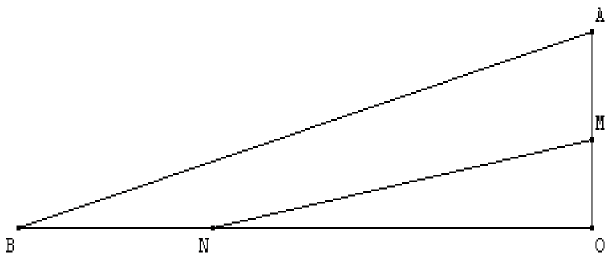
a- Dynamique de l'étude : *intervention du professeur :*

On a déterminé dans diverses situations l'extremum d'une quantité avec des formules, des tableaux et des graphiques mais on s'est souvent contenté de valeurs approchées. On va maintenant tenter de résoudre un problème d'optimisation en donnant la valeur exacte de l'extremum.

b- La première rencontre avec la tâche :

AER 3 : Un problème d'optimisation géométrique

OAB est un triangle rectangle en O.
OA=2 et OB=8. M est un point de [OA].
N est le point de [OB] tel que BN= 7 OM
Où placer exactement M sur [OA] pour que l'aire du triangle OMN soit maximale ?



c- Commentaires sur l'AER

<u>Place dans le parcours :</u>

L'étude formelle des variations d'une quantité en fonction d'un autre et la détermination de la valeur exacte d'un extremum n'ont de sens que dans des situations internes aux mathématiques. On peut clore en Seconde un parcours sur l'optimisation avec l'étude des extrema des fonctions trinômes du 2nd degré, sachant que l'algébrisation du problème est nécessaire mais pas suffisante, car il faut décrypter une écriture littérale pour démontrer ; ainsi on termine le parcours par une situation interne aux mathématiques, où la demande de démonstration place donc par essence même le niveau de justification supérieur au-dessus des niveaux précédents.

Le choix de la forme de l'expression est ici fondamental, et en accord avec la demande du programme de « modifier, factoriser, développer ou réduire selon l'objectif poursuivi » ; c'est l'aspect structural d'une expression littérale qui est mis en lumière, obligeant à travailler sur l'ostension d'une formule.

Analyse de la situation

Le graphique ou un tableau de valeurs affiné permettent une visualisation rapide du problème mais c'est une technique nouvelle, la mise sous forme canonique, qui permettra de déterminer de manière incontestable le maximum atteint par l'expression. On a choisi ici un maximum égal à 8/7, atteint quand la variable vaut 4/7, valeur rationnelle non décimale choisie à la fois afin de poursuivre la construction de la notion de nombre mais aussi pour imposer un autre mode de justification que ceux précédemment utilisés.

Cette situation ouvre la discussion : « Et si on n'a pas une expression du 2nd degré, peut-on trouver un extremum avec la formule ou doit-on se contenter d'une valeur approchée ? » ; on se rappellera par exemple des situations de l'étape précédente du parcours. On pourra dire qu'il existe des méthodes en classe de Première, et ici, le « vous verrez l'an prochain » n'est pas une question éludant le fait qu'on n'a pas de réponse à donner aux élèves à la question « à quoi cela sert-il ? », mais l'annonce qu'une question ne peut pas forcément être résolue totalement à un niveau donné, et que les solutions mathématiques efficaces demandent parfois du temps pour être comprises.

Gestion :

Cette situation peut être illustrée à l'aide des outils informatiques pour montrer comment se déplace N selon la position de M. La relation BN = 7 OM et l'habitude prise dans l'étape précédente du parcours doivent amener les élèves à rapidement rechercher une formule de l'aire de OMN en fonction de OM.

Lorsque les élèves ont déterminé la formule attendue, tracé la courbe et apporté une réponse approchée, on relance l'étude en rappelant qu'on est dans une situation où on a demandé - pour la première fois du parcours - une valeur exacte. Ceux qui affinent et cherchent à deviner le nombre auront du mal à conjecturer la réponse OM = 4/7. Le professeur dirige alors la résolution du problème en proposant la transformation de l'expression, montrant ainsi une technique certes difficile mais performante sur un certain type d'expressions.

On peut noter qu'en Seconde, la forme canonique pourra être donnée aux élèves, qui auront à savoir l'utiliser de manière pertinente.

d- Historique : **Bilan de l'AER 3 : (suite et fin de l'historique)**

Dans une situation mathématique où on demande de démontrer qu'une valeur trouvée est exacte, on ne
peut plus se contenter de valeurs approchées lues graphiquement ou avec un tableau, même en réduisant le pas.
Certains types de formules, celles du 2nd degré, peuvent être transformées à l'aide des identités remarquables puis
analysées pour qu'on soit certain, sans aucun tableau ni graphique, de la valeur extrême qu'elles peuvent
atteindre.

Exemple :
Ici, on a trouvé que l'aire du triangle OMN s'exprimait par la formule $4x - 3{,}5x^2$.

La transformation en – 3,5 $(x – 4/7)^2 + 8/7$ permet d'analyser cette nouvelle formule et de dire pourquoi la valeur maximale sera 8/7, et sera atteinte lorsque $x = 4/7$

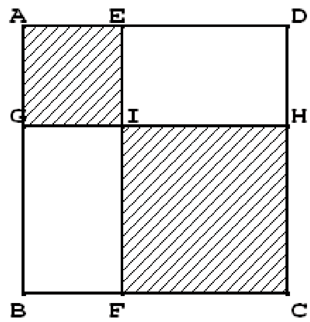
e- Synthèses avant l'AER suivante :

Méthode : règles de calcul littéral et algébrique

f- Exercices de travail de la technique :
Etude de situations amenant à transformer selon le but poursuivi ou à interpréter des expressions algébriques.

Exercice 7 :
1. Démontrer que l'expression $(x – 3)^2 + 8$ a pour valeur minimale 8 quel que soit le nombre x.
2. Pour chacune des expressions suivantes, déterminer si elles ont un minimum ou un maximum, préciser cet extremum, et en quelle valeur de la variable il est atteint :
$A = x^2 + 4$; $B = - x^2 + 4$; $C = (x – 3)^2 – 4$; $D = – (x – 3)^2 – 4$; $E = 2(x + 4)^2+ 1$; $F = - 3(x – 1)^2$

Exercice 8 :



ABCD est un carré de côté 5.
E est un point du segment [AB] et G est le point du segment [AB] tel que AE =AG.
La parallèle à (AD) passant par E coupe [DC] en F. La parallèle à (AB) passant par G coupe [BC] en H. (GH) et (EF) se coupent en I.
On va étudier l'aire, notée a , de la partie hachurée, quand E se déplace sur [AD].

1. On pose AE = x.
   a) Quelles sont les valeurs possibles de x ?
   b) Vérifier que l'aire hachurée s'exprime en fonction de x par $a = 2 x^2 – 10 x + 25$.

2. Etude en valeur approchée :
   a) A l'aide de la calculatrice, faire un tableau de valeurs de a avec pour x un pas de 0,5 puis construire le graphique correspondant.
   b) A l'aide de la courbe lissée, déterminer :
      - toutes les valeurs de x pour lesquelles a est égale à 20 cm ²
      - la valeur de x pour laquelle l'aire a est minimale.

3. Etude en valeur exacte :
   a) Vérifier que l'aire hachurée peut s'écrire $a = 2 (x – 2,5)^2 + 12,5$
   b) En déduire pour quelles valeurs de x on a : a = 14,5 ; a = 12,625 ; a = 20
   c) Démontrer que a est maximale pour x = 2,5 et que ce maximum vaut 12,5.

Cinquième et dernière étape du parcours : intégration des notations et du vocabulaire

a- Dynamique de l'étude : *intervention du professeur :*
On a rencontré diverses situations dans lesquelles on a déterminé l'extremum d'une quantité, que ce soit une longueur, une aire, un volume, une distance, une puissance, une altitude… Pour terminer ce parcours, on va écrire dans le cours quelques définitions et notations qui sont utilisés en mathématiques, et qui permettent de parler de manière universelle des situations qu'on a pu rencontrer.

b- Commentaire :
On se met « assez tard » en conformité avec le programme, qui demandait « une utilisation systématique des notations *f* et *f* (x) », ce qui est discutable à la fois en regardant l'historique de la genèse

de la notion de fonction, ainsi que l'utilisation des fonctions dans les disciplines autres que les mathématiques, où on ne rencontre pas, au moins au niveau du secondaire, f , f (x), « image », « antécédent », ..

Si, au cours des trois premiers temps du parcours, des élèves ont souhaité (par des souvenirs de 3$^{\text{ème}}$..) noter A(x) une aire que le professeur a noté A, on ne leur en tiendra pas rigueur (et on les suivra si la classe semble prête à cela…) Mais les notations et vocabulaires peuvent n'être intégrées qu'après avoir travaillé les techniques, la dernière partie du parcours étant une reprise de situations équivalentes à celles rencontrées depuis le début du parcours, et reformulées avec notations et vocabulaire des fonctions ; on fera donc pour introduire ce dernier temps du parcours non pas une activité mais un cours en montrant aux élèves l'intérêt des notations et du vocabulaire, génériques et universels.

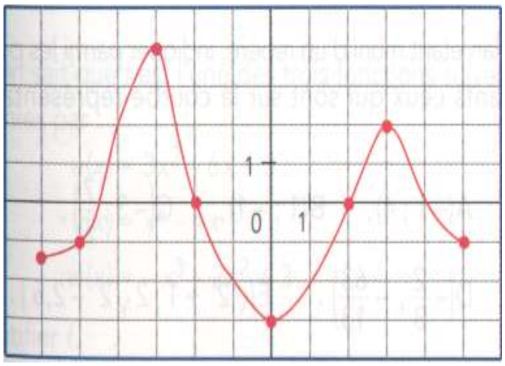
c- Synthèses :
Cours : définition des intervalles bornés, d'une fonction, de l'image et de l'antécédent d'un nombre, de la courbe représentative d'une fonction

d- Exercices de travail de la technique :

Exercice 9 : On considère la fonction f définie sur IR par f(x) = (- x + 1)(2x – 3)

1. Calculer l'image par f de 0, puis de 2/3, et enfin de $\sqrt{3}$.
2. Quels sont les antécédents de 0 par f ?

Exercice 10 : Voici la courbe d'une fonction f.



1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer l'image par f de 0, de 3, de 2 et de -1.
3. Les nombres 4 , 0 , et -2 ont-ils des antécédents ?
4. Trouver un nombre qui n'a pas d'antécédent.
5. Résoudre les équations f(x) = - 1 et f(x) = 0.

Exercice 11 : On appelle f la fonction définie sur] – ∞ ; + ∞ [par : f (x) = $x^2 + 3x - 4$ (forme A)

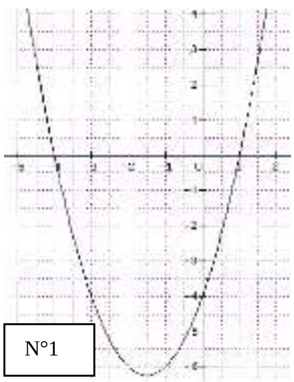
1. Vérifier que, pour tout nombre x ∈] – ∞ ; + ∞ [, l'expression f (x) peut s'écrire sous deux autres formes :

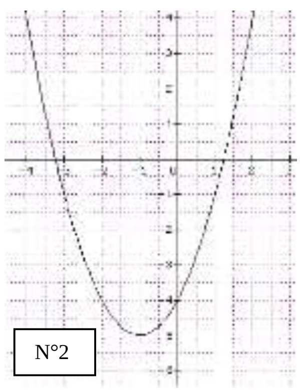
$\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$ (forme B) ou (x + 4) (x – 1) (forme C)

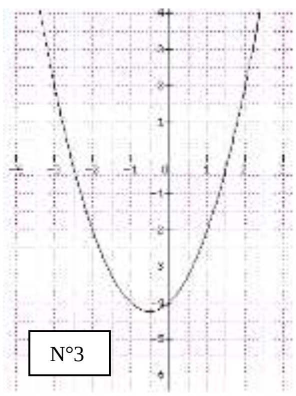
2. En utilisant à chaque fois une des formes A, B ou C, au choix, répondre à ces questions :

a) Calculer f ($-\dfrac{3}{2}$) b) Résoudre l'équation f (x) = - 4. c) La fonction f admet-elle un extremum ?

3. L'une des trois courbes suivantes est la courbe C_f . Laquelle ? Justifier.







Suite à cette pratique initiée depuis 2005, voici quelques-unes de nos conclusions :

L'organisation par parcours permet d'étudier une question digne d'intérêt sur un temps long, balisé par des études à l'issue desquelles les élèves doivent comprendre quelles techniques seront travaillées. Un argument en faveur de la longueur des PER est la cohérence pour traiter complètement une question... même s'il n'est pas toujours aisé de traiter révisions, gammes et points techniques, sans perdre de vue le parcours.
Notons que cette façon de faire n'a plus d'impact négatif sur la gestion temporelle du programme contrairement aux errements du début de recherche.

Cette organisation permet également de voir que les techniques (ici : graphiques, formules, étude formelle) ne se substituent pas les unes aux autres mais que leur domaine de validité est différent.
Est-ce un moyen d'évaluer la pertinence de notre travail à l'heure des compétences ?… D'autant que nous travaillons sur des tâches complexes (comparer, optimiser,…) voire parfois en interdisciplinarité.

Les sentiments assez unanimes des enseignants ayant expérimenté : la recherche écologique permet d'entrevoir des ouvertures interdisciplinaires et de montrer que les mathématiques ne sont pas : une discipline coupée de toute réalité ; qu'un outil de réussite scolaire. C'est une découverte pour un certain nombre d'enseignants ayant participé à la recherche !

Aucun ne souhaite retourner en arrière : enseigner une notion sans présenter son sens leur paraît impensable.

Les élèves ont parfois été déboussolés par ce type d'enseignement écologiquement minoritaire… mais de moins en moins car nous gagnons en cohérence ! Cependant, motiver les connaissances n'est pas nécessairement motiver les élèves…même si "l'accueil" fait en classe est de plus en plus encourageant.
Si les élèves comprennent nos motifs, leur ambition (et celle de leurs parents) est la réussite scolaire…

Nous avons, nous enseignants, davantage d'assurance pour justifier notre pratique professionnelle…mais pas encore au point d infléchir les programmes, dont la succession nous cache la recherche des raisons d'être de l'enseignement des notions. La multiplicité des notions enseignées, le saupoudrage des notions sur les niveaux ne facilitent pas notre tâche dans ce travail.

Nous avons engagé un travail long et difficile mais vital nous semble-t-il et qui concerne toute la profession… si toutefois celle-ci et notamment les professeurs de mathématiques ont conscience du besoin vital de sortir de l'insignifiance de l'enseignement faisant courir à leur discipline un risque de dépérissement du secondaire.[39]

[39] Thiénard Jean-Claude, « Redonner du sens au mathématiques enseignées », Repères n°66

Evolution d'un scénario dans l'expérience e-CoLab

Michèle Artigue, IREM Paris 7
Françoise Hérault, IREM Paris 7
Dominique Baroux-Raymond, IREM Paris 7

Résumé : Cette communication vise à montrer l'évolution d'un scénario d'une ressource dans le cadre d'une expérimentation d'un laboratoire mathématique dans des classes de seconde en France. Nous présenterons le contexte de l'expérimentation, et montrerons sur un exemple, comment l'observation des comportements des élèves et les interactions entre professeurs et chercheurs peuvent permettre une évolution de la situation didactique en fonction d'objectifs d'enseignement.
Mots-clés : dimension technologique **-** genèse instrumentale - travail autonome - institutionnalisation - ressource - fonctions - problème ouvert.

Introduction

L'équipe de l'INRP e-CoLab créée en 2006 (Expérimentation collaborative de laboratoires mathématiques), travaille en collaboration avec les IREM de Lyon, de Montpellier et de Paris 7 et la société Texas Instruments, et interagit avec une expérimentation du même type pilotée par l'Inspection Générale de l'Education Nationale. Elle étudie les potentialités offertes à l'enseignement et l'apprentissage par un nouvel outil, "laboratoire mathématique" intégrant des applications en interrelation, étudie les stratégies à mettre en œuvre pour actualiser ces potentialités dans le contexte de l'enseignement français du lycée, conçoit des ressources pédagogiques permettant de supporter ces stratégies, et élabore un dispositif permettant de mutualiser ces ressources. L'environnement technologique utilisé dans cette expérimentation est le logiciel TI-*n*Spire. La calculatrice est conçue comme l'unité nomade de ce logiciel qui peut être installé sur n'importe quel poste informatique.
Les hypothèses du travail réalisé dans cette équipe reposent sur le fait que la viabilité d'un nouvel environnement informatisé d'apprentissage dépend pour une large part des ressources pédagogiques utilisées et de l'organisation didactique mise en place dans la classe. La conception de ces ressources et de ces organisations didactiques peut difficilement être réalisée par un enseignant isolé : à une nouvelle organisation du travail dans la classe doit correspondre une nouvelle organisation du travail entre les professeurs. Dans cette organisation, la mutualisation joue un rôle clé.

1. Les cadres théoriques

Le travail réalisé est un prolongement des expérimentations antérieures (DERIVE (Aldon, 1995), calculatrices graphiques (Trouche, 1994), calculatrices symboliques (Guin, 1999), (Guin, Trouche, 2002), tableurs (Haspekian, 2005), analyse de ressources en ligne, conception de dispositif de formation à distance (Guin, Joab, Trouche, 2006), (Guin et Trouche, 2008)).
L'équipe e-CoLab s'appuie sur les recherches citées et interroge le cadre théorique de la genèse instrumentale (Rabardel, 1995) mais aussi les récents travaux de Trouche et Gueudet (Gueudet, Trouche, 2008) sur la documentation du professeur et les analogies avec la genèse instrumentale d'une genèse documentaire dans laquelle les ressources disponibles se transforment progressivement en document pour l'enseignant dans un processus d'instrumentation où le professeur s'empare des ressources et d'instrumentalisation où le professeur transforme, fait évoluer la ressource en fonction de ses objectifs propres mais aussi en fonction des réactions des élèves et des observations de leurs comportements.
Il s'est agi :

- de comparer le nouvel environnement avec les environnements antérieurs : quelles sont les nouvelles possibilités, les nouvelles contraintes, les effets sur les apprentissages, en quoi cet environnement répond-il aux problèmes soulevés lors des précédentes expérimentations ? Quelles suggestions d'amélioration ?

- de tester les ressources existantes dans ce nouvel environnement, de voir les adaptations et enrichissements nécessaires et possibles ;

- de penser la conception de nouvelles ressources non plus seulement au niveau d'organisations mathématiques ponctuelles mais au niveau d'organisations mathématiques plus globales, en prenant en compte les genèses instrumentales (les processus par lesquels les calculatrices deviendront des instruments du travail mathématiques des élèves) dans la durée ;

- de tester la viabilité des dispositifs de conception de ressources numériques (type SFoDEM) dans ce nouveau contexte.

Dans ce contexte, nous souhaitons mettre en avant dans cette communication un des aspects importants du travail réalisé : l'enrichissement d'une ressource à partir des observations de classe et des interactions entre professeurs et chercheurs. Nous exposerons le cadre de la mise en œuvre d'une ingénierie dont l'objectif est in fine la construction par les élèves du concept de fonctions. Cette ingénierie s'appuie sur les différents registres de représentations qui sont précisément présents sur la calculatrice étudiée.
Comment et pourquoi deux scénarios ont été construits sur le même problème ? Dans les paragraphes suivants, après avoir présenté le contexte de cette expérimentation, nous détaillerons les scénarios et nous montrerons leur impact respectif sur l'activité mathématique et instrumentale des élèves.

2. Deux scénarios didactiques d'un même problème

2.1. Le cadre de travail de l'équipe de Paris

Chaque équipe du groupe e-CoLab a des préoccupations particulières en lien avec le projet général qui se concrétisent dans des contributions spécifiques pour le groupe.
Consciente de la complexité de ce nouvel environnement technologique, l'équipe de Paris (composée de 2 enseignantes et d'une chercheuse) s'attache à combiner de manière efficace les processus d'instrumentalisation et le développement des connaissances mathématiques. Elle a aussi le souci de faire bénéficier les élèves des nouvelles potentialités offertes par la calculatrice TI-*n*Spire, particulièrement de ce qui est une des spécificités de ce logiciel : l'interaction entre les différentes applications.
Les professeures et chercheuse de ce groupe sont sensibles au partage possible des responsabilités entre enseignants et élèves. Elles font l'hypothèse qu'un des bénéfices de ce nouvel outil pourrait être l'accroissement de l'autonomie des élèves. Elles explorent les possibilités qui permettraient de réaliser ce projet dans un contexte réaliste. En particulier, elles ont conscience que dans un problème trop ouvert les élèves risquent de « sécher », ce qui amène le professeur à donner trop d'informations : les apprentissages visés sont ainsi minimisés voire supprimés. On aboutit au même résultat avec un problème trop guidé. Elles accordent ainsi de l'importance à l'analyse a priori qui permet d'anticiper et d'identifier les variables didactiques sur lesquelles on peut jouer. Enfin, les membres de l'équipe sont attentives à la place et à la nature de l'institutionnalisation. Elles ont le souci d'élaborer des ressources qui accorderaient une part importante à des discussions de classe orchestrées par l'enseignant. (Du point de vue théorique on peut de référer aux travaux menés par les chercheurs italiens Mariotti et Bartolini Russi et à ceux de Batkhin).

C’est dans ce contexte que prit naissance un scénario composé d’une séance de travail suivie d’un bilan. Ce scénario devait être testé dans deux classes de seconde de deux lycées différents de la région parisienne en février et mars 2008. Le scénario prévoyait d’exploiter le travail des élèves dans le but de ne pas réduire le bilan à de courtes institutionnalisations définies à l’avance. Les données recueillies devaient permettre ainsi d’identifier des questions émergeant du travail autonome des élèves. Une analyse du rôle du professeur en lien avec le degré d’autonomie des élèves était prévue. Dans ce cadre, le professeur avait la possibilité d’accorder l’importance nécessaire à l’interaction entre les dimensions mathématiques et instrumentales au cours de ces bilans : ce qui n’est pas une démarche encore spontanée chez les enseignants.
Les analyses du travail des élèves étant liées à la nature des moyens d’observation, il s’avère nécessaire de décrire les choix faits par les membres de cette équipe concernant la méthodologie des recueils de données. Deux observateurs étaient présents pour chaque séance (une professeure, une chercheuse) dont le rôle était d’observer un groupe de quatre élèves et de rédiger l’ensemble de ses observations. Les dialogues des élèves étaient enregistrés ainsi que les interventions de la professeure pendant la séance et lors du bilan. Chaque groupe de quatre élèves devait rédiger une narration de recherche pendant le cours sur le sujet proposé. Les fichiers tns (travail sur la calculatrice ou sur l’ordinateur) des élèves ont été recueillis de même que leurs productions écrites détaillant leurs recherches. Enfin, un logiciel a permis d’enregistrer en temps réel tout ce qui apparaît sur l’ordinateur utilisé par le groupe d’élèves observé travaillant avec le logiciel TI-*n*Spire CAS. C’est la première fois que cette équipe de l’IREM de Paris utilisait cette technologie. Elle a permis de dévoiler des comportements d’élèves ordinairement peu accessibles à l’enseignant.

2.2. Le premier scénario

Les membres de cette équipe font l’hypothèse que les potentialités offertes par la calculatrice pourraient aider les élèves dans l’apprentissage des fonctions.

Pour comprendre un objet mathématique, les élèves doivent maîtriser cet objet dans plusieurs registres de représentation sémiotique (Duval, 1996) et ces registres doivent se coordonner. Comprendre le concept de fonction, c'est la capacité de la reconnaître dans des registres différents (graphiques, numériques, schématique,…). La conversion d'une représentation sémiotique à une autre doit permettre aux élèves de se construire le concept de fonction. La calculatrice en permettant relativement facilement de passer d’un registre à l’autre et en faisant communiquer entre elles les applications a précisément été vue comme un outil devant faciliter ces conversions.

L’activité se situe à la fin du cours « généralités sur les fonctions » en seconde et vers le milieu de l’année scolaire. Les élèves ont donc une certaine familiarité avec la calculatrice et l’objectif général de l’activité est de faire un bilan mathématique et instrumental des connaissances des élèves. Pour l’activité proposée les possibilités offertes par la calculatrice sont les suivantes :

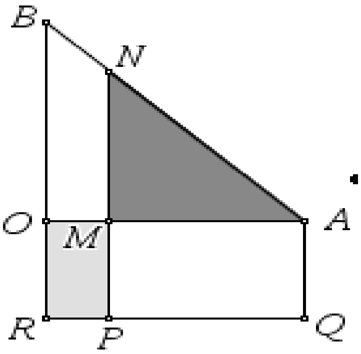
- Exploitation de l’application géométrique
- Exploitation de l’application avec tableur
- Exploitation de l’application graphique
- Exploitation de l’application calcul formel
- Exploitation de l’interaction géométrie-tableur. Cette dernière possibilité n’a pas été exploitée.

Les élèves travaillent en groupe de quatre pendant deux heures. On leur distribue une fiche (voir annexe 1) sur laquelle le problème suivant est présenté.

Le triangle OAB est rectangle et isocèle en O avec OA = 4 cm.
Le quadrilatère OAQR est un rectangle avec OR = 2 cm.
Par un point M du segment [OA], on a tracé une parallèle à (OB) qui coupe [AB] en N et [RQ] en P.
L'objectif de cet exercice est :

- d'étudier comment varient **les aires du rectangle et du triangle quand la position de M varie.**

- de déterminer la position à donner **au point M pour que l'aire du rectangle OMPR et l'aire du triangle MNA soient égales.**



Pour cela, on désigne par ***x* la distance OM**
on appelle ***A(x)* l'aire du rectangle OMPR**
***B(x)* l'aire du triangle MNA**

A la suite de cette présentation, on propose aux élèves une résolution du problème à travers quatre explorations successives avec la calculatrice dont l'ordre est imposé : géométrique, tableur, graphique, algébrique. A la fin des explorations tableur, graphique et algébrique, une question est posée concernant la cohérence entre le résultat trouvé et le précédent. La production écrite des élèves devait comporter la description détaillée de leurs démarches ainsi que la résolution algébrique papier-crayon d'une équation. Ce qui était attendu est bien précisé dans les questions rédigées sur la feuille. Il était prévu de donner oralement les aides instrumentales nécessaires. On s'attendait à ce qu'elles fussent en général assez légères sauf pour le tableur, pour l'utilisation duquel des difficultés d'instrumentation étaient anticipées.

L'exploration géométrique des élèves s'est faite à l'aide d'un fichier tns qui a été envoyé sur chaque calculatrice. Ils ont reçu une image dynamique de la configuration ci-dessus. Les élèves pouvaient faire bouger le point M. Les valeurs affichées de *x*, *A(x)* et *B(x)* variaient suivant la position de M.

2.3. Le deuxième scénario

2.3.1. Pourquoi ?

Ce scénario, tel qu'il vient d'être décrit, s'est déroulé dans une des deux classes. Une contradiction flagrante entre les choix faits et les objectifs est apparue lorsqu'il s'est agi de préparer le bilan de la séance, les élèves ayant traité chaque exploration séparément sans établir de lien entre les différentes questions. En particulier, ils n'ont pas perçu les problèmes de cohérence soulevés par les interactions entre les différentes applications. Cette question de la cohérence et du lien entre les applications a été prise en charge par l'enseignante lors du bilan de l'activité.

D'où l'idée de construire un autre scénario tel que la responsabilité de cette question revienne aux élèves, dans un souci de développer l'autonomie des élèves à travers l'utilisation de cette calculatrice.

2.3.2. Description

L'hypothèse est alors faite qu'un problème ouvert avec seulement une question pourrait être une réponse possible. Une seule question est posée, sans indications (celle de l'existence de la position du point M assurant l'égalité des aires). La question concernant la variation des aires est supprimée. Elle avait été posée afin de renforcer une vision fonctionnelle et non seulement algébrique (au sens de la résolution d'une équation) du problème. En outre, la prise de conscience

de ces variations différentes devait faciliter l'exploration avec le tableur, mais aucun élève n'a établi le lien.
Les étapes du scénario sont précisées de la manière suivante :

- lister collectivement et oralement les applications de la calculatrice qui peuvent être utilisées ;

- afin d'éviter que le professeur prenne rapidement les responsabilités mathématiques ou instrumentales dues à une tâche trop ouverte, trois consignes sont ajoutées :

  - l'utilisation d'au moins deux applications de la calculatrice est imposée

  - les élèves doivent dire si leur solution est exacte ou approchée

  - ils doivent dire aussi si les résultats obtenus à travers les différentes explorations sont cohérents ou pas.

- Par ailleurs, des erreurs de compréhension sur certains mots ayant été observées lors du premier scénario, ainsi que des imprécisions dans la formulation de la question sur la cohérence[40], le professeur précise en début de séance la différence entre résultat exact, résultat approché, résultat précis et il explique aussi le mot cohérent.

- Enfin, pour aider les élèves si nécessaire, des fiches d'aides instrumentales (concernant l'utilisation du tableur) et d'aides mathématiques (concernant la résolution d'équation papier-crayon) ont été préparées et sont prévues pour être accessibles à la demande selon les besoins.

- Finalement, il est demandé aux élèves un travail écrit détaillant leur recherche et la démonstration algébrique papier-crayon de leur réponse.

3. Comparaison entre les 2 scénarios

3.1. Ce qui est commun

3.1.1. Application géométrique

C'est la première exploration entreprise par les élèves, fait non surprenant car c'est l'exploration graphique qui est proposée aux élèves sur le fichier qui leur est distribué.
Ne pouvant obtenir sur le graphique l'égalité entre les deux aires les élèves ont la conviction que la solution donnée par la calculatrice n'est pas exacte.

3.1.2. Application graphique

Les coordonnées du ou des points d'intersection s'affichant sur l'écran de la calculatrice, les élèves sont sûrs que le nombre décimal désignant l'abscisse est une solution exacte au problème. Les élèves gèrent assez correctement dans l'ensemble l'apparition du deuxième point d'intersection.

[40] A la question « Peut-on utiliser ces représentations (graphiques) ou le tableur pour répondre à la question posée? » trois groupes sur neuf ont répondu « non ». Ces élèves ont alors ignoré la question suivante « Si oui, votre réponse est-elle cohérente avec la question donnée au A) ou aux paragraphes précédents ? »

3.1.3. Tableur

Des difficultés mathématiques et instrumentales apparaissent dans les deux scénarios. Entre autres, les élèves ne savent pas écarter les cases pour mieux voir les nombres, ils ont des difficultés à gérer un pas petit. Dans les deux scénarios l'utilisation du tableur a semblé artificielle aux élèves.

3.1.4. Calcul formel

Les élèves n'ont aucun problème dans l'utilisation de cette application. On peut observer l'émergence de liens intéressants avec valeurs approchées et exactes, ainsi qu'avec la résolution papier-crayon.

3.2. Ce qui est différent

Dans le deuxième scénario, l'ordre des applications n'étant pas imposée, on observe que la priorité est donnée à l'exploration graphique et au calcul formel (après l'exploration géométrique). Les élèves ont peu utilisé le tableur, dont l'utilisation a souvent été ajoutée à la demande du professeur.

3.2.1. Ce qu'on gagne avec le second scénario

Les élèves naviguent spontanément entre les différentes applications. D'après les observations il semblerait que cela soit dû à la recherche suscitée par la question sur la cohérence des réponses. Les élèves prennent en charge avec succès les questions de la cohérence et de « exact-approché ».
Les élèves se créent de nouvelles tâches avec le deuxième scénario.
On peut observer une appropriation plus importante de l'outil qu'ils utilisent.
Les élèves explorent moins d'applications mais introduisent plus de sens dans celle qu'ils choisissent et l'explorent plus en profondeur.
Tous les groupes ont terminé le problème dans le temps imparti. Seules quelques résolutions papier-crayon n'ont pas abouti. Lors du premier scénario, les élèves avaient passé beaucoup de temps sur la question de la variation des aires (souvent très accompagnés par l'enseignant), au détriment des autres explorations. L'exploration sur le tableur a aussi été très gourmande en temps compte tenu de la difficulté rencontrée pour trouver un encadrement de la solution et aussi du raffinement demandé pour cet encadrement.

3.2.2. Ce qu'on perd avec le second scénario.

Aucune approche du continu n'a été perceptible alors qu'un groupe a entrevu le théorème des valeurs intermédiaires dans le premier scénario. Cette appréhension du continu a été permise par ces deux questions successives du premier énoncé : « comment varient les deux aires ? » et « peut-on obtenir l'égalité des deux aires ? », questions posées dans l'exploration géométrique. Voici la réponse à la deuxième question qu'on peut lire dans une narration de recherche. « Oui car l'aire de MORP peut être inférieure à celle de MAN mais aussi peut être supérieure. Il est donc possible qu'elles soient égales. »

Conclusion

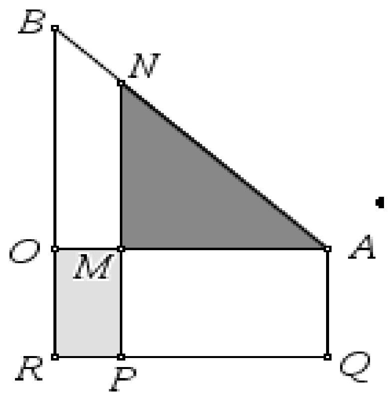
L'introduction de la dimension technologique amène à s'interroger d'une part sur son impact dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et d'autre part sur son impact dans la pratique des enseignants.
Dans cet article, la relation de la comparaison des activités des élèves pourrait permettre de constater à quel point l'introduction de cette dimension technologique affecte toutes les tâches des élèves. De plus certaines tâches ne peuvent exister qu'au travers de cette dimension.

La description du premier scénario et celle de la mise en œuvre de la préparation d'une séance de bilan collective pourraient être susceptibles d'apporter quelques éléments de réponse à de nouvelles questions qui se posent aux enseignants: comment coordonner intégration instrumentale et connaissance mathématique ? Comment dans ce nouvel environnement technologique mesurer l'efficacité de leurs pratiques en relation avec leurs objectifs?
Cette expérience a permis de décrire un processus d'évolution d'une ressource. D'après les comparaisons faites il semblerait que le deuxième corresponde mieux aux objectifs d'enseignement des professeurs.
Ce travail sur les ressources et leur évolution a permis d'élaborer et de tester un scénario de formation d'enseignants. Il a été présenté dans un atelier lors des journées de la CORFEM en juin 2008. Les apports concernant cette analyse sur l'évolution d'un scénario et les potentialités de ce logiciel qui donne accès au travail effectif (souvent caché) des élèves, ont semblé riches pour ces formateurs en IUFM. Trop riches selon eux pour être réinvestis en formation initiale. On peut donc imaginer un transfert possible à une formation continue.

Annexes

1) Annexe 1 : fiche élève du premier scénario

Le triangle OAB est rectangle et isocèle en O avec OA = 4 cm.
Le quadrilatère OAQR est un rectangle avec OR = 2 cm.
Par un point M du segment [OA], on a tracé une parallèle à (OB) qui coupe [AB] en N et [RQ] en P.



L'objectif de cet exercice est :

- d'étudier comment varient **les aires du rectangle et du triangle quand la position de M varie.**
- de déterminer la position à donner **au point M pour que l'aire du rectangle OMPR et l'aire du triangle MNA soient égales .**

Pour cela, on désigne par ***x*** **la distance OM**
on appelle ***A(x)*** **l'aire du rectangle OMPR**
B(x) **l'aire du triangle MNA**

A) **Exploration géométrique**

Utilisation du classeur « airesegalesLimeil » de la TI-nSpire

- Que se passe-t-il quand le point M se déplace ?
- Comment varient les deux aires ?
- Peut-on obtenir l'égalité des deux aires ?
- **Peut-on utiliser cette exploration pour répondre à la question posée ?**
- Pour quelle(s) valeur(s) de x les deux aires affichées sont-elles le plus proches ?

B) **Expression algébrique**

1) Exprimer à l'aide de x les distances MA et MN.

2) En déduire une expression de *A(x)* et *B(x)*.

C) <u>Exploration numérique avec le tableur</u>

Ouvrir une page « Tableur $ listes »

En colonne A, entrez la plus petite valeur de x, sa plus grande valeur et le pas.
En colonne B, affichez les valeurs de « x ».
En colonne C, affichez les valeurs de A(x).
En colonne D, affichez les valeurs de B(x).
En colonne E, affichez la différence B(x) – A(x).

1) Peut-on utiliser le tableur pour répondre à la question posée ?
2) Si oui, votre réponse est-elle cohérente avec la réponse donnée au A)
3) Comment, à l'aide du tableau de nombres, pouvez-vous trouver un encadrement à 0,1 près de la solution ?
4) Recopiez le contenu des cellules du tableur permettant d'argumenter cette réponse :

OM : *x*	*A(x)*	*B(x)*

5) Reprendre les questions 3) et 4) pour un encadrement à 0,01 près de la solution.

OM : x	*A(x)*	*B(x)*

D) <u>Exploration graphique</u>

Ouvrir une page « Graphiques $ géométrie » et affichez, dans une fenêtre convenablement choisie, les représentations de A et B. (A : xErreur !A(x) et B : xErreur !B(x)).

1) Peut-on utiliser ces représentations pour répondre à la question posée ?
2) Si oui, votre réponse est-elle cohérente avec les réponses données aux paragraphes précédents ?

E) <u>Résolution algébrique</u>

1) Peut-on utiliser la TI-nSpire pour résoudre algébriquement le problème posé ?
2) Qu'obtenez-vous ? Votre réponse est-elle cohérente avec les résultats précédents ?

<u>F) Résolution « papier-crayon »</u>

1) Donnez la ou les solutions exactes : détaillez les calculs. (*Indication : développer $(x – 6)^2$ - 20)*
2) Votre réponse est-elle cohérente avec les résultats précédents ?

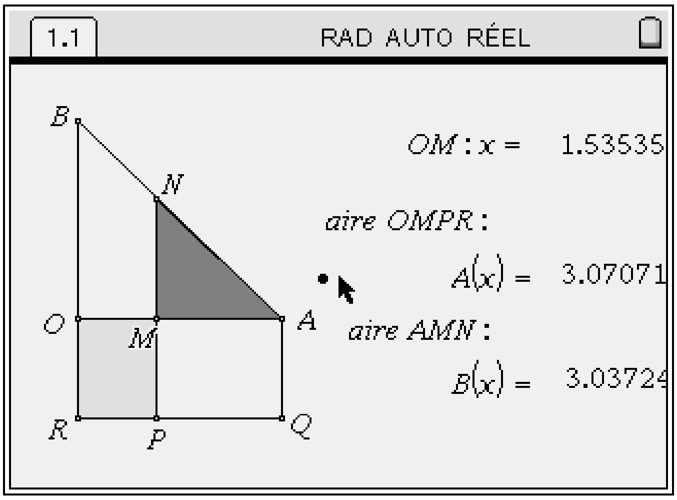
<u>F) Prolongement</u>

1) Dans la page « Graphiques $ géométrie » précédente, représenter graphiquement la fonction f_3 telle que :

$f_3(x) = A(x) – B(x)$.

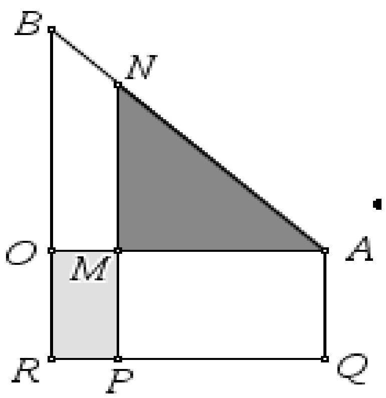
2) Où pouvez-vous lire, sur le graphique, la réponse à la question posée ?

2) Annexe 2 : fichier tns du premier scénario



3) Annexe 3 : fiche élève du deuxième scénario

Le triangle OAB est rectangle et isocèle en O avec OA = 4 cm.
Le quadrilatère OAQR est un rectangle avec OR = 2 cm.
Par un point M du segment [OA], on a tracé une parallèle à (OB) qui coupe [AB] en N et [RQ] en P.
On désigne par ***x* la distance OM et** on appelle ***A(x)* l'aire du rectangle OMPR et *B(x)* l'aire du triangle MNA**



<u>Question</u> : Existe-t-il une position du point M telle que l'aire du rectangle OMPR et l'aire du triangle MNA soient égales ?
Si oui, pouvez-vous déterminer <u>précisément</u> ou <u>exactement</u> cette position?
Rappel des applications de la TI n-spire que vous pouvez utiliser :

- Application « graphique et géométrie » qui permet l'exploration géométrique et graphique
- Application « Tableur et liste » qui permet l'exploration numérique avec le tableur.
- Application « Calculs » qui permet l'utilisation du calcul formel

Première partie

Il vous est demandé d'utiliser **<u>au moins deux</u>** de ces applications pour répondre à la question posée.

- Charger le dossier « airesegalesprevert » sur votre calculatrice
- Par groupe, sur une copie double, indiquez avec précision quelles applications vous utilisez, quelle démarche vous avez, quelles questions vous vous posez et ce que vous mettez en œuvre pour y répondre.
- Indiquez également, en détaillant votre réponse, si vos solutions obtenues dans des applications différentes sont cohérentes.

Deuxième partie

Répondez à la question posée en « papier-crayon » et montrez la cohérence de votre réponse avec la première partie.

Bibliographie

ALDON G. (1995), *Une voiture à la dérive,* Repères-IREM, 21:27–44.

DUVAL R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16-3.

GUEUDET G & TROUCHE L. (2008), Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique*, 2-3:7–33.

GUIN D. (1999), Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques. *In Actes du colloque francophone européen de La Grande-Motte*.

GUIN D. & TROUCHE L. (2002), *Calculatrices symboliques : transformer un outil en instrument du travail mathématique, un problème didactique*. La pensée Sauvage.

GUIN D. & TROUCHE L. (2008), Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SFoDEM 2008. *Coédition EducMath et Repères-IREM*, 72:5–24.

EducMath : http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/dossier_mutualisation/ecolab.pdf.

HASPEKIAN M. (2005), *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs*. Thèse de doctorat, Paris VII. http:://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00011388.

RABARDEL P. (1995), *L'homme et les outils contemporains*. A. Colin.

TROUCHE L. (1994), *Calculatrices graphiques, la grande illusion,* Repères-IREM, 20:39–55.

Fabriquer et faire vivre une organisation mathématique régionale

Michèle Artaud et Ghilaine Menotti
IUFM d'Aix-Marseille & IUFM d'Alsace

Résumé : Dans l'enseignement existant actuellement, le secteur des fonctions en classe de seconde apparaît scindé en plusieurs thèmes : le thème « Généralités sur les fonctions » est commun à la quasi totalité des découpages observés, tandis que le reste du programme est scindé en deux à quatre thèmes selon que l'on incluera ou pas les fonctions trigonométriques et affines dans les « Fonctions usuelles » ou « Fonctions de référence », ou encore que l'on traitera à part le thème « équations/inéquations ». Ce découpage produit des organisations mathématiques (OM) autour des fonctions relativement fragmentées, dont les avatars les plus repérables sont le fait que le type de tâches « étudier une fonction » n'apparaît pas nettement identifié dans ces OM et que le travail autour du thème équations/inéquations n'est pas conforme au programme de la classe.

Nous proposons dans un premier temps de développer ces points à partir d'exemples issus du travail effectué en PLC2 à l'IUFM d'Aix-Marseille ; puis dans un second temps d'examiner ce que suppose la fabrication d'une organisation mathématique au niveau du secteur des fonctions en seconde, et notamment sur quelle(s) technique(s) d'analyse didactique elle se fonde.

Un des points cruciaux des difficultés que nous voulons mettre en évidence à l'égard de l'enseignement du secteur des fonctions en classe de seconde trouve son origine dans le changement de programme de cette classe qui a eu lieu en 1999 et qui a vu la disparition du secteur algébrique et son intégration dans le secteur des fonctions. On rompt ainsi un peu subrepticement avec une tradition solidement ancrée, sans que des raisons de cette rupture soient avancées ou encore que l'on détaille suffisamment les organisations mathématiques[1], en un certain sens inédites, qu'il s'agit désormais de faire vivre.

En effet, le programme publié en août 1999 comporte trois domaines d'étude : *Calcul et fonctions*, *Statistique* et *Géométrie*. L'algébrique se trouve alors inséré dans le secteur des fonctions, comme en témoigne l'extrait suivant (MEN 1999) :

> Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. *En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions*. (C'est nous qui soulignons.)

Le programme antérieur, qui datait de l'année 1990, était par contraste structuré en quatre domaines : *Statistique*, *Géométrie*, *Fonctions* et *Problèmes numériques et algébriques*. On notera que le lien avec les fonctions était déjà souligné dans l'en-tête consacré aux problèmes numériques et algébriques que nous reproduisons ci-dessous (MEN 1990) :

> *La résolution de problèmes*, issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante *constitue l'objectif fondamental* de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats.
>
> Dans cette perspective, le programme vise à compléter et à mobiliser les capacités acquises au collège ; les travaux s'articulent suivant deux axes :
>
> – Consolider la *pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique*, en relation étroite avec l'étude des fonctions.

– Poursuivre l'étude des *équations et inéquations à une inconnue* et des *systèmes d'équations linéaires*.

Dans le cadre de ces travaux, un objectif important est d'amener les élèves à une *meilleure maîtrise de l'emploi de variables*, à travers l'étude d'exemples où elles expriment des quantités dont la signification est clairement perçue ; les travaux se développeront dans les directions suivantes : substitution de nombres à des variables (utilisation d'expressions littérales pour des travaux numériques, tableaux de valeurs de fonctions…), mise en équation de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide de fonctions.

Le programme publié en 1999 met donc plus nettement en avant le lien entre les fonctions et le calcul algébrique en supprimant le domaine *Problèmes numériques et algébriques* et en intégrant l'algèbre dans le secteur des fonctions, plus spécialement dans les deux derniers thèmes d'étude du programme (MEN 2001) :

Fonctions et formules algébriques.	Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés). Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule. Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…). Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi.	Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner et de démontrer. On évitera une activité trop mécanique et on s'efforcera de développer, avec des expressions littérales faisant intervenir une seule lettre, deux plus rarement, des stratégies s'appuyant sur l'observation, l'anticipation et l'intelligence du calcul. On multipliera les approches et on explicitera quelques procédures simples permettant d'infirmer ou de confirmer une formule. À l'occasion de certains travaux sur tableur, on distinguera la recherche et l'observation d'une loi empirique de la démonstration d'une formule. Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l'information donnée par la forme d'une expression et motiveront la recherche d'une écriture adaptée.

Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type : $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$; …	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problème conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

Pour insister sur ce point, le document d'accompagnement du programme, disponible au deuxième trimestre de l'année 2000, explicitera ainsi les attentes à l'égard de l'étude des équations et des inéquations sous la rubrique « Mise en équation ; résolution algébrique et graphique d'équations et d'inéquations », en soulignant l'intérêt du recours à la représentation graphique et à la calculatrice graphique (MEN 2000) :

Un élève ayant à résoudre une équation comme $(x - 2)^2 = 9$ perçoit assez facilement que l'égalité est bien vérifiée pour $x = 5$ et il se contente alors de donner cette seule solution ; il a même souvent quelques réticences à mettre en œuvre toute technique permettant d'aboutir à l'ensemble des solutions. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto (x - 2)^2$ qui met bien en évidence l'existence de deux solutions incitera à dépasser le premier raisonnement. Pour la résolution de $x^2 + 2x + 3 = 0$, on peut là aussi s'appuyer sur la représentation graphique qui montre bien l'absence de solution, confirmée ensuite par $(x + 1)^2 + 2 = 0$; il peut être intéressant aussi de laisser un élève développer l'expression, tenter de la factoriser, proposer comme solution $x = -3 / (x + 2)$ et le faire réfléchir sur sa proposition. De même, une calculatrice graphique montre facilement que les équations $x (x + 1) = (2x + 3) (x + 1)$ et $x = 2x + 3$ n'ont pas les mêmes solutions.

Un autre exemple est l'utilisation de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2 + 3x - 10$ pour conjecturer que 2 est une solution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$; le calcul permet de vérifier facilement que c'est bien le cas ; il reste à anticiper un peu sur la factorisation et à vérifier que $(x - 2) (x + 5)$ est bien une écriture possible pour l'expression $x^2 + 3x - 10$ pour aboutir à la résolution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Les auteurs concluent : « Ces quelques exemples montrent comment le point de vue des fonctions peut enrichir la réflexion sur la résolution d'équations. Ces remarques s'appliquent encore plus à la résolution d'inéquations puisque l'ensemble des solutions ne se réduit presque jamais à une seule valeur. »

Le style de technique qu'il s'agit de pousser en avant doit donc articuler travail algébrique et travail fonctionnel, les fonctions jouant ici le rôle tantôt de *média* en donnant des informations sur les solutions, tantôt de *milieu* en permettant de mettre à l'épreuve le calcul algébrique effectué[2]. Mais, comme en bien des cas, la technique à mettre en place n'est pas véritablement détaillée, et le document d'accompagnement n'est pas davantage explicite sur d'autres thèmes du programme comme par exemple celui des formes algébriques (MEN 2000) :

Les différentes capacités attendues qui sont listées dans ce paragraphe doivent être développées essentiellement en liaison avec les autres rubriques : organisation de calcul, étude des fonctions, résolution d'équations et d'inéquations… L'utilisation d'une calculatrice avec un éditeur d'expression (les calculs ne se font pas au fur et à mesure mais à partir de l'entrée de toute une expression) ou mieux d'un tableur permet une approche quasiment expérimentale des modifications d'écriture possibles et des identités usuelles : comme il est dit dans le § I.8 de ce document, on insistera sur le fait que la calculatrice ou le tableur permettent simplement de vérifier de façon empirique que deux expressions sont égales pour un certain nombre de valeurs prises par la variable (plus rarement par les variables) mais que seul, le calcul algébrique permet d'établir « l'identité » des deux expressions. On exploitera les possibilités des calculatrices pour enrichir la réflexion sur les différentes formes possibles qu'une expression peut prendre et sur les questions auxquelles chacune de ces formes permet de répondre. On n'atteindra une certaine maîtrise du calcul algébrique que si on développe une aptitude à anticiper les effets d'une modification d'écriture. C'est pourquoi on ne séparera pas l'étude des différentes techniques des traitements envisagés.

Cette nouvelle structuration du programme – dont le contenu, on le verra plus loin, s'avère très fonctionnel bien que cette fonctionnalité ne soit que peu lisible – ne facilite pas l'existence du calcul algébrique ni la fabrication de l'organisation mathématique relative aux fonctions dès lors qu'on la considère comme une contrainte.

Voici par exemple des programmations thématiques sur l'année, en vigueur pour l'année scolaire 2007-2008 dans quelques lycées (codées PC ci-dessous pour progression commune) ou classes de seconde (codées PS ci-dessous pour progression de seconde) de l'académie d'Aix-Marseille.

PC1
Nombres et calculs
Statistiques I
Équations et inéquations
Fonctions
Transformations du plan, triangles isométriques et de même forme
Repérage dans le plan, vecteurs
Équations de droites, systèmes d'équations linéaires
Fonctions de référence
Statistique II
Géométrie dans l'espace
Trigonométrie
Ordre et valeur absolue

PS1
Fonctions (généralités)
Géométrie dans l'espace
Les nombres
Triangles isométriques
Équations
Statistique descriptive
Nombres premiers
Fonctions (variations, extrema…)
Triangles semblables
Fonctions affines. Inéquations
Vecteurs
Ordre et valeur absolue
Géométrie dans l'espace (Orthogonalité)
Fonctions de référence
Vecteurs, géométrie analytique
Droites et systèmes

PS2
Les nombres
Configurations planes
Ordre dans **R**
Vecteurs et colinéarité
Fonctions : généralités et lecture graphique
Voir et calculer dans l'espace
Statistiques
Géométrie analytique
Calcul littéral et équations
Triangles isométriques et semblables
Fonctions affines
Équations de droites et systèmes
Inéquations et étude de signe
Démontrer dans l'espace
Fonctions carrée et inverse
Fonctions trigonométriques
Simulation

PC2

Période Nombre de semaines	En analyse	En géométrie
1er trimestre		
Sept. 4 sem.	Fonctions, R, calculatrices, Nombres premiers 1 + 2	Configuration du plan et de l'espace 9

Oct. 3,5 sem	Fonctions linéaires et affines 3	Transformations du plan, triangles isométriques et semblables 10
Toussaint		
Nov 3,5	Équations, inéquations, systèmes, tableaux de signes 5	Transformations du plan, triangles isométriques et semblables 10
2e trimestre		
Déc. 3 DC 1	Statistiques 6	Repérage du plan, vecteurs 11
Noël		
Janv. 3,5	Fonctions de références 4	Repérage du plan, vecteurs 11
Févr. 2	Droites et systèmes 12	Géométrie dans l'espace 8
Vacances d'hiver		
Mars 4,5	Simulations d'expériences aléatoires 7	Orthogonalité, distances dans l'espace 8
3e trimestre		
Avril 1 sem.		
Vacances de printemps		
Avril DC n°2	Fonctions trigonométriques et enroulement 4	Synthèse et compléments
Mai	Thèmes et synthèses	Thèmes et synthèses
Juin		

La plupart d'entre elles utilisent une structuration thématique qui suit globalement l'ordre de présentation du programme sur les fonctions et qui scinde l'étude des fonctions en au moins deux parties, généralités sur les fonctions et fonctions de références, mais qui sépare les thèmes algébriques du travail à leur propos[3], le thème « fonctions et formules algébriques » étant absent des programmations.

On voit apparaître là, nous semble-t-il, un point essentiel des difficultés rencontrées : le manque d'articulation des différents composants de l'organisation mathématique mise en place, en raison notamment d'un manque de « fonctionnalisation » de ces différents composants et d'une vision trop thématique du secteur à étudier.

Voici par exemple l'organisation mathématique qu'un élève-professeur de l'IUFM d'Aix-Marseille avait constituée avant d'aborder le secteur des fonctions[4]. Cette analyse se présente sous la forme d'un fichier Excel comportant 3 feuilles : la première détaille les types de tâches et les techniques de l'OMR (organisation mathématique régionale, correspondant au secteur) selon le programme et les ouvrages pour la classe de seconde ; la deuxième, les raisons d'être de l'OM à étudier ; la troisième, une analyse de l'OM relative aux fonctions qui a dû être étudiée au collège et dont on ne parlera pas ici. On trouvera ci-dessous l'analyse de l'OMR à étudier (pour des raisons pratiques, nous présentons « linéairement » ce qui, dans le fichier proposé, figure en deux colonnes) :

T_1 identifier variable et ensemble de définition (fonction définie par courbe, tableau, formule) ;

τ_1 : courbe: abscisse (x) ; tableau : 1re ligne ou colonne ; formule : variable de la formule (x ou autre) ;

T_{11} : dans quelques rares cas l'ensemble de définition ;

τ_{11} : cas fonction définie par formule: trouver les x pour lesquels on ne peut pas calculer l'image ;
T_2 déterminer l'image d'un nombre (fonction définie par courbe, tableau, formule) ;

τ_2 : courbe : tracer la verticale passant par ce nombre ; tableau : case correspondante au nombre donné ; formule : remplacer la variable par le nombre.
T_3 décrire comportement d'une fonction définie par courbe…

τ_3 : placer des flèches montantes ou descendantes en lisant la courbe de gauche à droite ; lire les abscisses des points extrémaux et de changement de sens ;
T_{31} : avec tableau variation ;

τ_{31} : placer les flèches dans même ordre que celles de la courbe ; ajouter les abscisses puis les ordonnées des points extrémaux et de changement de sens ;
T_{32} : avec vocabulaire adapté ;

τ_{32} : flèches montantes : fonction croissante (id. décroissante) de … à … (abscisses des points)
T_4 dessiner une représentation graphique à partir d'un tableau de variations ;

τ_4 : placer les points extrémaux et de changement de sens ; relier ces points par un trait continu en suivant les flèches
T_{51} : établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \mapsto x^2$;

τ_{51} : démontrer croissance sur $\mathbf{R}_+$ et décroissance sur $\mathbf{R}_-$; tableau de variation; calculer 1 point; savoir que la fonction est paire ;
T_{52} : établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \mapsto 1/x$;

τ_{52} : démontrer décroissance sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$; calculer un point ; savoir que la fonction est impaire ;
T_6 connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$;

τ_6 : connaître la représentation graphique sur $[0 ; 2\pi]$ (savoir calculer les points d'abscisse:0 ; $\pi/2$; π ; $3\pi/2$; 2π et connaître allure) et tracer par périodicité.
T_7 caractériser les fonctions affines par l'accroissement de la fonction est proportionnel à accroissement de la variable
T_8 reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de 2 carrés) ;
T_9 identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ (fonction donnée par une formule) ;
T_{10} reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la plus adaptée (donc savoir anticiper les effets d'une modification d'écriture) : réduite, factorisée; lier l'étude des différentes techniques et traitements envisagés ;
T_{11} modifier, développer, réduire une expression selon l'objectif poursuivi ;
mise en équation ?
T_{12} résoudre une équation ou inéquation se ramenant au 1er degré ;
T_{13} utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction ;
T_{14} résoudre graphiquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

On notera d'abord que l'OM était en cours de constitution, ce qui peut expliquer par exemple l'absence de l'environnement technologico-théorique, mais que cela donne une bonne idée des aspects problématiques même quand le travail a l'ambition d'être mené au niveau du secteur. On voit en effet apparaître, au delà des quelques maladresses d'analyse du débutant, une succession de types de tâches et de techniques associées qui reflète la structuration du programme sans que leur fonctionnalité soit recherchée. On aboutit alors à une juxtaposition d'organisations mathématiques ponctuelles (dont les blocs technologico-théoriques resteraient à élucider), leur articulation n'étant pas manifeste.

On notera également que certains types de tâches n'en sont pas véritablement, comme par exemple les deux énoncés suivants :

T_{51} établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \mapsto x^2$;

τ_{51} : démontrer croissance sur R_+ et décroissance sur R_- ; tableau de variation; calculer 1 point; savoir que la fonction est paire ;

T_{52} établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \mapsto 1/x$;

τ_{52} : démontrer décroissance sur R_-^* et sur R_+^* ; calculer un point ; savoir que la fonction est impaire ;

On a en effet à faire ici à deux *tâches*, spécimens du type « établir le sens de variation et représenter graphiquement une fonction donnée par son expression algébrique » qui n'apparaît pas dans l'analyse de l'OM du professeur. En outre, la fonction de ces tâches au sein de l'organisation mathématique étudiée n'est pas élucidée[5].

Des raisons d'être, on l'a dit, sont avancées :

> Optimiser une situation
> Exemple : maximiser une aire, minimiser un coût, …
> Décrire exhaustivement un phénomène
> On peut alors connaître d'autres valeurs, analyser le phénomène, …

Mais, on l'a vu, ces types de tâches ne sont pas reliés aux types de tâches de l'OMR que le professeur a identifiés par ailleurs – ce dont témoigne entre autres l'incertitude liée à la « mise en équation » que manifeste le point d'interrogation.

On pourrait donner de multiples témoignages de ces deux aspects problématiques : manque de fonctionnalisation et vision trop thématique ; nous en donnerons un autre encore, issu de l'observation, en février 2006, d'une séance en classe de seconde sous la responsabilité d'un élève professeur.

À la suite de l'examen du programme par l'ensemble des professeurs de seconde de ce lycée, le secteur des fonctions a été découpé en thèmes associés à des sujets d'étude dont trois ont déjà été étudiés : *les équations* (équations « produits et quotients », mise en équation de problèmes), *généralités sur les fonctions* (notion de « être fonction de… », variable et ensemble de définition, image d'un élément par une fonction, lectures graphiques, fonctions croissantes et décroissantes, maximum et minimum sur un intervalle), *inéquations* (étude de signes d'expressions algébriques) ; un quatrième thème est en cours d'étude : *fonctions de références* (fonctions carrée et inverse).

La définition, le sens de variation et la représentation graphique de la fonction qui à x associe x^2 ont été établis précédemment et il s'agit d'étudier la situation suivante :

> On considère ABCD un rectangle tel que AB = 5 et BC = 3. On place les points M, N, P et Q respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] de telle sorte que les longueurs AM, BN, CP et DQ soient égales. Il s'agit de déterminer la position du point M sur le segment AB telle que l'aire du parallélogramme MNPQ inscrit dans le rectangle ABCD soit minimum.

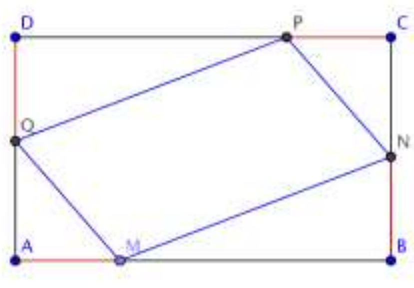


Figure 1

Le travail de la veille a permis d'obtenir que l'aire de MNPQ est donnée par $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$ où x représente la longueur AM. La séance comporte alors trois grandes étapes :

1. On met en évidence qu'il s'agit de déterminer le minimum de la fonction $\mathcal{A}$ sur [0 ; 3].
2. Une étude expérimentale à l'aide de calculatrices graphiques met en évidence que $\mathcal{A}$ atteint un minimum en 2 qui vaut 7.
3. On prouve analytiquement l'assertion précédente :
   a) en résolvant l'inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 7$, qui se ramène à la résolution de l'équation $\mathcal{A}(x) - 7 \geq 0$;
   b) En résolvant l'équation $\mathcal{A}(x) = 7$. [Cette dernière question a été abordée en classe et laissée à faire pour la séance suivante.]

La résolution de l'inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 7$ s'effectue de la façon suivante :
$\mathcal{A}(x) - 7 = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2) = 2(x - 2)^2$; cette quantité étant toujours positive, on obtient finalement que pour tout $x \in [0 ; 3]$, $\mathcal{A}(x) - 7 \geq 0$ ce qui équivaut à pour tout $x \in [0 ; 3]$, $\mathcal{A}(x) \geq 7$.

En dehors du fait que la technique mise en œuvre dans la classe pour résoudre une inéquation est purement algébrique, la séance soulève une autre question. Les élèves ont déjà étudié le type de tâches « déterminer le minimum d'une fonction » lors de l'étude du thème « généralités sur les fonctions » et la technique qui a été donnée à cette occasion repose sur une lecture graphique de la courbe. Cette première technique peut être justifiée par la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction : en effet, la fonction étant décroissante sur l'intervalle [0 ; 2] on a $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ pour tout x appartenant à cet intervalle ; de même la fonction étant croissante sur l'intervalle [2 ; 3], $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ pour tout x appartenant à cet intervalle et finalement, sur l'intervalle [0 ; 3], on obtient $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ soit, puisque $\mathcal{A}(2) = 7$, $\mathcal{A}(x) \geq 7$. Ce qu'il resterait à justifier analytiquement, ce sont les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle, nous y reviendrons. Le professeur fait donc émerger dans la séance une autre technique relative au même type de tâches, qui s'appuie dans la partie expérimentale sur la technique vue antérieurement tout en s'en éloignant d'un point de vue technologique puisqu'elle repose sur un travail algébrique.

La motivation de l'apport de la nouvelle technique n'est pas véritablement abordée dans la séance, mais celle-ci apparaît implicitement comme étant mieux justifiée parce qu'elle donnerait la « valeur exacte » du minimum. Pourtant, cette valeur exacte du minimum et de la valeur en laquelle il est atteint ont été conjecturés graphiquement, à partir de la représentation graphique de la fonction, ce qui limite de fait la portée de la technique algébrique[6]. On peut voir là un effet du changement de programme que nous avons commenté plus haut, la tradition d'un travail algébrique autonome gênant son insertion dans le secteur fonctionnel. Pour résoudre les difficultés que nous venons d'évoquer, il faudrait disposer d'une technique de détermination de l'extrémum dont la justification repose sur la théorie des fonctions. Voyons cela.

Si l'on sort un moment des contraintes du programme de seconde, une technique classique pour produire la valeur de l'extrémum d'une fonction du second degré consiste à mettre l'expression sous « forme canonique » de la façon suivante : $2x^2 - 8x + 15 = 2(x^2 - 4x) + 15 = 2[(x - 2)^2 - 8] + 15 = 2(x - 2)^2 + 7$. Cette expression met alors en évidence le minimum de la fonction, 7, et la valeur en laquelle il est atteint, 2 – la valeur qui annule le terme variable. Cette expression de la fonction permet également de justifier analytiquement les variations de la fonction : la fonction carré étant croissante sur 3_+ et décroissante sur 3_-, la fonction qui à x associe $(x - 2)^2$ est croissante sur $[2 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 2]$, et il en est donc de même pour la fonction qui à x associe $2(x - 2)^2$ puis pour la fonction qui à x associe $2(x - 2)^2 + 7$, soit la fonction $\mathcal{A}$.

On le voit, on rejoint là un thème du programme, « fonctions et formules algébriques », à travers les types de tâches « Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est

donnée par une formule », « Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…) » et « Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi ». Ce thème permet alors d'unifier les deux techniques précédentes pour déterminer les extrémums d'une fonction sur un intervalle de la façon suivante :
– tracer la courbe de la fonction sur cet intervalle à la calculatrice et établir à partir de cette courbe le tableau de variation de la fonction ;
– justifier les variations de la fonction à partir des variations des fonctions de références, en mettant si nécessaire l'expression algébrique de la fonction sous une forme adaptée ;

en particulier, dans le cas d'une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, mettre l'expression sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$; dans le cas d'une fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, mettre l'expression sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{cx+d}$;

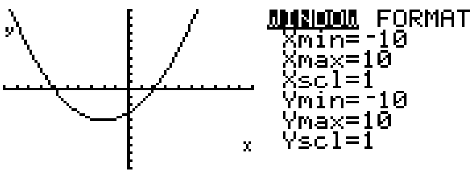
– donner alors les inégalitésTapez une équation ici. à justifier et utiliser la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction pour les justifier.

Il reste encore à régler le problème de la mise en place d'une technique permettant de mettre les expressions du second degré sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$. On donnera ci-dessous les éléments d'une telle technique en la mettant en œuvre sur deux spécimens, sans aborder ici la question de sa mise en place.

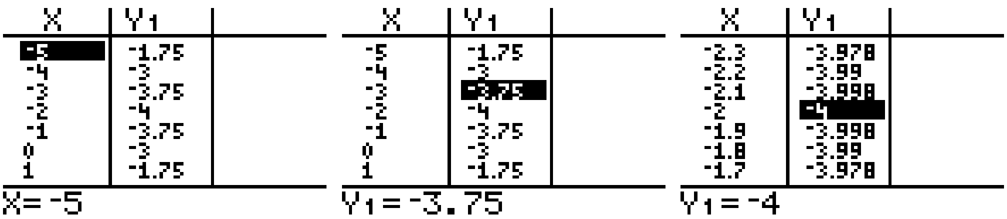
$h : x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right) x^2 + x - 3.$

Partie expérimentale

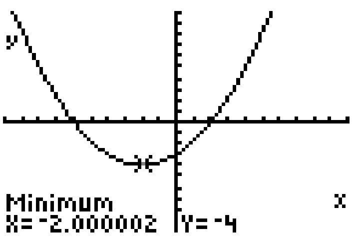
Représentation graphique de la fonction



Tables de valeurs



Détermination graphique du minimum



La fonction est décroissante sur]–∞ ; –2] et croissante sur [–2 ; +∞[. Elle admet un minimum en –2 qui vaut –4.

Elle se met sous la forme $\left(\frac{1}{4}\right)(x+2)^2-4$, ce que l'on vérifie :

```
Y1=(1/4)*X^2+X-3
Y2=(1/4)*(X+2)^2
-4
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

X	Y1	Y2
-3	-3.75	-3.75
-2.5	-3.938	-3.938
-2	-4	-4
-1.5	-3.938	-3.938
-1	-3.75	-3.75
-.5	-3.438	-3.438
0	-3	-3

X= -3

Preuves :

1. On a $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Donc $\frac{1}{4}(x + 2)^2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ et finalement $\frac{1}{4}(x + 2)^2 - 4 \quad = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$.

2. On considère $a \leq b \leq -2$. On a alors $a+2 \leq b+2 \leq 0$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, on obtient que $(a + 2)^2 \geq (b + 2)^2 \geq 0$ et donc $(\frac{1}{4})(a + 2)^2 \geq (\frac{1}{4})(b + 2)^2 \geq 0$, soit finalement $(\frac{1}{4})(a + 2)^2 - 4 \geq (\frac{1}{4})(b + 2)^2 - 4 \geq -4$. La fonction est ainsi décroissante sur $]-\infty ; -2]$ et sur cet intervalle on a $h(x) \geq -4$

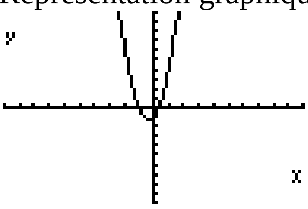
3. On considère $a \geq b \geq -2$. On a alors $a+2 \geq b+2 \geq 0$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +[\infty$, on obtient que $(a + 2)^2 \geq (b + 2)^2 \geq 0$ et donc $(\frac{1}{4})(a + 2)^2 \geq (\frac{1}{4})(b + 2)^2 \geq 0$, soit finalement $(\frac{1}{4})(a + 2)^2 - 4 \geq (\frac{1}{4})(b + 2)^2 - 4 \geq -4$. La fonction est ainsi croissante sur $[-2, +\infty[$ et sur cet intervalle on a $h(x) \geq -4$.

4. On a ainsi pour tout x, $h(x) \geq -4$ et -4 est le minimum de h. Comme $h(-2) = -4$, et il est donc atteint pour $x = -2$.

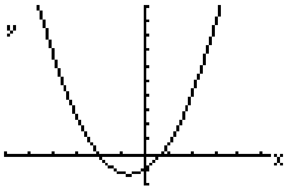
g : $x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$;

Partie expérimentale

Représentation graphique :




```
WINDOW FORMAT
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
```




```
WINDOW FORMAT
Xmin=-3
Xmax=3
Xscl=.5
Ymin=-2
Ymax=10
Yscl=
```

Tables numériques

Pas de 1

X	Y1
-10	279
-9	224
-8	175
-7	132
-6	95
-5	64
-4	39

X= -10

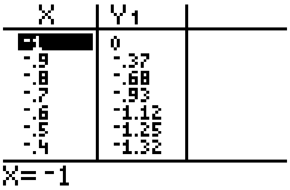
X	Y1
-3	20
-2	7
-1	0
0	-1
1	4
2	15
3	32

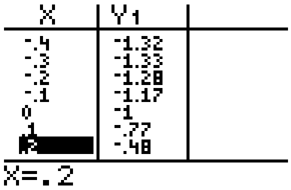
X=3

X	Y1
4	55
5	84
6	119
7	160
8	207
9	260
10	319

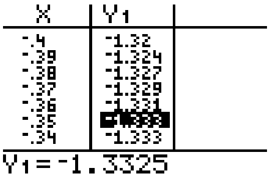
X=10

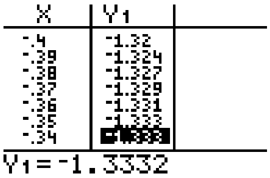
On voit que l'extrémum est atteint entre –1 et 1 ; pas de 0,1 à partir de –1 :

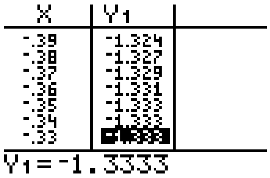


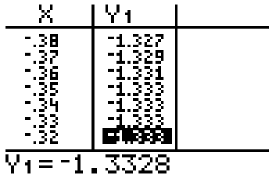


L’extrémum est atteint entre –0,4 et –0,2 ; pas de 0,01 :

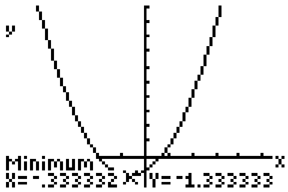






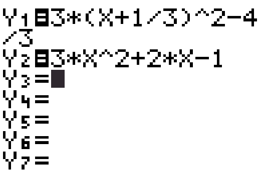


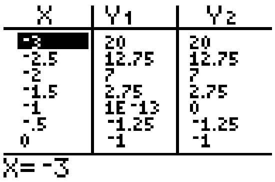
Détermination graphique du minimum (calc – minimum)



La fonction est décroissante sur]–∞ ; $-\frac{1}{3}$] et croissante sur [$-\frac{1}{3}$, + ∞[; elle admet un minimum en $-\frac{1}{3}$qui vaut $\frac{4}{3}$.

Elle se met sous la forme 3(x + 1/3)² –4/3, ce que l’on vérifie :





On notera que la table fournit une valeur approchée de Y1 en -□1.

Preuves :

1. $3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}=3\left(x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}\right)-\frac{4}{3}=3x^2+2x-1.$

2. On considère $a \le b \le -1/3$. On a alors $a + 1/3 \le b + 1/3 \le 0$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant décroissante sur $]-\infty ; 0]$, on obtient que $(a + 1/3)^2 \ge (b + 1/3)^2 \ge 0$, soit que $3(a + 1/3)^2 \ge 3(b + 1/3)^2 \ge 0$, et finalement que $3(a + 1/3)^2 - 4/3 \ge 3(b + 1/3)^2 - 4/3 \ge -4/3$, ce qui prouve que la fonction g est décroissante sur l’intervalle$]-\infty ; -\frac{1}{3}]$ et que sur cet intervalle $g(x) \ge -4/3$.

3. On considère $a \ge b \ge -1/3$. On a alors $a + 1/3 \ge b + 1/3 \ge 0$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant croissante sur [0 ; ∞ [, on obtient que $(a + 1/3)^2 \ge (b + 1/3)^2 \ge 0$, soit que $3(a + 1/3)^2 \ge 3(b + 1/3)^2 \ge 0$, et finalement que $3(a + 1/3)^2 - 4/3 \ge 3(b + 1/3)^2 - 4/3 \ge -4/3$, ce qui prouve que la fonction g est croissante sur l’intervalle [$-\frac{1}{3}$; ∞ [et que sur cet intervalle $g(x) \ge -4/3$.

4. On a donc $g(x) \ge -4/3$ sur 3, ce qui prouve que g admet un minimum qui vaut –4/3 ; il est atteint pour $x = -1/3$, puisque $g(-1/3) = -4/3$.

On obtient ainsi des techniques compatibles avec ce que demande le programme tout en liant de manière fonctionnelle le travail algébrique et l'étude des fonctions : cela prépare les élèves aux techniques qui seront étudiées dans les classes ultérieures du lycée et leur donne la possibilité d'accomplir ce type de tâches dans sa totalité ou, du moins, d'avoir prise sur l'ensemble de la technique et de sa justification si l'on fait le choix d'une *technique coopérative*.

Ces techniques font également apparaître de manière lisible *une raison d'être de l'étude qualitative* des fonctions : on constitue pour l'essentiel la *base expérimentale* qui va permettre de faire surgir les premiers éléments de la théorie des fonctions, de la même manière que le travail à partir de figures permet de faire surgir des éléments de la théorie géométrique. La position relative des deux techniques, source de difficultés dans la séance en classe évoquée plus haut, trouve alors une solution semblable à celle adoptée en géométrie : on ne doute pas à l'issue de l'expérimentation graphique que le minimum de la fonction d'aire est 7, atteint en 2, de la même façon qu'une expérimentation graphique convainc qu'un triangle de côtés (3, 4, 5) est rectangle ; on a là deux faits avérés, l'un numérique et l'autre géométrique. Il reste cependant, pour faire œuvre de mathématicien, à vérifier que l'on peut les déduire de la théorie fonctionnelle disponible (TFD) ou de la théorie géométrique disponible (TGD) : si cela n'était pas le cas, il faudrait travailler à augmenter la théorie des ingrédients pertinents (éventuellement lors d'une année d'étude ultérieure, comme cela sera le cas de quelques types de fonctions pour lesquelles on en restera, en seconde, à la conviction expérimentale).

Scinder fortement l'étude qualitative des fonctions de celle des fonctions de référence, comme le veut actuellement une norme dominante dans la profession, constitue donc un obstacle pour faire entendre le travail d'élaboration théorique en cours de constitution, ainsi qu'en témoigne par exemple la question suivante posée par un élève professeur ayant en responsabilité une classe de seconde, lors de la 20e séance de formation de l'année 2007-2008 :

> Les élèves de la classe de 2de que j'ai en responsabilité ont énormément de mal à s'exprimer clairement. Surtout sur le thème des fonctions, ils mélangent les notions appartenant au domaine fonctionnel avec celles appartenant au domaine graphique. Je pense pourtant le répéter souvent et bien faire la distinction. Que pourrais-je faire ?

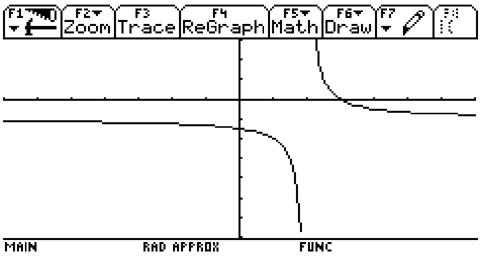
Les techniques que nous venons de développer font en outre apparaître que les tâches T_{51} et T_{52} (qu'il faudrait noter t_{51} et t_{52}) rencontrées précédemment dans l'OMR découpée par l'élève professeur, ont une *fonction technologique* puisqu'elles permettent de justifier et/ou de produire une technique de détermination des variations de certaines fonctions (les fonctions polynômes du second degré dans le premier cas et les fonctions homographiques dans le second) par un « enchaînement de fonctions ».

Cette « fonctionnalisation » de l'enchaînement de fonctions et du sens de variation des « fonctions de référence » n'est pas anecdotique. C'est cela, on l'a vu, qui permet de fabriquer des techniques relatives aux types de tâches algébriques dont la justification repose sur la théorie des fonctions. On en donnera encore deux exemples.

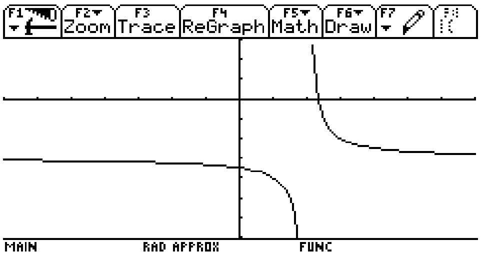
Soit par exemple à résoudre l'équation $\frac{3x+2}{x-4} = 5$; la mise en évidence de la forme $3 + \frac{14}{x-4}$ et de l'enchaînement de fonctions qu'elle matérialise permet de produire une technique efficace, qui sera notamment utile pour minimiser les erreurs de calcul ou encore calculer « de tête » :

$x \rightarrow X = x\text{-}4 \rightarrow \text{Y} = \frac{14}{X} \rightarrow \text{Z} = 3\text{+Y} \rightarrow$; donc $\frac{3x+2}{x-4} = 5$ équivaut à Z=5, soit encore à , puis à , soit encore à Y= Z-3 = 2 puis à X = $\frac{14}{Y} = 7$ soit encore à x = X+4 = 11.

Soit maintenant à résoudre l'inéquation $\frac{x-3}{2-x} \leq 2$. On pose $h(x) = \frac{x-3}{2-x} - 2$ et $g(x) = \frac{x-3}{2-x}$: il s'agit donc de résoudre $h(x) \leq 0$.



Représentation graphique de g (pas de 1).

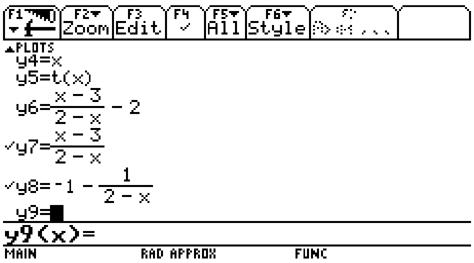


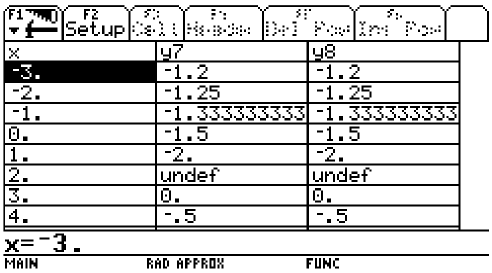
Représentation graphique de h (pas de 1).

On notera que la détermination graphique des solutions de l'équation $h(x) = 0$ (et, partant, de l'inéquation $h(x) \leq 0$) n'est pas immédiate.

Par ailleurs, en supposant que l'on peut mettre $g(x)$ sous la forme $-1 + \frac{k}{2-x}$, comme $g(1) = -2$ on obtient $k = -1$ et finalement $h(x) = -3 - \frac{1}{2-x}$.

Vérification :





Preuves : $-1 - \frac{1}{2-x} = \frac{-(2-x)-1}{2-x} = \frac{-3+x}{2-x}$; donc $h(x) = -1 - \frac{1}{2-x} - 2 = -3 - \frac{1}{2-x}$.

Quand x est inférieur à 2, alors $2 - x \geq 0$ et h est donc négative.

Quand $x > 2$, la fonction h est décroissante :

$2 < x < x' \Rightarrow 2 - x > 2 - x' > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2-x} < \frac{1}{2-x'}$ puisque la fonction inverse est décroissante sur [3 ; ∞[

$\Rightarrow h(x) > h(x')$

La résolution de l’équation donne alors que $h(x) = 0$ équivaut à $\frac{1}{2-x} = -3$ soit encore à et, enfin, à $2-x = -\frac{1}{3}$. La décroissance de h prouve alors que :

$x > 2$ et $h(x) \leq 0$ équivaut à $x \geq \frac{7}{3}$.

On peut alors proposer une recomposition de l’organisation mathématique régionale à propos des fonctions, dont les types de tâches soient articulés à partir de deux raisons d’être[7], les types de tâches « coches » T et T’, avec un environnement technologico-théorique composé pour l’essentiel de résultats de la théorie des fonctions. Nous en donnerons ci-dessous une armature possible en termes de types de tâches, établie en organisant ces derniers selon leur *apparition possible* lors de la *mise en œuvre de la technique* permettant d’accomplir les types de tâches coches proposés, en restant volontairement proche de l’OMR proposée par l’élève-professeur.

T : Optimiser une grandeur, g_1

Exprimer une grandeur en fonction d’une autre grandeur attachée au système $g_1 = f(g_2)$

Déterminer l’ensemble de définition d’une fonction f

Déterminer les extrémums d’une fonction

Déterminer les variations d’une fonction f sur son ensemble de définition

Si f est donnée par sa courbe représentative, établir le tableau de variation

Si f est donnée par une formule,

Tracer la courbe représentative d’une fonction et établir son tableau de variation

Mettre l’expression d’une fonction sous une forme adaptée

Mettre en évidence un enchaînement de fonctions

Exprimer la croissance ou la décroissance d’une fonction par une inégalité

Déterminer la valeur d’une fonction en un point (bornes de l’ensemble de définition, extrémums notamment)

T’: Étudier un phénomène

Déterminer une loi permettant de rendre compte d’un phénomène

Montrer qu’un phénomène est modélisable par une fonction affine

Montrer qu’un phénomène n’est pas modélisable par une fonction affine

Résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$

Se ramener à la résolution de l’équation $f(x) - g(x) = 0$

Résoudre une équation du type $f(x) = 0$

Mettre l’expression d’une fonction sous une forme adaptée.

Mettre en évidence un enchaînement de fonctions

Résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$

Se ramener à la résolution de l’équation $f(x) - g(x) < 0$

Résoudre une inéquation du type $f(x) < 0$

Résoudre une équation $f(x) = 0$

Déterminer les variations d’une fonction f

Exprimer la croissance ou la décroissance d’une fonction par une inégalité

La constitution d’une organisation mathématique de ce type suppose que l’on rompe avec la présentation du programme et que l’on pense le travail thématique fonctionnalisé par le ou les types de tâches coche(s) du secteur. Ce phénomène, que le secteur des fonctions en seconde met exemplairement en évidence, vaut sans doute pour les autres secteurs même si les ruptures avec les normes de la profession peuvent paraître moins vives.

Références

Artaud, M. & Jullien, M. (2008). *Séminaire de formation des professeurs stagiaires de mathématiques, année 2007-2008*. Marseille : IUFM d'Aix-Marseille. Disponible sur Internet :

http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/seminaire8.html [réf. 29 septembre 2008].

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique.* In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Ed.), Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico, Universidad de Jaén, 2007, pp. 705-746. Disponible sur l'Internet : http://yves.chevallard.free.fr [réf. 29 septembre 2008].

MEN[8]. 1990. Programmes de la classe de seconde générale et technologique. Paris : CNDP.

MEN. 2001. Programmes de la classe de seconde générale et technologique. BO hors série n°2 du 30 août 2001. Disponible sur l'Internet :

http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs2/default.htm [réf. 29 septembre 2008].

MEN. 2000. Mathématiques – Classe de seconde. Paris : CNDP. Collection Lycée, série Document d'accompagnement des programmes. Disponible sur l'Internet : http://www.cndp.fr/archivage/valid/14963/14963-8208-9261.pdf [réf. 29 septembre 2008].

1. Sur les notions d'organisations mathématiques et de thèmes et de secteurs, voir par exemple Chevallard 2007.

2. Un *milieu* (« adidactique ») est un système qu'on peut regarder comme dénué d'intention (« didactique ») dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite à telle question déterminée : il se comporte à cet égard comme un fragment de « nature ». En théorie anthropologique du didactique, la notion de milieu fait couple avec la notion de *média* : on nomme média tout système de mise en représentation du monde à l'adresse d'un certain public. Pour nombre de questions que l'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une intention (par exemple « d'informer ») à l'endroit du questionneur. Bien entendu, le caractère de milieu ou de média n'est nullement intrinsèque : il dépend de la question que l'on pose au système et de la manière de la lui poser.

3. Dans la programmation thématique PS1, on note que l'un des thèmes proposés, « Fonctions affines. Inéquations », regroupe, dans un cas particulier, le travail sur les fonctions et le travail algébrique de résolution d'inéquations.

4. Ce document a été communiqué au mois de novembre 2007 pour servir de point d'appui dans le Séminaire de formation au travail d'une question posée par un élève professeur. Voir Artaud et Jullien 2008.

5. Ces tâches font partie de l'organisation de l'étude. Elles permettront de constituer une partie de l'environnement technologico-théorique de l'OMR. Cela souligne l'intérêt de mener d'emblée le travail d'analyse sur l'OM dans son ensemble.

6. On ajoutera en outre que la technique algébrique qui vit actuellement le plus souvent dans les classes de seconde permet généralement de produire la valeur du minimum à condition que soit donnée la forme canonique de la fonction du second degré.

7On pourrait sans doute unifier l'OMR sous l'égide d'un seul type de tâches, voire encore y intégrer au moins une partie du secteur du calcul, mais nous avons fait le choix de rester le plus proche possible de la proposition initiale de l'élève professeur.

8. Ministère de l'éducation nationale.

Thème 2 : *Questions autour de l'évaluation par compétences*

Evaluation par compétences et formation des PLC2 de mathématiques

Les chiens aboient, la caravane passe…

Aline Robert[41], Janine Rogalski[42]

Résumé : Pour orienter et évaluer la formation et les acquis professionnels, on a besoin d'une "notion forte" de compétence, qui rende compte de sa dimension individuelle et collective (socialisée), qui envisage la compétence non seulement comme ressources mais comme pouvoir et vouloir agir, qui articule des composants et ne les additionne pas (Guy Le Boterf : /Construire les compétences individuelles et collectives/", Editions d'Organisation, 2001). On développera cette approche pour l'enseignant de mathématiques, et on mettra en relation les analyses de pratiques conduites dans un cadre cohérent avec cette approche. On présentera les conséquences en termes de formation, initiale et au cours du développement professionnel.

Nous voudrions discuter ici avec vous, en partie indépendamment de la conjoncture, la question suivante, abordée comme une question de fond : comment aborder les questions de formation professionnelle sous l'angle des compétences ? Qu'est-ce que ça ajoute, qu'est-ce qui manquait ? A-t-on raison d'emprunter cette catégorie aux ergonomes et autres didacticiens professionnels qui l'ont déjà travaillée ? N'y a-t-il pas dans la notion de compétence une idée d'expertise, voire de norme qui ne se conjugue pas pareil pour les enseignants et pour d'autres professionnels ? Quel est le prix éventuel à payer pour l'adapter, pour qu'elle soit utile ? Est-ce raisonnable d'avoir les mêmes compétences pour tous les degrés et toutes les disciplines ? Autrement dit suffit-il de contextualiser une compétence à un contenu pour qu'elle prenne tout son sens, ne faudrait-il pas en introduire des spécifiques ?

Nous allons ainsi développer et discuter, dans un discours à deux voix, cette forme d'intelligibilité particulière des pratiques des enseignants, qui est celle des compétences.
Connaissances, savoirs de divers types, savoir-faire, schèmes, activités, autant de mots qui traduisent des inscriptions différentes des chercheurs et des formateurs dans les cadres théoriques existants. Comment les compétences s'inscrivent-elles dans ce tableau ? Qu'est-ce qu'elles ajoutent éventuellement, où peuvent-elles servir, à qui (chercheurs, formateurs…) ?
Est-ce que la mise en œuvre de ces catégories change quelque chose, par exemple, aux processus de formation ou d'élimination ?

Dans la première partie, Janine Rogalski va développer les aspects théoriques, donnant toute la consistance de la notion, en toute généralité.

[41] Professeur des Universités, Université UVSQ, Laboratoire André Revuz Didactique des mathématiques et des sciences. Université Paris7.
[42] Directeur de recherches honoraire CNRS, Université Paris8, associée au laboratoire André Revuz.

Dépassant une description en termes d'activités, faisant intervenir davantage des blocs organisés d'activités et des composantes des pratiques, les compétences fournissent ainsi un accès multidimensionnel des pratiques, néanmoins partiel, qu'il s'agit de préciser et de discuter. Je reprendrai ainsi la parole ensuite pour discuter en deuxième partie, d'évaluation et de formation dans le cas des profs de math, compte tenu de ce découpage des pratiques en compétences.
Je défendrai notamment l'idée qu'en matière d'évaluation ce n'est pas un bon outil – à moins de ne retenir que des grosses compétences peu informatives sauf par le caractère rédhibitoire de leur non acquisition : évaluation sommative, qui peut se faire avec ou sans compétences – sauf à mettre en œuvre quelque chose d'extrêmement coûteux, ce qui n'est pas à l'ordre du jour. En matière de formation, c'est plus compliqué : je suggérerai qu'on peut se demander si la discussion autour de certaines compétences à acquérir ne seraient pas des générateurs de questionnements intéressants pour la formation, dépassant le bon sens ou l'expérience non outillée, mettant en jeu des questions de recomposition et de hiérarchie, mais peut-être plus en formation continuée qu'en formation initiale.

1. Cadrage théorique

Le cadre théorique pour définir et analyser la compétence, et son usage comme outil dans la formation et l'évaluation est celui de la didactique professionnelle, s'appuyant sur la théorie de l'activité (Leplat, 1997 ; Pastré, 1997 ; Rogalski, 2003; Rogalski, 2008). On définit d'abord la notion de compétence, on présente ses caractéristiques, les différences entre compétence et performance. On situe ce terme / cette notion par rapport à d'autres termes qui apparaissent dans le champ de l'éducation et de la didactique professionnelle. Selon qu'on se centre sur le potentiel d'action ou sur l'analyse de ce potentiel, on parle de compétence, au singulier, ou de compétences, au pluriel.

a) Le concept de compétence en didactique professionnelle

La compétence est un potentiel d'action, relative à une situation de travail. C'est un des déterminants de l'activité du sujet. Ce potentiel d'action doit s'entendre comme un « pouvoir agir » de l'acteur qui engage effectivement sa compétence dans l'accomplissement de son activité.

Les compétences considérées sont des compétences professionnelles, c'est-à-dire relatives à un travail – à un métier – et donc à l'ensemble organisé des tâches qui en composent l'exercice. Elles ont un caractère (relativement) stabilisé, et elles sont (ont été) l'objet d'un apprentissage professionnel, avec une interaction directe avec les objets du travail aussi bien qu'avec la communauté professionnelle.

La compétence a un caractère générateur qui s'oppose à la multiplicité des occurrences singulières de performance, laquelle est à la fois le produit de l'action (au centre : les apprentissages des élèves, pour l'enseignant) et le processus, la dynamique qui conduit à ce produit (la réalisation d'une séance de classe, par exemple). Elle concerne l'ensemble de la production d'effets sur la situation: objet de l'action, ressources, etc., et sur l'acteur considéré (expérience, mais aussi fatigue, lassitude, etc.).

Il faut relever une évolution, sociologique et économique, d'une « gestion par qualification » (l'aptitude professionnelle) à une « gestion par compétences ». La première forme de gestion est définie collectivement, pour tous, par les contraintes des tâches du métier, considéré comme suffisamment stable. En revanche, dans la « gestion par compétences »,celles-ci sont définies pour chacun, individuellement, selon les tâches qu'il a déjà exécuté ou qu'il pourrait exécuter - y compris dans un autre métier. il en est résulté dans les entreprises, la notion de « bilan de compétences », et l'individualisation de l'évaluation et du salaire.

D'autres notions relèvent d'un champ conceptuel commun :

- Aptitude à : souligne la relation aux exigences du travail

- Capacité de : souligne la dimension « pouvoir d'action » du côté de l'acteur

- Habiletés (en anglais : *skills*) : renvoient au niveau des opérations perceptives, motrices et mentales

b) Analyser la compétence, repérer les compétences

Une première question est « à quoi sert l'analyse des compétences ? ». Plusieurs visées sont possibles : comprendre ce déterminant de l'activité de l'enseignant et (re)composer les composantes « cognitives », « médiatives » et « personnelles » dans l'analyse de la pratique de l'enseignant (double approche, Robert & Rogalski, 2002) ; anticiper l'impact de transformations du métier (l'intégration accentuée des technologies de l'information et de la communication, par exemple) ; analyser le développement des compétences avec l'expérience et les conditions d'exercice ; agir sur des compétences déjà formées (formation continue) ; orienter la formation initiale.

La seconde question, que je n'aborderai pas ici, est celle de l'analyse de l'activité qui permet de faire ensuite des inférences sur les compétences qui ont été mises en jeu, mobilisées, dans cette activité de l'enseignant. Beaucoup de travail méthodologique a été développé depuis un certain nombre d'années, en particulier à partir du discours de l'enseignant en classe. En cohérence avec le cadre général de la double régulation de l'activité (Rogalski, 2008) et de la théorie développementale de Vygotsky, de multiples aspects sont développés dans Vandebrouck (2008). Pariès, Robert et Rogalski (sous presse, 2009) développent, dans une revue de didactique professionnelle, la présentation des différents « actes » de l'analyse de l'activité de l'enseignant de mathématiques en classe, dans l'enseignement secondaire.

La troisième question, qui va être traitée dans ce qui suit, est la détermination d'un cadre d'analyse de la compétence, qui serve à préciser des questions auxquelles la didactique professionnelle peut alors commencer à chercher des réponses étayées. Le cadre d'analyse retenu considère la compétence comme un « complexe » multidimensionnel.

La compétence est multidimensionnelle …

Différentes perspectives d'analyse peuvent être considérées :

- selon la nature des relations avec les objets de l'action : mathématiques, outils, élèves et classe, système scolaire (opérations de pensée à propos de.., perception de .. et action sur .., interactions sociales avec ..) ;

- selon la place des tâches à accomplir dans la mission d'ensemble d'enseignement, les compétences sont considérées à un niveau plus ou moins fin ;

- selon un point de vue structurel : « connaissances opérationnelles », « schèmes d'action », « propriétés ».

La compétence ne s'identifie pas à des listes de tâches à accomplir et de compétences « générales ». Il s'agit d'un concept à caractère multidimensionnel, avec l'existence de points de vue différents et d'une « granularité » variable de l'analyse selon les visées.

La dimension des connaissances opérationnelles

Les « connaissances opérationnelles » sont des savoirs pertinents pour l'activité professionnelle : concepts, savoirs factuels, catégories de situations à traiter et de modes d'action, mémoire de situations traitées, aides matérielles ou humaines mobilisables … Quand on les analyse, on suppose qu'elles ont un caractère de stabilité sur du court ou moyen terme (l'année est une unité de temps pertinente pour l'analyse des compétences de l'enseignant, y compris ses connaissances opérationnelles). On peut situer ces connaissances par rapport à des « savoirs de référence ».

Le terme de « connaissance du processus de travail » insiste sur le fait que ces connaissances concernent (aussi) l'intégration de l'action de l'enseignant de mathématiques dans un système plus large, incluant le système d'enseignement, les parents, d'autres acteurs éducatifs.

La dimension dynamique des schèmes…

Un schème est une organisation invariante de l'activité dans une classe de situations donnée. Par « activité » on entend : ce que fait et dit l'acteur, mais aussi ses processus de pensée, et ce qu'il ne dit pas, ne fait pas … Le chercheur en didactique professionnelle recherche en particulier des invariants dans une action observable répétée … avec variantes de situation

Il faut insister sur le fait qu'un schème n'est pas un « savoir-faire » mais une « matrice » de l'action en situation *« hic et nunc »*. On peut donner comme exemple de schème l'organisation régulièrement utilisée de la gestion d'un exercice travaillé en classe qu'on peut observer pour un enseignant, sur plusieurs occurrences de séances de classe « voisines » quant au niveau et quant au thème (en fait, ce schème est probablement largement partagé par un ensemble d'enseignants, sinon toute la communauté) :

- 1) donner l'énoncé complet d'un exercice ;
- 2) faire chercher quelques minutes individuellement ;
- 3) questionner pour un bref bilan ;
- 4) indiquer une stratégie à la classe ;
- 5) faire chercher individuellement à nouveau quelques minutes ;
- 6) appeler un élève au tableau pour la correction ;
- 7) mutualiser les interventions de l'élève en corrigeant erreurs ou « mal dits » ;
- 8) faire le point après résolution de l'exercice.

La dimension « incorporée » de la compétence : les « propriétés »

L'activité de l'acteur est aussi déterminée par des « propriétés » pertinentes pour la tâche, sa « sensitivité » à des indicateurs visuels ou auditifs sur le fait que les élèves « suivent » ou que la classe « décroche », sa « réactivité » au conflit …Ces propriétés sont liées à « pouvoir repérer » (à quoi je le vois, comment je le sais) / « pouvoir faire » (comment j'arrive à le faire).

Cette dimension comporte aussi un composant « tourné vers soi-même ».

La gestion des compromis entre buts et entre contraintes

Seule l'analyse de l'activité permet d'identifier un composant important de la compétence : la manière de gérer des compromis entre buts. Le plus classique est sans doute celui de la visée d'investissement des élèves dans des activités constructives de compétences mathématiques et celui des contraintes temporelles, liées aux horaires attribuées aux mathématiques dans l'enseignement général.

c) De l'analyse des compétences à la formation professionnelle

L'analyse de l'activité et l'inférence des compétences de professionnels « confirmés » (souvent étiquetés « experts », cf. Berliner pour un débat sur la question de l'expertise enseignante) est un moyen pour identifier ce à quoi on voudrait qu'arrive un professionnel après quelques années d'expérience (évaluées souvent à environ cinq années de classes en responsabilité). Mais de multiples panneaux « attention ! » doivent être prévus. Il y a une illusion de vouloir et de pouvoir former d'emblée à la compétence de l'expert, et même de la prendre pour référence. Plusieurs raisons : la notion d'expert n'est pas vraiment définie pour le métier d'enseignant de mathématiques (ni pour d'autres domaines) ; rien ne dit qu'on puisse parler au singulier d'une expertise ; pour un concept multidimensionnel comme celui de la compétence, il n'y a sans doute guère de sens à « graduer » la compétence en « niveaux », sinon pour une manière de faire bref.

Il y a par ailleurs danger de rester au résultat de l'analyse, alors qu'une partie essentielle de la compétence est dans l'articulation des composants analysés.

Quid des « référentiels » ?

La tentation majeure des référentiels est de confondre analyse selon des dimensions et listage d'éléments juxtaposés, « à plat ». En formation, une régulation de leur usage, s'ils ne sont pas trop « éclatés », est de les considérer comme une façon de parler ou comme des points de repère de ce qui est bien connu, et qui serait fait de toutes façons pour décider …

Sans perdre de vue que l'enseignement n'est pas un domaine où l'on sache directement mettre en relation l'activité de l'enseignant et les apprentissages de élèves (et encore moins évaluer l'impact d'un composant de la compétence …). Sans doute faut-il revenir à la prise en compte du cœur de l'action de l'enseignant.

Le cœur de l'action de l'enseignant : objets, buts et moyens d'action

L'action porte sur le rapport de l'élève aux mathématiques enseignées : savoirs mathématiques (objets) ; mise en œuvre des savoirs (outils internes aux mathématiques, ou externes) ; représentations sur les mathématiques. On ne peut donc supprimer ni la référence à l'objet (mathématiques) ni celle au sujet (l'élève), ni les considérer sans les articuler.

Il faut aussi prendre en compte le fait que l'action de l'enseignant implique des acteurs humains avec : l'existence d'une **dynamique** propre de l'apprentissage de l'élève ; une **autonomie** de l'activité de l'élève – crucialement en jeu dans les processus d'enrôlement ; l'importance de l'interaction, entre élèves, entre élèves et enseignant.

Au niveau de l'analyse de l'activité, et des visées non locales d'une formation, ou d'une évaluation, les propriétés du cœur de l'action de l'enseignant conduisent à centrer sur une gamme de buts de l'activité de l'enseignant :

- gérer comment les élèves entrent et agissent dans un « **itinéraire cognitif** » ;

- enrôler les élèves dans le procédé didactique retenu, à la fois en visant de leur part une « posture d'élève », et en provoquant une activité mathématique de leur part (la dévolution de la tâche en étant la première phase) ;

- assurer une fonction de **médiation** entre l'élève et le contenu enseigné. Selon les moments la médiation peut viser l'aide à une mise en forme de l'activité et des acquis de l'élève, pour favoriser l'émergence d'acquis de concepts et méthodes, ou être une activité d'étayage, au sens de Bruner, où l'enseignant « tire » la conceptualisation de l'élève et son activité de résolution de problèmes vers la connaissance mathématique visée.

Les moyens de l'action sont de trois grands ordres lorsqu'il s'agit de l'activité de l'enseignant en situation de classe : le **choix de l'itinéraire cognitif** ; les **actes de langage** en direction des élèves, aussi bien pour l'enrôlement dans les tâches que pour la médiation dans la réalisation de la tâche par les élèves ; l'**activité mathématique devant les élèves** : « faire voir / faire comprendre » une activité « experte ».

Il faut aussi prendre en compte dans l'analyse de l'activité, dans ses conditions comme dans sa réalisation par un enseignant particulier, dans une classe particulière, sur un contenu spécifique, le fait que l'enseignant n'est pas le seul acteur sur les acquisitions des élèves. Sur leur long terme, de multiples enseignants de mathématiques vont intervenir dans la scolarité d'un élève ; sur le moyen et court terme, l'élève peut – ou non – profiter de ressources, de ses pairs, dans sa famille, par des dispositifs de soutien, des ressources présentes via des dispositifs d'information (logiciels, web, …). La notion de « connaissance du processus de travail » (« Work Process Knowledge » dans une tradition en développement en Europe sur la formation professionnelle) permet d'intégrer cette dimension collective dans l'analyse de la compétence de l'enseignant de mathématiques.

2. Intermède : retour au référentiel des 10 compétences et aux évaluations à partir de compétences

a) Finalement les 10 compétences en sont-elles ?

Non, elles sont trop grosses, complètement relatives à la subjectivité de celui qui les lit.

Être compétent veut dire ici être capable de réaliser une tâche prescrite, sauf que la liste ne permet pas de préciser ce dont un enseignant doit être capable précisément en termes d'activités ; en revanche si un enseignant débutant n'a pas une ou plusieurs de ces compétences on peut penser, unanimement, qu'il aura du mal à enseigner.

On retrouve tout de même cette illusion de la traduction en listes, liée à l'illusion de l'objectivité quantitative.

De plus les compétences témoignent de la manière dont chaque individu s'approprie certaines activités, les réorganise « à sa sauce » : est-ce un outil d'évaluation ? De formation ?

b) Évaluer un enseignant à partir d'une liste : mission impossible – sauf pour l'éliminer

C’est bien le caractère rédhibitoire de ces compétences, lié à leur taille et à leur imprécision qui entre en jeu !
Sinon, entre « faire réussir les élèves », « les faire apprendre ou au moins progresser », « les motiver », « leur faire aimer la matière et/ou l’école », se tissent tout un réseau de compétences différemment pondérées et sans doute inextricables, dont l’ensemble, toujours singulier et souvent renouvelé en partie, permet de penser qu’un enseignant aide plus ou moins ses élèves à gravir le chemin des connaissances. Il y a des compensations, et on peut même supposer que les élèves, dans leurs différences, profitent d’une certaine forme de diversité.
Alors évaluer ce réseau à partir d’une séance ? Ce serait extrêmement coûteux, et seuls, peut-être, des chercheurs peuvent le tenter, pour d’autres raisons…
Même si les pratiques sont stables, cela ne permet pas de savoir si des alternatives sont vraiment possibles, tant du point de vue de la personnalité de l’enseignant que de celui des contraintes extérieures.
Evaluer à partir des évaluations des élèves ? Penserait-on à évaluer les inspecteurs à partir des évaluations de leurs enseignants ? Les élèves, eux, jugent beaucoup les enseignants aux notes qu’ils leur donnent et au degré de motivation qu’ils ressentent pendant les cours. Or cela ne correspond qu’à une partie, non négligeable mais insuffisante, des compétences attendues, on le sait bien : tout aussi importante est la mise au travail appropriée des élèves et leurs progrès réel, non directement lié aux notes.

c) Evaluer des enseignants en formation : attention, danger, sauf à éliminer les cas rédhibitoires !

Nous sommes ici dans le cas de figure d’un processus en cours, là où, chez les élèves, une copie blanche peut être associée à un meilleur apprentissage à venir que la copie bourrée de fautes.
Les pratiques des enseignants, même transitoires, sont complexes, non réductibles à une juxtaposition de compétences, à acquérir isolément.
Les compétences à construire font ainsi partie d’un tout, insécable, et ne peuvent pas guider ni même contribuer à évaluer vu leur découpage et leur isolement, l’élaboration des pratiques visées, complexes, non réductibles à la juxtaposition de ces compétences en germe.
Il peut même y avoir de graves défauts dans les pratiques des PLC2, dommageable pour leurs futurs élèves, qui n’apparaissent pas explicitement dans les grilles, dans la mesure où ils résultent justement de l’accumulation de plusieurs éléments. **Ainsi il est important de suivre les étapes du développement professionnel, et ces étapes ne sont pas calquées sur le résultat final à atteindre, qui ne préjuge pas de la route à suivre pour y arriver.**
Enfin, revenons-y**,** ce n’est pas un travail sur chaque compétence prise séparément qui peut former un enseignant, ce qui rend peu informatif, voire négatif les évaluations intermédiaires par compétences.

3. Questions de formation : vers un différentiel de compétences ?

Revenons aux formations, en des termes différents.
Par delà le référentiel, de quoi peut-on avoir besoin en matières de compétences ?
Comment les compétences s’acquièrent-elles, se forment, évoluent ? Dans la mesure où cette catégorie est attachée à des appropriations personnelles, qu’est-ce qu’on peut en faire ?

Par exemple, dans certaines compétences on met en avant la nécessité de faire des compromis ou des choix : Est-ce que c'est en dévoilant ces activités, souvent implicites qu'on les forme ? Comment développer le fait d'avoir (d'asseoir) de l'autorité ? Comment arriver à développer des automatismes, des routines ?
La question de la formation à des tâches discrétionnaires et qui s'appliquent à un environnement dynamique humain est posée. En rester aux tâches prescrites, pour échapper à la complexité est une solution – qui permet de ne pas réclamer de formation pour les formateurs (expérience outillée nuisible, elle complique) et de ne pas se casser la tête à définir des compétences liées aux activités ; travailler les activités elles-mêmes (avec des vidéos, des analyses de classes, etc…) est une autre possibilité ; travailler les prises de conscience et les verbalisations en est encore une autre. Il s'agit de recherches à peine ébauchées, et nous allons juste donner quelques idées, sans même aborder les modalités de formation.

a) Formation ou formations ?

Quelles différences peut-il y avoir entre différentes formations ?
Quoi qu'il en soit, un certain nombre d'évolutions ont lieu l'année de formation, avec le compagnonnage : la classe tourne en gros, les gros problèmes de timing sont résolus, les débutants arrivent à élaborer un texte complet du savoir et à en prévoir le déroulement ; les caricatures du début, entre projet suivi à tout prix au détriment des élèves et trop grande attention aux élèves au détriment du projet sont dépassées ; les débutants prennent conscience d'un certain nombre de relativités : de l'évaluation, des effets de leur enseignement ; ils prennent aussi conscience d'un certain nombre de contraintes.
Les difficultés qui restent concernent davantage l'apprentissage des élèves (plus que leur simple réussite) : elles sont plus profondes, et sont liées à la fois à une certaine disponibilité des connaissances mathématiques qui n'est pas encore toujours en place et à une prise en compte fine des élèves, avec leur variété. C'est d'autant plus délicat qu'il n'y pas de réponse universelle ni toute faite à ces questions.
Par exemple, choisir des exercices appropriés, en ayant notamment un regard critique sur les manuels, élaborer des introductions adaptées aux différentes notions (variables) compte tenu de la classe, arriver à ce que les élèves (ré)organisent leurs connaissances, interpréter ce que font les élèves et en tenir compte dans les explications, commentaires et corrections, faire travailler les élèves de différentes manières et élaborer des aides appropriées, intermédiaires, constructives, gérer ensemble le collectif et les individus, autant d'activités difficiles et qui ne s'acquièrent pas toujours d'emblée. Qui d'ailleurs restent difficiles pour tout le monde !
Comment se poser ces questions en termes de compétences, dans quelle mesure ça ajoute quelque chose ? On voit que ça ne concerne pas les tout débutants.

b) La nécessaire dialectique entre terrain, compagnonnage et formation en centre (que tout le monde s'accorde à déclarer indispensable sauf le ministère !)

Le compagnonnage, qui permet de résoudre une partie des premiers problèmes des débutants, a des limites évidentes, liées à la nécessaire contextualisation du message du formateur. Les formations regroupées, quoi qu'il en soit, apportent plus ou moins de quoi dépasser le cas de la classe de l'année, de l'inscrire dans une certaine globalité scolaire, permettent de partager avec d'autres débutants et c'est très important, amènent à prendre conscience de ce qui est vécu en classe en mettant des mots dessus et en donnant des moyens de l'organiser, de le hiérarchiser, conduisent à élaborer des outils pour faire face à d'autres situations.

Dans ces conditions, on peut à juste titre se poser la question de la nature des compléments de formation à apporter aux formations sur le terrain et de leur « optimisation », compte tenu à la fois de la diversité des personnes en présence et des contraintes importantes, voire massives, des formations. On peut encore rêver, même si ces temps-ci, on est vite ramené sur terre de manière très désagréable. Que nous apporte la vision « compétence » à ce sujet ?

D'ailleurs en didactique professionnelle on insiste sur l'analyse de l'activité pour la formation pas sur celle des compétences. Revenons-y.

4. En guise de conclusion : Dialectique entre activités et candidats « compétences » spécifiques et non immédiats : vers un différentiel de compétences

Je donnerai en guise de conclusion cinq exemples différents (par la taille et les prérequis) d'activités plus précises et éventuellement de « candidats compétences » associées (du professeur de mathématiques). Je ne parlerai pas du problème de l'indépendance relative de ces activités, encore opaque, ni de celui des compensations, tout aussi inconnu.

Comment former à de tels ensembles de compétences cohérentes, supposées importantes ? Par des prises de conscience, sur des vidéos (en actes) ? Est-ce que le fait de regrouper les activités en compétences modifie l'équation à résoudre en formation ? Y a-t-il une progressivité des acquisitions, un ordre ?

Souvent les compétences qu'on va dégager ou suggérer, mettent en jeu des choix, à différentes échelles, en actes ou a priori, et des adaptations en actes, notamment des décisions qui comportent des compromis entre différents impératifs – entre les élèves et le projet du professeur.

À un niveau de gros grain :

1) Choisir les tâches et scénarios sur chaque notion à enseigner (met en jeu la dimension personnelle, la dimension connaissances – en relation avec les spécificités des notions dans leur progression et le relief qu'on peut mettre dessus, la dimension schème de préparation) ;
   - mise au point des « itinéraires cognitifs » proposés en classe (fait avant la classe) : c'est la suite des tâches à proposer aux élèves (dont l'écoute du cours), avec la gestion a priori correspondante (formes de travail à installer, durées a priori) ;
   - choix de l'ordre ;
   - choix des exemples, des exercices et adaptations, puis des problèmes transversaux à proposer faisant fonctionner les notions ensemble ;
   - choix de ce qui est travaillé en classe, des contrôles.

2) Gérer le travail mathématique des élèves en classe, dont les questions, les relances, les aides :

- enrôlement (dévolution et maintien dans l'activité), compte tenu de la forme de travail choisie ;
- aides procédurales intermédiaires : réduction de la tâche mais pas totale, par exemple on peut associer les mots, ou les codages d'un exercice aux théorèmes à utiliser (dégager la structure de surface d'un exercice) ou au contraire dégager le type de problème et les méthodes (structure de fond, peut-être invisible d'emblée) ;
- aides constructives filées : ajouts à partir des activités des élèves ;
- mutualisations, synthèses et bilans permettant la capitalisation (la transformation des activités des élèves en connaissances) compte tenu des interprétations du travail des élèves.

À un grain plus fin :

3) Gérer les transitions, dont les passages collectif/individuel : quand interrompre, quand mutualiser ;

4) Interpréter/évaluer/intervenir : posture générale d'une part (chercher à le faire), d'autre part il existe des facilitateurs (travail en petits groupes), enfin il y a les connaissances sur les élèves entrent en jeu ainsi que les analyses a priori – finalement trois types d'activités sont en jeu : diagnostiquer /gérer un compromis entre des préoccupations différentes (là où en sont les élèves, là où le prof veut aller) / choisir ;

5) Corriger de manière à ce que ça serve aux élèves : entre le modèle qui resservira mais pas toujours « bien », et les explications qui peuvent faire perdre le fil ou permettre de comprendre les traces écrites.

Bibliographie élargie.

Berliner, D. C. (2001). Learning about and learning from expert teachers, *International Journal of Educational Research*, **35**, 463-482.

Casalfiore, R. (2002). La structuration de l'activité quotidienne des enseignants en classe : vers une analyse en termes d'"action située", *Revue Française de Pédagogie***, 138**, 75-84.

Chappet-Pariès, M., Robert, A., et Rogalski, J. (2008a). Que font de élèves de troisième et de quatrième avec une même enseignant dans une séance de géométrie ? Ou de la stabilité des pratiques. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 95-137). Toulouse : Octarès.

Chappet-Pariès, M., Robert, A., et Rogalski, J. (2008b). Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 55-80.

Ericsson, K.A. et Lehmann, A.C. (1996). Expert and exceptional expertise: evidence of maximal adaptation to task constraints, *Annual Review of Psychology*, 47, 273-305.

Margolinas, C. (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître. Les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **12**(1), 113-158.

Pariès, M., Robert, A. et Rogalski, J. (sous presse, 2009). Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques. *Travail & Apprentissages*, 3.

Robert, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe, *Didaskalia*, 15, 123-157.

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes du métier d'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1/2) 57-79.

Robert, A. (2001). Recherches sur les pratiques des enseignants de mathématiques du secondaire : imbrication du point de vue de l'apprentissage des élèves et du point de vue de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques,* 21(1/2), 7-56.

Robert A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse des inférences en formation, *Recherches en didactique des mathématiques,* 27(3), 271 - 312.

Robert, A. et Rogalski, J (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education (La Revue Canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies)*, **2** (4), 505-528.

Robert, A et Rogalski, J (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class, *Educational Studies in Mathematics,* 59(1-3), 269-298.

Roditi, É. (2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en Didactique des Mathématique*, *23*(2), 183-216.

Rogalski, J (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23 (3), 343-388.

Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Des compléments sur les théories de l'activité et du développement pour l'analyse des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. In F. Vandebrouck (Éd.), La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants (pp. 23-30 & pp. 429-459). Toulouse : Octarès.

Rogalski, J. et Samurçay, R. (1994). Modélisation d'un savoir de référence et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau, in Arsac, J., Chevallard, Y., Martinand, J.-L. et Tiberghien, A. (Éds.), *La transposition didactique à l'épreuve*, Grenoble : La Pensée Sauvage, pp. 35-71.

Samurçay, R. et Rogalski, J. (1992). Formation aux activités de gestion d'environnements dynamiques : concepts et méthodes, *Education Permanente,* 111, 227-242.

Vandebrouck, F. (Éd.) (2008). La classe de mathématiques : activité des élèves et pratique des enseignants, Toulouse : Octarès.

Vidal-Gomel, C. et Rogalski, J. (2007). La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences, *@ctivités,* **4**(1), 49-84. (en ligne: http://www.activites.org/v4n1/vidal.pdf).

Une approche par compétences :
Quels fondements? Quels enjeux? Quel avenir?

Jean-François Chesné, IUFM de Créteil
Brigitte Grugeon-Allys, IUFM d'Amiens

Introduction

Le texte qui suit est une adaptation du diaporama présenté lors de l'atelier, et qui a servi de base à la discussion entre les participants.

Les problématiques sur le thème choisi sont nombreuses et celles que nous avions à l'origine choisi de traiter dans cet atelier peuvent être formulées ainsi :

- *D'où vient cette approche par compétences?*
- *Qu'est-ce que ça veut dire?*
- *Où en est-on?*
- *Qu'est-ce qu'on « ne voudrait pas « (en tant que formateurs)?*
- *Qu'est-ce qu'on peut proposer?*
- *Qu'est-ce qu'on a comme marges de manœuvre?*

I. Un tout petit peu d'histoire : la genèse du socle commun

1. Le processus de Lisbonne (2000) :

http://www.e-education-europe.org/fr/rubriques/europers/1.asp

(qui a donné lieu à des recommandations du Parlement européen)

Les principales lignes directrices sont les suivantes :

- La notion de compétence clé qui a débouché sur la définition des 7 compétences du socle commun (les « 7 piliers »), déclinées en connaissances/capacités/ attitudes.

Remarque : le terme initial utilisé pour « capacité » était « aptitude », mais pour des raisons de phonétique, on a préféré la traduction française de « capacité »

- La double perspective de la scolarité obligatoire et d'une formation tout au long de la vie (qui explique la prise en compte d'aptitudes comme la gestion du budget familial, les achats, les voyages)

2. La loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école (23 avril 2005)

http://www.legifrance.gouv.fr/WAspad/UnTexteDeJorf?numjo=MENX0400282L
Elle définit en particulier 5 compétences (voir article 9), et énonce la notion d'obligation de moyens.

3. Le décret du 11 juillet 2006

http://www.legifrance.gouv.fr/WAspad/UnTexteDeJorf?numjo=MENE0601554D

Il définit les 7 compétences actuelles, qui intègrent la notion d'outils pour agir, pour choisir et décider dans la vie quotidienne et fait référence à PISA (http://educ-eval.education.fr/pisa.htm)

4. La mise en place d'un groupe d'experts par compétences

Et des « groupes d'expérimentateurs » (groupes de travail dirigés par les IG)

5. La réécriture des programmes[43]

Le programme a été réécrit en suivant les conditions suivantes :

- 2 colonnes (connaissances/capacités) + distinction socle/non socle
- La déclinaison du socle par cycle

Il reste des questions en suspend :

- L'élaboration d'un cahier des charges pour la validation de la maîtrise des compétences du socle
- Y aura-t-il un document d'accompagnement spécifique pour le socle ?[44]
- Quid du programme de troisième ? Définitif ou intermédiaire ?

6. L'influence des évaluations PISA : la notion de culture mathématique.

Menées en France pour la première fois en 2000, et avec la dominante mathématique en 2003, ces évaluations ont apportées un éclairage nouveau sur ce qu'on pouvait attendre des élèves. En particulier, ce qui était mesuré (et ce qui a été fortement discuté en France), ce ne sont pas les acquis des élèves évalués par leur réussite à des items directement liés à des programme scolaires, mais « C'est l'aptitude d'un individu à identifier et comprendre le rôle des mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos et à s'engager dans des activités mathématiques en fonction des exigences de sa vie, en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi. ». Et en particulier, le choix a été fait de mesurer la capacité des élèves à mettre en œuvre leurs acquis mathématiques pour résoudre des exercices à la vie quotidienne**.**

Contrairement aux autres domaines évalués par PISA, c'est un découpage par domaines qui a été retenu :

- Quantité *(grandeurs et mesures)*
- Espaces et formes *(exercices à supports géométriques)*
- Variations et relations *(graphiques, formules)*
- Incertitude *(statistiques et probabilités)*

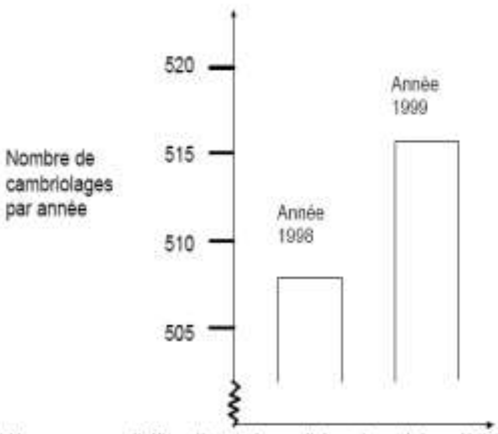
[43] Le programme du 29 août 2008 n'était évidemment pas paru au moment de cet atelier
[44] De même, le document ressource sur le socle commun n'avait pas encore été publié.

Quelques exemples d'exercices[45]

Cambriolages

Lors d'une émission télévisée, un journaliste montre ce graphique et dit :

« Ce graphique montre qu'il y a eu une très forte augmentation du nombre de cambriolages entre 1998 et 1999. »

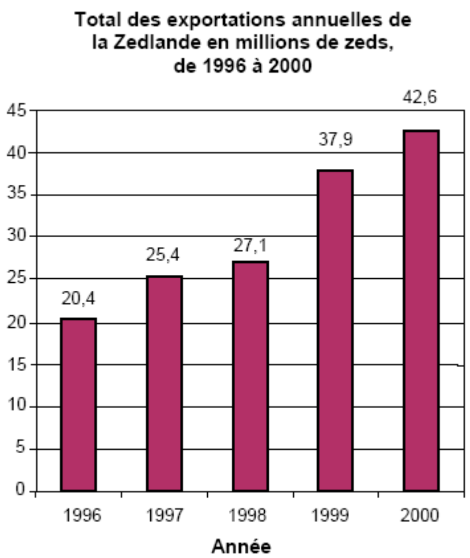


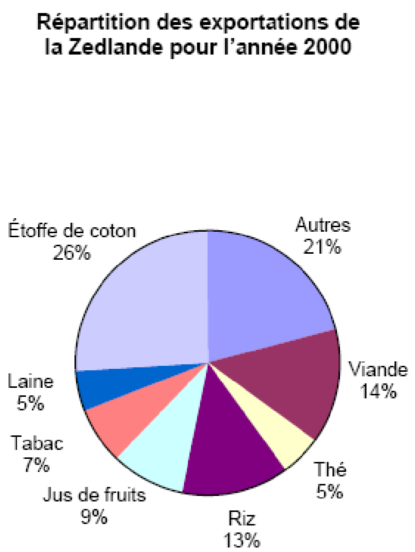
Considérez-vous que l'affirmation du journaliste est une interprétation correcte de ce graphique ? Justifiez votre réponse par une explication.

Taux de réussite
France : 28,8 %
OCDE : 29,5 %

Exportations

Les graphiques ci-dessous fournissent des informations sur les exportations de la Zedlande, un pays dont la devise est le zed.





Question 1

Quel était le montant total, en millions de zeds, des exportations de la Zedlande en 1998 ?

Taux de réussite
France : 92,1 %
OCDE : 78,7 %

---

[45] Les exercices libérés sont à l'adresse suivante : http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/14/10/38709418.pdf

Question 2

Donnez une valeur approchée du montant des exportations de jus de fruits de la Zedlande en 2000.

- 1,8 million de zeds
- 2,3 millions de zeds
- 2,4 millions de zeds
- 3,4 millions de zeds
- 3,8 millions de zeds

Taux de réussite
France : 48,2 %
OCDE : 48,3 %

II. Le socle commun : un projet ambitieux[46] ?

L'influence européenne et la question épineuse des élèves sortant sans diplôme de la scolarité obligatoire ont conduit au concept de socle commun :

> L'hétérogénéité du niveau d'acquisition de ce qui est requis des élèves, à l'école et au collège, a progressivement conduit au concept *de socle commun des connaissances et des compétences*. Il est important, en effet, de s'assurer qu'à la sortie du collège, à un moment où nombre d'élèves n'auront plus que peu, ou pas, d'occasions de recevoir un enseignement généraliste, chacun d'entre eux possède, de façon convenable, les bases de l'éducation, déclinées dans les grands champs de la connaissance et de la réflexion. Il s'agit d'un exercice difficile.

Les objectifs visés reprennent largement le point de vue de PISA :

« Maîtriser le socle commun c'est être capable de mobiliser ses acquis dans des tâches et des situations complexes, à l'Ecole puis dans sa vie ; c'est posséder les moyens de continuer à se former tout au long de la vie afin de prendre part aux évolutions de la société (…). C'est pourquoi, en utilisant la terminologie européenne, chaque compétence se définit comme une combinaison de connaissances fondamentales pour notre temps et de capacités à les mettre en œuvre dans des situations concrètes, mais aussi d'attitudes.[47] »

Sept « grandes » compétences sont définies:

- La maîtrise de la langue française
- La pratique d'une langue étrangère
- Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique
- La maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication
- La culture humaniste
- Les compétences sociales et civiques
- Autonomie et initiative

---

[46] Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques, B. O. n°6 du 19 avril 2007, p8
[47] B. O. n°29 du 20 juillet 2006

La notion de « grande » compétence est précisée :

« Chaque grande compétence du socle est conçue comme une combinaison de connaissances fondamentales pour notre temps, de capacités à les mettre en œuvre dans des situations variées, mais aussi d'attitudes indispensables tout au long de la vie, comme l'ouverture aux autres, le goût pour la recherche de la vérité, le respect de soi et d'autrui, la curiosité et la créativité[48]. »

L'inscription du socle commun dans les programmes a nécessité la réécriture de ceux-ci[49] :

> Les programmes des disciplines scientifiques enseignées au collège sont rédigés de manière à mettre clairement en évidence leur articulation avec le « socle commun ». Leur écriture est « hiérarchisée » car elle identifie clairement ce qui relève du socle, et ce qui est du programme sans appartenir au socle. Cette présentation dessine ainsi deux cercles concentriques : le premier correspond au socle, cœur du programme ; le second est constitué des entrées qui l'enrichissent ou le complètent. Elle permet aux enseignants de différencier les approches pédagogiques et les évaluations qui se rapportent à chacun de ces deux cercles, et contribue à une meilleure prise en charge de la gestion raisonnée des apprentissages.

Et un certain nombre de questions, essentielles dans les pratiques des enseignants, ont surgi :

- Comment articuler école et collège ?
- Comment gérer dans les classes l'avancement du programme et celui du socle ?
- Comment gérer l'aide aux élèves ?
- Comment gérer dans les classes les liens avec les autres piliers?
- Comment évaluer?
- Comment concilier socle et B2i ?

On pourrait revenir (si on en avait le temps) sur le processus, ou plutôt les différents processus, qui ont conduit à la fois à cette définition de socle commun et l'apparition de compétences telles qu'elles sont définies aujourd'hui. Mais les objectifs de cet atelier ne consistent pas à faire une analyse rétrospective des raisons qui ont amené à la situation actuelle, mais plutôt de s'engager dans une réflexion constructive, dialectique afin que chacun d'entre nous s'approprie les concepts qui sont mis en jeu, et participe à une réflexion menant à la réalisation d'outils de formation, « pour la classe », c'est-à-dire compréhensibles, utilisables, et « institutionnellement et didactiquement corrects ».

III. Des éléments à prendre en compte pour faire évoluer les pratiques

1. Adopter un vocabulaire commun

---

[48] B. O. n°29 du 20 juillet 2006

[49] Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques, B. O. n°6 du 19 avril 2007, p10

Chacun comprend ce qu'il faut entendre par « *connaissances* ». Intitulée auparavant « *contenus* », la première colonne a peu été modifiée dans la rédaction des nouveaux programmes[50], et fait toujours référence à des notions disciplinaires. Négligeant la distinction que font certains entre « ***savoirs*** » et « ***connaissances*** », nous proposons qu'on associe ces deux termes. Nous donnerons comme exemples de connaissances :

- Les propriétés des triangles usuels
- Le théorème de Pythagore
- Les identités remarquables
- Les différentes écritures d'un nombre
- Les différents graphiques pour représenter des données

Il semble qu'une première difficulté pour tous ait été l'interversion apparente entre les termes « capacités » et « compétences »[51]. Pendant de longues années, en France en tout cas, une compétence était grosso modo l'utilisation d'une connaissance dans une situation donnée, (le versant « outil » d'une connaissance) : cette formulation recouvrait en fait de nombreuses attentes vis-à-vis des élèves, comme l'application directe de connaissances ou l'acquisition de mécanismes opératoires. De « *compétences exigibles* », on est passé à simplement « *compétences* » dans les programmes précédents, puis à « *capacités* » dans les nouveaux programmes. Nous proposons donc qu'on associe à « ***capacités*** » ce qu'on entendait par « *compétences* » auparavant, c'est-à-dire des « ***savoir faire*** » (on parle aussi quelquefois de savoirs procéduraux par opposition à aux savoirs déclaratifs, ou d'aptitudes, ce thème ayant été abandonné au profit de capacités afin d'éviter la confusion avec « *attitude* »). Inutile de s'attarder sur des exemples, l'essentiel des exercices d'entraînement des manuels mobilise des savoir faire de la part des élèves. La plupart des exercices des contrôles porte également sur des savoir-faire.

On reconnaît des capacités par les verbes d'action qui les décrivent[52]:

- reporter une longueur
- construire, à la règle et au compas, un triangle connaissant les longueurs de ses côtés,
- dessiner ou compléter un patron d'un parallélépipède rectangle,
- lire une abscisse, les coordonnées d'un point,
- calculer un pourcentage,
- calculer le produit de nombres relatifs simples,
- construire le cercle circonscrit au triangle,
- déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule.

En fait, des capacités pourraient finalement correspondre à des types de tâches :

- lire, interpréter et compléter un tableau à double entrée
- tracer, par un point donné, la perpendiculaire ou la parallèle à une droite donnée
- regrouper des données en classes d'égale amplitude
- fabriquer un cylindre de révolution dont le rayon du cercle de base est donné
- simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible

[50] Ces nouveaux programmes sont ceux de août 2008.
[51] A signaler d'ailleurs les copier/coller sur contenus/connaissances et compétences/capacités dans le programme de 6^{e} !
[52] La plupart des formulations a été reprise dans les programmes du 29 août 2008.

Concrètement, on peut constater que dans les programmes ces « savoir-faire » s'appuient sur des connaissances, qui figurent de façon explicite dans la première colonne, ou associées à une capacité. On trouve ainsi souvent dans la colonne « *capacités* » la formulation « connaître et utiliser… :

- la formule donnant l'aire d'un disque,
- la définition de la médiatrice d'un segment
- l'égalité $a/b = a \times 1/b$,
- les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle,
- un algorithme donnant le PGCD de deux entiers

Mais on trouvera également dans cette colonne des formulations peut-être moins claires[53] :

- savoir que $1L = 1\ dm^3$
- savoir que, pour un cercle, tout point qui appartient au cercle est à une même distance du centre
- comprendre les notations a^n et a^{-n}
- savoir que si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a

On trouve enfin des formulations qui manifestement peuvent être ou semblent devoir interprétées autrement :

- Choisir les opérations qui conviennent au traitement de la situation étudiée
- Différencier périmètre et aire
- Utiliser une expression littérale

Pour terminer, on admettra que les liens entre connaissances et capacités sont tellement étroits que la formulation retenue pour la première colonne de la grille de référence pour le pilier 3 est d'ailleurs : « Connaissances et capacités attendues en fin de scolarité obligatoire ». Quant aux livrets actuellement expérimentés, ils font état « d'éléments constitutifs de chaque compétence ».

Mais la grande difficulté réside sans doute dans le fait qu'une compétence ne peut pas et ne doit pas se résumer à la restitution d'une connaissance ou à l'application d'une capacité. C'est pourquoi elle intègre la notion d'attitude. Pour le pilier 3A du socle (Les principaux éléments de mathématiques), on peut lire à propos des attitudes à développer : « L'étude des mathématiques permet aux élèves d'appréhender l'existence de lois logiques et développe :

- La rigueur et la précision
- Le respect de la vérité rationnellement établie
- Le goût du raisonnement fondé sur des arguments dont la validité est à prouver. »

On peut constater au passage que « l'ouverture aux autres, le respect de soi et d'autrui, et la créativité ne semblaient pas a priori faire partie des attitudes que l'activité mathématique est censée favoriser, mais l'écriture des nouveaux programmes a modifié en les élargissant le nombre et la nature des attitudes qui peuvent être développées en mathématiques[54]. (Pour le programme de sixième, elles figurent en chapeau pour chaque domaine.)

---

[53] Nous n'avons repéré aucune ambigüité dans le programme de 5e

[54] Pour le cycle central, page 32, et pour le cycle d'orientation, pages 55-56, B. O. du 19 avril 2007. Cependant, la mention explicite des attitudes a disparu des programmes du 29 août 2008.

Il est nécessaire de s’attarder un moment sur ce point.

D’une part, il semble évident que la définition actuelle d’une compétence ne peut pas se résumer à un couple (connaissance ; capacité), ni même à un ensemble de couples (connaissance i ; capacité i_j).

Comprendre ce que serait une compétence consiste donc à prendre en compte une nouvelle dimension qui relèverait d’autre chose que les connaissances et les capacités. On définit souvent une compétence dans le monde professionnel par un triplet (savoir ; savoir faire ; savoir être) et même par un quadruplet si on ajoute le savoir devenir, ajoutant ainsi une dimension dynamique. Une attitude relèverait donc en ce sens d’un **comportement socio-affectif**. C’est assurément cette dimension que le socle et les nouveaux programmes ont voulu prendre en considération en parlant d’attitude.

Mais, d’autre part il se trouve que parallèlement à cette prise en compte du comportement et du positionnement des élèves, il y a un autre aspect dans la notion de compétence, sans doute présente depuis toujours dans l’activité mathématique, et déjà exprimée par exemple dans le document d’accompagnement du programme de sixième de 1995 : « Il faut veiller à ce que le découpage des compétences exigibles ne conduise pas à étudier séparément chacune d’entre elles. » Cette volonté de lutter contre la fragmentation des apprentissages apparaît très nettement aujourd’hui « en redonnant à ceux-ci une finalité visible, (…), en s’attaquant à la difficile problématique du transfert des connaissances d’un contexte à l’autre[55]. »

Il apparaît donc clairement que la notion de compétence ne peut pas se concevoir indépendamment d’un ensemble de ressources, d’une classe de situations et dans une certaine complexité. A ce stade, nous conviendrons que les compétences seraient méthodologiques dans le cadre d’une démarche d’investigation.

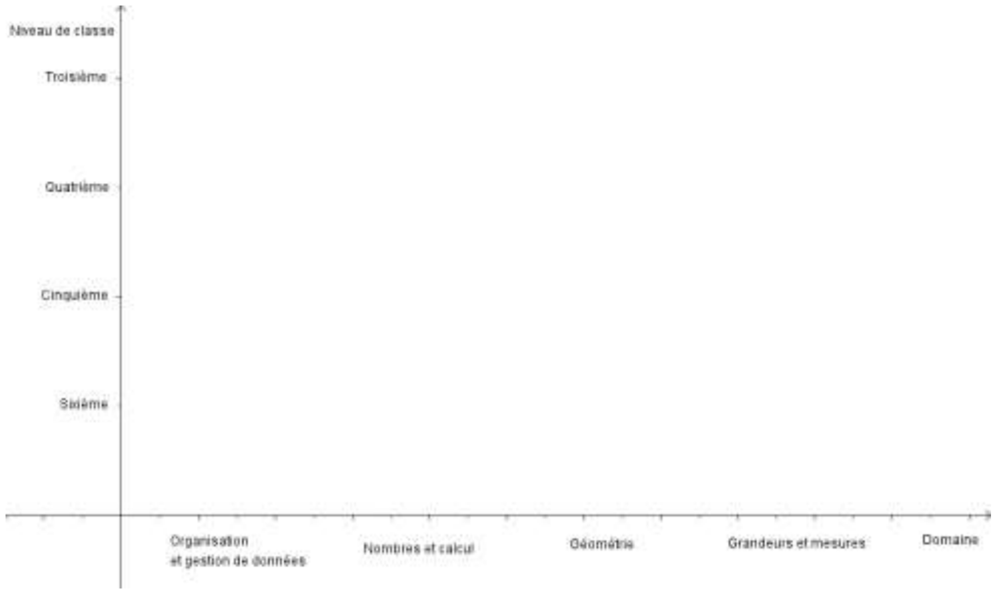
2. Une première façon de transposer : Quelles situations pour quels niveaux de classe par domaine?

L’étape suivante de notre démarche consiste alors à chercher, en fonction d’un niveau de classe donné, des situations favorables au développement de telle ou telle compétence, conformément à la répartition des contenus des programmes selon quatre grands domaines.[56]

On peut donc légitimement penser à situer ou à créer des énoncés ci-dessous :

[55] Les livrets de compétences : nouveaux outils pour l’évaluation des acquis, rapport IGEN, juin 2007

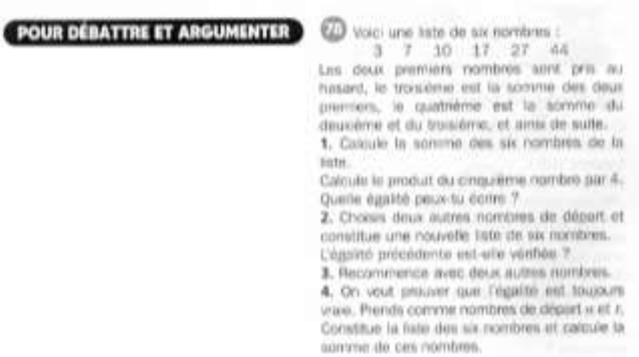
[56] Nous avons vu que cette approche a également été retenus dans les évaluations PISA.



La production de quelques situations connues suffira à mettre en évidence la difficulté de les placer à un endroit précis selon le choix effectué ci-dessus.

Exemple 1:
Un troupeau est composé de chameaux et de dromadaires.
On compte 180 têtes et 304 bosses. Sachant qu'un dromadaire possède une bosse et un chameau deux bosses, combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ?

Exemple 2: (Maths 5e, Magnard, 2006, p22)



POUR DÉBATTRE ET ARGUMENTER

70 Voici une liste de six nombres :
3 7 10 17 27 44
Les deux premiers nombres sont pris au hasard, le troisième est la somme des deux premiers, le quatrième est la somme du deuxième et du troisième, et ainsi de suite.
1. Calcule la somme des six nombres de la liste.
Calcule le produit du cinquième nombre par 4. Quelle égalité peux-tu écrire ?
2. Choisis deux autres nombres de départ et constitue une nouvelle liste de six nombres. L'égalité précédente est-elle vérifiée ?
3. Recommence avec deux autres nombres.
4. On veut prouver que l'égalité est toujours vraie. Prends comme nombres de départ u et v. Constitue la liste des six nombres et calcule la somme de ces nombres.

Pour chacune de ces deux situations : quelle(s) compétences sont visées? A quel niveau?

Une autre question vient tout naturellement : A partir de quelle(s) procédure(s) d'élèves peut-on estimer que telle ou telle compétence visée est atteinte?

3. Des contenus aux compétences

Si donc l'entrée par les compétences ne semble pas immédiate, nous savons en revanche ce que nous souhaitons éviter : « les erreurs du passé ». Nous faisons référence à ces listes interminables d'objectifs, apparentées aujourd'hui à des micro-compétences, et qui semblent encore exister dans la plupart des manuels, des ressources en ligne… et dans les pratiques des enseignants.

1. Je sais reporter une longueur

2. Je sais reproduire un arc de cercle de centre donné

3. Je sais construire le symétrique d'un point par rapport à une droite

LES REPRODUCTIONS ET LES CONSTRUCTIONS USUELLES :

G5	reporter une longueur à l'aide du compas					
G6	reproduire un angle à l'aide du compas					
G7	reproduire un arc de cercle de centre donné à l'aide du compas					
G8	reproduire un triangle d'après un modèle avec l'aide du compas					

Cela ne veut pas dire que la définition de ces types de tâches, comme nous l'avons dit, n'est pas utile, ni même nécessaire pour les enseignants, mais simplement qu'on ne doit pas en rester là.

Parmi les expériences antérieures, nous retiendrons les tentatives des évaluations diagnostiques à l'entrée en seconde (et d'une évaluation à l'entrée en sixième…) déclinées, avec le vocabulaire utilisé à l'époque[57] en capacités (« Lire et comprendre », « Rechercher », « réaliser » et « Mettre en forme »), puis en compétences, et enfin en composantes. Ces évaluations n'ont pas obtenu l'adhésion des enseignants : parmi les raisons invoquées, un des grands obstacles est pour les enseignants de s'éloigner des contenus.

Une expérience menée avec des PLC2

Dans cette perspective, un travail a été mené en formation de PLC2 à Créteil, en début d'année, à partir d'un texte posé en contrôle à des élèves par un PLC2 lui-même

Contrôle de mathématiques n°1

Exercice 1 :

A l'aide des mots somme, produit, différence, quotient, terme et facteurs décrire les calculs suivants puis les effectuer.

1) $(-3) \times (-8)$
2) $(-4{,}2) - (+9)$
3) $(-2) + 5$
4) $((-25) + 7) : (+6)$

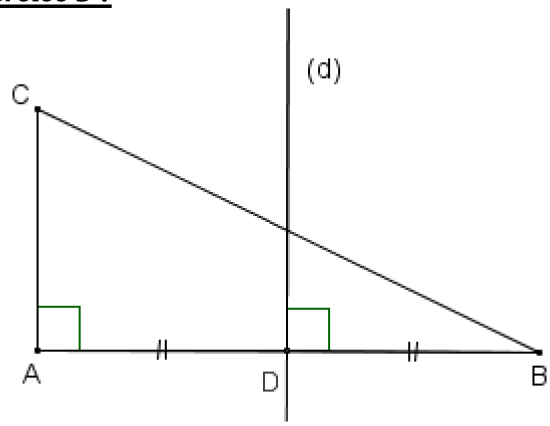
Exercice 2 :

Effectuer les calculs suivants (*en faisant apparaître les calculs intermédiaires lorsque vous utilisez une règle de priorité de calculs*) :

[57] De 1995 à 2001

1) (-3) + 2 × (-5)
2) 56 : (-8) × 6
3) (5 : 2 + 3 × 5) × (– 2)
4) 612 : 6 × 7 - 4

Exercice 3 :



Il n'est pas demandé de reproduire la figure sur votre copie.

1) Que représente la droite (d) pour le segment [AB] ? Vous justifierez votre réponse.
2) Montrer que (d) et (AC) sont parallèles.

Exercice 4 :

Soit BAC un triangle équilatéral de coté 5cm. Soit A' le milieu de [AC].
Soit B' le milieu de [BC].

1) Construire une figure correcte (*au crayon à papier en laissant apparents les trais de construction et avec les codages*).
2) Quelle est la mesure de l'angle A'CB' ? Vous justifierez votre réponse.
3) Montrer que A'B'C est un triangle équilatéral.

Exercice 5 :

Démontrer que (-1) × (-2) × (-3) × … × (-17) est un nombre négatif.

Après un travail « classique » de détermination d'un barème, puis de notation de plusieurs copies réelles, la question a été posée des informations à recueillir par l'enseignant en vue du retour des copies en direction des élèves. Le formateur a proposé alors la grille suivante aux PLC2 afin de faire comprendre aux stagiaires, les types de tâches demandées d'un exercice à l'autre pouvaient mobiliser « quelque chose » qui transcende les contenus : mettre des noms sur ce « quelque chose « fut une façon de travailler la notion de compétence.

Compétence	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
Connaître des définitions					
Appliquer une technique : - Effectuer des opérations simples - Construire une figure					

Organiser une démarche : - Effectuer des calculs avec priorités opératoires - Concevoir un raisonnement					
Rédiger un raisonnement					

4. Approche par compétences : pour l'apprentissage ou pour l'évaluation ?

La difficulté évoquée ci-dessus à prendre de la distance par rapport aux contenus semble toucher à la fois le temps de l'apprentissage et celui de l'évaluation. Le premier est sans doute encore plus complexe à appréhender par une entrée par les compétences que le second. C'est pourquoi nous nous restreindrons au second, même si une partie de ce qui suit peut être adaptée.

Si l'expérience menée avec les PLC2 a permis de les sensibiliser à la notion de compétence, elle ne suffit évidemment pas. Etre compétent, avoir des compétences, maîtriser une compétence, qu'est-ce que cela signifie ?

Quelques phrases pour comprendre[58] :
A est plus compétent que B s'il sait faire quelque chose que B ne sait pas faire
A est plus compétent en t' s'il sait faire ce qu'il ne savait pas faire en t.

A est plus compétent s'il s'y prend d'une meilleure manière (relativement à certains critères : temps, matériel utilisé,…)
A est plus compétent s'il dispose d'un répertoire de ressources alternatives qui lui permettent d'adapter sa conduite aux différents cas de figure qui peuvent se présenter (ex de la proportionnalité)
A est plus compétent s'il est moins démuni devant une situation nouvelle.

Sans remonter jusqu'à la polémique à propos de la notion de compétence entre le monde de l'éducation et le monde de l'entreprise, on peut dire que la deuxième naissance de cette notion, en tout cas celle qui nous préoccupe aujourd'hui, se situe avec le processus de Lisbonne qui impulse une ligne européenne de penser des programmes d'enseignement. Les évaluations internationales PISA s'inscrivent dans cette dynamique. Plus près de nous, on trouve dans un rapport de l'IGEN[59] deux tensions au cœur des débats actuels :

- Ce qu'on sait bien évaluer, c'est ce qu'un élève sait, dans un champ disciplinaire donné, et l'école n'est pas là pour favoriser une utilisation plutôt qu'une autre d'une connaissance donnée. Inversement, penser compétence, c'est s'écarter des champs disciplinaires pour s'intéresser à la mobilisation de ressources transversales, qui transcenderaient telle ou telle discipline.

---

[58] Ces questions ont été posées par G. Vergnaud lors d'une conférence à l'IUFM de Créteil. http://www.creteil.iufm.fr/ressources/service-audiovisuel/journees-detude/les-competences-en-situation-et-en-formation-professionnelles/yves-lichtenberger/
[59] *Les acquis des élèves, pierre de touche de la valeur de l'école ?* juillet 2005

- L'école est là pour faire acquérir aux élèves des compétences définies dans le cadre scolaire sans regard exclusif vers la vie d'adulte et les compétences qu'un adulte devrait maîtriser dans une société moderne.

On peut cependant trouver un consensus dans le monde scolaire sur des conditions pour mener une évaluation par compétences[60] :

- Il est nécessaire de proposer des tâches inédites aux élèves
- Il est nécessaire de proposer aux élèves des tâches complexes, ces tâches devant faire appel à un ensemble de procédures effectivement apprises
- Il est nécessaire de présenter aux élèves des épreuves diagnostiques en proposant des outils d'analyse des erreurs

Nous ne pouvons ignorer les expériences acquises d ans ce domaine, en particulier celles menées au Québec et en Belgique francophone.

Le projet québécois était très ambitieux, et s'est finalement heurté à trois points épineux :

- L'incompréhension des familles et leur regret de l'abandon des notes
- Des difficultés des enseignants pour proposer des évaluations
- Un rejet de l'évaluation des compétences transversales (attitudes ?)

(Ces points sont d'ailleurs repris en Suisse romande.)

Le projet belge francophone qui semble encore être en vigueur, est intéressant en ce sens qu'il propose trois niveaux de compétence :

- Savoir exécuter une opération en réponse à un signal (« compétences élémentaires »)
- Posséder une gamme de compétences élémentaires et savoir choisir celle qui convient dans une situation inédite
- Savoir choisir et combiner correctement plusieurs compétences élémentaires pour traiter une situation nouvelle et complexe.

Il est naturel d'établir un parallèle avec les travaux d'Aline Robert qui distingue trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances[61] :

- le niveau des connaissances techniques (l'élève doit appliquer directement une définition, une propriété, une formule, une règle de calcul,…),
- le niveau du mobilisable (l'élève identifie dans un exercice un savoir et l'applique)
- le niveau du disponible (l'élève sait utiliser ses connaissances pour résoudre un problème sans indications).

Cette distinction entre ces trois niveaux permet par exemple d'interpréter partiellement les contradictions entre deux logiques observées par D. Butlen dans des classes ZEP à l'école primaire[62] : la logique de la réussite immédiate et la logique de l'apprentissage.

Il apparaît donc important à ce stade, de chercher de nouvelles manières de penser, qui prennent à la fois en compte les nécessaires transformations à effectuer, et les résistances diverses que nous avons évoquées plus haut.

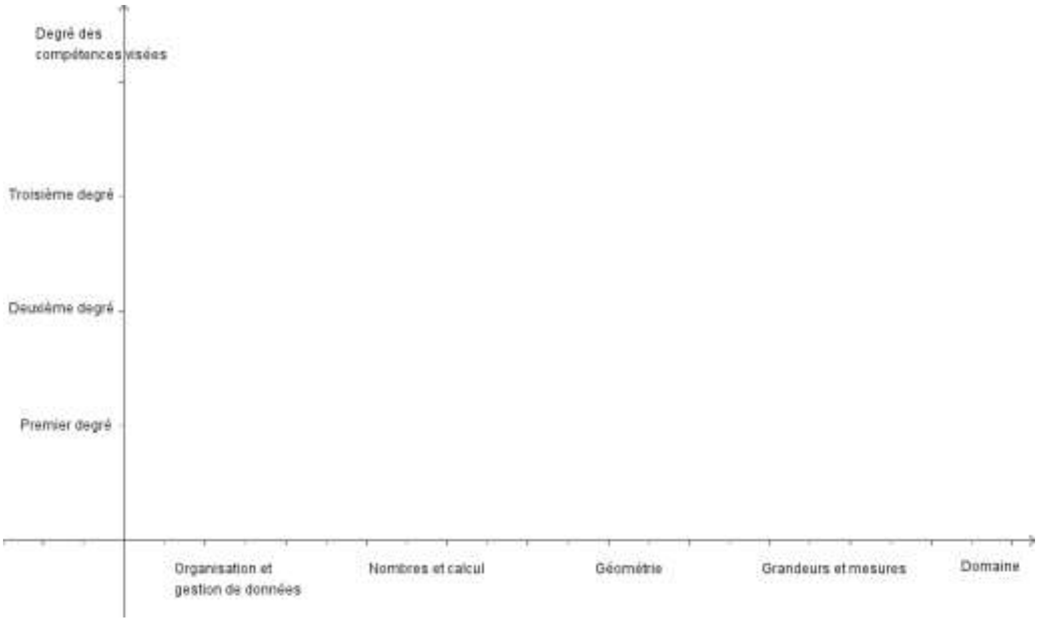
---

[60] V. Carette, Gestion des paradoxes liés à la notion de compétence, Mesure et évaluation en éducation, Vol.30, n°2, 2007, pp. 49 à 71.

[61] Robert A. (2008), La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Partie 1 - Chapitre 3. In *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants,* F. Vanderbroucke (eds) (pp45-52). Collection Formation, Octarès Editions.

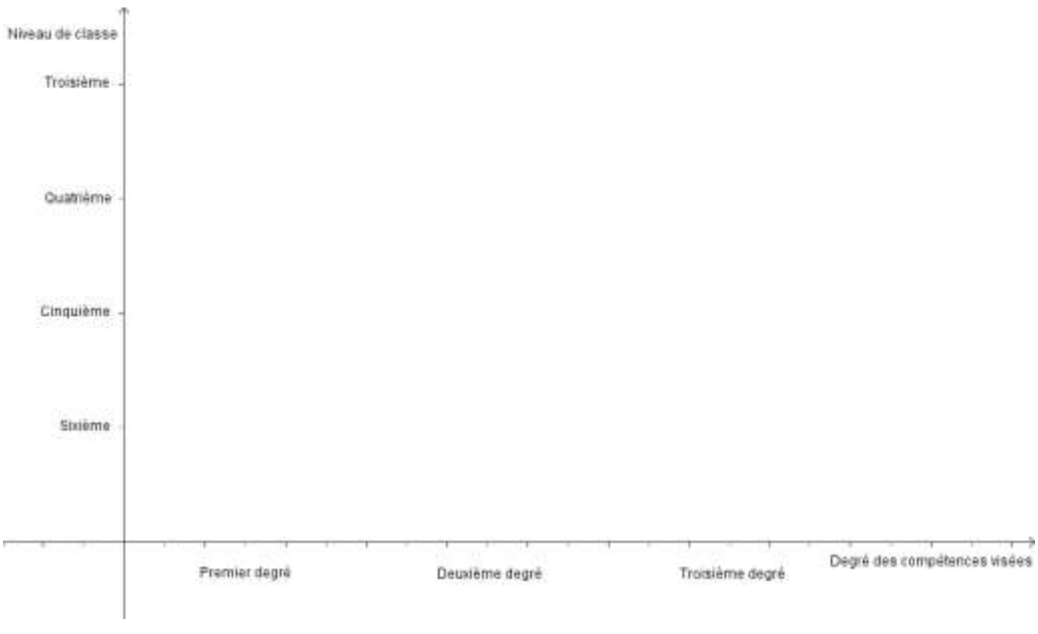
[62] *Dur d'enseigner en ZEP*, sous la direction de Marie-Lise Peltier, La pensée sauvage, Editions, 2004

Une première proposition se situerait donc du côté des énoncés : face à un énoncé, relativement à un domaine donné, à quel degré de mobilisation des compétences ou à quel niveau de mise en fonctionnement des connaissances peut-on estimer qu'on se situe? Ce qu'on peut traduire par :



Mais, si on veut être cohérent dans une vision plus large de la définition d'une compétence, surgit inévitablement la question des changements de cadres. Et surtout, se pose la question du moment auquel on cherche à savoir si un élève maîtrise une compétence.

Une deuxième proposition pourrait alors se représenter de la façon suivante :



Ce qui pourrait conduire à deux grandes questions que peut se poser un enseignant :

- A quelle classe de problèmes appartient celui que je propose à mes élèves ?

- De quels modes de résolution disposent les élèves?

Et de nouvelles modalités :

Phase 1 : on demande aux élèves d'accomplir une tâche complexe.

Phase 2 : on propose aux élèves la même tâche, avec des adaptations.

Phase 3 : on propose aux élèves une série de tâches simples qui correspondent aux procédures élémentaires qui doivent être mobilisées pour accomplir la tâche complexe de la phase 1.

Des travaux menés par différents groupes de travail[63] s'inscrivent déjà dans cette démarche : la double exigence de l'avancement dans le programme et de l'acquisition des connaissances et des compétences du socle commun doit conduire à les généraliser et à les diffuser dans toutes les classes. En ce sens, la recherche et la formation ont un rôle majeur à jouer.

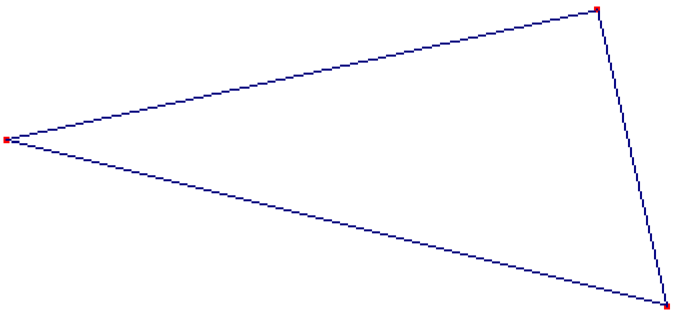
[63]On peut citer notamment le travail de Marcel Combès, professeur de mathématiques au collège Marthe Lefèvre, à Saint-Quentin (02). Voir annexe

Annexe

Document produit par Marcel Combès, professeur de mathématiques au collège Marthe Lefèvre, à Saint-Quentin (02)

Problème de recherche

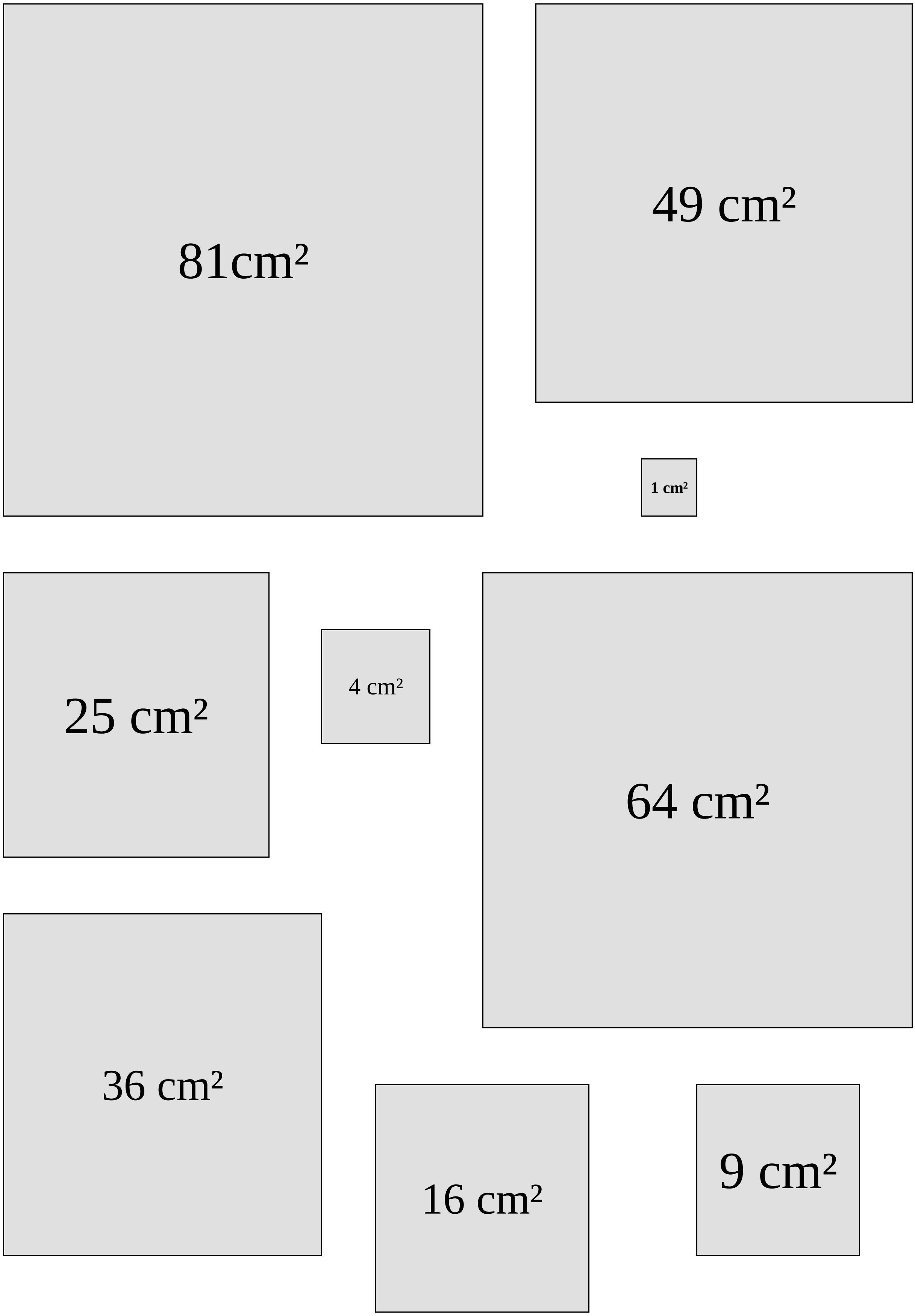
Pierre doit déterminer le périmètre de ce triangle. Il n'a pas sa règle mais il a retrouvé dans son cahier de mathématiques une série de carrés sur lesquels la mesure de leur aire en cm² est inscrite.



Pierre pourra-t-il faire son travail ?
OUI - NON

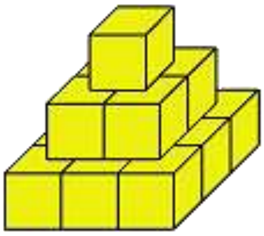
1. Si OUI, explique comment il fera
   Si NON, explique pourquoi il ne pourra pas le faire

2. Si tu as répondu OUI à la 1ère question, présente la recherche de ta solution du problème de Pierre.


81cm²
49 cm²
1 cm²
25 cm²
4 cm²
64 cm²
36 cm²
16 cm²
9 cm²

Un autre exemple proposé par M. Combès: la pyramide de cubes

Cette pyramide de 3 étages est composée de 14 cubes.



De combien de cubes une telle pyramide de 10 étages est-elle composée ?

45