CORFEM

ACTES des 18ème et 19ème colloques

coordonnés par
Michèle GANDIT et Brigitte GRUGEON-ALLYS

16-17 juin 2011 & 14-15 juin 2012

Université et IUFM de Franche-Comté

Depuis maintenant une vingtaine d'années, la commission inter-IREM des formateurs des professeurs de mathématiques du second degré organise tous les ans un colloque. Le présent document constitue les actes des 18ème et 19ème colloques de la CORFEM, qui se sont déroulés les 16 – 17 juin 2011 et 14 – 15 juin 2012 à l'IUFM de Franche-Comté, sur le site de Fort Griffon.

La CORFEM est la commission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré. Cette commission regroupe des formateurs – PRCE, PRAG ou enseignants-chercheurs – enseignant tous à l'IUFM, qui souhaitent réfléchir sur les stratégies de formation, produire des documents et mutualiser des ressources, afin d'améliorer leur action auprès des étudiants des masters se destinant au métier de professeur de mathématiques ou auprès des professeurs stagiaires. La CORFEM se donne pour buts d'accompagner la formation des formateurs d'enseignants ou de futurs enseignants de mathématiques, ainsi que d'échanger, de mutualiser et d'élaborer un ensemble de ressources pour la formation, en particulier, *via* son colloque annuel qui regroupe entre 60 et 80 participants. Ces colloques donnent lieu à des publications.

La CORFEM, les membres de son bureau (voir ci-dessous), espèrent ainsi favoriser une meilleure visibilité de la formation des professeurs dans l'enseignement secondaire et contribuer à la prise en compte de thèmes de formation pour la recherche.

Les thèmes ou questions abordés dans ces actes :

- Quelle utilisation des vidéos dans la formation initiale ou continue ?
- L'enseignement des grandeurs au collège et au lycée.
- La réforme de la « mastérisation », les masters ; bilan après un an.
- Nouveaux savoirs et nouveaux dispositifs dans l'enseignement secondaire, quels effets sur les pratiques ?
- La formation et le recrutement des étudiant(e)s qui se destinent au métier de professeur de mathématiques ; premiers bilans ?

Les membres du bureau de la CORFEM en 2012 :

Aurélie Chesnais, IUFM de l'académie de Montpellier, Université Montpellier 2 ;
Sylvie Coppé, IUFM de l'Académie de Lyon, Université Lyon 1, **Responsable de la CORFEM** ;
Lalina Coulange, IUFM de l'Académie de Bordeaux, Université Bordeaux 4 ;
Michèle Gandit, IUFM de l'Académie de Grenoble, Université J. Fourier ;
Brigitte Grugeon-Allys, IUFM de l'Académie d'Amiens, Université de Picardie Jules Verne ;
Marc Guignard, IUFM de l'Académie de Créteil, Université de Paris Est, Créteil ;
Philippe Le Borgne, IUFM de l'Université de Franche-Comté, Université de Franche-Comté ;
Marie-Christine Levi, IUFM de l'Académie de Versailles, Université de Cergy Pontoise ;
Didier Missenard, IUFM de l'Académie de Versailles, Université de Cergy Pontoise ;
Dominique Poiret IUFM Centre Val de Loire, Université d'Orléans ;
Michel Poncy, IUFM de l'Académie de Lyon, Université Lyon 1.

Table des matières

COLLOQUE DES 16 & 17 JUIN 2011

THEME : QUELLE UTILISATION DES VIDEOS DANS LA FORMATION INITIALE OU CONTINUE ?

L'utilisation de vidéos en formation initiale et continue devient une pratique courante des formateurs et, avec la « masterisation », cette utilisation risque de s'accroître puisque les étudiants de master n'ont pas (ou peu) d'expérience de terrain. Cependant cette utilisation est à questionner. Dans quel but ? S'agit-il de montrer de « bonnes pratiques », des pratiques innovantes ou de faire de l'analyse des pratiques ?

Quels sont les choix faits pour la prise des images : caméra sur le professeur ou sur les élèves ? Quels types de données sont-ils nécessaires pour comprendre ? Faut il montrer des classes ordinaires ou des situations moins classiques ?

Quel(s) cadre(s) théorique(s) pour analyser les séances de classe ?

UTILISATION DES VIDEOS EN FORMATION :
QUESTIONS, DISPOSITIFS, CADRES THEORIQUES, RESULTATS

Ruhal FLORIS
Institut Universitaire de Formation des Enseignants, Université de Genève[1]

Résumé – Formateurs et chercheurs s'accordent sur le fait que le simple visionnement de vidéos de classes est insuffisant pour améliorer la compréhension des pratiques d'enseignement. Comment structurer ce visionnement ? Quels cadres théoriques utiliser ? Avec quelle efficacité ? De quelle manière peut-on évaluer la qualité des analyses pouvant être faites ? Nous présentons la manière dont différents chercheurs abordent ces questions et les réponses qu'ils apportent. Nous présentons également les résultats d'une recherche de catégorisation de vidéos de leçons ordinaires (niveau collège) et l'exploitation de l'outil ainsi construit dans le cadre d'une formation de formateurs et les perspectives en formation initiale.

1. Introduction

Comment organiser une formation d'enseignants *efficace* ?

Dans le cadre de la formation initiale et continue des enseignants, les formateurs doivent articuler théorie et pratique, d'une part en transposant la théorie construite à partir des recherches en didactique pour qu'elle soit pertinente à l'action réelle et d'autre part en théorisant les pratiques d'enseignement à partir de l'observation, les enrichissant ainsi d'un regard plus objectif. Les formations proposent dans certains cas un suivi sur le terrain, à travers un dispositif d'observations suivies d'entretiens et de comptes-rendus.

Lors de ces « analyses de pratiques », si les formateurs parviennent à éviter un premier écueil, correspondant à fournir des recettes et proposer des modèles, la question de comment faire évoluer l'action de l'enseignant en classe reste entièrement posée.

La recherche fournit des éléments de réponses très partiels à cette question de l'efficacité. D'après une revue récente de la question, elle semble être peu avancée (Cochran-Smith & Zeichner, 2005).

En l'absence de certitudes les recherches et les dispositifs de formations associés sont fondés sur des hypothèses de travail, que nous présentons brièvement ci-dessous.

Approches cognitives

On peut estimer que l'action formatrice doit porter sur les connaissances des enseignants, leurs « représentations » par exemple dans le but de les modifier pour favoriser un contrôle par le sens plutôt que des actes.

Dans ce cas la formation vise essentiellement le sujet « enseignant », c'est le cas d'approches que l'on peut appeler « cognitives strictes » (Carpenter, Fennema & Franke, 1996).

[1] Ruhal.Floris@unige.ch

Dans ces approches on construit des grilles d'observation cherchant à établir dans quelle mesure les interactions de l'enseignant avec les élèves suscitent une réflexion approfondie, des discussions, etc. Le plus souvent les critères établis sont indépendants du contenu (Lipowski & al, 2006) ! La formation qui en découle consiste à faire développer les « bons » gestes.

Approches didactiques

Les approches « didactiques » tiennent compte des conditions et des contraintes dans le but de faire passer l'enseignant d'une situation qui agit sur lui à l'agir sur la situation.

La situation pouvant être très locale : discussion sur la réponse à un problème ou plus globale : introduction de l'algèbre dans une perspective a-didactique.

Le contenu joue un rôle important. Différentes approches théoriques donnent lieu à des dispositifs de types différents (décrits par Houdement & Kuzniak, 1996). Nous nous intéressons à considérer ces dispositifs comme définissant un milieu, en étendant ce concept de la Théorie des Situations (Brousseau, 1988). Dans un premier temps, par le terme « milieu », nous considérons un ensemble de « ressources ».

2. Milieux pour la formation

Chez Portugais (1995), le milieu consiste en un séminaire avec alternance de leçons sur des algorithmes numériques et d'analyses des transcriptions, sans apports théoriques préalables.

Avec Lerouge (2003), le milieu est une leçon observée par plusieurs formés qui fait l'objet d'un travail d'explicitation et de théorisation dans un atelier de formation.

On retrouve ces caractéristiques dans le Lesson Study, système de développement professionnel au Japon (secondaire inférieur) qui alterne observations collectives de la même leçon (plusieurs fois) et son analyse collective (Yoshida, 1999).

Utilisation de vidéos

On peut se demander également dans quelle mesure les vidéos peuvent être intégrées dans un dispositif de formation. Il est attesté qu'un visionnement non organisé conduit le plus souvent à des formulations d'ordre général et à des jugements : les rétroactions sont insuffisantes (Brophy, 2004 ; Bertoni & al, 2006). Les travaux de R. Santagata (2002, 2007) font état de l'évolution de groupes d'étudiants-enseignants vers une meilleure précision des analyses, après avoir suivi un cours comportant l'étude de vidéos. D'autres recherches mettent en évidence des résultats analogues.

L'idée centrale de la recherche Cadivam[2] est que des vidéos de leçons de mathématiques associées à des catégorisations didactiques, dans une base de données, peuvent contribuer à constituer un « milieu » pour le développement de savoirs et de

[2] **Ca**tégorisation **Di**dactique de séquences **V**idéo pour l'**A**nalyse de pratiques d'enseignement des **M**athématiques dans le cadre de la formation. CADIVAM a obtenu le soutien du Fonds national d'avril 2007 à mars 2010, projet DoRe n°13DPD3-116746 avec comme institutions partenaires de terrain IFMES GE, HEP-VS, et les services de formation continue de l'enseignement secondaire obligatoire genevois et vaudois.

connaissances efficaces pour l'action de l'enseignant en classe et hors de la classe et qu'elles peuvent favoriser tout particulièrement le développement d'outils de description précis de cette action, utiles au formateur, conduisant ainsi à un développement des capacités d'analyse de pratiques.

Globalement, étant donné l'enregistrement vidéo d'une leçon de mathématiques, on peut se poser ces questions :

- Que dire du point de vue de l'apprentissage mathématique des élèves ?
- Que dire du point de vue de la prise en charge par le maître de l'apprentissage des élèves ?
- Quelle exploitation en formation ?

Ces questions constituent le point de départ des catégorisations effectuées dans le cadre de la recherche Cadivam.

3. Catégorisations

Nous avons pris comme point de départ certaines catégorisations de la recherche internationale Timss-video[3], 1999 (Hiebert & al, 2003) qui avait pour objectif la comparaison des pratiques d'enseignement des mathématiques dans les classes de 8ème degré de différents pays à l'aide d'enregistrements vidéo[4]. Un important corpus de leçons filmées a ainsi été produit, selon une méthode d'échantillonnage statistique. Les premiers résultats sont essentiellement descriptifs. Il a été ainsi mis en évidence que, dans tous les pays, une grande partie du temps de leçons au 8ème degré était consacrée à la résolution d'exercices ou de problèmes[5] (op. cit.). Les chercheurs de Timss-video ont élaboré une catégorisation de ces problèmes (tableau 1) qui s'est révélée productive, puisqu'elle a permis de mettre en évidence des différences significatives entre les pays (voir figure 1, extraite de Ferrez et al, 2004).

[3] Timss correspond à Third International Mathematics and Science Study, National Center for Education Statistics, U.S. Department of Education.

[4] Il s'agit de 638 leçons en Australie, Japon, Hong-Kong, Pays Bas, Suisse, Tchéquie et USA. En Suisse 140 leçons ont été filmées, dont 39 en Suisse romande.

[5] Dans la suite de la communication, nous nous bornerons à utiliser le terme « problème » étant sous-entendu qu'il peut s'agir d'un exercice.

Les énoncés de problèmes ont été catégorisés sur la base du type de traitement mathématique qu'ils impliquent a priori et à ce niveau scolaire : utilisation de procédures (P), explicitation de propriétés (S), recherche de liens (M). Le premier type d'énoncé concerne les problèmes uniquement résolus par application d'une procédure ou d'une série de procédures (exemple : « simplifier la fraction 18/12 »). Le second type fait de plus appel à une convention ou à un concept mathématique (exemple : « déterminer si deux droites données sont perpendiculaires »). Le dernier type d'énoncé se réfère à un problème nécessitant une recherche de liens entre des idées, des faits, ou des procédures mathématiques (exemple: « un champ carré a une surface de 361 mètres carrés. Combien vas-tu payer pour le clôturer si le mètre de barrière coûte quatorze francs soixante ? »).
Le traitement de ces problèmes en classe a également été catégorisé, en faisant usage des mêmes codes.

Tableau 1 – Catégorisation des problèmes selon Timss-vidéo

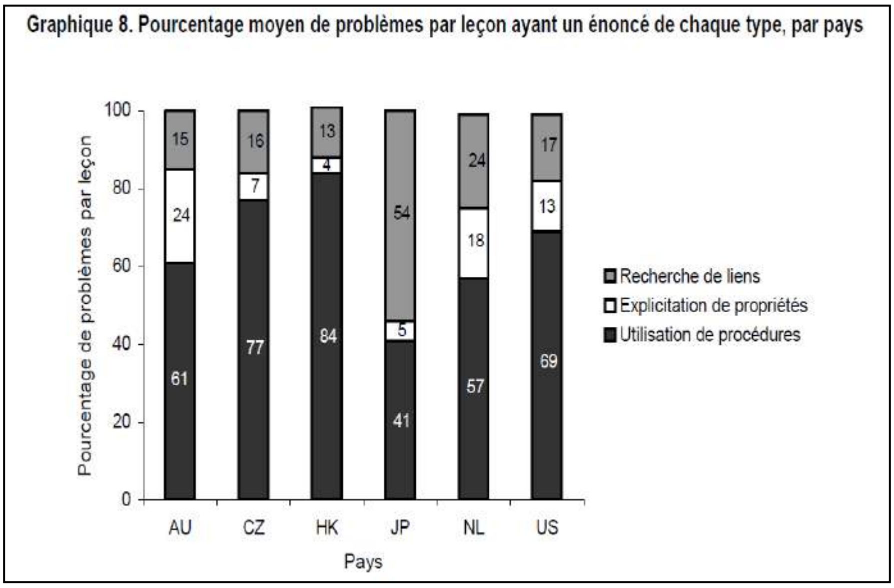


Figure 1 – Types d'énoncés de problèmes selon les pays.

La catégorisation des problèmes fournit de précieuses informations mais elle ne prend pas en compte la place laissée par l'enseignant aux élèves pour qu'ils mènent leur propre réflexion sur les problèmes traités. De ce fait, il semblait important, pour constituer un outil utile aux formateurs, de pouvoir recenser également des événements de la leçon montrant les potentialités d'apprentissage offertes aux élèves, en exploitant la caractérisation du milieu didactique, selon Brousseau (1988) et Margolinas et Steinbring (1994). Nous avons donc créé une grille définissant les spécificités des Phases d'Apprentissage Potentiel (PAP) (Bertoni & al, 2006) qui permettent de décrire des situations sous l'angle des occasions d'apprentissage offertes aux élèves et des décalages entre les stratégies du point de vue du maître et du point de vue de l'élève. Nous avons fait l'hypothèse que cette notion fournirait un point d'entrée judicieux pour l'analyse de leçons ordinaires de mathématiques, permettant un approfondissement de la réflexion sur les pratiques, voire sur la possibilité de leur modification. La centration sur les PAP permet à la fois de s'intéresser à l'élève : qu'apprend-il ? que peut-il apprendre ? et au maître : quelles conditions d'apprentissage met-il en place pour le ou les élèves ? Nous partons de l'idée que face à une réponse ou une question d'élève, l'enseignant a la possibilité, si les conditions le permettent, de maintenir une certaine incertitude propice à l'apprentissage. Ce sont ces phases que le codage PAP cherche à identifier. Nous avons défini des critères permettant cette identification et proposé un tableau de synthèse pour chaque occurrence de PAP (voir tableau 2).

Leçon n° ….			PAP n° ….					
Temps début/fin	Qui initie	Caracté-risation début	Qui termi-ne	Caracté-risation fin	Contenu	Caracté-ristiques	Bifur-cations	Maintien du milieu d'apprentissage
	T/S/Sn*	Cf. liste**	T/S/Sn*	Cf. liste**	Maths et code du problème	Intention-nelle ? Privée ?		Si oui comment ?

* T enseignant, S un élève, Sn plusieurs élèves.
**Liste des caractérisations possibles : demande d'information, d'explication, d'aide / demande d'évaluation / réponse fausse / non-réponse ou silence ou inaudible / identification d'une erreur par T (ou d'un blocage) / réponses multiples (contradictoires) / demande d'autres solutions possibles, de reformulation / autre.
***Liste des caractérisations possibles : réponse donnée / correction par T/ évaluation de la réponse de S / vérification de la réponse de S / suggestion, mise en relation / approbation / répétition approbative de la réponse de S, reformulation / interruption, abandon / suivie par une institutionnalisation / autre.

Tableau 1 – Catégorisation des PAP

A ces codes, nous ajoutons des indications sur le contenu mathématique traité avec une référence au problème concerné et le caractère public ou privé de la PAP. Enfin nous prenons en compte d'éventuelles « bifurcations », qui correspondent aux moments où, entre élève et enseignant, l'objet du discours diverge. Ces bifurcations peuvent porter sur le sens de la question posée, sur la procédure utilisée, sur le niveau auquel l'enseignant place son explication ou sur la pertinence des exemples choisis par rapport à la situation. L'élément sans doute le plus difficile à repérer, mais très important par rapport au sens de notre travail est le « maintien du milieu d'apprentissage » qui détermine dans quelle mesure l'enseignant réussit à maintenir l'élève ou le groupe classe en situation d'apprentissage au sens de Brousseau.

Concrétisation de ces catégorisations dans une base de données

Pour que ces tables de spécification des leçons, à savoir l'organisation sociale du travail et des interactions maître-élèves, les catégorisations M-S-P des problèmes et leurs sous-catégories, le codage en termes d'organisation mathématiques et de moments didactiques des leçons et l'identification des PAP, puissent faire l'objet de consultations systématiques, en lien avec les vidéos de leçons, le rassemblement de toutes ces informations dans une base de données (BDD) s'imposait. Après avoir défini un cahier des charges pour une BDD convenant à notre projet, nous avons élaboré et testé des prototypes, choisi un logiciel adapté et déterminé un modèle (cf. figure 2).

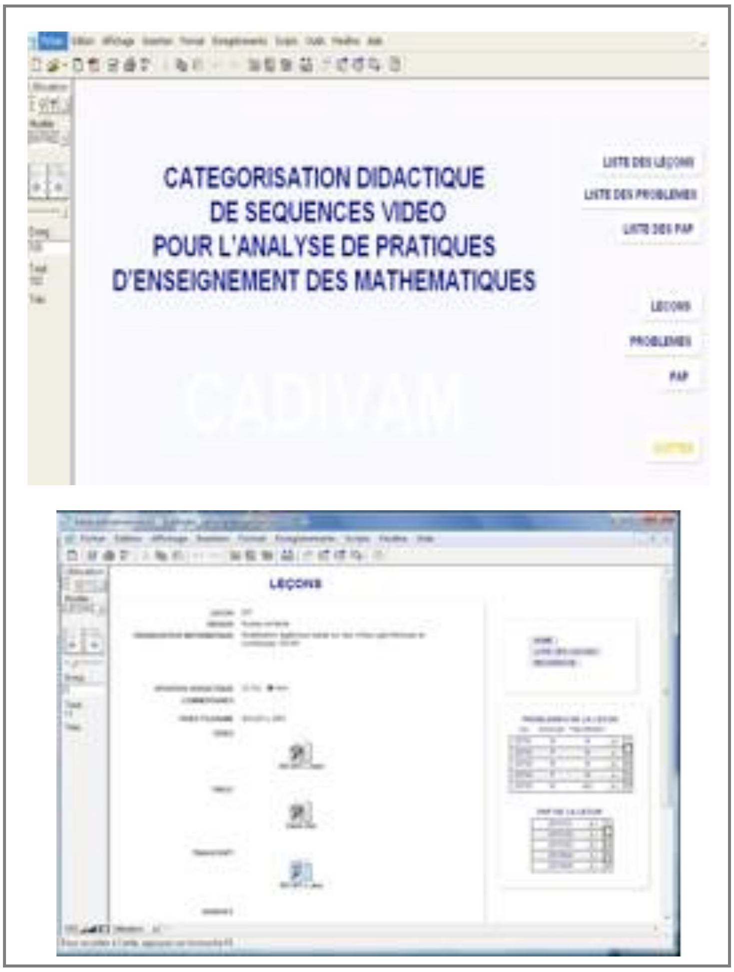


Figure 2 – Copies d'écran de la base de données Cadivam

4. Formation de formateurs

Pour mesurer l'intérêt de la base de données et la faire connaître aux potentiels futurs utilisateurs, ont été organisés lors de deux années scolaires successives deux cours d'une durée de 18 mois pour formateurs d'enseignants de mathématiques. Le premier cours, organisé en 2007-2008 par la HEP-VD, a regroupé dix formateurs de différents cantons suisse-romands et le second cinq. Le statut des formateurs participant aux cours était varié : maîtres formateurs, maîtres d'accueil pour les stages ou encore responsables cantonaux chargés de la formation continue des mathématiques ou des évaluations communes. Ces formateurs étaient issus aussi bien du secondaire I que du secondaire II. Pour éviter trop de temps de déplacements, les cours ont été organisés partiellement à distance.

Dans la suite de ce texte nous présentons et analysons uniquement les données relatives au premier des deux cours.

Le projet de recherche dans lequel s'est inscrit le cours prévoyait une double analyse de pratique, au début et à la fin du cours, dans le but de définir des critères de qualité pour une telle analyse. Nous avons choisi de faire analyser une de leurs leçons par chaque participant (tous enseignants à temps partiel). Une autre option aurait été de leur demander d'analyser une des leçons du corpus Timss-vidéo (choisie par nous). Notre choix nous a paru le plus formateur. De plus, il est à relever que les institutions des participants les déchargeaient de deux heures de cours de telle sorte qu'il était réaliste de leur demander un tel travail.

Ce choix va cependant s'avérer délicat à coordonner avec les connaissances visées par le cours, ainsi qu'avec les conditions de la recherche. En effet, alors que les catégories provenant de Timss-vidéo et celles que nous avons développées se révélaient intéressantes lors de leçons habituelles, comportant une part importante d'interactions publiques, il fallait s'attendre de la part de formateurs d'enseignants au choix de leçons plutôt « modèles », isolées, correspondant par exemple au début ou à la fin d'un chapitre. En phase avec les conceptions socio-constructivistes qui sous-tendent les moyens d'enseignement suisses romands du secondaire inférieur (élèves 12-15 ans), tout se passe comme si, pour ces formateurs, les leçons de travail plus techniques (résolution et correction d'exercices) n'existaient pas, ne devaient pas faire l'objet d'un travail spécifique de formation. De ce fait, nous avons demandé aux formateurs de choisir une leçon dans laquelle il y avait au moins 50% de parties publiques, ce qui a été ressenti par la plupart d'entre eux comme une contrainte forte. Il est cependant à noter que si l'on considère l'échantillon, que l'on peut considérer comme représentatif, des leçons Timss-vidéo, au moins trois quart des leçons sont dans ce cas.

La position de la leçon dans une séquence a été déterminée en intégrant quelques questions ad hoc dans le questionnaire que nous leur avons demandé de remplir. Il s'est avéré que plusieurs des participants ont proposé des leçons isolées plutôt que des leçons faisant partie d'une séquence.

Le cours proposé aux participants s'est déroulé en quatre étapes principales (voir tableau 3). Après une introduction aux codages de la recherche Timss-vidéo, il leur a été demandé de sélectionner et analyser un à trois extraits de leur leçon d'une durée totale de 15 minutes (pré-test). Ensuite ils ont bénéficié d'apports théoriques et pris en main la base de données en présence et à distance. Il s'est terminé avec une présentation par les participants d'une analyse de leur leçon. Enfin les participants ont rendu une nouvelle analyse des mêmes extraits (post-test)[6].

Les apports théoriques (caractérisation des problèmes, milieu et sa structuration, organisations mathématiques et didactiques) et la prise en main de la base de données ont alors été proposés lors de deux jours de travail. La suite du cours a ensuite consisté en un travail d'approfondissement en présence et à distance. Il s'est terminé par une présentation finale par les participants d'une analyse de leur leçon. C'est sur le contenu de ces présentations que nous nous basons pour établir quelques résultats.

[6] Pour une présentation plus détaillée, voir Floris et al, 2010.

- ½ journée en septembre - octobre 07 : introduction au cours et consignes pour le travail à distance.
- octobre - décembre 07 : par groupes de deux selon affinités, enregistrement vidéo d'une leçon de mathématiques donnée par chacun d'entre eux, sélection de deux extraits (un par leçon) d'environ 15 minutes et analyse des extraits avec enregistrement.
- 2 jours de rencontre en janvier 08 : cours sur la structuration du milieu et formation aux codages d'analyses de leçons utilisés dans la base de données.
- février- avril 08 : travail autonome des participants sur la base de données, avec participation à un forum de discussion.
- ½ journée début avril 08 : Rencontre sur le choix des extraits vidéos de la base de données.
- 2 jours de rencontre en mai – juin 08 : présentation par les participants des parties de leçons retenues et de leur analyse.

Tableau 3 – Agenda du cours de formation à l'analyse de pratiques

Les présentations

Celles-ci ont été très diverses. Cela correspondait à nos prévisions, étant donné le caractère général des consignes et la grande liberté laissée aux participants. Il est possible de les placer dans deux catégories.

I. La plupart des participants ont présenté des situations caractéristiques qui mettaient en évidence une phase d'apprentissage potentiel(le), d'après les indications théoriques données.

Voici un exemple, concernant le problème suivant :

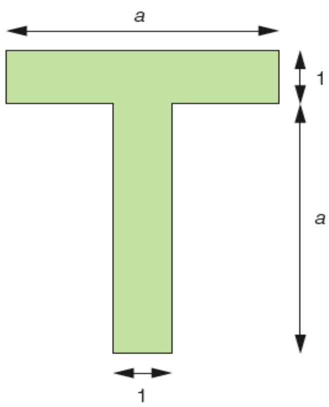
Calculer l'aire et le périmètre de la figure ci-contre	

Figure 2 – Un exemple de problème

Début fin (min.)	Qui initie ?	Caractérisation début	Qui termine ?	Caractérisation fin	Contenu	Caractéristiques	Bifurcation	Maintien du milieu d'apprentissage
25:23–27:20	T[7]	Identification d'une erreur	T	Suggestion pour aboutir à la bonne réponse	Calcul du périmètre de la forme "T"	Privée et intentionnelle	Non	Oui

Tableau 1 – Le participant analyse une PAP en relation avec le problème de la figure 3

II. Deux groupes se sont attaqués à un approfondissement théorique de notre cours.

Un premier groupe s'est penché sur les phases d'apprentissage et a prolongé l'étude en définissant des phases d'apprentissage réalisées. Autrement dit, il a essayé de voir dans quelle mesure l'intervention du maître a débouché sur un apprentissage réel de la part des élèves.

Un autre groupe s'est penché sur la théorie de structuration du milieu et plus particulièrement sur le schéma des situations emboîtées. Il a pu fournir à ses collègues un exposé qui éclaircissait la théorie du cours. Cela a été explicité par des exemples de leurs leçons.

5. Résultats

Fonctionnement du dispositif comme « milieu »

On propose ici pour cette analyse l'outil structuration du milieu. L'action que nous étudions est celle d'un enseignant faisant un cours. Il s'agit également de prendre en compte la préparation de ce cours. Une fois le cours fait, le dispositif met l'enseignant en situation de s'interroger sur son action au moyen de différents outils conceptuels. Le cours était centré sur le concept de milieu et en particulier de situation d'apprentissage lors de l'échange maître-élève et des potentialités de cet échange. Ces concepts ont été effectivement employés lors des analyses demandées, ils ont permis une interrogation sur les actions à chaud de l'enseignant visant à déployer, à guider, à structurer la situation d'apprentissage de l'élève (générique). C'est l'utilisation de ces concepts qui permet d'attester la présence d'un milieu d'apprentissage pour l'enseignant. Ceci n'est pas totalement anodin dans la mesure où le travail avec des vidéos se révèle souvent de nature générale avec prédominance de jugements (Brophy, 2004, Santagata, 2002).

Si le travail d'apprentissage de l'enseignant a pu s'effectuer sur ce point, il a été moins présent au niveau des concepts mathématiques en jeu dans les leçons ainsi qu'au niveau de l'organisation de la séquence. Les catégorisations de problèmes et les descriptions des organisations mathématiques en jeu étaient presque totalement absentes

[7] T pour Teacher.

des présentations. Ceci pourrait s'expliquer par le milieu proposé (analyse d'une partie de leçon ne permettant pas de remonter au niveau de l'organisation didactique). La réalisation et/ou l'analyse d'une séquence de plusieurs leçons aurait été ici nécessaire. En outre, un concept attracteur équivalent à celui de PAP n'a pas été proposé. En ce qui concerne les organisations mathématiques, il nous semble qu'il serait intéressant de proposer une caractérisation des éléments technologiques (justification des techniques) en partant de certaines idées proposées par Assude (2007).

Les analyses de pratiques (pré et post tests)

De premières analyses de type statistique avec les précautions liées au petit nombre de textes analysés (vingt textes) semblent montrer des résultats intéressants, en particulier l'intégration par les participants d'un certain nombre de concepts. En effet, il apparaît que dans les post-tests les participants portent, sur des leçons observées, un regard plus scientifique car bien davantage basé sur des faits précis et des tentatives de compréhension de ceux-ci à la lumière d'éléments théoriques stables. Le jugement global et souvent négatif est moins présent.

Nous avons établi un système de codage didactique d'analyses de pratiques et nous les présentons ci-dessous.

Deux caractéristiques de ce codage concernent l'analyse des gestes du professeur à chaud, plutôt imprévus, à la différence de ce que l'auteur du texte considère avoir été anticipé lors de la préparation de la leçon ou ce qui fait partie du comportement habituel du professeur. Sachant que ces gestes peuvent soit viser à conclure la phase en cours, soit à favoriser sa prolongation, nous avons défini deux codes différents :

- C1 code l'analyse des liens entre les actions du professeur en situation et les activités mathématiques des élèves (situation didactique niveau 0).
- C2 code l'analyse des possibilités d'apprentissage (aménagement d'éléments du milieu d'apprentissage) offertes aux élèves par l'action du professeur en situation ou par la situation elle-même (situation d'apprentissage niveau –1).

Une troisième caractéristique concerne les gestes s'inscrivant dans la leçon telle que prévue par l'enseignant et concerne le niveau 1, soit le projet de la leçon :

- C3 code l'analyse des liens entre les stratégies prévues par le professeur ou faisant partie de son fonctionnement habituel et les activités mathématiques des élèves. C3 est moins local que C1 et C2, et correspond à des considérations générales relevant de l'organisation d'une leçon.

Une quatrième caractéristique concerne l'étude de l'insertion de la leçon dans un thème d'étude, au niveau +2 qui situe le professeur dans la construction de la séquence d'enseignement dans laquelle s'inscrit la leçon analysée. Il est clair que si la leçon ne fait pas partie d'une séquence, il y aura peu d'occurrence de ce code.

- C4 code ainsi l'analyse des liens entre le contenu mathématique et l'organisation mathématique et didactique.

La cinquième et dernière caractéristique prend en compte le cadre institutionnel :

- C5 code l'analyse des liens entre le contenu mathématique traité et le curriculum, autrement dit les contraintes écologiques.

Le tableau 5 résume les liens entre les codes et la structuration du milieu du professeur de Margolinas (2002).

Les 5 critères	C5	C4	C3	C1	C2
Niveau de situation	+3	+2	+1	0	-1

Tableau 5 – Critères d'analyse de pratique et niveaux de structuration du milieu de Margolinas

A ce codage de base, reprenant une idée de Santagata & *al* (2007), nous avons rajouté un qualificatif noté par un symbole « + » si l'analyse se révélait particulièrement argumentée et détaillée, prévoyant de retrouver dans une certaine mesure le même type de résultats dans les deux textes d'un enseignant-formateur particulier, mais avec un passage dans le post-test à une analyse mieux fondée et argumentée. C'est bien ce que nous avons constaté en travaillant sur ces post-tests. Néanmoins une autre caractéristique est apparue globalement chez tous les auteurs, à savoir un important effort de réflexion théorique, qui a amené une réorganisation du codage avec la prise en considération de cette théorisation à travers un code symbolisé « RT », en lien ou non avec un code Ci.

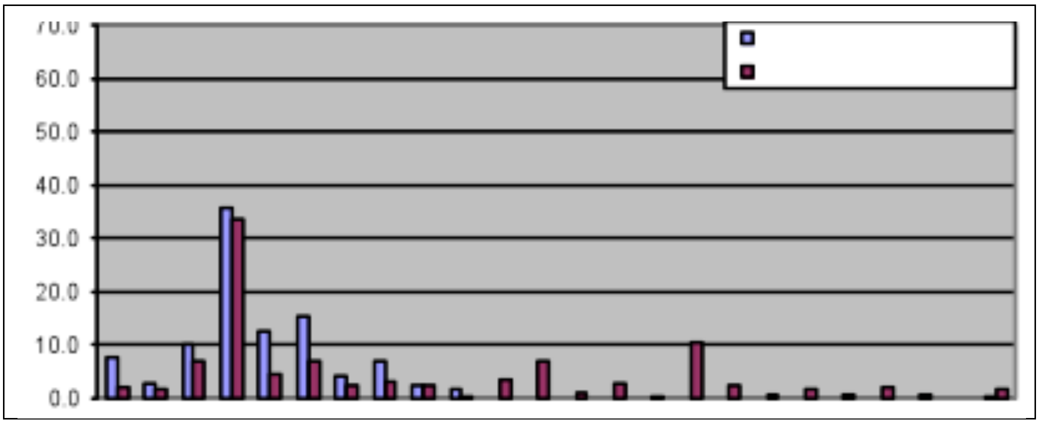


Figure 3 – Comparaison Pré Post test Cours 1 critères

La figure 4 présente le pourcentage de mots codés selon les critères explicités plus haut par rapport au nombre total de mots d'analyse. On constate que, dans le pré-test déjà, les analyses sont centrées sur les possibilités d'apprentissage offertes aux élèves (code type C2 correspondant à près de la moitié du texte) et sur les objectifs de la leçon (type C3). Les éléments plus curriculaires ou d'insertion dans un thème sont moins présents. Rappelons ici que plusieurs participants avaient choisi une leçon pas véritablement intégrée dans un chapitre de cours. L'intérêt porté à l'apprentissage des élèves se confirme dans le post-test. Mais l'évolution remarquable, c'est la présence dans ce dernier de références théoriques, celles-ci étant presque totalement absentes dans le pré-test. Quant à la diminution des codes de type C3, concernant l'analyse du projet de la leçon, certains participants ont sans doute estimé qu'il n'était pas nécessaire de le refaire dans leur seconde analyse, ce que l'un d'entre eux a d'ailleurs explicitement écrit.

Ce qui ressort donc avec l'importante présence de codes RTC2 et RT+C2, c'est l'appropriation de l'outil PAP dans les post-tests, avec, en conséquence, une réflexion focalisée sur une phase précise de la leçon et une réflexion d'un point de vue de structuration du milieu : dans quelle mesure la phase étudiée favorise-t-elle l'apprentissage des élèves, et pourquoi ?

En examinant plus particulièrement les analyses de certains formateurs, on peut constater une diversité relativement grande, avec présence plus grande d'analyses au niveau curriculaire pour certains, par exemple afin de justifier le choix d'un thème de leçon un peu particulier et portant sur un objectif d'enseignement plutôt global (compréhension de l'irrationalité). Un autre formateur n'est pas entré dans le contrat implicite d'utilisation des théories étudiées, mais s'est basé sur des considérations théoriques issues de la didactique spécifique d'une de ses autres disciplines d'enseignement, l'éducation physique. Cette situation a conduit à l'introduction d'un critère référence théorique personnelle (RTperso).

Tout s'est passé comme si le contrat de formation proposé consistait en une demande d'utilisation d'éléments théoriques dans le post-test, ce qui n'est finalement pas surprenant. Ce qui est remarquable pour certains, c'est le choix d'un approfondissement important de ces éléments.

6. Conclusion

Un dispositif de formation de formateurs ambitieux a été mis en place, fondé sur le concept de milieu de la didactique des mathématiques ainsi que sur la mise à disposition d'une base de données de leçons de mathématiques. L'enjeu était d'accompagner les participants dans une démarche leur permettant de dépasser la rationalisation des propres pratiques si courante parmi les enseignants. Objectif atteint, dans une certaine mesure, avec l'appropriation de la notion de Phase d'Apprentissage Potentiel(le), permettant d'une part d'identifier certaines interactions intéressantes et de s'interroger sur leur effet sur l'apprentissage des élèves. Cette appropriation, assez rapide, a probablement été un obstacle à la prise en compte d'autres éléments, pouvant apparaître à première vue plus banals et évidents, concernant des aspects de nature plus globale comme le type de leçon, l'insertion dans une séquence, dans un plan d'études. Par ailleurs, le choix de focaliser l'étude sur une leçon des participants eux-mêmes, s'il a permis la motivation escomptée, a eu quelques effets non souhaités, comme un intérêt très marqué sur leur propre enseignement par rapport à une position de formateur alors que nous visions, dans l'esprit Timss-vidéo un travail comparatif, qui ne nous semble pas avoir été mené. De ce point de vue, une révision du dispositif serait nécessaire, avec un pointage plus explicite sur la base de données.

En proposant à des formateurs un travail basé sur une théorisation concernant plutôt l'apprentissage des élèves (celle de la structuration du milieu), nous avons pu amener certains d'entre eux à en faire une exploitation pertinente dans leur analyse de pratiques. De ce fait, on peut considérer que la première étape de la transposition vers la formation initiale est possible, ce que trois cours de formation de ce type ont confirmé. La seconde étape de cette transposition n'a pas fait l'objet de recherches de notre part, bien que des essais soient en cours. La notion de PAP se révèle être un outil permettant de repérer certaines phases de leçons dans lesquelles le travail d'apprentissage des élèves est visible et elle peut être considérée comme la transposition de recherches autour de la notion de milieu. Si cette notion de PAP ne semble pas poser de difficulté particulière dans le cas d'une formation initiale, la structuration du milieu, avec la distinction entre milieu didactique, milieu d'apprentissage et milieu d'action se prête mal à une présentation telle quelle à des enseignants débutants. Néanmoins, la base de données produite dans le cadre de la recherche Cadivam s'est d'ores et déjà révélée fonctionnelle comme outil pour des ateliers d'analyse de pratique en formation initiale à Lausanne et à Genève.

REFERENCES

Assude, T. (2007) Modes et degré d'intégration de Cabri dans des classes du primaire. In R. Floris & F. Conne (Eds) (pp.119-134) *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck.

Bertoni, M., Floris, R., Haussler, M.-J. & Weiss, L. (2006) Catégorisation didactique de séquences vidéo pour l'analyse de pratiques d'enseignement des mathématiques. Communication présentée au congrès Espace Mathématique Francophone tenu à Sherbrooke en mai 2006. Publication sur cédérom.

Brophy, J. (2004) *Using Video in Teacher Education*. Oxford: Elsevier.

Brousseau, G. (1988) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9.3.*

Carpenter, T., Fennema E. & Franke, M. (1996) Cognitively Guided Instruction. *The Elementary School Journal*, 97, 3-20.

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Vetter, B., Klieme, E., Reusser, K. & Pauli, C. (2005) Quality of geometry instruction and its impact on the achievement of students with different characteristics. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal.

Cochran-Smith, M. Zeichner, K. (2005) Studying Teacher Education: Report Of The AERA Panel On Research And Teacher Education, Lawrence Erlbaum Associates.

Ferrez, E., Floris, R. & de Marcellus, O. (2004) L'enseignement des mathématiques en 8e année dans sept pays. Résumé des résultats de l'enquête internationale "TIMSS 1999 Video Study". Genève: Service de la Recherche en Education.

Floris, R., Bertoni, M., Aymon, E., Ferrez, E. & Weiss, L. (2010) Analyse d'un dispositif expérimental de formation de formateurs d'enseignants de mathématiques. In A. Kuzniak, A. et M. Sokhna (Eds.). *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation*. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009. (Numéro spécial de la Revue Internationale Francophone), http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque.htm GT5, pp.344-356.

Hiebert, J. & al. (2003) Teaching Mathematics in Seven Countries : Results from the TIMSS 1999 Video Study. Washington, DC: Department of Education, National Center for Education Statistics.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 16.3.*

Lerouge, A., (2003) Un dispositif innovant de conseil pédagogique : la visite de classe formative. *Revue TREMA*, 20-21, 55-78. IUFM de Montpellier

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Vetter, B., Klieme, E., Reusser, K. & Pauli, C. (2005) Quality of geometry instruction and its impact on the achievement of students with different characteristics. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal.

Margolinas, C. (2002) Situations, Milieux, Connaissances. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, M. Berthelot, R. Floris (Eds.) *Actes de la 11ième École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Cédérom. (pp. 141-155). Corps - 19-30 Août 2001: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C., Steinbring H. (1994) Double analyse d'un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Eds.) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 250-257). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Portugais, J. (1995) *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Berne: Peter Lang.

Santagata, R. & Zannoni, C. (2002) The use of lessonlab software for teacher professional development. In XII conference of AIRIPA National Conference. Udine, Italy.

Santagata, R., Zannoni, C. & Stigler, J.W. (2007) The role of lesson analysis in pre-service teacher education: an empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *J. Math Teacher Educ 10*,123-140.

Yoshida, M. (1999) Lesson Study A Case Study of a Japanese Approach to Improving Instruction Through School-Based Teacher Development. Unpublished Doctoral thesis, University of Chicago, Chicago.

SEANCES DE FORMATION D'ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES (COLLEGE ET LYCEE) UTILISANT DES VIDEOS – EXEMPLES[1]

Monique CHAPPET-PARIES, Aline ROBERT
Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris-Diderot, IUFM de Versailles-UCP

Résumé – Dans cet article, après avoir présenté certaines questions générales sur les formations d'enseignants, renouvelées dans le cadre de la mastérisation, nous signalons différents points de vue de didacticiens en France. Nous développons ensuite notre propre démarche en citant nos hypothèses actuelles sur les formations, encore en chantier, et nous détaillons certains de nos choix de contenus et de modalités de formation (notamment initiale). Nous dégageons en particulier l'intérêt de séances de formation où sont exploités, selon certaines modalités précises, des extraits de vidéos tournées en classe. Deux exemples, s'inscrivant directement dans cette démarche, permettent d'illustrer différents déroulements possibles de séances de formation ainsi conçues à partir d'un visionnement. En conclusion, nous ouvrons une discussion et des perspectives.

Cet article prolonge l'article sur les formations « Partir des pratiques » (Chesné et *al*, 2009) paru dans *Petit x* 80, et s'inscrit aussi dans la suite du premier article (Robert et al., 2007) paru dans *Petit x* 74, qui dégage différentes offres de formation, à partir de résultats de certaines recherches sur les pratiques. Nous précisons ici à la fois comment des séances conçues autour de visionnements d'extraits de vidéos tournées en classe peuvent se dérouler et comment elles s'inscrivent dans une offre de formation particulière, pour laquelle est indiqué l'ensemble de la démarche qui y a conduit. Ces séances peuvent être menées en formation initiale ou avec des formateurs (en formation) – les vidéos sur lesquelles nous nous appuyons ont été utilisées plusieurs fois mais ce n'est pas une séance effective que nous décrivons, notamment dans la mesure où nous ne disposons pas des indicateurs permettant de remonter aux pratiques éventuellement enrichies par ces formations. De plus, pour les débutants, qui nous intéressent au premier chef, les pratiques sont transitoires et nous ne pensons pas raisonnable d'attribuer les évolutions, qui ont toujours lieu les premières années, à tel ou tel segment isolé de la formation.

Il faut ajouter que, selon le public, les déroulements sont différents, peut-être encore plus que dans les classes – la présence d'un « redoublant » ou d'un collègue en reconversion peut considérablement modifier le déclenchement des interventions par exemple en formation initiale.

Le niveau de détail qu'on peut atteindre dans les analyses varie aussi notablement en relation avec l'expérience des participants – s'ils sont au début de leur formation, on en dira beaucoup moins que s'ils sont en fin de parcours, car alors ils sont perméables à plus de choses, réceptifs à plus de généralisations…

[1]Ce texte est déjà paru dans la revue *Petit x, 86*.

Introduction : un contexte particulier, une question toujours difficile, des points de départ différents

Le contexte est particulier, puisque nous devons faire face à un renouvellement des dispositifs globaux de formation des débutants et à une réduction des formations continues ; les séances, que nous décrivons ici de manière générique, ne peuvent représenter quoi qu'il en soit qu'une partie de la formation des enseignants de mathématiques (collège et lycée), et doivent être complétées de diverses manières, aussi bien pour les mathématiques qu'en termes de formation générale. Elles pouvaient jusqu'alors se placer en PLC2, cette année où les futurs enseignants lauréats de la partie théorique des concours de recrutement exerçaient en responsabilité dans deux classes seulement. Ils étaient pris en charge à ce niveau par un professeur expérimenté servant de tuteur, et devaient compléter par deux jours par semaine de formation en séances collectives. A l'heure actuelle nous avons suggéré que ce type de séances peut être aménagé par exemple dans une UE d'un master enseignement organisée autour d'un stage (Chappet-Pariès, Lévi & Robert, 2010) – avec sans doute une portée différente.

Quel que soit le schéma général des formations, des questions ne peuvent manquer de se poser : dans quel ordre les organiser par rapport aux besoins ? A quel moment, avec quelle durée ? Avec quel découpage, local, global ? Quelles hiérarchies ?

Est-ce qu'un savoir professionnel amorcé, provoqué par un questionnement issu des pratiques et développé ensuite, peut être intégré aux pratiques ? Réciproquement est-ce qu'un savoir professionnel dispensé avant tout passage sur le terrain, présentant des « ingrédients » qui auront à être recomposés dans les pratiques peut être approprié à cet effet ? Des questions de posture se posent : dans quelle mesure des activités que des étudiants peuvent apprécier pendant leurs études sont-elles transférables et susceptibles d'alimenter des choix d'enseignants pour mettre au point des activités pour leurs élèves ?

Comment installer la nécessaire cohérence, interne à chaque enseignant, entre les pratiques en classe, les accompagnements éventuels sur le terrain, les préparations extérieures ? Quand aborder le problème de l'enseignement aux élèves défavorisés – seulement quand il se pose, ou avant ? Comment éviter de minorer les éléments de différenciation entre élèves en amont de la classe pour ne considérer que les compensations possibles en mathématiques (remédiations) ? La démarche que nous développons ici donne un exemple de réponses à ce type de questions, comme on le verra.

Mais il manque à toutes les réflexions un cran essentiel : l'évaluation. Comme nous l'avons déjà suggéré, il y a là un chantier extrêmement difficile, qui met en jeu formateurs, formations, enseignants, élèves, que nous n'avons pas vraiment abordé dans le second degré – les premières thèses menées dans le premier degré ont confirmé la complexité de la chose (Masselot, 2000 ; Vergnes, 2001 ; Ngono, 2003).

La question des formations d'enseignants (mathématiques et autres) est difficile et, par-delà les différentes positions des didacticiens évoquées ci-dessous, différents points de vue généraux sont développés pour l'aborder, y compris dans des recherches internationales. Ainsi, dès qu'on cherche à ne pas rester dans le pragmatisme initial (faute de mieux), on n'échappe pas au questionnement suivant, sur l'essence même de ce qui est en jeu : former à quoi ? Doit-on convoquer des savoirs, différenciés, comme dans les recherches anglo-saxonnes dans la lignée de Shulman (1986), de plus en plus détaillés par Ball et *al* (2009) notamment, doit-on y inclure explicitement les savoirs didactiques, doit-on réfléchir, de manière complémentaire ou non, en termes d'activités, ou encore en termes de gestes professionnels (Butlen et *al*, 2008), ou bien en convoquant les concepts pragmatiques des ergonomes, qui leur servent à analyser les sujets dans des situations de travail (Pastré, 2002 ; Samurçay & Pastré, 1995 ; Vidal & Rogalski, 2009) ? Faut-il évoquer des schèmes, des invariants ou encore autre chose, des compétences par exemple ?

Les recherches en didactique des mathématiques en France proposent différentes manières de comprendre « ce qu'il y a à comprendre » dans les relations entre enseignement et apprentissage d'un contenu donné et différents moyens pour y parvenir. Sont en jeu les découpages de la réalité adoptés par les chercheurs, les nécessaires simplifications choisies, la nature des relations à établir entre les variables retenues (implications et/ou boucles de rétroactions), les éventuelles hiérarchies qui sont dégagées et cela met en jeu des conceptions générales de la didactique. Ces recherches engendrent différentes transpositions, plus ou moins explicitées, vers le « comprendre pour agir » qui intéresse les enseignants, et qui peut inspirer les formations. Différents articles de cette revue s'en font l'écho, ce qui motive les lignes qui suivent (trop rapides).

Ainsi certains chercheurs, dans la lignée de Brousseau (1998) ou de Douady (1986) et pour le dire très rapidement, ont recours à une modélisation précise pour comprendre et dégager aussi bien le potentiel d'apprentissage des situations (Théorie des Situations Didactiques, Dialectique outils/objets) que ce qui peut se passer dans des situations ordinaires – on conçoit que la transmission de ces modèles organise leurs propositions de formation, que ce soit en faisant expérimenter aux débutants eux-mêmes des situations particulièrement propices ou autrement (Bloch & *al*, 2005). Notons que le point de vue est celui de situations génériques, où enseignant et élèves occupent des places marquées, remplissent leur fonction, sans que leur singularité intervienne. Les formations misent souvent sur un certain transfert de situations « exemplaires » proposées aux participants comme étudiants et explicitées à des situations analogues à proposer à leurs (futurs) élèves (ce sont des cas particuliers de stratégies d'homologie (Kuzniak, 1994 ; Bloch, 2005).

D'autres, autour de Chevallard (2010), s'inspirent de théories universelles de l'activité humaine pour aborder le système éducatif lui-même (Théorie Anthropologique du Didactique), permettant de découvrir des grandes régularités en ce qui concerne les mathématiques enseignées et de mettre en évidence des leviers réels ; leur formation veut doter les enseignants de ces outils, en quelque sorte préalables à l'exercice du métier, notamment en ce qui concerne l'organisation des mathématiques à enseigner et de leur enseignement (cf. praxéologies mathématiques et didactiques, Matheron & Noirfalise, 2007). Là encore les sujets n'interviennent pas en tant que tels dans les descriptions, mais comme assujettis à différentes institutions. Le choix correspondant, différent du nôtre, est de partir d'un domaine à enseigner ou d'un chapitre et d'étudier successivement les notions en jeu et les organisations mathématiques correspondantes, de dégager une situation fondamentale, de passer en revue les difficultés des élèves, d'envisager un scénario, pour en arriver (ou non) aux séances réelles. D'une certaine manière nous refusons pour notre part cette forme de « monumentalisme » dans les formations.

Pour d'autres, prolongeant les travaux précédents, il s'agit de dégager « le didactique », on pourrait dire de définir, de travailler l'ordre du didactique (Sensévy et *al*, 2007) – en précisant ce qui est à comprendre dans tout phénomène d'enseignement –

apprentissage, à spécifier par les contenus ensuite. C'est l'action conjointe des élèves et des enseignants, au centre des phénomènes étudiés, qui organise les formations.

Certains dont nous sommes, à la suite de Vergnaud (2002) notamment, se centrent sur les élèves en train d'apprendre, les apprentissages sont référés à des niveaux de conceptualisation et l'enseignement est analysé sous l'angle des activités que les enseignants provoquent. Ce sont ces activités des élèves qui sont retenues comme constitutives de la conceptualisation visée. Celle-ci se caractérise par l'acquisition de la disponibilité des notions enseignées, tant objets qu'outils (en référence au champ de problèmes concernés), et leur réorganisation dans l'ensemble du paysage mathématique déjà acquis. Les activités correspondantes des enseignants sont objets des formations, plus tournées que les précédentes vers les sujets en situation (cf. théorie de l'Activité, Rogalski, 2008 ; Robert, 2008), et comprenant la prise en compte des diversités individuelles (Lenfant, 2002 ; Mangiante, 2007).

Quoi qu'il en soit, ces recherches et leurs résultats ne recouvrent pas tous les besoins des professeurs, ne répondent pas à tous leurs questionnements, – ni sur le plan des mathématiques, ni sur le plan général. Nous présentons ici notre propre point de vue, issu de nos recherches sur les pratiques et la démarche, dont nous reconnaissons le caractère partiel, que nous adoptons en formation. Nos hypothèses actuelles, qui justifient ces choix, et qui sont encore en chantier, sont dégagées. Nous illustrons l'ensemble par deux exemples.

1. Notre point de départ - Enseigner : un travail complexe, à former

1.1. Un résumé de nos recherches sur les pratiques à l'origine de la démarche

Ces recherches sont inscrites dans la théorie de l'Activité qui inspire déjà nos travaux sur les apprentissages des élèves. Ainsi cherchons-nous à caractériser les activités des enseignants – tout comme pour les élèves nous centrons nos analyses sur leurs activités mathématiques, considérées comme légitimes pour nous renseigner, même si cela reste partiel, sur leurs apprentissages, référés à leur conceptualisation.

Nos premiers travaux, sur la diversité des pratiques notamment, nous ont conduites à poser, avec J. Rogalski, que la seule référence aux objectifs en terme d'apprentissages d'élèves ne permettait pas de rendre suffisamment compte des analyses réalisées, des différences ou des écarts entre enseignants, et entre enseignants et didacticiens. Aussi avons-nous élaboré ce qu'on a appelé « la double approche » des pratiques : un cadrage théorique croisant didactique et ergonomie et permettant d'intégrer aux analyses la complexité des pratiques, en imbriquant

- des composantes décrivant les activités proposées aux élèves, reliées aux apprentissages, en termes de contenus mathématiques et de gestion de classe
- et des composantes liées aux déterminants et contraintes du métier (institutionnels, sociaux, personnels).

Nos premières analyses ont été reprises et interprétées dans ce nouveau cadrage pour mieux comprendre les difficultés et les évolutions éventuelles des pratiques (cf. ci-dessous).

Les premiers résultats ont ainsi révélé des régularités dans les pratiques individuelles en terme de champ mathématique abordé, qui est souvent bien circonscrit par les programmes (Roditi, 2005 ; Horoks, 2008), ce qui indique l'importance de ce type de contraintes ; on a vu que les marges de manœuvre investies par les enseignants concernaient des choix plus fins de contenus et de gestion (Horoks, 2008 ; Chesnais, 2009) ; on a aussi commencé à illustrer la stabilité des pratiques des enseignants expérimentés (en régime de croisière), qui semble concerner d'abord la gestion de la classe, en termes d'automatismes, de routines, de choix et de décisions avant la classe et surtout en classe (Robert, 2007). Il serait ainsi plus facile, pour un enseignant donné, de changer les contenus à enseigner que les modes de gestion. Cela permet d'interpréter aussi certaines difficultés de diffusion des travaux issus de recherches en didactique, qui demandent des gestions particulières, pas nécessairement habituelles aux enseignants qui s'y réfèrent (d'où leur réticences), ou encore des difficultés d'installation de pratiques régulières intégrant les TICE, devant être associées à des déroulements (usages) inhabituels (Blanchard et *al*, 2008 ; Haspekian, 2005 ; Lagrange et *al*, 2003). Cela peut majorer l'importance des formations initiales.

1.2. Nos hypothèses sur la formation : encore en chantier

1.2.1. Une posture générale de chercheur : apprendre des professeurs, apprendre aux professeurs, pour passer d'un « comprendre » à « un comprendre pour agir » et pour transposer nos recherches

Nous avons travaillé le passage entre notre « comprendre » de didacticien et le « comprendre pour agir » qui intéresse les enseignants et les formateurs – même si les deux ne se recouvrent pas exactement. Inspirée par notre cadre théorique, cette conversion, pour tenir compte de la complexité, consiste notamment à dégager des variables précises, pouvant avoir une influence sur les activités des élèves et accessibles directement aux enseignants, en termes de choix, d'actions et de décisions quotidiennes ou plus globales. On pourrait évoquer un « comprendre l'agir » de l'enseignant, intermédiaire « opérationnalisable ». Les variables en jeu concernent ainsi directement le travail de l'enseignant, en incluant une part de la complexité, sans jamais bien sûr jouer le rôle d'un GPS (Asselain et Robert, 2010), impossible à concevoir dans ce métier. Il y a une certaine analogie avec la didactique professionnelle préconisée par Butlen et *al* (2008).

Nous devons donc d'abord présenter notre conception de ce travail de l'enseignant avant d'énoncer les hypothèses générales de formation, toujours issues de la théorie de l'Activité, sur lesquelles nous nous appuyons.

1.2.2. Retour sur le travail de l'enseignant que nous cherchons à former

Ce travail de l'enseignant provoque (en grande partie) les activités mathématiques des élèves et c'est à ce titre qu'il nous intéresse, c'est pour nous l'objet des formations dites professionnelles qui nous occupe. Le travail (hors classe), dans l'établissement, en formation, n'est pas pris en compte ici.

Nos recherches précédentes nous apprennent l'importance du fait que ce travail est contraint – par l'institution (programmes, horaires, établissement), socialement (élèves, collègues, parents) ; par ailleurs il est déterminé en partie par les ressources individuelles, dont les expériences et les connaissances, les ressources collectives (manuels) et dépend étroitement des conceptions propres de chaque enseignant

Comme les pratiques dont il constitue une partie, ce travail est complexe – une modification d'une composante amène une modification de l'ensemble.

Il intervient dans différents lieux et à différents moments, sans qu'il y ait complète indépendance de ces phases. Le travail de préparation est ainsi marqué par la traduction d'un projet global, mathématique et par l'anticipation de sa mise en actes, avec des prévisions d'adaptations. Il se poursuit par le travail en classe, avec de continuelles improvisations à partir des préparations.

Plusieurs objectifs, eux aussi à la fois liés et en partie indépendants, sont présents, notamment le fait que la classe tourne, que les élèves réussissent, qu'ils apprennent. Il s'agit des réponses des enseignants à plusieurs cahiers des charges de leur métier, éventuellement contradictoires. Une classe doit tourner par exemple mais elle peut tourner sans apprentissages, ce qui n'est pas le but recherché ; cela dit, sans un certain niveau de paix sociale, il n'y aura pas non plus d'apprentissages. Les recherches actuelles menées sur les formations des PE débutants ont dégagé ainsi les dimensions de paix scolaire et de vigilance didactique pour rendre compte de ces intrications (Charles-Pezard, 2010).

Qui plus est, l'évaluation de ce travail de l'enseignant est indirecte, médiatisée. On ne peut pas en connaître directement, complètement les effets sur les apprentissages des élèves.

Enfin, le travail de l'enseignant met en jeu plusieurs niveaux d'activités qui interfèrent, de manière cohérente chez les enseignants expérimentés, « global » (projet et conceptions), « local » (gestion en classe, au quotidien), et « micro » (automatismes, routines). On retrouve dans l'imbrication de ces niveaux la complexité déjà évoquée.

Reprenant cette description, on peut estimer qu'un des problèmes importants des débutants est la surcharge du niveau local – ils n'ont pas d'automatismes sur lesquels s'appuyer, pour se mettre de temps en temps en roue libre, ni suffisamment de représentations globales des objectifs mathématiques.

1.2.3. Nos hypothèses actuelles sur le développement des pratiques (installation et ou enrichissement)

Plusieurs idées sont apparues ou ont été renforcées, qui n'ont pas eu le temps d'être soumises à des recherches effectives, mais qui sont directement inspirées des travaux précédents. La première hypothèse admise, non spécifique à la profession d'enseignant, est l'importance de « partir des pratiques » pour former des pratiques (cf. théorie de l'Activité) – cela implique l'appui sur les besoins ressentis par les enseignants dans leur pratiques, quitte à les faire évoluer, et/ou la recherche d'une proximité à installer en formation avec la posture professionnelle en jeu ou même avec le « vécu ». C'est ce qui est tenté dans le segment de formation présenté ici. Le point de départ en est l'étude de séances de classe de mathématiques ayant eu lieu, dans toute leur complexité, même si cela reste local. Cela peut se réaliser par exemple par l'intermédiaire de vidéos tournées en classe. Les analyses de ces séances servent à ce que les participants questionnent le travail correspondant de l'enseignant, qu'ils peuvent apprécier en vraie grandeur, en se sentant concernés, et en associant étroitement les activités des élèves et les accompagnements de l'enseignant. C'est là qu'interviennent la spécificité de la profession et notre inscription théorique, tant pour les apprentissages que pour le développement des pratiques : elles se marquent dans le choix de faire analyser, dans ces séances les tâches proposées aux élèves et leur « devenir » en classe, sous l'angle des mathématiques en jeu. Ces études révèlent en effet, certes sur quelques tâches seulement, à la fois le travail de préparation de l'enseignant, puis ses activités pour faire travailler les élèves sur les tâches prévues et enfin les activités effectives des élèves, constitutives de leur apprentissage. Cela doit amener dans un deuxième temps à compléter ce qui a été vu et discuté, selon les questions qui ont émergé, que ce soit du côté des mathématiques, des programmes, des ressources et/ou de la composition des classes et autres contraintes sociales, en introduisant diversités et surtout alternatives. Cet élargissement est partie prenante du travail à partir des pratiques.

D'autres hypothèses complètent et précisent la précédente. Dans ce cadre, se dégage ainsi également l'importance que nous donnons en formation au collectif des participants, aux discussions, aux échanges, aux mutualisations, facilités par le partage d'un vocabulaire professionnel commun : ainsi est-il essentiel à nos yeux de mutualiser des « mots pour le dire » qui centrent l'attention sur ce qui est en jeu dans le travail de l'enseignant en classe et pour la classe ; ils permettent d'analyser les séances, d'exprimer des différences, ils autorisent des catégorisations, des généralisations, des élaborations ultérieures sur les problèmes qui divisent les enseignants par exemple, ils favorisent des mises à distance et des dépersonnalisations qui facilitent les retours sur ce qui s'est passé dans la classe de manière non culpabilisante. Les formateurs ont un rôle à jouer dans ce processus, pour ne pas utiliser trop tôt ce qui peut apparaître comme un « jargon », redouté des enseignants.

Nous insistons aussi sur l'importance de la prise en compte explicite des contraintes, y compris en partie extérieures aux professeurs, liées à l'institution, aux mathématiques à enseigner et aux conditions de travail (composition des classes, hétérogénéité). Cela amène à intégrer dès que possible (compte tenu des questions des participants) l'étude des programmes dans le travail de préparation des séances par exemple. Cela contribue aussi à ne pas essayer de faire adopter des séquences « idéales » mais qui seraient décalées par rapport aux programmes ou aux postures, rapports au savoir et langage des élèves concernés. Peuvent être abordés sous cet angle certains aspects des évaluations des élèves, notamment par compétences, même si les dernières injonctions ministérielles peuvent être questionnées.

En revanche et a contrario, nous accordons aussi beaucoup d'importance au travail explicite, jugé indispensable, sur les marges de manœuvre individuelles des enseignants. C'est à la fois un témoignage de notre souci théorique de la nécessité de tenir compte des diversités et d'adapter les ressources aux individus et de nos hypothèses sur le développement des pratiques jusqu'à la phase d'exécution. Il ne s'agit pas de donner des modèles (voire le modèle du formateur) mais de dégager les possibles, les ouvertures, les enrichissements, constitutifs du développement visé des pratiques, notamment à cause des nécessités d'adaptations ultérieures. En effet ce développement ne se limite pas à la compréhension de ce qui peut être en jeu, mais doit être associé à des actions de l'enseignant, à des mises en acte en classe, peut-être aussi à la possibilité de revenir après la classe à ce qui s'est passé. Le travail sur les alternatives de choix de contenus et de gestion, à organiser systématiquement à la fin des analyses de séances de classe, peut permettre de développer cette exploration.

Tout se passe comme si notre choix de modalités de formation pouvait amener les participants, grâce à cette proximité avec leur propre agir en situation, à mieux comprendre « l'agir enseignant », centré par nous sur les activités mathématiques des élèves en classe. Cette intelligibilité nouvelle, certes partielle, certes issue d'analyses locales à compléter, contribuerait à renouveler leur potentiel d'action, en se transformant en « comprendre pour agir » puis en agir, grâce notamment au dernier volet évoqué ci-dessus. Soulignons que c'est un accès à une « palette de possibles » qui est dégagée en formation, sans plus !

Encore une fois, l'« originalité » de ce point de vue, partagé par beaucoup d'autres chercheurs, est cette hypothèse de l'intérêt, pour le développement des pratiques enseignantes, de partir de questionnements et de prises de conscience locales, discutées collectivement, sur le travail effectif quotidien de l'enseignant, limité à l'échelle des séances de classe, en prenant en compte la complexité et les contraintes... D'une certaine manière nous faisons appel à une forme d'homologie-transposition, non sur des contenus mais sur la posture à adopter – notamment en termes de questionnements et de types d'activités à développer. Ce seraient les prises de conscience explicitées à partir d'exemples effectifs qui engendreraient des activités ultérieures enrichies, permises notamment par la prévision ces activités (cf. orientation de l'action). On retrouve ici l'inspiration théorique de la théorie de l'Activité.

Ainsi si le passage du local (la classe) au global (les projets mathématiques par exemple) n'est pas le premier objectif, il est déterminant à terme, d'où l'importance du temps long de la formation, pour avoir suffisamment rencontré de situations diverses qui se « recollent » et avoir complété le bagage précis des formés - dernière hypothèse fondamentale.

Pour les débutants il s'agit de surmonter et de dépasser la surcharge du niveau local, du quotidien et d'arriver, par petites touches, au global, aux projets, aux mises en relation de leurs mathématiques et de celles de leurs élèves ou à la prise en compte d'élèves différents. Pour les enseignants confirmés, il s'agit d'enrichir quelque chose de déjà très stable, et cela demande aussi de la confiance et du temps !

Cela dit, les séances conformes aux hypothèses exposées ici sont à compléter par d'autres segments de formation. Selon le public, un travail sur les mathématiques à enseigner, ou sur les élèves et leurs apprentissages est nécessaire, à la suite des premières séances. Si de même la gestion de la classe n'est pas considérée comme une dimension devant être travaillée séparément, d'autres formations, liées au terrain et à une personnalisation sans doute nécessaire, le font, et sans doute dans de meilleures conditions (cf. compagnonnage).

1.3. Le travail mathématique sur les tâches et les déroulements, les scénarios et le relief sur les notions à enseigner : quoi former ?

Notre ambition en formation est d'organiser un travail des participants conforme à nos hypothèses. Pour cela l'idée forte est d'imbriquer le plus possible le travail sur la préparation qui, de fait, doit tenir compte non seulement des mathématiques à enseigner mais aussi des déroulements passés et à venir, et la gestion en classe, à l'origine d'improvisations inévitables à partir des projets.

Il s'agit de faire réfléchir en même temps aux énoncés et à leurs déroulements, que ce soit pour étudier une tâche proposée en classe ou pour concevoir une tâche possible et adaptée. A cet effet, une analyse a priori est d'abord menée puis elle est mise en relation avec le déroulement effectif ou avec un déroulement qui permette de conserver tout le potentiel d'apprentissage prévu. Cela implique d'introduire rapidement des éléments pour analyser les énoncés – en faire une analyse de tâches (a priori). La recherche des connaissances à utiliser, anciennes ou nouvelles, indiquées ou non, est complétée par celle de leurs nécessaires adaptations éventuelles. Mises à part les applications immédiates des propriétés du cours, les autres tâches mathématiques recelées dans les énoncés sont complexes et mettent en jeu des reconnaissances de modalité d'application, et/ou l'introduction d'intermédiaires ou d'étapes ou de raisonnements, et /ou le mélange et les mises en relation de plusieurs aspects des connaissances (cadres, registres…) ou de questions antérieures, et/ou des choix (Robert, 2008) ; cela caractérise la richesse des activités ultérieures possibles des élèves. En fait les programmes sont implicitement présents dans ces analyses et leur méconnaissance est source d'erreurs, sources de formation.

Ces analyses amènent à revenir plus globalement, à un moment donné, sur les choix de scénarios, comme nous appelons l'ensemble des tâches proposées, dont nous travaillons la cohérence, la variété, et les dynamiques entre cours, exercices et adaptations attendues des connaissances des élèves. Mais dans ce travail nous imbriquons des aspects liés à la gestion, en particulier des prévisions de déroulement qui pondèrent les activités prévues des élèves. Par exemple, les moments de travail autonome sont prévus. Ce peut être l'occasion de développer l'intérêt du silence du professeur non seulement pour laisser travailler les élèves mais aussi pour repérer leur travail, l'objectif étant d'exploiter ensuite ce qu'ils ont fait. Cela débouche sur le fait de devoir souvent renoncer à dire tout ce qui avait été préparé, l'enseignant faisant ainsi ces deuils nécessaires, instantanés, si difficiles pour les débutants et si habituels pour l'enseignant expérimenté (dans le second degré).

S'inscrit enfin aussi le nécessaire travail sur le « relief » des notions à enseigner, sorte de panorama contrasté du paysage mathématique concerné, obtenu en croisant les aspects mathématiques (fonction des notions, histoire et épistémologie), les programmes et ce qu'ils autorisent, en termes d'objets, d'outils, de types de problèmes de raisonnements et de niveau de rigueur, de distance entre l'ancien, notions déjà rencontrées, et le nouveau à acquérir, et les difficultés répertoriées des élèves.

1.4. Comment former : des formations « à l'envers », partant des déroulements

La réflexion, précédente nous amène à être très vigilantes sur les modalités des formations. Nous proposons ainsi des formations « à l'envers », qui partent des pratiques, locales mais étudiées comme un tout, pour « remonter » ensuite à des questions plus globales qui orientent par exemple l'élaboration du projet et du scénario du professeur sur une notion. Ces séances de formation sont consacrées à l'étude des pratiques réelles (à partir de vidéos notamment, ou de simulations, de récits, de visites). Les analyses de tâches et de déroulements choisis par l'enseignant se concluent par une reconstitution des activités mathématiques des élèves enclenchées et le reste suit : diversités (marges de manœuvre), mises en relation avec les contraintes, relief et scénarios.

Une formation « à l'endroit » consisterait à suivre un ordre inverse de la reconstitution du relief sur les notions à enseigner et à la mise en place de déroulements.

L'initialisation par les déroulements en classe, précédés cependant de l'analyse des tâches en jeu, amène à introduire rapidement des outils pour les analyser :

- La nature, la forme du travail proposé aux élèves et les durées – travail individuel, en petits groupes, collectif, écrit, à la maison, travail de recherche, travail de rédaction -, le temps de silence de l'enseignant,
- L'enrôlement dans le travail, avec les transitions,
- Le repérage du travail des élèves, les questions, les relances, les aides

(intermédiaires, procédurales, constructives) et le maintien dans l'activité. Une aide a une fonction procédurale lorsqu'elle indique aux élèves une manière de faire contextualisée, et une fonction constructive quand elle peut ajouter quelque chose au travail effectif de l'élève, plus général ou plus décontextualisé ou justifié…

- L'interprétation et l'exploitation du travail des élèves, avec la mutualisation, les choix et les deuils de l'enseignant, la validation et la correction, l'évaluation.

Puis on peut travailler la généralisation, la réflexion sur des méthodes (méta), l'organisation des connaissances (cohérence)

- L'exposition des connaissances, les exemples, la structuration et les liens avec le travail des élèves, le choix de ce qui est dit, répété ou non dit (deuil de l'exhaustivité), montré, « prouvé »,
- Le recours à l'écrit, l'usage des instruments, du tableau,
- Éventuellement le repérage d'implicites, de malentendus, l'explicitation du contrat.

Les prévisions des débutants notamment peuvent être très différentes de la réalité, que ce soit du côté des élèves ou de celui des professeurs, et les décalages sont sources de formation.

1.5. La place et le choix des vidéos : une mise en garde

L'analyse de vidéos s'inscrit donc bien dans le programme précédent. Compte tenu du foisonnement actuel de vidéos sur le net, nous voulons cependant insister sur le fait qu'il s'agit d'un moment particulier de la formation, qui n'a pas de sens en soi, qui n'a rien à voir avec la donnée d'un modèle à imiter (ou à éviter), mais que cela s'inscrit dans un ensemble cohérent, plus vaste, visant à former, en l'enrichissant, le travail de l'enseignant. Nous pensons qu'un visionnement de vidéo sans commentaires peut engendrer n'importe quoi, dans la mesure où la complexité de la réalité de la classe est nécessairement implicitement « découpée » par l'observateur – soit avec les repères dont il dispose a priori, et alors il n'y a rien de « garanti », soit grâce aux nouveaux repères introduits par le formateur qui peuvent enrichir la vision « naïve » première – mais alors cela présuppose un accompagnement du visionnement.

Cinq conditions nécessaires, à respecter dans l'utilisation des vidéos en formation, nous semblent indispensables pour espérer voir se réaliser nos intentions de formateurs :

- préciser le contexte de la vidéo – décrire la classe précise, le moment de l'extrait par rapport à ce qui précède, le contenu mathématique en jeu. On peut cependant laisser à l'analyse a posteriori la « remontée » aux programmes par exemple, ou aux objectifs de l'enseignant, connus ou devinés.
- inscrire le visionnement dans un « problème » : par exemple faire faire l'analyse a priori des activités des élèves et demander de comparer avec ce qui peut se passer dans l'extrait, en ce qui concerne ces activités (cf. deuxième extrait). Il y a d'autres manières de problématiser, faire prévoir un déroulement et comparer (cf. premier extrait), ou encore étudier les répétitions (de tâches, ou dans le discours) en relation avec les contenus, etc.
- donner avant tout visionnement les premiers outils pour aborder ce problème : par exemple si on a choisi le premier type de problème, on peut faire travailler avant le visionnement le repérage des connaissances nouvelles et anciennes en jeu, quitte à introduire leurs adaptations (Chesné et *al*, 2009, p.29) progressivement.

- mutualiser l’analyse a posteriori et organiser une discussion, permettant de revenir au double travail de l’enseignant de choix des tâches et de gestion, et de remonter, notamment en cherchant des alternatives, à la fois aux choix plus globaux sur les séances avant et après celle qui est montrée et aux contraintes diverses qui les conditionnent.
- inscrire la séance dans un ensemble cohérent de séances de formation, pour permettre aux participants de construire quelque chose, de dépasser les simples problèmes posés, de s’approprier de manière décontextualisée, personnelle, adaptable, ce qui est en jeu en termes de travail de l’enseignant.

Reste à préciser le choix des vidéos – filmées chez les participants, ou chez d’autres enseignants, obligatoires ou non, autant de variables encore à étudier précisément.

2. Exemples de séances collectives à partir de visionnement d’extraits de vidéos

2.1. Un schéma général de ce type de séance de formation

Le point de départ de ces séances est le visionnement d’extraits de vidéo tourné en classe. Si possible, le choix du contenu des vidéos est adapté à ce que les participants ont déjà rencontré. En général, les contenus des vidéos ne sont pas déterminés par un programme fixé d’où l’évocation de séances « opportunistes ». Un des objectifs généraux de ces séances est de profiter du travail précis sur la séance pour aborder plus généralement (« remonter ») des éléments sur la notion mathématique, les programmes, le relief et les difficultés des élèves, d’où l’évocation de séances « inductives ».

La séance ne commence pas par le visionnement mais par une analyse *a priori* de la tâche préalable, mettant en jeu le contexte. Cela permet de rapprocher les participants d’une posture d’enseignant au moment du visionnement. Certes, au lieu de donner à préparer un exercice, le formateur donne seulement à analyser l’énoncé en jeu. Il y a donc une certaine simplification du travail habituel de préparation de l’enseignant (choix d’énoncé) mais, et c’est ce qui nous intéresse, les participants peuvent tout de même s’approprier rapidement les objectifs de l’exercice et prévoir, comme un enseignant, des mises en fonctionnements des connaissances par les élèves, quitte à rectifier. Notons que le choix d’exercices peut être travaillé à un autre moment de la formation plus centré sur le seul travail de préparation de l’enseignant. Ainsi, le visionnement organisé tout de suite après l’analyse de tâche est structuré par des questions mettant en jeu les prévisions sur les élèves et leurs conséquences sur l’accompagnement de l’enseignant. Cela participe de notre première hypothèse « de l’importance de partir des pratiques ». Les participants n’agissent pas mais entrent dans l’action de l’enseignant filmé en se mettant en quelque sorte à sa place. En témoignent, s’il en était besoin, de nombreuses interventions qui commencent par « moi je … ». Les participants peuvent saisir au plus près grâce à l’analyse préalable les choix de leur « collègue » face à la classe que ce soit les mêmes que ceux qu’ils auraient faits ou d’autres. Cette sensibilité à l’agir enseignant provoqué par notre dispositif est une forme de proximité avec la posture d’enseignant recherchée en formation. La discussion collective qui suit le visionnement met en jeu les différentes appréhensions relevant d’un point de vue professionnel sur ce qu’ont vu les participants. Après avoir ainsi collectivement apprécié (sans jugement) les différences entre les analyses de tâches proposées et relevé les difficultés prévues, ignorées ou majorées, on aborde la question un peu plus générale des activités effectives des élèves à l’issue de l’exercice visionné.

Le travail sur les alternatives qui termine la séance de formation permet de revenir aux énoncés et souvent aux programmes ainsi qu'à la gestion de la classe avec ses spécificités qui permettent d'interpréter le choix des questions, des aides etc. Le formateur intervient pour compléter ce qui est apparu dans les discussions et ces moments, même brefs, sont essentiels à nos yeux. Nous avons envie d'évoquer le modèle de la Zone proximale de développement des pratiques.

Les autres hypothèses énoncées ci-dessus sont aussi mises en œuvre. Ces séances sont collectives et on y joue sur le collectif et tous les échanges oraux. Le partage d'un vocabulaire professionnel spécifique précis se fait au moment des analyses de tâches et de déroulements. L'importance du travail sur les variations de tous genres (alternatives), énoncés, déroulements, scénarios, à la fois pour prendre la mesure des marges de manœuvre, expliciter les contraintes et les problématiques du milieu enseignant, et pour préparer les adaptations ultérieures, incontournables, oriente les commentaires du formateur.

Les séances dans lesquelles s'inscrivent les exemples ci-dessous sont appuyées sur des vidéos. Cela étant, les vidéos elles-mêmes manquent – nous avons fait le pari un peu fou de réussir à transmettre quand même la substantifique moelle de ces séances. Il faut dire que la question de la « publication » de vidéos est très compliquée – pour des raisons de droit et aussi pour éviter toute tentation d'en faire des modèles, d'où cette gageure.

2.2. Les exemples

Nous illustrons ici des formations à partir de deux extraits de vidéos centrés sur le travail des élèves sur une tâche complexe. Cela met en jeu en particulier le repérage du travail des élèves par l'enseignant et la manière dont il s'appuie sur ce qu'il a pu constater pour faire avancer les activités.

Dans la classe de quatrième filmée (2008), classe ordinaire, l'enseignant vient de traiter le chapitre sur le théorème de Pythagore (au premier trimestre). C'est une séance d'exercices, qui se déroule à la fin du chapitre, le cours est terminé et les premiers exercices simples déjà proposés. Il s'agit de deux exercices successifs, filmés le même jour, qui suivent un exercice préliminaire de calcul mental (faisant utiliser le théorème). Le premier exercice a été cherché à la maison et c'est la correction qui est filmée, le deuxième est cherché en classe – et non terminé. On joint en annexe un contrôle ultérieur dont une question ressemble à un des exercices, ce qui pourrait alimenter la suite de la séance de formation.

Deux modalités de formation à partir des extraits sont présentées, au fil du déroulement ou conduisant à une comparaison *a posteriori*.

2.2.1. Premier extrait : une correction qui s'appuie sur le travail d'un élève au tableau – une formation « au fil du déroulement »

Ce premier exemple de séance de formation porte sur le moment où l'enseignant corrige un exercice travaillé à la maison ; c'est le deuxième passage de la vidéo, avec arrêts sur images, après un visionnement en continu, non commenté, qui suit les analyses de la tâche des participants. Il s'agit maintenant d'exploiter, au fur et à mesure, le détail des échanges organisés par l'enseignant avec l'élève au tableau et la classe (cf. deuxième type de problème évoqué en 1.5.).

Interrogés au début de l’extrait, neuf élèves déclarent ne pas avoir réussi à résoudre l’exercice – l’enseignant interroge alors un de ces neuf élèves, qui va au tableau « corriger », en réalité il va s’avérer qu’elle s’est trompée en lisant l’énoncé…

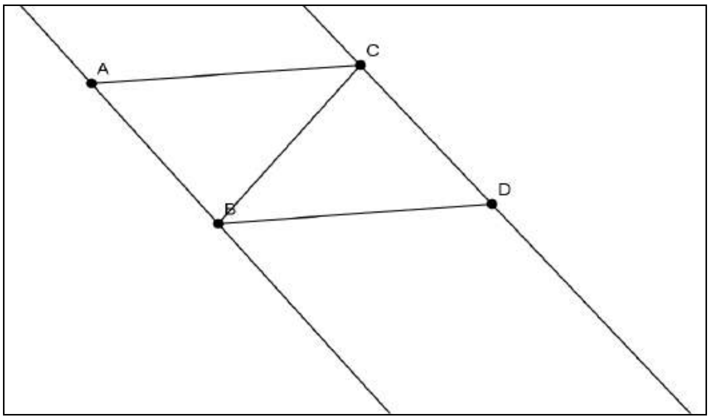
Nous présentons la chronique de la séance de formation, correspondant à des échanges des participants et du formateur sur le début de l’extrait, transcrit en partie. Nous mettons en évidence des interventions possibles des participants et du formateur, en repérant leur objet, en relation avec notre cadrage théorique précédent.

Enoncé de l’exercice qui va être corrigé en classe (après une recherche à la maison)

Dans la figure ci-dessous on a :

AB = 7,5 cm ; BC = 10 cm ; AC = 12,5 cm ; CD = 10,5cm ; BD = 14,5 cm.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



La première activité des participants est l’analyse de la tâche (analyse des connaissances à mettre en œuvre et des manières de le faire)

Les propositions des participants sont mutualisées pour arriver à quelque chose qui ressemble à ce que nous indiquons ci-dessous, en général moins complet. C’est le formateur qui décide d’arrêter l’analyse à un grain plus ou moins fin. Il décide aussi du moment de la mutualisation, avant ou après le visionnement (ou la prise de connaissance du déroulement). Enfin il introduit plus ou moins le vocabulaire partagé.

Les connaissances à mettre en œuvre

Les élèves ont la figure. Dans toute la suite du texte nous utilisons le mot figure pour qualifier tant la configuration étudiée que les divers dessins produits.

Les connaissances nouvelles qu’ils auront à utiliser sont essentiellement des calculs d’angles (droits ou non) dans des triangles à repérer, dont les longueurs des côtés sont connues (utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore ou du théorème). Ces connaissances ne sont pas indiquées mais on peut penser que les élèves les ont très présentes à l’esprit puisque c’est juste l’objet des cours du moment.

Les connaissances anciennes, *supposées disponibles ici*, concernent la propriété, vue en sixième, que deux droites perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Les adaptations et la stratégie

Cet exercice met en jeu *des adaptations des connaissances précédentes*. Il faut introduire des étapes, démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires à une même troisième (BC) – et, pour cela, faire intervenir des angles en démontrant que les deux triangles ABC et CDB sont rectangles

Il y a donc deux *changements de point de vue* pour concevoir la stratégie. Cela donne lieu à des étapes à ordonner (un choix est possible). La recherche de droites parallèles est remplacée par celle de droites perpendiculaires à une même troisième. Il faut passer de la considération de triangles rectangles à celle de droites perpendiculaires, en faisant intervenir les angles droits. Cela correspond à un changement de points de vue *avec une perte d'information* : on ne s'intéresse plus qu'à l'angle droit du triangle rectangle et pas au reste du triangle. Il y a aussi un choix sur le théorème à utiliser pour connaître la nature des angles en question : le théorème de Pythagore ou sa réciproque.

Les calculs numériques

Soit AC^2 à comparer à $AB^2 + BC^2$ et BD^2 à comparer à $BC^2 + CD^2$. Ils mettent en jeu des carrés de décimaux simples, et le repérage du côté de plus grande longueur puis la reconnaissance dans les deux cas de l'utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore.

Déroulement de la correction de la séance en classe

Le professeur a remis la figure au tableau. Il recense les élèves qui n'ont pas réussi l'exercice : 9 élèves (sur 26), un bon tiers. Il recherche un volontaire parmi eux, pour passer au tableau. Il interroge cette élève qui participe à la mise en place de la stratégie de résolution (et de sa justification) puis aux calculs.

Mise en place de la correction	1'30
Correction par un élève au tableau (codage de la figure, question de la nature des deux triangles)	3'30
Est-ce qu'on peut savoir à partir des hypothèses si les triangles sont rectangles ?	2'
Pourquoi cette recherche de triangles rectangles ?	2'30
Recherche rédigée de la nature des triangles	5' + 2'
Conclusion finale	5'
Nouvelle question ajoutée par un élève (recherchée et résolue)	3'

Tableau 1 – Chronologie 24 min 30

La séance de formation

Le problème posé en formation est celui du déroulement de la correction – les participants ayant tous réalisé d'abord une analyse de la tâche et vu l'extrait une première fois. Ils ont aussi la chronologie.

Le déroulement de la formation est scandé par la suite des différentes phases mises en évidence dans la chronologie de la séance en classe. Pour chacun des épisodes, une chronique rapide et quelques éléments de la transcription sont joints, les phrases qui nous semblent importantes sont surlignées en gras ; le contenu de ce qui peut faire l'objet d'échanges pendant les arrêts sur image, est indiqué en italique.

a) Les participants travaillent sur la mise en place et le début de la correction au tableau, avec le codage de la figure et l'adoption d'une stratégie de départ (recherche de la nature des deux triangles).

L'enseignant a devant lui des élèves qui ont cherché et trouvé, cherché et pas trouvé, voire pas cherché, sachant que la méthode en jeu (les adaptations) est très importante (premier exercice de ce genre). Il va choisir un intermédiaire, lui permettant s'appuyer sur un début de travail au moins et peut-être sur une difficulté à expliciter : l'élève interrogé a travaillé mais n'a pas terminé.

Les participants, se mettant à la place de l'enseignant, peuvent développer le premier questionnement suivant, à partir de leur analyse de la tâche : dans quelle mesure les élèves ont repéré comment utiliser le théorème de Pythagore ou sa réciproque, compte tenu des adaptations nécessaires ? En fait cette question n'est pas assez précise : il s'agit aussi de savoir quels élèves ont réussi. Un choix intervient immédiatement, nécessairement improvisé : comment réagir devant l'hétérogénéité qui se révèle ? Qui interroger sur cet exercice complexe travaillé à la maison, le premier du genre ? Comment faire pour s'appuyer sur les différents travaux des élèves et dégager les adaptations importantes des théorèmes recherchées dans l'exercice ?

P : C. Viens au tableau.
P : Qu'est ce que tu fais s'il te plait ?
L'élève inscrit la mesure des longueurs aux bons endroits de la figure tracée au tableau.
E : (*AB*), on veut savoir si…
[P : Tu te décales un petit peu s'il te plaît…]
E : On veut savoir si (*AB*) et (*CD*) sont parallèles.
P : oui.
L'élève surligne les segments [*AB*] et [*CD*].
P : D'accord.
E *: Donc déjà on veut savoir si ABC et CBD c'est des triangles rectangles.*
P *: Alors en quoi ça peut nous aider ?*
…
P : Alors effectivement t'es en train *parce que c'était pas évident pour tout le monde,* t'es en train de me parler de savoir il faut savoir si tu répètes.
E : *ABC* et *CBD* sont des triangles rectangles.
P : Bien donc déjà *sur cette figure t'as identifié, t'as identifié quelle figure ? Comment as-tu décomposé la figure ?*
E : En deux triangles.
P : Alors est ce que déjà tout le monde a vu ça ?
Brouhaha.
Et effectivement toi tu te demandes si éventuellement ils sont, tu me dis…
E : S'ils sont rectangles.

On peut ainsi préciser ce qui est repéré par l'enseignant dans ce que l'élève donne à entendre, ce que l'enseignant valorise et reprend immédiatement, et les explicitations qu'il provoque : en l'occurrence ici c'est le traitement de la figure, lié à la tâche, qui est repris, sans doute parce que l'enseignant estime qu'il n'est pas « transparent » pour tous, que certains élèves n'ont pas distingué d'emblée les deux triangles. En revanche l'enseignant garde le point de départ de l'élève, sans le questionner encore (alternative possible).

P : Alors pour le triangle *ABC* s'il est rectangle.

E : En *B*
P : Donc. tu fais un petit codage mais pas d'angle droit. Un petit codage d'angle c'est-à-dire un arc de cercle voilà, bien. (L'élève l'a fait)
Éventuellement tu te poses la question de savoir s'ils sont comment ces triangles ?
E *: Rectangles.*

On assiste à un renforcement *ostensif* de l'objet du travail à venir sur la figure, dans la continuité du choix précédent.

L'enseignant a privilégié ce qui est le plus directement accessible aux élèves – la figure donnée. Cela peut participer d'un choix de gestion lié à une appréciation de ce qui peut aider les élèves à adapter leurs connaissances : partir de la figure…

b) Les participants travaillent sur l'ajout par l'enseignant de *sous-tâches* dont la première prolonge la première proposition de l'élève

L'enseignant enchaîne immédiatement, s'appuyant sur ce qu'a annoncé l'élève, pour enclencher une réflexion sur la possibilité de le faire (c'est donc la méthode qui est en jeu) et sur l'intérêt de le faire (c'est donc le lien avec ce qu'on cherche qui est en jeu). Il va guider l'élève sur ces deux questions qu'il a introduites lui-même.

P : *Première question c'est : est-ce qu'on a suffisamment d'informations pour démontrer qu'ils sont rectangles ? Deuxième question : est ce que ça a un intérêt pour répondre à la question,* je t'écoute.
P : Première question c'est : est-ce qu'on a suffisamment d'informations pour…
E : Oui.
P : Alors c'est quoi les informations ?
E : Euh déjà…
P : *est-ce qu'on a suffisamment d'informations pour démontrer qu'ils sont rectangles ces triangles ? Oui ou non et pourquoi ?*
E : Ben oui.
P : Pourquoi ?
E : Là on peut, je sais pas.
P : Est-ce que quelqu'un peut l'aider ?
Est-ce qu'on a suffisamment d'informations pour savoir s'ils sont rectangles. Ch ?
E : *Oui parce qu'on a les longueurs des côtés.*
P : C'est clair C. ou pas ?
E : Oui

Les demandes faites (en l'occurrence ici des questions traduisant les sous-tâches introduites par l'enseignant lui-même) n'enlèvent pas le travail des élèves mais l'orientent, en dégageant et dissociant deux étapes, la première dans la continuité du travail commencé. On peut repérer le moment précis où l'enseignant, s'appuyant sur la proposition initiale de l'élève (chercher si les triangles sont rectangles), engage les élèves à expliciter quelque chose de plus général (la même chose mais considéré cette fois-ci comme une méthode – chercher si des triangles dont les longueurs des côtés sont connues sont rectangles.

Pourquoi cette recherche de triangles rectangles ? Une impasse pour l'élève au tableau, qui révèle l'importance des difficultés de formulation.

L'enseignant reprend sa deuxième question, de l'intérêt de connaître la nature des triangles dans cet exercice. *C'est une véritable difficulté, puisque c'est là qu'interviennent les adaptations. Est-ce que l'élève au tableau va réussir à trouver ? Comment l'aider ?*

P : D’accord et … *deuxième question quel est l’intérêt de savoir que ces triangles sont éventuellement rectangles parce que la question c’est quoi, répète la question de l’exercice.*
E : Prouver que les deux droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles.
P : Alors est ce que ça a un intérêt de savoir s’ils sont rectangles ? Je t’écoute,
triangles sont rectangles pour répondre à la question oui ou non et pourquoi
E : Oui parce que si ces deux là ils sont rectangles, vu qu’ils sont sur la même droite, et ben ils sont parallèles.
P : D’accord *quelle propriété tu utiliserais pour conclure* ? Quelle propriété tu es en train d’utiliser pour conclure pour donner la réponse à la question ? Est-ce que tu te rappelles de la propriété si tu veux bien en français ?
E : Si deux points sont alignés sur la même droite.
P : alors c’est rigolo mais c’est pas grave. Elle a dit si quoi deux points sont alignés sur une même droite alors tu parles de quels point là ?
E : *B* et *C*.
P : D’accord. *B* et *C* sont alignés sur la même droite, ça choque personne ?
E : Si.
P : On lève le doigt.
E : Quand y a deux points, ils sont forcément alignés.
P : Deux points sont toujours alignés. Deux points sont toujours, enfin par deux points il passe toujours une unique droite. Alors OK donc tu continues, qu’est ce que t’as dit après ?
E : Si ils sont alors si ils sont alignés.
P : Ca forme une droite.
E : Ben je sais pas moi.
P : Si t’étais bien partie là après. Après Qu’est ce qu’il y a en plus ?
E : Ils sont alignés, ils sont parallèles, je sais pas.
P : *Donc je reprends ma question. Quel est l’intérêt d’avoir, de justifier éventuellement que les triangles sont rectangles ? Qu’est ce que ça va te donner comme information ?*

On assiste à une certaine incapacité de formulation de l’élève ; on constate aussi que l’enseignant n’indique pas la possibilité de dire les choses autrement (qui apparaît comme une alternative, a posteriori). Le mot perpendiculaire (ou angle droit) semble échapper à l’élève, qui ne sort pas de ses triangles rectangles. Le professeur renonce (et c’est important de le noter)! Il fait appel à la classe.

Suite et fin de l’extrait analysé.

L’enseignant, reprenant les propos des élèves, utilise alors les deux changements de point de vue implicites nécessaires : il remplace le fait qu’un triangle est rectangle par le fait qu’on a deux droites perpendiculaires, puis revient aux angles droits (en « perdant » les informations supplémentaires attachées au fait que le triangle est rectangle) et il remplace « droite perpendiculaire à une droite » par « droite faisant un angle droit avec cette autre droite ».

E. Quand j’ai une droite perpendiculaire…
P : Donc là on a une droite perpendiculaire à une droite.
…
Donc tu veux dire qu’on a une deuxième droite perpendiculaire à la première.
E : alors elles sont parallèles.
P : Donc tu peux te pousser un petit peu est ce que dans cet exercice *c’était intéressant de démontrer qu’on avait des angles droits ?*
E : Oui
P : oui parce que pour conclure, on lève le doigt ? Qu’est ce qu’on peut dire comme qu’est ce qu’on pourra éventuellement utiliser comme propriété si on a deux angles droits ? J.G ?

> E : Si y a deux angles les droites…
> P : sont…
> E **:** *les droites sont parallèles*.
> P : Donc la propriété que vous avez vue en 6°, c'est exactement quelqu'un peut la dire exactement précisément N. ?

L'appel à la classe est efficace, il permet aux élèves ayant trouvé de s'exprimer et à l'enseignant de rebondir, en explicitant d'ailleurs les changements de cadres nécessaires : de triangle rectangle à angle droit et à droite perpendiculaire.

Nous arrêtons là de relater la formation. Pour résumer, la correction en classe continue par la citation de la propriété correspondante par les élèves sollicités (là encore il faut s'y prendre à deux fois) puis par la recherche rédigée de la nature des triangles avec la correction des calculs et la conclusion.

> P : Alors Conclusion, c'est-à-dire réponse à la question de départ parce que là parce que là tout ce que j'ai fait là *c'est uniquement des étapes qui vont me permettre de répondre à la question au départ.* Alors S. qu'est qu'on peut dire d'après nos réponses précédentes ?
> E : Puisque que les droites (*AB*) et (*DC*) sont perpendiculaires à une même troisième *BC* alors (*AB*) et (*DC*) sont parallèles

Le changement de point de vue angle droit / droite perpendiculaire reste implicite. Le professeur écrit au tableau sous la dictée et répète.

On peut discuter alors sur les alternatives – qui interroger par exemple ? On peut aussi réfléchir à la place de cet exercice, donné à la maison. Cela laisse un peu de temps aux élèves mais l'exercice demande des adaptations (étapes, changements de points de vue pour appliquer une connaissance ancienne supposée disponible) qui peut amener à questionner ce choix. En tout état de cause, c'est peut-être une des raisons qui explique le temps que l'enseignant prend pour corriger cet exercice.

2.2.2. Deuxième extrait : recherche en classe d'un exercice complexe et début de correction (mise en place de la stratégie)

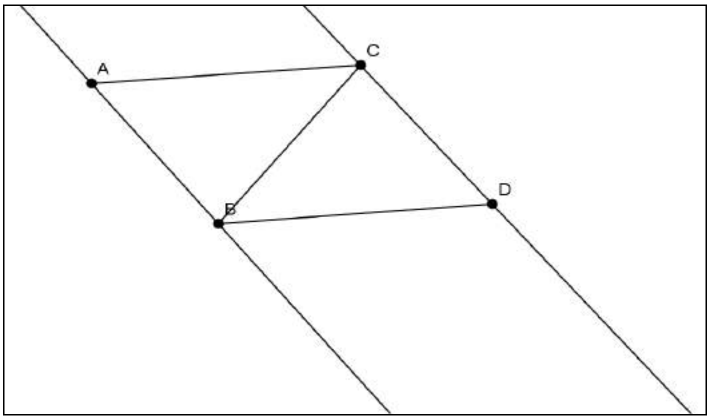
Le deuxième extrait présente un travail de recherche en classe, et le début de son exploitation par l'enseignant. On propose ici un autre mode de travail en formation : la comparaison de l'analyse des tâches, faite avant visionnement, et des activités qu'on peut supposer que l'enseignant amorce chez les élèves pendant la phase analysée (après visionnement).

Enoncé

Construire un segment [*AB*] mesurant 3 cm puis un point *C* et un point *D* tels que :

AC = 5 cm, *BC* = 4 cm, *AD* = 4,1 cm et *BD* = 2,8 cm

Les points *B*, *C*, *D* sont-ils alignés ? Pourquoi ?



La première activité des participants est l’analyse de la tâche

Cette fois-ci il n’y a pas de figure et les élèves auront à en faire une, ce qui complexifie déjà la tâche. De plus la question est ouverte, on ne sait pas la réponse (et la figure, une fois construite, ne permettra pas de conclure de manière visible). Il y a donc une vraie interrogation !

Les connaissances à mettre en œuvre

Connaissances nouvelles : ce sont les mêmes que dans l’exercice précédent, avec des calculs d’angles (droits ou non) dans des triangles dont les longueurs des côtés sont connues (utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore et, ici, du théorème). Comme dans l’exercice précédent, elles ne sont pas indiquées mais proches dans le cours et l’exercice précédent.

Connaissances anciennes : « tracer » ou construire des points connaissant leurs distance à deux points donnés (utilisation du compas) – définition et mesure d’un angle plat – ou unicité de la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné. Elles sont supposées disponibles.

Les adaptations (et la stratégie)

Pour construire C et D.

Il y a un choix sur le mode de construction (non précisé) : faut-il tracer avec la règle (graduée ?) et le compas (dans ce contexte) ou à main levée ?

Puis il y a *une reconnaissance d’un type de tâche* (antérieur) – avec introduction de plusieurs étapes : on trace successivement C et D, alors que les quatre données sont fournies ensemble.

Pour tracer C, il suffit d’utiliser deux informations sur des longueurs, à réunir (à partir des données de AC et BC) – cette reconnaissance des modalités d’application de la construction à faire demande de transformer AC = 5 cm en « C appartient au cercle de centre A et de rayon 5 » (c’est un changement de point de vue, peut-être naturalisé, automatique, chez les élèves) - on peut aussi y voir la nécessité de la reconnaissance de l’instrument à utiliser pour le faire. Enfin il y a deux points d’intersection des deux cercles – que choisir ?

Même analyse pour le point D – on peut obtenir deux points à partir de chaque point C…

Faut-il introduire la discussion de l'existence des intersections ? Les participants vont ou non se poser cette question (réponse : non) selon leur connaissance des programmes…

Pour chercher l'alignement.

La question est ouverte et les stratégies d'autant plus difficiles à élaborer.

Il faut introduire des changements de points de vue et des étapes, avec deux stratégies possibles a priori, et un choix, qui se fera au moment des calculs, entre le théorème de Pythagore et sa réciproque. Le fait qu'il y ait deux figures possibles ne change que la manière d'appliquer les stratégies et pas le principe de celles-ci.

Une première stratégie possible consiste à remplacer « points alignés » par « angle plat » (ou angles égaux, selon le cas de figure) – puis par angle de mesure 180° (ou angles de mesures égales). A chaque fois on doit se demander si un angle est ou non plat, si sa mesure est ou non 180°. Cela amène à la recherche de la somme (ou la comparaison) d'angles dans des triangles dont on se demande s'ils sont rectangles ou non (avec des angles droits ou non). C'est possible car on connaît les longueurs des côtés.

Une deuxième stratégie équivalente consiste à remplacer « points alignés » par « points appartenant (ou non) à une même droite » identifiée comme la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné (unique). Cette propriété de perpendicularité s'obtient comme précédemment, par la recherche d'angles droits associés au fait que des triangles sont ou non rectangles.

Si on avait deux triangles non rectangles ? Là encore cette question amène à revenir sur les programmes et sur l'adaptation nécessaire des énoncés à ces programmes.

Calculs numériques

On peut dire la même chose que dans l'exercice précédent, à cela près qu'un des deux triangles n'est pas rectangle, ce qui amène à utiliser le théorème de Pythagore et non sa réciproque et la réciproque pour l'autre triangle (choix). Si tant est que l'enseignant a introduit les deux sens, ce qui peut amener à la discussion correspondante sur les programmes, une vraie problématique de la profession en ce moment, avec les partisans de ne pas distinguer théorème direct et réciproque, au moins dans un premier temps, et les adversaires.

Déroulement de la correction de la séance en classe

Il ne reste pas le temps de finir, l'enseignant prend le parti de laisser chercher et de corriger le début – la mise en place de la stratégie.

Au bout des 9 premières minutes, la majorité des élèves a ainsi construit la figure mais très peu ont démarré la justification. Quatre élèves avaient fini le problème avant l'intervention. Ainsi le professeur commence la phase collective suivante par ces mots :

> P. Il y en a qui ont pas fini la construction et il y en a qui ont fini la construction mais qu'on n'arrive pas à débloquer.

C'est là que commence la séance de formation imaginée ici.

Enoncé exercice. Mise en place	2’30
Le professeur circule en rendant un travail (2’) et observe le travail(5’)	7’
Intervention du professeur : bilan construction et stratégies à mettre en place	4’

Tableau 2 – Chronologie de la recherche en classe

Voici la transcription de ce que les participants voient et entendent sur la vidéo – nos commentaires sont en gras, ce que l’enseignant écrit sans le dire est en droit.

P. La construction On vous demande…
P : Déjà le premier conseil que je peux vous donner, et je le redirai pas à chaque fois, c’est de commencer à faire la figure à main levée. Donc on nous demande de tracer un segment [*AB*] de 3 cm, on est content et ensuite on demande de placer les points *C* et *D* tels que les, enfin qui vérifient les égalités de longueurs proposées (soulignées au tableau). Donc on a le point *C* qui doit être à 5 cm du point *A* et à 4 cm du point *B*.
P : Généralement on utilise un compas. Le point C, on utilise un compas, on prend les longueurs, le point *C* on va dire qu’il arrive à peu près par là. On a *BC* : 4, *AC* : 5 (sur sa figure). *Il joint les points silencieusement.*
P : Ensuite on demande de placer un point D, un point D qui se trouve à 4,1 cm du point A et 2,8 cm de *B*. Il y a deux solutions soit le point *D* il va arriver à peu près par ici, soit le point *D* il va arriver, on peut le mettre ici en dessous (figure). Ça changera rien à la question. C’est comme vous voulez. Moi j’ai décidé de le mettre en dessous. Voilà. *BD* : 2,8 et *AD* : 4 ,1 (figure).

P : Question suivante les points *B*, *C*, *D* sont-ils alignés ? Pourquoi ?
Alors, déjà, quelles peuvent être les différentes réponses ?
Benoît, Quelles peuvent être les différentes réponses à ce type de question, les points *B*, *C* et *D* sont-ils alignés ? Allez-y
…
… Ça peut être oui ça peut être non. Bon.
Voilà le genre de figure qu’on va obtenir. Pour la construction est-ce qu’il y a des questions ?
E. Non
P : Bon. *Donc ensuite soit j’ai deux triangles avec un côté commun AB, « un au dessus un au dessous », soient les deux sont imbriqués l’un dans l’autre. ABD, le point D peut être ici.* D’accord ?
P : Y en a qui ont la figure dessus, d’autres celle d’en dessous.
Bon, *c’est comme tout à l’heure. Qu’est-ce qu’on sait ? Qu’est-ce qu’on a comme figure ?*
E. Ben on va vérifier s’ils sont rectangles
P : On a des triangles déjà. On a des triangles, et on a des…
E. Mesures
P : *on a à chaque fois les longueurs, on peut s‘interroger sur*
E. rectangles
P : *Le fait qu’ils soient rectangles ou pas.* Il va y avoir deux solutions hein soit ils sont tous les deux rectangles Et qu’est-ce qui se passe à ce moment-là ? On lève le doigt ?
E. Si ils sont tous les …
P : *Alors en quoi ça peut m’intéresser d’avoir des angles ?*
C’est la question aussi comme tout à l’heure En quoi ça peut m’intéresser d’avoir des angles dans un problème d’alignement ?

Il y en a que deux qui lèvent le doigt là ? En quoi ça peut m'intéresser ? Trois, quatre ?
Baptiste
S'ils font tous les deux 90°, si on fait la somme ça fait 180° donc c'est un angle plat.
Et quand si on a un angle plat, ça veut dire que les 3 points sont alignés…
Et si l'angle est pas plat, les trois points ne sont pas alignés.
Est-ce que la stratégie, la façon de faire, la méthode est claire pour tout le monde ?

La séance de formation

Le problème posé en formation est le suivant : après avoir visionné l'extrait, il s'agit d'étudier le travail collectif des élèves, organisé par l'enseignant, en mettant en regard l'analyse de la tâche précédente et ce que l'enseignant provoque pendant sa correction, compte tenu du travail individuel précédent des élèves qu'il a repéré au moins un peu.

Les tâches des élèves	**Les interventions de l'enseignant**
Sous-tâche : faire la figure (implicite) Choix : tracer avec la règle (graduée ?) et le compas ou à main levée ?	Intervention collective : *conseil* faire une figure à main levée - l'enseignant répond à la question du choix du mode de tracé (ceux qui n'ont rien fait peuvent agir – aide procédurale ?)
Sous-tâche plus précise : construire Reconnaissance d'un type de tâche « construction de points au compas à partir de deux longueurs » – avec étapes (deux points)	L'enseignant *indique* comment faire la construction : tracer le segment donné et placer les points ; il *prend à sa charge la reconnaissance du type de tâche*, ce qui valide la production de ceux qui l'ont fait – *aide constructive* et permettra aux autres d'avancer – *aide procédurale*.
Sous-sous-tâche : tracer *C* Sélectionner les deux informations sur des longueurs *AC* et *BC*, à transformer en distances de *C* à *A* et à *B* – reconnaissance des modalités d'application de la construction à faire au compas - reconnaissance de l'instrument à utiliser pour le faire.	L'enseignant *effectue lui-même, en commentant ses actions*, la construction du point *C*, à partir des deux informations sur les longueurs *AC* et *BC* qu'il *souligne* silencieusement sur le tableau, et qu'il tr*ansforme immédiatement oralement en distances, sans plus de commentaires*(*aide procédurale*, les élèves peuvent imiter).
Sous-sous-tâche : tracer *D* et compléter la figure. Finir la figure – placer *D* (il y a un choix) et tracer les triangles (joindre les points)	L'enseignant *joint* les points *A* et *C*, *B* et *C*, *sans commentaires*, … pour traduire les conditions en codage et tracer *D*. Il *signale qu'il y a un choix* et trace les deux points possibles et les deux triangles possibles. *Il insiste sur les deux figures obtenues (où les triangles sont dessinés) en les décrivant*
Sous-tâche nouvelle : comment montrer l'alignement.	L'enseignant redonne la question : les points sont-ils alignés ? Il fait dire que c'est une vraie question, avec deux réponses possibles.

Par où commencer (recherche de stratégie) ? Il y a à faire des changements de points de vue et des étapes pour utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque : chercher si les triangles sont rectangles, conclure sur la somme des deux angles éventuellement droits. Sous-tâche (étape 0) : redire la figure de départ	*Il ajoute une question intermédiaire : aide « stratégique » donnant un point de départ* *Qu'est-ce qu'on sait ? Qu'est-ce qu'on a comme figure ?* *l'enseignant insiste de nouveau sur le départ par les informations* (hypothèses) *sur les« triangles »*…pour aider la reconnaissance de la connaissance à utiliser *(aide constructive ?)* *On ne part pas de ce qu'on cherche (pas de liens explicités)*
Sous-tâche (étape 1) : se poser la question de la nature des triangles - Sous-tâche (étape 2) : pourquoi ? Recollement avec la conclusion cherchée	L'enseignant provoque la nouvelle sous-tâche par une question *on a à chaque fois les longueurs, on peut s'interroger sur* Appel à la résolution précédente (mémoire ?) renforçant les indications de méthode (*partir des données*) – cela sert de jus*tification générale de la méthode(à chaque fois)– aide constructive* Il valorise la réponse sans commentaires (savoir s'ils sont rectangles) et passe à l'étape 2 par une question : *en quoi ça peut m'intéresser d'avoir des angles ?* l'enseignant essaie de faire faire le lien – en demandant l'intérêt de savoir s'ils sont rectangles – il développe la réponse de quelques élèves en introduisant la somme des deux angles et la comparaison à 180°

Tableau 3 – Une modalité de ce travail peut être de remplir le tableau ci-dessus, colonne de gauche remplie avant le visionnement, colonne de droite complétée après).

La stratégie, initiée par l'enseignant, n'est pas développée davantage – faute de temps, sauf le deuxième cas de figure, celui des triangles imbriqués, que l'enseignant aborde lui-même en introduisant l'appartenance des 3 points à une même droite perpendiculaire au segment initial.

Compléments, commentaires et alternatives

Discussion et formateur peuvent faire prendre conscience des choix de l'enseignant – il a choisi une tâche complexe qui reprend certaines adaptations précédentes, il laisse travailler les élèves seuls, puis il intervient mais sur la stratégie, pas encore sur la correction complète. Son intervention est orientée par le travail des élèves, qu'il focalise sur l'exploitation des données, « des informations », en relation avec les connaissances récentes à utiliser (comme dans l'exercice précédent). La conclusion n'est pas exploitée d'emblée, pas plus que ne sont explicités les nombreux changements de points de vue en jeu. Sur la figure, on peut aussi se demander si ce qui est laissé implicite par l'enseignant (joindre les points notamment, mais aussi ne pas conclure « perceptivement ») est perçu par les élèves – le contrôle (ci-dessous) va donner une réponse positive à cette question.

Diverses alternatives se présentent – la figure peut être donnée d'emblée comme dans le premier texte (ce qui évite le deuxième cas de figure, un peu plus délicat) mais prive les élèves du réinvestissement d'une construction déjà vue, sans lien avec le reste de l'exercice au demeurant si ce n'est dans la nécessaire reconstitution des triangles ; des questions intermédiaires peuvent être proposées – qui privent les élèves (pas trop faibles) de l'élaboration de la stratégie et de la nécessité de travailler le théorème de Pythagore comme outil ; l'exercice peut être donné à travailler à la maison ou en classe en petits groupes, ce qui peut permettre davantage d'essais et d'échanges entre les élèves.

Des questions un peu plus générales peuvent structurer une réflexion sur les deux exercices.

- Le rôle de la figure : de la figure aux démonstrations.

Dans cette classe les élèves semblent avoir dépassé la seule lecture sur la figure et ont compris la nécessité de faire des démonstrations. Cette étape a d'ailleurs été préparée en introduisant auparavant des illusions optiques.

Cependant l'enseignant oriente fortement les élèves, en l'occurrence ceux qui n'ont pas réussi à résoudre les exercices, à partir de leur figure (à tracer si besoin est) et des données pour essayer d'appliquer leurs connaissances, quitte à recoller ensuite avec ce qui est à chercher. Ce choix peut être discuté.

- Le travail des élèves sur des tâches complexes – choix d'énoncés, choix des modes de travail.
- Les deux tâches choisies par l'enseignant font travailler le caractère outil du théorème et de sa réciproque ; la résolution introduit des adaptations – étapes et changements de points de vue ; l'enseignant accompagne cette complexité par l'introduction d'une réflexion stratégique, très organisée, de type méthodologique : les élèves doivent se demander comment tirer parti des données et le confronter à ce qu'ils cherchent. Les participants peuvent s'interroger sur les exercices déjà proposés, notamment sur le travail sur le théorème déjà fait, et sur les exercices qui suivront – notamment en contrôle.
- On constate que c'est l'enseignant qui introduit lui-même les étapes correspondantes, mais sous formes de questions. Le passage sous silence des changements de points de vue, dont l'explicitation alourdirait considérablement les explications, reste cependant source de questions (y aurait-il une alternative explicitant davantage ?) : preuve en est la rareté et la brièveté des réponses des élèves pour expliquer le passage des triangles rectangles à l'alignement. Ces réponses témoignent aussi des difficultés de formulation.

De ce fait, on peut se demander si la complexité de ces exercices n'est pas trop grande, d'où la discussion sur les alternatives, notamment pour les énoncés.

- Les choix sur les formes de travail provoquées par l'enseignant sont aussi sujets de questionnements - travail préparatoire à la maison (cela peut rendre plus difficile de refaire tout de suite le deuxième exercice pour les élèves qui ont échoué), travail collectif de recherche de stratégie non suivi de la recherche effective (calculs).

On peut ainsi se demander, à titre d'alternative, si une recherche en classe en petits groupes du deuxième exercice n'aurait pas à la fois pris plus de temps et permis aux élèves de davantage discuter et s'approprier la stratégie, en la mettant en œuvre immédiatement… Il aurait alors fallu démarrer l'exercice à un autre moment (question de durée). Mais peut-être que la correction du premier exercice a pris beaucoup plus de temps que prévu, rendant ainsi caduques les prévisions de l'enseignant, qui justement espérait faire travailler tout l'exercice 2 dans la séance ?

- Enfin les participants peuvent aussi s'interroger sur les activités des élèves – on constate de grandes différences ente ceux qui ont résolu l'exercice (activités a maxima), ceux qui n'ont sans doute pas fait grand-chose (a minima) et ceux qui ont commencé mais pas terminé. Comment ces activités contribuent-elles aux apprentissages ? Il semble que l'enseignant vise une certaine disponibilité méthodologique – en insistant dans les deux exercices successifs sur l'utilisation systématique du théorème dès qu'on a des triangles dont on connait les longueurs des côtés. Les copies du contrôle joint en annexe peuvent indiquer une certaine réussite, au moins à court terme, de ce projet.
- Comment gérer l'hétérogénéité ?

Aucun enseignant ne peut passer « suffisamment de temps » pour que tous les élèves résolvent tous les exercices. Il s'agit donc de trouver des équilibres entre les différentes contraintes, en essayant de ne pas dépasser certains seuils de difficultés tout en confrontant les élèves à des vrais problèmes. Par exemple on peut considérer que cet enseignant choisit de renforcer une stratégie intermédiaire – tout comme il interroge une élève « intermédiaire » – à savoir partir des informations de l'énoncé et pas de la « conclusion » recherchée. Cela correspond peut-être à ses élèves, c'est peut-être adapté au stade de leur apprentissage de la démonstration, et charge à lui d'aller plus loin un peu plus tard dans l'année…

Conclusion, discussion et perspectives

1. Bilan : du « comprendre l'agir » à l'agir ?

Reprenons nos hypothèses. Les participants à ces séances peuvent prendre conscience, à partir de ces extraits et grâce aux discussions, de certains choix de l'enseignant et de contraintes qu'il rencontre en relation avec des énoncés précis. Ils sont amenés à utiliser le vocabulaire spécifique qui a été introduit. C'est ce « comprendre l'agir », partiel, qui contribue à installer petit à petit un « comprendre pour agir » – vraisemblablement d'autant plus efficace qu'il peut être confronté à un véritable « agir » en classe.

Des contraintes observées à la question générale des contraintes

La situation observée peut permettre de « remonter » aux contraintes de temps auxquelles tout enseignant doit faire face. Plusieurs difficultés liées au temps sont apparues, nécessitant des choix modifiant les prévisions ; ainsi l'enseignant ne peut attendre l'obtention de la bonne réponse dans l'exercice 1, ni terminer l'exercice 2 en classe ; et plus généralement, le temps que prend n'importe quel épisode où l'enseignant laisse une place à la parole des élèves ne peut échapper aux observateurs. La contrainte des programmes peut aussi apparaître en relation avec celle du temps, dans la mesure où elle impose une certaine avancée du temps didactique, indépendamment des élèves.

De la gestion de l'hétérogénéité à la question des cahiers des charges contradictoires auxquels sont confrontés les enseignants.

D'autres difficultés sont apparues, liées aux contradictions de l'hétérogénéité, qui amènent à ajouter des explications, à surmonter les difficultés de formulation des élèves, quelquefois massives, leurs difficultés à faire les liens, à changer de points de vue ou à démarrer un exercice. Les participants n'échappent pas à réfléchir aux choix à faire pour intéresser à la fois les élèves qui ont réussi et les autres élèves, plus en échec. Ils sont notamment confrontés avec l'enseignant visionné au problème d'aider les élèves sans tout leur dire – et prennent conscience de choix possibles (notamment l'ordre suggéré dans la stratégie, partant de ce qui est connu, ou les aides intermédiaires sous forme de questions, très liées à l'analyse *a priori* de la tâche qu'a pu faire l'enseignant). Ils peuvent constater que l'enseignant n'explicite pas tout ce qui est apparu dans l'analyse a priori, là aussi il choisit. C'est une des contradictions que rencontrent les enseignants – le choix des élèves auxquels ils s'adressent -, plus ou moins accentuée selon les classes, culminant dans la contradiction entre logique de réussite, logique d'apprentissage et logique de socialisation mise en évidence en ZEP par Butlen et *al* (2008).

Du choix de deux tâches avec leur déroulement à la question plus générale de ce à quoi il faut faire attention quand on prépare ses exercices.

L'importance de l'analyse *a priori* des tâches apparaît clairement dans l'accompagnement que l'enseignant donne à voir sur les tâches complexes, faisant travailler le caractère outil du théorème, qu'il a choisies (après un travail sur des tâches plus simples) – il a prévu la difficulté stratégique dans les deux cas, peut-être a-t-il moins anticipé les difficultés de formulation liées aux changements de points de vue dans le premier exercice ce qui l'oblige à renoncer à faire travailler jusqu'au bout l'élève au tableau.

Les activités de certains élèves sont modifiées par les déroulements en classe – cela peut amener à réfléchir à la robustesse des tâches – lié au degré de modification des activités des élèves sur ces tâches suite aux déroulements.

D'autres extraits de vidéos permettent d'aborder davantage des questions liées au relief des notions ou à leur introduction ou aux scénarios – par exemple des vidéos sur le carré bordé sont propices à travailler sur la rupture arithmétique/algèbre. On retrouve l'importance du temps long et du visionnement de suffisamment de vidéos variées.

Mais pourquoi ne pas simplement dire ce qui précède d'emblée ? Pourquoi ces modalités de formation ? Pourquoi tenir à ce passage par le local, presque en temps réel, long, un peu flou, non organisé a priori ?

Le travail en formation que nous avons illustré comporte une phase importante où les participants suivent le déroulement de la séance, s'y intègrent en quelque sorte, se posent des questions comme un professeur, d'autant plus qu'ils ont accès aux réactions des élèves (certaines au moins), que ce soit dans la modalité « au fil du déroulement » ou dans le retour sur les activités des élèves. Certes il manque beaucoup de choses du côté des élèves (de tous les élèves), certes il n'y a pas de risque – le temps peut être arrêté -, mais le travail « simulé » est quand même suffisamment proche du « vrai » travail auquel on veut former pour que cela alimente quelque chose de l'ordre des pratiques, et pas seulement des connaissances par exemple (Vandebrouck, 2008). C'est la raison d'être de ces modalités de formation. Puis les participants questionnent et/ou discutent, à partir d'une attente créée, explicitée, sur les activités attendues des élèves, grâce à l'analyse a priori, faite en tenant compte globalement de ce qui a déjà été fait en classe et du niveau scolaire concerné, et là le collectif prend tout son sens. Ensuite, et seulement après cette discussion, des généralisations sont faites par le formateur, selon les amorces apportées par les participants. On a évoqué ici le problème des modalités de travail en relation avec les énoncés (travail à la maison ou en petits groupes), ou encore la question de savoir comment habituer les élèves à chercher un exercice complexe – on aurait pu aussi évoquer la question des programmes.

Nous pensons avoir illustré comment, grâce à ces dispositifs, la distance entre ce que les participants reconstituent dans ces séances et leur vrai (futur) travail d'enseignant est rendue « petite ». Cela dit, la contribution de ces séances de formation à l'enrichissement visé des pratiques est vraisemblablement d'autant plus facile que ce qui est en jeu est déjà proche de ce que les participants feraient ou aimeraient faire. Il y a des diversités entre les participants, incontournables.

2. Quelles ressources ? Recherches à venir

Partir ainsi des pratiques demande un effort d'adaptation très grand pour les formateurs, des improvisations constantes, et est sans doute facilité par des formations et des ressources adaptées. Une autre question tient au choix des vidéos (cf. Robert et Pouyanne, 2004).

De plus, il manque à tous ces dispositifs l'imbrication des formations générale et disciplinaire, nous l'avons dit, et c'est encore plus actuel qu'auparavant avec les masters. Dans une perspective plus large, on peut envisager de questionner plus avant la profession et de mettre à l'essai des formations grâce à des recherches à plus grande échelle (20 classes, 10 ans ?, ou encore installation d'un même projet sur une académie).

Il va aussi y avoir nécessité d'élargir à des questions dictées par l'actualité institutionnelle – socle, compétences, scientifiques au lycée… Enfin la question des évaluations reste entière.

BIBLIOGRAPHIE

Asselain-Missenard, C. & Robert, A. (2010) Formation des enseignants : pas de GPS ! *Bulletin de l'APM*, 489, 432-440.

Ball, D.L., Forzani, F. (2009) The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education*, 60(5), 497-511.

Blanchard, M. & Chappet Paries, M. (2008) L'enseignant dans une séance de géométrie dynamique - comparaison avec une séance papier/ crayon. In F. Vandebrouck (Ed), *La classe de mathématiques* (pp. 261- 291). Toulouse : Octarès.

Blanchard-Laville,C., Nadot, S. (Eds) (2000) *Malaise dans la formation des enseignants.* Paris, L'Harmattan.

Bloch, I. (2005) Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x* 81, 25-53.

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Butlen, D., Charles-Pezard, M., Masselot, P. (2008) Gestes et routines professionnels : un enjeu pour analyser et intervenir sur les pratiques enseignantes, EMF Sherbrooke, http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/Butlen.pdf

Chappet Paries, M., Lévi, M.-C., Robert, A. (2010) Enseignants de mathématiques du secondaire : stages et formation professionnelle en master ? *Document pour la formation des enseignants13*. IREM Université Paris7-Diderot.

Charles Pezard, M. (Ed) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 30-2, 197-261.

Chesnais, A. (2009) L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves. Thèse de doctorat, Université Paris 7- Denis Diderot

Chesné, E J.-F., Chappet Pariès, M., Robert A. (2009) Quelques exemples pour organiser une partie de la formation professionnelle initiale des enseignants de mathématiques des lycées et collèges, *Petit x* 80, 25-46.

Chevallard, Y. (2010) La didactique, dites-vous ? *Education et didactique* 4, *139-147.*

Clot, Y. (2007) De l'analyse des pratiques au développement des métiers, *Education et didactique,* 1,1 83-94.

Haspekian, M. (2005) Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, étude du cas des tableurs. Thèse de doctorat, Université Paris 7-Diderot

Horoks, J. (2008) Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28/3, 379-416.

Kuzniak, A. (1994) Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré, Thèse de doctorat, Université Paris 7-Diderot.

Lagrange, J.-B. & Grugeon, B. (2003) Vers une prise en compte de la complexité de l'usage des TIC dans l'enseignement. Une méta-analyse des publications d'innovation et de recherche en mathématiques. *Revue Française de Pédagogie*, 143, 101-111.

Lenfant, A. (2002) De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires. Thèse de doctorat, Université Paris 7-Diderot.

Mangiante, C. (2007) Une étude de la genèse des pratiques de professeurs des écoles enseignants des mathématiques : prédétermination et développement, Thèse de doctorat, Université Paris 7- Denis Diderot.

Margolinas, C. & Rivière, O. (2005) La préparation de séance : un élément du travail du professeur. *Petit x* 69, 32-57.

Masselot, P. (2000) De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école – une étude de cas. Thèse de doctorat, Université Paris 7-Diderot.

Matheron, Y. & Noirfalise, R. (2007) Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques. Quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique, *Petit x* 70, 30-47.

Ngobo, B. (2003) Etude des pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP, effets éventuels de ces pratiques sur les apprentissages. Thèse de doctorat, Université Paris 7-Diderot.

Pastré, P. (2002). L'analyse du travail en didactique professionnelle. *Revue Française de Pédagogie* 138, 9-18.

Robert, A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques* 27/3, 271- 312.

Robert, A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques* (pp. 59-68). Toulouse : Octarès.

Robert, A. (2010) Formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré. *Repères-IREM* 80, 87-103.

Robert, A., Roditi, E., Grugeon, B. (2007) Diversités des offres de formation et travail du formateur d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit x* 74, 60-90.

Robert, A., Pouyanne, N. (2004) *Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation*. Document pour la formation des enseignants5, IREM, Université Paris7-Diderot.

Roditi E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques*. Paris, L'Harmattan.

Rogalski, J. (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques* (pp. 23-30 et 429-454). Toulouse : Octarès.

Samurçay, R., Pastré, P. (1995) La conceptualisation des situations de travail dans la formation des compétences. *Éducation permanente* 123, 13-31

Shulman, L.S. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15 (2) 4-14.

Sensevy, G., Mercier, A. Schubauer-Léoni, M.-L., Leutenegger, F. (2007) *Agir ensemble - L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : PUR.

Vandebrouck, F. (Ed.) (2008) *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants*. Toulouse : Octarès.

Vergnaud, G. (2002) La conceptualisation, clef de voûte des rapports entre pratique et théorie. In Actes de la Desco de l'Université d'Automne Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants

Vergnes, D (2001) Les effets d'un stage de formation en géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques* 21/1-2, 99-122

Vidal-Gomel, C. Rogalski, J. (2009) La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. *Activités* Revue électronique, vol 4 n°1.

Annexe

Le contrôle

Suite aux analyses des déroulements précédentes, l'analyse du contrôle proposé aux élèves et dont l'énoncé ressemble à celui du deuxième exercice peut renforcer certains questionnements, mettre l'accent sur des difficultés persistantes des élèves, permettre peut-être des choix plus objectivés.

Enoncé

Construire un segment [*RS*] mesurant 4,8 cm puis un point *U* et un point *T* tels que : *RU* = 6,8 cm, *SU* = 4,8 cm, *ST* = 6,4 cm et *RT* = 8 cm.

Les points *S*, *T*, *U* sont-ils alignés ? Pourquoi ?

Pour cet énoncé, l'enseignant a choisi la même forme que dans l'exercice cherché en classe. Il ne fournit pas de figure.

Les copies

Alors que souvent en formation les copies permettent un travail sur l'évaluation, ici nous essayons de les mettre en relation avec ce qui s'est passé au cours de la séance tant au niveau de ce qu'a proposé l'enseignant que des activités des élèves.

Les vingt six élèves de la classe ont tracé la figure à l'aide d'une règle graduée et du compas. Seul un élève a tracé une figure fausse. Ils ont tous relié les points pour former deux triangles. On peut faire l'hypothèse que le professeur a été entendu lorsqu'il a insisté sur le fait de considérer des « figures », comme nous le rappelons :

> P : Bien donc déjà sur cette figure t'as identifié, t'as identifié quelle figure ? Comment as-tu décomposé la figure ?

Vingt et un élèves ont construit les triangles *RST* et *RSU* de part et d'autre de la droite (*RS*), quatre élèves ont construit des triangles « emboités », un élève n'a construit qu'un seul triangle.

Il semble donc que la plupart des élèves ont privilégié la figure sur laquelle le professeur avait davantage échangé avec eux. Faute de temps en effet, le professeur avait pris en charge la stratégie et la construction dans le cas des triangles « imbriqués » (n'y passant qu'une minute ou deux).

Dix-huit élèves ont indiqué les mesures des segments tracés sur leur figure. Cela peut renvoyer à une habitude de la classe renforcée peut être par le fait que le professeur part des données pour amener les élèves à chercher ce qu'on peut en déduire. Ici la plupart des élèves mettent donc ces données en évidence sur la figure, comme l'élève au tableau l'avait déjà fait.

Dans le tableau ci-dessous nous présentons les différentes productions des élèves.

Figure trop imprécise et/ou pas de calculs (9) ou des calculs faux (2) (n'utilisant pas les carrés des mesures des côtés des triangles (1), utilisant les carrés des mesures des côtés (1)) Certaines justifications sont de type mesurage des angles(3), vérification à la règle de l'alignement (1)…La méthode à utiliser est indiquée par un élève, les calculs à effectuer sont évoqués par un autre.	La nature des triangles (rectangle et non rectangle) est justifiée La conclusion est non complète ou non justifiée	La nature des triangles (rectangle et non rectangle) est justifiée. La conclusion est correcte : l'angle TSU n'étant pas plat, les points T, S, U ne sont pas alignés	La nature des triangles (rectangle et non rectangle) est justifiée. La conclusion est correcte : la perpendiculaire à la droite (RS) passant par S est unique, les droites ((ST) et (SU) ne sont pas confondues donc les points T, S, U ne sont pas alignés)
11 2 élèves ont tracés des triangles « imbriqués »	5 Pour 2 élèves, seul un triangle est démontré rectangle 1 élève présente mal ses calculs	9	1

Tableau 4 – Les différentes productions des élèves

La plupart des élèves (18) continuent donc, dans le contrôle, à dépasser la lecture sur la figure puisqu'ils évoquent ou convoquent les théorèmes à utiliser pour trouver la nature des triangles.

Quinze élèves sur vingt six (58%) ont utilisé de façon correcte la réciproque et la contraposée du théorème de Pythagore pour trouver la nature des triangles (rectangle ou non rectangle). Ils ont reconnu la connaissance à utiliser, élaboré la première étape du raisonnement, trouver la nature des triangles à partir des mesures des côtés, et maîtrisé les calculs.

Sur ces quinze élèves, dix ont mené jusqu'au bout la seconde étape du raisonnement concernant l'alignement des points. Ils ont donc réussi à établir les liens, triangle rectangle/angle droit, triangle non rectangle/ angle différent d'un angle droit, angle non plat/points non alignés ou droite perpendiculaire en un point et droite non perpendiculaire passant par ce point/ points non alignés.

Pour seize élèves, ceux qui n'ont pas cherché ou trouvé la nature des triangles (onze élèves) et ceux qui n'ont pas, à partir de la nature correcte des triangles, trouvé la conclusion (cinq élèves), il peut manquer le fil directeur, la mise en place d'une stratégie globale reliant ce qu'on cherche à ce qu'on a comme données.

Cependant on peut différencier selon les élèves. Certains partent de la conclusion : savoir si les points sont alignés ou non. Ils adoptent le changement de point de vue alignement / angle plat (tous ont construit les points T et U de part et d'autre de S). Mais du coup ils ne voient pas le lien avec les données. Ces élèves font partie du groupe de onze élèves qui n'ont pas cherché la nature des triangles.

Les cinq autres élèves, eux, ont suivi la stratégie recommandée par l'enseignant : partir des données :

> P : Donc quand vous avez des longueurs et qu'on reconnaît des triangles et quand on connaît les 3 longueurs des 3 côtés du triangle, y a de grande chance qu'il faut s'intéresser au fait qu'ils soient rectangles ou pas (rappel)

On peut constater que ce qui est le plus réussi, retenu, voire disponible est la méthode pour chercher la nature d'un triangle, méthode utilisée à plusieurs reprises dans les deux exercices précédents. Cela montre une certaine efficacité de la répétition de la résolution d'une tâche complexe avec élaboration d'une stratégie comprenant plusieurs étapes.

On peut se demander si la correction des copies ne va pas inciter l'enseignant à expliciter diverses pistes pour résoudre un exercice complexe : partir de la question qu'on se pose ou partir des données pour établir une stratégie. En effet ce qui manquerait le plus aux élèves, mais de manière différente, c'est d'arriver à faire les liens entre informations/théorèmes à disposition/question à résoudre (globale).

Autant de questions importantes ajoutées par ce matériel.

Ce texte présente le déroulement prévu de l'atelier.

QUELLE UTILISATION DES VIDEOS DANS LA FORMATION INITIALE OU CONTINUE ?

Marie-Christine LEVI, Françoise PILORGE, Aline ROBERT
LDAR, Paris 7

Résumé – L'atelier s'organisera autour du visionnement d'une vidéo, assez souvent utilisée cette année par les collègues qui animent l'atelier, et cela dans divers contextes de la formation professionnelle initiale actuelle.

Après la présentation du contexte de la vidéo (classe de quatrième ordinaire, exercice de géométrie) et les analyses préalables de l'exercice concerné, la vidéo sera projetée et la discussion sera organisée, à partir des réactions et des expériences diverses des participants, autour de deux grands questionnements :

- l'élaboration d'un scénario de formation autour de cette vidéo, avec un essai pour répertorier un certain nombre de variables à ce sujet aux mains du formateur et un certain nombre d'alternatives, à adapter à chaque situation particulière de formation ;
- l'organisation des « remontées » à partir d'un visionnement et de ce qui a précédé, les séances ayant eu lieu permettant d'illustrer certaines directions, esquissées pendant la séance, qui ont pu être reprises et développées par le formateur, par exemple liées aux choix de contenus ou de déroulement que l'enseignant donne à voir.

Des perspectives seront dégagées – vidéos de « cours », extensions des usages des vidéos, choix des vidéos, ainsi que des difficultés d'animation de ce type de séances, notamment en relation avec les publics (M1, M2).

Objectifs du chercheur

Etudier comment le cadre présenté ce matin peut-être utilisé et, éventuellement élargi. Pour cela, illustration par un exemple de séance de formation avec vidéo : déroulement et étude des adaptations possibles selon les publics.

Objectifs du formateur

Mettre l'étudiant en posture d'enseignant (en particulier : apprendre à faire vivre un énoncé pour des élèves).

Apprendre à prendre en compte l'hétérogénéité d'une classe (en particulier passage du travail avec le groupe à un travail individualisé).

Apprendre à évaluer les connaissances et capacités des élèves pour les aider à consolider leurs connaissances.

Découvrir et apprendre les « improvisations » de l'enseignant.

Dans l'académie de Paris, nous (deux formatrices en co-animation) avons organisé trois séances avec la même vidéo devant un public de : PSTG (20 stagiaires), M2 (18 étudiants), M1 (28 étudiants).

Dans l'académie de Versailles, j'ai organisé 3 séances avec cette même vidéo en M1 après le STG d'observation et avant le STG de PA, en M2 avant le STG de PA/RESP et avant le STG des agrégatifs.

Nous décrirons plus précisément la séance telle qu'elle s'est déroulée en M1 (avec indications pour les autres niveaux).

Phase 1

Les étudiants ont le programme du collège.

Présentation rapide de la classe et de l'enseignant : classe de 4ème « ordinaire » dans un établissement « ordinaire » (environ 80% de réussite au DNB).

Il s'agit d'une séance d'exercices : nous allons étudier plus particulièrement l'un d'eux que les élèves ont eu à chercher à la maison pour cette séance.

La figure et l'énoncé de l'exercice 2 (droites parallèles) sont distribués : les étudiants ont 4 à 7 minutes pour l'étudier.

Dans la figure ci-dessous on a : AB = 7,5 cm ; BC = 10 cm ; AC = 12,5 cm ; CD = 10,5 ; BD = 14,5 cm.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

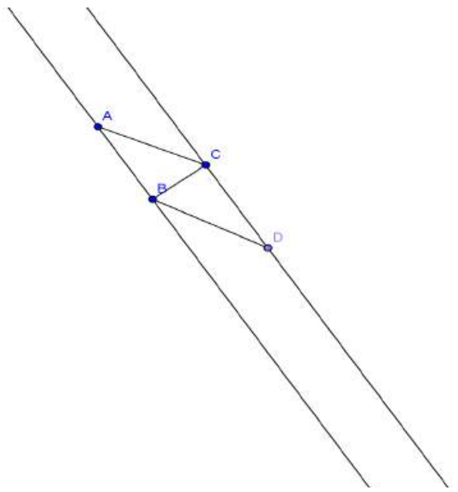


Figure 1 – L'énoncé et la figure distribués aux étudiants

Trois questions sont écrites au tableau

1. Quelles sont les connaissances en jeu ? Sont-elles nouvelles ou anciennes ?
2. Est-ce un exercice de début ou de fin de « séquence » ? Pourquoi ?
3. Combien de temps faut-il prévoir pour la correction ?

Réponses (en italique, commentaires et compléments apportés par les formateurs)

Réponse à la question 1

Deux connaissances :

Théorème de Pythagore (réciproque) en cours d'acquisition. *Voir programme : faut-il distinguer le théorème, sa contraposée, sa réciproque ?*

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième…. Connaissance ancienne ($6^{ème}$) supposée disponible.

Réponse à la question 2

Ce n'est pas un exercice d'application directe mais un exercice complexe. La méthode n'est pas indiquée, pas de questions intermédiaires, l'élève doit introduire des étapes.

De plus, plusieurs changements de points de vue sont nécessaires :

- *Si on part de la conclusion, il faut remplacer « droites parallèles » par « droites perpendiculaires à une même troisième » puis « droites perpendiculaires » par « angle droit » et enfin par « triangle rectangle ». Il faut encore choisir entre le théorème et sa réciproque.*
- *Si on part des données, on peut essayer d'appliquer un théorème qui vient d'être étudié … puis raisonnement analogue*

Les calculs : faire deux calculs séparés et comparer les résultats.

Remarque : On peut aussi demander aux étudiants de rédiger un corrigé destiné à des élèves de $4^{ème}$.

Réponse à la question 3

Les étudiants prévoient entre 10 et 20 min.

Cette analyse de la tâche permet aux étudiants de réfléchir « comme un enseignant » : première prise de conscience du métier : connaitre le programme, prévoir la mise en fonctionnement des connaissances des élèves, se préparer à repérer le travail des élèves. Le formateur choisit d'approfondir plus ou moins cette analyse suivant le niveau et les réactions des participants.

Phase 2 : la vidéo (15 à 20 min)
Phase 3 : discussion

Comment organiser la discussion ? Quelle $1^{ère}$ question poseriez-vous ?

En PSTG et en M2, on a laissé les étudiants réagir puis on a essayé de classer ce qui relève de la gestion, des maths etc… En M1, on a guidé davantage en posant des questions.

Exemples de questions posées : réponses des étudiants et « remontées »

Concernant la gestion de la classe

- Quel climat règne dans cette classe ?

Confiance mutuelle : les élèves se déclarent eux-mêmes en début de cours pour leur travail non fait.

- Globalement : trouvez-vous que la séance se passe bien ? que les élèves travaillent ?

Oui, le début de séance semble désordonné (« je croyais qu'il fallait les laisser debout et attendre le silence ? ») mais finalement, les élèves travaillent. Ambiance favorable au débat : proximité entre étudiants et enseignant filmé.

Le calme peut être obtenu par la mise au travail : avoir le calme pour faire des maths ou faire des maths pour avoir le calme ?

- La durée de correction de l'exercice correspond-elle à ce que vous aviez prévu ? Certains épisodes vous semblent-ils inutiles ?

Plus long que prévu (24 min 30) mais la plupart ne trouvent rien à enlever : « On ne peut pas passer autant de temps à chaque fois, sinon impossible de finir le programme ».

Difficulté de trouver un *rythme* adapté au contenu et à la classe.

A charge : le programme n'avance pas.

A décharge : laisser chercher, argumenter, instaurer un débat scientifique dans la classe, exhiber un raisonnement « modèle » : ici le professeur décide de prendre le temps …

- Comment les élèves se mettent-ils au travail ? Comment sont-ils enrôlés ? Comment est construit le questionnement oral du professeur ?

Au début, il attend, prépare matériel puis élève la voix ; après l'exercice 2, laisse un moment d'agitation (pause) puis menace d'une interro. Il distribue la parole, fait répéter, reformuler, renvoie la question, demande à un autre d'aider…Veille à ce que ce ne soit pas toujours les mêmes. Sollicite certains…

- Quels sont les déplacements du professeur, est-il statique ?

Quand un élève est au tableau, il se met au fond pour éviter un dialogue avec l'élève au tableau.

- Quelle gestion du tableau ?

Concernant la gestion de l'hétérogénéité du groupe, de la parole

- Quels ont les choix du professeur pour la recherche de l'exercice ? (à la maison, correction collective en classe).
- Quels sont les choix du professeur pour le scénario de correction ?

Bien distinguer 2 phases. La 1ère phase, uniquement orale permet d'expliciter la démarche : travail sur la figure, décomposition en sous-tâches, formulation par les élèves. Importance de distinguer la stratégie et la rédaction (cf. préambule pour le collège page 11 « deux étapes… »). La 2ème phase : on rédige et on copie. Correction au tableau (fig. projetée) alternée dans un ordre précis : d'abord une élève choisie, puis le professeur. Entre un élève qui a réussi et un qui n'a pas cherché, il choisit un intermédiaire : envoyer au tableau un élève « qui n'a pas réussi » mais qui a commencé = *choix de l'enseignant.*

- Pourquoi le professeur reprend-il la main sur la correction ? Choix du moment où il le fait ?
- Quelles sont les difficultés des élèves qui apparaissent dans cet extrait ?
- Quelles aides sont données par le professeur ?

Il encourage, laisse s'exprimer, rappelle les connaissances utiles. Il évite de répondre lui-même mais demande à un autre, renvoie la question, utilise l'humour (2 points alignés).

Concernant la rigueur du professeur et ses exigences propres : les définir

- Formulations des théorèmes et propriétés.

Ne pas dire « hypoténuse » lorsqu'on ne sait pas si le triangle est rectangle.
Ne pas écrire une égalité non prouvée : 2 calculs séparés.
Distinguer théorème et réciproque (voir programme : propriété « caractéristique » de Pythagore : peut-on écrire un seul énoncé ?).

- Etes-vous d'accord pour « ne pas retenir le mot Pythagore mais s'attacher à l'énoncé correct » comme le fait l'enseignant observé ?

A décharge : contraintes.

- Faut-il réciter exactement le théorème écrit dans le cours ? Contextualisé ou non ? Des étudiants s'étonnent que l'élève ne sache pas réciter le théorème (« Moi, je le lui aurais fait recopier… »). Quelles exigences ?

Concernant la gestion des imprévus

- Quels sont-ils et que pensez-vous de la manière dont les élèves et l'enseignant réagissent ?

Camille : angle droit et perpendiculaire ; 2 points sont alignés,
Un autre élève : et si (AC) // (BD) ?
Erreur du professeur : « rectangle en B » au lieu de « en C », corrigée par un élève.
Le prof improvise. Dédramatise, se met en danger en avouant ne pas savoir, réfléchit à haute voix, trouve la solution et est content de cela puis scénarise la réflexion des élèves pour les mener à la solution en faisant participer la classe.
Il cherche tout haut devant les élèves, attentifs : on perçoit le cheminement de sa pensée (angles-non-longueurs…). Cf. préambule p11 « l'enseignant se livre à ce travail devant la classe… ». On peut aussi reporter à la séance suivante, laisser à nouveau un temps de recherche…

Concernant les différentes phases de l'extrait de vidéo

Objectif : apprendre à rythmer une séance, gérer le temps, l'alternance d'activités.

- Les dégager et mettre un titre à chacune d'elles (1ère phase : dégager oralement une stratégie de résolution, des étapes ; 2ème phase : rédaction écrite).

Autres questions soulevées

- La figure : à donner plutôt « à main levée », qu'est-ce que ça change ?
- Comment le professeur gère-t-il un élève plus rapide ?

Il lui donne un autre exercice à faire. Prendre en compte la diversité des élèves (compétence 6).

- Peut-on modifier l'énoncé de l'exercice ? Qu'est-ce que ça change ?

On peut ajouter des questions : les triangles sont-ils rectangles ? Les élèves auraient moins d'initiatives à prendre mais le travail mathématique serait moins intéressant : énoncé « fermé / ouvert ».

- Au lieu de « montrer que les droites sont parallèles », on peut demander « les droites sont-elles parallèles ? » ce qui *ouvre* encore l'énoncé.
- Peut-on donner cet exercice en devoir maison ?

Problème du travail des élèves et de l'évaluation : certains ont des aides, d'autres non, possibilité de commencer en classe et finir à la maison, pertinence des devoirs à rendre.

Conclusion

A partir de cette vidéo, on a tenté de faire prendre conscience

1. des contraintes de l’enseignant :

- le programme ;
- le temps : laisser faire ou faire soi-même, laisser chercher ou pas…
- la gestion de l’hétérogénéité : ceux qui ont su faire et les autres.

2. des choix de l’enseignant :

- envoyer un élève au tableau (lequel ?) ou corriger soi-même ;
- orienter le travail des élèves en dégageant les étapes ;
- aider les élèves sans donner les réponses ;
- distribuer la parole, relancer…

3. des difficultés des élèves :

- pour faire un raisonnement,
- pour formuler un théorème ou un résultat.

C’est en M1 que la séance a été la plus constructive : étudiants plus nombreux, plus « réactifs », plus disponibles peut-être… ? Vidéo plus familière aux formatrices ($3^{ème}$ fois).

Témoignages M1

Ce qui m'a le plus frappé dans la vidéo étudiée est le silence des élèves lors de la recherche de l'enseignant.

J'ai trouvé l'usage des vidéos intéressant pour aller directement dans le concret de ce qui se passe dans la classe, tout particulièrement :
La gestion de l'imprévu,
Le début du cours,
La nécessité de varier les supports d'activité, de laisser du temps aux élèves pour chercher
Les déplacements du professeur dans la classe....

Cela m'a aidée pendant les stages et je pense que cela peut être un outil très utile de formation professionnelle.

Témoignages des agrégatifs

Vidéo très intéressante sur la manière de rebondir sur les erreurs des élèves, de faire participer l’ensemble de la classe.

C’est une opportunité de voir des situations non observées en classe : comment encadrer la recherche des élèves, rythmer leur travail.

Les questions ont été suggérées par la formatrice, je n’avais pas le recul nécessaire pour savoir comment regarder la vidéo toute seule. Il faudrait en voir plus, après la pratique du stage.

Questionnement intéressant sur la manière de gérer une correction d'ex, faire participer toute la classe et sur la posture du professeur.

Cela m'a permis d'envoyer des élèves au tableau sans trop m'inquiéter de ma réaction, ni celle de la classe, et d'être à l'aise en rebondissant sur leurs erreurs.

Il est toujours bien de voir un maximum de situations et d'y réfléchir car je pense que cela m'aidera à réagir le jour où je serai face à une classe.

A mon sens, le prof était un peu « envahissant », pas le temps de silence pour laisser réfléchir...

Les vidéos nous présentent des exemples qui sont toujours bons à avoir en tête, pour s'en inspirer ou s'en détacher.

Grâce aux vidéos, on peut prendre du recul sur la posture à adopter en classe.

C'est un support pour se poser des questions et en poser au formateur.

Cela permet de voir un peu à quelle sauce on va être mangé ! Mais rien ne vaut la pratique dans une classe car avec les vidéos, on ne se rend pas compte de l'énergie que cela demande, de la concentration que cela nécessite pour un professeur.

Cela a très certainement contribué à cette trop courte formation mais dans une faible mesure ; l'observation en stage était beaucoup plus suivie dans la durée et donc plus complète.

Des questions qui restent du côté des formateurs

Une même vidéo, qu'en fait-on suivant le public ?

Quelles variables développer ?

Comment les graduer progressivement de M1 en M2 ?

Quel pilotage des vidéos par rapport aux contenus proposés ?

Une piste de travail : de la posture au contenu (peut-être en M1 des vidéos opportunistes centrées sur la gestion de classe et en M2 plutôt liées aux contenus)

Comment choisir les vidéos ? etc...

Perspectives

Créer une banque de vidéos avec des scénarios de formation associés dans le cadre d'un travail de recherche à l'IREM Paris Diderot.

TRAVAILLER SUR SON TRAVAIL DE PROFESSEUR EN DIALOGUANT ENTRE PAIRS FACE A LA VIDEO D'UN DE SES PROPRES COURS ET FACE AUX VIDEOS DES AUTO-CONFRONTATIONS[1] A CES TRACES VIDEO DE COURS

Christine GRANDJEAN, Géraldine JACQUIN, David MARECHAL, Lydia BARTHOD
Groupe Métier, IREM de Besançon

Avec la méthodologie de la Clinique de l'Activité au cœur des études que l'équipe de recherche de Y. Clot, titulaire de la chaire de psychologie du travail au CNAM, mène sur le développement de l'activité professionnelle.

1. Présentation de la méthodologie (Christine Grandjean) : « Un usage spécifique de la vidéo, dans une démarche d'observation mutuelle, dialogique, par les professeurs, de ce qu'ils font dans leur classe. »

Nous sommes professeurs dans l'académie de Besançon : deux d'entre nous, Géraldine Jacquin et Christine Grandjean enseignent en collège, et deux, David Maréchal et Lydia Barthod enseignent actuellement en lycée.

Nous avons travaillé depuis quelques années (2003) avec Danielle Ruelland-Roger, qui fait partie de l'équipe de recherche de Yves Clot (équipe de Clinique de l'activité, LRTD, CNAM). Nous avons pu faire, dans ce cadre, un travail sur notre travail de professeurs de mathématiques[2], avec la démarche élaborée par Yves Clot et adaptée au milieu professionnel particulier des professeurs. En voilà une description : un binôme de professeurs est constitué ; ils choisissent ensemble un thème sur lequel porte le cours qui va être filmé : le choix est fait de regarder la mise en place d'une notion nouvelle. Dans un premier temps, le professeur, seul avec l'intervenant-chercheur (ici Danielle Roger), regarde les images de son cours : il est conduit à revisiter son activité, grâce aux questions que lui pose l'intervenant-chercheur : c'est l'auto-confrontation simple. Cette auto-confrontation débouche souvent sur la définition d'une question de métier. Puis, dans un deuxième temps, des moments de ce cours sont regardés, avec l'intervenant et le collègue du binôme : ce sont les auto-confrontations croisées. Ensuite, dans un collectif élargi, de pairs qui ont chacun vécu une démarche similaire, sans rapports de pouvoir ni

---

[1] Quelques jours après avoir été filmé tout au long d'un de ses cours, le professeur est à nouveau filmé s'observant au travail sur la vidéo de son cours en présence du chercheur avec qui il dialogue sur ce qu'ils regardent l'un et l'autre. Puis à nouveau peu de temps après, il est encore une fois filmé observant, cette fois en présence du collègue de son binôme dans l'expérience et toujours du chercheur, son propre cours et celui de son *collègue*. C'est ce qui constitue les vidéos des confrontations des professeurs aux traces vidéos de leurs propres cours. Les vidéos des autoconfrontations installent dans le travail du collectif une activité dialogique orientée vers ce qui étonne, ce qui est difficile à comprendre, et aussi ce qui est difficile à dire. Ce sont des artefacts puissants dont les professeurs se saisissent pour développer leur pouvoir d'agir professionnellement (cf : J.L. Roger ; *Refaire son métier* ; 2007 ; Erès.)

[2] Conférence de Danielle Roger au colloque de la CORFEM en 2007.

recherche d'un consensus sur ce qu'il faut faire, cette question de métier peut être discutée à nouveau.

Dans l'atelier, la projection de deux courts montages filmés dans ce cadre a permis de voir cet usage spécifique de la vidéo, dans une démarche d’observation mutuelle, dialogique, par les professeurs de ce qu’ils font dans leur classe.

Deux d'entre eux, Géraldine Jacquin et David Maréchal ont ensuite parlé des ressources nouvelles qu'ils ont tirées de ce travail et ont montré comment ils ont pu ainsi développer leur pouvoir d'agir sur leur métier, comment ils ont pu inventer de nouvelles manières de concevoir et de faire, par l'apport des controverses constructives qui se sont développées dans les collectifs constitués.

2. Intervention de Géraldine Jacquin : « J'ai pu arrêter la course infernale après le temps. »

*Au vu des vidéos de nos cours et de l’auto-confrontation simple de chacun***,** il nous est apparu que nous avions l’un et l’autre *un problème quant au rythme de la classe***.** Plus précisément nous allions trop vite pour beaucoup d’élèves.

Le travail sur notre travail m’a fait prendre conscience de ce qui était sous-jacent à cette façon de faire : c’était ma manière de garder le contrôle de la classe en cherchant à occuper toujours les élèves pour ne pas qu'ils décrochent, qu'ils se déconcentrent, qu'ils s'agitent. En fait, c'est la crainte que la gestion de la classe ne soit plus possible, du débordement. Pour y remédier, j'avais adopté la stratégie du « zéro temps mort », c’est-à-dire être toujours en activité (corrections, cours, exercices d'application) sans leur laisser le temps de chercher, de prendre quelques instants pour « ingurgiter » une nouvelle notion, de respirer en quelque sorte.

Quand j'ai vu le film avec mes 6èmes, j’ai trouvé que se dégageait des images une frénésie, une « hyperactivité » que j’ai perçue comme fatigante ; et en effet, ces heures de cours m'épuisaient. Et ces images m'ont révélé que finalement, j'arrivais au but inverse de celui que je voulais atteindre. Au lieu de calmer la classe, cette suractivité excitait les élèves.

1ère piste choisie pour améliorer l’activité en classe : calmer le jeu, ralentir le rythme, laisser les élèves chercher, leur laisser du temps pour comprendre, pour « digérer » mes paroles. Mais je n'avais toujours pas l'esprit tranquille, le problème suivant restant presque entier. Si les élèves n'étaient pas assez occupés, la classe allait se déconcentrer, s'agiter et devenir ingérable.

Ce sont les images de Marie-Jo (Marie-José Houssin[3]), une collègue parisienne qui a participé au dispositif et avec qui nous avons eu des débats collectifs, qui m'ont permis de voir ce problème sous un autre angle de vue et d'avancer dans la résolution de mon problème de légitimité. J'y ai vu une classe où un débat mathématique avait lieu entre élèves, supervisé et organisé par l'enseignante. J'ai essayé de comprendre, d'analyser comment elle se positionnait, ce qui faisait qu'il y avait de l'écoute entre élèves, que la parole de chacun était prise en compte et respectée. Et tout cela sans que l'enseignante paraisse un « monstre » de sévérité et d'autorité.

[3] Marie-José Houssin a participé à l’expérience de travail sur le travail, comme le proposaient les chercheurs en clinique de l’activité, dans un autre collectif regroupant six professeurs de mathématiques de collège de l’académie de Créteil.

Cette réflexion m'a conduite à la deuxième piste suivante.

En fait je ne basais ma légitimité que sur le contenu de ce que je leur proposais et non pas sur mon statut de professeur. Je ne me donnais pas en fait de légitimité propre. Je ne pensais être légitime que si le contenu de mon cours était assez bien pour les intéresser, les motiver, leur donner envie de chercher. Donc il fallait que je propose sans arrêt des activités, des exercices écrits ou oraux, des séances de cours, remplir l'heure au maximum.

Et j'en suis arrivée à la conclusion suivante. Ma légitimité, c'est tout d'abord sur mon statut de professeur que je devais la baser, ma place d'adulte dans la classe, dont la parole a un statut différent de celle des élèves. Pas dans le sens qu'elle est supérieure mais dans le sens que nos paroles (la mienne et la leur) n'avaient pas le même rôle à jouer. Cela paraît peut-être bizarre, mais à l'époque, je pensais que je devais sans arrêt « gagner » mon droit de parole par son contenu. Et j'ai repositionné les choses. J'ai posé dans ma tête (et forcément par conséquent dans ma façon d'être dans ma classe) comme postulat de départ que je suis par mon statut de professeur, l'adulte référent de la classe, celui dont la parole est légitime et qui doit être écouté et respecté. Et aussi celui qui distribue la parole des élèves, car bien sûr, chacun a le droit de s'exprimer, mais pour que la classe reste gérable, cette parole doit être régulée, organisée, et donc c'est mon rôle de le faire. Avec le silence et l'écoute de chaque élève comme point de départ.

C'est ce silence et cette écoute, que je pose en fait maintenant comme règle de vie numéro 1 de la classe, que je m'épuisais avant à justifier par des « Tais-toi, tu as un exercice à faire » ou « tu n'as pas fini de copier ton cours » et autres. J'ai réalisé que c'est la qualité d'écoute et de calme qui amène à l'activité et non pas l'inverse. D'avoir vu Marie-José, j'ai vu que c'était possible. Elle, avec sa manière de faire, alors pourquoi pas moi, en adaptant bien sûr à ma personnalité.

Grâce à ce nouveau positionnement, j'ai pu arrêter la course infernale après le temps, qui était ma stratégie d'évitement des temps morts. Je suis plus détendue, plus disponible en fait car moi aussi plus à leur écoute. Et sans bien sûr avoir renoncé à les motiver, à les intéresser, à les faire réfléchir et chercher, au contraire. Mais le fait d'avoir positionné tout cela en aval de l'écoute et non plus en amont comme je le faisais auparavant me permet d'atteindre mes objectifs beaucoup plus efficacement et avec beaucoup plus de sérénité.

Ceci n'est qu'un problème parmi tant d'autres. Nous sommes toujours en questionnement dans notre métier, avec sans cesse de nouveaux conflits d'activités, de nouveaux empêchements. Le travail en clinique de l'activité nous permet de faire émerger ces problèmes de métier, de les empoigner en collectif. Alors apparaissent à chacun d'entre nous d'autres possibles, d'autres façons de faire à explorer, à adapter, à essayer, un puits de ressources de gestes de métiers. Chacun des échanges étant bien sûr sans jugement des uns par les autres, sans modèle à suivre, et tous nos conflits d'activités sont toujours en chantier, en perpétuelle évolution et requestionnement.

3. Présentation de David Maréchal : « Laisser de longs moments de recherche aux élèves, leur proposer des problèmes plus riches, c'est devenu une priorité. Je ne suis plus en quête de rentabilité quantitative pédagogique. »

Les images que vous allez voir sont des images brutes, sélectionnées mais pas retouchées. Elles sont le matériau de travail. Elles datent de 2003. Vous y verrez un extrait de mon auto-confrontation simple, de mon auto-confrontation croisée avec Géraldine ainsi qu'un extrait d'une auto-confrontation croisée venant du collectif de Paris.

C'est, pour moi quelque chose de très personnel, qui ne correspond pas à un discours que l'on a l'habitude d'entendre entre collègues, même entre collègues qui échangent sur leurs pratiques. *Il s'agit d'un discours spontané, libre qui n'est soumis à aucun jugement, à aucune autorité.*

Lecture du montage VIDEO

Je vais vous montrer comment ces images illustrent un début d'évolution sur un problème de métier que nous rencontrons tous. Ce procédé peut être grossièrement simplifié en trois étapes :

- Lors de l'auto-confrontation simple, je suis frappé par l'image d'une élève qui n'a pas le temps de coller son polycopié alors que j'avance dans les explications. Je prends conscience du problème, à savoir le rythme, la gestion du temps et au-delà, la crainte de ne plus maîtriser la classe si je laisse les élèves plus autonomes.
  L'analyse que j'en fais est une analyse fermée sur moi-même, me « chargeant » d'arguments personnels : « je suis impatient, pressé dans la vie » et je fais le lien avec mon expérience personnelle passée. Il s'agit là d'une défense naturelle et face à un problème de métier récurrent, c'est souvent là que s'arrête l'analyse de la plupart des professionnels.
- L'auto-confrontation croisée avec Géraldine me permet de réaliser que je ne suis pas seul face à ce problème et que ma collègue, même si elle a une façon différente de remédier à ce problème, le vit également. C'est assez troublant car il s'agit d'une collègue avec qui je mettais beaucoup de choses en commun et vis-à-vis de qui il ne me semblait pas avoir de tabous professionnels.
  L'analyse que j'en fais est différente, moins isolée. Je comprends qu'il s'agit d'un problème de métier. Je passe donc la barrière Personnel / Problème de métier. Cette étape m'amène à me déculpabiliser. Ceci dit, déculpabilisation ne rime pas avec abandon du problème. Bien au contraire, donner une autre dimension à ce problème me permet d'être plus disposé psychologiquement à prendre ce problème à bras le corps.
- La troisième étape correspond aux confrontations avec le collectif (celui de Besançon ou celui de Paris). Déculpabilisé et disposé à changer, je vois, en regardant un cours comme celui de Marie José, une façon de faire complètement différente de la mienne, voire même à l'opposé. Cela n'est pas un modèle mais c'est un possible, un possible concret. Comme tout enseignant j'avais suivi des formations me vantant une flopée de méthodes différentes de la mienne, mais cela n'était toujours que des possibles abstraits. La vidéo les a rendus concrets.

En conclusion, quand je regarde ce montage vidéo et que je vois ce professeur parler ou faire, je ne me reconnais pas. Je n'ai pas l'impression que c'est moi. Il est très difficile d'évaluer une modification ou évolution de sa pratique professionnelle, mais je sais que je n'ai plus les craintes et les tourments que décrit cet enseignant que je vois parler, qui pourtant n'est autre que moi-même quand a débuté notre expérience commune. Laisser de longs moments de recherche aux élèves, leur proposer des problèmes plus riches, c'est devenu une priorité. Je ne suis plus en quête de rentabilité quantitative pédagogique.

4. Conclusion (Lydia Barthod) : « En se montrant à voir, en acceptant la controverse, la différence, dans un cadre sécurisé, on acquiert une palette de possibles, sans jugement, sans modèle à suivre. On s'approprie de nouveaux gestes de métier, que l'on va piocher dans le « pot commun » du collectif. »

On voit dans la présentation proposée UN exemple de problème de métier[4], comment ce problème se met en mots, par un individu, puis deux, puis par le collectif.

Le problème de métier soulevé ici n'a pas de lien avec la notion mathématique étudiée à ce moment. Cela s'est présenté souvent au cours de l'expérience commune. D'autres types de problème de métier sont apparus lors de notre travail (le bruit, les bavardages, la mise en place et le maintien des règles, comment faire avec la volatilité accrue de l'attention des élèves, etc.). Ces problèmes, nous les rencontrons tous dans nos cours et pourtant nous n'avons pas d'espace où en parler. D'autant plus qu'il ne faut pas oublier que le métier d'enseignant est un métier solitaire.

Si ces problèmes ne sont pas d'ordre de la didactique à proprement parler, ils n'en sont pas moins là, et tant qu'ils envahissent nos cours, nous ne sommes pas disposés à appliquer, ou même à entendre, ce qui nous est proposé en formation[5]. En effet, le contenu proposé en formation nous semble inadaptable concrètement dans le quotidien de notre métier et on peut alors se réfugier derrière un discours de rejet du type « c'est bien joli ce qu'ils disent mais avec « Truc » et « Machin » dans la classe, je ne pourrai jamais le faire etc.… » avec tout de même la culpabilité de ne pas être capable de réaliser ce qui a été proposé, d'autant plus si ce qui a été proposé est sorti du contexte classe, ou présenté dans une situation idéale. C'est alors une source de tension et de souffrance pour le professeur.

La mise en place de collectifs entre pairs, donc sans hiérarchie, permet de créer une différenciation entre problème de métier et problème de personne.

En se montrant à voir, en acceptant la controverse, la différence, dans un cadre sécurisé, on acquiert une palette de possibles, sans jugement, sans modèle à suivre. On s'approprie de nouveaux gestes de métier, que l'on va piocher dans le « pot commun » du collectif.

La culpabilité de ne pas réussir à réaliser ce que l'on est censé faire est remplacé par un nouveau pouvoir d'agir dans les situations de travail que nous vivons, par des

[4] D'autres problèmes de métier vécus du côté des enseignants sont analysées dans les articles suivants : Clot Y., Ruelland-Roger D.; *Enseigner les mathématiques au lycée et au collège : un ou deux métiers ?* dans Recherche et Formation, n°57 et Roger J.L., Ruelland D., Clot Y.; *De l'action à la transformation du métier : l'activité enseignante au quotidien* dans Education et Sociétés n°19 pp. 133-145.

[5] Cf au colloque de l'INRP à Lyon, *Le travail enseignant au XXIe* en mars 2011, la présentation de Ruelland-Roger D., Matos S. et Moro Th. *« S'expliquer » entre professionnels pour « s'expliquer » avec les didactiques.*

possibilités nouvelles de changement dans nos pratiques, par un sentiment renforcé de notre légitimité professionnelle, car celle-ci est portée par le collectif.[6]

Pour en revenir au questionnement du colloque

Tout d'abord, il faut insister sur le fait que la confrontation aux images est bouleversante, et doit être utilisée avec précaution, dans un cadre structuré.

Par ailleurs, les images de quelqu'un seul n'apportent pas grand-chose. C'est de la controverse que naît la possibilité de changement.

Pas de bonnes pratiques, ni même de pratiques innovantes dans notre cas, juste des situations du quotidien.

Par rapport à l'analyse des pratiques, si l'on part de sa propre pratique, la particularité ici est que ce que l'on observe au final, c'est le métier. C'est lui qui est au centre de la réflexion.

La clinique de l'activité, nous semble-t-il, trouve plutôt sa place dans la formation continue. Elle crée un va et vient entre des pratiques, qui permettra ensuite le va et vient entre pratique et théorie.[7]

Ce n'est pas un outil de formation mais de transformation, transformation toujours en mouvement, jamais achevée. L'idée d'une pratique idéale, et même d'une bonne pratique est exclue. La richesse est dans le mouvement, pas dans un but idéal à atteindre.

Les questions qui ont suivi la présentation dans l'atelier

Tout d'abord, il a été souligné que c'est un travail courageux, dans le sens où il nous montre nous-mêmes en situation de questionnement par rapport à nos problèmes de métier.

L'aspect le plus déstabilisant pour certains des participants à l'atelier a été l'entrée en matière à partir des images du quotidien d'un cours. Le contenu mathématique, s'il est bien sûr sous-jacent, n'est pas ici le mode d'accès au questionnement.

Des questions sur le dispositif : combien de vidéos ? sur combien de temps ? Notre réponse : on se rend compte que les vidéos les plus utilisées sont celles des auto-confrontations croisées, celles de cours ne sont presque pas utilisées en collectif. Inutile de multiplier les vidéos, nous avons pu exploiter pendant plusieurs années les mêmes vidéos.

Une personne s'est interrogée sur la différence entre ce dispositif et une analyse des pratiques réflexives (sans vidéos). Pourrait-on concevoir ce travail sans vidéo ? Notre

---

[6] Il est intéressant de lire à ce propos ce qu'écrit Clot Y. dans son ouvrage *Le travail à cœur* paru en 2010 dans les pages où il s'arrête sur le travail des enseignants. (pp. 56-63) et le contenu de sa conférence au dernier colloque de l'INRP à Lyon, *Le travail enseignant au XXI^{e}* en mars 2011.

[7] Cf au colloque de l'INRP à Lyon, Le travail enseignant au XXI^{e} en mars 2011, la présentation de Ruelland-Roger D., Matos S. et Moro Th. « S'expliquer » entre professionnels pour « s'expliquer » avec les didactiques.

réponse : ceux d'entre nous qui ont travaillé avec et sans vidéos peuvent témoigner de la richesse des images, sans lesquelles le travail aurait été autre.

Une personne fait le parallèle entre ce travail dans son aspect professionnalisant et le travail effectué dans le monde médical à l'intérieur des groupes Balint. Pourrait-il prendre sa place en formation initiale ? Notre réponse : c'est une question à laquelle il nous est difficile de répondre. Peut-être cela existe-t-il ailleurs ?

La grande question reste celle de la généralisation du dispositif et de sa transmission. Qui pourrait prendre la place du chercheur ? Y a-t-il besoin d'un intervenant ou pourrait-on créer des groupes « autogérés » ? La question reste ouverte.

BIBLIOGRAPHIE

Clot, Y. (2007) De l'analyse des pratiques au développement des métiers. *Éducation & Didactique, vol. 1*, 83-94.

Clot, Y. & Ruelland-Roger, D. (2008) Enseigner les mathématiques au lycée et au collège : un ou deux métiers ? Recherche et Formation, 57, 51-63.

Clot, Y. (2010) *Le travail à cœur. Pour en finir avec les risques psychosociaux*. Paris : La Découverte.

Clot, Y. (2011) Conférence au colloque de l'INRP à Lyon, Le travail enseignant au XXIe.

Roger, J.-L. (2007) *Refaire son métier. Essai de clinique de l'activité*. Toulouse : Ères.

Roger, J-.L., Ruelland, D., Clot, Y. (2007b) De l'action à la transformation du métier : l'activité enseignante au quotidien. *Éducation et Sociétés, 19*, 133-146.

Roger, D. (2007) *La « clinique de l'activité » : une démarche réflexive et développementale de professionnels. Un terrain parmi d'autres : les professeurs de mathématiques en collège.* Actes du colloque de la CORFEM de 2007.

Ruelland-Roger, D., Matos, S. et Moro, T. (2011) *« S'expliquer » entre professionnels pour « s'expliquer » avec les didactiques*. Présentation dans l'atelier 5B au colloque de l'INRP à Lyon, Le travail enseignant au XXIe.

UNE SEANCE DE FORMATION UTILISANT DES VIDEOS D'ELEVES EN DEMARCHE D'INVESTIGATION

Michèle GANDIT, Marion PASTORI
Maths-à-Modeler, Institut Fourier, Université J. Fourier, Grenoble

Résumé – Ce texte ne constitue pas exactement un compte-rendu de l'atelier qui portait le nom qui figure dans le titre, mais présente ce qu'on appelle une *situation de recherche pour la classe*, ainsi que sa mise en œuvre dans une classe de cinquième, au sein de ce qu'on appelle un *atelier Maths-à-modeler*. Nous explicitons les apprentissages visés dans un tel dispositif. Les temps forts d'un tel atelier sont illustrés par la description de séquences présentes dans la vidéo support.

Nous avons proposé aux participants à cet atelier d'analyser différents épisodes de la mise en œuvre d'une *situation de recherche pour la classe*, depuis la présentation initiale du problème aux élèves jusqu'au séminaire au cours duquel ceux-ci exposent leurs résultats. L'analyse devait permettre de relever certains moments forts de la mise en œuvre en classe d'une telle situation de recherche et de dégager les rôles des différents acteurs. Le déroulement de l'atelier a montré toute la difficulté, pour les participants observateurs, à relever les événements essentiels, rassemblés en un temps court, grâce à un montage vidéo. Le passage à l'écrit oblige à une présentation très différente. Ce texte présente ce qui est désigné par *situation de recherche pour la classe*, ainsi que l'exemple utilisé tout au long de l'atelier et pointe certains moments importants, chacun d'eux ayant été illustré par un extrait d'une vidéo.

Une situation de recherche (SR) à des fins didactiques

Une situation de recherche pour la classe est un modèle de situation didactique, construite à partir d'un problème qui relève généralement du domaine des mathématiques discrètes (Grenier & Payan, 1998) et qui s'adresse à des élèves de tous âges, d'école primaire (Gravier & *al*, 2008), de collège, de lycée, d'université ou en formation d'enseignants (Gandit, 2004). Ces situations de recherche permettent aux élèves, sous réserve qu'elles soient gérées de manière adéquate, d'avoir une pratique scientifique qui se rapproche de celle du chercheur en mathématiques, que nous nommons *la démarche expérimentale en classe de mathématiques*. Nous renvoyons à Giroud (2011, p. 11) qui décrit la pratique de la démarche expérimentale en mathématiques comme une succession d'actions, non nécessairement ordonnée, centrées autour d'un problème – un problème est considéré comme un couple formé d'une question et d'instances, nous donnons plus loin un exemple – ces actions étant de trois types : « - proposer de nouveaux problèmes ; - expérimenter-observer-valider ; - tenter de prouver. ». Nous développons quelques-uns des savoir-faire liés à ces types d'actions tels que : se poser un problème, choisir des cas particuliers et les étudier de façon à s'approprier le problème, à voir ce qui est généralisable derrière le particulier, formuler une conjecture, tester cette conjecture sur d'autres cas particuliers, en tenter une preuve ou l'invalider, définir, nommer des objets rencontrés au cours de la recherche… Il s'y ajoute d'autres savoirs mathématiques qui relèvent davantage de la validation : les notions de condition nécessaire, condition suffisante, extremum local ou global, récurrence, raisonnement par décomposition, recomposition, raisonnement par induction…

Nos hypothèses de travail sont que ces savoirs ou savoir-faire ne peuvent s'apprendre qu'en situation de recherche (incluant expérimentation, observation, validation et tentative de preuve) et que leur acquisition facilite la compréhension d'autres savoirs mathématiques plus classiques.

Une *situation de recherche à des fins didactiques* (nous noterons SR dans la suite) permet d'engager les élèves dans une pratique scientifique qui va au-delà de ce qui se passe usuellement dans les classes. Par exemple, l'élève est amené à formuler ses propres questions, alors qu'on lui demande habituellement de répondre à celles qui lui sont posées par le professeur, à définir des objets parce qu'ils lui sont nécessaires au cours de sa recherche, alors qu'usuellement il se contente d'utiliser des définitions qui lui ont été données, à communiquer à une communauté ses propres résultats, alors qu'habituellement il doit seulement rédiger sa solution pour le professeur.

L'engagement d'une classe dans le problème se réalise par la présentation d'une sorte de jeu.

Prenons un exemple (Gandit & *al*, 2011) : dans un bâtiment, on cherche à entreposer le maximum de caisses de dynamite de sorte que, si une caisse explose, elle n'endommage aucune autre caisse (voir figure 1).

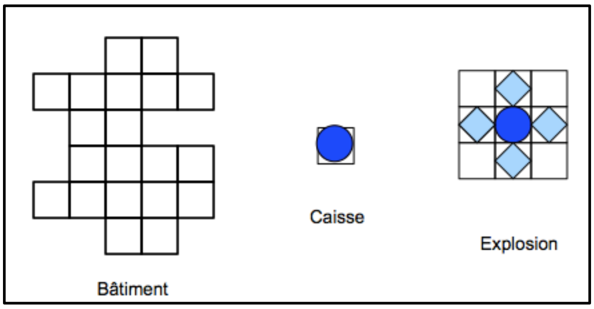


Figure 1 – Le bâtiment est une surface quadrillée, à mailles ou cases carrées identiques, une caisse de dynamite occupe une seule case du quadrillage, le mode d'explosion représenté (on peut aussi dire qu'il s'agit d'une contrainte de sécurité) est celui qui nécessite l'absence de toute caisse de dynamite à droite, à gauche, en haut et en bas de toute caisse posée sur une case.

Ainsi une autre façon de poser le problème pourrait être la suivante : sur une surface quadrillée, on cherche à placer le maximum de pièces (caisses), une pièce occupant une seule case, de sorte qu'aucune d'entre elles ne puisse être éliminée par une autre. Autrement dit, le placement d'une pièce sur une case de la surface quadrillée nécessite que reste libre un ensemble de cases (explosion).

Une première caractéristique d'une SR (Grenier & Payan 1998) est que, bien qu'elle soit liée à un problème de recherche actuellement travaillé1 dans le domaine des

2. Ce problème est une généralisation d'un problème célèbre : le problème des 8 reines. Comment placer 8 reines sur un échiquier (une reine « mange » les pièces sur la ligne et la colonne qui la contiennent) de sorte qu'aucune reine ne puisse en manger une autre ? Ce problème fut posé pour la première fois en

mathématiques discrètes, l'entrée dans le problème ne nécessite, de la part de tout élève-chercheur, que des connaissances élémentaires. Sa spécificité majeure réside cependant dans le fait qu'elle autorise toute personne, qui cherche, à prendre en charge certaines variables de la situation, qu'on appelle des *variables de recherche* (Godot 2005). Dans l'exemple choisi, *la forme du bâtiment* et *le mode d'explosion* sont deux variables de recherche, dont la figure 1 propose des valeurs. La possibilité laissée à l'élève-chercheur de choisir des valeurs de ces variables lui permet ainsi de se fabriquer ses propres questions. Ainsi une SR n'a pas de fin, une question résolue renvoyant à de nouvelles questions : pour la classe, l'arrêt de la recherche résulte d'une décision arbitraire liée à la fin du temps consacré à cette activité (le plus souvent, fixé au départ).

Entrons un peu plus dans la situation. Reprenons le même type de bâtiment et le même mode d'explosion (qu'on peut aussi considérer comme une contrainte de sécurité) qu'à la figure 1. La figure 2 montre d'abord une configuration qui n'est pas une solution puisque la contrainte de sécurité n'est pas respectée pour deux pièces. La configuration centrale de la figure 8 est une solution de cardinal 8 : elle est *localement maximale* en ce sens qu'on ne peut pas ajouter de pièce dans les cases vides, sans enfreindre la contrainte de sécurité. Mais cela ne signifie pas que 8 est le nombre maximum cherché. En effet, pourquoi ne pourrait-on pas arranger différemment les pièces sur le quadrillage de façon à pouvoir placer 9, 10… pièces ?

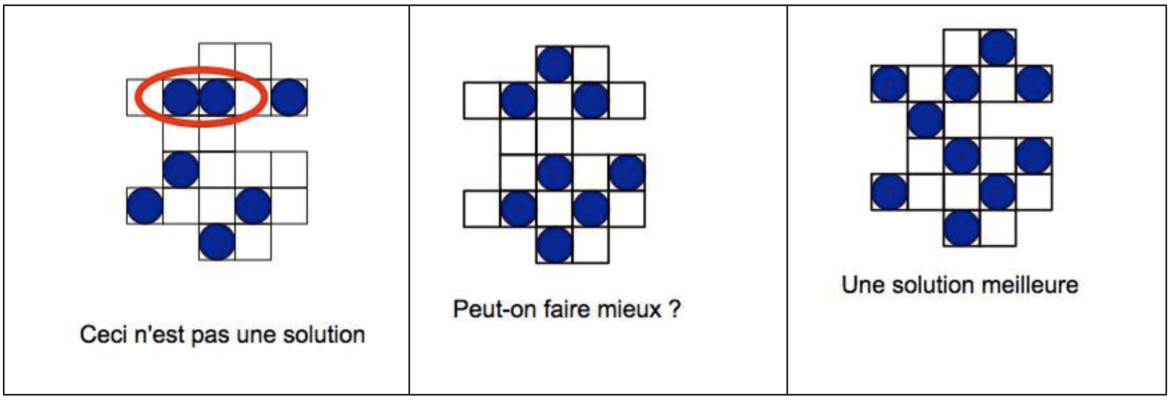


Figure 2 – Avec les valeurs des variables de recherche « bâtiment » et « explosion » fixées comme à la figure 1, un cheminement vers une solution localement maximale de cardinal 10. Peut-on faire mieux que 10 ?

La configuration de droite de la figure 2 montre en effet une solution *meilleure* que celle du centre puisqu'elle comporte 10 pièces, chacune respectant la contrainte de sécurité. Ainsi chaque configuration localement maximale fournit un minorant du maximum cherché. Cette dernière configuration nous permet d'affirmer que le nombre cherché, avec ce choix des valeurs des variables de recherche, est supérieur à 10.

Pour prouver qu'il est impossible de faire mieux que 10, on peut recourir à une majoration du nombre cherché. On peut utiliser pour cela l'argument que, sur deux cases consécutives, on ne peut pas mettre plus d'une pièce (si on en met deux, elles se détruisent nécessairement) et chercher s'il est possible de recouvrir le bâtiment choisi

1848, aujourd'hui, sa généralisation reste ouverte (Belle & Stevenson, 2009) : quel est le nombre maximum de reines qu'on peut placer sur un carré de taille strictement supérieure à 25 ?

par des couples de deux cases consécutives nous conduisant à un majorant égal à 10, comme le montre la figure 3.

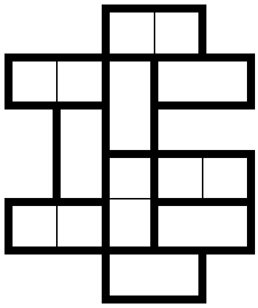


Figure 3 – Un recouvrement de la grille par 10 couples de deux cases consécutives

Le recouvrement de la figure 3 montre qu'on ne peut pas placer plus de 10 pièces sur la surface recouverte. On peut donc dire que le nombre cherché est inférieur à 10. Ainsi le nombre cherché est inférieur et supérieur à 10, il est donc égal à 10.

Ce problème, dans sa généralité, peut ainsi, comme l'illustre l'étude précédente, se décomposer en deux sous-problèmes : d'une part, comment construire une solution maximale, ce qui conduit à un minorant de l'optimum recherché, d'autre part, comment obtenir un majorant de cet optimum. La stratégie utilisée, dans l'étude précédente, pour résoudre ce second sous-problème a été le recouvrement de la surface quadrillée par des couples de deux cases consécutives.

Un atelier *Maths-à-modeler*

Il s'agit d'un ensemble de six ou sept séances avec une classe, autour d'une SR, à raison d'une séance d'une heure environ par semaine, qui a lieu dans l'emploi du temps normal de la classe. A la fin de l'atelier, a lieu un séminaire, à l'université, où les élèves présentent leurs résultats à une assemblée comportant entre autres des chercheurs, des participants à un autre atelier…

Les séances de l'atelier mettent en jeu des acteurs dont on pointe trois types de postures. Tout d'abord la *posture d'apprenti-chercheur* : c'est celle de chaque élève, qui travaille au sein d'un groupe ; il arrive aussi que certaines autres personnes (par exemple, des parents d'élèves) occupent aussi cette posture. Ensuite la *posture de gestionnaire de la SR* : elle est tenue par un ou plusieurs chercheurs, en mathématiques ou en didactique des mathématiques. Cette posture consiste à poser le problème, à apporter du matériel, à en faire vivre différentes instances, à étayer, à institutionnaliser sur le problème… Nous y reviendrons plus loin. Ces deux types d'acteurs pourraient suffire à faire vivre un contrat didactique dont l'objet est l'apprentissage de la démarche expérimentale en mathématiques et la communication de résultats scientifiques. Cependant, l'enseignant de la classe (c'est lui qui, au départ, sollicite le chercheur) est aussi présent, sa *posture est inhabituelle*, par rapport au contrat didactique usuel en vigueur lorsque les élèves cherchent habituellement un problème. L'enseignant de la classe ne connaît pas en général le problème, il aide à l'étayage, gère l'aspect organisationnel de l'atelier. Il pourrait prendre en charge l'institutionnalisation des connaissances relatives à la démarche ou aux notions en jeu.

Donnons un exemple dans chaque cas : d’une part, mettre en avant que le choix de travailler sur des cas où les nombres de cases de la grille étudiée sont « petits » (voir figure 4) et l’étude de ceux-ci permettent l’émergence d’une conjecture, qui est ensuite prouvée ; d’autre part, faire ressortir les deux types de maximum rencontrés, maximum local et maximum global.

Figure 4 - Dans ce groupe, les élèves se sont restreints à une grille 3 × 3, la contrainte de sécurité étant la même qu’à la figure 1 ; la solution proposée ne comporte que 3 pièces.

Cependant l’expérience montre qu’en général l’enseignant ne joue pas ce rôle. Inhabituel aussi est le critère de réussite pour l’élève : il ne s’agit pas pour lui de résoudre le problème, mais d’avancer dans la recherche, en établissant des résultats. Il est d’ailleurs essentiel d’aider les élèves à les repérer. Ceux-ci disposent d’un cahier de recherche qu’ils doivent compléter au cours des séances.

Les apprentissages visés pour les élèves et les savoirs en jeu

Ils sont de deux types. Comme nous l’avons dit plus haut, c’est l’apprentissage de la *démarche expérimentale en mathématiques* qui est visé avant tout. Nous illustrons d’abord ce point ci-dessous en reprenant les trois phases citées par Giroud (2011, p. 7 à 19), que nous illustrons par des exemples liés au problème des *caisses de dynamite*. Mais d’autres apprentissages sont en jeu, c’est ce que nous développons dans le second paragraphe.

L’apprentissage de la démarche expérimentale en mathématiques

Les phases décrites ci-dessous ne se rencontrent pas nécessairement dans cet ordre lors de la pratique d’une démarche expérimentale en mathématiques. Elles renvoient l’une à l’autre.

La phase de *proposition de nouveaux problèmes* se décompose en « – changer les instances du problème ; – changer la question du problème ; – changer les instances et la question. » (*Ibid.*, p.9). Le changement des instances a déjà été évoqué. Il s’agit, par exemple, de considérer d’autres contraintes de sécurité, comme les suivantes : « en carré » (les huit cases ayant un côté ou un sommet commun à celle où figure la caisse de dynamite doivent rester libres), en « ligne-colonne » (toutes les cases de la ligne et de la colonne qui ont pour intersection la case qui contient la pièce, ne doivent comporter aucune pièce). On peut aussi choisir d’autres formes de bâtiment, carrée, par exemple, de côté fixé ou non.

Si, avec les choix visibles à la figure 2, on trouve une solution localement maximale à 8 pièces, on peut se demander s'il existe d'autres configurations localement maximales à 8 pièces. On *change* ainsi *la question du problème*. On peut aussi chercher s'il existe des solutions de cardinal 9.

Enfin *changer les instances et la question* peut s'illustrer par le choix d'une autre forme de bâtiment, par exemple, carrée, et d'une autre contrainte de sécurité, par exemple, en ligne-colonne. On peut se demander si la stratégie de recouvrement (utilisée avec des dominos dans le cas de la figure 3) permet toujours de trouver un majorant du maximum recherché.

Passons à la deuxième phase (encore une fois, l'ordre n'est pas chronologique) d'*expérimentation-observation-validation* ; elle passe par l'utilisation ou la construction d'une stratégie, qui permette de répondre à la question posée. Giroud (*Ibid.*, p. 11) considère qu'une stratégie est « un ensemble de manipulations ordonnées sur des objets du problème ou sur leurs représentations ».

Reprenons, par exemple, les instances du problème déjà vues à la figure 1. On peut décrire, en utilisant des numéros (figure 5), l'ordre dans lequel sont placées les pièces. Il s'agit d'une *stratégie* de placement des pièces. Ce faisant, on *observe* que ce placement est conforme au problème (il n'y a qu'une seule pièce par case) et à la contrainte de sécurité (aucune pièce au dessus, en dessous, à droite et à gauche de chaque pièce posée), ce qui permet de *valider* la configuration.

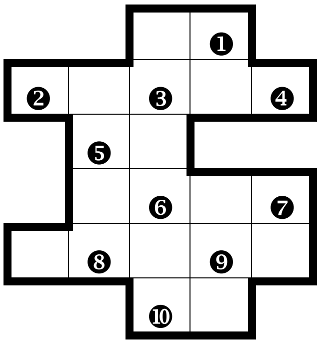


Figure 5 – Une stratégie pour placer les pièces, les numéros indiquant l'ordre dans lequel les pièces ont été placées

On pourrait ensuite se demander si cette stratégie (une case sur deux, avec un décalage d'une ligne à la suivante, qu'on peut voir aussi comme remplissage d'une diagonale sur deux, si on enferme la surface quadrillée dans un rectangle 5 × 6) peut s'utiliser de manière générale, sur d'autres types d'entrepôts. Ceci constitue alors un autre problème et renvoie à la première phase. Mais on peut aussi se demander si la solution obtenue est optimale.

L'expérimentation précédente peut aussi déboucher sur une troisième phase de *conjecture-preuve*. Par exemple, dans le cas de la figure 5, diverses autres expérimentations amènent à la conjecture qu'il est impossible de placer un onzième jeton sur cette surface. Il s'agit alors de prouver cette impossibilité (voir la preuve donnée au premier paragraphe).

D’autres savoirs mathématiques sont en jeu

On peut citer, par exemple, dans le cas des *caisses de dynamite*, les notions d’extremum local ou global. La figure 2 présente deux solutions localement maximales, l’une de cardinal 8, l’autre de cardinal 10. Il est impossible d’ajouter une pièce supplémentaire à chacune de ces configurations, tout en respectant la contrainte de sécurité. Ceci peut se prouver par essai sur chacune des cases libres. Mais on ne peut en déduire la valeur du maximum cherché. On sait seulement qu’il est supérieur au cardinal de ces solutions, donc qu’il est supérieur à 10. Un autre raisonnement est indispensable pour prouver que la solution à 10 pièces est effectivement globalement maximale. La compréhension du problème s’accompagne de celle de ces concepts. Cependant l’acquisition de ces derniers ne doit pas nécessairement être préalable à l’entrée dans le problème.

A ces savoirs notionnels s’ajoutent des savoir-faire liés à la mise en œuvre de raisonnements, souvent peu travaillés dans les classes. Par exemple, dans le cas du problème *des caisses de dynamite*, si l’on trouve une solution à n pièces (n entier naturel), on en déduit que le maximum cherché est supérieur à n. Par ailleurs, si l’on détermine un *motif* (une partie élémentaire), contenu dans la surface quadrillée étudiée – l’entrepôt – sur lequel il est impossible de mettre plus de p pièces (p entier naturel) et qu’on peut paver tout l’entrepôt avec k motifs (k entier naturel), alors le maximum cherché est inférieur à $k \times p$. On peut évidemment prendre pour *motif* une seule case, sur laquelle on ne peut pas placer plus d’une pièce, ce qui conduit à dire que le maximum cherché est inférieur au nombre de cases du quadrillage étudié. Mais ceci est trivial. L’idée est donc de déterminer un *motif* « plus gros », qui permette d’aboutir à une majoration du maximum plus pertinente. Le *motif* utilisé dans la preuve qui fait suite à la figure 2 est le *domino* : sur celui-ci, il est impossible de placer plus d’une pièce ; comme la figure 3 montre l’existence d’un pavage du quadrillage par 10 dominos, on en déduit que toute solution globalement maximale est de cardinal inférieur à 10.

Des moments-clés d’un atelier

La vidéo réalisée montre des extraits d’un *atelier Maths-à-modeler*, qui a eu lieu dans une classe de cinquième. Un premier extrait, sur lequel nous ne revenons pas dans ce texte, montre la présentation du problème aux élèves de cinquième. Les chercheurs sont des moniteurs (doctorants) de l’université Joseph Fourier. La forme sous laquelle le problème avait été posé aux élèves mettait en jeu des grenouilles somnambules (à la place des caisses de dynamite) et une mare couverte de nénuphars (à la place de l’entrepôt).

Voici le problème tel qu’il a été posé aux élèves. Entre parenthèses figurent des commentaires qui permettent au lecteur de faire le lien avec la forme du problème telle qu’elle a été présentée ci-dessus.

Des grenouilles (les pièces qu’on déplace ou les caisses de dynamite) vivent dans une mare (la surface quadrillée ou l’entrepôt) qui contient des nénuphars (les cases du quadrillage). La nuit, les grenouilles, chacune posée sur un nénuphar, sont somnambules et elles peuvent sauter sur les nénuphars voisins, suivant certaines modalités (les cases qui ne doivent pas être remplies ou la contrainte de sécurité) : par exemple, elles peuvent sauter sur les nénuphars de droite, de gauche, en bas ou en haut. La question est alors de savoir combien au maximum la mare peut contenir de grenouilles de façon à ce que les grenouilles ne se gênent pas mutuellement lorsqu’elles font une crise de somnambulisme.

Cet habillage du problème ayant entraîné des difficultés de compréhension de la règle du jeu (certains élèves se sont demandé ce que faisait une grenouille après avoir sauté sur un autre nénuphar…), nous ne le reprenons pas dans le texte ci-après et nous en restons au problème des *caisses de dynamite*.

Dans la suite, nous nous centrerons sur quatre temps forts de cet atelier, à savoir *les relances*, *l'institutionnalisation*, *la préparation du séminaire* et *le séminaire*.

Les relances

Chaque groupe travaille sur une question qu'il a choisie. Le chercheur questionne sur l'avancement dans sa résolution. Les solutions qui ne respectent pas la contrainte sont rapidement invalidées. Les relances du chercheur concernent davantage le caractère maximal de la solution proposée. Nous donnons ci-après deux exemples.

Cette intervention du chercheur est relative au quadrillage 8 × 8 et à la contrainte de sécurité « en carré » (voir figure 6).

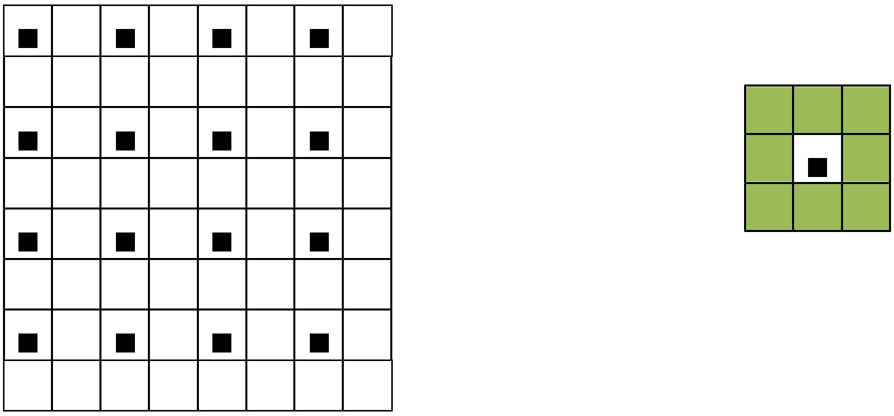


Figure 6 – Les élèves ont choisi de travailler sur un quadrillage 8 × 8, avec une contrainte de sécurité « en carré » (figure de droite) ; ils ont trouvé une solution de cardinal 16 (figure de gauche).

La question posée par le chercheur est alors : « Peut-on mettre une dix-septième pièce ? ». Les élèves répondent « non » parce qu'il est impossible de placer une dix-septième pièce sur les cases libres de la solution qu'ils ont trouvée (figure 20), tout en respectant la contrainte de sécurité. Il s'agit de leur faire comprendre que ceci ne permet pas de conclure que le maximum est 16. Un réarrangement des 16 pièces pourrait peut-être faire apparaître la possibilité de placer une dix-septième pièce. On peut seulement dire que le nombre maximum cherché est supérieur à 16.

Dans un autre groupe où les élèves traitent le problème sur une grille 7 × 7, avec la même contrainte de sécurité que ci-dessus, la question du chercheur est la suivante : « Tout à l'heure vous disiez qu'on en mettait 9, maintenant vous en avez 16 (voir figure 7), est-ce qu'on peut en mettre 17 ? ». Les élèves n'osent pas répondre. Le chercheur questionne à nouveau : « Vous savez ou vous ne savez pas ? ». Un élève répondant que c'est impossible, la nouvelle question est la suivante : « Tu penses que c'est pas possible ou c'est pas possible ? ». Quelques minutes plus tard, un élève du groupe est fortement encouragé à chercher à placer une dix-septième pièce.

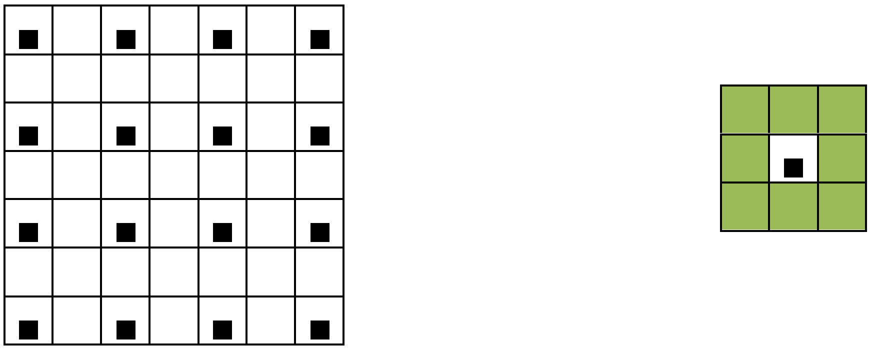


Figure 7 – Les élèves ont choisi de travailler sur un quadrillage 7 × 7, avec une contrainte de sécurité « en carré » (figure de droite) ; ils ont trouvé une solution de cardinal 16 (figure de gauche).

Le chercheur relève certains arguments donnés par les élèves et les encourage dans la preuve qu'ils ont, par exemple, prouvé que le nombre donné était le maximum. Ainsi, dans un groupe qui travaille sur le quadrillage 7 × 7 avec une contrainte de sécurité « ligne-colonne » (voir figure 7), le chercheur incite à noter l'argument trouvé par les élèves : « Comme il ne peut pas y avoir 2 pièces sur une même ligne, sinon elles se détruisent, il ne peut pas y avoir plus d'une pièce par ligne, donc pas plus de 7 pièces sur un 7 × 7. ».

Nous pointons ainsi la forme des relances de la part du chercheur qui gère la situation de recherche : il questionne les élèves (« Etes-vous sûrs que…? Pourquoi…? », il lève les malentendus en reprécisant la règle du jeu, le vocabulaire (ce qu'on appelle une diagonale), il ne donne pas de réponse, il relève les résultats, il pointe les arguments de preuve intéressants, il incite à prendre des notes pour pouvoir argumenter devant un public.

L'institutionnalisation

Chaque séance se clôt par un bilan faisant état de l'avancée de la recherche dans chaque groupe. Cette phase amène les élèves à formuler eux-mêmes les résultats de leurs recherches, à préciser le statut de leurs énoncés (conjecture ou théorème), à comprendre ce qu'on appelle un *résultat* en mathématiques. Elle montre aux élèves l'importance de la preuve et surtout que celle-ci ne consiste pas en un exercice formel de rédaction.

La vidéo montre, par exemple, un élève qui formule, au nom de son groupe, un énoncé relatif à un quadrillage 7 × 7 et la contrainte de sécurité « ligne ». Il affirme qu'il s'agit d'une propriété : « Comme sur le plateau, il y a sept lignes, donc une grenouille par ligne, donc il y a sept grenouilles. ». Le chercheur écrit au tableau que, dans ce cas, « le maximum sur un plateau 7 × 7 est égal à 7 grenouilles. », puis la preuve donnée par l'élève. Il lui demande ensuite si l'argument donné est suffisant pour établir que le maximum est égal à 7, à savoir qu'il y a une grenouille par ligne. L'élève acquiesce. Ceci montre que le raisonnement n'est pas complètement compris, par l'élève ou par le groupe. L'argument donné prouve en effet qu'on ne peut pas placer plus de 7 pièces ou encore que le maximum cherché est inférieur à 7. Le chercheur rajoute : « Et comment tu fais ? Un exemple de solution, c'est quoi ? ». C'est en effet l'exhibition d'une configuration à 7 pièces (par exemple, sur une diagonale), respectant la contrainte de sécurité « ligne », qui prouve que le maximum cherché est supérieur à 7. Nous faisons l'hypothèse que les élèves n'ont pas saisi la nécessité d'une preuve en deux temps et que cette première partie du raisonnement, à savoir l'exhibition d'une configuration localement maximale de cardinal 7 – qui est pourtant celle que les élèves ont découverte en premier – a été écrasée par la deuxième partie formulée ci-dessus. Cette hypothèse est d'ailleurs confirmée par le fait que les élèves, qui ont étudié le quadrillage 8×8 et la contrainte de sécurité « ligne-colonne », omettent la même partie du raisonnement.

Le film montre aussi, par exemple, l'écriture au tableau d'une conjecture établie par un groupe, concernant un quadrillage $L \times L$ et une contrainte de sécurité « diagonale », à savoir que le maximum est égal à $L + L - 2$.

La rédaction par chaque groupe du compte-rendu de sa recherche, parfois corrigé après formulation devant toute la classe, renforce cette institutionnalisation sur le plan de l'écrit et aide à la préparation du séminaire qui clôt l'atelier.

La préparation du séminaire

Cette préparation du séminaire fait l'objet d'une séance, en général, la dernière de l'atelier avant le séminaire lui-même. Il est expliqué aux élèves qu'ils vont avoir à présenter le problème et leurs résultats à l'université, devant un public de chercheurs et d'autres élèves, qui auront eux-mêmes cherché un autre problème. Ce type de séance est peu présent habituellement dans les classes.

La vidéo montre une intervention de la professeure de la classe qui insiste sur le fait qu'il faut s'organiser pour savoir « qui fait quoi ». Une élève pose au chercheur la question suivante : « Au niveau de toutes les solutions, vous savez ce que c'est ? ». Il reformule ainsi : « Tu veux dire si je sais si elles sont justes vos solutions ? ». L'élève acquiesçant, le chercheur répond : « C'est vous qui savez si vous avez démontré… Il faut que vous sachiez à quel moment, c'est une propriété démontrée, à quel moment c'est une conjecture… ». La responsabilité scientifique est ainsi renvoyée aux élèves.

Le chercheur et, éventuellement le professeur de la classe, aident à l'organisation de la présentation, sachant que le public ne connaît pas le problème. Il faut donc d'abord le présenter, puis construire l'exposé des résultats, distinguant bien ce qui relève de la conjecture ou du résultat.

Le séminaire

Il comporte en général la présentation de deux ateliers, qui ont eu lieu à des endroits différents. L'extrait choisi de la vidéo renvoie à un seul atelier qui montre un exposé construit à partir de transparents (figure 8) et qui comporte une présentation de la classe et des chercheurs, du problème et des différentes instances qui ont étudiées, ainsi que des résultats obtenus par les élèves, accompagnés des preuves. Chaque élève de la classe participe à cette présentation. L'exposé est suivi de questions, posées soit par des chercheurs, soit par d'autres élèves.

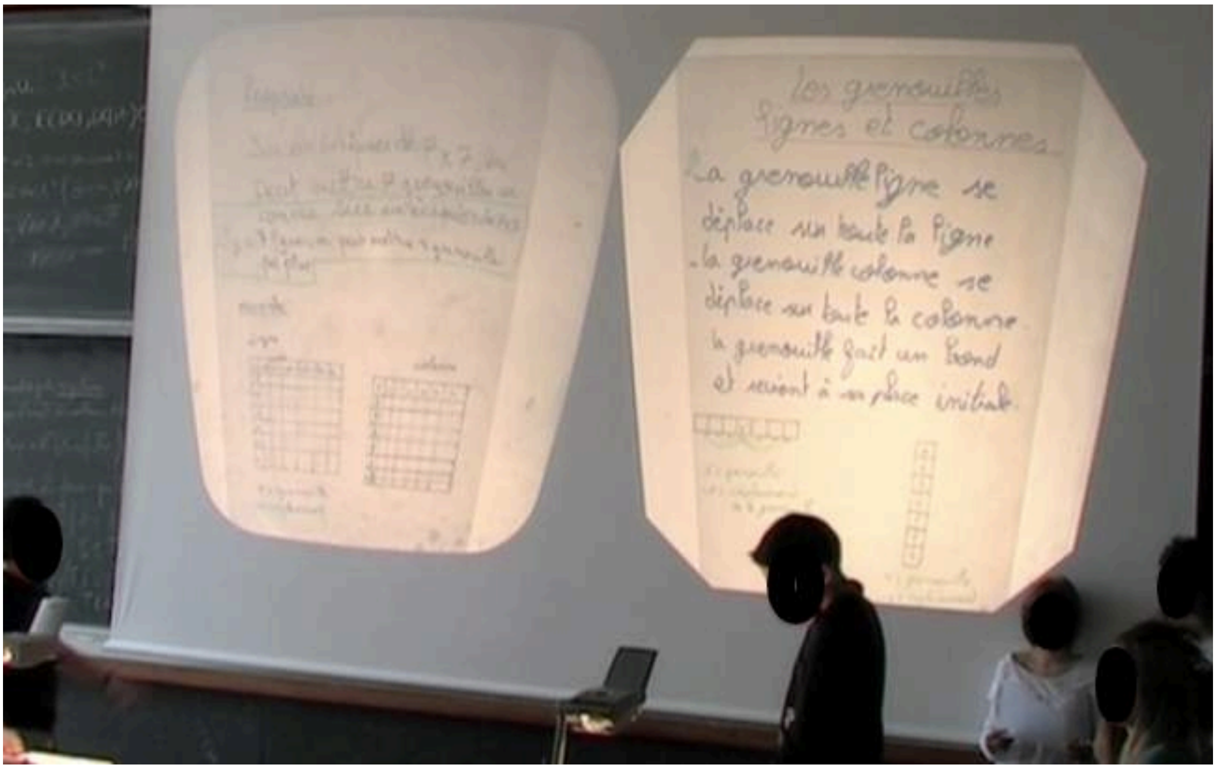


Figure 8 – Lors du séminaire, chaque élève de la classe participe à la présentation des questions étudiées et des résultats obtenus à un public constitué de chercheurs en mathématiques, d'enseignants, d'élèves d'un autre établissement, de parents d'élèves…

Nous n'évoquons ci-dessous qu'un seul épisode montré dans l'extrait de vidéo. La question étudiée porte sur un quadrillage 7 × 7 et une contrainte de sécurité « ligne et colonne ». Un élève a présenté le raisonnement suivant :

> Sur un échiquier 7 × 7, on a réussi à mettre 7 grenouilles, donc on sait qu'on peut en mettre au moins 7, et là, on a séparé le terrain en 7 parties (voir figure 15), et sur une partie, on peut mettre que une grenouille, donc, au final, on peut mettre que 7 grenouilles.

A la fin de l'exposé, un chercheur du public demande à un élève de revenir sur un transparent comportant la figure 9.

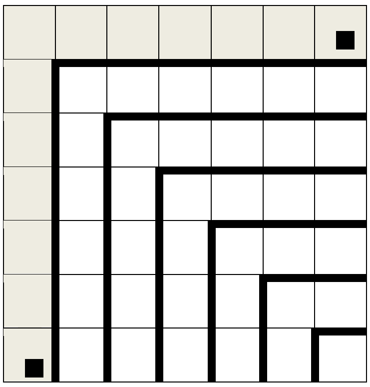


Figure 9 – La figure proposée sur transparent par un élève

Le chercheur fait remarquer à un élève (qui fait partie du groupe qui a travaillé sur le quadrillage 7 × 7 et la contrainte de sécurité « ligne et colonne ») que, si on place une pièce sur la case en haut à droite (voir figure 9) et sur la case en bas à gauche (voir figure 14), celles-ci ne se détruisent pas et que, par conséquent, sur la partie grisée de la figure 14, on peut mettre plus d'une grenouille. L'élève répète cependant qu'on ne peut mettre qu'une grenouille sur la zone grisée. Plusieurs élèves, persuadés qu'on ne peut mettre que 7 grenouilles, répètent l'argument, malgré l'invalidation proposée par le chercheur. L'un d'eux, ne se laissant pas perturber, tente de donner un dernier argument malgré l'insistance de l'organisateur du séminaire à laisser la place à l'autre groupe. Il dit :

> Il y a 7 lignes et 7 colonnes et, la grenouille, elle peut prendre qu'une ligne et qu'une colonne, donc on peut mettre que 7 grenouilles.

Le chercheur lui dit alors qu'il s'approche d'un argument plus pertinent. Il suffirait en effet de dire que chaque ligne ne peut contenir plus d'une pièce et que, le quadrillage étant recouvert par 7 lignes, il ne peut contenir plus de 7 pièces (on pouvait faire le même raisonnement avec les colonnes à la place des lignes).

Mais ce qui est à souligner, c'est que les élèves sont convaincus du résultat – 7 – et qu'ils ne se laissent pas intimider par le public, même si certains de ses membres sont des chercheurs en mathématiques. Cette attitude d'élève, qui consiste à défendre sa preuve, est assez rare dans les classes.

Conclusion

Le dispositif que nous venons de décrire a toute sa place dans le temps scolaire. Il permet en effet l'apprentissage par les élèves de la démarche expérimentale et de la communication en mathématiques, en plus de celui de concepts mathématiques majeurs tels que les notions d'extremum. La *preuve* y tient une place centrale. Certains de ces apprentissages, pourtant présents dans les programmes de l'enseignement secondaire, ne sont pas favorisés par le dispositif classe habituel. L'utilisation d'une vidéo non naturaliste, c'est-à-dire ne respectant pas le temps réel, outre qu'elle nécessite une préparation en amont, présente l'inconvénient de raccourcir trop le temps de la recherche des élèves, cachant l'essentiel du cheminement des élèves, mais aussi l'avantage de permettre, en un temps court, la découverte de certains temps forts d'un atelier *Maths-à-modeler*. Sous réserve d'une mise en situation préalable des étudiants ou des professeurs, il nous semble pertinent d'utiliser un tel montage vidéo en formation des futurs enseignants ou en formation continue des enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

Gandit, M. (2004) Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : deuxième partie. *Petit x, 66* (49-82).

Gandit, M., Giroud, N. & Godot, K. (2011) Les situations de recherche en classe : un modèle pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. In M. Grangeat (Ed.) *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique : pratiques de classe, travail collectif enseignant et acquisitions des élèves* (pp 48-61). Lyon : Ecole Normale Supérieure.

Giroud, N. (2011) *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

Godot, K. (2005) *Situation recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation, Exemple de la roue aux couleurs.* Thèse de doctorat, Université J. Fourier Grenoble I.

Gravier, S., Payan, C. & Colliard, M.-N. (2008) Maths à Modeler Pavages par des dominos. *Grand N, 82* (53-68).

Grenier, D. & Payan, C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(1) (59-100).

VIDEO ET HISTOIRE DES MATHEMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT : LA RECHERCHE AU CŒUR DE LA FORMATION

Thomas DE VITTORI
Université d'Artois, Laboratoire de Mathématiques de Lens

Résumé – À la lumière de récents travaux sur l'usage de l'histoire des mathématiques en classe, cet article propose, dans une première partie, une critique des enjeux théoriques de telles études. Après la mise en évidence de plusieurs difficultés intrinsèques à une bonne définition des différents domaines en jeu (une discipline, sa didactique et son histoire), de nouveaux éléments sont proposés à la réflexion. Ils visent à fournir les premiers éléments d'un cadre de recherche possible pour les études empiriques sur l'histoire des sciences dans les apprentissages.
La deuxième partie du texte est consacrée à la présentation du rôle de la vidéo pour la formation et dans le cadre d'un recueil de données pour l'analyse didactique. Au cours d'expérimentations menées depuis plusieurs années, l'usage de l'enregistrement audio/vidéo a été testé dans de multiples contextes : visionnage de séances « modèles », enregistrement de prestation d'étudiants, enregistrement de formations universitaires, etc. Ces exemples fournissent de nombreuses pistes de réflexion quant à la pertinence de ce type d'outil pour la formation des enseignants.

1. Introduction - Repenser les liens entre didactique et histoire des mathématiques

De nos jours, l'intérêt a priori de l'histoire dans l'enseignement des sciences n'est plus un sujet de débat et on ne compte plus les articles et les auteurs qui ont fait la juste promotion de l'approche historique (Barbin 1991, 1997a, Dorier 2000, Guedj 2005, Martinand 1993, Rosmorduc 1995). Tous ont mis en évidence la richesse des bonnes raisons qui s'étendent de la simple culture humaniste à la compréhension fine de certains résultats scientifiques. Dans un grand nombre de pays, ces réflexions ont finalement débouché sur une reconnaissance institutionnelle qui a permis l'intégration de l'histoire des sciences dans les programmes scolaires ainsi que dans les contenus de la formation des enseignants. Même si certains changements institutionnels ont pris du temps ou sont encore en cours, tout ceci est bien connu et remonte maintenant à plusieurs décennies. Ce qui est beaucoup plus récent par contre, c'est la demande croissante d'études empiriques sur ce qui se fait en classe ou en formation. Dans un article récent (U.T. Jankvist, 2009), l'auteur rend compte des dernières conclusions de spécialistes de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement (Arcavi – Tzanakis 2000, Siu – Tzanakis 2004). Celles-ci peuvent être résumées par l'idée que la littérature fourmille d'exemples pertinents d'approches historiques, mais que ce qui les rend pertinents dépasse rarement les considérations subjectives de l'auteur lui-même. Ainsi, c'est une partie de la communauté qui appelle de ses vœux des travaux plus poussés dans ce domaine.

Un cadre proposé (U.T. Jankvist, 2009) pour une étude sur le terrain consiste à partir d'une distinction assez communément admise entre le pourquoi de l'utilisation de l'histoire des mathématiques et le comment. Le pourquoi peut être vu comme une déclinaison opérationnelle des bonnes raisons généralement admises évoquées précédemment. Par exemple, l'histoire des sciences permet de mieux comprendre la science et ses méthodes, donc l'utilisation de l'histoire en classe permet aux élèves de développer ce même regard. La question du comment quant à elle renvoie le plus souvent aux liens entre l'enseignement d'une discipline et son histoire. L'exemple type est celui de la construction de séances inspirées par l'histoire de l'évolution des concepts. Tant pour le pourquoi que pour le comment, il est important de noter que ces questionnements n'interviennent que lors de la détermination des objectifs et des supports, c'est-à-dire qu'ils renvoient toujours à la phase d'élaboration des contenus par le professeur. Ainsi, ce découpage en pourquoi et comment ne fournit que peu d'outils pour une analyse des apprentissages des élèves, néanmoins, cette distinction rend explicite la coexistence au sein d'une même activité de deux champs de connaissances distincts : la discipline et son histoire.

Objectivement, on ne peut qu'abonder dans le sens d'une augmentation quantitative des approches empiriques, mais la question qui devient alors cruciale est celle des objectifs de telles études. Analyser des séances en classe, certes, mais pour montrer quoi ? Pour l'étude didactique de séances de mathématiques à contenu historique, une première idée est de se référer aux cadres théoriques déjà développés dans la didactique de la discipline elle-même. Ainsi, des séances en classe peuvent faire l'objet d'une étude didactique afin, par exemple, d'identifier les différents moments clés de l'activité des élèves ou encore d'évaluer les résultats en terme d'apprentissage. Une telle approche est évidemment parfaitement cohérente car elle se donne des objets de recherche conformes aux outils utilisés. Il ne fait aucun doute que ceci peut produire des résultats qui viendront grossir les preuves de la pertinence d'une didactique des mathématiques. Par contre, l'extrapolation des résultats à une connaissance sur la place de l'histoire dans la séance est plus problématique. Traditionnellement, la didactique des mathématiques cherche à rendre compte des apprentissages en mathématiques. Montrer, par exemple, avec ses outils qu'une séance a bien permis aux élèves d'acquérir une notion n'informe pas, ou très indirectement, sur le pourquoi et/ou comment de l'histoire dans une séance. S'il ne s'agit pas ici d'exclure a priori l'intérêt d'une application des concepts issus d'une didactique des mathématiques au cas particulier des séances comprenant une dimension historico-culturelle, des aménagements des cadres théoriques me semblent toutefois nécessaires.

Hypothèse du double champ

En classe, l'histoire des mathématiques ne fait pas l'objet d'un enseignement autonome, pourtant, les élèves doivent être sensibilisés aux questions épistémologiques et historiques qui constituent dès lors de véritables objectifs d'apprentissage. Dans leur pratique, les enseignants doivent donc transmettre des connaissances sans se trouver dans la situation habituelle pour le faire ce qui constitue une difficulté indéniablement spécifique. Cette présence conjointe de deux domaines de connaissances met en défaut une analyse didactique trop disciplinaire. Élaborés pour d'autres visées, les concepts proposés par les didacticiens ne sont, par essence, pas à même d'interroger les liens entre science et histoire dans la classe car les études didactiques permettent avant tout de mettre au jour des éléments clés dans les situations d'apprentissage relativement à la discipline seulement. Une analyse didactique qui se voudrait pertinente ne peut rejeter la complexité liée à la présence conjointe de ces deux domaines. Cet élément théorique est important et je l'appellerai par la suite hypothèse du double champ ; le mot hypothèse étant à prendre ici dans son sens mathématique, à savoir, une donnée initiale du problème.

Dépasser les définitions traditionnelles

Comme le rappelle les didacticiens, les didactiques « s'intéressent principalement aux apprentissages de contenus spécifiés disciplinairement » (Reuter 2007, p.17). Prise dans son sens stricte, cette définition a au moins deux conséquences. Une première est qu'il n'est a priori pas pertinent d'essayer de parler d'une didactique de l'histoire des mathématiques à l'école (par exemple). En effet, l'histoire des mathématiques n'étant pas une discipline scolaire, elle ne saurait avoir une didactique dédiée à ce niveau. Une deuxième conséquence de la définition traditionnelle des didactiques concerne l'idée d'une approche pluridisciplinaire de l'hypothèse du double champ. Dans les séances à supports historiques, l'utilisation de deux domaines de connaissances pourrait inciter à l'utilisation de travaux des didactiques de l'interdisciplinarité scolaire. Cette dernière est définie (Lenoir & Sauvé, 1998) comme « la mise en relation de deux ou plusieurs disciplines scolaires qui s'exerce à la fois aux niveaux curriculaire, didactique et pédagogique et qui conduit à l'établissement de liens de complémentarité ou de coopération, d'interpénétrations ou d'actions réciproques entre elles sous divers aspects (finalités, objets d'étude, concepts et notions, démarches d'apprentissages, habiletés techniques, etc…), en vue de favoriser l'intégration des processus d'apprentissage et des savoirs chez les élèves. » Cette définition rend indéniablement compte de la richesse des relations qui peuvent exister entre deux disciplines. Nombreux sont ceux parmi les utilisateurs de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement qui se retrouveraient dans les idées d'inter-fécondité proposées ci-dessus. Toutefois, dans sa définition traditionnelle, une didactique de l'interdisciplinarité est avant tout une didactique au sens général et elle s'intéresse donc exclusivement à des disciplines scolaires. L'histoire des mathématiques n'est pas une discipline scolaire, donc une fois encore, l'utilisation d'un tel cadre théorique ne semble, à première vue, pas pertinent. On notera qu'au niveau universitaire, l'histoire des sciences est une discipline à part entière. À ce titre, et comme l'ont déjà souligné certains auteurs (Guedj & al. 2007, Reforehst 2006), il est possible de parler d'une didactique de l'histoire de sciences. Les récents changements institutionnels ont contribué au développement de cours d'épistémologie et d'histoire des disciplines scientifiques, en particulier dans les parcours universitaires des futurs professeurs. Cette discipline existait déjà dans les cursus visant à former des chercheurs, mais sa présence massive dans des parcours de pré-professionnalisation est assez nouvelle, ce qui pose d'autres questions que je laisse en attente pour revenir à des situations de classes plus habituelles.

Les mathématiques, en plus d'être un champ de recherche très actif, ont la particularité de faire l'objet d'un enseignement à tous les niveaux de la scolarité. S'il ne s'agit pas, comme l'a souligné Y. Chevallard, de proposer directement les résultats des recherches à des élèves, il n'en demeure pas moins que des contenus mathématiques sont transmis. La question du choix et de la forme de ces connaissances m'importe peu ici, par contre je noterai qu'elles sont variées, plus ou moins complexes, et cette multiplicité engendre des situations d'enseignement tout aussi différentes les unes des autres. L'analyse des éléments clés de ces apprentissages relève d'une didactique qui proposera alors des concepts ou des modèles permettant d'en rendre compte. L'histoire des mathématiques, en tant que discipline universitaire, est dans une situation assez semblable. Comme champ de recherches, elle produit des résultats qui font l'objet d'un enseignement. Généralement fruit d'une adaptation au public visé, les contenus de cet enseignement sont très divers tant par les périodes que par les notions abordées. De même, les objectifs du cours sont souvent multiples, ils vont de l'acquisition de connaissances à la réflexion épistémologique personnelle. Comme pour les mathématiques, la didactique de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement doit avoir pour objectif l'analyse des éléments pertinents de cet apprentissage. Au niveau des collèges et des lycées, sous son seul aspect savant, l'histoire des mathématiques n'est pas adaptée aux contenus transmis aux élèves. Les notions, les sources, … subissent des adaptations qui ouvrent la possibilité aux enseignants de se les approprier en tant qu'outils pour l'élaboration des séances. La situation de classe se trouve ainsi à l'interface d'applications de la discipline, d'applications de l'histoire de la discipline, et nombreux autres éléments que l'enseignant jugera bon d'intégrer à sa séance. Une recherche didactique spécifique à ce type de situations doit fournir des outils permettant au professeur, acteur du secteur professionnel, de mêler les mathématiques et leur histoire sans perdre de vue ses objectifs (ceux des programmes officiels par exemple).

La réflexion proposée jusqu'ici ne remet pas en cause l'existence des disciplines universitaires, ni leur pertinence dans la formation des enseignants, pas plus qu'elle ne bride la créativité des professeurs. L'hypothèse du double champ fait simplement apparaître l'intérêt d'une étude conjointe de l'enseignement de l'histoire des mathématiques (à l'université, en formation) et de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement (en classe).

La dualité outil / objectif d'apprentissage : pour une didactique de l'histoire des mathématiques en classe

Afin de montrer comment les éléments de réflexion présentés précédemment permettent de proposer des éléments d'un cadre pour une recherche empirique, je me propose de revenir sur une deuxième distinction assez répandue à propos de l'usage de l'histoire des sciences en classe. Dans les premiers paragraphes, j'ai évoqué la séparation classique entre le pourquoi et le comment de l'histoire des sciences. Cette distinction est généralement complétée par la dichotomie entre une utilisation de l'histoire des sciences en tant qu'outil d'un usage comme objectif d'apprentissage (voir par exemple Barbin & al. (ed) 2008). La communauté internationale des historiens des mathématiques impliqués dans les formations s'est récemment ré-emparé de ce couple *history of science as a tool / history of science as a goal* comme entrée pour des études empiriques (Jankvist, 2010). La considération de deux utilisations différentes de l'histoire des sciences est certes judicieuse mais elle doit être maniée avec précaution sous peine de tomber dans des études mono-disciplinaires qui, on l'a vu, ne sont pas les plus pertinentes pour les séances mêlant mathématiques et histoire. Comme cela a été rappelé précédemment, la difficulté de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe réside pour partie dans la présence conjointe de deux champs de connaissances, l'un étant scolairement spécifié, l'autre pas. L'enseignant qui propose un séance se trouve donc dans une situation dans laquelle il a à poursuivre simultanément plusieurs objectifs d'apprentissage, certains disciplinaires, d'autres épistémologiques (éventuellement historiques). Si on veut analyser d'une manière didactique riche, c'est-à-dire qui ne soit pas restreinte à la discipline scientifique enseignée, l'articulation qui se joue dans de telles séances de classe, un nouveau cadre doit être proposé. Lors d'une précédente étude exploratoire (de Vittori & Loeuille, 2009), l'analyse comparée de séances de formation d'enseignants stagiaires du second degré a permis de mettre en évidence le moment où ces derniers sont entrés dans l'apprentissage prévu. Ensuite, la recension des différents moyens permettant d'obtenir ce résultat a conduit à distinguer cinq modalités d'entrée dans la tâche : (1) technique, (2) philosophique, (3) linguistique, (4) pratique, et (5) ludique. Je vais m'intéresser tout d'abord à la modalité technique. Cette dernière apparaît lors de la réalisation d'un travail purement technique d'après un document historique. Par exemple, les professeurs stagiaires de la précédente étude ont été confrontés à une démonstration géométrique qui leur a permis d'entrer dans l'argumentation de Galilée (L'essayeur, passage sur la distance des comètes à Terre, objets sub ou supra-lunaires et discussion sur leur nature). En refaisant la démonstration géométrique, les stagiaires ont été naturellement amenés à se poser la question de la nécessité d'une telle preuve. Dès lors, ils se sont interrogés sur le contexte scientifique de l'époque et sont entrés dans l'apprentissage de la contextualisation (ici la prise en compte du contexte scientifique de l'époque) qui était l'objectif historique de la séance. Dans cet exemple, la réflexion était fondée exclusivement sur du contenu mathématique. Dans une séance de formation à l'épistémologie et à l'histoire, la discipline peut ainsi devenir un outil et donc un moyen pour atteindre un objectif d'apprentissage. Cette situation se retrouve également dans un contexte scolaire. Par exemple (de Vittori & Loeuille, 2009), un professeur de mathématiques de collège peut proposer à ses élèves de réaliser une construction géométrique inspirée par les Éléments d'Euclide. Ce faisant, et sans heurt, les élèves peuvent entrer dans une réflexion historico-épistémologique sur la définition des mathématiques à travers un questionnement sur la raison d'être d'une construction ou d'une preuve. Ainsi, dans une situation de classe, les mathématiques peuvent être utilisées comme un outil pour un enseignement d'éléments d'histoire ce qui constitue un premier aspect des liens entre ces deux disciplines. Voyons un deuxième type de relations. Lors d'une séance contenant de l'histoire des mathématiques, en classe comme en formation universitaire, l'un des supports privilégié est le texte. Intrinsèquement, ce type de source historique s'accompagne d'un travail sur la langue. Même s'il est choisi pour sa simplicité (pour des collégiens par exemple), un texte nécessite toujours des explications sur le sens des mots ou sur le style. La recherche d'éléments de réponse à ces difficultés grammaticales ou sémantiques constitue une autre forme d'entrée possible pour un enseignement. Par exemple, toujours dans la séance évoquée précédemment, le professeur a utilisé dans sa classe de sixième un texte géométrique du 17e siècle qui comportait le mot quarré. Le questionnement des élèves sur l'orthographe de ce mot a permis de rappeler la définition de cette figure et donc d'entrer dans l'apprentissage mathématique prévu, à savoir une leçon sur les polygones. Dans cette situation, l'histoire est un outil qui permet d'atteindre un objectif d'apprentissage disciplinaire.

À la lumière des deux exemples ci-dessus, il est possible d'approfondir l'analyse du lien entre une science et son histoire lors d'une application en classe. Dans la situation décrite précédemment, l'histoire des sciences comme outil et l'histoire des sciences comme objectif apparaissent comme deux éléments d'une même séance (figure 1). Une approche strictement dichotomique qui ne porterait que l'un ou l'autre des aspects manquera l'articulation entre les domaines.

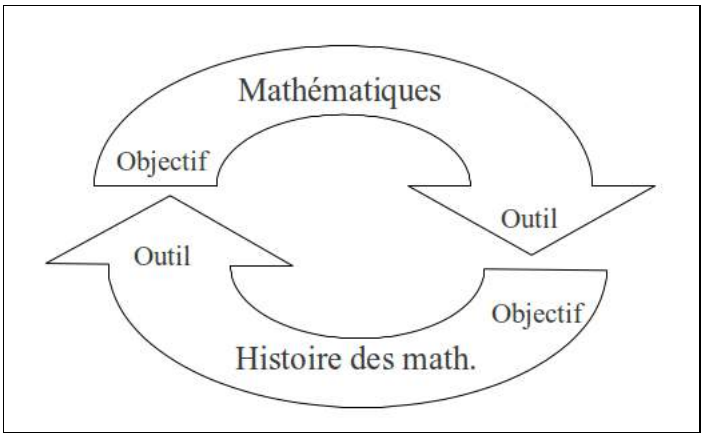


Figure 1 – L'histoire des sciences comme outils et comme objectif d'une même séance

Dans le premier exemple, les éléments de la discipline opèrent sur les objets de l'histoire ; dans le second, ce sont les notions de l'histoire qui opèrent sur les notions disciplinaires. L'enseignant qui veut combiner sa discipline et son histoire va jongler en permanence et passer du champ disciplinaire au domaine historique, pour ensuite aller de ce domaine historique au champ disciplinaire, et ainsi de suite. La manière dont le professeur gère ces passages et les artifices pédagogiques dont il use pour gérer l'hypothèse du double champ sont autant de pistes pour une recherche empirique qui ne risque pas de se perdre dans de faux objectifs.

La complexité des situations en classe montre qu'une étude fine des relations entre les mathématiques et leur histoire oblige à étendre le champ d'action des didactiques à un domaine non scolairement spécifié. L'histoire des mathématiques n'est pas une discipline scolaire, pourtant elle comporte à ce niveau des objectifs d'apprentissage et des difficultés d'enseignement propres qui peuvent faire l'objet d'une analyse didactique. Cette ouverture amène évidemment des difficultés plus grandes quant aux objets à étudier. Par exemple, l'absence d'exigences scolaires précises oblige à une étude particulière des objectifs d'apprentissage, ceux-ci étant souvent propres à chaque enseignant. Quoi qu'il en soit, une didactique de l'histoire des mathématiques en classe est possible et, bien qu'elle transcende les définitions traditionnelles, la recherche dans ce domaine peut s'inspirer des méthodes des didactiques classiques. L'enregistrement vidéo de séances est l'un des outils privilégiés pour ce type de travail ; ce que je vais présenter dans la suite de ce texte.

2. Sur l'usage de la vidéo : recueil de données, analyse et utilisation

Comme nous l'avons déjà remarqué précédemment, la masterisation de la formation des enseignants a profondément modifié la manière dont intervient l'histoire des mathématiques. Dans le cadre de la formation initiale, plusieurs voies permettent de lier recherches et formation professionnelle. Modernisation oblige, la vidéo est devenue un outil important pour ce type de travail. Depuis quelques années, j'ai eu l'occasion d'intensifier cet usage et je propose ci-après un bilan, nécessairement temporaire et fortement subjectif. Dans la suite, je distinguerai trois types d'interventions de la vidéo : les séances modèles, se filmer soi, et la création de supports. Les exemples que j'évoquerai sont pris parmi des expérimentations qui ont eu lieu ces quatre dernières années.

Le premier usage de la vidéo, et le plus classique, consiste à montrer à des professeurs stagiaires ou des étudiants, des extraits de séances filmées en classe. Généralement, les films visent à proposer des exemples d'une bonne utilisation de l'histoire en classe, ce qui amène immédiatement une difficulté importante : où trouver de telles séances ? Ma question porte surtout sur l'aspect purement matériel de la constitution de ce type de ressources. Nul doute qu'en France, bon nombre d'enseignants intègrent avec succès des éléments historiques dans leurs cours, cependant, peu d'entre eux acceptent d'être filmés. Cette difficulté n'est pas seulement liée aux questions juridiques et à la nécessité de la mise en place de démarches relativement lourdes pour obtenir les accords des différents acteurs (l'établissement, les élèves et, bien entendu, le professeur lui-même). Dans leur grande majorité, les enseignants refuseront tout simplement parce qu'ils ne considèrent pas leur travail comme digne d'un intérêt particulier. Cette attitude est très fréquente et, me semble-t-il, a tendance à se durcir lorsqu'on monte en niveau. Les professeurs des écoles sont souvent plus prompts à se laisser filmer que ceux de collège, eux-mêmes plus enclin que ceux de lycée. Je n'ose évoquer le supérieur tant les enseignants à l'université refuseront presque systématiquement la présence d'une caméra dans leur cours (je ne parle pas ici de conférences ou de séminaires liés aux activités de recherche qui sont assez fréquemment enregistrées et pour lesquelles il n'y a généralement pas de réticences). Plus encore, qui parmi les formateurs acceptent une caméra dans ses séances ? Ne possédant pas de données quantitatives précises, je laisse la question ouverte. Néanmoins, et subjectivement, il semble que, pour la plupart des acteurs, le travail au quotidien n'apparaisse pas comme un sujet intéressant pour une vidéo. La réduction du nombre d'interventions des futurs enseignants devant des élèves m'incite à penser qu'il serait bon que ces représentations changent afin de disposer de nouveaux outils de formation. Il n'en demeure pas moins que lorsque toutes ces difficultés ont été surmontées, le visionnage de séances modèles est un support efficace. La vidéo comporte de nombreux avantages dont le premier est de montrer les réactions d'élèves face à l'activité proposée. Ceci constitue un bon déclencheur pour la motivation à proposer soi-même de telles séances. Néanmoins, une séance trop parfaite peut produire l'effet inverse. À la suite du visionnage d'extraits d'une séance sur les polygones en classe de sixième, une étudiante de master 1 s'exclama « je n'arriverai jamais à faire ça ! ». Ceci m'amène à quelques autres limites rencontrées lors des expérimentations que j'ai pu menées. Dans la suite de l'effet modèle-effrayant, il faut toujours garder à l'esprit qu'un film est le fruit d'un montage. La sélection des passages, généralement les bons, biaise la réalité pour en donner une certaine lecture. Dans le cadre de mes travaux, celle-ci est pleinement assumée, les extraits que je montre visent à illustrer la pertinence de l'histoire des mathématiques en classe. Il est clair, dès lors, qu'un autre montage de la séance pourrait y faire voir autre chose. Ce dernier aspect permet d'entrevoir une autre limite à l'utilisation de séances modèles. Dans leur parcours de formation, peu sont les futurs professeurs de mathématiques qui ont eu l'occasion d'être initiés à la lecture de vidéos. Dans la grande majorité des cas, ce type d'analyse nécessite un travail en amont sous peine d'obtenir des étudiants qu'ils regardent une vidéo de classe comme un documentaire où l'analyse est pré-digérée, ou pire comme une série télévisée qui ne constitue qu'un simple récit.

Le deuxième mode d'utilisation de la vidéo consiste à se filmer soi-même lors de séances. Cette approche fut la mienne lors de mes premières analyses de séances de formation à l'histoire des sciences. Je la pratique encore activement mais je souhaite plutôt rendre compte ici de la déclinaison de cette méthode avec des étudiants se destinant au métier de professeur de mathématiques. L'expérience a eu lieu au cours de cette année 2010-2011 dans le cadre de l'option didactique du master 1 métiers de l'enseignement. L'option concernait deux étudiantes et un étudiant qui se sont vus proposé un travail sur l'usage de l'histoire des mathématiques en classe. Les 24 heures, sur les 60 de cette option, ont été découpées en plusieurs temps. Dans une première phase, après une courte présentation du projet, les étudiants ont visionné un extrait de séance modèle et ont échangé relativement à ce qu'ils avaient vu. Ensuite un temps fut consacré à la consultation de la documentation dans lesquelles des pistes d'activités étaient proposées. Les étudiants ont choisi en fonction de leurs goûts et des programmes des classes où étaient prévues les expérimentations, à savoir une classe de seconde de niveau très faible et une classe de première S. La troisième phase fut de faire vivre les séances en classe. Ensuite le travail sur les vidéos pouvait commencer. Un DVD comprenant l'intégralité de la séance menée a été fourni à chaque étudiant. La tâche demandée était, après visionnage individuel complet, de retracer le plan du déroulement en vue de le comparer avec ce qui avait été était prévu et de choisir un moment fort dans la séance. Conformément au thème, ce moment devait concerner les interactions entre mathématiques et histoire et devait durer environ 5 minutes. Seul ce moment choisi par l'étudiant a fait l'objet d'un visionnage collectif. L'objectif était d'en affiner l'analyse et éventuellement de compléter la transcription qui était l'autre partie du travail à accomplir. Les dernières séances ont été réservées à la rédaction d'un compte-rendu d'une dizaine de pages comptant dans le contrôle continu dans lequel devait apparaître l'ensemble de la préparation, l'analyse du passage choisi et enfin un avis sur la dimension professionnelle de cette action de formation. Les étudiants ont tous acceptés de se faire filmer, mais leurs réactions face à la caméra ont été très différentes. Pour deux d'entre eux, la vidéo a été perçue comme un bon moyen de formation. L'un des étudiants écrit « l'usage de la vidéo ne m'a pas dérangé plus que ça. Au contraire, j'ai trouvé cela très intéressant de pouvoir visionner le cours qui avait été fait. ». Pour ces deux étudiants, le regard *a posteriori* permis par cet outil a été bien compris.

> Le fait d'avoir été filmée tout au long de cette séance m'a permis de me rendre compte que j'ai du mal a trouver les mots justes pour pouvoir m'exprimer correctement aux élèves et qu'ils ont donc parfois du mal à voir où je veux en venir à cause ça.
>
> On s'aperçoit alors de tous ses « tics » gestuels et de parole, et cela permet de mieux pouvoir les corriger. De plus, il est intéressant de pouvoir analyser à postériori les interventions et les réactions des élèves.

Les deux étudiants sont même prêts à renouveler l'expérience :

> Je pense que rien que le fait d'enregistrer le son dans ma classe, pas forcement la vidéo, pourrait me permettre de corriger ce défaut.
>
> On se rend également compte de certaines remarques que l'on n'avait pas entendues lors du cours. Cela pourrait donc s'avérer très utile pour améliorer la préparation des cours ainsi que la gestion de classe. C'est une expérience que je renouvellerais donc sans aucun problème.

Ces déclarations enthousiasmantes sont à mettre en balance avec l'avis de la troisième participante qui, bien que reconnaissant elle aussi l'intérêt d'un regard à froid après la séance, trouve dans la présence de la caméra un élément de blocage.

> N'étant absolument pas à l'aise devant une caméra, je n'ai fait que bafouiller, et me sentir mal à l'aise au tableau. J'avais pour seule idée de finir très vite la séance afin de pouvoir sortir du champ de la caméra. Sur la vidéo, on remarque que je bafouille, que mes explications ne sont pas très claires et que mon vocabulaire n'est pas le plus approprié

> (ouais, nan, euh...). Je pense que cela est du à la caméra et au magnétophone car je me sentais épiée, regardée, fixée, analysée...

Les trois séances ont été filmées en présence des autres étudiants, du titulaire de la classe d'accueil, de moi-même derrière la caméra et même d'une collègue de l'établissement venue là par curiosité. Tout le monde était au fond de la classe tout comme la caméra qui était une simple caméra fixe sur trépied. Alors qu'il y avait en tout cinq personnes étrangères à suivre la séance, il est intéressant de remarquer que l'étudiante pointe exclusivement l'enregistrement vidéo comme cause de ses difficultés. D'autres éléments de la formation viennent corroborer cette idée. Les rapports de stage de l'étudiante montre un futur professeur généralement à l'aise dans sa classe alors que, là aussi, il y a un regard extérieur qui, de plus, comporte une dimension évaluation, que n'avait pas la vidéo dans l'expérimentation. En effet, il a été clairement expliqué au départ que le travail portait sur l'analyse didactique de la séance et qu'en aucune manière leur prestation en classe serait évaluée. Pour terminer l'analyse des ressentis de cette étudiante, il faut souligner sa réaction extrêmement violente lors du visionnage de sa séance. Sur le plan pratique, les DVD de chacun ont été distribués en début de séance. En salle informatique, chacun sur un poste séparé et avec des écouteurs, les étudiants ont alors découvert leur prestation. Dès le début du visionnage, l'étudiante s'est mise en colère, visiblement contre elle-même, s'exclamant « mais c'est pas possible ! », « pffff ! », et bien d'autres choses que la décence oblige à ne pas citer. Elle faillit quitter la salle. Après quelques regards compatissants de ses camarades (aucuns mots ne furent échangés), je remémorai à cette étudiante les mises en gardes que j'avais faites en introduction quant à la difficulté de se voir et s'entendre ; cette situation rappelle, selon moi, l'intérêt pour les formateurs de s'être essayé à ce genre de pratique avant de les proposer. Finalement, l'étudiante retrouva son calme et rédigea l'un des meilleurs rapports.

Cette expérience avec des étudiants est riche d'enseignements quant à la pertinence de la vidéo en formation. Même si elle est un peu douloureuse et qu'elle nécessite un travail en amont important, la prise de conscience de certaines postures professionnelles me semble plus facile lorsque les étudiants se regardent eux-mêmes en action. Je terminerai par un bémol concernant la logistique. Même si poser une simple caméra fixe et un microphone dans une salle de classe se fait aisément, les démarches indispensables au bon déroulement de telles expérimentations sur le terrain ne sont pas à négliger. Dans la situation décrite précédemment, seuls trois étudiants sont intervenus, ce qui représente déjà deux classes. Si ce type de méthodes venait à se généraliser, nul doute que la recherche des lieux d'intervention et l'obtention des différentes autorisations, au niveau de l'établissement mais aussi dans le cadre des accords avec le rectorat concernant la mise en stage d'étudiants, constitueront un frein.

Dans le contexte de recherche précédemment évoqué, le recueil de données en classe constitue ma troisième utilisation de la vidéo. Toute étude didactique nécessite la constitution d'un corpus qui servira de point d'ancrage au travail d'analyse. Depuis maintenant cinq ans, Hervé Loeuille, enseignant au collège Y. Coppens à Lannion, et moi-même, tentons d'enregistrer le maximum de séances mêlant mathématiques et histoire. Un corpus obtenu dans les classes de plusieurs enseignants serait sans doute plus intéressant, mais comme je l'ai déjà évoqué, les utilisateurs de l'histoire en classe sont peu nombreux et la présence d'une caméra est rarement acceptée. Ainsi, notre réflexion porte avant tout sur la demi-douzaine de séances déjà en notre possession. Je ne rentre pas ici dans le détail du travail didactique car le cadre théorique est encore en pleine phase d'élaboration, ce qui rend les résultats encore trop fragiles pour être présentés. Néanmoins, je noterai que la richesse de ce type de séances ne semble pas se démentir. J'ajouterai que le visionnage à froid des séances est généralement apprécié par l'enseignant qui y trouve un outil pour l'amélioration de sa pratique ; ce qui constitue une forme d'autoformation qui n'est pas sans rappeler des approches didactiques plus usuelles. Dans le cas du travail sur l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe, en plus de la recherche d'éléments caractéristiques de ce type de séances et donc la production de connaissances théoriques sur le sujet, une autre forme de valorisation est prévue. Partant du constat évoqué en introduction quant à l'absence d'exemples de mises en œuvre pratiques, nous envisageons la production de DVD contenant des extraits de séances accompagnées de commentaires sous forme d'un fascicule. Toutefois, en plus du temps nécessaire à la réalisation de ce type de média, je remarquerai que le passage d'une utilisation interne, individuelle ou en groupe de recherche, à une diffusion plus large a mis en évidence des difficultés nouvelles. Si la logistique pour la prise de vue en classe n'est pas insurmontable, l'obtention d'images et de son de qualité compatible avec la production d'un DVD à distribuer est beaucoup plus délicate. Pour ce genre de projet, la captation doit être faite avec soin et avec du bon matériel sous peine de rendre inexploitable les enregistrements (mauvais cadrage, son de piètre qualité, etc.). À cela, il faut ajouter le besoin de compétences techniques relatives au montage de film et à l'*authoring* de DVD. De nos jours, la plupart des ordinateurs à notre disposition permettent l'installation de logiciels, souvent libres et gratuits, dédiés à ce type de tâches. Cependant, le résultat final peut être décevant, ce qui, selon moi, pose la question de la nécessité du regard, voire de la participation d'un professionnel compétent à ce type de projet éditorial. À ce stade, le projet change de dimension et les budgets deviennent beaucoup plus conséquents, passant de quelques centaines d'euros (parfois moins, voire zéro, si on a déjà une caméra et un ordinateur à disposition) à plusieurs milliers d'euros indispensables pour payer un cameraman et/ou un monteur professionnel.

3. Conclusion

Une discipline, sa didactique et son histoire entretiennent des liens complexes et évidemment plus riches que ceux évoqués dans le cadre restreint de la première partie de cet article. Au niveau universitaire, comme l'ont déjà remarqué plusieurs auteurs (par exemple, Dorier 2000), la didactique peut tout à fait trouver des éléments d'analyse intéressants dans certains résultats de l'histoire des concepts. L'organisation développée dans mes propos ne vise pas à remettre en cause ces liens nécessaires au niveau de la recherche scientifique. Par contre, aux côtés des mathématiques, de leur didactique et de leur histoire, l'ajout d'un quatrième acteur (figure 2) permet, selon moi, de mieux définir le cadre spécifique des études dites empiriques.

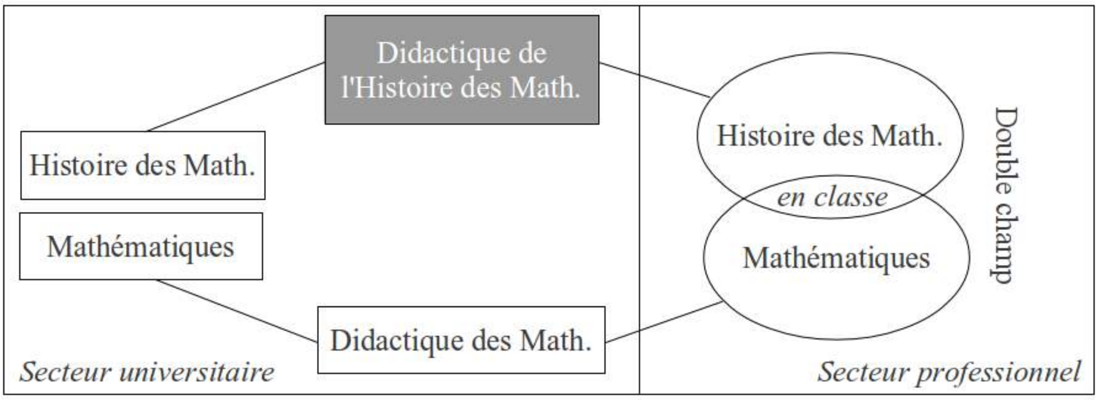


Figure 2 – Aux côtés des mathématiques, de leur didactique et de leur histoire, ajout d'un quatrième acteur

L'introduction d'une didactique de l'histoire de la mathématique permet de relier l'histoire à des questions concernant son enseignement. Plus mouvant, plus mélangé, ce dernier niveau s'accompagne de questions spécifiques qu'un travail conjoint entre les différents acteurs (enseignants sur le terrain, chercheurs...) peut essayer de cerner et d'analyser afin d'y proposer des éléments de réponse. Pour terminer, il me semble ne faire aucun doute que, pour mener à bien cette tâche, une didactique de l'histoire des mathématiques comme domaine de recherche, aura tout intérêt à rester en contact avec la didactique des mathématiques pour y puiser l'inspiration de concepts ou modèles performants. Le cas de l'usage de la vidéo en est l'exemple archétypique. Presque depuis l'origine des didactiques comme champ de recherches autonomes, l'enregistrement vidéo du travail du professeur dans sa classe a été un outil important pour l'analyse des gestes professionnels et des interactions avec les élèves. Il y a là un réel savoir-faire qui ne peut qu'enrichir des travaux sur l'usage de l'histoire des mathématiques en classe. Quelques blocages devront encore être levés, en particulier sur l'acceptation de la part des enseignants d'une caméra dans leur classe, mais les perspectives de développement de nouveaux outils de formation sont très intéressantes.

BIBLIOGRAPHIE

Barbin, É. (1991) The reading of original texts: how and why to introduce a. historical perspective. *For the learning of mathematics*, 11.2 (12-14).

Barbin, É. (1997a) Histoire et enseignement des mathématiques : pourquoi ? Comment ? *Bulletin de l'AMQ (Association Mathématique du Québec)*, vol.XXXVII, n°1 (20-25).

Barbin, É. (1997b) Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique des mathématiques. *Repères-IREM*, 27 (63-80).

Barbin, É. (ed.), Stehlíková, N. (ed.), Tzanakis, C. (ed.) (2008) History and epistemology in mathematics education, Proceedings of the 5th European summer university ESU5.

Brousseau, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7, n° 2 (33-115).

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19 (2).

de Vittori, T. & Loeuille, H. (2009) Former des enseignants à l'histoire des sciences : Analyse et enjeux d'une pratique en mathématiques. *Petit x* 80.

Dorier, J.-L. (2000) Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz* 12.

Guedj, M. (2005) Utiliser des textes historiques dans l'enseignement des sciences physiques en classe de seconde des lycées français : compte-rendu d'innovation. *Didaskalia* 26, mai 2005.

Guedj, M., Laubé, S., Savaton, P. (2007) Éléments de problématiques et de méthodologie pour une didactique de l'épistémologie et de l'histoire des sciences et des techniques (EHST). *IUFM du Nord Pas de Calais. Colloque Théories et expériences dans les didactiques de la géographie et de l'histoire. La question des références pour la recherche et pour la formation*.

Jankvist, U.-T. (2009) On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12(1) (67-101).

Jankvist, U.-T. (2010) An empirical study of using history as a 'goal'. *Educational studies in mathematics* 74 (1) (53-74).

Lenoir,Y., Sauvé, L. (1998) De l'interdisciplinarité scolaire à l'interdisciplinarité dans la formation à l'enseignement: un état de la question. *Revue française de pédagogie* 124 (121-153).

Martinand, J.-L. (1993) Histoire des sciences et didactique de la physique et de la chimie : quelles relations ? *Didaskalia* 2, « Didactique et histoire des sciences », INRP.

Raichvarg, D. (1987) La didactique a-t-elle raison de s'intéresser à l'histoire des sciences ? *Aster* 5, « Didactique et histoire des sciences », INRP.

ReForEHST (2006) Histoire des sciences : formations et recherches en IUFM. *Tréma* 26.

Reuter, Y. (Ed.) (2007) *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*. De Boeck.

Rosmorduc, J. (1995) L'histoire des sciences dans la formation scientifique des maîtres de l'école élémentaire. *Didaskalia* 7, INRP.

Siu, M.-K.,Tzanakis, C. (2004) History of mathematics in classroom teaching – appetizer? main course? or dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 3(1-2), v–x. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).

Tzanakis, C., Arcavi, A. (2000) Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel and J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education*, Chapter 7 (pp. 201–240.). The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Annexe – Exemple de fiche d'activité par H. Loeuille
Diophante, Viète et Fermat (niveau 3e)

Première partie

Diophante, mathématicien grec du IIIe siècle après J.C a beaucoup travaillé sur les nombres. Son ouvrage le plus important est les « Arithmétiques » dans lequel il expose des méthodes de résolution de problèmes, dont certains étaient des problèmes traditionnels, déjà exposés dans des tablettes babyloniennes.

Voici un de ces problèmes : « Trouve deux nombres dont la somme est 20 et le produit est 96 ».

Peux-tu trouver une solution à ce problème ?

Deuxième partie

François Viète est un mathématicien français du XVIe siècle.

Il a entre autre repris les travaux de **Diophante**, en en donnant une nouvelle approche, sans se contenter d'en faire une simple traduction.

Dans son ouvrage « les Zététiques » apparaît le langage littéral, mais Viète utilise encore beaucoup de phrases. On y trouve en particulier l'affirmation suivante :

> Le double de la somme des carrés de deux nombres, diminué du carré de la somme de ces deux nombres, est égal au carré de leur différence.

Choisis d'abord deux nombres entiers et vérifie si cette affirmation est bien vraie pour les nombres que tu as choisis.

Si elle est vraie pour ces nombres, peux-tu en déduire qu'elle est toujours vraie ? Pourquoi ?

Écris en langage mathématique le texte de cette affirmation.

Démontre que l'égalité ainsi obtenue est en fait une identité.

En fait, François Viète rédigeait de cette façon : il écrit d'abord le texte puis donne un exemple.

> Le quarré de l'aggregé des costez, moins le quadruple du rectangle contenu soubs iceux, est égal au quarré de la différence des costez. Le rectangle contenu soubs les costez soit 20, et leur somme 12, le quarré de la différence des costez sera 144-80, ou 64, duquel la racine est 8 pour la différence ; partant les costez seront 10 et 2.

Réécris tout d'abord la partie texte en français moderne puis en écriture mathématique.

Démontre que cette affirmation est vraie.

Utilise cette méthode pour retrouver la solution du problème posé par Diophante.

Troisième partie

Au XVIIe siècle, le mathématicien français **Fermat** formule la proposition suivante :

> Le carré de la différence des carrés de deux nombres, ajouté au carré du double produit de ces nombres, est égal au carré de la somme de leurs carrés.

1. Vérifie d'abord si cette proposition paraît vraie pour deux nombres de ton choix.
2. Traduis cette proposition en langage mathématique. Est-elle toujours vraie ?
3. À quelle propriété bien connue cet énoncé te fait-il penser ?
4. Te souviens-tu de ce que dit la conjecture de Fermat ? Que sais-tu sur celle-ci ?

COLLOQUE DES 16 & 17 JUIN 2011

THEME : L'ENSEIGNEMENT DES GRANDEURS AU COLLEGE ET AU LYCEE

Pendant de nombreuses années, les grandeurs ont été peu présentes dans les programmes de collège et de lycée. Elles ont été réintroduites en 2005 (à la suite des programmes de 2002 de l'école primaire) et ce, de façon importante, puisqu'une rubrique du programme s'intitule « Grandeurs et mesures ».

Les questions abordées :

- Peut-on préciser comment les grandeurs ont été réintroduites dans des domaines de savoir et dans lesquels ?
- Quels objets mathématiques ont été influencés par la prise en compte des grandeurs ?
- Quelles sont les difficultés des élèves ? Quelles sont les difficultés d'enseignement ? Quelles situations peuvent être mises en place sur l'enseignement des grandeurs ou en lien avec cet objet ?

VARIABILITE, INCERTITUDE, ERREUR

Jacques TREINER
Université Pierre et Marie Curie et Sciences-Po, Paris

Résumé – Le caractère aléatoire de tout processus de mesure physique peine à être pleinement reconnu, et pas seulement dans l'enseignement. A preuve, la référence persistante à la notion de « valeur exacte » d'une grandeur physique qui, bien que proclamée inconnue, est postulée exister, alors qu'une analyse même succincte de situations concrètes montrent qu'il n'en est rien. Cette conception, prise au sens strict, implique que les incertitudes résultent d'imperfections (in-certitudes) qui empêcheraient d'atteindre cette valeur vraie. En réalité, les grandeurs physiques sont modélisées par des variables aléatoires, et les incertitudes de mesure ont leur origine dans la variabilité propre à toute variable aléatoire. Cette dispersion des valeurs observées, loin d'être une imperfection, représente une connaissance positive, incompressible dans des conditions données, sur les systèmes physiques. Quant au terme « erreurs », il convient de le réserver à ce qu'on peut éviter de commettre, c'est-à-dire les « erreurs systématiques ».

Dans le numéro 928 du BUP de novembre, François-Xavier Bally et Jean-Marc Berroir nous proposent une mise au point assez complète sur les « incertitudes expérimentales ». Je n'ai pas de remarque sur tous les développements techniques de l'article, très complets, mais en revanche la façon d'introduire les notions de base contient des incohérences susceptibles de déclencher une certaine perplexité chez un élève qui prendrait au sérieux le sens de mots.

Nous avons tous, en tant qu'élève, étudiant, ou même enseignant, vécu ces instants où l'on a ce vif sentiment d'inconfort produit par une argumentation qui, soudainement, révèle une faille logique. L'élève motivé et têtu se dit : nous verrons cela plus tard, et il poursuit ; le moins motivé se dit : si c'est ainsi, ce n'est pas pour moi, et il décroche. Je connais ainsi une personne douée en mathématique qui se souvient, longtemps après l'événement, s'être dit que la physique n'était pas pour elle après qu'un professeur ait énoncé cette idée qui semblait pourtant aller de soi : « une force est un vecteur ». La confusion entre le phénomène et sa représentation avait fermé pour longtemps une porte dans le cerveau de l'élève sans que le professeur, évidemment, s'en aperçoive, tant l'habitude de prendre le mot pour la chose lui était devenue une seconde nature.

Les incohérences en question sont, hélas, présentes dans un certain nombre de textes officiels concernant la métrologie. Ce n'est pas une raison pour les reprendre telles quelles dans notre enseignement. Il est plus …éducatif, de leur montrer que même les textes officiels, parfois…

La discussion ci-dessous s'inspire du document d'accompagnement de Terminale S des programmes de l'an 2000, document intitulé « Variabilité et incertitudes dans les mesures physiques »[1], rédigé avec Daniel Beaufils après discussion avec Claudine Schwartz.

Voici les quelques phrases-clef de l'article de Bally et Berroir que je voudrais analyser ici.

P1 : « On introduit d'abord la notion d'incertitude. Puis on montre comment, à l'aide d'une étude statistique, on peut quantifier les incertitudes associées au caractère aléatoire des processus de mesure. »

P2 : « Lors de la mesure d'une grandeur physique x, l'erreur est la différence entre la valeur mesurée x et la valeur vraie X. La valeur vraie est en général inconnue (puisqu'on la cherche) ».

P3 : «Le résultat de la mesure est caractérisé par une distribution de probabilité répartie autour de la valeur vraie dans le cas d'erreurs purement aléatoires ».

P4 : « En l'absence d'erreur systématique, l'estimation de la valeur moyenne est la meilleure estimation de la valeur vraie X tandis que l'incertitude δx, directement reliée à l'estimation de l'écart-type de la distribution, définit un intervalle dans lequel la valeur vraie de X se trouve avec un niveau de confiance connu. On choisit le plus souvent comme incertitude l'estimation de l'écart-type de la distribution. On parle alors d'incertitude-type ».

P5 : « Ayant obtenu la valeur mesurée avec son intervalle d'incertitude, on la compare à la valeur de référence (pour une valeur expérimentale de référence, ne pas parler de valeur exacte, parler de valeur tabulée) ».

P6 : « On s'occupe ici de la mesure d'une grandeur physique x dont les sources de variabilité sont uniquement aléatoires. Dans les deux premiers paragraphes, on décrit les méthodes statistiques qui permettent d'évaluer la valeur vraie de x et l'incertitude-type ».

Allons tout de suite à l'essentiel : cette notion de « valeur vraie ». Elle est inconnue, nous dit-on, puisqu'on la cherche, mais en tout cas *elle existe.*

Or, à l'évidence - une évidence que l'élève peut percevoir – cette valeur vraie *n'existe pas !* Et voilà où, au lieu de partir de la perception intuitive du monde qu'a l'élève, pour élaborer une construction qui va allier physique et mathématique et le faire progresser vers l'assimilation de notions générales, on le condamne à installer dans sa tête une chimère dont ni lui, ni les rédacteurs ne peuvent se débrouiller sans contradiction. Reste à obéir aux injonctions –ce qui n'est pas l'idéal que nous cherchons à transmettre aux élèves.

Quelques exemples pour commencer :

Quelle est la valeur vraie de la largeur du bureau sur lequel l'élève travaille ? Quelle est la valeur vraie de la taille de l'élève, de son poids ? Quelle est la vraie valeur du nombre de tirages pile lors de N lancers de dé ? Quelle est la vraie valeur de la

[1] Document consultable à l'adresse : http://www2.cndp.fr/archivage/valid/38815/38815-5719-5536.pdf, page 88. Document TG5 du Cédérom d'accompagnement des programmes de Terminale S, SCEREN CNDP.

température ou de la pression de la pièce ? Quelle est la vraie valeur du nombre d'habitants vivant en France ? Quelle est la vraie valeur de l'énergie du premier état excité de l'atome d'hydrogène ? Quelle est la vraie valeur de la durée de vie d'UN atome radioactif donné ? Quelle est la valeur vraie de la fréquence d'une note de piano ?

Poser ces questions, c'est y répondre.

La valeur de la largeur du bureau dépend de l'endroit où on la mesure. Si le meuble est très bien fait, il suffit de descendre l'échelle d'observation pour retrouver de la variabilité locale. Et à l'échelle atomique, on verra sans arrêt des molécules quitter le bois ou venir s'y agréger.

La taille d'un individu dépend de l'heure du jour. Elle est plus grande le matin, plus petite le soir. Le poids dépend aussi du moment où on le mesure. Ces fluctuations ne sont pas une incertitude, et il est intéressant de s'interroger sur leur origine.

Le nombre de pile est, en moyenne, *N/2*, avec une variabilité de l'ordre de $\sqrt{N}$. Ce résultat est une connaissance positive, pas une incertitude.

Outre le fait que la température n'est pas uniforme dans la pièce, il s'agit d'une grandeur macroscopique liée à la valeur moyenne de l'énergie cinétique des molécules. Cette valeur moyenne est elle-même une grandeur aléatoire dont les fluctuations sont en racine du nombre de molécules. La pression est reliée à l'énergie cinétique moyenne par unité de volume. C'est également une variable aléatoire. Les deux grandeurs ont donc des fluctuations qui deviennent de plus en plus mesurables à mesure qu'on diminue le volume de l'échantillon. Ces fluctuations sont négligeables à l'échelle macroscopique, mais elles sont bien présentes.

Le nombre d'habitants vivants en France fluctue sans arrêt par les entrées-sorties du territoire, les décès et les naissances. Pour ne considérer que ces deux derniers nombres, ils sont du même ordre de grandeur (la population varie lentement), et valent environ 800 000 par an. Si l'on distribue de façon uniforme ces événements au cours de l'année, cela fait en moyenne un changement d'unité toutes les 20 secondes. Le nombre d'habitants est donc impossible à déterminer – un recensement prend plus de 20 secondes à effectuer !- et si l'on effectue plusieurs recensements, on va trouver une variabilité dépendant du temps que prend le recensement. Si l'opération prend un an, la variabilité sera de l'ordre de la racine des 1 600 000 tirages +1, -1 correspondants aux naissances et aux décès, soit environ 1350. Si cela prend six mois, la variabilité sera de l'ordre de racine de 800 000, soit 900 etc. Signalons au passage que les recensements actuels sont faits pas sondages, qui introduisent par eux-mêmes une dimension statistique.

Chaque état possède une largeur en énergie qui est reliée à sa durée de vie. La durée de vie des états quantiques est une propriété fondamentale sur laquelle repose, par exemple, le mécanisme d'inversion des populations dans un laser. Nommer incertitude sur l'énergie la largeur d'un état serait un contresens physique total.

La durée de vie d'un atome radioactif est une variable aléatoire (lié à l'effet tunnel en mécanique quantique), et la probabilité de se désintégrer dans un certain intervalle de temps est indépendante du temps écoulé (mort sans vieillissement). La loi de désintégration n'est pas une « incertitude » sur la durée de vie, c'est une connaissance sur le processus de désintégration.

Une note de piano est caractérisée par un spectre de fréquences. Le fait que le son ne soit pas composé d'une seule fréquence n'est pas une « incertitude » sur la fréquence, c'est une connaissance positive sur le son : par exemple, le spectre est relié au timbre de l'instrument.

En parcourant ces exemples, le lecteur aura peut-être le sentiment d'un mélange des genres suspect : certains cas semblent relever explicitement des probabilités, comme le jeter de dés, d'autres pas, comme la largeur du bureau. Mais précisément, mon but ici est de souligner que l'on est *toujours* face à des grandeurs aléatoires. Les différences tiennent à la forme des lois de probabilité, qui sont plus ou moins « piquées » autour de la valeur moyenne, voire pas piquées du tout comme dans le cas de la durée de vie d'un noyau radioactif. En ce sens, *effectuer une mesure doit être considéré comme le tirage d'une variable aléatoire* dont on cherche à déterminer la loi de probabilité *!*

Convient-il de distinguer les phénomènes qui relèvent de la mécanique quantique ? Ce n'est pas essentiel ici, puisque n'interviennent dans la discussion que des probabilités, et non les *amplitudes* de probabilité. Précisons un point, à ce sujet : les « inégalités de Heisenberg » sont parfois désignées sous la dénomination historique de « relations d'incertitude ». Mais cette dénomination masque leur sens physique réel, comme nous l'avons vu pour la largeur d'un état quantique. Reprenons l'exemple du son musical. Il existe une relation de type Heisenberg entre la durée du son et la largeur de son spectre en fréquence : plus le son est bref, plus son spectre est large, c'est une simple propriété déduite de la transformation de Fourier. Dira-t-on pour autant que la fréquence est « incertaine » ? Evidemment non. La connaissance du spectre, de même que la durée du son, constituent des connaissances positives sur le son.

Que conclure de ces exemples ? Qu'il n'y a pas de valeur vraie, que toute grandeur physique est distribuée suivant une loi de probabilité qui dépend du système. La notion première, c'est donc celle de *variabilité* des grandeurs physiques. Les exemples ci-dessus montrent aussi que, à cause de ces fluctuations, les grandeurs physiques n'ont de sens qu'à une certaine échelle et pour un certain usage. L'échelle moléculaire est non pertinente si l'on cherche à savoir seulement si le bureau va passer par l'ouverture de la porte. La température d'une molécule n'a pas de sens. Une variation de quelques milliers sur une population de 60 millions est sans importance pratique etc.

Cette discussion est non seulement possible à mener avec les élèves, mais elle *doit* l'être, car elle peut aiguiser leur sens physique, et mieux leur faire comprendre le sens de la production des nombres dans l'acte de mesure.

Donc, exit la « valeur vraie ». Que reste-t-il ? La distribution des valeurs de la grandeur. Le plus simple, c'est de caractériser cette distribution par une valeur moyenne et un écart-type (des moments de la distribution plus élevés que l'ordre deux peuvent être parfois nécessaire). L'écart-type est directement relié à ce qu'on a pris l'habitude d'appeler « incertitude », mais en fait, ainsi que les exemples le montre, le terme d'incertitude est inapproprié pour décrire une propriété du système. La variabilité est intrinsèque, elle est incompressible, elle fait partie de la connaissance que l'on a du système.

Maintenant que nous nous sommes débarrassés de la « valeur vraie », reprenons les phrases P1-P6.

Dans P1, le caractère aléatoire est affecté uniquement au processus de mesure. Mais l'appareil de mesure est un système physique comme un autre. S'il est siège de variabilité, pourquoi le système mesuré n'en serait-il pas aussi ? Ah non, c'est interdit, il a été dit qu'il existait une « valeur vraie » ! Voilà une contradiction qui saute.

Dans P2, on ne cherche plus la valeur vraie, qui a disparu, mais on cherche la distribution des valeurs de la grandeur physique. Si la variabilité est faible, on se contentera de la valeur moyenne. Si elle est observable, on apprend quelque chose de plus.

Dans P3, il suffit de (et il faut !) remplacer valeur vraie par valeur moyenne.

Dans P4, on peut supprimer toute référence à la valeur vraie. De plus, pourquoi introduire une notion nouvelle, celle d'incertitude-type ?? Les élèves voient en cours de mathématiques la notion d'écart-type, pourquoi ne pas s'en satisfaire ? Parce que nous sommes en physique, en chimie, en biologie, et qu'il faut marquer sa différence ? Pourquoi ne pas leur faciliter la tâche de compréhension en leur montrant que les notions vues *là* peuvent servir *ici* ?

Dans P5, brusquement, la valeur vraie est interdite. Pourquoi ?? Valeur de référence, c'est très bien. Pourquoi introduire une nouvelle notion, celle de valeur *tabulée* ?? Pourquoi multiplier les termes, sans ajouter de contenu ?

Dans P6, la notion d'erreur : ce qu'on détermine, c'est une valeur moyenne, qu'on espère proche de la valeur de référence.

Venons-en au terme d'erreur, justement. Le mot erreur, comme son nom le suggère, devrait être réservé à *ce qu'on peut éviter*, donc à l'erreur systématique, qu'elle vienne de l'appareil ou de l'opérateur. Pour le reste, insistons sur la variabilité, et introduisons prudemment le terme d'incertitude en évitant son contenu négatif lié au préfixe « in ». Lorsque les élèves ont bien compris de quoi il s'agit, alors nous pouvons leur parler du poids historique des mots, et parler de propagation déterministe des incertitudes, ou d'écart-type d'une variable aléatoire fonction d'autres variables aléatoires. Il sera également facile de discuter l'origine des incertitudes : la variabilité du phénomène étudié, la variabilité des appareils de mesure, qui sont des systèmes physiques comme les autres, la variabilité de l'opérateur, et l'impossibilité, parfois, d'attribuer la variabilité observée à l'une ou l'autre cause.

Et pour terminer sur le sens des mots, il est utile également de distinguer deux sens (au moins) du terme « incertitude » : l'incertitude au sens de l'écart-type d'une loi de probabilité, et l'incertitude *non statistique* liée à une ignorance. Prenons l'exemple de la météorologie et de la climatologie. La météorologie s'efforce de calculer UNE trajectoire à partir de données initiales. C'est très difficile car la dynamique du système relève du chaos déterministe : de petites fluctuations dans les conditions initiales s'amplifient exponentiellement avec le temps. La climatologie s'intéresse à l'ENSEMBLE des conditions météorologiques en un lieu donné. Cet ensemble est caractérisé par des valeurs moyennes et des écarts par rapport à ces valeurs moyennes. Pas plus de « valeurs vraies » ici qu'ailleurs ! Il est même très important de connaître les écarts en question, car ils renseignent sur les événements extrêmes qui peuvent survenir. Les climatologues utilisent en fait les mêmes codes informatiques que les météorologues. Simplement, déterminer les propriétés *statistiques* du temps qu'il fait, ou fera, est plus facile que suivre *une* trajectoire particulière.

En revanche, il existe des sources d'incertitudes liées à notre ignorance de certains processus. La présence de nuages, par exemple, est difficile à prévoir, car la formation des gouttelettes est un phénomène hors équilibre qui est très sensible à la présence d'aérosols dans l'atmosphère, lesquels servent de centres de nucléation pour le changement de phase vapeur-liquide. Or les nuages ont un double effet sur le climat : ils ont tendance à réchauffer les basses couches de l'atmosphère, tout en réfléchissant une partie du rayonnement solaire. C'est la raison pour laquelle les incertitudes sur le rôle des nuages dans le réchauffement climatiques ne diminuent pas. Mais si l'on maîtrisait mieux la théorie, ou la façon de l'implémenter dans les codes climatiques, ces incertitudes diminueraient. Les incertitudes liées à la variabilité d'un phénomène, au contraire, sont stables et ne diminuent pas lorsque les connaissances progressent.

MATH & MANIPS
OU COMMENT INTEGRER DES MANIPULATIONS DANS LES CLASSES POUR FAVORISER L'APPRENTISSAGE DES GRANDEURS ET DE LA PROPORTIONNALITE

Marie-France Guissard, Valérie Henry,
CREM, FUNDP
Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpsen

Recherche

L'atelier présente un travail actuellement en cours au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Nivelles (Belgique). Il s'agit de la conception et de la mise au point de séquences d'apprentissage appelées *Math & Manips*, intégrant des manipulations, et destinées à diverses tranches d'âge de l'enseignement fondamental et secondaire. L'apport de telles activités dans l'apprentissage de la proportionnalité au collège est analysé dans une thèse de doctorat parallèlement en cours aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur.

La recherche propose d'insérer dans les cours de mathématiques des manipulations afin de favoriser la construction de certains concepts. Ces *Math & Manips* visent à provoquer chez les élèves de la curiosité par des expérimentations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. En particulier, les activités destinées au collège confrontent les élèves à des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité.

Nous avons choisi de travailler dans chacune des *Math & Manips* des rapports de grandeurs, en limitant le recours aux mesures au strict nécessaire. Le passage du contexte expérimental aux modèles mathématiques se fait via différents registres. Par exemple, les données recueillies au cours des manipulations sont placées dans des tableaux de nombres et sont ensuite reportées dans des graphiques, ce qui permet de mettre en évidence divers aspects de la comparaison entre différents modèles.

Le contexte dans lequel les élèves évoluent lors de la réalisation d'une *Math & Manip* les amène tout naturellement à entrer dans des démarches où la modélisation prend tout son sens. En effet, notre volonté de confronter les conceptions des élèves avec le vécu expérimental puis d'en faire naître un modèle mathématique nous conduit à explorer différentes étapes d'un processus de modélisation telles que : conjecture, protocole, expérimentation, interprétation des résultats, construction d'un modèle, validation, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux, exploitation du modèle, …

Activités

L'atelier présente trois *Math & Manips* déjà expérimentées dans des classes. Les deux premières sont prévues pour des élèves du collège. Une activité analyse notamment l'effet de la duplication des dimensions d'une figure sur son aire et l'autre explore les liens entre le volume d’un cylindre et sa hauteur d'une part, entre le volume d’un cylindre et son diamètre d'autre part. La troisième séquence d’apprentissage a été conçue pour des élèves du lycée. Elle étudie les liens fonctionnels entre le volume d’un cône et sa hauteur. Ces trois activités sont brièvement décrites ci-après.

Math & Manip pour le début du collège

Cette activité consiste à proposer aux élèves une situation qui permet d’observer ce qu’il advient de l’aire d’un polygone lorsqu’on multiplie les longueurs de ses côtés par un nombre entier.

Tout d’abord, il est demandé aux élèves de reproduire deux dessins en doublant chacune des longueurs, y compris les distances entre les éléments des dessins. Les dessins de départ accompagnés de leur agrandissement sont illustrés ci-dessous.

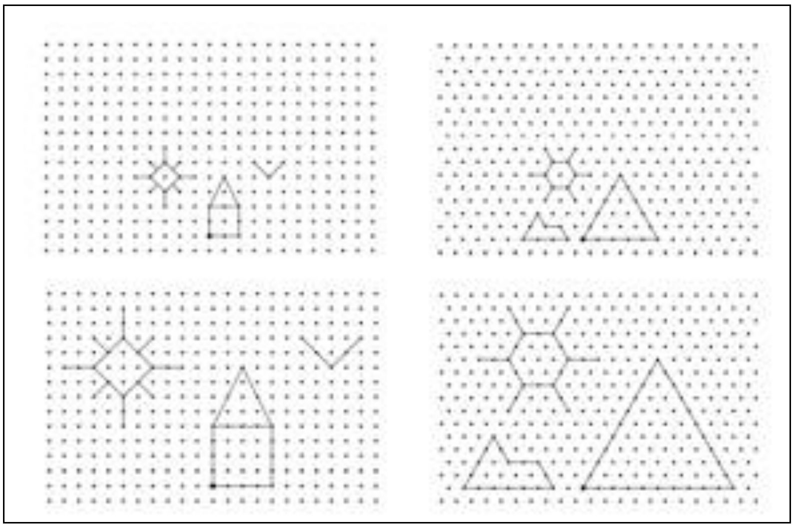


Figure 1 – Les dessins de départ accompagnés de leurs agrandissements

Ensuite, après avoir répertorié les différents polygones figurant dans les dessins, les élèves comparent l’aire de chaque polygone initial avec celle de son agrandissement. Diverses procédures sont mises en œuvre. Certains élèves tentent d’utiliser les formules de calcul d’aire connues mais sont rapidement limités par cette démarche. D’autres dénombrent les cellules carrées ou triangulaires contenues dans chaque polygone. Une troisième manière de procéder consiste à remarquer que certains polygones peuvent être reproduits quatre fois dans leur agrandissement.

Quelle que soit la méthode utilisée, les élèves arrivent à une même conclusion : lorsqu’on double les longueurs des côtés des polygones rencontrés, leur aire est multipliée par quatre. Est-ce vrai pour tout polygone ? La suite de l’activité a pour but de répondre à cette question.

Lorsqu’on s’intéresse au carré, il est facile de remarquer comment évolue son aire en fonction de la longueur du côté et ce, même lorsqu’on multiplie sa longueur par un facteur autre que deux. Il suffit d’observer les pavages des carrés successifs au moyen du carré initial.

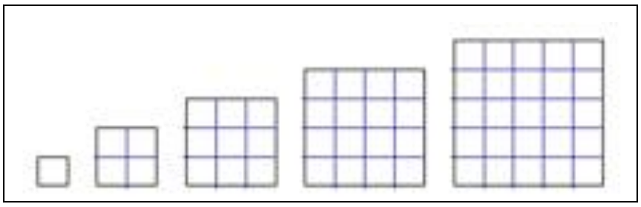


Figure 2 – Les pavages des carrés successifs au moyen du carré initial

Essayons donc d'appliquer la méthode du pavage à d'autres polygones. Le pentagone en forme de sphinx et un triangle quelconque sont proposés aux élèves. La consigne est de paver le polygone de côté double au moyen du polygone semblable de départ. Après quelques essais, les élèves obtiennent les puzzles suivants et observent que quatre figures de départ sont nécessaires pour réaliser le pavage demandé.

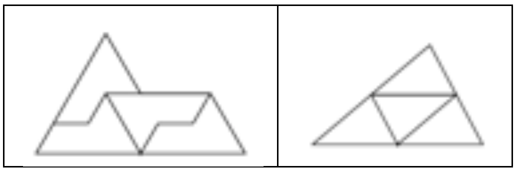


Figure 3 – Pentagone en forme de sphinx et triangle : après quelques essais, les élèves obtiennent ces puzzles

L'hexagone régulier est proposé ensuite. Les élèves remarquent qu'il n'est plus possible de le paver avec quatre hexagones entiers, il faut en découper un en trois losanges. Cependant, malgré la nécessité de découper, le pavage reste facile à réaliser. Par contre, le pavage d'un polygone en forme de tête de chat pose bien plus de difficultés.

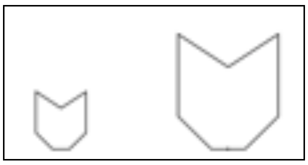


Figure 4 – Polygone en forme de chat : le pavage pose bien plus de difficultés

Après un temps de recherche et de réflexion, on conclut qu'il n'est pas si facile de paver tout polygone même en procédant à des découpages. Pour continuer, les élèves sont invités à réfléchir aux polygones qui leur ont paru facile à paver. En premier vient le carré mais il est impossible de découper le polygone en forme de tête de chat uniquement en carrés. Par contre, le pavage du triangle quelconque a également été réalisé rapidement et la « tête de chat » est décomposable en triangles.

Chaque petit triangle peut être reproduit exactement quatre fois dans le grand triangle qui lui est semblable. Ceci signifie que l'aire du polygone dont les longueurs des côtés ont été doublées est bien quatre fois plus grande que celle du polygone de départ.

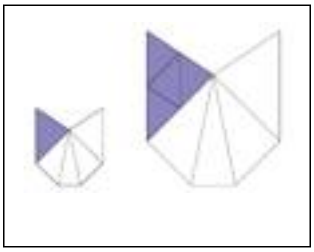


Figure 5 – Chaque petit triangle peut être reproduit exactement quatre fois dans le grand triangle qui lui est semblable

Ce procédé peut être appliqué à tout polygone car tout polygone est décomposable en triangles. La conclusion suivante peut enfin être formulée : « un polygone dont les longueurs des côtés ont été multipliées par deux a une aire égale à quatre fois l'aire du polygone initial ».

Si les longueurs sont multipliées non par deux mais par trois, que devient l'aire des polygones ? Un début de réponse a été donné par le pavage du carré de côté triple : son aire est multipliée par neuf. Est-ce vrai pour tout polygone ? Si cela se vérifie pour un triangle quelconque, le découpage d'un polygone quelconque en triangles permettra la généralisation de la propriété.

Les élèves obtiennent sans trop de peine le puzzle illustré ci-dessous, neuf triangles sont effectivement nécessaires pour paver un triangle semblable dont les longueurs des côtés ont été multipliées par trois.

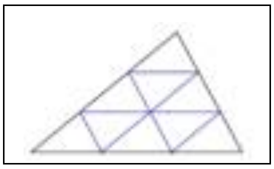


Figure 6 – Les élèves obtiennent sans trop de peine ce puzzle

La figure suivante illustre pour un pentagone quelconque la démarche qui démontre la généralisation.

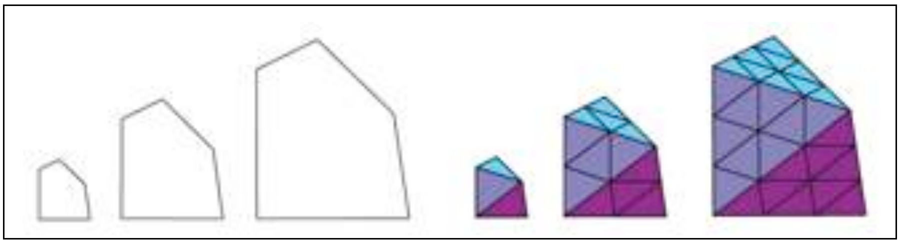


Figure 7 – Pour un pentagone quelconque

Si les longueurs ne sont multipliées ni par deux ni par trois mais par un autre facteur, que devient l'aire des polygones ? Afin d'aller plus loin dans la généralisation, il faudrait réaliser les pavages des agrandissements successifs d'un triangle quelconque par un facteur entier. Nous n'envisageons pas de mener cette démarche plus loin.

Les carrés de côté double, triple, quadruple… montrent que les aires sont respectivement quatre fois, neuf fois, seize fois plus grandes que celle du carré initial.

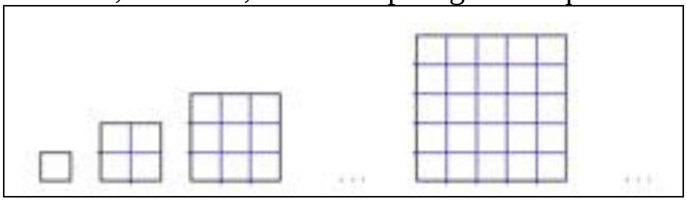


Figure 8 – La suite de carrés permet d’imaginer ce qui se passe pour d’autres multiples entiers

La suite de carrés ci-dessus permet d’imaginer ce qui se passe pour d’autres multiples entiers. Comme l’aire du triangle se comporte de la même façon pour les premiers multiples, nous admettrons que l’analogie persiste au-delà du facteur trois. Et comme tout polygone peut être découpé en triangles, l’aire d’un polygone quelconque suivra la même règle.

Math & Manip pour le collège

L’activité consiste à observer comment varie le volume d’un cylindre en fonction de sa hauteur, puis en fonction de son diamètre.

Pour commencer, les élèves versent un certain nombre de mesurettes, trois par exemple, dans un récipient cylindrique assez haut (tel qu’un verre à long drink). Après avoir marqué la hauteur atteinte par le liquide, ils font deux nouvelles marques au double et au triple de la hauteur initiale. Les élèves estiment alors et vérifient par expérimentation les nombres de mesurettes nécessaires à verser dans le cylindre pour atteindre ces différentes hauteurs. Ils écrivent leurs résultats dans un tableau comme ci-dessous.

Hauteur	Nombre de mesurettes
haut. 1 = 3,5 cm	3
haut. 2 = 7 cm	6
haut. 3 = 10,5 cm	9

Tableau 1 – Les élèves estiment et vérifient par expérimentation les nombres de mesurettes nécessaires à verser dans le cylindre pour atteindre différentes hauteurs

Ensuite, il est demandé aux élèves de repérer et d’écrire les différents liens qu’ils observent entre des valeurs du tableau, en les symbolisant par des flèches.

	Hauteur	Nbre de mes.	
	haut. 1 = 3,5 cm	3	
×2	haut. 2 = 7 cm	6	×2
×3	haut. 3 = 10,5 cm	9	×3

	Hauteur	Nbre de mes.	
	haut. 1 = 3,5 cm	3	
+3,5	haut. 2 = 7 cm	6	+3
+3,5	haut. 3 = 10,5 cm	9	+3

Tableau 2 – Il est demandé aux élèves de repérer et d’écrire les différents liens qu’ils observent entre des valeurs du tableau, en les symbolisant par des flèches

Les réactions des élèves sont principalement de deux sortes. Certains voient dans ce tableau des liens de type multiplicatif et d’autres des liens de type additif.

Les relations mises en évidence dans les tableaux doivent permettre aux élèves d’imaginer combien de mesurettes seraient nécessaires pour atteindre quatre fois, cinq fois voire dix fois la hauteur initiale et de construire un graphique reprenant ces différents résultats.

La deuxième partie de l’activité consiste à observer et comprendre ce qui se passe si la hauteur reste fixe et qu'on fait varier le diamètre du cylindre.

Figure 9 – Les élèves reçoivent trois cylindres

Les élèves reçoivent trois cylindres. Les deux cylindres transparents ont des diamètres double et triple du plus petit. Ce dernier est utilisé comme mesurette étalon.

La question à laquelle il faut répondre est la suivante : combien de fois faut-il verser le petit cylindre pour remplir les cylindres de diamètres double et triple jusqu’à la même hauteur que celle du cylindre de départ ?

Après avoir noté leurs estimations dans un tableau, les élèves effectuent la manipulation pour vérification.

Les participants à l'atelier sont invités à tester cette partie de l'activité. Ils peuvent facilement imaginer les estimations que font les élèves en général : deux mesurettes pour remplir le cylindre de diamètre double et trois mesurettes pour celui de diamètre triple. Après avoir constaté que quatre mesurettes sont nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre double, les élèves conjecturent souvent qu'il en faudra huit pour le cylindre de diamètre triple.

En faisant l’expérience, les participants observent – comme les élèves – que quatre et neuf mesurettes sont nécessaires pour remplir les cylindres de diamètres double et triple jusqu’à une même hauteur.

Comme pour le travail concernant la variation de la hauteur, il est demandé de placer, dans un tableau, les résultats obtenus pour la variation du diamètre. À nouveau, les liens découverts entre ces différentes valeurs doivent être mis en évidence afin d’essayer de compléter le tableau pour des diamètres quatre fois ou cinq fois plus grands que celui de départ.

Diamètre	Nbre de mes.
diam. 1 = 0,8 cm	1
diam. 2 = 1,6 cm	4
diam. 3 = 2,4 cm	9
diam. 4 = 3,2 cm	16
diam. 5 = 4 cm	25

$\boxed{\text{hauteur} = 3{,}5 \text{ cm}}$

Tableau 3 – Compléter le tableau pour des diamètres quatre fois ou cinq fois plus grands que celui de départ

Les liens mis en évidence dans le tableau peuvent être argumentés de diverses manières. Les élèves expliquent, par exemple, que deux mesurettes n’étaient pas suffisantes et l'illustrent par un dessin tel que celui-ci :

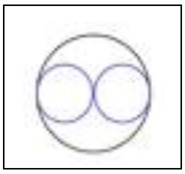


Figure 10 – Les élèves expliquent que deux mesurettes n’étaient pas suffisantes et l'illustrent par un dessin tel que celui-ci

Certains élèves font également le lien avec la formule correspondant au volume d’un cylindre mais ils sont peu nombreux.

Par contre, l’analogie avec des récipients parallélépipédiques à base carrée, comme dans la figure ci-dessous, permet d’observer à quoi correspondent les facteurs multiplicatifs 4, 9 et de conjecturer les nombres de verres qui seront nécessaires au remplissage d’autres cylindres.

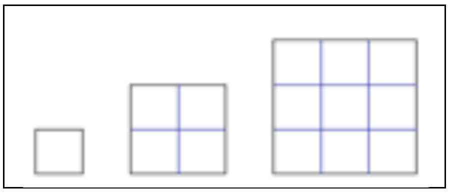


Figure 11 – L'analogie avec des récipients parallélépipédiques à base carrée permet d'observer à quoi correspondent les facteurs multiplicatifs 4, 9

Les résultats sont ensuite placés dans un graphique. Une synthèse est produite à partir des tableaux et graphiques construits au cours de l'activité. Elle met notamment en évidence des caractéristiques permettant de distinguer les phénomènes proportionnels des autres.

Voici les graphiques des deux situations rencontrées :

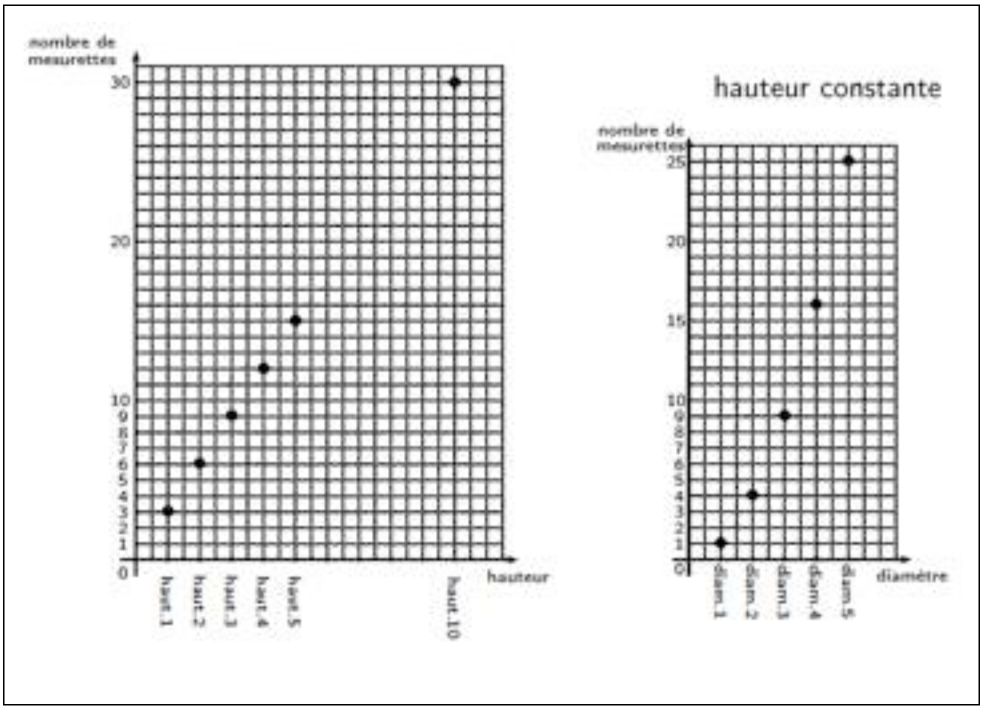


Figure 12 – Les graphiques de deux situations rencontrées

L'activité se complète en classe par une exploitation qui sera proposée à l'atelier mais que nous ne détaillons pas dans ce texte.

Parmi les récipients présentés, quels sont ceux pour lesquels le volume varie proportionnellement à la hauteur ? Cette photo rappellera aux participants ce qui aura été fait à l'atelier.

Figure 13 – Parmi ces récipients, quels sont ceux pour lesquels le volume varie proportionnellement à la hauteur ?

Cette *Math & Manip* est exploitée dans le cadre d'une thèse. Des premières impressions liées aux expérimentations dans les classes seront partagées et commentées avec les participants de l'atelier. Cependant, nous ne développerons pas ce point ici.

Math & Manip pour le lycée

Cette activité consiste à étudier les fonctions qui lient le volume d'un cône et sa hauteur. En fonction du niveau des élèves, l'objectif premier sera la découverte de la fonction cubique (en seconde) ou une introduction aux fonctions réciproques (en terminale) dans un contexte qui leur donne du sens. Au-delà du travail sur les fonctions, l'objectif est de réintroduire dans les cours de mathématiques une place pour la méthode expérimentale et un réel processus de modélisation.

La question de départ consiste à se demander jusqu'à quelle hauteur il faut remplir un verre conique pour le remplir à moitié, c'est-à-dire à la moitié de son volume. Les estimations sont bien souvent très en dessous de la réalité, l'expérience montre que les verres représentés ci-dessous doivent être remplis à 69 % de leur hauteur.

Figure 14 – Jusqu'à quelle hauteur faut-il remplir un verre conique pour le remplir à moitié

Pour obtenir une réponse théorique et mieux comprendre l'ensemble du phénomène, on procède à la graduation d'un cône. Les élèves versent le liquide par petites quantités en notant les quantités versées en ml et en repérant à chaque fois le niveau atteint sur la paroi. Ils devront ensuite remplir un tableau reprenant les volumes versés et les hauteurs correspondantes. Après avoir versé une première fois 5 ml, on constate que le niveau atteint presque le quart de la hauteur, on est loin d'imaginer à ce stade que le cône contient plus d'un quart de litre ! Comme les niveaux sont notés sur la paroi, il faudra déterminer la hauteur correspondant à chaque longueur de génératrice, soit par un procédé graphique, soit par calcul.

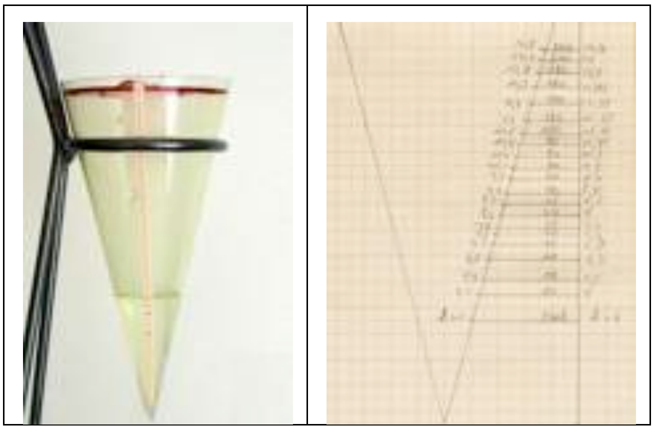


Figure 15 – Les niveaux sont notés sur la paroi, on peut déterminer la hauteur correspondant à chaque longueur de génératrice par un procédé graphique

L'étape suivante consiste à reporter dans un graphique ces « points expérimentaux ». Aux élèves de seconde, on demande de représenter le volume en fonction de la hauteur, pour faire apparaître des points d'une cubique. Aucune consigne en ce sens n'est donnée aux élèves de terminale, on espère donc voir apparaître aussi la fonction racine cubique.

Le modèle théorique est ensuite élaboré à partir de la formule du volume du cône, en utilisant la relation de proportionnalité entre le rayon et la hauteur. Pour terminer, on compare les résultats expérimentaux et les modèles théoriques, en confrontant tableaux et graphiques.

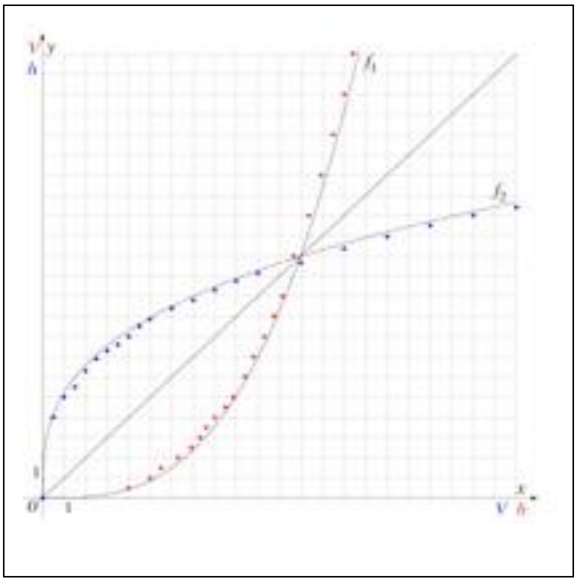


Figure 16 – Les fonctions réciproques, cubique et racine cubique, apparaissent…

Les fonctions réciproques, cubique et racine cubique, apparaissent dans ce contexte comme deux expressions d'un même phénomène, selon ce qu'on a choisi de placer en abscisse et en ordonnée.

Le modèle permet également de donner une réponse théorique au problème initial du verre à moitié plein : un cône idéal sera rempli à la moitié de son volume lorsque le liquide atteindra 79 % de sa hauteur. Les élèves peuvent trouver la réponse par les expérimentations sur leur cône, mais seul le modèle théorique permet de comprendre que ce rapport correspond à la racine cubique de ½.

Pour en savoir plus

Pour tout renseignement complémentaire concernant la recherche ou l'une des *Math & Manips* présentées, nous sommes à votre disposition. Vous pouvez prendre contact avec nous via l'adresse suivante :

info@crem.be

Pour plus d'information concernant les activités du CREM, consultez le site :

www.crem.be

REFERENCES

CREM (2002) *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., Verschaffel, L. (2007) *The illusion of linearity, from analysis to improvement, Mathematics*. Education Library, Springer, United Kingdom.

Guissard, M.-F., Henry, V., Agie, S., Lambrecht, P. (2010) Math & Manips. *Losanges* 7, (39-46).

Noël, G. (2008) D'assemblages au théorème de Thalès. *Losanges* 2 (56-61).

LES GRANDEURS AU COLLEGE

Jean-Paul MERCIER & Jean-Paul GUICHARD
IREM de Poitiers, groupe collège

Résumé – Un travail de recherche que nous avons entrepris depuis plusieurs années nous a amenés à une réorganisation de l'enseignement des mathématiques au collège qui donne une place centrale aux grandeurs. Nous allons voir pourquoi et comment. Puis nous présenterons ce qui est fait en vue de la formation des enseignants.

1. Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs

> Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs ; par exemple les distances, les surfaces, les vitesses, etc. (Bossut, 1784).

1.1. Comment nous en sommes arrivés là

Notre recherche s'est faite et se poursuit dans le cadre du groupe AMPERES (Apprentissages Mathématiques et Parcours d'Études et de Recherche pour l'Enseignement Secondaire) de l'INRP, devenu IFE, dont nous sommes partenaires en tant qu'IREM. Pour le groupe collège de l'IREM de Poitiers, nous sommes partis des deux questions centrales :

- Comment redonner sens et intérêt aux mathématiques enseignées ?
- Comment rendre fonctionnels les contenus mathématiques du programme du collège ?

Nous nous sommes placés dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) d'Yves Chevallard : concevoir l'apprentissage des mathématiques comme étude de questions pour lesquelles on cherche des réponses. Ce qui nous a amenés à rechercher quelles sont les grandes questions que se sont posées les mathématiques et pour lesquelles elles ont construit des outils ([1] : voir l'annexe 1 de nos publications). Cette recherche nous a fait prendre conscience que les mathématiques élémentaires se sont construites pour l'étude des grandeurs, comme le rappelle la citation de Bossut, et que c'est à travers les grandeurs qu'elles vivent dans notre société. Nous avons alors relevé le défi de partir des grandeurs pour enseigner les mathématiques au collège.

1.2. Une réorganisation des contenus des programmes

Dans les programmes de collège existe une rubrique *Grandeurs et mesures*. On peut dire, schématiquement, que nous avons pris cette quatrième rubrique du programme comme entrée, les trois autres rubriques devenant des outils pour l'étude des grandeurs.

Nous avons choisi d'étudier des grandeurs fondamentales, géométriques et numériques, très présentes dans la vie quotidienne. Pour la classe de 6$^{\text{ème}}$ ce sont les angles, les durées, les aires, les prix, les volumes et les longueurs qui constituent ainsi les six chapitres de notre année. A ce niveau, notre démarche est expérimentée depuis plus de quatre ans, et a donné lieu à la publication de six brochures (voir [1]) et à la mise à disposition de documents numériques pour la classe sur une plateforme à accès réservé. Elle permet de couvrir tout le programme de manière tuilée (voir annexe 2). Pour les classes de 5ème, 4ème et 3ème nous sommes en train de faire le choix des grandeurs à étudier, et d'expérimenter ces choix.

En 6ème, l'étude de chaque grandeur est structurée en 4 temps (voir annexe 1) centrés sur de grandes questions (comparer, partager, mesurer, calculer…) : ce sont les temps qui permettent de construire la grandeur, puis sa mesure. Quant aux modalités de l'étude elles se présentent sous la forme d'un parcours d'étude et de recherche (PER) dans lequel on cherche des réponses à quelques grandes questions à travers l'étude de situations impliquant ces questions. En voici deux exemples.

1.3. Les angles en classe de sixième (voir [1])

Illustrons, à grands traits, sur ce chapitre la forme que prend le parcours.

La première étude porte sur *Comment comparer des angles*. En partant d'une situation de transformation d'un essai de rugby, on est amené à définir ce qu'est un angle et à chercher des moyens de comparer les divers angles de tir possibles pour déterminer le meilleur : le plus grand. La définition d'un angle comme ouverture va permettre de trouver et justifier les premières méthodes permettant de répondre à la question comment comparer des angles : par superposition ou par mesure d'un écart. Les outils mis en œuvre sont le papier calque, la fausse équerre, la règle graduée, le compas. Nous sommes ainsi capables de dire si deux angles sont égaux, ou si l'un est plus grand que l'autre : c'est la première étape dans la construction d'une grandeur (voir annexe 1). L'étude d'objets de la vie ayant des axes de symétrie (charpentes, cerfs-volants…) et la construction de leurs représentations permettent de travailler le codage des angles égaux et leur reconnaissance. La symétrie et la construction des figures de base du programme vont trouver ici un lieu de vie.

La deuxième étude porte sur *Comment partager des angles*. Le partage en deux de l'angle, qui a été vu implicitement dans les figures symétriques, donne des méthodes diverses de construction de la bissectrice. Et à travers l'étude et la construction de divers objets (éventail, spirale, théâtre antique, rose des vents, polygones réguliers…) les notions de fraction et de multiple d'un angle vont prendre sens. Après cette deuxième étape de la construction d'une grandeur, on peut définir la mesure d'un angle par comparaison avec un angle unité (voir annexe 1). La construction d'un outil de mesure en découle : l'existence et la configuration du rapporteur prennent sens.

La troisième étude porte sur *Comment mesurer des angles.* Il va falloir maintenant savoir utiliser un rapporteur pour mesurer et construire des angles de mesure donnée pour :

- mesurer une longueur inaccessible (largeur d'une baie…),
- s'orienter sur mer ou dans les airs (prendre le cap, tracer sa route…),
- construire des figures (trajets de robots, polygones réguliers…).

Étudier ainsi la grandeur *angle* permet de traiter plus de la moitié de la partie géométrie du programme, en montrant l'utilité et la fonctionnalité des connaissances mathématiques, qui comme on l'aura remarqué ne se limitent pas à la géométrie : diviseurs, multiples, fractions, division euclidienne sont aussi présents. Les situations choisies permettent des questionnements riches, et informent les élèves sur le monde d'hier et d'aujourd'hui.

1.4. Les prix en classe de sixième

Notre parcours sur les prix consiste en l'étude de trois grandes questions :

- Comment comparer des prix ?
- Comment partager des prix ?
- Comment calculer un prix ?

Pour étudier ces questions nous choisissons des situations en lien avec ces questions dont l'étude réclame les connaissances et techniques au programme qui vont, soit être introduites à ce moment-là, soit être réutilisées et renforcées. Nous imposons à ces situations d'être en prise avec la vie présente ou passée des hommes ([1] : voir les banques de situations de nos publications).

Étude 1 : comparer des prix (comparaison absolue)

Quel est le prix le moins cher ? Le salaire le plus élevé ? L'écart de prix ?

Il s'agit de comparer des prix de carburants dans différents lieux (avec des centièmes et des millièmes, voire plus pour le fioul domestique), le prix du lait à la production suivant les mois de l'année, les années, les lieux, des prix promotionnels…

Voici, sous forme résumée, ce qu'une telle étude permet d'institutionnaliser, sachant que d'autres connaissances auront pu être mobilisées, comme les graphiques ou les tableaux par exemple.

- La monnaie.
- Le format.
- La méthode pour comparer des prix :
  Règle 1 : pour pouvoir comparer des prix il faut qu'ils soient écrits dans le même format.
  Règle 2 : on compare les unités, les unes après les autres, en commençant par la plus grande.
- La référence :
  Règle 3 : pour comparer les prix de 2 produits identiques, il faut qu'il y en ait le même nombre ou la même quantité.
- L'écriture décimale :
  a) Position et valeur des chiffres.
  b) Multiplier ou diviser par 10, 100, 1000… (on peut utiliser une bande calque à déplacer).

Étude 2 : partager des prix (comparaison relative)

Combien de fois plus cher ? Quel rapport entre 2 salaires ? Quel prix pour une même quantité ? Quel prix à l'unité ?

Il s'agit de pouvoir comparer des prix pour lesquels les écarts sont importants, c'est-à-dire où la comparaison absolue ne signifie pas grand-chose, voire même rien : salaires à Alexandrie au IIIème siècle avant J.-C., PIB de divers pays, comparaison des prix du même type de produit dans plusieurs marques. Cela revient à savoir combien de fois le prix le plus petit est contenu dans le plus grand : diviseurs, multiples, rapports, quotient, division… Mais on peut vouloir comparer le prix de produits identiques ou analogues présentés dans des conditionnements différents, ou vérifier les informations figurant sur des promotions. Il va falloir alors fractionner les prix pour les ramener à une même unité : division, proportionnalité, valeurs approchées…

Voici, sous forme résumée, ce qu'une telle étude permet d'institutionnaliser, sachant que d'autres connaissances auront pu être mobilisées.

- Multiple et fraction d'un prix : on cherche combien de fois un prix est contenu dans un autre. Bilan : si le prix 1 = n fois le prix 2, alors le prix 2 = 1/ n du prix 1, et le nombre de fois n s'obtient en divisant le prix 1 par le prix 2.
- Rapport entre deux prix :
  Définition : le rapport entre deux prix est le nombre de fois que l'un est contenu dans l'autre
- Prix de l'unité (ou de la part)
  <u>1er cas</u> : on a le prix de plusieurs objets identiques, et on cherche le prix d'un objet. Méthode 1 : multiplication à trou ; méthode 2 : division. Arrondis
  Bilan : si $a \times$ prix = P, alors prix = $P : a$ (la division est l'opération inverse de la multiplication).
  <u>2ème cas</u> : on a le prix d'une certaine quantité et on veut savoir le prix de l'unité. Méthode 1 : quotient ; méthode 2 : proportionnalité.

Étude 3 : calculer des prix

Quelle remise ? Combien vaut ce lot ? Quel prix vais-je payer ?

Les situations où l'on rencontre ces questions sont légion dans la vie courante : soldes, paiements en plusieurs fois, prix au kg, offres promotionnelles, prix de revient, prix TTC…

Voici, sous forme résumée, ce qu'une telle étude permet d'institutionnaliser, sachant que d'autres connaissances auront pu être mobilisées.

- <u>Trouver une fraction de prix</u> : méthodes 1) proportionnalité ; 2) division.
  Bilan : pour calculer une fraction a/b d'un prix P, il y a 2 méthodes : 1) on divise P par b pour trouver le prix d'une part, et on multiplie le résultat par a pour avoir le prix des a parts : a/b de $P = (P : b) \times a$; 2) on divise a par b pour avoir la valeur de la fraction pour 1 €, et on multiplie le résultat par P pour avoir la valeur de la fraction pour P € : a/b de $P = (a : b) \times P$.
- <u>Multiplier des nombres décimaux :</u> 1er cas : multiplier un nombre décimal par un nombre entier ; 2ème cas : multiplier un nombre décimal par un nombre décimal.
  Bilan : pour le calcul posé, on peut faire la multiplication sans tenir compte des virgules, puis on place la virgule au bon endroit dans le résultat. Pour cela on a 2 méthodes : 1) on calcule un ordre de grandeur du résultat ; 2) on compte le nombre de chiffres après la virgule dans chacun des deux nombres que l'on multiplie, on les ajoute, et on compte dans le résultat le même nombre de chiffres après la virgule que celui que l'on vient de trouver.
- <u>Multiplier par un nombre plus petit que 1</u>.
- <u>Ordre de grandeur</u>.
- <u>Valeurs approchées</u>.

Étudier ainsi la grandeur *prix* permet de traiter la quasi-totalité des parties 1 & 2 du programme (Organisation et gestion de données ; Fonctions Nombres et Calculs), en montrant l'utilité et la fonctionnalité des connaissances mathématiques qui y sont présentes. Les situations choisies permettent de développer l'esprit critique et un questionnement riche, tout en s'informant sur le monde d'hier et d'aujourd'hui.

1.5. Des points forts de notre organisation

Notre entrée par l'étude des grandeurs fait que les connaissances du programme et des programmes antérieurs sont vues plusieurs fois dans les différents « chapitres », dans des contextes différents : donc point besoin de révisions, et possibilité d'un apprentissage progressif et différencié tout au long de l'année. C'est de fait un enseignement « spiralé », qui satisfait de plus aux idées forces du socle commun.

Les situations étudiées renvoient à une grande question, sans guidage : le choix par l'élève des méthodes et techniques est ouvert. Ce sont donc des compétences qui sont travaillées tout au long de l'étude.

Les connaissances du programme sont construites comme des outils permettant d'étudier des situations pour la plupart issues de la vie. Elles apparaissent donc comme fonctionnelles et utiles.

Le choix de l'organisation de l'année (grandeurs étudiées et ordre d'étude), et le choix des situations d'étude est laissé à la discrétion des enseignants : cette liberté dans l'organisation didactique est pour nous fondamentale.

C'est une démarche intégratrice de nombreux sujets qui sont souvent traités pour eux-mêmes, au détriment d'heures de la discipline : métiers, interdisciplinarité, ASSR…

Conclusion

> L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs. (Chevallard, Bosch, 2002)

Ce que nous proposons est une autre vision des mathématiques et de leur apprentissage : on n'entre pas par des contenus mais par des thèmes et des situations dont l'étude nécessite la mise au point de notions, connaissances, savoir faire, techniques mathématiques, c'est-à-dire les contenus dont on vise l'apprentissage. Chaque thème fait l'objet d'une étude à travers un parcours orienté par de grandes questions étudiées à travers des situations où vivent ces questions. Il s'ensuit une formation de l'élève à l'étude de tâches complexes.

Peut-on organiser, comme nous l'avons fait en $6^{\text{ème}}$, le programme de chaque niveau d'enseignement en n'étudiant que des grandeurs ? Et lesquelles ? C'est la réponse à cette question à laquelle nous travaillons actuellement.

2. Formation des enseignants

Depuis 2008 nous organisons des stages de formation continue dans l'académie de Poitiers pour des collègues de collège désireux de mettre en œuvre notre démarche d'un enseignement à partir des grandeurs.

Voici le libellé des stages que nous avons animés.

- « Redynamiser l'enseignement des maths en 6ème » (2008-2009), 4 stages à public désigné de 2 jours, 15 participants par stage.
- « Redynamiser l'enseignement des maths en 6ème » (2009-2010), 4 stages à public désigné de 2 jours, 15 participants par stage.
- « Redynamiser l'enseignement les maths en 6ème autour de questions, niveau 1 » (2010-2011), 1 offre de stage de 2 jours, 15 participants. La compression des moyens de formation continue dans l'académie n'a pu permettre de mener ce stage différé prioritairement à l'année suivante, ainsi que son complément en niveau 2, sous les intitulés suivants.
- « Les grandeurs 5ème à 3ème : des questions aux compétences » (2011-2012), 1 offre de stage de 2 jours, 15 participants ayant déjà suivi l'un des stages des années précédentes.
- « Les grandeurs – 6ème : des questions aux compétences » (2011-2012), 1 offre de stage de 2 jours, 30 participants.

Depuis ces stages ont eu lieu et sont reconduits dans un plan pluriannuel.

Les objectifs de ces stages de formation sont de proposer aux participants un moyen de motiver l'enseignement des mathématiques au collège, et de les aider à structurer cet enseignement. La proposition qui leur est faite est de l'organiser autour de grandeurs et de grandes questions. C'est un changement profond de point de vue qui peut difficilement se faire en 12 heures de stage. C'est la raison pour laquelle nous proposons des stages de *niveau 2*, pour les collègues ayant déjà participé à ceux de *niveau 1*.

Pour ceux qui veulent expérimenter notre démarche, nous avons publié, au niveau 6ème, six brochures (voir [1]) ; en lien avec chacune d'elles, il y a la possibilité de se connecter à une plateforme mise en place sur le site Web de notre IREM et d'y télécharger des documents pour organiser son cours : diaporamas d'introduction, banque de situations, sujets de devoirs maison et de contrôle, diaporamas de calcul mental, études de situations. Si la plupart des documents numériques correspondent à ceux des brochures papier, certains sont rajoutés, provenant soit de notre groupe collège de l'IREM de Poitiers, soit de collègues qui mettent en œuvre notre démarche. Nous avons aussi des échanges de courriels avec certains d'entre eux qui nous soumettent leurs questions et leurs craintes, mais nous font part aussi de leur satisfaction.

Enfin, nous essayons de faire partager notre point de vue en animant des ateliers aux Journées régionales et nationales de l'APMEP, et dans des colloques, mais aussi en écrivant des articles dans la revue Repères IREM et dans celles de l'APMEP (Bulletin vert et PLOT).

Nous continuons à proposer des stages en formation continue, et nous essayons de sensibiliser les professeurs de l'école primaire à notre démarche, car il nous semble que la place des grandeurs dans notre enseignement, de l'école primaire à l'enseignement supérieur, mérite d'être reconsidérée tant d'un point de vue épistémologique, que d'un point de vue didactique et écologique. *La mesure des grandeurs* de Lebesgue et *Les éléments de géométrie* de Clairaut (voir [2]) devraient être, de notre point de vue, deux références incontournables de la formation des professeurs du primaire et du secondaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Nos publications

Vous trouverez le détail de la mise en œuvre de notre démarche dans les 6 fascicules parus et à commander à l'IREM de Poitiers (2 rue Michel Brunet, Bât. B 24, 86022 POITIERS Cedex, secrirem@math.univ-poitiers.fr, http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/) :

Fascicule 1 - Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les ANGLES

Fascicule 2 - Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les DURÉES

Fascicule 3 - Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les AIRES

Fascicule 4 - Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les PRIX

Fascicule 5 - Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les VOLUMES

Fascicule 6 - Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les LONGUEURS

[2] Des références

Barbin, É. (2007) L'arithmétisation des grandeurs. *Repères IREM, 68*, 5-20. (Article en ligne sur le Portail des IREM).

Charnay, R. (2006) Quelle culture mathématique partagée à la fin de la scolarité obligatoire ? *Repères IREM, 64*, 49-61 (Article en ligne sur le Portail des IREM).

Chevallard, Y. (2007) Les mathématiques à l'école. *Bulletin APMEP 471*, 439-461.

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2000) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x, 55*, 5-32.

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2000) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x, 59,* 43-76.

Clairaut, A. Éléments de Géométrie de Clairaut. Lambert et Durand, Paris, 1741. Réédition : J. Gabay, Paris, 2006. Fac simile de l'édition de 1753, éd. Siloë, Laval, 1987. Préface publiée en 1983 dans *Petit x, 2*, 77-80.

Clairaut part de la vie des hommes pour organiser le corpus géométrique classique autour de deux questions fondamentales : Comment calculer des aires ? Comment calculer des volumes ?

ÉduSCOL (2007) Grandeurs et mesures au collège. Mathématiques, Ressources pour les classes du collège. Article en ligne sur le site ÉduSCOL.

Grandeurs. N° spécial. Repères-IREM n° 68, 2007. (Articles en ligne sur le Portail des IREM).

Lebesgue, H. La mesure des grandeurs. *Monographies de L'Enseignement Mathématique n° 1 Genève, 1935*. Réédition : A. Blanchard, Paris, 1975.

> Il faut qu'en plus de la définition du nombre, c'est-à-dire de la mesure des longueurs, on traite d'autres mesures pour faire sentir l'extraordinaire précision qu'apporte le nombre dans les questions où on l'emploie.
> Mais l'étude des aires et des volumes a une utilité plus haute qu'il faut envisager : elle fait comprendre comment, pour des fins pratiques, les hommes ont pu être conduits à construire la géométrie et elle justifie leur effort.

Pressiat, A. (2009). La place des grandeurs dans la construction des mathématiques. *APMEP, Bulletin 483*.

Rouche, N. (1992) Le sens de la mesure « Des grandeurs aux nombres rationnels ». *Collection Formation,* Hatier.

Rouche, N. (1994) Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères IREM, 15*, 25-36 (Article en ligne sur le Portail des IREM).

Rouche, N. (2006) *Du quotidien aux mathématiques : nombres, grandeurs, proportions.* Paris : Ellipses.

Annexe 1. Les 4 temps de l'étude d'une grandeur

<table>
<tr><th colspan="5">Une organisation de l'année de sixième autour des grandeurs
Quatre temps pour « construire des savoirs »</th></tr>
<tr><td>Le premier temps est celui de la définition</td><td colspan="4">Peut-on toujours comparer deux grandeurs de même espèce, même sur des objets différents ? Peut-on dire que des grandeurs sont égales même si les objets sont différents ? Peut-on toujours ajouter deux grandeurs de même espèce ?
C'est lieu de l'égalité, de l'inégalité, de l'addition.
Les définitions et les techniques se dégagent des études. Elles permettent de comparer ou d'ajouter des grandeurs de même espèce.</td></tr>
<tr><td>Le second temps est celui du partage et de la duplication</td><td colspan="4">Peut-on toujours dire d'un objet qu'il est n fois plus grand qu'un autre, n fois moins grand relativement à la grandeur ?
C'est le lieu de la comparaison relative, de la notion de quotient et de rapport, de partage et de multiple.
Les définitions et les techniques se dégagent des études. Elles permettent de comparer de façon relative les grandeurs.</td></tr>
<tr><td>Le troisième temps est celui de la mesure et de la formule</td><td colspan="4">La grandeur est maintenant construite. Existe-t-il un système qui permet de mesurer cette grandeur ?
C'est le lieu de la mesure.
Mesurer c'est comparer une grandeur à une unité usuelle. Les définitions et les techniques s'enrichissent pour résoudre les mêmes problématiques qu'au départ. Les formules se démarquent particulièrement comme outil de résolution.</td></tr>
<tr><td>Le quatrième temps est celui de la tabulation, des variations</td><td colspan="4">Peut-on étudier les variations de la grandeur en fonction d'une autre ? Peut-on optimiser une mesure ?
C'est le lieu des tableaux, des graphiques, des formules algébriques, du fonctionnel.
C'est en se reposant sur la construction des grandeurs que se dégagent des techniques pour les études fonctionnelles.</td></tr>
<tr><td></td><td>Questionnement sur la comparaison</td><td>Questionnement sur le calcul</td><td>Questionnement sur la construction</td><td>Questionnement sur le dénombrement</td></tr>
</table>

Annexe 2. Couverture du programme de la classe de sixième

1. Organisation et gestion de données. Fonctions

Connaissances	Capacités	Chapitres et moments concernés
1.1. **Proportionnalité** Propriété de linéarité. Tableau de proportionnalité Pourcentages.	- Reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté : - utilisation d'un rapport de linéarité, entier ou décimal, - utilisation du coefficient de proportionnalité, entier ou décimal, - passage par l'image de l'unité (ou « règle de trois »). **Utilisation d'un rapport de linéarité, d'un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme de quotient.* - Appliquer un taux de pourcentage.	2-Prix T2 T3 T4 3-Aires T3 T4 4- Durées T3 T4 5-Volume T3 T4 6-Longueur T3 T4
1.2. Organisation et représentation de données Représentations usuelles : tableaux. Repérage sur un axe. Représentations usuelles : - diagrammes en bâtons, - diagrammes circulaires ou demi-circulaires, - graphiques cartésiens.	- Lire, utiliser et interpréter des données à partir d'un tableau. - Lire interpréter et compléter un tableau à double entrée. ** Organiser des données en choisissant un mode de présentation adapté :* *- tableaux en deux ou plusieurs colonnes,* *- tableaux à double entrée.* - Lire et compléter une graduation sur une demi-droite graduée, à l'aide d'entiers naturels, de décimaux, de fractions simples 1/2, 1/10, 1/4, 1/5 ** ou de quotients (placement exact ou approché).* - Lire, utiliser et interpréter des informations à partir d'une représentation graphique simple.	2-Prix T1 T4 4-Durées T1 T2 T3 T4 3-Aires T4 5-Volume T4 6-Longueur T1 à T4

2. Nombres et Calculs

Connaissances	Capacités	Chapitres et moments concernés
2.1 Nombres entiers et décimaux Désignations. Ordre. ** Valeur approchée décimale*	- Connaître et utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un entier ou d'un décimal. - Associer diverses désignations d'un nombre décimal : écriture à virgule, fractions décimales. - Comparer deux nombres entiers ou décimaux, ranger une liste de nombres. - Encadrer un nombre, intercaler un nombre entre deux autres. - Placer un nombre sur une demi-droite graduée. - Lire l'abscisse d'un point ou en donner un encadrement. **Donner une valeur approchée décimale (par excès ou par défaut) d'un décimal à l'unité, au dixième, au centième près.*	2- Prix 3-Aire T2 T3 T4 4- Durées 5-Volume T3 T4 6-Longueur T2 T3 T4
2.2 Opérations Addition, soustraction, multiplication et division. Multiples et diviseurs. Sens des opérations. Techniques élémentaires de calcul. Ordre de grandeur.	- Connaître les tables d'addition et de multiplication et les résultats qui en dérivent. - Multiplier ou diviser un nombre par 10, 100, 1000. ** Multiplier un nombre par 0,1 ; 0,01 ; 0,001.* - Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 2, 5 et 10. - *Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 3, 4 et 9.* - Choisir les opérations qui conviennent au traitement de la situation étudiée. - Savoir effectuer ces opérations sous les diverses formes de calcul : mental, à la main ou instrumenté. - Connaître la signification du vocabulaire associé : somme, différence, produit, *terme, facteur, dividende, diviseur, quotient, reste.* - Établir un ordre de grandeur d'une somme, **d'une différence*, d'un produit.	1-Angle T3 2-Prix 3-Aires T2 T3 T4 4- Durées 5-Volume T3 T4 6-Longueur T2 T3 T4

2.3 Nombres en écriture fractionnaire Écriture fractionnaire. ** Quotient exact.* ** Un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre.*	** Interpréter a/b comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire comme le nombre qui multiplié par b donne a.* ** Placer le quotient de deux entiers sur une demi-droite graduée dans des cas simples.* - Prendre une fraction d'une quantité. ** Il s'agit de faire comprendre la modélisation de ce type de problème par une multiplication.* ** Reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre.*	1-Angle T2 T3 2-Prix T2 T3 T4 3-Aires T2 T3 T4 4- Durées T2 T3 T4 5-Volume T2 T3 T4 6-Longueur T2 T3 T4

3. Géométrie

Connaissances	Capacités	Chapitres et moments concernés
3.1. Figures planes Notions de parallèle, de perpendiculaire.	- Tracer, par un point donné, la perpendiculaire ou la parallèle à une droite donnée. - *Utiliser différentes méthodes.* - Reporter une longueur. ** Reproduire un angle.*	1-Angle T1 T2 T3 2- Aire T1 T2 T3 3-Volume T1 T2
Cercle.	- Savoir que, pour un cercle : • tout point qui appartient au cercle est à une même distance du centre ; • tout point situé à cette distance du centre appartient au cercle. - Construire, à la règle et au compas, un triangle connaissant les longueurs de ses côtés.	1-Angle T1 T2 T3 2- Aire T1 T2 T3 6- Longueur
Propriétés des quadrilatères usuels.	- Connaître les propriétés relatives aux côtés, aux angles, aux diagonales pour le rectangle, le carré et le losange.	1-Angle T1 T2 T3 2- Aire T1 T2 T3 3-Volume T1 T2 6-Longueur
	- Connaître les propriétés relatives aux	1-Angle T1 T2 T3

Propriétés et construction des triangles usuels. ** Médiatrice d'un segment.* ** Bissectrice d'un angle.* Constructions géométriques.	côtés et aux *angles des triangles suivants : triangle isocèle, triangle équilatéral, triangle rectangle. - Utiliser ces propriétés pour reproduire ou construire des figures simples. - Construire une figure simple à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. ** Connaître et utiliser la définition de la médiatrice ainsi que la caractérisation de ses points par la propriété d'équidistance.* ** Connaître et utiliser la définition de la bissectrice.* - *Utiliser différentes méthodes pour tracer* • *la médiatrice d'un segment ;* • *la bissectrice d'un angle.* Reproduction, construction de figures complexes.	2- Aire T1 T2 T3 3-Volume T1 T2 6-Longueur 1- Angle T2 4- durées 1-Angle T1 T2 T3 2- Aire T1 T2 T3 3-Volume T1 T2 6-Longueur
3.2 Symétrie orthogonale par rapport à une droite (symétrie axiale)	- Construire le symétrique d'un point, d'une droite, d'un segment, d'un cercle (que l'axe de symétrie coupe ou non la figure). - Construire ou compléter la figure symétrique d'une figure donnée ou de figures possédant un axe de symétrie à l'aide de la règle (graduée ou non), de l'équerre, du compas, * *du rapporteur*. - Effectuer les tracés de l'image d'une figure par symétrie axiale à l'aide des instruments usuels (règle, équerre, compas).	1- Angle 3- Aire 6- Longueur

3.3 Parallélépipède rectangle : patrons, représentation en perspective	- Fabriquer un parallélépipède rectangle de dimensions données, à partir de la donnée du dessin de l'un de ses patrons.
	- Reconnaître un parallélépipède rectangle de dimensions données à partir
	    - du dessin d'un de ses patrons,
	    - d'un dessin le représentant en perspective cavalière.
	- Reconnaître dans une représentation en perspective cavalière du parallélépipède rectangle les arêtes de même longueur, les angles droits, les arêtes, les faces parallèles ou perpendiculaires.
	- *Dessiner ou compléter un patron d'un parallélépipède rectangle*
		5-Volume

4. Grandeurs et mesures

Connaissances	Capacités	Chapitres et moments concernés
4.1 Longueurs, masses, durées	- Effectuer, pour les longueurs et les masses, des changements d'unités de mesure. - Comparer géométriquement des périmètres. - Calculer le périmètre d'un polygone. - Connaître et utiliser la formule donnant la longueur d'un cercle. - Calculer des durées, calculer des horaires.	6-Longueur 2-Prix 4-Durées 3-Aires 5-Volume
4.2 Angles	- *Comparer des angles sans avoir recours à leur mesure.* ** Utiliser un rapporteur pour :* - *déterminer la mesure en degré d'un angle,* - *construire un angle de mesure donnée en degré.*	1-Angle 4- Durées
4.3 Aires : mesure, comparaison et calcul d'aires	- Comparer géométriquement des aires. - Déterminer l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple. - Différencier périmètre et aire. - Calculer l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont données. - Connaître et utiliser la formule donnant l'aire d'un rectangle. - Calculer l'aire d'un triangle rectangle, **d'un triangle quelconque dont une hauteur est tracée.* - Connaître et utiliser la formule donnant l'aire d'un disque. - Effectuer pour les aires des changements d'unités de mesure.	3- Aire 5- Volume 6-Longueur
4.4 Volumes	- Déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle en se rapportant à un dénombrement d'unités,* *en utilisant une formule.* - Connaître et utiliser les unités de volume et les relier aux unités de contenance. - Savoir que 1 L = 1 dm3. - *Effectuer pour les volumes des changements d'unités de mesure.*	5- Volume

Remarque

Les grandeurs de cette quatrième partie sont choisies comme objet d'étude pour l'ensemble du programme. Les notions et techniques géométriques, opératoires, graphiques des trois autres parties apparaissent alors comme des outils pour étudier ces grandeurs. Elles réapparaissent régulièrement dans l'étude de chaque grandeur, chaque fois que cela est pertinent, ce qui renforce petit à petit leur maîtrise.

RELATIONS ENTRE GRANDEURS, NOMBRES ET OPERATIONS EN PRIMAIRE

Christine CHAMBRIS[1]
Laboratoire de didactique André Revuz - Université Paris-Diderot
IUFM - Université de Cergy-Pontoise.

Introduction

Préliminaire en guise d'introduction

Les questions relatives au thème « grandeurs » posées par les organisateurs du 18e colloque de la CORFEM sont les suivantes :

- Peut-on préciser comment les grandeurs ont été réintroduites dans des domaines de savoir et dans lesquels ?
- Quels objets mathématiques ont-ils été influencés par la prise en compte des grandeurs ?
- Quelles sont les difficultés des élèves ? Quelles sont les difficultés d'enseignement ? Quelles situations peuvent être mises en place sur l'enseignement des grandeurs en lien avec cet objet ?

Il se trouve que ces questions recouvrent mes questions de recherche, à la différence près qu'elles concernent le second degré et que mes recherches sont centrées sur le premier. J'ai donc fait l'hypothèse, avec les organisateurs du colloque, que mon expertise sur les grandeurs en primaire (Chambris 2012 a, 2010, 2009, 2008, 2007) pouvait nourrir la réflexion actuelle sur la *réintroduction* des grandeurs au secondaire.

Ma connaissance de l'enseignement secondaire est assez limitée. Pourtant, deux indices obtenus par une première prise d'information, grossière, sur les grandeurs dans le secondaire me porte à croire que certains problèmes d'enseignement sont communs aux deux « ordres » d'enseignement :

- le découpage des programmes mathématiques du secondaire,
- une partie des questions mises en avant dans ce colloque sont problématiques… en primaire.

Je vais donc essentiellement essayer de montrer comment et pourquoi certaines des questions du colloque se posent dans l'enseignement primaire et les réponses que j'y apporte dans mes travaux de recherche. Dans la mesure où certaines réponses montrent une situation assez peu satisfaisante en primaire, je ferai aussi part de réflexions pour envisager des évolutions – en primaire. J'ai centré cette communication sur les points qui me semblent particulièrement adaptés pour une réflexion sur l'enseignement secondaire.

[1] cchambris@free.fr

Avant de m'attaquer aux questions du colloque, je vais présenter les limites de ce que j'étudie – qui constituent aussi un cadre pour les limites de cette communication – puis mes références théoriques. Je m'intéresse donc aux relations des grandeurs aux objets numériques (nombres, opérations, calcul, proportionnalité…) et non aux objets géométriques. Mes techniques d'investigation sont essentiellement des études curriculaires (contenus d'enseignement) et l'étude des connaissances des élèves de fin de primaire. Globalement, mon travail vise à comprendre les relations actuelles entre les grandeurs, les nombres et les opérations à l'école primaire et aussi à envisager d'autres possibles. Je considère que ces relations sont le produit de modifications de plusieurs ordres qui ont eu lieu tout au long du 20e siècle : dans les mathématiques savantes, à l'école et dans les pratiques de la vie courante pour le mesurage. Nombres de modifications se sont cristallisées au moment de la réforme des mathématiques modernes (années 1970). Aussi pour comprendre l'état actuel des grandeurs, de leurs relations avec les autres objets d'enseignement, paraît-il nécessaire de s'intéresser à la période de la réforme des mathématiques modernes. Et, pour comprendre ce qui s'est passé au moment de la réforme, paraît-il nécessaire de caractériser la situation antérieure. Mon projet consiste alors à mettre en évidence l'organisation curriculaire des grandeurs, nombres et opérations en primaire, avant la réforme, les modifications que la réforme y a introduites et leurs effets à long terme sur l'enseignement et l'apprentissage pour ensuite envisager des alternatives.

Une motivation pour cette contribution est aussi celle de la continuité des apprentissages entre le primaire et le secondaire. A minima, elle informe en effet les formateurs du secondaire sur certains aspects de l'enseignement en primaire actuel.

Cadre théorique

Dans mes recherches, j'utilise principalement le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) développée par Chevallard (1997). Dans ce cadre, *l'écologie des savoirs* permet d'étudier les conditions de vie des objets d'enseignement : comment ils vivent et avec qui, comment ils naissent et meurent. Retenons qu'en règle générale plus un objet est relié à d'autres, mieux il vit !

La *praxéologie* est une notion centrale dans la TAD. Une praxéologie permet de décrire une pratique au moyen de quatre composantes complémentaires, à savoir un type de tâches c'est-à-dire un ensemble de problèmes qui se ressemblent en ce sens qu'ils peuvent être traités à l'aide d'un même type de techniques, la technique pouvant être justifiée à l'aide d'une technologie, discours justificatif qui est lui-même justifié par la théorie. La théorie n'apparaît parfois qu'à l'état de traces, dans un état évanouissant. Les agencements des types de tâches et des techniques via des technologies communes sont les outils-clés pour décrire les relations entre les objets d'enseignement, c'est-à-dire l'écologie des praxéologies.

J'en viens aux questions posées par les organisateurs du colloque et à leur « transposition » dans le cadre du primaire.

Les questions

L'exposé des questions du colloque est précédé de quelques lignes qui les mettent en perspective :

> Pendant de nombreuses années, les grandeurs ont été peu présentes dans les programmes de collège et de lycée. Elles ont été réintroduites en 2005 (à la suite des programmes de 2002 de l'école primaire) et ce, de façon importante, puisque qu'une rubrique du programme s'intitule « Grandeurs et mesures ».

La première question est alors : « Peut-on préciser comment les grandeurs ont été **réintroduites** dans des domaines de savoir et dans lesquels ? » (nous soulignons).

À première vue, il existe une différence majeure entre les domaines *grandeurs et mesures* du primaire et du secondaire. Il n'est en effet pas question de parler d'une réintroduction des grandeurs en primaire. Contrairement à celui du secondaire, le domaine *mesures* de primaire naît en 1970. Pourtant, cette différence peut-être fondamentale au regard des questions du colloque est sans doute moins importante qu'il n'y paraît de prime abord, en tout cas si on prend une échelle de temps assez longue. Plus précisément, l'existence d'un domaine *mesure* en primaire pendant 35 ans et son inexistence dans le secondaire dans la même période sont très probablement deux manifestations différentes du même phénomène. Une manifestation de ce phénomène pour le primaire est paradoxalement la création du domaine *mesure* dans le programme de 1970 de mathématiques.

Pour qu'elle résonne avec l'école primaire, je transforme donc d'abord la première question de la façon suivante : peut-on préciser comment, en *1970*, les grandeurs ont été *exclues* des différents domaines de savoir et desquels ? Et je la prolonge comme suit : peut-on préciser, comment *à partir des années 1980*, les grandeurs ont été *réintroduites* dans des domaines de savoir et dans lesquels ?

Parallèlement, je transforme la deuxième question : quels objets mathématiques ont-ils été influencés par l'*exclusion* et la *réintroduction* des grandeurs ?

Pour le dernier aspect, je ne retiens que les deux premières questions : quelles sont les difficultés des élèves ? Quelles sont les difficultés d'enseignement ? Cet aspect sera spécifique à un objet particulier : l'étude du système métrique et son pendant du côté des nombres, la numération de position.

Ce texte comprend ainsi trois parties qui correspondent à un découpage temporel. D'abord, j'étudie comment, en primaire, les grandeurs ont été exclues en 1970 de différents domaines de savoir et quels sont les objets qui ont été influencés. J'indique aussi des conséquences possibles en termes de difficultés d'enseignement. Ensuite, j'étudie comment les grandeurs ont été réintroduites à partir de 1980 et quels sont les objets qui ont été influencés. Enfin, je m'intéresse plus précisément à certaines difficultés actuelles d'enseignement et d'apprentissage plus particulièrement relatives au système métrique (et à la numération !).

1970 et avant : les grandeurs, comment et avec qui ?

Pour commencer, je vais donc non pas évoquer la « réintroduction » des grandeurs mais plutôt leur exclusion, ou plus précisément une série de phénomènes qui se manifestent dans le programme de 1970 de primaire. Que peut-on donc dire de l'exclusion des grandeurs en 1970 ? Quels sont les objets concernés ? En termes d'écologie des savoirs, quelles conséquences cet événement peut-il avoir ?

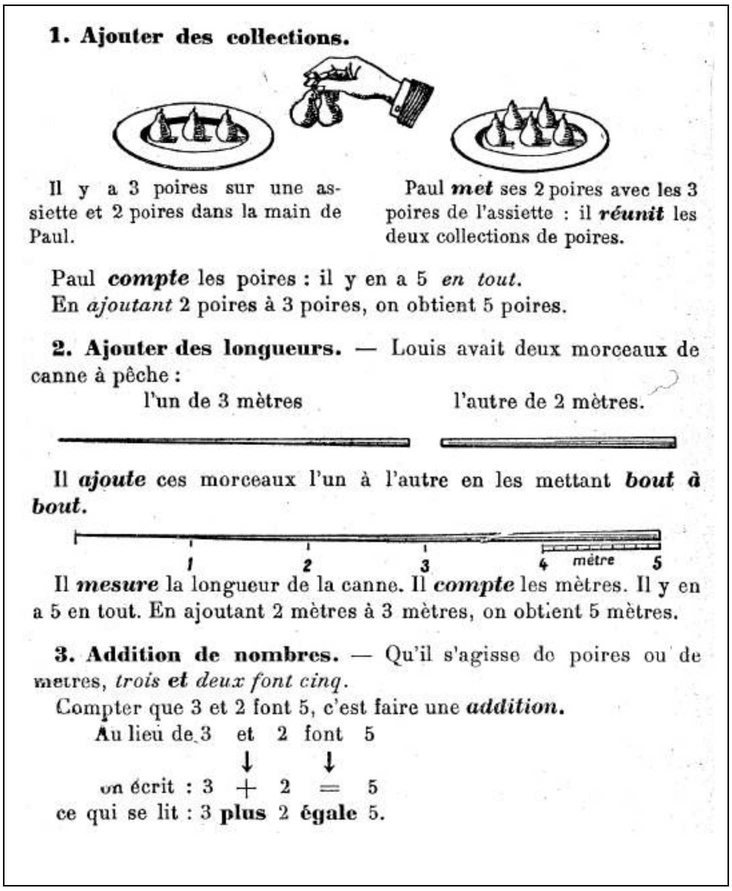
Avant 1945 : une théorie des grandeurs

Bronner (2008) étudie le numérique dans le secondaire comme produit des transformations curriculaires depuis 1850. Il observe une grande stabilité jusqu'en 1947 : une théorie de la mesure des grandeurs fonde l'étude des nombres. Les manuels d'arithmétique commencent généralement ainsi :

> Mesurer une grandeur, c'est s'en faire une idée précise en la comparant à une autre grandeur de même espèce, que l'on connaît. […] Le résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité s'exprime par un nombre. (Guilmin 1855, cité par Bronner 2008, p.26)

Il est connu que les ordres d'enseignement primaire et secondaire étaient étanches avant 1945. Toutefois, les programmes pour les petites classes du secondaire et pour les niveaux correspondants de primaire sont communs depuis 1925. Il y a ainsi peu de raisons que, s'il en existe, des appuis mathématiques théoriques différents fondent l'enseignement des nombres des deux ordres.

La figure 1 tirée d'un manuel scolaire des années 1940 montre comment les nombres apparaissent comme des mesures de grandeurs (discrètes ou continues) et comment les opérations sur les nombres sont « tirées » des opérations sur les grandeurs.



1. Ajouter des collections.

Il y a 3 poires sur une assiette et 2 poires dans la main de Paul.

Paul ***met*** ses 2 poires avec les 3 poires de l'assiette : il ***réunit*** les deux collections de poires.

Paul ***compte*** les poires : il y en a 5 *en tout*.
En *ajoutant* 2 poires à 3 poires, on obtient 5 poires.

2. Ajouter des longueurs. — Louis avait deux morceaux de canne à pêche :
l'un de 3 mètres l'autre de 2 mètres.

Il ***ajoute*** ces morceaux l'un à l'autre en les mettant ***bout à bout.***

Il ***mesure*** la longueur de la canne. Il ***compte*** les mètres. Il y en a 5 en tout. En ajoutant 2 mètres à 3 mètres, on obtient 5 mètres.

3. Addition de nombres. — Qu'il s'agisse de poires ou de mètres, *trois* ***et*** *deux font cinq*.
Compter que 3 et 2 font 5, c'est faire une ***addition.***
Au lieu de 3 et 2 font 5
on écrit : 3 + 2 = 5
ce qui se lit : 3 **plus** 2 **égale** 5.

Figure 1 – Extrait de Marijon A. et al. 1947, p. 14, 4e leçon Addition - CE1

L' « exclusion » des grandeurs en 1970

La création du domaine mesure en 1970 en primaire

L'étude du programme de 1970 permet de mieux cerner la rupture entre les grandeurs et les nombres lorsqu'elle est introduite. Avant 1970, il y a l'arithmétique. En 1970, en remplacement de l'arithmétique, on crée deux domaines : la mesure et le numérique, qui apparaissent ainsi comme les deux faces d'une même pièce[2].

La rupture discret / continu

En 1970, dans le numérique, les nombres, même non entiers, mesurent le discret. Dans le domaine « mesure », ils mesurent le continu. Par exemple, le programme propose une approche des décimaux, identique dans le « numérique » et « mesure », en mesurant les grandeurs (respectivement discrètes et continues) mais sans les fractionner. La « définition » est donnée avec la mesure des grandeurs discrètes :

> Une ville compte 10 850 habitants. Le millier étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850. (Instructions officielles de 1970)

Elle est reprise dans le continu :

> Prenons comme unité le carreau (…) aire A = 28 (…). Si on choisit comme unité de surface un rectangle de dix carreaux, l'aire de A est le nombre 2,8. (Ibid.)

Cette construction n'est pas satisfaisante sur le plan mathématique. On a essayé toutefois, par ce moyen, de créer une étude des nombres non entiers qui ne s'appuyait pas sur le fractionnement, un peu comme dans la théorie savante où les réels sont construits à partir des entiers. Cette scission du domaine « arithmétique » manifeste donc un changement de théorie de référence.

La « numérisation » : les opérateurs dans les thèmes fractions et proportionnalité, les opérations sur les nombres

Précisons toutefois que le traitement de la proportionnalité échappe à la dichotomie discret / continu, mais il participe d'un autre ordre de modifications. En effet, une autre dimension fondamentale des changements de 1970 est la suivante. Jusqu'en 1970, les opérations, les fractions, les relations de proportionnalité impliquent de près ou de loin des opérations sur les grandeurs (même si cette affirmation mériterait d'être nuancée pour le programme de 1945). Citons par exemple les opérations sur les nombres concrets (qui sont des grandeurs), les fractions de grandeurs, le traitement de la proportionnalité avec la théorie des rapports et la multiplication externe d'une grandeur par un scalaire jusqu'en 1938 auxquels s'ajoute à partir de cette date l'utilisation des produits et quotients de grandeurs (Whitney 1968). Dans le programme de 1970, les opérations sur les grandeurs disparaissent, les relations de proportionnalité et les fractions sont considérées comme des opérateurs numériques agissant sur des séries de nombres et les quatre opérations s'appliquent exclusivement aux nombres. L'exclusion des opérations sur les grandeurs a été maintenue jusque très récemment.

2 Plus précisément, le domaine « mesures » de 1970 est constitué par ce qui relevait du continu dans « l'ancienne arithmétique » et des grandeurs géométriques (aire et volume) de « l'ancienne géométrie ».

Les savoirs de référence depuis 1970

En fait, c'est aujourd'hui encore « le numérique » qui gouverne l'enseignement des nombres, des opérations et de la proportionnalité ; le « numérique », c'est-à-dire, ici, une théorie des nombres non entiers fondée sur les entiers et une théorie des fonctions linéaires numériques. Il n'y a pas eu de changement de théorie de référence pour l'étude des nombres et des opérations après 1970.

Écologie : interactions entre les objets, entre les grandeurs et les objets

Avant la réforme

Depuis 1923, l'enseignement du système métrique est mêlé à celui des nombres dans les programmes :

> Il faut signaler (pour le cours élémentaire) une intention qui se manifeste dès la première ligne : « Numération décimale, le mètre, le gramme... ». Quand on donnera en classe le principe de la numération décimale, après l'exemple des nombres ordinaires (dix unités valent une dizaine), on ajoutera aussi, sans retard, les exemples tout à fait pareils : dix mètres valent un décamètre, dix grammes valent un décagramme. Ainsi le système légal des mesures, système décimal, appuiera la leçon sur la numération.
> L'étude des sous-multiples du mètre, du gramme, se fera plus tard, quand on aura à parler des nombres décimaux. (Instructions officielles de 1923)

De plus, une théorie de la mesure des grandeurs pour fonder le numérique est susceptible de favoriser l'existence de relations entre grandeurs, nombre et opérations. En effet, avec une telle théorie, l'étude des nombres, c'est l'étude des mesures de grandeurs.

Aussi, l'existence d'une théorie des grandeurs pour asseoir l'étude des nombres et des opérations amène à supposer que jusqu'à la réforme, les grandeurs (dont le système métrique) ont été finement associées à l'étude des nombres et des opérations. La création du domaine mesure en 1970 est alors symptomatique de la destruction de ces relations.

Le programme de 1970 : ruptures et créations de liens

L'examen des modifications introduites par le programme de 1970 montre des ruptures possibles :

- au sein de la géométrie, puisque la proportionnalité migre dans le numérique (ce thème autrefois réparti entre la géométrie pour les échelles et l'arithmétique pour les autres questions se retrouve intégralement dans le « numérique »),
- le système métrique étudié dans le nouveau domaine « grandeurs et mesures » se trouve séparé de la numération qui est étudiée dans le domaine numérique,
- la théorie « numérique » sépare l'étude des grandeurs de celles des nombres et des opérations. Elle est ainsi susceptible de modifier les relations entre ces objets.

MULTIPLICATION PAR PLUSIEURS DIZAINES OU CENTAINES

MULTIPLIER UN NOMBRE DE DIZAINES. — Problème — *Une boîte de plumes pèse* **60 g.** *Combien pèsent* **72 boîtes?**

Le poids est 72 fois 6 dizaines de g. ;
6 dizaines × 72 = 432 dizaines ; 432 dizaines = **4.320 g.**

Solution. — Le poids total de 72 boîtes est :
60 g. × 72 = **4.320 g.**

MULTIPLIER PAR UN NOMBRE DE DIZAINES. — **Problème.** — *Que peuvent contenir* **60 tonneaux** *de* **72 l.** *chacun?*

Une dizaine de tonneaux contient : 72 l. × 10 = 720 l.
6 dizaines de tonneaux contiennent : 720 l. × 6 = 4.320 l.

Solution. — La contenance totale des tonneaux est :
72 l. × 60 = **4.320 l.**

RÈGLE ET DISPOSITION PRATIQUE. — Pour multiplier un nombre de dizaines **60 par 72**, ou pour multiplier **72 par** le nombre de dizaines **60**, *on multiplie 72 par 6 et on met un zéro à la droite du produit.*

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 60 \\ \hline 4.320 \end{array}$$

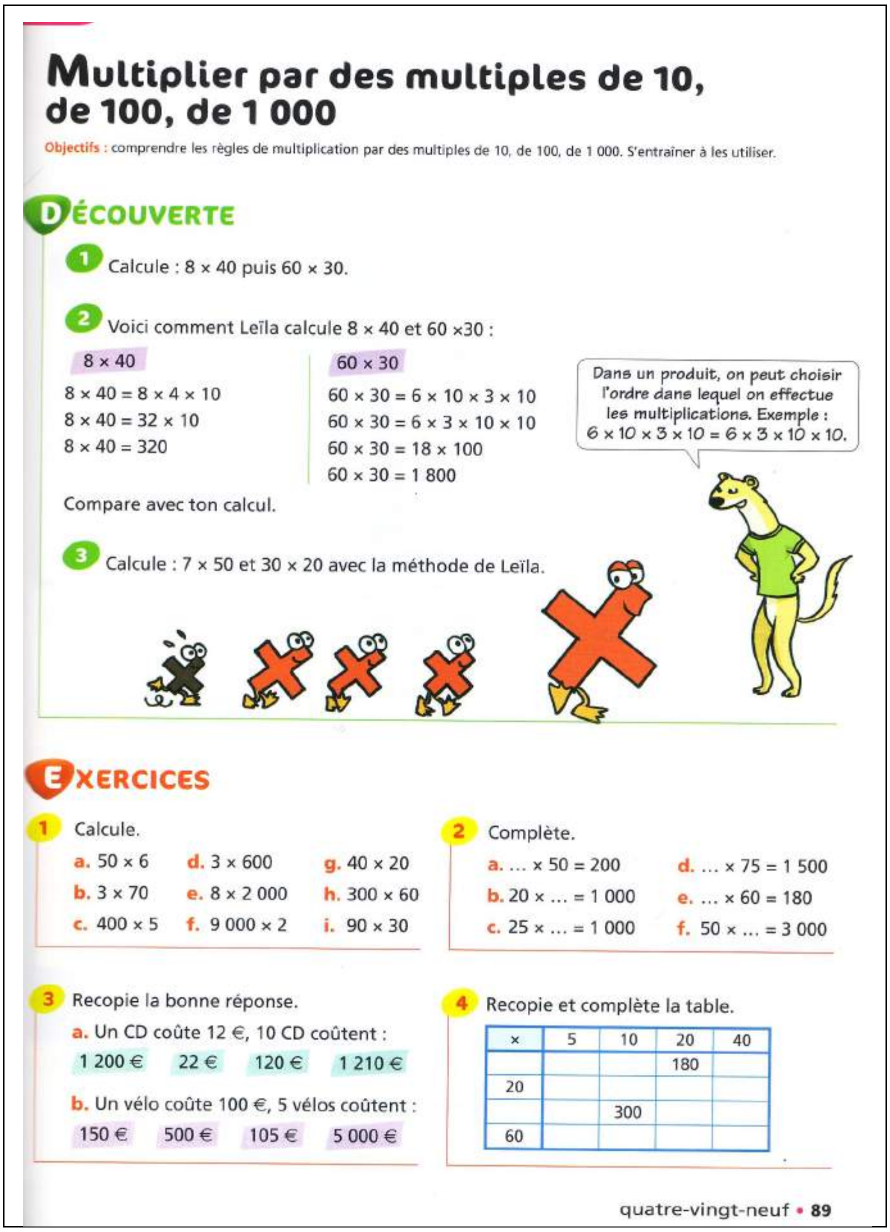
Dans la pratique on écrit d'abord le zéro et on place le produit à gauche.

Figure 2 – Extrait de (Châtelet A. et al. 1932, p. 160 - CE

La confrontation des figures 2 et 3 permet d'appréhender le rôle des grandeurs dans la justification des techniques de calcul avant la réforme (1932), ici la justification de la technique de multiplication par 10. L'absence de grandeurs (en 2010) est compensée par des règles de calcul sur les nombres.

La modification des savoirs de référence provoque ainsi des modifications importantes dans l'agencement des « gros » domaines d'enseignement. Ces modifications sont susceptibles d'avoir engendré des bouleversements majeurs dans les relations entre les objets, dans l'enseignement.

L'unification du traitement de la proportionnalité a-t-elle fait apparaître, à terme, de nouvelles relations dans le numérique ? De nouvelles relations sont-elles apparues au sein du domaine « mesures » ?



Multiplier par des multiples de 10, de 100, de 1 000

Objectifs : comprendre les règles de multiplication par des multiples de 10, de 100, de 1 000. S'entraîner à les utiliser.

DÉCOUVERTE

1 Calcule : 8 × 40 puis 60 × 30.

2 Voici comment Leïla calcule 8 × 40 et 60 ×30 :

8 × 40

8 × 40 = 8 × 4 × 10
8 × 40 = 32 × 10
8 × 40 = 320

60 × 30

60 × 30 = 6 × 10 × 3 × 10
60 × 30 = 6 × 3 × 10 × 10
60 × 30 = 18 × 100
60 × 30 = 1 800

Dans un produit, on peut choisir l'ordre dans lequel on effectue les multiplications. Exemple : 6 × 10 × 3 × 10 = 6 × 3 × 10 × 10.

Compare avec ton calcul.

3 Calcule : 7 × 50 et 30 × 20 avec la méthode de Leïla.

EXERCICES

1 Calcule.

a. 50 × 6 d. 3 × 600 g. 40 × 20
b. 3 × 70 e. 8 × 2 000 h. 300 × 60
c. 400 × 5 f. 9 000 × 2 i. 90 × 30

2 Complète.

a. … × 50 = 200 d. … × 75 = 1 500
b. 20 × … = 1 000 e. … × 60 = 180
c. 25 × … = 1 000 f. 50 × … = 3 000

3 Recopie la bonne réponse.

a. Un CD coûte 12 €, 10 CD coûtent :
1 200 € 22 € 120 € 1 210 €

b. Un vélo coûte 100 €, 5 vélos coûtent :
150 € 500 € 105 € 5 000 €

4 Recopie et complète la table.

×	5	10	20	40
			180	
20				
		300		
60				

quatre-vingt-neuf • 89

Figure 3 – Peltier M.L. et al. 2010, p. 89 - Euro Maths CE2

1980 et après : les grandeurs, comment et avec qui ?

Comment les grandeurs ont-elles été réintroduites à partir de 1980 dans différents domaines de savoir ? Quels objets ont-ils été influencés ? Pour étudier ces questions, je me réfère essentiellement à des textes officiels.

Les textes officiels

Pour le secondaire, j'ai consulté le document d'accompagnement des programmes « Grandeurs et mesures au collège » paru en 2007. Ce texte est paraît-il atypique dans son genre littéraire, il contient notamment plusieurs théories mathématiques relatives à différents objets (annexe 1).

Pour le primaire, les textes qui me servent de références sont les programmes et les instructions « de 1980 » (publiés en réalité de 1977 à 1980) et ceux de 2002 (la publication des documents d'accompagnement s'échelonne jusqu'en 2005). Pour 2002, plusieurs textes concernent les grandeurs ou leur mesure :

- le document d'application des programmes reprend chaque rubrique du programme, notamment les compétences du domaine mesures, en donnant des pistes pour l'étude ;
- dans la série des documents d'accompagnement (DESCO 2005), un texte est relatif au domaine mesure (Grandeurs et mesure à l'école élémentaire), un autre à la liaison école collège, il évoque notamment la proportionnalité.

En particulier, le calcul avec les unités métriques est « réhabilité » (et même encouragé) en 2005 :

> Il est donc légitime et correct d'écrire des égalités telles que :
> 1 m = 100 cm, 1 km = 1000 m. (…)
> Puisque les grandeurs considérées (longueurs, aires, volumes, durées, masses) peuvent s'additionner, se soustraire, être multipliées ou divisées par un nombre, les écritures suivantes sont correctes et leur utilisation est recommandée :
> 3 cm + 15 mm = 30 mm + 15 mm = 45 mm = 4,5 cm. (…) (DESCO 2005, p.82)

Les réintroductions locales des grandeurs de 1980 à 2002

Depuis 1980, les instructions prescrivent l'étude des fractions par la mesure des grandeurs d'objets (des tâches) et, depuis 2002, des techniques de résolution pour la proportionnalité qui impliquent des opérations sur les grandeurs.

Le retour des grandeurs dans le numérique : la proportionnalité

Depuis 1970, le « numérique » est le savoir savant de référence. En 1970 et en 1980, la proportionnalité est traitée avec des tableaux de nombres puis des fonctions numériques. En 2002, les instructions officielles présentent à propos de la proportionnalité, puis de la multiplication par un décimal, des « raisonnements personnels » du type suivant :

> Il faut mettre 400 g de fruits avec 80 g de sucre pour faire une salade de fruits. Quelle quantité de sucre faut-il mettre avec 1000 g de fruits ?, les raisonnements peuvent être du type :
> * pour 800 g de fruits (2 fois plus que 400), il faut 160 g de sucre (2 fois plus que 80) (…). Pour 1000 g (800 g + 200 g) de fruits, il faut donc 200 g (160 g + 40 g) de sucre ;
> * la masse de sucre nécessaire est cinq fois plus petite que la masse de fruits ; il faut donc 200 g de sucre (1000 : 5 = 200).

Ces « raisonnements » constituent deux techniques pour la résolution des problèmes de proportionnalité : linéarité et coefficient. Bien que le savoir savant de référence soit le « numérique », ces deux techniques font appel à des opérations sur les grandeurs (d'ailleurs, incomplètement formulées dans les instructions officielles, comme on le voit dans les extraits) : addition de grandeurs et multiplication (ou division) d'une grandeur par un scalaire.

Le retour des grandeurs dans le numérique : les nombres non entiers

En fait, en 1980, les instructions réintroduisent discrètement les grandeurs dans le numérique. Plus précisément, c'est le « continu » qui est réintroduit pour étudier les décimaux et fractions. Il s'agit alors de proposer aux élèves des « situations » qui leur permettront de « prendre conscience de la nécessité de disposer de nouveaux nombres ». Cette approche est confirmée par les programmes suivants. Ce n'est cependant qu'en 2002 que les grandeurs apparaissent explicitement, plus précisément les longueurs et aires, par exemple :

> (…) utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder le résultat de mesurages de longueurs ou d'aires, une unité de mesure étant choisie explicitement.

Les nombres non entiers sont donc introduits comme des mesures de grandeurs.

L'émergence de « théories » des grandeurs dans le numérique

Depuis 1970, le numérique est le savoir savant de référence. Pourtant, dans les programmes, depuis 1980, on prescrit l'étude des fractions par la mesure des grandeurs et, en 2002, des discours justificatifs sur la proportionnalité qui impliquent des opérations sur les grandeurs. Ces éléments sont officiellement réintroduits pour favoriser la *construction des savoirs par les élèves*. Une particularité de ces objets didactiques réintroduits (tâches et justifications) n'ont pas de correspondance mathématique immédiate dans la théorie savante du « numérique » qui ne comporte pas de grandeurs.

Je cherche alors à rapprocher d'une théorie mathématique ces tâches et discours explicatifs impliquant des grandeurs. J'utilise une théorie mathématique qui n'est pas le savoir de référence mais un savoir « dérivé », la théorie des grandeurs développée par Rouche (1992, 1994) au début des années 1990. Les tâches et discours réintroduits s'inscrivent bien dans cette théorie. Ceci permet de rapprocher les différentes composantes des praxéologies enseignées : tâches, techniques, discours justificatifs et la théorie mathématique (des grandeurs).

Les évolutions des « théories » des grandeurs dans le domaine mesure

Dans le programme de 1970, il n'y a pas vraiment de théorie des grandeurs sous-jacente mais l'approche préconisée pour l'étude est assez structurée. On évoque les questions de comparaison et on cite explicitement, mais brièvement, les quatre opérations (sur les mesures !) :

> Certaines expériences conduisent à effectuer la somme (ou la différence) de deux mesures, le produit (ou le quotient) d'une mesure par un nombre entier.

En 1980, dans le domaine « mesurer », les grandeurs réapparaissent. On dégage les notions de grandeur et de mesure d'une grandeur et même « l'addition » de grandeurs. On utilise ces mots et les trois niveaux, objet, grandeur et mesure.

Plusieurs indices conduisent cependant à penser que les grandeurs ici réintroduites ne doivent pas être considérées comme mathématiques :

- une bonne partie des activités est située dans la partie « activités d'éveil », par exemple égalité et somme de longueurs au CE,
- on écrit dans la partie « mathématiques », à la fin du thème mesurer, que :

> Certaines activités ne relèvent pas spécifiquement des mathématiques, bien que traditionnellement proposées dans les programmes ; par exemple la lecture de l'heure ne doit pas être dissociée de la notion de durée mise en place au cours des activités d'éveil.

- enfin, on écrit :

> [Les activités] doivent permettre une première prise de conscience de la notion de grandeurs mesurables, celles pour lesquelles on sait définir sur les objets une opération induisant une addition sur les nombres qui expriment leur mesure. (Les grandeurs pour lesquelles on ne sait pas définir une telle opération sont des grandeurs « repérables » ; exemple les températures.)

La théorie développée est donc « grandeur repérable / grandeur mesurable ». Elle est en usage en physique, même si elle a été axiomatisée, de façons diverses, par des mathématiciens. Il semble donc qu'on donne aux grandeurs un statut d'objets de la physique.

Par ailleurs, la caractérisation indiquée, une addition sur les objets qui induit une addition sur les mesures, implique que les nombres préexistent à la notion de grandeurs mesurables. Cette approche théorique n'est pas compatible avec l'utilisation des grandeurs pour définir les nombres non entiers. Elle ne semble pas favorable à une articulation entre utilisation des grandeurs dans « Mesurer » et dans le numérique.

Enfin, l'addition est la seule opération sur les grandeurs qui soit étudiée et les calculs se font sur les nombres exprimant des mesures.

En 2002, l'étude des grandeurs dans la rubrique « grandeurs et mesures » ne relève plus de l'approche grandeur repérable / grandeur mesurable. Il n'y a plus, explicitement, d'addition de grandeurs. Plus généralement, à l'exception des fractions d'angle droit, on ne parle pas d'opérations sur les grandeurs dans cette rubrique. Les instructions indiquent un programme d'étude. On met l'accent sur les procédés de comparaison sans la mesure. On prescrit du mesurage, en unités arbitraires ou non selon les grandeurs, avant l'utilisation des unités usuelles. Enfin, un troisième type d'activités consiste à utiliser ou prendre des informations pour en déduire, par calcul, d'autres mesures. Ces activités peuvent solliciter n'importe laquelle des quatre opérations sur les grandeurs continues, par exemple le découpage-recollement met en jeu l'addition ou la soustraction des aires mais ces opérations ne sont pas l'objet d'un apprentissage signalé par le programme.

Les problèmes théoriques posés par l'articulation entre les grandeurs du domaine mesure et celles du numérique ont disparu, de fait, en 2002 car on n'utilise plus l'additivité de la mesure pour caractériser les grandeurs. Néanmoins, aucune caractérisation générale des grandeurs n'est indiquée. De plus, de quatre opérations explicitement objet d'enseignement dans le domaine mesure en 1970, il n'en reste qu'une en 1980 et aucune en 2002.

Des tâches possibles pour la formation des PLC ?

Ces différents éléments d'analyse des programmes permettent d'envisager des tâches pour la formation des PLC. En particulier, il pourrait s'agir de leur proposer d'articuler des éléments « théoriques » mathématiques et des techniques d'enseignement (et leurs justifications).

Par exemple, pour ce qui concerne la proportionnalité, on peut demander de mettre en relation les techniques de résolution proposées dans le programme de primaire (document d'application 2002) et les éléments théoriques du texte « grandeurs et mesures au collège » relatifs aux fonctions linéaires (page 34) ou une théorie des grandeurs du type Rouche (1992).

On peut aussi demander d'interpréter, via une théorie des grandeurs, la technique de résolution des « produits en croix ».

Concernant les nombres non entiers, il peut s'agir de mettre en relation (en allant ou pas jusqu'à la question de l'irrationalité) les constructions « savantes » des nombres (rationnels ou réels) et les reconstructions à partir des grandeurs (Rouche 1992, Lebesgue 1975) ou encore de mettre en relation ces reconstructions théoriques et des éléments d'enseignement (tâche, techniques ou justification -technologies-)

Quelles sont les difficultés des élèves ? Quelles sont les difficultés d'enseignement ?

Dans cette dernière partie, je vais présenter des éléments sur l'articulation entre numération et système métrique. On l'a vu dans la première partie, les deux thèmes sont deux domaines distincts dans l'enseignement actuel, et ce depuis 1970. Les connaissances des élèves sur le système métrique ont été évaluées à plusieurs reprises dans les évaluations à l'entrée en 6e. Par exemple, voici les résultats de deux items proposés plusieurs fois :

3 km = ………… m		
réponse	2002	2003
5000	80,1	77,9
Autre	15,3	16,8
Absence	4,6	5,3

5 kg = ………… g			
réponse	2005	2006	2007
5000	61,41	60,38	62,0
Autre	34,05	34,70	33,8
Absence	4,54	4,92	4,2

Figure 4 – Les résultats de deux items dans les évaluations à l'entrée en 6e

L'échec à la conversion de kg en g à partir de 2005 est plus important qu'à la conversion des km en m avant 2003. Il est peu probable que ces éléments s'expliquent par une baisse brutale des performances des élèves entre les deux dates mais plutôt par le fait qu'il s'agit de deux grandeurs différentes. Convertir des km en m serait ainsi plus « facile » que convertir des kg en g. Ceci pourrait s'expliquer avec des raisons de « familiarité » avec la grandeur et avec les unités : le gramme et la masse sont moins « fréquentés » que le mètre et la longueur.

Ces deux conversions n'apparaissent ainsi pas nettement reliées l'une à l'autre par le préfixe *kilo* qui signifie mille. Par ailleurs, dans une étude complémentaire, réalisée en 2006 sur 273 élèves en fin de CM2, 15 % des élèves écrivent 5 kg = 500 g (Chambris 2008).

Ceci m'amène à évoquer le lien entre la numération et le système métrique dans l'enseignement. Voici deux extraits d'un même manuel scolaire de CE2 (année au cours de laquelle on commence à étudier les nombres entiers au-delà de mille) (Figures 4 et 5). On observe que le traitement des deux thèmes est très différent notamment pour le remplissage des tableaux et les types de décompositions. Le tableau de numération est complété avec des zéros ce qui n'est pas le cas de celui de système métrique. Les décompositions en système métrique comportent des Ecritures Chiffrées des Puissances de Dix (ECPD) là où les décompositions de numération comportent des unités métriques.

Tableau de décomposition des nombres

mille (milliers)			unités			
c	d	u	c	d	u	
3	5	7	4	8	9	→ **357 489**
3	0	0	0	0	0	→ 300 000
	5	0	0	0	0	→ 50 000
		7	0	0	0	→ 7 000
			4	0	0	→ 400
				8	0	→ 80
					9	→ 9

357 489 =

300 000 + 50 000 + 7 000 + 400 + 80 + 9

(3 x 100 000) + (5 x 10 000) + (7 x 1 000) + (4 x 100) + (8 x 10) + (9 x 1)

Figure 5 – Champeyrache et al. 2002, p. 133 - Nouveau Math Elem CE2

Les unités de longueur du système métrique

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
4	5	7	2			
			3	1	8	

1 000 mètres = **1 kilomètre** 1 000 m = 1 km

100 mètres = **1 hectomètre** 100 m = 1 hm

10 mètres = **1 décamètre** 10 m = 1 dam

Exemples : • 4 km 5 hm 7 dam 2 m = 4 572 mètres • 318 cm = 3 m 1 dm 8 cm

Figure 6 – Champeyrache et al. 2002, p. 60 - Nouveau Math Elem CE2

Existe-t-il d'autres façons de faire qui mettraient davantage en évidence le rôle de la numération dans la définition des unités métriques ? Entre 1923 et 1970, numération et système métrique étaient dans un seul « domaine », il est alors intéressant d'étudier le traitement de ces thèmes dans des manuels scolaires antérieurs à la réforme pour commencer à répondre à cette question.

Voici maintenant plusieurs extraits (annexe 2) d'un manuel du cours élémentaire du début des années 1930. Concernant la numération, on remarque qu'il n'y aucune décomposition en ECPD. En revanche, c'est le point nous semble saillant, on trouve des conversions dans les leçons de numération : exercices 186 à 188, par exemple. Des exercices de même forme se trouvent aussi dans les leçons de système métrique 239 à 241 par exemple. Le « cours » sur le système métrique réfère à la numération :

Dans l'écriture d'un nombre exprimant des longueurs, si le mètre est pris pour unité, les hectomètres s'écrivent au rang des centaines. (Boucheny G. et al. p.52 – CE)

Il ne faut tirer de ce propos que « c'était mieux avant ». Mon but consiste à montrer qu'il existe au moins une façon d'enseigner des liens entre numération et système métrique. C'est la signification que j'accorde aux tâches « communes » mises en évidence avant la réforme (les conversions en numération et système métrique), ces liens se manifestent aussi dans les « cours » de système métrique qui réfèrent explicitement à la numération en lui empruntant notamment son lexique. Les liens de cette forme entre numération des entiers et système métrique sont inexistants dans l'enseignement actuel. En particulier, il n'y a pas de conversion dans l'enseignement actuel de la numération. S'il existe des liens ayant d'autres formes, je n'ai pas réussi à les repérer.

Sur certains points notamment, les connaissances des élèves sur la numération des entiers (Parouty 2005) et en système métrique semblent médiocres. Un levier pour agir sur la situation est peut-être le renforcement des liens entre numération et système métrique : les connaissances dans les deux domaines étant alors susceptibles de se renforcer[3].

Conclusion

Les éléments apportés par ce texte concernent les relations entre les nombres et les grandeurs en primaire. L'approche développée inclut une perspective historique. Elle permet d'envisager d'autres possibles que la situation actuelle.

Les instabilités relatives au domaine mesure et la pénétration progressive des grandeurs dans le numérique depuis 30 ans identifiées dans ce texte trouvent leur origine dans la séparation des nombres des grandeurs au moment de la réforme, le domaine mesure étant un avatar de cette séparation. Quelle signification accorder alors à la création du domaine mesure dans le secondaire 40 ans après la réforme ? S'agit-il de juxtaposer un certain enseignement des grandeurs à d'autres enseignements : numérique, géométrique, statistique ? S'agit-il au contraire d'articuler les autres domaines à ce nouveau domaine mesure, plus profondément par exemple de penser un enseignement des nombres, des opérations, de la proportionnalité voire des statistiques ou de la géométrie qui s'appuieraient sur les grandeurs ? Notre connaissance du secondaire ne nous permet pas de le dire. Toutefois, nos recherches sur le primaire montre qu'une telle articulation ne peut être simple à mettre à en œuvre et qu'il ne suffit pas de décréter l'existence du domaine mesure, ni même l'enseignement d'une ou plusieurs théories de la mesure des grandeurs pour qu'une telle articulation s'opère.

REFERENCES

Bronner, A. (2008) La question du numérique dans l'enseignement du secondaire. In Rouchier A. et Bloch I. (Eds.) *Perspectives en didactique des mathématiques* (pp.17–45). Grenoble : La pensée sauvage.

Chambris, C. (2012 a) Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N* 89 39-69

Chambris, C. (2012 b) Le système métrique au service de la numération des entiers et des grandeurs. in Durpaire, J.L. & Mégard, M. eds, *Le nombre au cycle 3*, France : SCEREN CNDP-CRDP

Chambris, C. (2010) Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels. In L. Coulange & C. Hache (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* 2009. (pp. 139–160). Paris: IREM de Paris 7, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Chambris, C. (2009) Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In C. Ouvrier-Buffet & M.J. Perrin-Glorian (Eds.) (2009) *Actes du colloque DIDIREM: Approches plurielles en didactique des mathématiques*. (pp. 211–222) Paris: Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

[3] Un texte d'accompagnement des programmes pour le cycle 3 devrait être publié prochainement sur cette question. (Chambris 2012 b)

Chambris, C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* (Thèse de doctorat). Téléchargeable à http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/en/

Chambris, C. (2007) Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM*, 69, 5–31.

DESCO (2005) *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques. Ecole primaire.*

DGESCO (2007) *Grandeurs et mesures. Projet de document d'accompagnement*.

Lebesgue H. (1975) *La mesure des grandeurs*. Paris : Albert Blanchard.

Parouty V. (2005) Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed.), *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres (Cédérom).* Toulouse : IREM de Toulouse.

Rouche N. (1992) *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier

Whitney H. (1968) The mathematics of physical quantities, Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis. *American Mathematical Monthly* 75 227–256.

Manuels scolaires

Boucheny G., Guérinet A. (1930) *L'arithmétique au cours élémentaire (1re et 2e année)*. Paris : Librairie Larousse.

Châtelet A., Condevaux G., Blanquet L. (1932) *Arithmétique. Cours élémentaire (1re et 2e année)*. Paris : Bourrelier-Chimènes

Guilmin A. (1855) *Cours Complet d'Arithmétique à l'usage des lycées et collèges*. Paris : Auguste Durand.

Marijon A., Masseron R., Delaunay E. (1947) *Cours d'arithmétique. Le calcul à l'école primaire. Cours élémentaire.* Coulommiers-Paris : Brodard et Taupin.

Peltier M.L., Briand J., Ngono B., Vergnes D. (2010) Euro Maths - CE2, éditions Hatier.

Champeyrache G., Fatta J.C. (2002) Le nouveau Math Elem - CE2. Belin. Paris.

Annexe 1 : extraits du document d'accompagnement des programmes : grandeurs et mesures au collège (DGESCO 2007)

Nombreuses sont les références proposant une théorie des grandeurs[3]. Pour préciser la notion d'espèce de grandeurs, on suppose connu un ensemble X d'*objets* et une relation d'équivalence $\sim$ sur X qui définit une certaine *espèce* de grandeurs (volume, longueur, etc.) : deux objets x_1, x_2 appartenant à X qui sont équivalents seront dits avoir *même grandeur* (Il existe en général plusieurs relations d'équivalence intéressantes définissant autant d'espèces de grandeurs différentes). Pour des raisons qui s'éclairciront plus tard, on supposera que chaque classe d'équivalence est *infinie*.

On suppose d'abord qu'on a défini sur X, ensemble des objets, une relation de *préordre total* $\prec$ associée à $\sim$, c'est-à-dire telle que, pour tous x, y, z :

- un et un seul des énoncés $x \prec y$, $y \prec x$, $x \sim y$ est vrai ;
- si $x \prec y$ et $y \prec z$ alors $x \prec z$.

En d'autres termes, on suppose qu'on peut dire que deux objets ont même grandeur ou non, et, dans ce dernier cas, on peut comparer ces deux objets.

[…]

On suppose ensuite qu'on a défini sur X une addition, notée $\oplus$. Cette addition sur les objets n'est pas partout définie : il est en effet impossible d'ajouter un objet à lui-même[5] :

$x\oplus y$ est défini si, et seulement si, $x \neq y$;

si $x \neq y$, alors $x\oplus y \sim y\oplus x$, et si, de plus, $x \neq z$ et $y \sim z$, alors $x\oplus y \sim x\oplus z$;

si $(x\oplus y)\oplus z$ et $x\oplus(y\oplus z)$ sont définis, alors $(x\oplus y)\oplus z \sim x\oplus(y\oplus z)$.

Ces axiomes sont en effet choisis de manière à correspondre au mieux aux objets physiques et aux opérations qui les concernent, et de manière à pouvoir définir l'addition des grandeurs associées, c'est-à-dire des classes d'équivalence. On suppose enfin que sont satisfaites trois conditions unissant $\sim$, $\prec$ et $\oplus$:

- si $x \neq y$, alors $x \prec x\oplus y$;
- si $x \prec z$, alors il existe y tel que $x\oplus y \sim z$;
- pour tout x et tout entier $n \in \mathrm{N}^*$, il existe $y_1, \ldots, y_n$ tels que $y_1 \sim \ldots \sim y_n$, $y_1\oplus \ldots \oplus y_n$ est défini et $x \sim y_1\oplus\ldots\oplus y_n$. (On comprend ici pourquoi on a supposé que chaque classe d'équivalence est infinie).

On désigne par G (comme grandeur) l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$ dans X, noté $X/\!\sim$. Dans la suite, la classe de x est notée $\tilde{x}$. À partir de la structure $(X, \sim, \prec, \oplus)$ ainsi supposée, on définit alors sur G :

- un *ordre total* : $\tilde{x} < \tilde{y}$ s'il existe $x' \in \tilde{x}$ et $y' \in \tilde{y}$ tel que $x' \prec y'$.
- une *addition* : $\tilde{x} + \tilde{y}$ est l'ensemble des z tels que $z \sim x'\oplus y'$, où $x' \in \tilde{x}$ et $y' \in \tilde{y}$.

On définit la *multiplication* par un entier n à l'aide de l'addition itérée.

- une *soustraction* : $\tilde{x} - \tilde{y}$ est l'unique élément de G qui, ajouté à $\tilde{y}$ donne $\tilde{x}$.
- une *division* par $n \in \mathbf{N}^*$: le quotient de $\tilde{x}$ par n est $\tilde{y}$ où y est tel que : $y \sim y_1 \sim \ldots \sim y_n$, avec $x \sim y_1\oplus\ldots\oplus y_n$.

DGESCO 2007, pp. 3-4, Objets, grandeurs, mesures

Définition des grandeurs empruntée à (Rouche 1994). (Rouche 1992) propose une définition des rationnels et de la proportionnalité à partir de ce cadre.

• Pour une eau sucrée, à un volume d'eau v dL, il correspond une masse de sucre, que nous noterons provisoirement "m. pour v dL".
On a alors :

m. pour $(v + v')$ dL = m. pour v dL + m. pour v' dL

m. pour kv dL = $k \times$ m. pour v dL,

Par ailleurs, si on connaît la concentration en sucre, par exemple 2,5 g/L :

m. pour v dL = 2,5 g/dL $\times$ v dL = 2,5v g

De telles formulations, qui fournissent des moyens de résolution à adapter selon le niveau d'enseignement (la dernière fait intervenir une grandeur quotient), ont déjà été évoquées comme une alternative au tableau de proportionnalité. Elles conduisent à considérer une fonction, notée symboliquement m., qui à v dL associe 2,5v g, ce que l'on peut noter m. (v dL) = 2,5v g ou symboliquement v dL $\mapsto$ 2,5v g, fonction qui modélise la situation en termes de grandeurs.
• À une masse m kg de fromage, il correspond un prix, que nous noterons provisoirement "p. de m kg".
On a alors :

p. de $(m + m')$ kg = p. de m kg + p. de m' kg

p. de km kg = $k \times$ p. de m kg ,

Si par ailleurs, on connaît le prix au kilogramme, par exemple 16 €

p. de m kg = 16 €/kg $\times$ m kg = 16m €.

On est conduit à mettre en œuvre une fonction, notée symboliquement p. qui à m g associe 16m €, ce que l'on peut noter symboliquement p. (m g) = 16m €, ou encore m g $\mapsto$ 16m €, fonction qui modélise la situation en termes de grandeurs.

DGESCO 2007, p.34, 7.1 Calcul sur les grandeurs et fonction linéaire

Annexe 2 : extraits du manuel de cours élémentaire (Boucheny G. et al. 1930)

Mois de Novembre.

17ᵉ LEÇON

CENTAINES

80. ***Le nombre cent.*** — Prenons 99 jetons :

99 jetons correspondent à 9 piles de dix jetons et 9 jetons.

Ajoutons 1 jeton; nous avons **cent** jetons ou une **centaine** de jetons (fig. 32).

Avec cent jetons, nous pouvons former dix piles de dix jetons.

FIG. 32

Une centaine vaut dix dizaines ou cent unités.

Le nombre cent s'écrit 100. Le chiffre 1 qui représente une centaine s'écrit au 3ᵉ rang à partir de la droite.

81. ***Centaines.*** — Constituons des sacs de jetons contenant chacun cent jetons.

Prenons 2 sacs (fig. 33); nous avons 2 centaines de jetons, ou **deux cents,** que l'on écrit 200.

FIG. 33.

Prenons successivement 3, 4, ... 9 sacs de cent jetons; nous obtenons ainsi :

trois centaines ou **trois cents,** que l'on écrit 300,
quatre centaines ou **quatre cents,** » 400,
.....
neuf centaines ou **neuf cents,** » 900.

On compte par centaines comme on compte par dizaines et par unités.

82. ***Opérations sur les centaines.*** — Réunissons 2 sacs et 3 sacs de cent jetons. Nous avons en tout :

2 centaines + 3 centaines = 5 centaines de jetons,
ou 200 + 300 = 500.

On a de même :

5 centaines — 3 centaines = 2 centaines ou 500 — 300 = 200.
3 centaines × 2 = 6 centaines ou 300 × 2 = 600.
8 centaines : 2 = 4 centaines ou 800 : 2 = 400.

EXERCICES ORAUX

1. Compter par centaines de 100 à 900.
2. Combien peut-on remplir de boîtes de 100 plumes avec 500 plumes ? avec 900 ? avec 80 dizaines de plumes ? avec 70 dizaines ?
3. Combien peut-on faire de paquets de 10 cahiers avec 600 cahiers ? avec 800 ? avec 50 ?
4. Quelle est la somme formée par 3 billets de 100ᶠ ? par 5 billets ?

CALCUL MENTAL

Ajouter 3. — **1.** *Apprendre par cœur le tableau suivant (V. fig. 34) :*

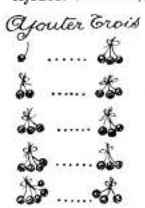


FIG. 34.

1 et 3 font 4	6 et 3 font 9
2 et 3 » 5	7 et 3 » 10
3 et 3 » 6	8 et 3 » 11
4 et 3 » 7	9 et 3 » 12
5 et 3 » 8	10 et 3 » 13

2. *Ajouter 1 et 3, 3 et 1; 2 et 3, 3 et 2; 4 et 3, 3 et 4....*

3. *Comptons des bûchettes. Combien en avons-nous, si nous en prenons :*

1 et 3 ? 11 et 3 ? 21 et 3 ? ... 91 et 3 ?
2 et 3 ? 12 et 3 ? 22 et 3 ? ... 92 et 3 ?
.....
9 et 3 ? 19 et 3 ? 29 et 3 ? ... 99 et 3 ?

4. *Ajouter 3 centaines et 2 centaines, 300 et 200, 300 et 300, 300 et 400, ...*

EXERCICES ET PROBLÈMES

1ʳᵉ et 2ᵉ années. — 185. Ecrire en chiffres les nombres suivants : trois cents, sept cents, neuf cents.

186. Convertir en unités : 5 centaines, 7 centaines, 40 dizaines.

187. Convertir en dizaines : 8 centaines, 6 centaines, 300 unités.

188. Convertir en centaines: 500 unités, 20 dizaines, 90 dizaines.

189. Ecrire de 3 en 3 les nombres de 30 à 60, de 61 à 91, de 52 à 82.

190. Effectuer : 1° 300ˡ + 400ˡ + 200ˡ; 2° 500ˡ + 100ˡ + 200ˡ.

191. Effectuer : 1° 900ᵐ — 300ᵐ; 2° 800ᵐ — 400ᵐ; 3° 700ᵐ — 200ᵐ.

192. Effectuer : 1° 200ᵐ × 2; 2° 300ᵐ × 2; 3° 400ᵐ × 2.

193. Effectuer : 1° 800ᵐ : 2; 2° 600ᵐ : 2; 3° 1 200ᵐ : 2.

194. Un crémier a 300 œufs dans un panier et 400 dans un autre. Combien a-t-il d'œufs en tout ?

195. Une plantation compte 500 arbres. On en retire 200. Combien reste-t-il d'arbres ?

196. Un libraire achète 6 paquets de 100 cahiers. Combien a-t-il de cahiers ?

197. Deux enfants se partagent 400 billes. Combien chaque enfant reçoit-il de billes ?

2ᵉ année. — 198. Un libraire avait 9 paquets de 100 cahiers. Il a vendu 5 paquets. Combien lui reste-t-il de cahiers ?

199. Combien peut-on remplir de boîtes de 100 plumes avec 800 plumes ?

200. Un employé place à la Caisse d'épargne 200ᶠ par mois. Combien place-t-il par trimestre ?

201. Un ouvrier a reçu 600ᶠ pour 2 semaines de travail. Combien gagne-t-il par semaine ?

202. Paul devait 800ᶠ à son menuisier. Il a donné deux acomptes de 300ᶠ chacun. Combien doit-il encore ?

203. Pierre devait 900ᶠ à son charron. Il a déjà payé deux acomptes, l'un de 300ᶠ, l'autre de 400ᶠ. Que doit-il encore ?

204. Une pépinière contient 500 pommiers et 400 poiriers. Combien a-t-elle d'arbres en tout ?
Si l'on enlève 200 pommiers et 200 poiriers, combien reste-t-il : 1° de pommiers ? 2° de poiriers ? 3° d'arbres en tout ?

205. Jacques part à l'école, distante de sa maison de 400ᵐ. A moitié chemin, il s'aperçoit qu'il a oublié un livre. Il revient chez lui, puis retourne à l'école. Quelle distance a-t-il parcourue en arrivant à l'école ?

19ᵉ LEÇON

ENTRE DEUX CENTAINES CONSÉCUTIVES

89. Pour former les nombres compris entre cent et deux cents, nous avons ajouté successivement, à cent, les 99 premiers nombres.

Si, de même, nous ajoutons successivement les 99 premiers nombres à 200, à 300, ..., à 900, nous obtenons les nombres :

FIG. 39.

deux cent un (fig. 39), que l'on écrit 201,
deux cent deux, que l'on écrit 202,

.....

deux cent quatre-vingt-dix-neuf, que l'on écrit 299,

trois cent un, que l'on écrit 301,
trois cent deux, que l'on écrit 302,

.....

trois cent quatre-vingt-dix-neuf, que l'on écrit 399,

.....

neuf cent un, que l'on écrit 901,

.....

neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, que l'on écrit 999.

90. De 100 à 999, les nombres ont 3 chiffres.

Le premier chiffre, à droite, représente des unités; le 2ᵉ représente des dizaines; le 3ᵉ, des centaines.

FIG. 40.

Le nombre formé de 3 centaines, 2 dizaines et 5 unités (fig. 40) s'écrit 325 et se lit **trois cent vingt-cinq.**

Le nombre formé de 3 centaines et 5 unités s'écrit 305 et se lit **trois cent cinq.** Le zéro tient, au 2ᵉ rang, la place des dizaines.

Addition et soustraction. — Se reporter aux règles nᵒˢ 61 et 63.

EXERCICES ORAUX

1. Lire les nombres suivants : **207.** — **311.** — **426.** — 533. — **640.** — 704. — 873. — 994.

2. Dans le nombre 478, que représente le 8 ? le 7 ? le 4 ?

3. Dans le nombre 509, quel est le chiffre des unités ? Combien y a-t-il d'unités ? Quel est le chiffre des dizaines ? Combien y a-t-il de dizaines ? Quel est le chiffre des centaines ? Combien y a-t-il de centaines ?

CALCUL MENTAL

Multiplier et diviser par 3.

1. *Apprendre par cœur la table suivante (fig. 41) :*

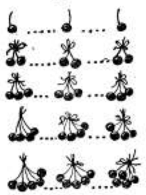


FIG. 41.

3 fois 1 font 3	**3 fois 6 font 18**
3 » 2 » 6	**3 » 7 » 21**
3 » 3 » 9	**3 » 8 » 24**
3 » 4 » 12	**3 » 9 » 27**
3 » 5 » 15	**3 » 10 » 30**

2. *Multiplier un nombre par 3, c'est le tripler.*

Quel est le triple de 4? de 7? de 8?

3. *Diviser un nombre par 3, c'est en prendre le tiers.*

Quel est le tiers de 6? de 12? de 24? de 15? de 30?

4. *Combien a-t-on de cerises si l'on en a :*
2 groupes de 3? 3 groupes de 2? 3 groupes de 3?
3 paniers de 20? de 30? de 200? de 300?

5. *Un jardinier met des navets par bottes de 3. Combien fera-t-il de bottes avec 9 navets? avec 18? avec 12? avec 24? avec 15? avec 30? avec 21? avec 27?*

EXERCICES ET PROBLÈMES

1ʳᵉ et 2ᵉ années. — **226.** Ecrire en chiffres les nombres suivants : **cent huit** — **deux cent vingt** — **trois cent soixante-six** — **quatre cent soixante-seize** — **cinq cent treize** — **six cent quatre-vingt-treize** — **sept cent neuf** — **huit cent onze** — **neuf cent quatre-vingt-onze.**

227. Décomposer en centaines, dizaines et unités les nombres :
345. — **408.** — **600.** — **894.** — **901.**

228. Ecrire un zéro entre les deux chiffres des nombres suivants et écrire en lettres les nombres obtenus :
18, 27, 35, 49, 33.

229. Ecrire de dix en dix :

1° les nombres de	200 à 300;	5° les nombres de 600 à 700;
2° »	300 à 400;	6° » 700 à 800;
3° »	400 à 500;	7° » 800 à 900;
4° »	500 à 600;	8° » 900 à 990.

230. Ecrire les nombres pairs de **200** à **250**; de **300** à 250.

231. Ecrire les nombres impairs de **301** à **351**; de 399 à 351.

232. Ecrire de **3** en 3 les nombres de **0** à 30, puis de 30 à **0.**

233. Un jardinier porte au marché 3 caisses de 6 melons. Combien a-t-il de melons ?

234. Une fleuriste confectionne des bouquets de 3 roses chacun. Combien fera-t-elle de bouquets avec 24 roses ?

235. Un horticulteur a cueilli 18 roses; il en fait 3 bouquets égaux. Combien met-il de roses par bouquet ?

236. Un marchand de vin mélange, d'une part, 8 litres; d'autre part, 7 litres de vin de même qualité; il répartit le tout également en 3 flacons. Combien y a-t-il de vin dans chaque flacon ?

237. Un jardinier partage 24 pommes entre 3 enfants. Combien chaque enfant reçoit-il de pommes ? Combien aurait-il fallu de pommes pour que chaque enfant en reçoive 9 ?

238. Pierre possède 8ᶠ, Jean ne possède que 4ᶠ. Combien Pierre devra-t-il donner à Jean pour qu'ils possèdent tous deux la même somme ? Que manque-t-il à Pierre pour posséder 3 fois plus que Jean ?

LES ÉLÈVES MESURENT UNE LONGUEUR AVEC LA CHAÎNE.

20^{e} LEÇON

L'HECTOMÈTRE

91. A l'aide de la chaîne d'arpenteur, mesurons, dans la rue, en ligne droite, une distance de 100^{m} : c'est un **hectomètre.** Si la chaîne employée mesure 10^{m}, nous avons dû la porter dix fois.

92. L'hectomètre (hm) vaut 100 mètres ou 10 décamètres.

93. Dans l'écriture d'un nombre exprimant des longueurs, si le mètre est pris pour unité, les hectomètres s'écrivent au rang des centaines.

hm	dam	m
cent.	diz.	u.
.	.	.

Les points indiquent qu'il faut un chiffre pour représenter chacune des unités de longueur.

EXEMPLES :

$3^{hm}\ 7^{dam}\ 5^{m}$ s'écrit 375^{m}.
$3^{hm}\ 7^{dam}$ » 370^{m}.
$3^{hm}\ 5^{m}$ » 305^{m}.

Le nombre 428^{m} représente $4^{hm}\ 2^{dam}\ 8^{m}$.

94. Il n'y a pas de mesures de longueur d'un hectomètre. Le long des routes, les hectomètres sont indiqués par de petites bornes dites **bornes hectométriques.** (V. n° 127.)

EXERCICES D'ÉVALUATION ET DE MESURAGE

1. Jalonner une distance de 100^{m}. Planter un jalon tous les 10^{m}. Parcourir cette distance d'un pas régulier. Compter les pas. Chronométrer.

2. Continuer la marche, en ligne droite et du même pas :
1° en faisant le même nombre de pas que précédemment;
2° en marchant pendant le même temps.
Mesurer la distance parcourue dans les deux cas.

3. Déterminer, à vue, dans diverses directions, le point qui se trouve à 1^{hm}, à 2^{hm}, ..., de la porte de l'école.

EXERCICES ORAUX ET CALCUL MENTAL

1. *Le mètre étant pris pour unité, à quel rang s'écrivent les décamètres ? les hectomètres ?*

2. *Dans le nombre 348^{m}, que représente le 3 ? le 4 ? le 8 ?*

3. *Combien y a-t-il de mètres dans 3^{hm} ? dans 5^{dam} ? dans $3^{hm}\ 5^{dam}$? dans $3^{hm}5^{m}$?*

4. *Combien y a-t-il d'hectomètres dans 8^{km} ? dans $8^{km}5^{dam}$?*

5. *Combien y a-t-il d'hectomètres dans 600^{m} ? dans 40^{dam} ?*

EXERCICES ÉCRITS ET PROBLÈMES

1re année. — 239. Convertir en mètres : 8^{hm}; $8^{hm}5^{dam}$; $8^{hm}5^{m}$.

240. Convertir en décamètres : 7^{hm}; $7^{hm}6^{dam}$; 700^{m}.

241. Convertir en hectomètres : 900^{m}; 300^{m}; 90^{dam}; 30^{dam}.

242. Votre laitière habite à 9^{hm} de chez vous. Quelle distance, en mètres, parcourez-vous, aller et retour, pour aller chercher votre lait ?

243. Une rue a 9^{hm} de longueur. On en a pavé le tiers. Quelle est, en mètres, la longueur pavée ? Quelle longueur, en décamètres, reste-t-il à paver ?

244. Il faudrait 3^{hm} de fil de fer pour entourer un jardin. On n'en a que 25^{dam}. Combien manque-t-il de mètres ?

2^{e} année. — 245. Décomposer les nombres suivants en hectomètres, décamètres et mètres : 735^{m}; 640^{m}; 804^{m}; 535^{m}.

246. Effectuer en prenant le mètre pour unité :

1° $3^{hm}+4^{hm}$ | *3°* $7^{hm}+50^{m}$ | *5°* $45^{dam}+325^{m}$
2° $5^{hm}+20^{dam}$ | *4°* $8^{hm}+5^{m}$ | *6°* $3^{hm}2^{dam}+3^{hm}2^{m}$.

247. Effectuer en prenant le décamètre pour unité :

$5^{hm}+4^{hm}$; $3^{hm}+40^{dam}$; $4^{hm}+400^{m}$; $300^{m}+120^{m}$.

248. Effectuer en prenant l'hectomètre pour unité :

$300^{m}+500^{m}$; $40^{dam}+50^{dam}$; $20^{dam}+500^{m}$; $300^{m}+6^{hm}$.

249. Effectuer en prenant pour unité celle du plus grand nombre:

1° $9^{hm}-30^{dam}$ | *3°* $70^{dam}-4^{hm}$ | *5°* $875^{m}-5^{hm}$
2° $8^{hm}-300^{m}$ | *4°* $70^{dam}-300^{m}$ | *6°* $720^{m}-40^{dam}$.

250. Une haie mesure 3^{hm} de longueur. On l'a taillée sur une longueur de 20^{dam}. Quelle longueur, en mètres, reste-t-il à tailler ?

251. Combien faut-il de décamètres de fil de fer pour établir 3 rangées de fil le long d'un champ de 3^{hm} de longueur ?

LE SOMMELIER.

21e LEÇON

L'HECTOLITRE

95. Un sommelier soutire dans des *litres* le vin contenu dans un fût complètement plein. Si, avec ce vin, il peut remplir 100^l, ce fût contient un **hectolitre**.

Si le sommelier soutirait ce vin avec des seaux de 10^l, il en aurait rempli dix seaux.

hl	dal	l
cent.	diz.	u.
.	.	.

Les points indiquent qu'il faut un chiffre pour représenter chacune des unités de capacité.

96. L'hectolitre (hl) vaut 100 litres ou 10 décalitres.

97. Dans l'écriture d'un nombre exprimant des capacités, si le litre est pris pour unité, les hectolitres s'écrivent au rang des centaines.

EXEMPLES :

$3^{hl}\ 7^{dal}\ 5^{l}$ s'écrit 375^l.
$3^{hl}\ 7^{dal}$ » 370^l.
$3^{hl}\ 5^{l}$ » 305^l.

Le nombre 428^l représente $4^{hl}\ 2^{dal}\ 8^l$.

FIG. 42.

98. Dans la pratique, on utilise aussi des mesures de 100^l (fig. 42) et de 50^l.

EXERCICES ORAUX ET CALCUL MENTAL

1. *Le litre étant pris pour unité, à quel rang s'écrivent les décalitres? les hectolitres?*

2. *Dans le nombre 435^l, que représente le 4? le 3? le 5?*

3. *Combien y a-t-il de litres dans 3^{hl}? dans 5^{dal}? dans 3^{hl} et 5^{dal}?*

4. *Combien y a-t-il de décalitres dans 4^{hl}? dans 90^l?*

5. *Combien y a-t-il d'hectolitres dans 700^l? dans 80^{dal}?*

EXERCICES ÉCRITS ET PROBLÈMES

1re année. — 252. Convertir en litres :

8^{hl} ; 3^{hl} | 4^{dal} ; 7^{dal} | $5^{hl}\ 4^{dal}$; $8^{hl}\ 3^{dal}$ | $7^{hl}\ 5^l$; $8^{hl}\ 8^l$.

253. Convertir en décalitres : 7^{hl}; 80^l; $6^{hl}5^{dal}$.

254. Convertir en hectolitres : 600^l; 400^l; 60^{dal}; 40^{dal}.

255. Avec le vin d'un tonneau plein, on a pu remplir deux fûts, l'un de 2^{hl}, l'autre de 2^{dal}. Calculer, en litres, la contenance du tonneau.

256. Un bassin contient 3^{hl} d'eau. On en retire la contenance de 20 arrosoirs d'un décalitre. Combien reste-t-il de litres d'eau dans ce bassin ?

257. Quelle est, en litres, la contenance d'une bonbonne d'huile, sachant qu'avec son contenu on a pu remplir 6 bidons d'un décalitre et 3 fioles de 2^l ?

2e année. — 258. Décomposer les nombres suivants en hectolitres, décalitres et litres : 648^l; 580^l; 208^l.

259. Convertir en litres et effectuer :

1° $4^{hl} + 5^{hl}$; 2° $9^{hl} - 3^{hl}$ | 3° $5^{hl} + 30^{dal}$; 4° $8^{hl} - 50^{dal}$ | 5° $30^{dal} + 4^{hl}$; 6° $70^{dal} - 3^{hl}$.

260. Convertir en décalitres et effectuer :

1° $5^{hl} + 3^{hl}$; 2° $8^{hl} - 3^{hl}$ | 3° $4^{hl} + 300^l$; 4° $700^l - 3^{hl}$ | 5° $600^l + 300^l$; 6° $900^l - 300^l$.

261. Convertir en hectolitres et effectuer :

$500^l + 400^l$; $900^l - 400^l$; $60^{dal} + 30^{dal}$; $90^{dal} - 30^{dal}$.

262. Avec le vin contenu dans un fût plein, on a rempli un hectolitre, un demi-hectolitre, un double décalitre, un décalitre et un demi-décalitre. Quelle est, en litres, la contenance du fût ?

263. Un tonneau contient 178^l de vin. On en retire d'abord 5^{dal}, puis 25^l. Combien reste-t-il de litres de vin dans ce tonneau ?

264. Un réservoir contient 12^{hl} d'eau. On en a retiré le tiers. Combien reste-t-il de litres d'eau dans ce réservoir ?

265. Un débitant reçoit 3 fûts de bière de 5^{dal} chacun et 5 fûts de 3^{dal}. Combien a-t-il, en tout, d'hectolitres de bière ?

COLLOQUE DES 16 & 17 JUIN 2011

THEME : LA REFORME DE LA « MASTERISATION », LES MASTERS, BILAN APRES UN AN

Ce thème a fait l'objet d'un atelier-discussion, qui s'est appuyé sur un questionnaire proposé aux différentes universités.

Dans les pages suivantes sont présentés le questionnaire et la synthèse (sous forme de notes).

QUESTIONNAIRE EN VUE DU COLLOQUE 2011 DE LA CORFEM (BESANÇON, LES 16 ET 17 JUIN 2011)

Le comité d'organisation du colloque

Problématique : Comment s'est mise en place la formation des enseignants de mathématiques à travers les nouveaux Master ?
Merci de bien vouloir prendre la peine de renseigner ce questionnaire pour nous permettre de faire le point sur les modalités présentes de la formation des professeurs de mathématiques à travers la variété de ce qui est proposé dans les diverses universités.
La plupart des questions posées sont plutôt fermées, mais il vous est tout à fait loisible de compléter ce questionnaire par des ajouts, si vous estimez que vos réponses ne traduisent pas bien la réalité des choses. Nous en tiendrons bien sûr compte dans la synthèse de vos réponses.

Nom :

Prénom :

Université de rattachement :

Département ou IUFM :

Université(s) d'intervention pour la formation d'enseignants du second degré, si elle(s) est (sont) autre(s) que votre université de rattachement :

Coordonnées

Adresse de courrier électronique :

Téléphone(s) :

Adresse postale :

Partie A : bilan factuel

Dans cette première partie, nous tentons de comparer les choix faits par les différentes universités dans les **modalités d'organisation de la formation et ses contenus** entre Master 1 et Master 2, et (éventuellement), année de stage, formation continuée en T1, voire T2.

1 – Combien d'étudiants ?

Master 1

Quel est l'effectif des étudiants inscrits en Master 1 de préparation au CAPES ?
Parmi ceux-là, combien sont assidus ?

Dans cette formation, quel est le statut institutionnel des intervenants (PRAG / MCF / Formateur associé) ?

Quel est l'effectif des étudiants assidus dans votre académie en Master 1 de préparation à l'agrégation ? Précisez le cas échéant si la prépa à l'agrégation se fait hors Master.
Parmi ceux-là, combien sont assidus ?
Dans cette formation, quel est le statut institutionnel des intervenants (PRAG / MCF / Formateur associé) ?

Master 2

Quel est l'effectif des étudiants inscrits en Master 2 de préparation au CAPES ?
Parmi ceux-là, combien sont assidus ?
Quel est l'effectif des étudiants assidus dans votre académie en Master 2 de préparation à l'agrégation ?
Parmi ceux-là, combien sont assidus ?
Dans cette formation, quel est le statut institutionnel des intervenants ?

Post-concours

Si votre université/IUFM intervient dans la formation des stagiaires, des T1 ou des T2, pouvez-vous préciser sur quels effectifs, quelle durée, quelles périodes, quelles modalités ? (s'il y a lieu, merci de distinguer les professeurs stagiaires, les T1, les T2)

2 – Quels contenus de formation ?

Dans la programmation de la formation des futurs enseignants de mathématiques, quels sont les **grandes lignes et horaires des contenus de formation** qui ont été choisis, dans votre université, en M1 et en M2 ? Quel est le ratio entre formation disciplinaire et professionnelle, particulièrement ? Quelles sont les parts respectives des formations transversales, des formations en didactique des mathématiques ou à l'enseignement des mathématiques, et des formations aux TICE ?

Formation disciplinaire

En M1 (en nombre d'UE/ sur le nombre total d'UE du M1) :
En M2 (en nombre d'UE/ sur le nombre total d'UE du M2) :

Formation professionnelle

En M1 (en nombre d'UE/ sur le nombre total d'UE du M1) :
En M2 (en nombre d'UE/ sur le nombre total d'UE du M2) :

Formation en didactique

En M1 (en nombre d'UE/ sur le nombre total d'UE du M1) :
En M2 (en nombre d'UE/ sur le nombre total d'UE du M2) :

Formation aux TICE

Une formation aux TICE est-elle explicite en M1, en M2 ?
Si oui, comment est-elle organisée ?
Si oui, par qui est-elle dispensée ?

C2i2e

Une préparation au C2i2e est-elle explicite en M1, en M2 ?
Si oui, comment est-elle organisée ?
Si oui, par qui est-elle dispensée ?

Épreuve « agir en fonctionnaire de l'État, de manière éthique et responsable »

Une formation à cette épreuve est-elle organisée dans votre université ?
Si oui, avec quels horaires, quelles modalités ?
Si oui, par qui est-elle dispensée ?

3 – Quelle organisation pour les stages ?

Pouvez-vous expliciter la façon dont les stages sont organisés (filés, massés, sur combien de semaines, avec quelle organisation, en binômes ou non…)

En M1 :
En M2 :

4 – Quel type de mémoire ?

Est-il réalisé en M1 ou M2, à quel semestre ?
Le jugeriez-vous plutôt de type recherche ou professionnel ?
Quelle est sa longueur ?
Quel est le cadrage pour son encadrement ?
Qui sont les personnels qui assurent cet encadrement ?

Partie B : Articulations

Dans cette seconde partie, nous tenterons de comparer les approches en terme de *cohérence des formations* : les contenus et les modalités de formation sont-elles, à votre avis, correctement articulées, dans votre IUFM ou Université, ou bien y aurait-il lieu de faire évoluer le dispositif existant ?

Estimez-vous, donc, que la formation soit bien articulée entre :

- M1 et M2 ?
- M2 et fonctionnaires stagiaires ?
- Fonctionnaires stagiaires et T1 ?
- CAPES et Master ?

Partie C : Prospectives

Dans cette dernière partie, nous chercherons à dégager des pistes qui permettraient de proposer une contribution collective des participants, destinée aux services ministériels et aux corps d'inspection, dans la perspective d'une évolution de la formation.

- Ainsi, dans l'ensemble du processus de formation, avez-vous des pistes à proposer pour améliorer la formation des futurs professeurs de mathématiques, dans le cadre actuel, ou en imaginant une évolution de ce cadre ?
- Pouvez-vous sélectionner trois difficultés, parmi celles que vous avez rencontrées ?
- Pouvez-vous trouver trois points positifs dans le dispositif, tel que vous l'avez vécu cette année ?

ANALYSE DU QUESTIONNAIRE PORTANT SUR LA MISE EN PLACE DES MASTERS ENSEIGNEMENT SECOND DEGRE

Notes de Sylvie COPPE

Masterisation

- Uniformisation des diplômes en Europe ;
- Élévation du niveau de recrutement des enseignants (Master) ;
- Réduction des moyens (suppression de l'année de stage à tiers temps) ;
- Critiques contre les IUFM.

Mais…

- Le métier d'enseignant est un métier complexe ;
- Il demande une formation autre que sur le terrain ;

La formation doit articuler des dimensions diverses (contenus disciplinaires, didactique, pédagogie, psychologie, sociologie…).

Nombreux objectifs (trop ?)

- Préparer à l'examen de master avec une initiation à la recherche,
- Préparer à un concours d'enseignement (écrit /oral),
- Préparer à la professionnalisation,
- Ouvrir vers d'autres débouchés que l'enseignemen
- C2I2E et CLES

Effectifs dans les masters dits d'enseignement 2nd degré dans 41 universités (voir tableau 1, page suivante) : on constate une baisse des effectifs inquiétante.

Y aura-t-il suffisamment de candidats dans les années qui viennent ?

Nous avons posé des questions (voir questionnaire dans l'article précédent) :

- sur les masters dits d'enseignement pour les futurs PLC,
- sur la préparation à l'agrégation,
- sur les professeurs stagiaires,
- sur les T1/T2.

Le bilan que nous tirons porte sur 13 réponses.

Université	Effectif M1	Effectif M2
Amiens	12	9
Angers	9	10
Besançon	11	
Bordeaux 1	22	20
Brest	7	6
Bretagne sud	8	8
Cergy	3	20
Chambéry	10	6
Clermont 2	15	15
Dijon	12	14
Evry	3	4
Franche-Conté	11	16
Grenoble	25	18
Haute Alsace	non ouvert	10
La Rochelle	10	16
Lille 1	28	26
Lyon 1	26	36
Marne la Vallée	7	20
Martinique	6	15
Metz	12	11
Morbihan	8	8
Nantes	8	22
Nantes	10	22
Nice	16	21
Orsay	12	20
Paris 6 UPMC	21	28
Paris 7	32	24
Pau	7	29
Poitiers	7	22
Reims	12	25
Rennes	27	41
Rouen	15	15
Saint-Etienne	11	5
Strasbourg	21	13
Toulon	11	7
Toulouse 3	40	40
ULCO	9	13
UPEC P12	1	9
Valenciennes	12	15
Versailles	3	9
Villetaneuse P13	6	11
Totaux	526	679

Tableau 1 – Effectifs dans les masters enseignement du second degré dans 41 universités

Bilan sur 13 réponses

Quels masters ?

- Spécialité d'un master de mathématiques
- Parcours d'un master de mathématiques
- Spécialité d'un master de didactique (Lyon)
- Master de mathématiques (Dijon)

Les intervenants

- PU, MCF
- Formateurs IUFM :

- seulement dans les UE dites de professionnalisation,
- dans d’autres UE (ex : préparation oral 2).

Les contenus des masters

- UE de mathématiques (préparation écrit, oral)
- UE de didactique
- UE professionnelles
- TICE
- C2I2E
- Agir en fonctionnaire de l’état

Les UE de mathématiques (préparation écrit, oral)

En nombre d’UE : la situation est très variable (de moitié des UE à n–1/n en M1 et en M2).
Évolution de M1 à M2 (ex Rouen).
D’où la place plus ou moins réduite des UE professionnelles.

Les UE de didactique et professionnelles

Peuvent être confondues (Amiens, Besançon)
Ou différenciées (Lyon, Bordeaux, Grenoble)
Professionnelle en M2 (Grenoble)
Liées aux stages
UE épistémologie ou histoire (Lorraine)

Mais une question : quels sont les contenus ?

TICE

Formation très variable :

- Une ou plusieurs UE,
- Intégré dans les autres UE
  *mathématiques,
  *professionnelles.

C2I2E

Pas de préparation dans 3 universités.
Souvent intégrée aux UE TICE ou en lien avec le stage.
Formation assurée le plus souvent par des formateurs IUFM.

Agir en fonctionnaire de l’état

La formation est assurée.
D’une durée variable selon les universités : de 9 h à 48 h, assurée par formateurs SHS.

Les stages

Schéma classique en 3 stages :

- Observation en S1,
- Pratique accompagnée en S2,
- Responsabilité en S3/S4.

Sauf dans certaines académies…

- 4 stages (2 stages de pratique accompagnée) : 4 universités,
- 2 stages (Observation liée à la pratique accompagnée et à la responsabilité) : 1 université.

Les différences portent sur :

- les modalités de stage : filé/massé,
- le fait que les étudiants remplacent ou non les stagiaires,
- la durée des stages,
- le fait que les étudiants soient seuls ou en binômes.

Organisation des stages :

- Stage d'observation et de pratique accompagnée : filé (1 jour sur 6 à 10 semaines), 1 à 2 semaines ou 3 jours (Créteil).
- Stage en responsabilité : de 2 à 6 semaines à temps complet ou à mi-temps, rémunéré.

Les mémoires

Pas de mémoire, rapports de stage ou écrits professionnels : pour 2 universités.
Un Mémoire en M1 pour 1 université, ou en M2, pour 1 université.
TER (Travaux d'Etude et de Recherche) M1 et rapport de stage M2 : pour 3 universités.
TER (Travaux d'Etude et de Recherche) M1 et mémoire M2 : pour 4 universités.
Rapport de stage en M1 et Mémoire en M2 : pour 1 université.
La longueur du mémoire varie de 15 à 50 pages, souvent 20 pages.
A la question, « le mémoire est-il professionnel ? », les réponses sont : oui car il s'appuie sur les stages, les stages sont trop courts.
L'encadrement des mémoires est assuré par des formateurs IUFM ou seulement par des enseignants-chercheurs.

Le cas de l'agrégation

Dans le texte initial il fallait avoir le M2 pour s'inscrire.
Puis assouplissement ensuite : avoir le M2 au moment de l'admissibilité.
Des préparations en dehors des masters.
Formation professionnelle ?
Formation à l'épreuve *Agir en fonctionnaire de l'état* ?
La préparation à l'agrégation n'a pas lieu en général dans les masters, ou bien elle n'est pas ouverte (Rouen, Dijon).

Les stagiaires

Pas d'intervention de l'IUFM pour 2 académies.
Formation filée pour 3 académies, de 5 à 20 jours.
Formation massée pour 4 académies, 4 semaines en février.
Intervention non précisée dans 2 réponses.
Pas de réponse sur ce point dans 2 réponses.

T1/T2

Aucune formation : 4 réponses.
Formation de quelques jours, mais pas assurée par l'IUFM : 4 réponses.
Formation de 3 jours : Auvergne.
Formation inscrite dans le Plan Académique de Formation : Créteil.
Non réponse : 3.

Ainsi la formation est réduite, voire inexistante.

Points positifs

- Initiation aux questions du métier en M1, davantage de temps pour cette initiation.
- Dialogue entre ceux qui préparent au concours et ceux qui préparent au métier.
- Introduction de l'épistémologie.
- Intérêt des étudiants.
- AUCUN : 2 réponses.

Difficultés

- **Trop de finalités.**
- **Trop de travail pour les étudiants.**
- **Place du concours.**
- **Organisation des stages.**
- **Pas assez de professionnalisation.**
- Manque de cohérence dans les UE.
- Trop d'évaluation.
- Manque d'intérêt des étudiants de M1.
- Place des TICE.
- C2I2E et CLES.

COLLOQUE DES 14 & 15 JUIN 2012

THEME : NOUVEAUX SAVOIRS ET NOUVEAUX DISPOSITIFS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE, QUELS EFFETS SUR LES PRATIQUES ?

Depuis quelques années des réformes se succèdent visant à modifier les contenus et les formes de l'enseignement. Ainsi, on peut tout d'abord noter des modifications dans les thèmes mathématiques enseignés avec l'introduction des probabilités au collège, de la statistique inférentielle au lycée, de l'algorithmique, de l'informatique au lycée... et la disparition ou l'appauvrissement de certains thèmes comme géométrie au lycée qui devient essentiellement analytique.

De nouveaux dispositifs d'aide à l'étude ont été créés prenant place à côté des séances de classe traditionnelles : aide personnalisée, suivi individualisé, enseignement « Méthodes et pratiques scientifiques ». Enfin, dans la classe, on peut noter l'introduction de la démarche d'investigation comme démarche commune aux sciences et aux mathématiques, la mise en place du socle commun de connaissances et de compétences et l'évaluation par compétences au collège. Ces changements, qui se succèdent assez vite, sont certainement le reflet de changements plus profonds concernant le métier d'enseignant.

Nous traitons notamment les questions suivantes :

- Y a-t-il une transformation en profondeur de l'enseignement des mathématiques ? Quelle forme revêt-elle dans les établissements scolaires pour les professeurs ?

- A quelles contraintes et difficultés sont soumis les enseignants pour transmettre les nouveaux savoirs ou pour faite vivre les nouveaux dispositifs ?
- Quelles répercussions sur le travail personnel des élèves ?
- Quels effets les nouveaux dispositifs d'évaluation ont-ils sur l'évaluation traditionnelle ?

LA PLACE DE LA STATISTIQUE DANS LES PROGRAMMES DU SECONDAIRE A LA RENTREE 2012 : MISE EN ŒUVRE PEDAGOGIQUE ET FORMATION DES ENSEIGNANTS

Philippe DUTARTE

Résumé – La rénovation des programmes de mathématiques du secondaire aboutit, à la rentrée 2012, avec la mise en place des nouveaux programmes de terminale offrant une place plus importante à la statistique. La mise en œuvre de ces programmes suppose trois points d'appui pédagogiques : une introduction des notions à partir de situations « concrètes » avec une problématique (statistique) identifiée ; une valorisation de la démarche d'investigation, prenant notamment appui sur l'exploitation de logiciels ; une évaluation des compétences acquises dans ce domaine ne se limitant pas à l'aspect classique. Le succès de cette mise en œuvre des programmes dans les classes suppose un effort certain de formation des enseignants.

Introduction

À la rentrée 2012, se mettent en place les nouveaux programmes de mathématiques de terminales S, ES et STI2D-STL, notamment, achevant ainsi une rénovation des programmes du secondaire (le programme de terminale STMG entre, quant à lui, en application à la rentrée 2013). Ces programmes induisent des changements dans l'enseignement de la statistique, tant quantitatifs que qualitatifs. Ils supposent une mise en œuvre pédagogique spécifique nécessitant un accompagnement des enseignants par une formation adaptée.

1. La place de la statistique dans les programmes de mathématiques du secondaire à la rentrée 2012

Le premier changement visible est d'ordre quantitatif : la statistique et les probabilités occupent une place plus importante que par le passé, avec des contenus nouveaux ou introduits plus précocement. L'enseignement des probabilités est introduit dès la classe de troisième (2008), la loi binomiale apparait en première (2011) et la loi normale en terminale (2012). Un enseignement de statistique inférentielle est mis en place dès la classe de seconde (2009) avec les notions d'intervalle de fluctuation, d'estimation d'une proportion inconnue ou de prise de décision à partir d'une échantillon. Cet enseignement, reposant d'abord essentiellement sur la simulation, est progressivement formalisé en première et terminale à l'aide des outils probabilistes dont on dispose. Le temps à consacrer à la partie probabilités et statistique est quantifié dans les programmes de terminale. Ainsi, en terminale S, « à titre indicatif, on pourrait consacrer la moitié du temps à l'analyse, l'autre moitié se répartissant équitablement entre géométrie et probabilités-statistique », ou, en terminale ES, « à titre indicatif, on pourrait consacrer environ deux tiers du temps à l'analyse et le reste aux probabilités et à la statistique ». Pour mémoire, le précédent programme de terminale scientifique (2002) donnait, « à titre indicatif », la répartition horaire suivante : « analyse 45%

(environ 14 semaines), géométrie 35% (environ 11 semaines), probabilité et statistique 20% (environ 6 semaines) ».

Le second changement, plus subtil à mettre en œuvre, est d'ordre qualitatif. On passe d'un enseignement, avant les années 2000, de techniques de traitement de données statistiques réalisées par les élèves « à la demande » (calculer une moyenne, représenter un histogramme...), à un enseignement de la statistique au sens de science d'investigation des données, d'aide à la prise de décision (avec estimation du risque) ou à l'estimation. Voici quelques marqueurs de cet « esprit de la statistique » dans les programmes actuels.

Classe de troisième (2008)

> L'éducation mathématique rejoint ici [étude des séries statistiques] l'**éducation du citoyen** : prendre l'habitude de s'interroger sur la signification des nombres utilisés, sur l'information apportée par un résumé statistique. De même, c'est pour permettre au citoyen d'**aborder l'incertitude et le hasard dans une perspective rationnelle** que sont introduits les premiers éléments relatifs à la notion de probabilité.
>
> Le travail [en statistique] est conduit aussi souvent que possible **en liaison avec les autres disciplines** dans des **situations** où les données sont exploitables par les élèves. L'utilisation d'un **tableur** permet d'avoir accès à des situations plus riches que celles qui peuvent être traitées « à la main ».
>
> La notion de probabilité est abordée à partir d'**expérimentations** qui permettent d'observer les **fréquences** des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.). La notion de probabilité est utilisée pour **modéliser** des situations simples de la vie courante.

Classe de seconde (2009)

> L'objectif est de faire **réfléchir** les élèves sur des **données réelles**, riches et variées (issues, par exemple, d'un fichier mis à disposition par l'INSEE), synthétiser l'information et proposer des représentations **pertinentes**.
>
> L'objectif est d'amener les élèves à un **questionnement** lors des activités suivantes : l'estimation d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon ; la prise de décision à partir d'un échantillon.

Classes de premières S et ES (2011)

L'objectif indiqué dans le programme de seconde est repris :

> faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, d'un fichier mis à disposition par l'INSEE).

En statistique inférentielle, on s'appuie sur la loi binomiale pour tester une proportion. L'élève doit être capable

> d'**exploiter** l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, **pour rejeter ou non une hypothèse** sur une proportion.

L'objectif est

d'amener les élèves à **expérimenter** la notion de « différence significative » par rapport à une valeur attendue et à remarquer que, pour une taille de l'échantillon importante, on conforte les résultats vus en classe de seconde.

Classes de terminales S et ES (2011)

Afin de **traiter les champs de problèmes** associés aux données continues, on introduit les lois de probabilité à densité.

(lois uniforme et normale en ES et S, auxquelles s'ajoute la loi exponentielle en S).

Cette partie [probabilités et statistique] se prête particulièrement à l'étude de **problèmes issus d'autres disciplines**.
Le recours aux représentations graphiques et aux **simulations** est indispensable.

La **problématique de la prise de décision**, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau avec l'intervalle de fluctuation asymptotique[1].

Concernant la partie « estimation » (par intervalle de confiance),

les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines.

2. Mise en œuvre pédagogique

Il ne suffit certes pas d'énoncer la « loi » (des programmes) pour la voir aussitôt mise en œuvre dans les classes. Les programmes sont accompagnés de documents « ressources » fournissant notamment des exemples de mise en œuvre. Les manuels scolaires, édités lors de l'application d'un nouveau programme, jouent un rôle essentiel, demeurant la source documentaire prépondérante des professeurs. L'évaluation, en particulier les examens, détermine en partie les contenus enseignés et leur mode d'enseignement (on parle de « pilotage par l'examen »). Enfin, la formation, initiale et continue, des professeurs doit prendre en compte les objectifs spécifiques de l'enseignement de la statistique.

Nous nous penchons dans cette partie sur ce qui nous semble constituer trois points d'appui pédagogiques incontournables.

2.1. En situation « concrète »

Est-ce utile de le rappeler, la statistique est une science « appliquée », c'est ce qui fait son charme. Cela ne signifie pas que les mathématiques mises en jeux, notamment des résultats de probabilités ou d'analyse, soient de seconde catégorie mais que la compréhension des concepts et des démarches est liée à des usages extérieurs aux mathématiques. Un enseignement de la statistique de type « académique », partant de définitions posées a priori et énonçant des théorèmes en dehors de tout contexte est donc non seulement inefficace, mais néfaste. À juste titre pourrait-on dire que, dans ce cas, mieux vaut ne pas confier l'enseignement de la statistique à un professeur de mathématiques. A contrario, le professeur de mathématiques est le seul capable de

[1] On peut regretter que cette remarque, qui nous paraît essentielle, n'apparaisse qu'à la fin des « commentaires » concernant la partie « intervalle de fluctuation ».

détacher les concepts mathématiques mis en œuvre des différents contextes spécifiques, pour mettre en évidence leur caractère universel permettant d'aller au-delà d'un agrégat de recettes ad hoc et donc de s'adapter à des situations imprévues. Il est ainsi essentiel que l'enseignement de la statistique soit pris en charge par un professeur de mathématiques.

Certains types d'exercices nous semblent ne pas avoir leur place dans un apprentissage de la statistique. Il s'agit d'exercices stériles, vides de sens et ne répondant à aucune problématique.

Voici deux exemples (ils semblent se raréfier dans les manuels).

27 * On donne la série statistique suivante :

Valeurs	1	a	5	$2a$	9
Effectifs	28	22	14	20	16

a) Déterminez a sachant que la moyenne est égale à 4,59.
b) Calculez la médiane de cette série.

Figure 1 – Manuel de seconde (2009)

54 [6 points]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
1. Vérifier que les intervalles $]-\infty\ ;\ 1{,}65[$ et $[-2{,}57\ ;\ 1{,}69]$ peuvent être considérés comme des intervalles de fluctuation de X au seuil de 95 % (c'est-à-dire des intervalles I tels que $P(X \in I) \geqslant 0{,}95$).
2. Montrer qu'il existe une valeur a minimale telle que l'intervalle $[-a\ ;\ a]$ soit un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95 %. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. a. Montrer qu'il existe un unique réel b tel que $(-2 \leqslant X \leqslant -2 + b) = 0{,}95$.
b. Prouver que $b < a + 2$ où a est la valeur de la question **2.**
c. Déterminer une valeur approchée de b à 10^{-2} près.
4. Montrer qu'il n'existe aucun réel c tel que $P(-1 \leqslant X \leqslant -1 + c) = 0{,}95$.

Figure 2 – Manuel de terminale S (2012)

Gourmands en temps (il faut faire plusieurs exercices du même type, pour parvenir, si l'on est résistant, à acquérir une compétence inutile, sauf le jour de « l'interro »), ils éloignent de l'apprentissage des capacités attendues, rendant plus difficile la compréhension du sens de notions liées à la modélisation : une moyenne, une médiane, un intervalle de fluctuation correspondent à des calculs plus ou moins arbitraires, selon un degré d'approximation qui l'est tout autant[2].

2 On peut parler à ce propos de « réduction arithmétique » ou de « réduction mathématique » de la statistique (voir [3]).

La contextualisation est particulièrement nécessaire en statistique inférentielle. L'objectif est de construire le sens critique, par le choix des méthodes, des paramètres, l'évaluation des risques, les limites du modèle, la signification de la « confiance ». Citons Norbert Meusnier[3] :

> L'éducation à l'aléatoire [...] devrait avoir pour but fondamental la prise de conscience que toute décision s'accompagne d'un risque, mais que ce risque peut être évalué.

La contextualisation d'une méthode statistique n'est pas toujours simple à réaliser (et les professeurs doivent être accompagnés) mais l'enjeu est d'importance. Voyons un exemple d'exercice qui, sans être mathématiquement faux, est, du point de vue de la modélisation, maladroitement posé.

40 Dans tout cet exercice, la production est supposée suffisamment importante pour que l'on assimile le choix d'un échantillon à un tirage avec remise.

Un sous-traitant est chargé de concevoir des pièces pour un constructeur automobile.

1. Un sondage est réalisé pour tester la qualité de la production du sous-traitant. On suppose que la proportion de pièces non conformes dans la production est comprise entre 0,02 et 0,98 ; sur un échantillon de 250 pièces, 12 ne répondent pas au cahier des charges.

a) Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % obtenu à partir de cet échantillon. Donner les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-3} près.

b) Le client veut un taux de pièces non conformes inférieur ou égal à 6 %. Compte tenu du sondage effectué, peut-on affirmer avec un niveau de confiance de 95 % que cette condition est respectée ?

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative sera prise en compte dans la notation.*

Le sous-traitant procède à de nouveaux réglages et fait un nouveau sondage sur 250 pièces. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre maximum de pièces non conformes dans cet échantillon pour pouvoir affirmer que, au niveau de confiance de 95 %, le taux de pièces non conformes est inférieur ou égal à 6 % dans la production. Expliquer votre démarche.

Figure 3 - Manuel de terminale STI2D (2012)

Le contexte est celui d'une prise d'échantillon pour un contrôle de qualité, mais la problématique n'apparaît qu'à la question 1.b) : « le client veut un taux de pièces non conformes inférieur ou égal à 6% ». Passons outre le fait qu'un taux de 6% est sans doute peu réaliste pour la survie économique de l'entreprise (on ne prétend pas, en terminale, envisager une situation dans toute la complexité des applications réelles). Ce

3 Voir [4].

qui importe, c'est de comprendre que, dans ce type de contexte, on a sans doute intérêt à effectuer un test (raisonner en termes d'intervalle de fluctuation et de prise de décision, pour reprendre la terminologie du secondaire) puisque l'on a une idée de ce que devrait être la proportion p de pièces défectueuses dans la production. Notons également que la situation est ici « unilatérale » : on ne voudrait pas que p dépasse 6% (supposer que la proportion de pièces non conformes dans la production est d'au moins 2% est assez étrange). Ce qui rend un intervalle de confiance à 95% (bilatéral) a priori inadapté.

Bien entendu, un « bon » élève (la question 2. n'est pas facile) peut « faire » cet exercice de mathématiques. On attend à la question 2. la recherche du plus petit entier k tel que :

$$\frac{k}{250}+1{,}96\frac{\sqrt{\frac{k}{250}\left(1-\frac{k}{250}\right)}}{\sqrt{250}}<0{,}06$$

(borne supérieure de l'intervalle de confiance « standard » à 95% inférieure à 0,06). La calculatrice ou le tableur fournit $k = 9$. Mais la démarche est assez compliquée et la confiance de 95% est difficile à interpréter.

En posant la problématique dès le début de l'exercice, un élève de terminale (et même de première) peut procéder autrement (et sans doute mieux). Supposons que, situation à la limite de l'acceptable, la proportion de pièces défectueuses dans la production est $p = 0{,}06$. Sous cette hypothèse, la variable aléatoire X correspondant au nombre de pièces défectueuses observées sur un échantillon aléatoire de taille 250 suit la loi binomiale de paramètres 250 et 0,06. Les outils de calcul (calculatrice, tableur, GeoGebra4...) fournissent : $P(X \leq 8) \approx 0{,}033$ et $P(X \leq 9) \approx 0{,}064$ (on a là en quelque sorte des intervalles de fluctuation unilatéraux pour la variable aléatoire X). On peut être conduit à la règle de décision suivante : on accepte dans l'échantillon prélevé un maximum de 8 pièces défectueuses. La probabilité d'accepter à tort la production est de 3,3 % (risque de rejet à tort de l'hypothèse $p = 0{,}06$ à gauche, c'est-à-dire que dans 3,3% des cas, on accepte une production pour laquelle $p = 0{,}06$ ou davantage). On remarque qu'avec la règle fournie par l'intervalle de confiance le risque d'accepter à tort la production est de 6,4%.

Cette méthode (utilisation directe de la loi binomiale) apparait plus simple et plus précise que celle de l'intervalle de confiance, en un mot mieux adaptée.

a) Prise de décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation

La mise en œuvre d'un intervalle de fluctuation, pour la prise de décision, devrait répondre, au lycée, à un certain nombre de critères, garantissant le respect de l'esprit de la démarche statistique, susceptible, selon les orientations choisies, d'être poursuivie dans l'enseignement supérieur[4].

- Le premier critère nous semble devoir être de poser un problème, une situation, ayant quelque écho avec le monde réel. Cette situation doit être telle que la proportion p dans la population est supposée connue : c'est l'hypothèse de départ, avec laquelle on construit la règle de décision. Cela exclut les situations où l'on

4 Satisfaire tous ces critères dans un exercice scolaire de lycée n'est pas évident. Le premier (une situation-problème) est cependant incontournable : le choix d'une méthode statistique dépend de la situation.

n’a aucun a priori sur la valeur de *p* (type « sondage »), pour lesquelles on aura recourt à un intervalle de confiance[5].

- Il faut ensuite que cette situation soit de type « bilatérale » : par rapport à la valeur de *p* « visée » (celle de l’hypothèse) on s’intéresse à un écart trop important à gauche et à droite.
- La règle de décision doit être élaborée, autant que possible[6], avant la prise d’échantillon. Il est plus honnête de décider d’une règle avant de jouer, qu’après la partie[7]. Par ailleurs, l’approche de Neyman-Pearson est fréquentiste. Il ne s’agit pas d’élaborer une règle de décision à partir d’un échantillon, mais d’élaborer une règle de décision en amont dont on sait évaluer les risques sur un grand nombre d’échantillons.
- L’échantillon doit être prélevé par tirage au hasard avec remise (équiprobabilité garantie par randomisation).
- En cas de rejet de l’hypothèse, il faut savoir que l’on peut interpréter le 5% (ou le 1% en terminale S dans le cas d’un intervalle de fluctuation asymptotique à 99%[8]) comme la probabilité de commettre une erreur de décision (probabilité de rejet de l’hypothèse sachant qu’elle est vraie). En cas d’acceptation de l’hypothèse, il faut savoir que l’estimation de la probabilité d’erreur de décision est plus compliquée, puisqu’elle dépend de la valeur alternative de *p*[9]. Il faudrait par exemple envisager une autre valeur possible de *p* ou balayer différentes valeurs possibles, avec un tableur par exemple.

Un exemple dans une situation bilatérale

L’exercice suivant, où il est question de variable aléatoire, peut être proposé au niveau première ou terminale.

> On considère la couleur des yeux des mouches drosophiles. Par croisement de mouches homozygotes « yeux rouges » de gènes AA et de mouches homozygotes « yeux bruns » aa, on obtient des mouches hétérozygotes Aa. Si l’on croise ces hétérozygotes entre eux,

---

5 L’estimation par intervalle de confiance est une démarche inductive à l’état d’esprit très différent de celui d’un test. On n’y retrouve pas la démarche déductive de type « raisonnement par l’absurde » à l’œuvre dans la prise de décision correspondant aux tests, en cas de rejet de l’hypothèse. Il faut absolument éviter de mener les deux démarches pour une même situation.

6 Dans certains cas, voir par exemple les cas de leucémies à Woburn (document ressources pour le lycée professionnel), on ne peut procéder ainsi. Le raisonnement consiste à supposer que l’échantillon étudié résulte d’un échantillonnage aléatoire sous une certaine hypothèse.

7 Dans nombre d’exercices présents dans les manuels de terminale (2012), on débute par une observation sur un échantillon, puis on envisage une, voire plusieurs règles de décision.

8 Le choix du seuil de décision (1% ou 5%) doit, bien entendu, se faire avant la prise d’échantillon. Il dépend du risque (de première espèce) consenti (si l’on diminue le risque de première espèce, on augmente le risque de seconde espèce, à taille d’échantillon égale). Ce choix dépend des utilisateurs et non du statisticien.

9 Les notions d’erreur de première et de seconde espèces ne sont pas au programme au lycée (aucune autonomie des élèves à ce sujet n’est attendue, ni même la connaissance de ce vocabulaire). Pour autant, il nous semble inconcevable de passer cette problématique (il y a deux types d’erreurs et donc de risques) complètement sous silence, tant elle est essentielle. Une analogie simple suffit à faire comprendre la situation. Une prise de décision est comme un jugement au tribunal. L’hypothèse est que le prévenu est présumé innocent. Il y a deux risques au jugement : celui de condamner un innocent (rejet à tort de l’hypothèse, première espèce), ou d’absoudre un coupable (acceptation à tort de l’hypothèse, seconde espèce).

on doit obtenir, selon les lois de Mendel, dans cette seconde génération, 75% de « yeux rouges » (AA et Aa) et 25% de « yeux bruns » (aa).
On souhaite tester l'hypothèse selon laquelle la proportion de drosophiles « yeux rouges » de seconde génération est $p = 0{,}75$ en mettant en place une expérimentation permettant d'observer 300 drosophiles de seconde génération (considérées comme un échantillon aléatoire).
1. Sous l'hypothèse $p = 0{,}75$, déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la variable aléatoire correspondant à la fréquence du caractère « yeux rouges » sur un échantillon aléatoire de taille 300.
2. Énoncer la règle de décision permettant de rejeter, ou non, l'hypothèse $p = 0{,}75$, au seuil de 5%, sur un échantillon aléatoire de taille 300.
3. L'expérience permet d'observer 237 « yeux rouges » et 63 « yeux bruns ». Cette répartition est-elle conforme à la loi de Mendel, au seuil de décision de 5% ?

Détaillons le raisonnement que l'on peut suivre.

1. On considère que les 300 drosophiles qui seront observées résultent d'un tirage au hasard et avec remise dans la population des drosophiles de seconde génération. Dans ce cadre, la variable aléatoire X correspondant au nombre de drosophiles présentant le caractère « yeux rouges » dans un tel échantillon suit, sous l'hypothèse $p = 0{,}75$, la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0{,}75$. Il est donc possible, sous l'hypothèse $p = 0{,}75$, de prévoir la « variabilité » de la variable aléatoire $F = \dfrac{X}{300}$ correspondant à la fréquence du caractère « yeux rouges » sur un tel échantillon. Compte tenu de la nature du problème (on accepte l'hypothèse $p = 0{,}75$ à condition que la fréquence observée ne s'en éloigne pas trop, ni à gauche, ni à droite), on recherche un intervalle de fluctuation « bilatéral » (c'est-à-dire avec une zone de rejet à gauche et une zone de rejet à droite) correspondant à une probabilité d'au moins 95%. Ceci de sorte que le risque[10] de rejeter à tort cette hypothèse soit d'au plus 5% et même, ici, d'au plus 2,5% de chaque côté. On est donc amené à rechercher les entiers a et b tels que : $P(X < a) \leq 0{,}025$ et $P(X > b) \leq 0{,}025$ (et donc $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$).

Le logiciel GeoGebra, dans sa version 4, permet de déterminer aisément (et de manière visuelle) ces valeurs a et b pour lesquelles les probabilités « à gauche » et « à droite » dépassent le seuil de 0,025. On trouve $a = 210$ et $b = 239$.

10 L'apport de Pearson et Neyman nous invite à porter le regard sur le risque (ici de première espèce) de sorte que l'intervalle de fluctuation utile à une prise de décision se détermine surtout par considération de son complémentaire. N'importe quel intervalle de fluctuation ne fait pas l'affaire et, d'une certaine façon, il y a ici unicité de la réponse à apporter dans la recherche de l'intervalle de fluctuation adapté au problème.

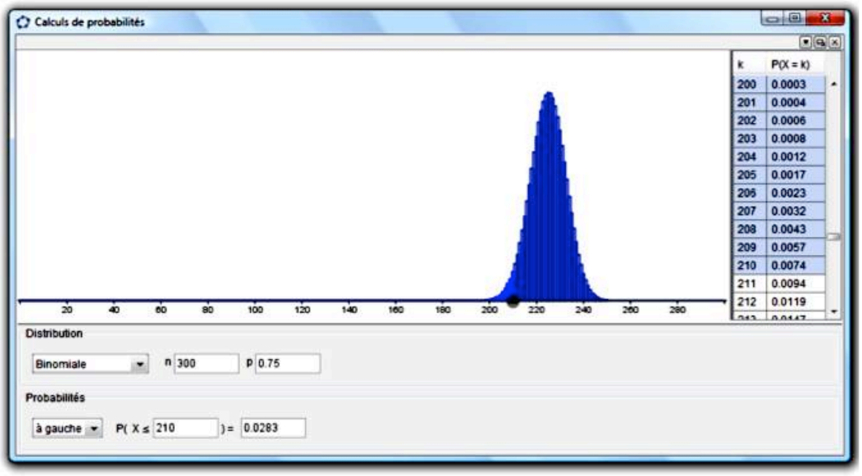


Figure 4 – Avec Geogebra, version 4, on trouve a *= 210 et* b *= 239.*

En divisant par 300, on obtient l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de F : $I = [0,7 ; 0,797]$.

En classe de terminale, on peut préférer utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique, déterminé à partir de la loi normale, et qui fournit un résultat extrêmement proche : [0,701 ; 0,799]. L'intervalle de fluctuation donné en seconde, majoration du précédent, est [0,69 ; 0,81].

2. Après prélèvement d'un échantillon aléatoire de taille 300 et calcul de la fréquence f du caractère « yeux rouges » sur cet échantillon, la règle de décision, au seuil de 5%, est la suivante : si f n'appartient pas à l'intervalle I de fluctuation à 95% précédent, on rejette l'hypothèse $p = 0,75$, si f appartient à I, on ne rejette pas cette hypothèse.

Il est important de savoir que les 5%[11] correspondent à la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse $p = 0,75$ (c'est comme cela qu'a été construite la procédure de décision).

3. On observe $f = 0,79$. Cette valeur appartient à l'intervalle I de fluctuation à 95%. Cette observation est donc « conforme à » (ou « compatible avec ») l'hypothèse $p = 0,75$ au seuil de décision de 5%. On s'exprime ainsi car, dans cette situation, il serait un peu étrange d'affirmer qu'on « ne rejette pas la loi de Mendel ». En cas de rejet de l'hypothèse, on serait sans doute amené à étudier les conditions du protocole expérimental.

Un exemple dans une situation unilatérale

Concernant une proportion, nombre de situations de prise de décision sont, de manière plus « naturelle », unilatérales plutôt que bilatérales. Il nous semble dommage de s'interdire l'accès à ces situations, tout en étant conscient qu'aucune autonomie des élèves n'est attendue à cet égard. Il ne s'agit pas pour autant de taire le problème et de faire, dans une situation annoncée comme unilatérale, « comme si de rien n'était »[12].

---

11 Avec la loi binomiale, ce n'est pas exactement 5% (on peut déterminer la probabilité correspondant à la zone de rejet).

12 C'est le cas dans de nombreux exercices présents dans des manuels de terminale (2012) où, dans une situation unilatérale, on semble prendre une décision « au seuil de 95% » alors qu'elle l'est au seuil de 97,5%.

Nous reprenons ici un exemple présenté dans le document ressources pour la classe de terminale[13], en insérant la question 2., essentielle à la compréhension du « 95% ».

> On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13%. Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthme et en informe les services sanitaires. Ceux–ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d'asthme.
> Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.
> La règle de décision prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.
> **1.** Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.
> **2.** Indiquer une valeur approchée de la probabilité de mener une investigation supplémentaire à tort (c'est-à-dire alors que la proportion d'enfants de 11 à 14 ans de la ville V ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13%) ?
> **3.** L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?

1. On trouve [0,06 ; 0,20]. Remarquons qu'il faut lire attentivement l'énoncé pour comprendre qu'il y a deux populations. Celle du département, où $p = 0{,}13$ est connu, et celle de la ville V, où l'on fait en quelque sorte, l'hypothèse que $p = 0{,}13$.
2. La problématique de cet exercice est unilatérale, ce qui est clairement affirmé dans la règle de décision. En revanche, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est bilatéral (c'est le seul au programme de terminale). On ne peut donc répondre « 5% » à la question posée. En revanche, un élève de terminale connaît la propriété de symétrie de la courbe de Gauss et sait donc que ces 5% (correspondant aux fréquences observées situées en dehors de l'intervalle de fluctuation lorsque $p = 0{,}13$) se partagent en 2,5% de chaque côté de l'intervalle de fluctuation. La probabilité demandée est donc d'environ[14] 2,5%.
Il est essentiel, et simple, de comprendre que le risque consenti de mener une investigation supplémentaire inutile (et éventuellement couteuse) est de 2,5%.
3. La valeur 0,19 est à l'intérieur de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%, on en conclut que la règle de décision choisie ne prévoit pas de réaliser une enquête supplémentaire[15].

---

[13] Voir [8] page 22.

[14] Le « environ » provenant de l'aspect asymptotique de l'intervalle de fluctuation. Pour un résultat « exact », travailler avec la loi binomiale.

[15] On peut faire remarquer que dans cette situation d'acceptation de l'hypothèse, on ne sait pas, en l'état, quantifier le risque. Cela peut-être prétexte à prolongement de l'exercice. Supposons par exemple que la proportion d'enfants de cet âge asthmatiques dans la ville V (connue comme souffrant de pollution de l'air) soit en fait de 25%, quelle est la probabilité que la règle de décision précédente conduise à accepter (à tort) l'hypothèse $p = 0{,}13$? En terminale, il s'agit d'une question « ouverte » : on peut effectuer des simulations, utiliser la loi binomiale ou calculer $P(F \leq 0{,}20)$, où F suit la loi normale de moyenne 0,25 et d'écart type .

b) Explorer un grand nombre de données

Le défi de la statistique du XXI[e] siècle est d'exploiter des quantités toujours plus gigantesques de données. Il est essentiel de placer les élèves dans des situations où il s'agit d'explorer un grand nombre de données et en particulier des données « réelles ». C'est l'occasion de mettre les élèves « en situation » d'un usage très actuel de la statistique, de développer des compétences de prise d'initiative, de choix de résumés numériques ou graphiques pertinents, d'outils de modélisation plus ou moins adaptés aux situations, et de montrer l'intérêt et la puissance des méthodes mises en œuvre. Nous évoquons ici deux exemples de traitements de données accessibles sur Internet[16].

Tailles père-fils (données de Karl Pearson)

Le statisticien britannique Karl Pearson (1857-1936), dans le cadre de recherches sur l'hérédité, a établi un fichier de 1 078 couples de mesures de la taille du père et du fils (adulte). Le fichier tableur fournit ces données, exprimées en mètres.

1. Regrouper les tailles des pères en classes d'amplitude 0,01 mètre. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de terminale ?

2. Même question pour les tailles des fils.

3. La taille moyenne d'un homme d'âge compris entre 20 et 29 ans est actuellement, en France, de 1,77 m. En utilisant le modèle de la question précédente estimer la probabilité qu'un jeune homme anglais de ces âges ait une taille supérieure ou égale à 1,77 m à la fin du XIX[e] siècle.

4. Représenter les points de coordonnées (x, y) correspondant aux tailles (père, fils) (« nuage de points ») et figurer la droite D d'équation $y = x$.

a. A-t-on autant de points au-dessus et en dessous de la droite D ? Donner une interprétation.

b. Pour $x \leq 1{,}58$, tous les points sont au-dessus de la droite D et pour $x \geq 1{,}88$, tous les points sont en dessous de D. Donner une interprétation.

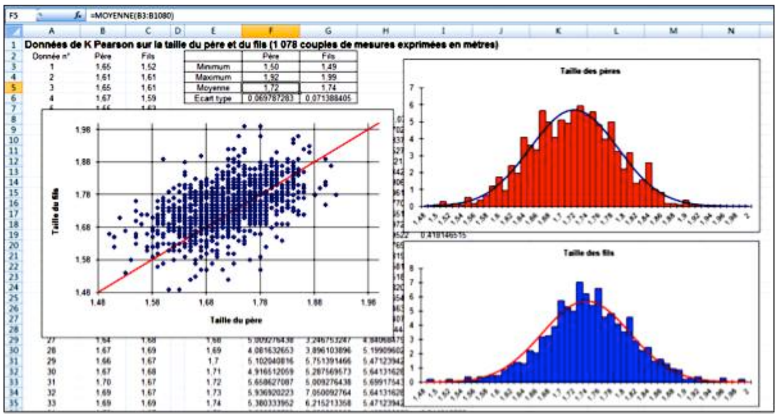


Figure 5 – Tailles père-fils

16 Il suffit, s'agissant ici de données anglo-saxonnes, d'entrer dans un moteur de recherche, *Karl Pearson height data set* ou *Old Faithful data set*.

Éruptions du geyser Old Faithful

Le geyser Old Faithful est situé dans le parc Yellowstone aux États-Unis. Son nom signifie « vieux fidèle » en raison de la régularité de ses éruptions. Les données statistiques permettent d'étudier cette « fidélité ». Le fichier tableur fournit la durée entre le début de chaque éruption, exprimée en minutes, pour les 5 699 éruptions de l'année 2010, ainsi que la durée moyenne journalière entre éruptions pour chacun des 365 jours de l'année.

1. Regrouper les 5 699 durées entre éruptions en classes d'amplitude 4 minutes. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de terminale ?

2. Regrouper les 365 durées moyennes journalières entre éruptions en classes d'amplitude une minute. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de terminale ?

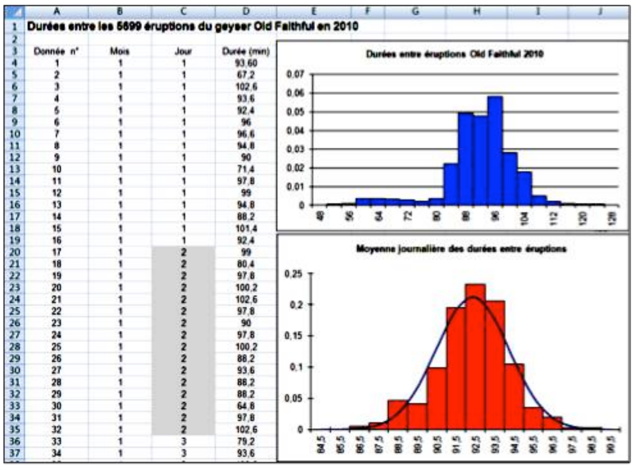


Figure 6 – Eruptions du geyser Old Faithful

2.2. En valorisant la démarche d'investigation et l'exploitation de logiciels

Ainsi que le signale l'introduction commune aux disciplines scientifiques des programmes de collège, « dans la continuité de l'école primaire, les programmes du collège privilégient pour les disciplines scientifiques et la technologie une démarche d'investigation », avec des spécificités en mathématiques, en particulier concernant la validation de conjectures à l'aide de démonstrations. Cette approche se poursuit au lycée et les exemples illustratifs seront ici choisis au niveau de la terminale scientifique, où se situe la nouveauté à la rentrée 2012.

Cette démarche « privilégie la construction du savoir par l'élève » : dans le cadre d'une « situation-problème », on réalise des « expériences », pouvant correspondre en mathématiques à une expérimentation à l'aide de logiciels, conduisant notamment à formuler des conjectures ou à mieux comprendre un concept. La simulation joue un rôle particulier dans l'expérimentation, notamment dans l'étude de phénomènes aléatoires.

Nous prenons trois exemples dans le domaine « probabilités-statistique » du nouveau programme de terminale scientifique (2012) montrant le rôle de l'expérimentation à l'aide de logiciels.

Introduction du théorème de Moivre-Laplace

En terminale S, le théorème de Moivre-Laplace peut être énoncé ainsi (il est admis) :

> Soit, pour tout entier n, une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $B(n, p)$ et soit $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, la variable centrée réduite associée à X_n.
>
> Alors, pour tous réels a et b, tels que $a < b$: $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \le Z_n \le b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Il n'est pas question d'énoncer ce résultat sans expérimentation préalable par les élèves (du moins souhaitons-le) et les commentaires du programme conseillent de s'appuyer sur l'observation graphique.

On peut proposer la démarche suivante (avec ici une présentation relativement « guidée »).

Dans une population, la proportion des personnes possédant le gène A actif est p = 0,4. On prélève au hasard un échantillon de taille n dans cette population (celle-ci étant suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise). On s'intéresse à la répartition de ce gène sur les différents échantillons possibles.

A. Histogramme normalisé de la loi binomiale centrée réduite

On désigne par X_n la variable aléatoire associant à chaque échantillon de taille n le nombre de personnes de l'échantillon possédant le gène A actif.

1. a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
b. Déterminer, en fonction de n, l'espérance m et l'écart-type σ de la variable aléatoire X_n.
c. On considère l'événement E_n : « $m - \sigma \le X_n \le m + 2\sigma$ ».
Vérifier que, pour $n = 5$, l'événement E_5 correspond, pour un échantillon de taille 5, à un nombre de personnes possédant le gène A actif compris entre 1 et 4.

2. On désigne par $Z_n = \dfrac{X_n - m}{\sigma}$, la variable aléatoire centrée réduite correspondant à X_n.
a. Écrire, à l'aide de Z_n, l'événement E_n.
b. De quelle forme sont les valeurs z_k, pour k entier allant de 0 à n, prises par la variable aléatoire Z_n ? Quel est l'écart entre deux valeurs consécutives z_k et z_{k+1} ?
c. On souhaite représenter l'histogramme normalisé de la variable aléatoire Z_n. Il s'agit d'un histogramme pour lequel l'aire de chaque rectangle est égal à la probabilité $P(Z_n = z_k)$.
Quelle est la largeur commune des rectangles ?
Quelle est la hauteur du rectangle correspondant à $Z_n = z_k$?
d. Sur GeoGebra, créer un curseur n allant de 5 à 5 000 puis calculer m et σ.
Créer l'histogramme normalisé de Z_n en entrant dans la barre de saisie :
H=Histogramme[Séquence[(i-m)/σ-0.5/σ,i,0,n+1],
Séquence[σ*Binomiale[n,0.4,k,false],k,0,n]]
Qu'observe-t-on lorsque n augmente ?
e. Pour $n = 5$, à quelle aire correspond la probabilité $P(E_5)$?

f. Sur GeoGebra, la fonction floor fournit l'entier directement inférieur à un nombre et la fonction Binomiale[n,p,k,true] calcule la probabilité qu'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p prenne une valeur inférieure ou égale à k.
On suppose que $m - \sigma$ n'est pas entier. Montrer que l'on calcule $P(E_n)$ en saisissant :
P=Binomiale[n,0.4,floor(m+2*σ),true]-Binomiale[n,0.4,floor(m-σ),true]
Que vaut $P(E_5)$?

B. Courbe de Gauss et loi normale centrée réduite

1. La courbe de Gauss, correspondant à la densité normale centrée réduite, représente la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
Représenter f sur le fichier GeoGebra. Que constate-t-on ?

2. Calculer, à l'aide de GeoGebra, l'intégrale $I = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.

3. Comparer $P(E_n)$ et I lorsque n augmente.

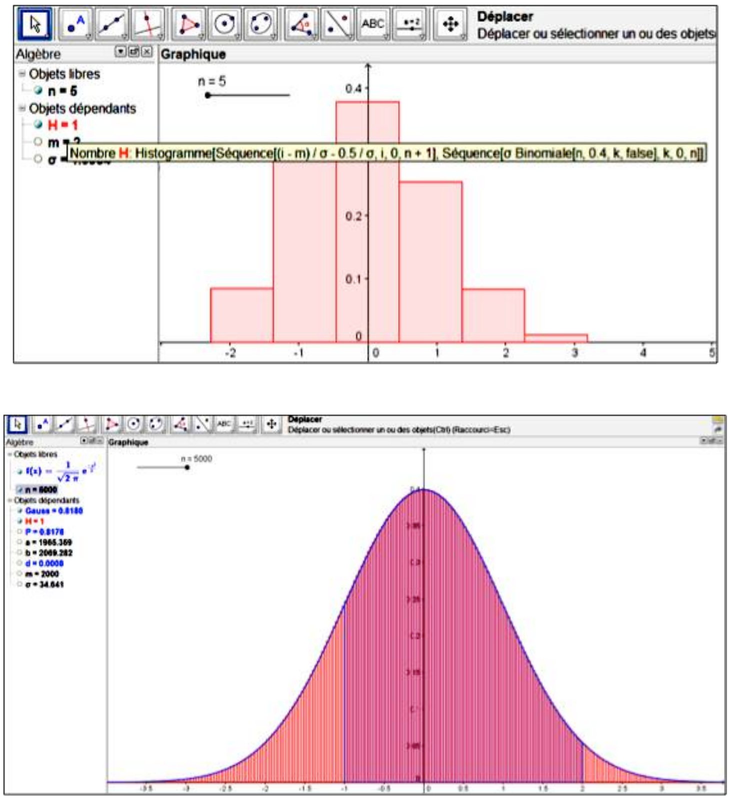


Figure 7 – Introduction du théorème de Moivre-Laplace

Expérimentation de la notion d'intervalle de confiance

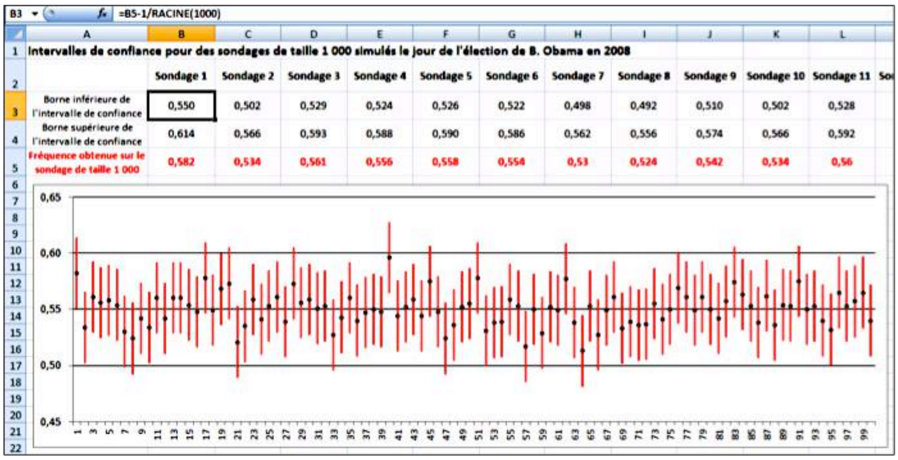
La simulation est un outil précieux favorisant la compréhension de la notion d'intervalle de confiance et en particulier le sens du terme « confiance ».

Le fichier tableur simule des sondages aléatoires de taille 1 000 le jour de l'élection de Barack Obama c'est-à-dire avec une fréquence d'opinions favorables égale à p = 0,55 dans la population.

Pour chaque sondage simulé, fournissant une fréquence d'opinions favorables f, est représenté « l'intervalle de confiance » au niveau de confiance de 95% :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{1000}} \; ; \; f + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right].$$

a. La fréquence obtenue par Barack Obama le jour de l'élection est-elle toujours comprise dans l'intervalle de confiance ?
b. En faisant plusieurs simulations, estimer approximativement le pourcentage d'intervalles de confiance contenant le résultat de l'élection.
c. Deux intervalles de confiance peuvent-ils être disjoints ?


B3 =B5-1/RACINE(1000)

Intervalles de confiance pour des sondages de taille 1 000 simulés le jour de l'élection de B. Obama en 2008

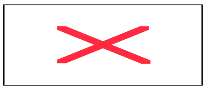
	Sondage 1	Sondage 2	Sondage 3	Sondage 4	Sondage 5	Sondage 6	Sondage 7	Sondage 8	Sondage 9	Sondage 10	Sondage 11
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	0,550	0,502	0,529	0,524	0,526	0,522	0,498	0,492	0,510	0,502	0,528
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	0,614	0,566	0,593	0,588	0,590	0,586	0,562	0,556	0,574	0,566	0,592
Fréquence obtenue sur le sondage de taille 1 000	0,582	0,534	0,561	0,556	0,558	0,554	0,53	0,524	0,542	0,534	0,56

Figure 8 – Expérimentation de la notion d'intervalle de confiance

Erreur de décision lors de la comparaison de deux intervalles de confiance

On trouve dans plusieurs manuels de terminale S (2012), dans le cas de deux intervalles de confiance disjoints, une expression du type « on conclut au niveau de confiance de 95% que les proportions correspondantes sont différentes ». Cette expression n'est pas correcte. Il suffit d'expérimenter pour s'en rendre compte.

On considère deux médicaments A et B dont on veut comparer les effets. À partir de deux échantillons de n malades, les uns traités avec le médicament A, les autres traités avec le médicament B, on construit deux intervalles de confiance à 95% des probabilités de guérison de chaque médicament. On considèrera qu'il existe une différence significative entre les deux traitements lorsque les deux intervalles de confiance sont disjoints.
Prenons par exemple $p = 0{,}7$ et estimons la probabilité d'obtenir deux intervalles de confiance à 95% disjoints sur deux échantillons de taille 100 prélevés dans la même population où $p = 0{,}7$.
1. On considère les fréquences f_1 et f_2 de malades guéris observées sur chacun des échantillons de taille n. Montrer que les deux intervalles de confiance à 95% correspondants (on utilise l'expression au programme de terminale) sont disjoints lorsque $|f_1 - f_2| > 0{,}2$.
2. À l'aide de simulations, estimer la probabilité de l'erreur de décision correspondant à l'obtention de deux intervalles de confiance à 95% disjoints alors que la proportion dans la population est la même, $p = 0{,}7$.

3. On reprend la même étude en considérant l'intervalle de confiance à 95% « standard » utilisé dans le post-bac et correspondant à l'expression *f*
.
On a obtenu les images d'écran de la feuille de calcul suivantes.

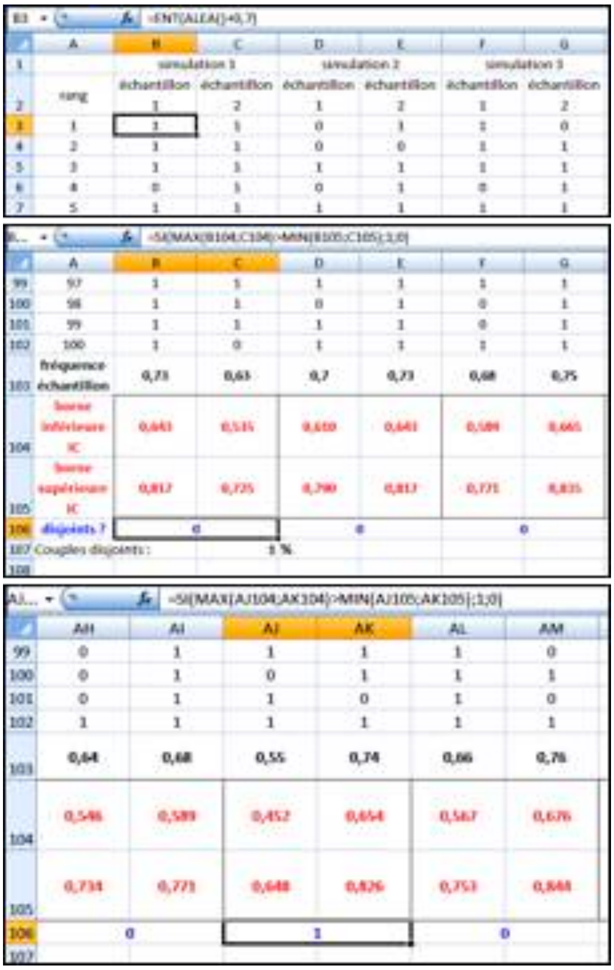


Figure 9 – Images d'écran de la feuille de calcul

a. Quelle formule peut-on entrer en cellule B104 ?
b. Quel est le rôle de la formule =SI(MAX(B104;C104)>MIN(B105;C105);1;0) entrée en cellule B106 ?
c. Sur un grand nombre de simulations, la cellule C107 affiche en moyenne environ 0,5%. Que peut-on en déduire ?

2.3. En évaluant l'ensemble des compétences acquises

Prenons l'exemple du programme de terminale scientifique (2012) dont les objectifs, en termes de compétences, sont les suivants :

> Outre l'apport de connaissances nouvelles, le programme vise le développement des compétences suivantes :
> – mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
> – mener des raisonnements ;

– avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
– communiquer à l'écrit et à l'oral.

Les modes d'évaluation prennent des *formes variées, en phase avec les objectifs poursuivis. En particulier, l'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes est à évaluer.*

Á l'écrit au baccalauréat : algorithmique Pondichéry S 2012

La forme écrite de l'évaluation au baccalauréat limite la cadre de l'évaluation, notamment concernant la mobilisation de l'outil informatique pour la résolution de problème. Prenons l'exemple de la question d'algorithmique posée au baccalauréat S 2012 à Pondichéry.

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle anti-dopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   – « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
   – l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a :=$rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ; $c :=$and(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ; $e :=$ rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

   (a) Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2, 11, 44, 2, 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

   (b) Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?
3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.
4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

   (b) On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants :
   – il a été contrôlé 5 fois exactement ;
   – il n'a pas été contrôlé ;
   – il a été contrôlé au moins une fois.

Figure 10 – Question d'algorithmique, baccalauréat S, Pondichéry, 2012

Dans le cadre de travaux pratiques informatiques : simulation d'une loi normale par la méthode du rejet

L'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes *doit* être évaluée, en cours d'année, dans le cadre de séances de travaux pratiques. Un compte-rendu de TP peut être relevé en fin de séance, ou rédigé hors la classe. Le TP peut comprendre, à différents moments clés, des appels au professeur pour évaluer, « en direct » et à l'oral, des compétences de prise d'initiative ou d'argumentation.

On cherche à simuler des réalisations d'une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite, de densité f définie, pour tout réel x, par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. La fonction f est représentée ci-dessous.

Dans ce TP, on suppose que le générateur de nombres aléatoires de l'ordinateur simule parfaitement une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle [0, 1].

1. a. Donner la valeur m du maximum de $f(x)$.

b. Quelle est la probabilité que Z prenne ses valeurs en dehors de l'intervalle [– 5, 5] ?

c. Que vaut, approximativement, l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation x = – 5 et x = 5, exprimée en unités d'aires ?

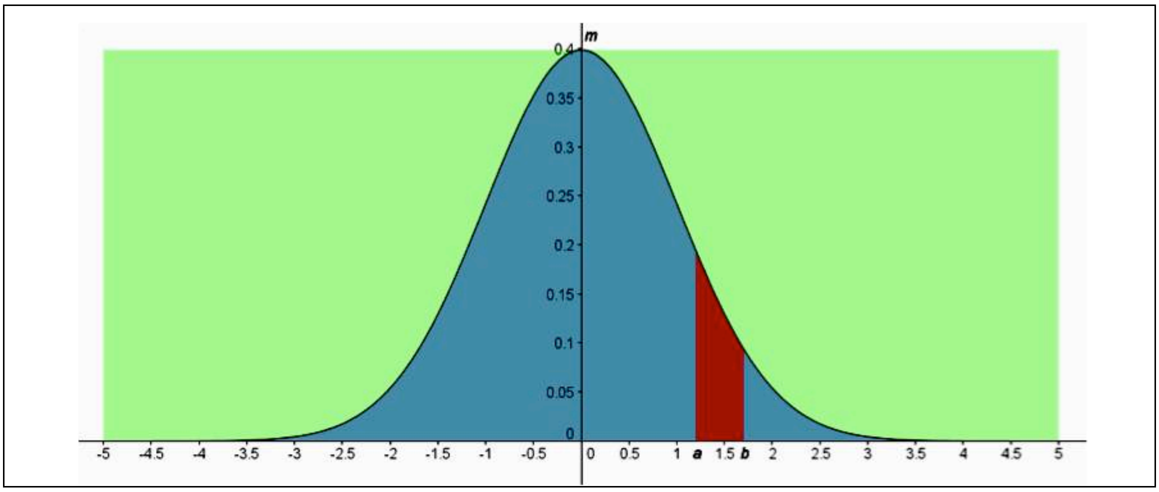


Figure 11 – Que vaut approximativement l'aire du domaine en rouge ?

2. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
m=1/sqrt(2*%pi)
function y=f(x)
    y=m*exp(-x*x/2)
endfunction
x=-5+10*rand()
y=m*rand()
while y>f(x)
    x=-5+10*rand()
    y=m*rand()
end
disp(x)
```

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire X dont x, dans l'algorithme ci-dessus, est une réalisation ?
b. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y dont y, dans l'algorithme ci-dessus, est une réalisation ?
c. Donner une interprétation graphique d'une réalisation (x, y) des deux variables aléatoires précédentes.
d. Interpréter graphiquement la condition de « rejet » figurant dans la boucle « tant que ».
e. Quelle est la probabilité de « rejet », c'est-à-dire que la condition de la boucle soit satisfaite ?
f. Soit a et b deux nombres de l'intervalle $[-5, 5]$ avec $a \leq b$. Quelle est la probabilité qu'une valeur x acceptée (c'est-à-dire sortant de la boucle « tant que ») soit comprise dans l'intervalle $[a, b]$?
Que peut-on en déduire ?
2. Implanter l'algorithme sur un ordinateur.
3. Modifier l'algorithme de sorte qu'il génère 10 000 valeurs. Implanter ce nouvel algorithme et, selon les possibilités du logiciel, afficher un histogramme et comparer avec la représentation graphique de f.

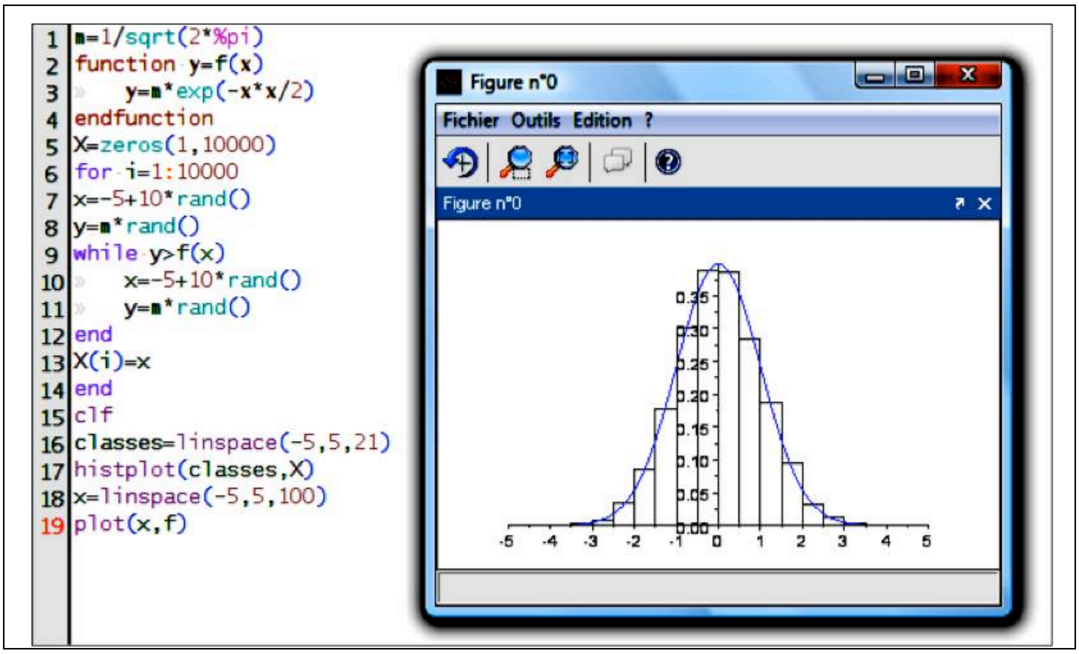


Figure 12 – L'algorithme génère 10 000 valeurs, représentées par un histogramme

Une autre méthode de simulation justifiant l'appellation de loi « normale » (illustration du théorème central limite) peut faire l'objet d'un TP analogue à l'exemple précédent :

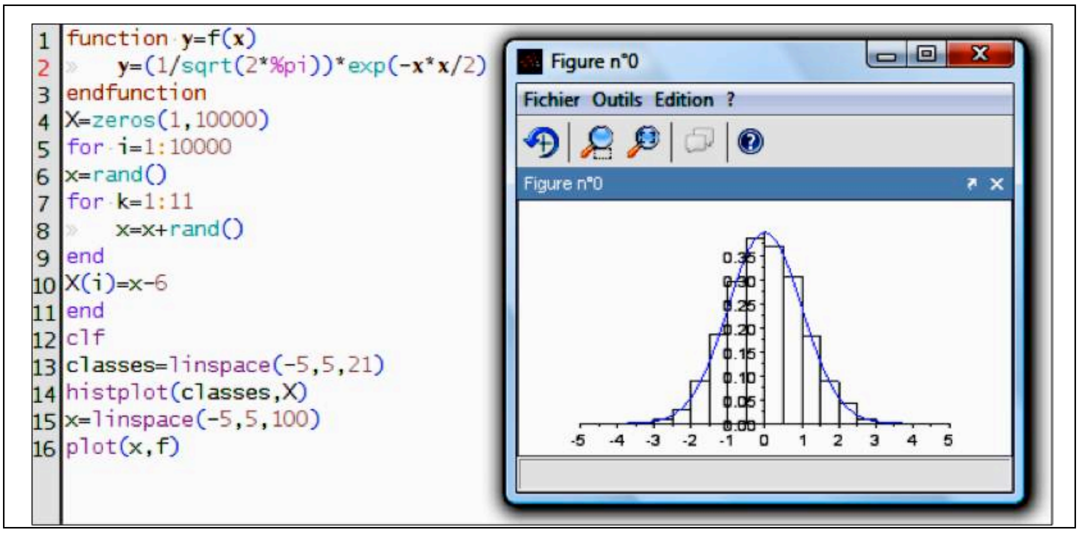


Figure 13 – Une autre méthode de simulation justifiant l'appellation de loi « normale »

Dans le cadre de la résolution d'une « tâche complexe » : les méfaits du tabac

Voici un exemple de problème présenté de façon « ouverte ».

> Dans un numéro datant de 1950 du *Journal de l'Association médicale américaine*, Ernst L. Wynder, étudiant en médecine, et Ewarts Graham, chirurgien, comparent 605 cas de cancers du poumon chez les hommes à 780 hommes « témoins », n'ayant pas de cancer du poumon, recrutés dans plusieurs hôpitaux des États-Unis.
> La fréquence f_1 d'hommes fumeurs est de 91,3% parmi les « cas » atteints d'un cancer du poumon et la fréquence f_2 de fumeurs est de 65,3% parmi le groupe « témoin ».
> Wynder et Graham concluent que « l'utilisation excessive et prolongée du tabac, en particulier de cigarettes, semble être un facteur important capable d'induire le cancer du poumon ».
> Comment peut-on justifier cette affirmation ?

De la seconde à la terminale, la simulation ou les outils statistiques permettent de répondre de différentes façons.

3. Formation des enseignants

3.1. Un état des lieux en statistique

Dans le cadre d'une thèse soutenue en 2005[17], Floriane Mathieu-Wozniak interrogeait 41 professeurs stagiaires de mathématiques sur leur image des différents domaines enseignés. Il en ressort que la statistique est plutôt « mathématique » : là-dessus, il n'y a pas de doute – même si elle l'est un peu moins que les autres domaines considérés. En revanche, elle est sensiblement moins brillante, quelque peu terne, elle est moins belle et moins profonde.

17 Voir [3].

Figure 14 – Réponses de 41 professeurs stagiaires concernant leur image de différents domaines enseignés.

Cette image, assez négative, de la statistique est sans doute encore relativement majoritaire chez les professeurs de mathématiques français, même si l'on peut penser qu'elle évolue et que, par leur formation, les nouveaux professeurs l'ont en grande partie dépassée (la préparation du CAPES intègre dorénavant des leçons de statistique inférentielle issues des programmes de BTS). Elle s'explique en partie par un manque de formation dans le domaine et des contenus d'enseignement souvent techniques et peu intéressants. Par ailleurs, il s'agit en statistique de mathématiques « différentes » (rôles des raisonnements inductifs et déductifs, de la modélisation) conduisant à des attitudes pédagogiques inhabituelles.

La situation dans les classes a sans doute quelque peu évolué depuis 2005. La simulation (au programme depuis 2000) est globalement enseignée en seconde. On rencontre cependant encore fréquemment des professeurs rejetant l'enseignement de la statistique et des probabilités en fin de progression et abordant de manière incomplète les contenus du programme. L'approche fréquentiste de la notion de probabilité en troisième est peu développée et il n'est pas rare de voir, dans les cahiers des élèves, des cours de probabilités débutant par une définition correspondant au rapport des cas favorables aux cas possibles. Un enseignement trop académique de la statistique inférentielle en terminale scientifique, contextualisant peu ou mal, sans laisser de place à l'expérimentation, est à craindre, notamment de la part de professeurs peu familiers de ce type d'enseignement et non formés.

3.2. Des priorités de formation

Les priorités de la formation des professeurs du secondaire pour l'enseignement de la statistique pourraient être les suivantes.

1) La présentation de situations dans des contextes variés, notamment avec de « vraies données statistiques » et une initiation à la modélisation.

Il peut s'agir d'accompagner les enseignants dans les choix des activités proposés par les manuels, mais, pour l'essentiel cet apport documentaire proviendra d'institutions : formateurs IUFM, IREM, SFdS, APMEP, ressources Internet telles que celles du site Statistix... Il s'agit d'avoir les bons supports d'activité et cela demande une certaine expertise.

2) Une formation à l'organisation et à l'encadrement de la démarche d'investigation, à sa mise en œuvre avec différents logiciels et à son évaluation (prise d'information « en direct » lors de travaux pratiques, comptes-rendus de TP, possibilités offertes par les logiciels - tableurs, GeoGebra, Scilab, R ...).

On rejoint ici des besoins plus globaux de formation, qui ne sont pas spécifiques à l'enseignement de la statistique et des probabilités, mais qui, dans ce domaine, sont incontournables.

3) Des apports théoriques permettant le recul nécessaire à l'enseignement des notions nouvellement introduites dans les programmes du secondaire.

C'est une évidence, mais parce que c'est une évidence nous avons tenu à placer les deux premiers points avant. En effet, les apports théoriques ne suffisent pas et l'opérationnalité de cet enseignement passe avant tout par la contextualisation, la modélisation et l'expérimentation. Par ailleurs, la culture historique des enseignants concernant la statistique est souvent réduite. Une meilleure connaissance de la genèse, dans la première moitié du XX^{e} siècle, des notions de test d'hypothèse et d'intervalle de confiance, des débats et controverses qu'elles ont suscités, notamment entre Fisher et Pearson-Neyman, éclaire utilement leur enseignement. La formation devrait intégrer cet aspect[18].

Conclusion

On attribue à Herbert George Wells (1866-1946) la « prophétie » suivante :

> Statistical thinking will one day be as necessary for efficient citizenship as the ability to read and write.

Ce jour est venu.

L'American Statistical Association liste six recommandations pour l'enseignement de la statistique[19] :

1. Mettre l'accent sur les compétences statistiques du citoyen (*statistical literacy*) et développer l'esprit statistique.
2. Utiliser de vraies données.

---

18 Voir [2].

19 Voir [1].

3. Privilégier la compréhension des concepts plutôt que l'accumulation de connaissances techniques.
4. Favoriser l'apprentissage actif dans la classe.
5. Utiliser la technologie pour développer la compréhension des concepts et l'analyse des données.
6. Utiliser les évaluations pour améliorer l'apprentissage des élèves.

On ne peut que souscrire à ces recommandations. Les nouveaux programmes du secondaire sont relativement novateurs et ambitieux dans le domaine de la statistique, un effort particulier de formation et d'accompagnement des enseignants est nécessaire à la réussite de leur mise en œuvre.

REFERENCES

[1] AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION, *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education – College report*, ASA 2005 et 2010. Rapport téléchargeable à l'adresse : http://www.amstat.org/education/gaise/

[2] ARMATTE, Michel, *Le rôle de l'histoire dans l'enseignement de la statistique*, Revue électronique *Statistique et enseignement*, SFdS 2010, www.statistique-et-enseignement.fr.

[3] MATHIEU-WOZNIAK, Floriane, *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. un repérage didactique*, thèse sous la direction d'Yves CHEVALLARD (2005).

http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/41/60/PDF/these_wozniak_floriane.pdf

[4] MEUSNIER, Norbert, *Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et des statistiques* dans *Histoire de probabilités et de statistiques*, Ellipse, 2004.

[5] Ressources pour la classe de première générale et technologique – *Statistiques et probabilités*, DGESCO 2011.

[6] Ressources pour la classe terminale générale et technologique – *Probabilités et statistique*, DGESCO 2012.

Les documents ressources sont accessibles par :

http://eduscol.education.fr/cid45766/mathematiques-pour-le-college-et-le-lycee.html

PACEM : UNE EXPERIMENTATION DE FORMATION D'ENSEIGNANTS EN MATHEMATIQUES A L'ECOLE ET AU COLLEGE

Jean-François CHESNE

Résumé – PACEM (Projet pour l'acquisition de compétences en mathématiques) est une expérimentation conçue et mise en œuvre par la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP). Sa caractéristique principale est de mettre explicitement en lien une action de formation continue d'enseignants avec l'amélioration des résultats des élèves, en prenant comme levier des évaluations standardisées. La question de l'éducation prioritaire est centrale dans l'expérimentation.

Préambule

L'amélioration des acquis des élèves est une question centrale du système éducatif qui peut être abordée par de multiples entrées : par exemple en changeant les programmes scolaires, en jouant sur les effectifs des classes, ou en misant sur un accompagnement individualisé des élèves. L'expérimentation PACEM choisit d'agir sur les pratiques quotidiennes des enseignants dans leurs classes dans le cadre d'un dispositif de formation continue. Sa spécificité est d'une part d'ancrer cette formation sur des évaluations standardisées, et d'autre part de dépasser un changement de pratiques des seuls enseignants ayant bénéficié de la formation. Menée en 2010-2012 par la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP), cette expérimentation concerne l'enseignement des mathématiques à un moment clé de l'école du socle puisqu'elle concerne la fin de l'école élémentaire (CM1-CM2), et le début du collège (6^{e}-5^{e}). Elle prend très fortement en compte la question de l'éducation prioritaire.

Cette expérimentation a la particularité d'être intégralement prise en charge par le bureau de l'évaluation des actions éducatives et des expérimentations de la DEPP, de sa conception à la mise en œuvre des évaluations des élèves, de la conception à la mise en œuvre des formations à destination des enseignants. Soutenue à son lancement par les membres du groupe de mathématiques de l'inspection générale de l'Education nationale (IGEN), elle a bénéficié d'appuis académiques et départementaux indispensables à son implantation et à son déploiement dans les établissements scolaires sélectionnés, ainsi que de la collaboration d'Aline Robert, de Janine Rogalski (LDAR, Université Paris Diderot) et d'Eric Roditi (EDA, Université Paris-Descartes). Elle a pour ambition de lier plusieurs dimensions – évaluation des acquis des élèves, pratiques enseignantes, formation des enseignants –, ce qui fait sa singularité, car elle dépasse une simple enquête sur les acquis des élèves ; mais cette complexité va rendre d'autant plus difficile l'analyse des données recueillies. Les effets établissement, classe ou enseignant seront en particulier des variables dont il sera important de déterminer l'impact ; c'est la raison pour laquelle nous nous sommes efforcés de recueillir le maximum de données contextuelles. Un autre aspect porte sur la question des pratiques efficaces versus les bonnes pratiques et à travers elle, se pose celle de la nature des connaissances acquises par les élèves, et de celles qu'on est capable d'évaluer. Enfin, se pose la question de l'influence dans le temps d'un dispositif sur les apprentissages : il semble en particulier que l'effet d'un enseignant soit plus perceptible sur une année en mathématiques qu'en lecture, mais moins perceptible sur le long terme.

Fondements et enjeux

Un contexte d'évolution des pratiques

PACEM s'inscrit d'une part dans un contexte de questionnement sur la réussite des élèves et sur l'évolution des pratiques enseignantes, et d'autre part dans un contexte d'accompagnement de la mise en place de nouveaux objectifs institutionnels. En effet, un certain nombre d'évaluations nationales ou internationales antérieures conduites par la DEPP montre des résultats convergents : parmi eux, citons l'augmentation du nombre d'élèves de bas niveaux et l'impact de l'environnement socio économique des élèves sur leurs réussites et leurs parcours scolaires. Bien que diffusés par le biais de notes d'informations et de dossiers publiés par la DEPP, il est légitime de s'interroger sur la prise en compte de ces résultats par les enseignants dans leurs pratiques quotidiennes. De façon générale, nous faisons l'hypothèse que, si les évaluations à large échelle (sur échantillons ou exhaustives) ont de plus en plus d'importance dans le pilotage du système éducatif français, la plupart des enseignants semblent considérer qu'elles constituent davantage, voire exclusivement un outil externe de mesure des acquis des élèves plutôt qu'un ensemble de ressources pour la classe.

Dans le même temps, les sept dernières années ont vu, avec l'apparition du socle commun de connaissances et de compétences et la réécriture des programmes de l'école et du collège, des évolutions sensibles dans l'organisation des enseignements et des pratiques pédagogiques souhaitées. Il est donc important de s'interroger sur la question de la pénétration de ces nouveaux textes auprès du corps enseignant, de leur interprétation et de l'esprit dans lequel ils peuvent être mis en œuvre. Dans ce contexte, la transition école/collège prend notamment une place tout à fait actuelle dans la réflexion sur la construction d'une école du socle. Enfin, cette expérimentation renvoie à la mise en œuvre des évaluations nationales de CE1, de CM2 (et bientôt de 5^{e}) qui posent la question, au-delà des remontées chiffrées de leurs résultats, de leur exploitation locale par les enseignants.

Parallèlement à ces questionnements, des dynamiques institutionnelles existent, avec une volonté affirmée de faire progresser les acquis des élèves en mathématiques et d'accompagner les enseignants dans l'évolution de leurs pratiques : documents ressources pour les enseignants, action nationale menée par le groupe du 1er degré de l'inspection générale en direction des inspecteurs de l'Education nationale (IEN) visant à piloter des missions mathématiques dans chaque département.

Un cadre d'expérimentation étayé

Si une connaissance précise du monde enseignant, une expérience de la formation initiale, continue et de la liaison école/collège ont motivé la nature et les contenus de la démarche d'expérimentation, celle-ci prend ancrage dans un cadre théorique qui est celui de la double approche, conçu et développé par A. Robert et J. Rogalski. Celui-ci permet d'analyser les pratiques des enseignants, relativement aux résultats de leurs élèves en prenant en compte les tâches proposées et les contraintes liées à l'exercice du métier au quotidien, afin de déterminer ce qui peut varier dans ces pratiques. Des hypothèses sur la formation des enseignants mettant en jeu l'efficacité du travail dans une « Zone Proximale de Développement des Pratiques » m'ont conduit ensuite à élaborer des éléments de formation.

Des résultats institutionnels ainsi que des travaux issus de la recherche servent également d'étayage à ce projet, notamment les rapports de l'IGEN sur l'école primaire, les travaux de R. Douady et de M.-J. Perrin-Glorian sur les aires, ceux de D. Butlen sur le calcul mental ou encore ceux de M.-L. Peltier et d'A. Van Zanten sur l'éducation prioritaire.

Enfin, cette étude s'appuie sur la conviction forte que l'on peut « changer les choses » lorsque l'on est enseignant, ce qui n'est en fait qu'une façon de réaffirmer l'impact primordial et identifié par de nombreuses études, en particulier anglo-saxonnes, de l'effet enseignant dans la réussite des élèves.

Dès lors, il apparaît très clairement que l'enjeu de cette étude, qui fait s'entrecroiser un travail sur la formation des enseignants et un travail sur les évaluations des élèves, sera d'apporter des réponses sur la question de l'appropriation des résultats d'évaluations standardisées par les enseignants et de s'interroger sur la nature des effets qu'elle peut produire sur leurs pratiques, et plus largement de chercher à savoir dans quelle mesure une action de formation continue « ordinaire » a un impact sur les acquis des élèves.

Présentation du dispositif

L'expérimentation a démarré en septembre 2010, sur deux niveaux et dans deux académies différentes, et s'est terminée en juin 2012. En 2010-2011, elle a été mise en œuvre en CM1, à Marseille, dans des écoles relevant presque toutes de l'éducation prioritaire, et en 6^{e}, dans l'académie de Créteil, sur un échantillon de collèges dont presque la moitié relève de l'éducation prioritaire. En 2011-2012, le dispositif a été reconduit en CM1 et en 6^{e} avec le même protocole, et les élèves concernés en 2010-2011 ont été testés en fin de CM2 et de 5^{e} via les évaluations nationales.

Le projet, envisagé dans sa globalité, comporte, du côté des enseignants, une dimension individuelle, à l'échelle de la classe, et une dimension collective, à l'échelle de l'école ou du collège. Au niveau de la classe, il vise la prise en compte, par chaque enseignant, des réussites des élèves, mais aussi la compréhension de leurs difficultés afin de mettre en œuvre des stratégies pour les traiter. Les apports reçus et les échanges entre collègues lors de la formation ont pour objectif de les amener à adapter leur enseignement quotidien, à construire de nouvelles séquences pour leur classe, à les penser différemment dans leur progression annuelle. Au niveau de l'établissement, le projet mise sur une percolation de la formation, c'est-à-dire sur la diffusion par les enseignants de la formation auprès de leurs collègues après appropriation (avec transformation probable). Ce questionnement des pratiques personnelles vise à enclencher une dynamique collective puisque ces démarches demandent à être partagées et interrogées, et peut même aller jusqu'à la construction d'un projet commun d'enseignement, par exemple sur le cycle 3 pour les écoles.

Le protocole suivi en 2010-2011 comprend les éléments suivants :

- un test en début d'année scolaire : ce test sert à la fois de mesure initiale (« pré-test ») du niveau des élèves et d'appui pour la formation des enseignants ;
- une formation pour certains enseignants parmi ceux qui sont engagés dans

l'expérimentation : ce sont les correspondants du projet ;
- une « percolation » des éléments reçus pendant la formation auprès des collègues participant à l'expérimentation qui n'ont pas été directement formés (les enseignants associés au projet) ;
- une plate-forme collaborative ;
- une collaboration avec les inspections locales ;
- un test en fin d'année scolaire (« post-test ») ;
- un recueil de données contextuelles : éléments d'information sur les pratiques des enseignants - observations et enregistrements audio ou vidéo de séances, cahiers d'élèves, réponses à un questionnaire en ligne – éléments d'information sur les établissements (EP, non EP), éléments d'information sur les élèves (âge, sexe, CSP).

La poursuite de l'expérimentation en 2011-2012 a consisté en :
- un prolongement du travail avec les enseignants de CM1 et de 6^{e} avec un protocole analogue à celui de 2010-2011 (et une extension de l'échantillon témoin en 6^{e}) ;
- une formation et un cadre d'expérimentation plus précis ;
- une évaluation en CM2 et en 5^{e} : pas d'évaluation initiale en septembre ; des tests en fin d'année (évaluations nationales + items d'ancrage) ;
- deux niveaux d'analyse : effets de l'expérimentation sur 2 ans en CM1 et en 6^{e}; effets de l'expérimentation sur 2 ans pour deux cohortes d'élèves.

En CM1, l'étude s'est concentrée sur un domaine du programme de mathématiques – « Grandeurs et mesures » – choisi par le groupe départemental des Bouches-du-Rhône en mathématiques pour le 1er degré. On peut considérer qu'il s'agit d'un domaine nouveau puisqu'après plus de 30 ans d'absence, il fait sa réapparition en 2002 comme une partie spécifique des programmes de mathématiques. L'immense majorité des enseignants actuels n'en possède de ce fait qu'une culture assez restreinte, tant du point de vue du savoir mathématique que des contenus à enseigner. Le dispositif s'adresse à trois circonscriptions : deux sont engagées dans l'expérimentation, que nous désignerons par E1 et E2, tandis que la troisième, la circonscription T, constitue la circonscription témoin. 11 écoles et 24 classes sont concernées pour la circonscription E1, 14 écoles et 28 classes pour la circonscription E2, et 15 écoles pour 34 classes dans la circonscription T, soit environ 1 500 élèves au total. Les élèves scolarisés en éducation prioritaire représentent un peu plus de la moitié de la population observée (52,3 %), mais sont très largement surreprésentés dans E1 et sous-représentés dans E2 (92,4 % pour E1 contre 10,8 % pour T). Tous les enseignants ayant une classe de CM1, ou un double niveau en 2010-2011, dans une école des trois circonscriptions sont impliqués dans le projet, soit 86 enseignants (25 correspondants, 27 associés, et 34 témoins). En réalité, ce sont plus de 150 enseignants sur l'ensemble du cycle 3 qui sont concernés.

En 6^{e}, le domaine choisi par l'inspection régionale de mathématiques est « Nombres et calcul ». L'expérimentation concerne 35 collèges répartis dans les 3 départements de l'académie de Créteil, ce qui représente environ 90 professeurs de mathématiques, 2 500 élèves (et 3 500 en 2011-2012) répartis dans 109 classes.

La formation

La conception et la mise en œuvre de la formation reposent sur le cadrage théorique d'une double approche didactique (traduite dans deux composantes : cognitive et médiative) et ergonomique (traduite dans trois composantes : institutionnelle, sociale et personnelle). Ce double point de vue m'a conduit à la fois à partir des pratiques des enseignants (en tout cas celles auxquelles on peut avoir accès) et à réfléchir sur des moyens susceptibles d'explorer leurs marges de variabilité. Pour résumer, les pratiques des enseignants formeraient un système complexe principalement fondé sur leurs propres représentations, la formation initiale qu'ils ont reçue, les ressources dont ils disposent pour préparer leurs séances et le contexte local dans lequel ils exercent leur métier. Ces pratiques les conduisent à choisir des tâches pour les élèves, qui déterminent des activités cognitives de ces derniers, elles-mêmes dépendantes d'adaptations effectuées par les enseignants eux-mêmes. La formation mise en œuvre dans PACEM vise à agir sur la composante personnelle en prenant en compte les composantes institutionnelle et cognitive pour mieux jouer sur les composantes médiative et locale.

Le cœur de ce dispositif, le moment de formation en présentiel (18 heures), se veut à visée opératoire sans être prescriptive. Il a pour objectif un double outillage disciplinaire des enseignants : pratique, afin d'élargir leur palette des possibles, et intellectuel pour les aider à fonder leurs choix. Il s'articule autour de quatre temps :

- une phase de déconstruction : il s'agit d'amener les enseignants à accepter de lâcher prise sur certaines de leurs pratiques et de leurs représentations, de « faire de la place pour du nouveau ». L'utilisation d'éléments statistiques lors de ce premier temps de formation s'avère très utile, permettant d'interroger et d'objectiver la difficulté d'une tâche ;
- une phase d'apport de contenus : contenus mathématiques et éléments de didactique « simples », liens avec le programme en termes de connaissances, explicitation des capacités attendues ;
- une phase d'appropriation : des tâches alternatives à celles des fichiers et manuels utilisés sont proposées aux enseignants, qu'ils ont à mettre en situation, à travers différents scénarios, potentiellement adaptables à la classe ;
- une phase d'organisation, de structuration et de contextualisation : ce dernier temps de la formation fait écho au premier puisqu'il s'agit de proposer aux enseignants des éléments leur permettant d'une part, de reconstruire des séances et, à plus longue échéance, des séquences, et d'autre part, de réviser la façon dont ils concevaient jusqu'alors leurs progressions.

Si la première phase est tout à fait spécifique de la formation, les deux dernières, de transposition pragmatique, sont fondamentales parce qu'en diminuant ce qui pourrait être à la seule charge des enseignants, elles favorisent une mise en œuvre des contenus de la formation dans les classes. Enfin, un travail centré sur le calcul mental a été effectué en sixième, dans une approche didactique macro en 2010-2011 (place dans les apprentissages, place dans la gestion de classe) et plus locale en 2011-2012 (proposition de tâches, de déroulements, liens avec la résolution de problèmes).

Conclusions et perspectives

À l'issue de la première année d'expérimentation, les performances des élèves expérimentateurs sont significativement meilleures par comparaison à celles d'élèves témoins qui n'ont pas suivi le protocole d'expérimentation : en CM1, l'augmentation des scores est très importante, surtout chez les élèves de bas niveaux, sur deux populations très différentes ; en 6^{e}, les premiers résultats, également positifs, sur des populations d'élèves comparables, sont plus marqués chez les élèves des professeurs correspondants. Par ailleurs, les enseignants impliqués dans le projet ont exprimé leur grande satisfaction professionnelle d'avoir bénéficié d'une formation participant clairement à leur développement professionnel.

Cela tendrait à confirmer la nécessité d'un outillage didactique en mathématiques aussi bien à l'école qu'au collège, et à faire l'hypothèse qu'une « certaine didactique appliquée » s'inscrirait plus facilement, en tout cas plus rapidement, dans les pratiques des professeurs des écoles que dans celle des professeurs de mathématiques du 2nd degré. On peut se demander si les premiers, ayant plus de marges pour aménager les conditions de mise en activité des élèves dans la classe, ne seraient pas plus en mesure de les exploiter dès lors qu'ils auraient accès à un minimum d'enjeux didactiques, alors que les contraintes qui pèsent sur les seconds, notamment dans la gestion des élèves et l'organisation du temps de classe, du point de vue des tâches et des scénarios associés, rendraient plus difficile, pour résumer, le passage de l'enseignement à l'apprentissage. On peut aussi s'interroger sur des modalités d'échanges sur les pratiques, formels ou informels, qui seraient plus fréquents dans les écoles que dans les collèges.

Dans le contexte actuel, l'expérimentation PACEM contribue à interroger ou à éclairer un certain nombre d'aspects, parmi lesquels :

- la mise en place d'un dispositif clair et cohérent d'évaluations nationales des élèves ;
- la réhabilitation de la formation continue des enseignants ;
- les modalités de la formation continue ;
- la compétence en mathématiques dans les circonscriptions pour le 1er degré ;
- le travail en équipe, en particulier au sein des collèges ;
- l'articulation école/collège ;
- l'articulation temps de classe/temps hors classe (dispositifs d'accompagnement des élèves) ;
- l'observation des pratiques par les pairs ;
- la qualité des supports scolaires (fichiers, manuels, sites).

Les résultats des tests 2012 permettront à la fois de comparer les résultats d'élèves de CM1 et 6^{e} sur la base d'une deuxième année d'expérimentation, et de suivre deux cohortes d'élèves (CM1/CM2 et 6^{e}/5^{e}) sur deux ans. La question de l'appropriation de la formation, de sa percolation dans les établissements qui repose sur une temporalité plus longue sera bien entendu au centre de l'analyse à venir. Il s'agira enfin de prendre en compte des caractéristiques liées au fonctionnement des établissements (par exemple la structure des classes et des enseignements, le profil des enseignants et leurs pratiques, individuelles et collectives). Sous réserve d'une confirmation des résultats 2010-2011, le dispositif de formation expérimenté dans PACEM ouvre clairement des pistes pragmatiques (articulation entre formation en présentiel, retour auprès des collègues, suivi des inspections locales et échanges sur une plate-forme collaborative) tout en gardant un format proche d'un format habituel d'un stage de formation continue (18 heures) et à un coût raisonnable.

BIBLIOGRAPHIE

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique* – Presses universitaires de Franche-Comté.

Chesné, J.-F. et Prost, S. (2012) PACEM : une expérimentation sur l'utilisation d'évaluations standardisées des acquis des élèves par les enseignants. *Education & formations, 81*.

HCE (2011) *Les indicateurs relatifs aux acquis des élèves*.

Huguet T. et Brun A. (2010) *Les compétences en mathématiques des élèves en fin de collège*, NI 10.18.

IGEN (2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*.

Pastor, J.-M.et Brun, A. (2010) *Les compétences en mathématiques des élèves en fin d'école primaire*. NI 10.17.

Peltier M.-L. et *al* (2004) *Dur, dur d'enseigner en ZEP – Analyse de pratiques des professeurs des écoles*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vandebrouck F. (Ed.) (2007) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octares Editions.

ÉLABORATION D'UNE FORMATION A LA LOGIQUE POUR LES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES.

Christophe HACHE, Zoé MESNIL

Nous voudrions dans cet atelier présenter un stage de formation continue intitulé « Initiation à la logique » et proposé par l'IREM de Paris depuis 2010 dans les trois académies d'Île de France. Il s'agit notamment d'expliquer certains de nos choix relatifs aux contenus de ce stage. Comme nous le verrons dans la première partie de cet exposé, nous nous inscrivons dans le thème 1 du colloque de la CORFEM 2012 autour des « Nouveaux savoirs et nouveaux dispositifs dans l'enseignement secondaire », non pas parce que la logique fait son apparition dans l'enseignement des mathématiques au lycée, mais plutôt parce qu'un accent particulier est mis dessus dans les derniers programmes. Ceux-ci fixent en effet des objectifs en matière de « notations et raisonnement mathématiques », tentant peut-être de répondre ainsi au constat récurrent de difficultés des élèves dans leur manière de s'exprimer et de raisonner.

Ces objectifs concernent des notions relevant de la logique, le statut de ces notions est flou, dans les programmes, mais aussi dans la pratique des mathématiciens, comme nous le verrons. Il n'y a effectivement pas de contenu de référence en ce qui concerne la logique, pas de consensus ni sur les connaissances dans ce domaine qui sont nécessaires pour faire des mathématiques ni sur la manière de les transmettre aux élèves et étudiants.

La logique étudie deux composantes de l'activité mathématique : le langage et le raisonnement. Dans la formation que nous proposons, nous insistons davantage sur les liens entre logique et langage, qui sont plus rarement évoqués que ceux entre logique et raisonnement. Nous proposons ainsi aux professeurs de perfectionner leurs connaissances en logique, à partir d'une approche naïve du langage mathématique qui leur est familier. Sans entrer dans une présentation formelle de la logique mathématique, nous lui empruntons certains de ses objets d'étude dont nous donnons quelques propriétés et dont nous nous servons pour mettre à jour certains implicites et certaines ambiguïtés du langage mathématique. Ces apports théoriques visent surtout à permettre aux professeurs d'exercer une certaine vigilance sur la façon dont « on parle les mathématiques » (dont ils parlent des mathématiques, dont ils parlent en cours de mathématiques, dont parlent les élèves etc.) et de repérer ainsi ce qui peut être particulièrement complexe pour les élèves. Nous proposons ici, en deuxième partie, quelques exemples des points abordés pendant le stage et les choix qui les motivent.

Le stage comporte aussi une partie plus pratique. Nous mettons à l'épreuve ces connaissances théoriques pour analyser comment les manuels parlent de logique, ceci à partir d'extraits choisis de « cours » et d'exercices proposés. Des enseignants du secondaire du groupe « Logique » de l'IREM de Paris viennent exposer des exercices ou des séquences qu'ils ont proposés dans leurs classes. Enfin, lors de la troisième journée de stage, ce sont les stagiaires qui proposent un retour sur des activités qu'ils ont mises en place dans leurs classes.

La logique dans les lycées : un nouveau (?) savoir (?)

« Notations et raisonnement mathématiques » dans les nouveaux programmes de mathématiques pour le lycée.

La nouveauté de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée peut se discuter. En effet, une opinion courante est de considérer que l'on fait forcément de la logique quand on fait des mathématiques, et qu'il n'est pas besoin d'attendre que les programmes parlent de logique pour savoir qu'il y a certaines notions de logique dont il est bon de parler aux élèves. Il n'empêche que le programme de 2009 pour la classe de Seconde a amené certains changements. Regardons ces programmes plus attentivement : on trouve tout d'abord dans les commentaires au début du programme (Mathématiques, Classe de Seconde, 2009) un paragraphe « Raisonnement et langage mathématiques » dont voici un extrait :

> *Le développement de l'argumentation et* ***l'entraînement à la logique*** *font partie intégrante des exigences des classes de lycée. A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité.* Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre place naturellement dans tous les chapitres du programme […] Comme les éléments de logique mathématique, les notations et le vocabulaire sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ.

Le gras est celui du texte du programme. Nous avons mis en italique ce qui était déjà présent dans le programme de 2001 (si ce n'est qu'il n'était pas question de « logique mathématique » mais de « logique formelle »... sans qu'il soit possible de savoir la nuance que souhaitaient apporter là les auteurs des programmes). Ceci marque ainsi un retour discret de la logique dans les programmes de mathématiques du lycée, nouvel épisode d'une histoire mouvementée (Mesnil, 2012).

C'est en 1960 que les programmes de mathématiques mentionnent explicitement pour la première fois des notions de logique avec l'apparition des symboles d'implication, d'équivalence et des quantificateurs. La logique est bien sûr très présente dans le programme pour la classe de Seconde de 1969 (réforme dite « des maths modernes »), elle est associée à la théorie des ensembles pour constituer la base du langage mathématique. Cette réforme ayant subi les échecs et critiques que l'ont connaît (mathématiques trop abstraites et élitistes, pas adaptées aux besoins scientifiques), le programme de 1981 (dit « de la contre-réforme ») adopte une attitude « inverse » en ce qui concerne la logique : elle est exclue, jetée avec l'eau du bain formaliste (on trouve dans ce programme les indications suivantes : « il convient de souligner les formes diverses de raisonnement mathématique mises en jeu dans les situations étudiées ; mais on évitera tout exposé de logique mathématique. »). L'exclusion persiste dans le programme de 1990, jusqu'au timide retour déjà évoqué dans le programme de 2001. Soulignons également une présence plus marquée de la logique dans le programme de Première pour la section littéraire en 2004.

Le programme de 2009 comporte cependant encore une nouveauté par rapport à celui de 2001, c'est la présence d'un tableau fixant, pour tout le lycée, des objectifs en terme de « notations et raisonnement mathématiques » :

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Tableau 1 – Extrait du programme 2009 pour le lycée

La publication du programme s'accompagne de celle d'un document « ressources pour la classe de Seconde » (document ressource, 2009), intitulé « Notations et raisonnement mathématiques ». Quelques exemples d'activités y sont donnés et commentés, mais on n'y trouve aucune connaissance théorique sur les objets évoqués par le programme[1].

Exemples d'effets de ces nouveaux programmes.

Nous donnerons deux exemples d'effet direct de ces programmes. Dans la plupart des manuels de mathématiques de Seconde publiés pour la rentrée 2010, on peut trouver des pages où sont évoquées les notions dont il est question dans le tableau ci-dessus. Ces pages n'existaient pas dans les versions précédentes des manuels. On trouve aussi dans chaque manuel un certain nombre d'exercices avec un logo « logique » (notamment beaucoup d'exercices « vrai ou faux »). On trouve donc bien, de fait, du nouveau à enseigner dans les manuels, même si cela ne change pas forcément la pratique de certains professeurs.

Zoé Mesnil a interrogé en 2011, à travers un questionnaire en ligne, des enseignants de mathématiques de Seconde. 41 réponses ont été obtenues, d'une part de professeurs inscrits à la formation « initiation à la logique », d'autre part de professeurs qui ont bien voulu donner leur avis sur l'enseignement de la logique au lycée. La question « Travaillez-vous sur des notions de logique avec vos élèves de Seconde ? » a été posée en différenciant deux époques, avant 2009 et depuis 2009. Sur 41 professeurs ayant répondu, 21 déclarent qu'ils travaillaient sur des notions de logique avant 2009, contre 16 qui déclarent qu'ils ne le faisaient pas (3 professeurs n'étaient pas encore en poste),

1 On peut trouver analyse de ce document dans (Groupe Logique et Raisonnement de l'IREM de Grenoble, 2011).

alors que 38 déclarent travailler sur des notions de logique depuis 2009, contre 3 qui déclarent ne pas le faire. Les professeurs qui ont répondu au questionnaire sont sans doute particulièrement soucieux de ces questions de logique, mais il semble tout de même que les injonctions du programme aient eu un effet, reste à savoir ce que signifie pour les professeurs « travailler sur des notions de logique ».

En effet, nous avons montré que la présence de notions de logique dans les nouveaux programmes présentait un certain caractère de nouveauté, mais s'agit-il d'enseigner un nouveau savoir ? A quel contenu exact correspondent ces objectifs ? Qu'est-ce qu'il s'agit d'enseigner ? Le professeur qui a la charge d'atteindre les objectifs donnés doit répondre à ces questions difficiles, il devrait pouvoir éventuellement être aidé en consultant le programme et d'éventuelles ressources qui l'accompagneraient, ou qui lui seraient suggérées. Nous sommes dubitatifs sur cette possibilité concernant la logique.

Pour illustrer ce point, nous proposons une comparaison avec une autre nouveauté de ce programme : la notion d'*échantillon*, que le programme précédent ne faisait qu'évoquer. Cette notion est définie explicitement dans le programme, ainsi que dans le document ressources « Probabilités et statistiques », où il est précisé que « cette notion d'échantillon fournit un cadre théorique pour démontrer les résultats énoncés ci-dessous sur la fluctuation d'échantillonnage ». Par ailleurs, quiconque voudra en savoir plus sur l'échantillonnage pourra toujours aller ouvrir un livre de statistiques, et il est à noter que les statistiques, très présentes dans les nouveaux programmes, avaient fait auparavant leur entrée dans le programme de la formation initiale des enseignants.

La notion de *proposition conditionnelle* est aussi une notion nouvelle dans le programme (voir ci-dessus : « les élèves sont entrainés (...) à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles »). Cette notion n'est définie ni dans le programme, ni dans le document ressources « notations et raisonnement mathématiques ». Cela ne choquera pas ceux qui pensent que les connaissances en logique relèvent d'un savoir spontané, et que faire des mathématiques suffit pour savoir par exemple ce qu'est une proposition conditionnelle. Tout dépend bien sûr de ce qu'on entend par « savoir ». Beaucoup de théorèmes mathématiques se présentent sous la forme d'une implication universellement quantifiée (nous préférons cette expression à celle de proposition conditionnelle dont nous ne savons pas exactement ce qu'elle recouvre), et on peut effectivement considérer que toute personne ayant une bonne habitude des mathématiques a compris comment utiliser ou démontrer un théorème se présentant sous cette forme. Mais nous pensons que ces connaissances issues de la pratique, comportant de nombreux implicites sur lesquels nous reviendrons, ne sont pas suffisantes pour un professeur qui veut transmettre cette notion à ses élèves. Celui-ci a besoin également d'adopter une attitude réflexive par rapport à ce type d'objet. C'est une des motivations essentielles de la création de la formation que nous décrivons ici.

Concernant l'implication, des recherches (Deloustal-Jorrand, 2001 ; Rogalski et Rogalski, 2004) sur les conceptions d'étudiants en formation de professeur de mathématiques montrent une méconnaissance de cet objet. Nos questions aux stagiaires suivant la formation confirment ce constat : la forme disjonctive (NON(A) OU B) de l'implication (AB), le fait que la négation d'une implication ne se présente pas « naturellement » sous la forme d'une implication, les « règles de distribution » des quantificateurs sur les connecteurs ET et OU, sont des propriétés ignorées d'une partie d'entre eux. Dans le questionnaire aux enseignants de Seconde déjà évoqué ci-dessus, il a été demandé aux professeurs si « pour construire un enseignement [leur] permettant d'atteindre les objectifs fixés par le programme, [leurs] connaissances en matière de logique mathématique [leur paraissaient] suffisantes ». 30 d'entre eux répondent « oui » (sachant que la plupart disent avoir eu une initiation à la logique dans leurs études supérieures), 11 répondent « non ». Ici encore l'échantillon des professeurs qui ont répondu n'est pas représentatif de l'ensemble des professeurs de mathématiques mais ces résultats laissent à penser qu'un nombre non négligeable de professeurs ressentent un manque de formation en matière de logique.

Cette comparaison entre deux points du programme souligne ce que nous constatons par ailleurs : la logique mathématique est une discipline des mathématique reconnue comme telle et fournissant des résultats importants à d'autres branches des mathématiques mais ça n'est cependant pas vers elle que l'on se tourne spontanément pour étudier la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique (ce qui ne serait peut-être effectivement pas directement efficace pour ce qui concerne les objectifs des nouveaux programmes), et elle n'est actuellement pas au programme de la formation initiale des professeurs (il existe localement de petites initiations à la logique, soit en classe préparatoire, soit en début de cursus universitaire, mais sans que les connaissances visées soient orientées vers l'enseignement). Nous sommes donc convaincus que les nouveaux programmes introduisent une nouveauté concernant la logique. Et comme nous l'avons mentionné, ceci se fait sans qu'il y ait de consensus sur un contenu de référence qui constituerait les bases de logique à connaître pour faire des mathématiques, ni sur la façon de parler de ce contenu.

De la nécessité d'une formation

Logique, vous avez dit logique ?

Le terme « logique » n'est pas un terme proprement mathématique. On parle généralement de logique là où il y a raisonnement (« un cheval, des chevaux, un canal, des canaux, un maréchal, des maréchaux, un festival, des festivaux, logique non ?! ») et là où il y a des règles, explicites ou non, dictant une façon de faire (« La logique du vivant » de François Jacob... ou « Pour en finir avec le darwinisme : une nouvelle logique du vivant » de Rosine Chandebois). On parle parfois de *logique naturelle* pour désigner « toutes les règles et conceptions ayant trait au raisonnement, le plus souvent en dehors d'un cadre mathématique, utilisées dans des situations de la vie courante » (Deloustal-Jorrand, 2004). Cette logique naturelle est présente dans l'activité des élèves (on devrait plutôt dire ces logiques naturelles, puisque chaque élève peut user de la sienne qui ne sera pas forcément celle de son voisin). Dans le programme de 2009, l'élève doit être amené à « détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant ». On trouve dans la suite du texte du programme, comme exemple de ces différences entre logique mathématique et logique du langage courant qu'il est important de distinguer, celle entre implication mathématique et causalité. Vaste programme qui demande un peu plus d'explications : les deux notions d'implication mathématique et de causalité étant chacune complexes, elles méritent peut-être d'être étudiées pour elles-mêmes avant d'être comparées l'une à l'autre !

Les manuels sonnent l'alerte

Lors de la mise en place des programmes, il a été très intéressant d'analyser la façon dont les manuels se sont emparés de ces objectifs. Nous précisons ici quelques exemples tirés des analyses effectuées par le groupe « Logique » de l'IREM de Paris (Groupe logique, 2011).

Peu de manuels se sont aventurés à parler de la distinction évoquée entre implication mathématique et causalité. Le document ressources « Notations et raisonnement mathématiques » (document ressource, 2009) n'en dit pas plus sur cette distinction. Nous ne saurions dire ce que les rédacteurs du programme avaient en tête en écrivant cette phrase, ce qui nous paraît essentiel c'est de ne pas confondre « si *A* alors *B* » et « *A* donc *B* », nous y reviendrons. Par contre, à propos de « détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant », tous les manuels signalent la distinction entre le « ou » du langage courant qui est la plupart du temps exclusif (l'exemple « fromage ou dessert » est dans plusieurs manuels), contrairement à son usage en mathématiques où il est inclusif. Nous allons creuser cet exemple.

Les comportements des connecteurs logiques ET et OU par rapport aux valeurs de vérité sont liés à la signification usuelle du « et » et du « ou » dans le langage courant. Il a fallu faire un choix entre « ou » exclusif et « ou » inclusif, les deux étant présents dans le langage courant. Le connecteur logique OU correspond au « ou » inclusif, ce qui n’est peut-être pas l’interprétation spontanée de certains élèves. Les connecteurs ET et OU présentent ainsi une certaine « dualité » qui peut être expliquée aux élèves. Mais tous les « et » et les « ou » employés pour parler d'objets mathématiques ne sont pas des connecteurs logiques au sens mathématique du terme, c'est-à-dire des opérateurs sur les propositions, qui permettent, à partir de deux propositions *P* et *Q*, de former leur conjonction (*P* ET *Q*) ou leur disjonction (*P* OU *Q*). Certains ne sont, même « en mathématiques », que des conjonctions de coordination. Par exemple, si « les ensembles *A* et *B* sont non vides » est bien un raccourci de la conjonction des deux propositions « *A* est un ensemble non vide » et « *B* est un ensemble non vide », la situation est toute différente pour « les ensembles *A* et *B* sont disjoints » qui n'est pas une conjonction de deux propositions (on évoque là la propriété d'un couple de deux ensemble, le « et » a le même rôle que dans « Pierre et Paul sont frères »).

La plupart des manuels parlent du « et » et du « ou », mais de façons parfois assez différentes. Un premier exemple de traitement :

II. Et – Ou, Intersection – Réunion

• Dans le **langage usuel** on emploie les mots « et », « ou ».
Le mot « et » peut signifier :
– « à la fois » comme dans la phrase « cet élève est blond **et** porte des lunettes » ;
– « et puis » comme dans la phrase « l'élève ouvre son sac **et** sort sa calculatrice ».
Le mot « ou » peut signifier :
– « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux à la fois » comme au restaurant, dans l'expression « fromage **ou** dessert ».
Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens exclusif.
– « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois » comme dans la phrase « s'il pleut **ou** s'il vente, je ne sortirai pas ».
Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens non exclusif.

• On emploie aussi ces mots **en mathématiques** :
Le mot « et » signifie uniquement « à la fois ».
Le mot « ou » signifie uniquement « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».
Par exemple : « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3. » (1)
« 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3. » (2)
La phrase (1) est vraie car les deux phrases « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » sont vraies. La phrase (2) est vraie car pour chacun des nombres 0, 2, 3 6, l'une au moins des deux phrases est vraie.

Figure 1 – Un extrait du manuel Indice

Ce manuel propose une approche « naturelle » du langage mathématique : celui-ci n'est rien d'autre que le langage courant utilisé « en mathématiques » (c'est-à-dire vraisemblablement quand on parle d'objets mathématiques, quand on est en cours de mathématiques). On peut noter que la notion de proposition est absente de cet extrait de manuel (même implicitement). Il est question de phrases.

Soulignons plusieurs implicites dans les exemples proposés. C'est à la charge de l'élève par exemple de voir les deux propositions « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » dans la proposition raccourcie « 6 est un nombre pair et un multiple de 3 ». Ça n'est peut-être pas très compliqué mais pourquoi ne pas signaler ce point ? Par ailleurs, la proposition « 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs ou des multiples de 3 » peut être entendue de plusieurs façons.

D'une part comme :

(0 est un nombre pair OU 0 est un multiple de 3)
ET (2 est un nombre pair OU 2 est un multiple de 3)
ET (3 est un nombre pair OU 3 est un multiple de 3)
ET (6 est un nombre pair OU 6 est un multiple de 3)

ou d'autre part comme :

(0 est un nombre pair ET 2 est un nombre pair ET 3 est un nombre pair ET 6 est un nombre pair)
OU
(0 est un multiple de 3 ET 2 est un multiple de 3 ET 3 est un multiple de 3 ET 6 est un multiple de 3)

La présence des virgules amène une ambiguïté car les deux interprétations possibles ne sont pas équivalentes, il est facile de s'en apercevoir : la première proposition est vraie, la deuxième proposition est fausse. La phrase aurait bien sûr pu être prononcée par un mathématicien, le manuel n'est pas en cause sur ce point, nous cherchons à souligner les implicites sous-jacents à de tels raccourcis de formulation.

Remarquons au passage que de telles propositions sont longues à écrire, d'où le recours à des formes raccourcies si l'on choisit de s'exprimer dans des formulations du langage courant, ou à de la symbolisation si l'on choisit de s'exprimer dans un langage mathématique plus formalisé (ici on pourrait par exemple appeler $P(n)$ le prédicat « n est un nombre pair » et $Q(n)$ le prédicat « n est un multiple de 3 », et l'on verrait plus clairement les ressemblances et différences entre les structures des deux propositions).

D'autres manuels ont une approche plus « propositionnelle » des connecteurs ET et OU. Ceux-ci sont effectivement définis comme des opérateurs sur les propositions (aspect syntaxique) dont on donne le comportement par rapport aux valeurs de vérité (aspect sémantique). Par exemple :

Définition 6

Soient P et Q deux propositions :
– **(P et Q)**, appelé **conjonction** des propositions P, Q est vraie lorsque P **et** Q sont vraies toutes les deux.
– **(P ou Q)**, appelée **disjonction** des propositions P, Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P **ou** Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).

Exemple : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » est une conjonction d'« être rectangle » **et** « isocèle » ; « le triangle ABC est rectangle ou isocèle » est une disjonction d'« être rectangle » **ou** « isocèle », ce qui conduit souvent à distinguer deux cas : 1. le triangle est rectangle, 2. le triangle est isocèle.

Figure 2 – Un extrait du manuel Symbole

Ici, des objets sont définis, du vocabulaire est introduit, qui peut servir. Les définitions du manuel correspondent bien aux définitions savantes. La manière de définir les propositions est peu précise : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » n'est pas la conjonction d'« être rectangle » et « isocèle », mais de « le triangle ABC est rectangle » et « le triangle ABC est isocèle », moyennant encore une fois un raccourci de formulation (non explicité). Par ailleurs, un exercice dans lequel il serait question d'un triangle « rectangle ou isocèle » semble improbable, et même si effectivement l'élève pourrait alors devoir distinguer deux cas, est-il alors bien clair pour lui que les situations « rectangle » et « isocèle » ne sont pas forcément disjointes, contrairement à ce qui se passe la plupart du temps (mais qui n'est pas une obligation) quand on fait un raisonnement par disjonction des cas ?

La notion de proposition est absente de la plupart des pages des manuels qui parlent de notions de logique. Et elle est souvent absente du discours des professeurs, ceux que nous voyons au stage considèrent généralement que c'est une notion trop abstraite. Pourtant nous défendons l'idée que les propositions sont un élément essentiel dans l'acquisition du langage mathématique, et que cette notion peut être introduite comme « phrase mathématique pouvant être vraie ou fausse », pourquoi pas dès le collège, en association avec la notion de variable. C'est par contre sans doute plus difficile pour des élèves de considérer les propositions comme des objets et de considérer qu'il est possible de faire des « opérations » sur ces propositions. Mais ce n'est peut-être pas beaucoup plus difficile que de voir les fonctions comme des objets pouvant avoir la propriété d'être croissante ou non, pouvant être additionnées. Les deux extraits cités malmènent, selon nous, cette notion de proposition et donc, par là même, la notion de connecteur logique. Le problème est que les élèves ont des tâches à faire avec ces seules explications !

Regardons par exemple l'exercice suivant :

Pour s'entraîner

Compléter les phrases suivantes, soit avec « et », soit avec « ou » :

a. 1, 5, 8, 9, 11, 15 sont des entiers impairs ... inférieurs à 10.
b. 2, 3, 6, 18 sont des entiers multiples de 3 ... inférieurs à 10.
c. 6, 12, 18 sont des entiers divisibles par 3 ... par 2.
d. 10, 20, 60 sont des multiples de 2 ... de 5.

Figure 3 – Un extrait du manuel Indice

Outre les soucis déjà signalés liés à l'interprétation des virgules, et en passant sur le fait qu'il n'est pas précisé que les phrases doivent être complétées de manière à être vraies, il faut tout de même signaler une stratégie efficace pour cet exercice qui est de compléter toutes les phrases avec des « OU » puisque quand (A ET B) est vraie, (A OU B) l'est aussi. Cette stratégie a peu de chance d'émerger dans une classe de Seconde, car nous sommes habitués à répondre en nous conformant inconsciemment au principe du maximum d'information qui œuvre dans la vie courante : si l'on peut donner une réponse contenant plus d'informations qu'une autre réponse, même si les deux sont justes, c'est celle-là que l'on donne. Or le raisonnement logique ignore ce principe : deux réponses justes sont également acceptables, il n'y a pas des propositions « plus vraies » que les autres. Un tel exercice peut être l'occasion de discuter de tout ça avec les élèves, mais est-ce bien clair que les deux connecteurs sont parfois acceptables ? Le livre du professeur donne une correction : à la question c. la réponse est « c. et »…

Dans les manuels, les exemples sont nombreux qui montrent qu'il n'est pas si simple de parler de logique. Leur lecture a renforcé notre motivation pour proposer une formation qui donnerait aux enseignants des outils pour dire et écrire des choses plus cohérentes et explicites sur les points évoqués... et pour qu'ils soient en mesure de prendre du recul sur leur travail et sur les propositions des manuels.

Description de la formation « initiation à la logique »

Le stage de formation continue est proposé par l'IREM de Paris aux trois académies de Paris, Créteil et Versailles. Il se déroule sur 3 journées de 6h, deux journées consécutives en janvier et une journée en mars.

Un apport théorique basé sur l'étude du langage mathématique familier aux professeurs de mathématiques

La logique dont nous parlons dans ce stage pourrait s'appeler la logique des mathématiques, et être définie comme l'art d'organiser son discours dans cette discipline. Organiser son discours, cela recouvre :

- des questions de forme : quel langage utilisons-nous ? Quelle est sa syntaxe ? Quel est son alphabet ?
- des questions de sens « local » : qui est cet objet ? Que signifie cet énoncé ?
- des questions de sens « global » : cet énoncé est-il vrai ou faux ? Quels liens avec d'autres énoncés ? Ce raisonnement est-il valide ?

C'est à un discours produit et non à un discours intériorisé que nous nous intéressons. Il ne s'agit pas de chercher une psycho-logique du mathématicien, du professeur ou de l'élève de la classe de mathématiques, mais bien de se pencher sur le langage utilisé pour parler les mathématiques. Nous nous appuyons, pour décrire cette logique des mathématiques, sur le point de vue qu'en propose la logique mathématique. La logique mathématique peut-être vue comme l'aboutissement d'une étude de la logique mise en acte dans l'activité mathématique. Daniel Lacombe (Lacombe, 2007) la décrit comme une modélisation de la « métamathématique » :

> La logique mathématique c'est une branche des mathématiques, une branche des mathématiques appliquées, mais appliquées à quoi ? Appliquées aux mathématiques. Ce qui donne à la logique mathématique dès le début cet aspect circulaire, de serpent se mordant la queue, qui en fait, fait son charme. Mais ceci étant dit, ça n'est pas si paradoxal que ça, il suffit de considérer quelque chose qui est tout à fait connu maintenant, c'est la notion de modèle mathématique. (…) Les objets qui constituent le modèle mathématique ne sont pas du tout ceux qui constituent le domaine qu'on veut modéliser (…) [Pour la logique mathématique] le domaine extra mathématique qu'il s'agit de modéliser c'est ce qu'on appelle quelquefois la métamathématique, il vaudrait mieux dire la métamathématique naïve, qui s'occupe non pas des objets mathématiques mais de ce qu'on fait lorsqu'on traite des objets mathématiques, ce qui n'est pas du tout la même chose.

Mais le but du stage n'est pas de faire un cours de logique mathématique, et nous partons plutôt d'une approche naïve du langage mathématique. Approche naïve dans la mesure où elle s'appuie sur certaines notions prises au sens intuitif (notamment les notions de propositions, de démonstration, de vérité, que l'on suppose suffisamment familières aux professeurs de mathématiques pour pouvoir bâtir la formalisation de la logique des mathématiques envisagée sans définition formelle). Ce langage est au centre de l'activité mathématique, décrite ainsi par René Cori dans la formation (stage « Initiation à la logique », IREM de Paris, 2012) :

> Que fait un mathématicien ? Il observe des objets, que nous appellerons objets mathématiques. Ces objets peuvent être de natures très diverses : des nombres, des objets géométriques, des fonctions, des espaces probabilisés… Donc on regarde ces objets et on essaie de savoir comment ils vivent, comment ils sont organisés, qu'est-ce qui leur arrive, c'est-à-dire en découvrir les propriétés. On essaie de récolter des informations sur des objets qui forment un univers que l'on peut appeler l'univers mathématique. Ces objets mathématiques, si on veut décrire leurs propriétés, pouvoir en parler, il faut les nommer, leur donner des noms. Les mathématiciens sont très inventifs, ils disposent de tas de noms pour nommer les objets.

Le langage utilisé par le mathématicien est plus ou moins formalisé selon le contexte de son discours : cours, idées jetées sur un brouillon, discussion devant un tableau avec des collègues spécialistes, séminaire, rédaction d'un article. Les propositions mathématiques peuvent en effet être formalisées dans un langage qui comprend les connecteurs classiques NON, ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À, les quantificateurs et des prédicats, ainsi que leurs règles syntaxiques d'utilisation, et leur sémantique, c'est-à-dire leurs comportement par rapport aux valeurs de vérité. Mais les mathématiciens s'expriment régulièrement de manière plus relâchée, par exemple, « k peut être aussi grand que l’on veut, u_n finira toujours par être plus petit que 10^{-k} que n sera assez grand ». L’expression d’une telle phrase dans le langage formalisé, notamment l’explicitation des quantifications, est une difficulté pour les élèves et les étudiants de début d’université. Les mathématiciens ont ainsi différentes manières de dire la même chose, de parler du même objet, construisant dans la dialectique entre ces différentes formulations ce que J. Selden et A. Selden appellent « statement images » (J. Selden et A. Selden, 1995, p. 133) :

> These are meant to include all of the alternative statements, examples, nonexamples, visualizations, properties, concepts, consequences, etc., that are associated with a statement. ([proposition de traduction] Ceci inclut tous les énoncés alternatifs, les exemples, contre-exemples, les représentations, les propriétés, les concepts, les inférences, associés à un énoncé donné.).

Ce travail de reformulation est souvent absent de la classe de mathématiques, il pourrait pourtant être extrêmement riche. Même si les élèves réclament souvent des formulations standardisées, elles gomment souvent le sens de ce qui est ainsi énoncé et peuvent empêcher le développement d'une certaine habilité dans le maniement des concepts et de leurs relations. Par exemple, à force de finir les résolutions d’inéquations $f(x) > 0$ par la rituelle conclusion $S = I$, nombre d’élèves oublient que cette conclusion signifie « pour tout x, $f(x) > 0$ si et seulement si x appartient à I ». Et que « x appartient à I » peut s’écrire en utilisant des inégalités.

Cependant, avec l'utilisation nécessaire d'un langage qui n'est jamais totalement formalisé, et qui se mélange donc à la langue naturelle en lui empruntant certains mots ou tournures de phrases, le langage mathématique comporte inévitablement des ambiguïtés. Notre intention est d'attirer l'attention des professeurs, de façon à ce qu'ils aient conscience des implicites de leur discours, des difficultés potentiellement engendrées... et ainsi, du fait que le langage mathématique peut, en lui même, être un obstacle à la compréhension des connaissances qu'il véhicule. Ces ambiguïtés peuvent éclairer certaines incompréhensions ou mauvaises compréhensions des élèves. L'implication « n premier n impair » sera déclarée fausse par une écrasante majorité de mathématiciens, alors que « n est premier ET n est impair » sera déclarée « vraie ou fausse selon la valeur de n » ; ces deux phrases sont pourtant identiques du point de vue de leur structure logique.

Une notion essentielle : les variables et leurs statuts

Une des caractéristiques essentielle du langage mathématique nous semble être l'utilisation de variables. Ceci suffit à nous inciter à accorder à cette notion une place importante dans le stage, choix qui se trouve conforté par le fait que la notion de variable est totalement absente des parties concernant la logique dans les programmes et dans des manuels .

Une variable est un nom d'objet, qui ne désigne pas un objet particulier mais qui sert à marquer dans une proposition les places auxquelles on peut mettre des noms d'objets particuliers pris dans un certain domaine (on dira alors que la variable est astreinte à ce domaine). Dans la langue naturelle aussi certains mots peuvent représenter différents objets, ainsi « je » est celui qui parle. Précisons alors encore : dans le langage mathématique, les variables sont amenées à être quantifiées (plus généralement mutifiées, nous verrons cela plus loin) : on précise si l'on parle d'une propriété qui sera vraie pour tous les objets du domaine (quantification universelle) ou pour au moins l'un d'entre eux (quantification existentielle). Là encore, la quantification est présente dans la langue naturelle, et nous pourrions dire à celui qui insiste pour nous convaincre de quelque chose : « quel que soit ton argument, je le réfuterai », mais la syntaxe de cette phrase est bien différente de celle que nous utiliserions en en modélisant le sens en utilisant une variable X astreinte à l'ensemble « tes arguments »[2]. Nous dirions alors : « quel que soit X, je réfuterai X », ce qui correspond à peu près à « quel que soit ton argument, je réfuterai ton argument », cette reprise du syntagme « ton argument » n'étant pratiquement jamais utilisée dans la langue naturelle, sauf à chercher un effet de style. La variable n'est pas juste un concept particulier des mathématiques, difficile à conceptualiser, c'est aussi un élément central du langage mathématique auquel sont rattachées des règles syntaxiques rarement explicitées.

Les variables peuvent être libres (on parle aussi de variable parlantes) ou muettes (liées). Cette distinction entre variables muettes et variables parlantes nous paraît importante car elle permet de mettre des mots sur certains troubles que peuvent ressentir les élèves. Les variables muettes sont physiquement présentes dans des expressions mathématiques, noms ou propositions, qui ne parlent pourtant pas d'elles, à la différence de ce qui se passe la plupart du temps pour les variables parlantes (même si le sens de certaines expressions comportant des variables parlantes n'est pas toujours dépendant de ces variables, par exemple le nom $sin^2x + cos^2x$ ne dépend pas de qui est le réel x). « [Un signe mutificateur], comme son nom (pas très beau, certes !) l'indique, a pour fonction de rendre muette une variable. En fait, chaque fois qu'on est en présence d'une variable muette, il y a nécessairement un mutificateur » (Cori, 2011). Exemples de mutificateur : les quantificateurs, l'assemblage des symboles $\int \ldots\ d \ldots$ La mutification est une opération syntaxique. Dans une expression mathématique on peut repérer le statut d'une variable à la seule présence d'un mutificateur, même si on ne comprend pas ce que signifie cette expression. Le problème est que ce mutificateur est parfois caché (implicite). Par exemple, quand le professeur écrit au tableau « $(x + 1)^2 = x^2 + 2\,x + 1$ », l'élève doit souvent comprendre que cette proposition est une « identité », elle ne parle pas de x (quantifié implicitement universellement, muette), mais quand le professeur écrit « $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ », c'est généralement qu'il s'agit de résoudre l'équation, l'élève doit comprendre que cette proposition parle de x et que sa valeur de vérité dépend de la valeur attribuée à la variable x. Autre exemple : écrire « $f(x) = 2\,x + 1$ » sert souvent à définir la fonction f, et cette proposition est alors lue comme une expression qui ne parle pas de la variable x. Il n'y a pourtant ici aucun mutificateur pour cette variable et cette proposition parle donc de deux objets, f et x, et signifie « l'image de x par la fonction f est égale à $2\,x + 1$ », proposition qui peut être vraie ou fausse selon les valeurs de la fonction f et de la variable x. Ces notions de variables libres et liées nous paraissent donc importantes au moins pour le professeur qui se doit d'être attentif aux ambiguïtés de ce qu'il écrit, mais aussi pour les élèves qui gagneraient à se poser la question « de qui parle cette expression ? ». Ainsi, un exercice classique en 1ère S sur les polynômes du second degré avec paramètres consiste à « déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation $m\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ a deux solutions ». Cette tâche peut être modifiée de la façon suivante, pour mettre l'accent sur le travail de reformulation (dont nous avons dit qu'il était important dans la conceptualisation des objets mathématiques) : « peut-on donner une expression synonyme de *l'équation* $m\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ *a deux solutions* qui

2 Il faudrait aussi modéliser « tu » et « je », mais le propos ici n'est pas de faire de la modélisation de phrases du langage naturel, jeu souvent proposé pour développer la logique chez les élèves... mais rapidement très complexe.

n'utilise pas d'autres variables que m ? ». On pourra faire remarquer avant que l'expression « l'équation [d'inconnue x] $m\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ a deux solutions » est une expression qui parle de m (et pas de x), qu'elle va être vraie pour certaines valeurs de m et fausse pour d'autres. Ici une expression synonyme est « $4 - 4\,m > 0$ » ou encore « $m < 1$ ». Certaines erreurs peuvent ainsi être corrigées à partir de cette idée de regarder de qui parlent les expressions. Ainsi, à un élève, plus avancé dans ses études de mathématiques, qui voudrait monter par récurrence la propriété suivante : « (U_n) tend vers 1 », on peut faire remarquer que cette expression ne parle pas de n, et même lui indiquer la mutification si l'on a pris soin d'écrire $(U_n)_{n \in IN}$.

Connecteurs et quantificateurs

Après avoir ainsi parlé du statut des variables dans les expressions mathématiques, nous revenons à d'autres éléments des propositions : connecteurs logiques et quantificateurs. Concernant les connecteurs, l'accent est mis sur la différence entre l'aspect syntaxique (les connecteurs sont des opérateurs sur les propositions, c'est-à-dire qu'ils permettent, à partir d'une ou deux propositions, d'en « construire » une nouvelle) et l'aspect sémantique (leur comportement par rapport aux valeurs de vérité).

Nous donnons les définitions de propositions équivalentes, de tautologies. Nous listons quelques équivalences logiques importantes[3], en montrant comment elles peuvent être utilisées pour « transformer » les énoncés. Par exemple, on trouve dans le manuel *Hyperbole* l'exercice suivant :

Compléter la phrase :
Il existe au moins un réel x tel que si $x^2 = 36$ alors …
Pour obtenir :
a) une proposition vraie
b) une proposition fausse

Figure 4 – Un extrait du manuel Hyperbole

En utilisant l'équivalence entre (*AB*) et (NON(*A*) OU *B*), on peut donner une proposition équivalente à la proposition à compléter : « il existe au moins un réel x tel que ($x^2 \neq 36$ OU… ». Et voir ainsi plus facilement qu'il est impossible de la compléter de manière à ce qu'elle soit fausse puisque l'on pourra toujours trouver un réel x tel que $x^2 \neq 36$! Le livre du professeur donne néanmoins une réponse pour cet exercice : $0 \leq x \leq 6$ pour la question a), $0 \leq x \leq 3$ pour la question b)…

Moins connue, l'équivalence entre [*A*(*B* OU *C*)] et [(*A* ET NON(*B*))*C*] permet de voir que les deux théorèmes suivants ne sont qu'une « reformulation » l'un de l'autre (a et b sont des variables astreintes à IR) :

$$\forall a\ \forall b\ [a + b + ab = -1 \Rightarrow (a = -1 \text{ OU } b = -1)]$$
et $$\forall a\ \forall b\ [(a + b + ab = -1 \text{ ET } a \neq 1) \Rightarrow b = -1]$$

3 On peut retrouver ces définitions et cette liste dans (Cori, 2011).

Nous donnons également quelques propriétés des quantificateurs : négation d'un énoncé quantifié, possibilité ou non de distribution sur les connecteurs ET et OU, expression d'autres quantifications usuelles en mathématiques, telles que « au plus un », « exactement un », « au plus deux » à l'aide des quantificateurs universel et existentiel.

Ce travail sur les propositions est mis en relation avec d'éventuelles erreurs ou difficultés des élèves. Ainsi, on voit fréquemment des élèves proposer « aucun x ne vérifie la propriété P » comme négation de « tous les x vérifient la propriété P ». Or, « aucun x ne vérifie la propriété P » se traduit par « $\forall x$ NONP(x) » qui n'est pas la négation de « $\forall x$ P(x) » (la négation de « $\forall x$ P(x) » est « $\exists x$ NONP(x) ». Par contre, on peut considérer que les deux propositions « aucun x ne vérifie la propriété P » et « tous les x vérifient la propriété P » sont contraires, dans le sens courant du mot contraire, « qui présente l'opposition la plus extrême, la plus radicale » (dictionnaire CNRS « Le Trésor de la Langue Française Informatisé »). On voit là l'importance de ne pas confondre les deux termes « contraire » et « négation », la confusion est faite d'autant plus facilement que la négation en Seconde est souvent abordée dans le chapitre sur les probabilités, avec la définition d'événements contraires.

Autre exemple d'une possible utilisation de la formalisation des énoncés, qui permet d'en exhiber la structure logique : les élèves disposent souvent de techniques isolées pour montrer qu'une proposition est vraie ou fausse selon sa structure. Ainsi, pour montrer qu'une proposition universelle est fausse, on donnera un contre-exemple, et pour montrer qu'une proposition existentielle est vraie, on donnera un exemple. Le lien entre ces deux techniques, via la notion de négation, est rarement fait dans les manuels. Et souvent, si les élèves savent à peu près montrer qu'une proposition universelle est vraie en utilisant un raisonnement sur un élément « quelconque », ils ont plus de difficultés à montrer qu'une proposition existentielle est fausse, et ne font pas le lien avec le fait de montrer que sa négation, qui est une proposition universelle, est vraie.

Une place particulière pour l'implication

S'il y a à dire sur tous les connecteurs, l'implication est celui qui nous occupe le plus pendant le stage. La table de vérité de ce connecteur, par exemple, laisse toujours quelques personnes sceptiques. Elle est bien utile pour justifier l'équivalence entre (A B) et (NON(A) OU B), ou le fait que la négation de (A B) est (A ET NON(B)). Cette dernière propriété est loin d'être naturelle, et quand on interroge des élèves ou des professeurs sur la négation de (A B), beaucoup de réponses proposées se présentent sous la forme d'une implication (on retrouve toutes les combinatoires possibles avec l'implication et la négation !). Il ne faut pas se méprendre en lisant dans le tableau des objectifs du programme « distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, sa réciproque, sa contraposée, et sa négation » : la négation y est mise au même niveau que la proposition conditionnelle, sa réciproque et sa contraposée qui sont toutes les trois des implications… mais elle n'en est pas une !

Une fois défini le connecteur implication, la tautologie suivante laisse les stagiaires perplexes (même après la nuit de réflexion que nous leur laissons) : [(A B) OU (B A)]. Nous l'illustrons par l'exemple :

(*f* croissante *f* continue) OU (*f* continue *f* croissante)

Le malaise est dû à la pratique implicite en mathématiques de lire les implications comme universellement quantifiées, même quand le quantificateur universel n'est pas apparent.

La proposition ci-dessus est donc lue :

$[\forall f\ (f \text{ croissante } \ f \text{ continue})]$ OU $[\forall f\ (f \text{ continue } \ f \text{ croissante})]$

qui est bien sûr fausse, à la différence de la proposition :

$\forall f\ [(f \text{ croissante } \ f \text{ continue})]$ OU $(f \text{ continue } \ f \text{ croissante})]$

Certaines études ont déjà montré des difficultés des élèves avec cette quantification universelle implicite (Durand-Guerrier, 1999). Certains mathématiciens refusent de considérer cela comme une difficulté, arguant du fait que c'est une façon de faire en mathématiques et qu'il n'y a qu'à apprendre que c'est comme ça qu'on fait. Nous pensons au contraire que l'explicitation de la quantification est essentielle, et nous allons voir à travers plusieurs exemples que son omission peut mener à bien des malentendus. Tout d'abord, faisons remarquer que la non prise en compte de ces implicites peut être une difficulté pour écrire certaines négations. On trouve parfois, par exemple, la propriété, pour une fonction *f*, d'être continue en *a* donnée sans quantification sur la variable *x* :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta\ (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

ce qui rend difficile d'écrire sa négation puisqu'il faut penser à faire réapparaître explicitement la quantification sur *x*.

Les choses sont ensuite à affiner, on ne peut pas se contenter de dire que les implications vont être systématiquement lues comme universellement quantifiées, il faut de plus préciser où placer la quantification. Prenons à nouveau un exemple, celui de la proposition (1) (dans laquelle les variables sont astreintes à *IR*) :

$\exists\ h > 0\ (|x| < h \Rightarrow x = 0)$ (1)

Une lecture courante place implicitement la quantification universelle sur la variable *x* juste avant l'implication, c'est-à-dire ici juste avant la parenthèse. On obtient alors la proposition (2) :

$\exists\ h > 0\ \ \forall x\ \ (|x| < h \Rightarrow x = 0$ (2)

qui est fausse (elle signifie qu'il existe un plus petit réel strictement positif).

On peut aussi transformer la proposition (1) avant de rétablir la quantification universelle, on obtient la proposition (1') équivalente[4] :

$(\forall\ h > 0\ \ |x| < h) \Rightarrow x = 0$ (1')

Rétablissons ensuite la quantification universelle sur la variable *x* juste avant l'implication, c'est-à-dire au début de la proposition (1'), on obtient la proposition (3) :

$\forall x\ [(\forall\ h > 0\ \ |x| < h) \Rightarrow x = 0]$ (3)

qui n'est pas équivalente à la proposition (2), et qui est vraie. Elle est équivalente à la proposition (3') :

$\forall x\ \exists\ h > 0\ (|x| < h \Rightarrow x = 0)$ (3')

qui est celle que l'on aurait obtenue en plaçant la quantification universelle au début de la proposition (1), ce que pourrait faire un « néophyte » peu au courant des pratiques implicites de quantification universelle des implications.

4 Les propriétés de « distribution » des quantificateurs par rapport aux connecteurs sont évoquées précédemment dans le stage, pour plus de détails voir (Cori, 2011).

Le langage en mathématiques est ainsi plus ambigu qu'on ne le croit. Et cette ambiguïté peut légitimement être un obstacle à la compréhension (ou à l'expression) des élèves. Il est préférable que les professeurs en soient conscients.

Prenons un autre exemple de règle implicite de lecture non formulée, qui concerne la notion de réciproque. La plupart des mathématiciens (et la plupart des professeurs de mathématiques) pense pouvoir définir la réciproque de manière claire et univoque : la réciproque de (A B) est (B A) (ou la réciproque de « si A alors B » est « si B alors A »), et donc implicitement la réciproque de $\forall x$ ($A(x) \Rightarrow B(x)$) est $\forall x$ ($B(x) \Rightarrow A(x)$). Ceci ne pose généralement pas de problèmes, moyennant quelques réajustements parfois : la réciproque de « si un quadrilatère a trois angles droits alors c'est un rectangle » n'est pas tout à fait « si c'est un rectangle alors un quadrilatère a trois angles droits », phrase grammaticalement correcte mais à l'effet de style un peu trop recherché. Regardons alors la proposition suivante (la variable k est astreinte à *IR*, la variable f à l'ensemble des fonctions de *IR* dans *IR*) :

Si f est croissante alors $|k|f$ est croissante

Replaçons maintenant les quantifications universelles, il y a deux possibilités :

- proposition 1 : $\forall f$, $\forall k$ (si f est croissante alors $|k|f$ est croissante),
- proposition 2 : $\forall f$ [si f est croissante alors ($\forall k$ $|k|f$ est croissante)]

Ici les deux propositions sont équivalentes, on peut donc a priori utiliser indifféremment l'une ou l'autre de ces formulations. Or, examinons maintenant les réciproques :

- réciproque proposition 1 : $\forall f$, $\forall k$ (si $|k|f$ est croissante alors f est croissante),
- réciproque proposition 2 : $\forall f$ [si ($\forall k$ $|k|f$ est croissante) alors f est croissante]

Les deux réciproques obtenues ne sont pas équivalentes (la première est fausse, la deuxième est vraie). On ne peut donc pas prendre indifféremment l'une ou l'autre des deux formulations précédentes (pourtant équivalentes !) pour répondre à la question « la réciproque de la propriété "si f est croissante alors $|k|f$ est croissante" est-elle vraie ou fausse ? ». Ce qu'est la réciproque d'une proposition n'est donc pas toujours aussi clair qu'on pourrait le croire.

Le tour des difficultés liées à l'implication n'est pas fini (et nous ne prétendons pas en donner une liste exhaustive). Une autre difficulté concerne la contraposition. Là encore, la contraposée est pour les mathématiciens une notion donnant l'impression d'être bien définie : la contraposée de la proposition « si A alors B » est la proposition « si NON(B) alors NON(A) », qui lui est équivalente. Mais une fois encore, la plupart du temps il s'agit d'écrire la contraposée d'implications universellement quantifiées, et les élèves ne savent pas toujours quoi faire de cette quantification, certains donnant comme contraposée de « pour tout x, si $P(x)$ alors $Q(x)$ » la proposition « il existe x tel que, si NON$Q(x)$ alors NON$P(x)$ », appliquant ainsi une négation à la quantification. Par ailleurs, il y a des phrases de la forme « si … alors … » qui ne sont pas « contraposables » (ce ne sont pas des implications, grammaticalement, « si … » y est une proposition conditionnelle, « alors » un adverbe). On trouve parfois énoncée comme suit une propriété bien connue de la fonction logarithme :

si x et y sont des réels positifs, alors $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

Quelle serait la contraposée de cette proposition? On accepterait difficilement comme réponse la proposition :

si $\ln(xy)$ $\ln x + \ln y$ alors x et y ne sont pas des réels positifs même si celle-ci est syntaxiquement correcte.

Pourquoi écrire cette propriété sous forme d'implication ? Pour ne pas écrire de quantification universelle ? Pourtant la formulation « pour tous réels x, y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ », que l'on trouve heureusement le plus souvent, est nettement préférable à celle sous forme d'implication qui n'en est pas vraiment une. En effet, on utilise parfois une quantification universelle relativisée, c'est-à-dire une proposition de la forme ($\forall x$ tel que $P(x)$, $Q(x)$) comme raccourci de la proposition $\forall x\ (P(x)\ \ Q(x))$.

On utilise l'une ou l'autre de ces formulations équivalentes quand les propositions $P(x)$ et $Q(x)$ sont définies pour une variable astreinte à un même ensemble E. Elles signifient que la proposition $Q(x)$ est vraie pour tous les éléments de E vérifiant la proposition $P(x)$. L'usage est d'utiliser cette « relativisation » quand les éléments vérifiant $P(x)$ ne sont pas la totalité des éléments de E. Certains manuels parlent de cette autre manière de formuler une implication. La formulation sous forme d'une quantification universelle relativisée a l'avantage de se présenter sous une forme apparemment plus simple, et peut-être plus opératoire. La formulation sous forme d'implication universellement quantifiée a l'avantage de proposer une structure permettant de former facilement, moyennant les ambiguïtés déjà évoquées, la réciproque ou la contraposée. Mais elle a un défaut déjà évoqué : la quantification universelle n'est pas explicite.

Dans l'exemple ci-dessus, nous ne sommes pas dans cette situation, la proposition « $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ » ($Q(x)$) n'a de sens que si les variables sont astreintes à IR_+. Il ne s'agit donc pas de relativiser une propriété à certains éléments d'un ensemble, mais de quantifier universellement sur les éléments pour lesquels la propriété a un sens. L'usage d'une implication est donc inapproprié.

Dans un exercice où l'élève doit faire une démonstration par contraposée, l'implication à démontrer est généralement explicitement écrite. Dans d'autres cas, là où dans les années 60 on pouvait rencontrer comme exercice « montrer que pour tout x réel positif, si $P(x)$ alors $Q(x)$ », on est progressivement passé à « soit x un réel positif tel que $P(x)$. Montrer $Q(x)$ », masquant ainsi l'implication et surtout la quantification universelle qui lui est associée, et aujourd'hui le plus courant est de trouver « x est un réel positif tel que $P(x)$. Montrer que $Q(x)$ » (par exemple dans un exercice de géométrie, « place un point M sur le segment $[AB]$ et montre que M vérifie $Q(M)$ »). Dans cette manière de formuler les exercices, les élèves peuvent perdre complètement l'idée qu'ils ont montré un résultat général puisque ces formulations donnent l'impression de raisonner sur un élément particulier. Nous incitons les professeurs suivant le stage à terminer chaque démonstration par un récapitulatif de ce qui a été établi, sans omettre les quantifications. Nous pensons que cette pratique peut aider les élèves à faire un lien entre structure logique d'une proposition et structure de sa démonstration.

Ce que nous venons de souligner concernant l'implication relève plutôt d'un manque de précision que de l'erreur. Là où le mathématicien pouvait penser user d'une logique s'acquérant naturellement et s'exprimant à travers un langage clair, nous avons vu qu'il y avait des implicites et des ambiguïtés. Les professeurs qui suivent le stage sont généralement sensibles à ces remarques sur le langage mathématique qui est en grande partie le leur en classe, adapté au niveau de chaque classe. Mais cela les laisse parfois démunis. Ainsi, un professeur nous a demandé comment rédiger les résolutions d'équations quand elles comportent des quotients dont le dénominateur n'est pas partout défini, par exemple $(x + 2) / (x – 3) = 0$. Une pratique courante est de raisonner par équivalence :

$(x + 2) / (x – 3) = 0$ (x 3 et $x + 2 = 0$)

Cette équivalence est implicitement universellement quantifiée sur tous les réels. Ce qui pose problème, car l'expression de gauche n'est définie que pour les réels différents de 3, contrairement à la partie de droite. Il est donc plus correct de regarder d'abord sur quel domaine l'équation a un sens, puis de raisonner éventuellement par équivalence quantifiée universellement sur le domaine de définition de l'équation. Ici, on aurait donc :

Pour tout x 3, (($x + 2) / (x – 3) = 0$ $x + 2 = 0$)

On trouve aussi dans certains manuels de Seconde, à propos de l'implication, des discours montrant non seulement une connaissance floue de cet objet mais une connaissance erronée. Une erreur que l'on retrouve plusieurs fois concerne le fameux cas problématique des implications à prémisse fausse. Dans le manuel *Pixel* par exemple, on demande la valeur de vérité de la proposition « $f(x) = 1$ si $x = –3$ et $x = 4$ » (dans l'exercice proposé, 4 et –3 sont effectivement solutions de $f(x) = 1$). Le manuel corrige en disant que cette proposition est fausse car « x ne peut pas être égal simultanément à –3 et à 4 »... or, c'est précisément pour cela qu'elle est vraie ! Réécrivons cette proposition sous la forme « pour tout réel x, si ($x = –3$ et $x = 4$) alors $f(x) = 1$ », la prémisse de cette implication est fausse quelle que soit la valeur attribuée à la variable x, donc l'implication est tout le temps vraie ! Encore une fois, cet exemple montre qu'il faut faire attention à certaines propositions qui ont une structure complexe, nécessitant un minimum de familiarité avec les propriétés des connecteurs pour pouvoir établir si elles sont vraies ou fausses. Et montre également que la seule pratique des mathématiques ne garantit pas toujours l'acquisition de ces connaissances.

Les démonstrations

Nous avons jusqu'ici regardé et analysé des expressions mathématiques, c'est-à-dire des noms d'objets et des affirmations de faits concernant ces objets. Les démonstrations qui établissent ces faits sont également modélisées par la logique mathématique, une branche de celle-ci s'appelle la théorie de la démonstration et s'occupe notamment d'étudier les systèmes de déduction (un système de déduction comporte un langage permettant de former des propositions et des règles de déduction permettant d'élaborer des démonstrations formelles). Le langage des prédicats, que nous avons utilisé pour exhiber les structures logiques des propositions, est familier aux mathématiciens. Par contre, il n'existe pas de système de déduction dont l'ensemble des règles leur soient familières, ils ne se préoccupent pas de formaliser leurs raisonnements.

Sans rentrer dans l'exposé d'un système formel de règles de déduction, nous évoquons pendant le stage quelques types de raisonnements, comme cela est demandé par le programme (cf p.3). La règle du *modus ponens* correspond à la démonstration « directe » utilisant une implication : « de A et de (SI A ALORS B), je déduis B ». C'est cette inférence qui est sous-jacente quand nous disons « A donc B ». Il est essentiel de ne pas confondre cette phrase avec la proposition (SI A ALORS B) ! D'ailleurs « A donc B » n'est pas une proposition. D'un point de vue plus pratique, quand on dit « A donc B », on dit que A est vrai, que (SI A ALORS B) est vrai, et on déduit que B est vrai. Dire que (SI A ALORS B) est vrai ne dit rien sur la valeur de vérité de A, ni sur celle de

B, mais juste quelque chose d'un lien entre ces deux valeurs. Certains manuels font cette confusion dans la partie présentant l'implication, et parfois pour illustrer leur propos, ils utilisent des exemples de la vie courante. Nous pouvons citer l'exemple extrait du manuel *Indice* qui donne l'un après l'autre, comme s'ils étaient synonymes, les deux énoncés suivants : « j'ai 40° de fièvre donc je ne vais pas au lycée » et « si j'ai 40° de fièvre je ne vais pas au lycée ». Ces phrases ne sont évidemment pas synonymes : il suffit par exemple de penser à des contextes dans lesquels elles peuvent être prononcées. La première ne peut être prononcée qu'un jour où le locuteur a effectivement 40° de fièvre, ce n'est pas le cas pour la deuxième qui peut être prononcée en n'importe quelles circonstances, notamment sans avoir 40° de fièvre. Il est aussi courant de voir des étudiants pourtant assez avancés dans leur études de mathématiques penser que quand (SI *A* ALORS *B*) est vraie, forcément *A* est vraie. Nous proposons en formation un exercice issu d'un manuel de DEUG (cité dans Durand-Guerrier et al., 2000) :

On considère trois nombres réels x, y et z.
1. Écrire un énoncé synonyme de

« l'un des trois nombres x, y et z est nul et les deux autres sont de signes contraires »

en utilisant exclusivement les lettres x, y et z, le symbole 0, le signe $=$, le signe $<$, les connecteurs propositionnels « non », « et », « ou », $\Longrightarrow$ et les parenthèses. Peut-on obtenir un énoncé synonyme plus court en s'autorisant un symbole supplémentaire ?

2. On suppose que l'énoncé de la question 1 est vrai, ainsi que les trois énoncés suivants :

(1) $y = 0 \Longrightarrow x > 0$

(2) $y > 0 \Longrightarrow x < 0$

(3) $x \neq 0 \Longrightarrow z > 0$

Comparer les nombres x, y et z.

Figure 5 – Un exercice issu d'un manuel de DEUG

Nous proposons régulièrement cet exercice à des étudiants de première année à l'Université. Ils sont nombreux à adopter la stratégie suivante : ils supposent vraie la prémisse de la première implication, et voient que cela amène une contradiction (avec la troisième implication, on aurait $x > 0$ et $z > 0$), alors ils recommencent avec la deuxième puis avec la troisième implication. Comme ils arrivent trois fois à une contradiction, ils concluent qu'il n'est pas possible que les trois implications soient vraies, oubliant la possibilité d'avoir les trois prémisses fausses (ce qui donne la solution $y < 0$, $x = 0$ et $z > 0$ qui convient). On peut adapter cet exercice à un public plus jeune :

On dispose de trois formes en bois : un disque, un carré et un triangle.
On sait que l'une de ces formes est rouge, une autre bleue et une autre jaune.
Voici trois affirmations vraies qui concernent ces pièces :
Si le carré est bleu alors le disque est jaune.
Si le carré est jaune alors le disque est rouge.
Si le disque n'est pas bleu alors le triangle est jaune.
Quelle est la couleur de chaque pièce ?

Figure 6 – Une adaptation de l'exercice de la figure 5

La confusion entre « si ... alors ... » et « ... donc ... » se trouve renforcée par l'utilisation du symbole d'implication ⇒ pour signaler et enchaîner les pas de déduction dans une démonstration. Cette notation permet d'éviter la répétition du mot « donc » qui peut produire un style d'écriture assez lourd, mais rappelons que ces deux expressions ne se situent pas au même niveau de langage : « si *A* alors *B* » est une proposition, elle énonce un fait concernant des objets mathématiques, susceptible d'être vrai ou faux. « *A* donc *B* » n'est pas une proposition, c'est une phrase qui résume un raisonnement mettant en lien des faits mathématiques, raisonnement susceptible d'être valide ou non. La valeur de vérité de la proposition « si *A* alors *B* » est entièrement déterminée par les valeurs de vérité des propositions *A* et *B*, notamment, cette proposition est vraie quand les propositions *A* et *B* sont vraies. Quand on affirme « *A* donc *B* », on est dans un contexte permettant d'affirmer que *A* est vraie, on affirme connaître une justification du fait que *B* est vraie qui utilise le fait que *A* est vraie (le plus souvent cette justification est la vérité de « si *A* alors *B* »), on affirme enfin la vérité de B (et, implicitement, le fait que cette dernière affirmation est une conséquence des deux précédentes). Il est ainsi tout-à-fait possible que *A* soit vraie, que *B* soit vraie, mais qu'il ne soit pas pertinent de dire « *A* donc *B* ». La formulation « *A* donc *B* » est un raccourci qui masque ce qui justement garantit la validité de cette inférence.

Le programme évoque entre autres le raisonnement par contraposée et le raisonnement par l'absurde. Il n'est pas toujours facile de distinguer ces deux types de raisonnement, et dans certains manuels on peut trouver le même exercice comme exemple de l'un ou de l'autre :

Démonstration par la contraposée

Énoncé : Démontrer que si le carré d'un entier naturel n est pair, alors n est pair.
Solution
La contraposée de la proposition à démontrer est : « si un entier naturel n est impair, alors n^2 est impair ».
On suppose que n est impair, c'est-à-dire $n = 2k + 1$ avec k entier naturel.
Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et donc n^2 est impair.
La contraposée est donc vraie ; par conséquent, la proposition « si le carré d'un entier naturel n est pair, alors n est pair » est vraie.

Figure 7 – Un extrait du manuel Hyperbole

8.2 Démonstration par l'absurde « Absurde » signifie « contraire à la raison, au bon sens ».

Exemple. Démontrer que pour tout entier n, la proposition (P) : « n^2 est un entier pair » implique la proposition (Q) : « n est un entier pair ».
Démontrons par l'absurde cette implication. Supposons donc qu'il existe un entier n tel que n^2 soit pair et n soit non pair, c'est-à-dire tel que n soit impair. Alors, il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$. D'où $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi, $n^2 = 2k + 1$, avec $k = 2p^2 + 2p$, entier.
Donc n^2 est impair, ce qui contredit « n^2 est pair ».
Donc : Si « n^2 est pair » implique « n est pair ».

Figure 8 – Un extrait du manuel Transmath

A la base du raisonnement par l'absurde, il y a l'hypothèse que quelque chose est faux, c'est-à-dire que sa négation est vraie. Ce qu'il y a à démontrer ne se présente pas forcément sous la forme d'une implication, contrairement aux cas où l'on va utiliser un raisonnement par contraposée. Dans ces deux types de raisonnement, il faut formuler des négations, ce qui n'est pas une tâche facile pour des élèves de Seconde.

Pour prouver une implication (SI A ALORS B), il est fréquent de supposer A, puis éventuellement de supposer NON(B) pour voir si on aboutit à une contradiction (d'où l'appellation peut-être un peu rapide de raisonnement par l'absurde). Cela revient en fait à supposer (A ET NON(B)) qui est la négation de (SI A ALORS B), ce que ne mentionne pas le manuel *Transmath*, pas plus qu'il n'explique pourquoi « [on suppose] qu'il existe un entier n tel que … ». Parfois, pour aboutir à cette contradiction, on utilise explicitement l'hypothèse A, on a alors effectivement un raisonnement par l'absurde, mais d'autres fois, on arrive en fait à montrer NON(A) à partir de NON(B) sans utiliser l'hypothèse A. NON(A) est effectivement en contradiction avec l'hypothèse A, mais le raisonnement peut alors être rédigé comme un raisonnement par contraposée. Cette distinction n'est sans doute pas importante pour les élèves, l'objectif est qu'ils arrivent à démarrer un raisonnement en supposant que ce qu'ils ont à montrer est faux. Les professeurs, par contre, peuvent se demander face à un raisonnement qu'ils qualifieraient de raisonnement par l'absurde s'ils ne peuvent pas en fait le rédiger comme un raisonnement par contraposée.

Mise en jeu de ces connaissances

Le travail sur les propositions et le raisonnement occupe une bonne moitié du stage. Cette proportion était supérieure dans les premières éditions du stage, et certains stagiaires avaient dans leurs commentaires regretté que le stage soit trop théorique et pas assez axé sur ce qu'il est possible de faire en classe. Nous n'avions alors pas vraiment de matière pour proposer un contenu plus pratique. La création en juin 2010, à la suite du premier stage, d'un groupe IREM « Logique » dans lequel collaborent des enseignants du supérieur et des enseignants de lycée et de collège a permis de développer cet aspect.

Nous proposons ainsi plusieurs entrées plus proches du terrain pendant le stage. Pour répondre à la perplexité souvent exprimée en début de stage par les stagiaires devant les pages et les exercices « logique » proposés dans leurs manuels, nous organisons un travail en groupe sur des extraits de manuels. Cela permet de voir comment les connaissances théoriques proposées permettent un regard critique et alimentent une prise de recul. Les extraits présentés pendant le stage ont été étudiés au sein du groupe

« Logique » de l'IREM (Groupe logique, 2011), les exercices commentés pendant le stage sont disponibles sur le site du groupe, (Groupe logique 2012). Ces activités proposées dans les manuels, où l'on retrouve toutes les ambiguïtés et les implicites déjà évoqués, peuvent être utilisées en classe pour mettre à jour et discuter collectivement ces ambiguïtés et implicites.

Au delà de la critique des manuels, il est intéressant de proposer une alternative. Par ailleurs, livrer des séquences prêtes à l'emploi ne nous paraît pas la meilleure formation à délivrer, chaque professeur étant le plus à même, une fois formé et averti, de construire ce qui sera un bon support de travail dans sa classe. Des enseignants du secondaire (deux en lycée, un en collège) du groupe « Logique » sont venus présenter des activités proposées dans leurs classes. Ils parlent bien mieux que nous ne saurions le faire des contraintes qui façonnent leur préparation, du déroulement de l'activité, du bilan des apprentissages des élèves, du réinvestissement de ces activités, des remaniements envisagés suite à leur mise en place. Nous incitons les professeurs suivant le stage à mettre en place eux aussi des séquences dans leurs classes permettant de parler de certaines notions de logique, et nous les invitons à nous en faire le récit lors de la dernière journée de stage.

Conclusion

Les objectifs des programmes du lycée concernant « notations et raisonnement mathématiques » sont donnés pour les trois années du lycée, même si certaines notions sont spécifiques à la classe de Première (notion d'équivalence) ou de Terminale (raisonnement par récurrence). Cela rend plus difficile l'organisation d'un enseignement progressif et abouti sur ces notions échelonné sur les trois années du lycée. Par ailleurs, la présence au stage de professeurs de collège (environ un quart des stagiaires) montre qu'il y a également une demande de leur part, et il serait sans doute intéressant d'expliciter les notions de logique déjà présentes, et comment se fait la transition collège-lycée sur ces questions.

Nous espérons avoir montré à travers cet exposé qu'il est nécessaire de proposer aux professeurs de mathématiques des éléments de réflexion par rapport aux notions de logique qu'ils ont à enseigner. Nombre de professeurs sont effectivement désireux d'approfondir leurs connaissances dans ce domaine, même si la logique ne vient pas toujours en priorité dans leur demande de formation sur les nouveautés des programmes. Lors du bilan du stage, plusieurs professeurs notent comme une de leurs motivations pour s'y inscrire le manque de formation en logique dans leur formation initiale. L'organisation du contenu du stage, basée sur une approche naïve du langage mathématique, permet de transmettre des connaissances en logique mathématique sans l'étudier de manière formelle. Nous espérons ainsi d'abord que ces connaissances en logique aideront les professeurs à réfléchir à leurs pratiques de rédaction et d'expression. Ensuite qu'ils pourront s'appuyer sur une compréhension claire des notions en jeu dans les nouveaux programmes, associée à une connaissance des obstacles et erreurs récurrentes des élèves pour construire un enseignement de ces notions pour leurs élèves. Bien que le travail sur le langage soit apprécié par les stagiaires, nous sentons comme une résistance à faire entrer dans les pratiques des activités portant spécifiquement dessus, notamment des exercices de reformulation. Les différents exemples donnés dans ce texte et lors du stage montrent suffisamment la complexité du langage mathématique. Il nous semble donc nécessaire d'une part que les professeurs soient vigilants dans leur discours, d'autre part que des tâches soient proposées aux élèves, consacrées spécifiquement à la manière de dire en mathématiques, et pas seulement à la manière de faire.

BIBLIOGRAPHIE

Cori, R. (2011) Notes du cours Langage Mathématique. En ligne

http://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/document/document.php?cidReset=true&cidReq=LM1

Deloustal-Jorrand, V. (2001) L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit x, 55*, 35-70.

Deloustal-Jorrand, V. (2004) L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Thèse de l'Université Joseph Fourier Grenoble I.

Durand-Guerrier, V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x 50*, 57-79.

Durand-Guerrier, V., Le Berre, M., Pontille, M-C., Reynaud-Fleurly, J. (2000) *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques*. IREM de Lyon.

Groupe Logique et raisonnement de l'IREM de Grenoble (2011) SiRC et Logique 2010-2011. En ligne : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/irem/Logique/

Groupe Logique de l'IREM de Paris. (2011) Réflexions sur les propositions des manuels, et sur les notions de logique au programme du lycée. En ligne : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/reflexions_sur_les_propositions_des_manuels_et_sur_les_notions_de_logique_a/

Groupe Logique de l'IREM de Paris. (2012) Les documents du stage "initiation à la logique". En ligne : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les_documents_du_stage_initiation_a_la_logique/

Lacombe, D. (2007) Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la logique et qu'on n'a jamais voulu vous révéler. Conférence au séminaire de l'IREM de Paris 7. En ligne : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/tout_ce_que_vous_avez_toujours_voulu_savoir_sur_la_logique/

Mesnil, Z. (à paraître) La place de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France. Actes du colloque EMF 2012.

Rogalski, J., Rogalski, M. (2004) Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *9*,175-203.

Selden, A., Selden, J. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics 29*, 123-151.

Programmes et documents ressource :

Mathématiques, Classe de Seconde, B.O n°30 du 23 juillet 2009,

Ressources pour la classe de Seconde, Notations et raisonnement mathématiques, juillet 2009.

Manuels :

Mathématiques 2nd, collection Hyperbole, NATHAN, 2010.

Maths 2nd, collection Indice, BORDAS, 2009.

Maths 2nd , collection Pixel, BORDAS, 2010

Symbole maths 2nd, BELIN, 2010.

RENOVATION DE LA VOIE PROFESSIONNELLE : DEMARCHE D'INVESTIGATION ET EVALUATION PAR COMPETENCES, DE L'ENSEIGNEMENT A LA CERTIFICATION

Laurent GALLIEN (IREM Dijon), Benoit KERN (IREM Besançon),
Jean Luc PERNETTE (IREM Dijon)
CII Lycées Professionnels

Résumé – La rénovation de la voie professionnelle est entrée en application en septembre 2009. Avec le passage de quatre à trois années de formation, la cession 2012 est la première qui voit le passage de ce diplôme sous ses nouvelles modalités. De nombreuses modifications pour l'enseignement des mathématiques-sciences découlent de cette rénovation, tant dans l'organisation des savoirs que dans leur mode de transmission. Ainsi, les enseignants de lycée professionnel sont amenés à mettre en œuvre un enseignement basé sur la démarche d'investigation avec une généralisation de l'usage des TIC. Les modes d'évaluation ont eux aussi évolué, la certification se fait aujourd'hui en Contrôle en Cours de Formation (CCF) avec une obligation d'évaluation par compétences. Enfin aux heures d'enseignements se sont ajoutés deux dispositifs : l'Accompagnement Personnalisé (AP) et l'Enseignement Général Lié à la Spécialité (EGLS). Nous vous proposons de développer dans une première partie ces différentes évolutions et les implications en termes d'organisation des enseignements. Les deuxième et troisième parties sont consacrées à deux des principales nouvelles orientations précédemment citées : démarche d'investigation et évaluation en Contrôle en Cours de Formation. Nous tenterons de mettre en avant la nécessaire liaison entre ces deux approches et les difficultés rencontrées.

La réforme de la voie professionnelle

Cadre général

La mise en œuvre de la réforme de la voie professionnelle est définie par le BO spécial n°2 du 19 février 2009. Elle entre en application au premier septembre 2009 pour aboutir à une première session d'examen en 2012.

Parmi les modifications importantes, nous pouvons citer le passage de quatre années de formations (deux années pour le BEP /CAP et deux années pour le Bac) à trois années avec la mise en place d'une certification intermédiaire (BEP ou CAP) au cours de la formation.

Les grilles horaires ont été modifiées et tri-annualisées. Les seuils de dédoublement initialement présents et qui encadraient le nombre maximum d'élèves en groupe suivant les enseignements (que ce soit en enseignement général ou professionnel) ont été abandonnés au profit d'un volume horaire complémentaire permettant les activités en groupe à effectif réduit. Le calcul de ce volume horaire est effectué en fonction du nombre d'élèves et sa répartition est laissée à l'autonomie des établissements.

Enfin, deux nouveaux dispositifs apparaissent :

- L'Accompagnement Personnalisé (AP).

Des dispositifs d'accompagnement personnalisé sont mis en place pour tous les élèves selon leurs besoins dans les classes de seconde, première et terminale préparant aux baccalauréats général, technologique et professionnel. Ils comprennent des activités de soutien, d'approfondissement, d'aide méthodologique et d'aide à l'orientation, pour favoriser la maîtrise progressive par l'élève de son parcours de formation et d'orientation. Ils prennent notamment la forme de travaux interdisciplinaires.[1]

- Les Enseignements Généraux Liés à la Spécialité (EGLS).

Un horaire spécifique de 152 h dédiée aux disciplines qui contribuent à la professionnalisation. La contribution à la professionnalisation, c'est, par exemple :
- des activités visant à développer des connaissances et des compétences utiles à la pratique professionnelle etc. ;
- des activités s'appuyant sur un contexte professionnel, sur des matériaux utilisés par la profession ;
- des activités liées au suivi et à l'évaluation des PFMP ;
- des contenus disciplinaires qui s'ajoutent à un tronc commun (ex. modules spécifiques de mathématiques ou de sciences physiques, dont les contenus varient selon des groupes de spécialités).

Les 152 h sont donc attribuées à certaines disciplines (Français, maths, sciences, LV, arts appliqués). Le choix est fermé. Le volume horaire attribué à une discipline devrait être en cohérence avec l'importance de sa contribution à la professionnalisation. Cet horaire s'ajoute à l'horaire de base de la discipline.
Le choix des disciplines et la répartition des heures relèvent de l'autonomie de l'établissement.[2]

Cette réforme a laissé une grande place à l’autonomie des établissements mais cela n’est pas sans poser de réelles difficultés.

En effet, la disparition des seuils de dédoublements au profit d’un volume d’heures complémentaires ne permet pas, dans la majeure partie des cas, de travailler autant en groupes à effectifs réduits qu’auparavant. Certaines disciplines se sentent donc forcément lésées par les choix effectués par l’établissement. Cela amène souvent, lors de la répartition des dotations horaires, à envisager les heures d’accompagnement personnalisé et d’EGLS comme « *variables d’ajustement* » pour augmenter les possibilités de travail en groupe ou pour le maintien de postes dans un contexte de suppression massive de postes en lycée professionnel.

Leur caractère obligatoire est pourtant souligné.

L'accompagnement personnalisé figure au même titre et au même rang que les enseignements obligatoires.[3]

Cela peut aussi aboutir à des tensions non négligeables entre disciplines au sein des établissements, peu favorables au travail d’équipe nécessaire à la mise en place des EGLS…

1 Article D. 333-2 du Code de l'éducation.

2 Bernard Porcher, L’organisation des enseignements dans le cadre de l’autonomie des établissements : approches organisationnelles et pédagogiques, in Actes du séminaire - La rénovation de la voie professionnelle : présentation du baccalauréat professionnel en trois ans, Direction générale de l’Enseignement scolaire – 2009.

3 Circulaire n° 2009-068 du 20 mai 2009 - relative à la préparation de la rentrée 2009 - BO n°21 du 21 mai 2009.

En mathématiques sciences

Les programmes d'enseignement de mathématiques et de sciences physiques et chimiques pour les classes préparatoires au baccalauréat professionnel débutent par un préambule commun aux mathématiques et aux sciences physiques et chimiques ; notre bivalence nous amène en effet à enseigner ces deux matières.

Ce préambule défini les objectifs généraux de la formation, les attitudes développées chez les élèves. La démarche pédagogique à mettre en œuvre est explicitée autour de dix points :

1. Prendre en compte la bivalence.
2. Privilégier une démarche d'investigation.
3. S'appuyer sur l'expérimentation.
4. Identifier les acquisitions visées : connaissances, automatismes et capacité à résoudre des problèmes.
5. Prendre appui sur des situations liées aux champs professionnels.
6. Proposer des activités de synthèse.
7. Construire une progression adaptée.
8. Intégrer les TIC dans les apprentissages.
9. Mettre l'élève au travail, individuellement ou en groupe.
10. Diversifier les modes d'évaluation.

Les programmes sont remodelés.

En mathématiques

Les enseignements restent délimités par années et en 3 domaines (Statistiques et probabilités, Algèbre – Analyse, Géométrie). Chacun des domaines est divisé en modules de formations eux même déclinés en capacités, connaissances et commentaires.

3.2 Géométrie et nombres

Les objectifs de ce module sont d'appliquer quelques théorèmes et propriétés vus au collège et d'utiliser les formules d'aires et de volumes. Les théorèmes et formules de géométrie permettent d'utiliser les quotients, les racines carrées, les valeurs exactes, les valeurs arrondies en situation. Leur utilisation est justifiée par le calcul d'une longueur, d'une aire, d'un volume.

Capacités	Connaissances	Commentaires
Utiliser les théorèmes et les formules pour : - calculer la longueur d'un segment, d'un cercle ; - calculer la mesure, en degré, d'un angle ; - calculer l'aire d'une surface ; - calculer le volume d'un solide ; - déterminer les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires et les volumes.	Somme des mesures, en degré, des angles d'un triangle. Formule donnant la longueur d'un cercle à partir de celle de son rayon. Le théorème de Pythagore. Le théorème de Thalès dans le triangle. Formule de l'aire d'un triangle, d'un carré, d'un rectangle, d'un disque. Formule du volume d'un cube, d'un parallélépipède rectangle.	La connaissance des formules du volume d'une pyramide, d'un cône, d'un cylindre, d'une sphère n'est pas exigible. Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle sont utilisées en situation si le secteur professionnel le justifie.

Figure 1 – Exemple d'un module de seconde

Si le programme de seconde est commun à toutes les spécialités, en première et terminale, il est composé d'un tronc commun (TC) et d'une partie spécifique (SPE) dépendant du champ professionnel.

	Intitulé	Grpt A	Grpt B	Grpt C
TC	Statistique à deux variables. Probabilités.	x x	x x	x x
	Suites numériques 2.	x	x	x
	Fonction dérivée et étude des variations d'une fonction.	x	x	x
SPE	Fonctions exponentielles et logarithme décimal.			x
	Fonctions logarithmes et exponentielles.	x	x	
	Géométrie dans le plan et dans l'espace : consolidation.		x	
	Vecteurs 2.		x	
	Trigonométrie 2.	x		

Figure 2 – Exemple des modules de terminale

En plus de ces modules, l'année de terminale comporte des modules complémentaires pour les élèves envisageant une poursuite d'études.

Groupements A et B	Groupement C
* Produit scalaire * Nombres complexes * Calcul intégral	* Primitives * Fonctions logarithme népérien et exponentielle de base e.

Figure 3 – Des modules complémentaires pour les élèves envisageant une poursuite d'études

La mise en œuvre de ces modules complémentaires en classe de terminale implique la mise à disposition des volumes d'horaires d'accompagnement personnalisé.

Cela nous renvoie à la problématique énoncée précédemment concernant la répartition des moyens au sein des établissements.

Enfin, quelle que soit l'année, les modules doivent être développés au travers de cinq grands sujets contenant de quatre à six thématiques :

- Développement durable : Protéger la planète, Gérer les ressources naturelles, Transporter des personnes ou des marchandises, Comprendre les enjeux de l'évolution démographique.
- Prévention santé et sécurité.
- Evolution des sciences et techniques.
- Vie sociale et loisirs.
- Vie économique et professionnelle.

C’est une démarche nouvelle qui implique une réorientation profonde de nos pratiques. Cette approche est encore plus explicite en sciences comme nous le verrons dans le paragraphe à venir.

En sciences physiques et chimiques

L’organisation précédente des connaissances en domaines (chimie, électricité, mécanique…) a totalement disparu au profit d’une entrée par le biais de questions.

Ainsi, par exemple, l’oxydoréduction sera abordée dans le module « Comment protéger un véhicule contre la corrosion ? ».

T 3	COMMENT PROTÉGER UN VÉHICULE CONTRE LA CORROSION ?	Cycle terminal Tronc commun
Capacités	**Connaissances**	**Exemples d'activités**
Mettre en évidence expérimentalement l’influence de certains facteurs extérieurs sur la corrosion du fer. Identifier dans une réaction donnée un oxydant et un réducteur. Classer expérimentalement des couples rédox. Prévoir si une réaction est possible à partir d’une classification électrochimique. Écrire et équilibrer les demi-équations Écrire le bilan de la réaction d’oxydoréduction.	Savoir que certains facteurs tels que l’eau, le dioxygène et le sel favorisent la corrosion. Savoir qu’un métal s’oxyde. Savoir qu’une réaction d’oxydoréduction est une réaction dans laquelle intervient un transfert d’électrons. Savoir qu’une oxydation est une perte d’électrons.	Observation et interprétation de l’expérience d’un clou plongé dans de l’eau de Javel. Action de l’eau de Javel sur un clou entouré de cuivre, de zinc, d’aluminium Protection cathodique d’un métal Protection à l’aide d’un inhibiteur, par anode sacrificielle, par dépôt électrolytique d’un métal (chromage, nickelage, …), par peinture, voile plastique. Passivation d’un métal par l’acide nitrique fumant

Figure 4 – Exemple d’un module de première / terminale

Tous les modules sont développés, comme en mathématiques, en capacités, connaissances et commentaires.

Ils sont par ailleurs rattachés à quatre grands thèmes : Transport (T), Confort dans la Maison et l’Entreprise (CME), Hygiène et Santé (HS) et Son et Lumière (SL).

En seconde, le programme est constitué d’un tronc commun. En première et terminale, au tronc commun s’ajoutent des modules spécifiques en fonction des spécialités professionnelles.

Ce programme de première et terminale est donné sur deux années, la répartition sur chaque année est à l’initiative de l’enseignant.

LES TRANSPORTS (T)	CONFORT DANS LA MAISON ET L'ENTREPRISE (CME)	HYGIÈNE ET SANTÉ (HS)	SON ET LUMIÈRE (SL)
T 3 Comment protéger un véhicule contre la corrosion ?	CME 4 Comment chauffer ou se chauffer?		SL 1 Comment dévier la lumière ?
T 4 Pourquoi éteindre ses phares quand le moteur est arrêté ?	CME 5 Peut-on concilier confort et développement durable ?		SL 2 Comment un son se propage-t-il ?
T 5 Comment se déplacer dans un fluide ?			SL 3 Comment transmettre un son à la vitesse de la lumière ?
		HS 4** Comment peut-on adapter sa vision ?	SL 4** Comment voir ce qui est faiblement visible à l'œil nu ?

Figure 5 – Le tronc commun en première et terminale

LES TRANSPORTS (T)	CONFORT DANS LA MAISON ET L'ENTREPRISE (CME)	HYGIÈNE ET SANTÉ (HS)	SON ET LUMIÈRE (SL)
T 6 Qu'est-ce qu'une voiture puissante ?	CME 6 Comment fonctionnent certains dispositifs de chauffage ?	HS 5 Quels sont les principaux constituants du lait ?	SL 5 Pourquoi les objets sont-ils colorés?
T 7 Comment avoir une bonne tenue de route ?	CME 7 Comment l'énergie électrique est-elle distribuée à l'entreprise ?	HS 6 Quels sont le rôle et les effets d'un détergent ?	SL 6 Comment reproduire un signal sonore ?
T 8 Comment faire varier la vitesse d'un véhicule électrique ?			SL 7 Comment une image est-elle captée par un système d'imagerie numérique ?

Figure 6 – Les modules spécifiques en première et terminale

Cette réorganisation en mathématiques et en sciences constitue une modification profonde du paradigme précédent d'organisation des connaissances. Cela implique une remise en cause des modalités d'organisation des séances de cours. Des formations ont été mises en place dans les différentes académies, il est regrettable que celles-ci n'aient pas été entreprises en amont de la réforme.

D'autant plus que les deux dispositifs que nous allons présenter dans la suite de cet article s'appuient directement sur cette réorganisation. Ainsi, la mise en œuvre de la problématique en sciences et l'intégration à une thématique en mathématiques doivent servir de support à une démarche d'investigation dans ces deux disciplines.

La démarche d'investigation

La démarche d'investigation a normalement été initiée au collège.

> Elle s'appuie sur un questionnement des élèves par rapport au monde réel.
> Elle permet la construction de connaissances et de capacités à partir de situations problèmes motivantes et proche de la réalité pour conduire l'élève à :
> - définir l'objet de son étude ;
> - rechercher, extraire et organiser l'information utile (écrite, orale, observable) ;
> - inventorier des paramètres et formuler des hypothèses ou des conjectures ;
> - proposer et réaliser un protocole expérimental permettant de valider ces hypothèses ou de les infirmer (manipulations, mesures, calculs) ;
> - choisir un mode de saisie et d'exploitation des données recueillies lors d'une expérimentation ;
> - élaborer et utiliser des modèles théoriques ;
> - énoncer une propriété et en estimer les limites. (B.O. du 19 février 2009)

Nous vous proposons ici quatre exemples de démarche d'investigation menées en classe de seconde et première, dans différents domaines mathématiques, afin de mettre en évidence une progressivité dans les attentes que nous pouvons avoir envers nos élèves.

Un exemple en probabilité en seconde

Lors d'un jeu de rôle, le seul moyen pour Marcel de ne pas perdre la partie est de faire un 1 avec son dé à huit faces pour délivrer son dragon, pris au piège de la sorcière.

Lulu, son adversaire, lui dit que ce n'est pas la peine de jouer, qu'il a perdu d'avance, le 1 ne sortant presque jamais.
Que pensez-vous de cette affirmation ?
Comment faire pour déterminer les chances qu'a Marcel de gagner ?

Figure 6 – Une première séance sur les probabilités en seconde

Les élèves sont ici amenés à formuler une hypothèse et à envisager un protocole de vérification de cette hypothèse.

On observe qu'une large majorité d'élèves considère l'équiprobabilité de la situation même si certains d'entre eux pensent effectivement que le « 1 » a très peu de chance de tomber.

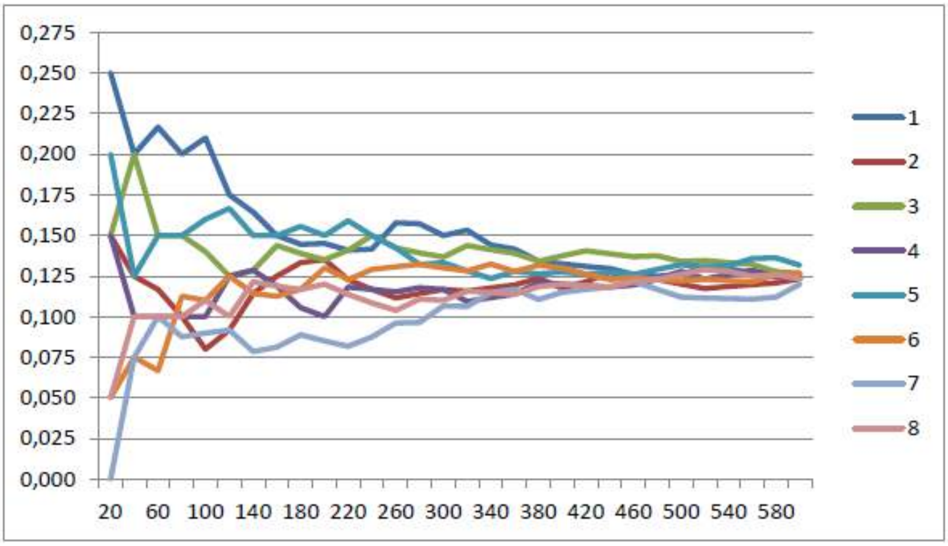
Il est intéressant de considérer les protocoles proposés. En effet, certains d'entre eux proposent une vérification en huit lancés et ainsi de vérifier que chaque valeur apparait une fois.

Aucune manipulation n'est effectuée par les élèves avant qu'ils aient tous formulé une hypothèse et proposé un protocole, même très basique.

Une discussion en classe aboutit à la proposition d'un protocole commun de vingt lancés successifs puis mise en commun de tous les résultats (soit, pour 30 élèves, 600 lancés) à l'aide d'un tableur.

L'objectif de la séance est la distinction entre les concepts de fréquence et de probabilité.

On aboutit au graphique suivant :



Fluctuation des fréquences d'apparition de chaque valeur du dé à huit faces en fonction du nombre de lancers.

Figure 7 – Un graphique auquel on aboutit

Suite à cette mise en commun, la discussion met en avant la notion de fluctuation des fréquences. Les élèves ayant envisagé huit lancés perçoivent que ce nombre était insuffisant pour conclure.

Une synthèse en fin de séance doit permettre la mise en place du concept de probabilité.

Deuxième séance

(Une aventure d'Astérix le Gaulois : Le devin. Dessins de Uderzo, texte de Goscinny)

Compte tenu de sa stratégie, le devin a-t-il bien fait de dire VII ?

Figure 8 – Une deuxième séance sur les probabilités en Seconde

A la fin de la séance précédente, les élèves se sont vu remettre ce document et il leur a été demandé de réfléchir à la question posée.

Beaucoup d'élèves envisagent à nouveau la situation comme équiprobable (influence de la première séance ?).

Certains remarquent que lorsque le centurion demande un chiffre entre I et XII, le I ne peut être envisagé.

Il est proposé aux élèves un protocole informatique via un tableur pour modéliser 1000 lancés successifs.

Une partie du document est déjà mise en forme, les élèves doivent entrer les formules permettant de générer aléatoirement les lancés, d'obtenir le nombre d'occurrences de chaque somme et la fréquence que cela représente (un document ressource leur est fourni). Le graphique est déjà programmé et les élèves visualisent au fur et à mesure son évolution.

Le devin

Simulation du 1er dé	Simulation du 2éme dé	Somme des deux dés
3	3	6
3	5	8
5	1	6
5	2	7
3	5	8
3	1	4
1	4	5
6	5	11
2	5	7
4	2	6
2	5	7
5	3	8
3	6	9
3	3	6
1	5	6
4	2	6
2	5	7
1	3	4
4	6	10

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Nombre d'apparitions	24	43	87	115	165	175	132	103	79	46	31	1000
Fréquence	0,024	0,043	0,087	0,115	0,165	0,175	0,132	0,103	0,079	0,046	0,031	1

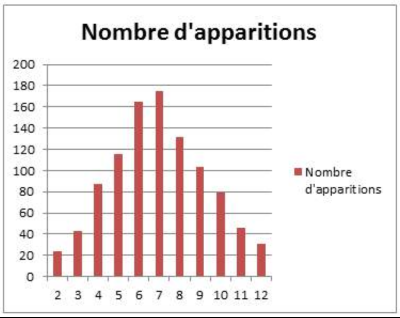


Figure 9 – Le graphique est programmé et les élèves visualisent au fur et à mesure son évolution

Beaucoup d'élèves sont étonnés des résultats obtenus.

Afin de les aider à comprendre, un document les invite à remplir un tableau à double entrée (une pour chaque dé) permettant de mettre en évidence les possibilités d'obtenir chaque somme et de déterminer leurs probabilités.

Ces démarches d'investigation peuvent être attachées à la thématique « Vie sociale et loisir. Jouer avec le hasard » et correspondent aux objectifs de la démarche d'investigation :

- inventorier des paramètres et former des hypothèses ou des conjectures ;
- proposer et réaliser un protocole expérimental permettant de valider ces hypothèses ou de les infirmer (manipulations, mesures, calculs) ;
- choisir un mode de saisie et d'exploitation des données recueillies lors d'une expérimentation.

Il important dans ces situations de faire comprendre aux élèves que l'objectif n'est pas tant que l'hypothèse formulée soit exacte, mais bien plus d'être capable de mettre en œuvre un protocole et d'analyser les résultats d'une simulation pour être capable d'argumenter ses conclusions.

Un exemple lié au champ professionnel en statistiques en seconde

Le document ci-contre indique le nombre de voitures particulières (VP) immatriculés en juillet 2010 en France.

L'entreprise qui édite cette étude souhaiterait rendre plus lisible ce document en se concentrant uniquement sur les dix marques les plus représentées et en réalisant des graphiques.

Immatriculations de V.P en France juillet 2010

	Voitures particulières			
Marques	juillet-10	Var. 10/09 en %	7 mois 2010	Var. 10/09 en %
Citroen	25 551	-16,9	206 067	-2,2
Peugeot	29 917	-13,2	247 251	6,8
Total PSA	55 468	-10,0	453 318	6,4
Renault	33 827	-15,9	307 622	4,8
Marques Fr.*	**89 301**	**-15,3**	**760 978**	**3,4**
Alfa Romeo	974	-15,5	6 843	-4,8
Audi	4 529	-2,7	30 432	-0,6
BMW	3 361	-17,6	27 907	9,3
Cadillac	6	+++	29	+++
Chevrolet	1 323	-32,4	12 006	12,4
Chrysler	46	-42,5	696	-8,5
Dacia	8 938	47,5	70 187	+++
Daihatsu	40	-72,2	512	-55,4
Dodge	37	-68,4	659	-33,2
Ferrari	34	13,3	225	-0,9
Fiat	5 484	-5,0	46 927	-5,7
Ford	8 712	-15,3	74 017	-2,6

Quel mode de représentation te semble le plus adapté ?

Figure 9 – Un exemple lié au champ professionnel en statistiques en Seconde

Le tableau fourni aux élèves comportait plus de 40 marques de véhicules. Compte tenu des quatre valeurs chiffrées par marque, il était important de délimiter le champ d'étude.

Une fois cette délimitation effectuée, une discussion autour des différents modes de représentations étudiés au collège permet d'envisager plusieurs possibilités avant de tenter une argumentation sur celle qui peut être la plus adaptée.

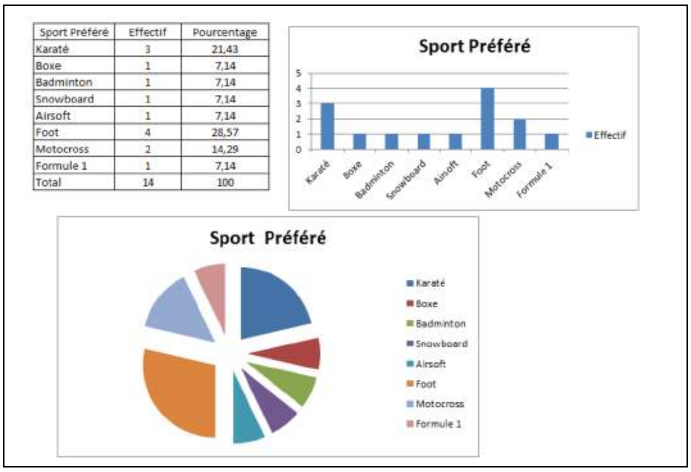
Cela peut s'inscrire dans les objectifs :

- définir l'objet de son étude ;
- rechercher, extraire et organiser l'information utile (écrite, orale, observable).

L'utilisation de supports du domaine professionnel peut ici s'avérer efficace pour montrer l'intérêt de l'enseignant de disciplines générales pour la formation professionnelle de l'élève. Cela permet d'organiser des ponts entre ces disciplines.

Il ne paraît pour autant pas judicieux de rendre cette démarche systématique. En effet cela peut aboutir à une lassitude des élèves et nous amener à créer des supports « superficiels » dans le seul objectif d'un lien disciplinaire. Il paraît donc important de la réserver à des thématiques réellement appropriées aux contenus de cours.

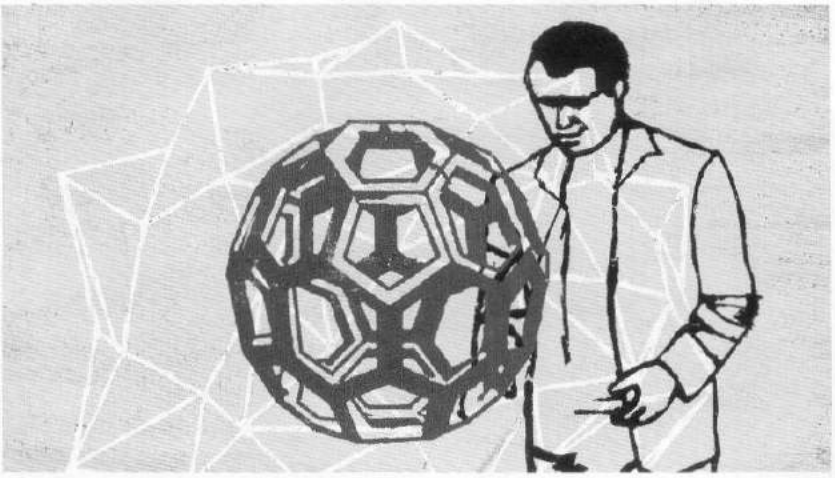
Suite à cette activité, les élèves étaient invités à mener une « *étude statistique* » auprès de leurs proches sur le thème qu'ils souhaitaient avant une organisation de ces données à l'aide d'un tableur.



Sport Préféré	Effectif	Pourcentage
Karaté	3	21,43
Boxe	1	7,14
Badminton	1	7,14
Snowboard	1	7,14
Airsoft	1	7,14
Foot	4	28,57
Motocross	2	14,29
Formule 1	1	7,14
Total	14	100

Figure 10 – Une étude statistique menée par des élèves

Un exemple autour du second degré en première



Nombre d'or
La divine proportion

QUI EST-IL ? Le nombre d'or est le rapport, ou quotient, entre deux longueurs (L/l) tel que le rapport de la somme des deux longueurs ($L+l$) sur la plus grande (L) est égal au rapport de la plus grande sur la plus petite (L/l).

$$\underbrace{\overset{L}{\text{———}}\overset{l}{\text{——}}}_{L+l}$$

Il est souvent désigné par la lettre grecque φ, un usage que l'on doit au mathématicien Mark Barr. Il choisit ce symbole notamment en hommage au sculpteur Phidias, qui supervisa les travaux de décoration du Parthénon, et dont la tradition veut qu'il ait utilisé dans ce monument le nombre d'or.
Si l'on nomme $x = L/l$ le quotient que l'on recherche, on peut écrire : $x = 1 + 1/x$. Le quotient est donc la solution de l'équation $x^2 = x + 1$. Or cette équation du second degré a une unique solution positive .

OÙ EST-IL NÉ ? Euclide mentionne dans ses *Eléments* le *« partage en moyenne et extrême raison »* qui définit un rapport entre les segments d'une droite partagée par un point. Ce rapport correspond au nombre d'or, mais il ne sera baptisé ainsi que bien plus tard. Si Euclide le définit, c'est qu'il lui permet de tracer plus facilement des figures géométriques régulières, tel le pentagone, ou des polyèdres, comme l'octaèdre (à 8 faces) ou le dodécaèdre (à 12 faces).

SES PETITES HISTOIRES. Toute une mythologie est née autour de la signification de ce nombre, de ses supposées propriétés esthétiques, mystiques ou divines

. Son histoire est sporadique. Après Euclide, un grand saut dans le temps jusqu'en 1498 nous amène au moine Luca Pacioli, qui publie dans son livre *La Divine Proportion* des dessins de polyèdres par Léonard de Vinci. L'ouvrage traite des mathématiques appliquées à la proportion artistique et de l'utilisation de celle-ci en architecture. Plusieurs personnages de la Renaissance l'utilisent, tel l'astronome Johannes Kepler, qui concevait l'Univers comme un empilement de polyèdres réguliers et y voyait un arrangement divin.
Pas encore d'or dans ce nombre jusqu'au 1854, où le terme « section d'or » apparaît sous la plume du psychologue allemand Adolf Zeising, qui s'intéresse de près aux mathématiques et à la philosophie. Il voit dans cette proportion le sommet de l'esthétique et la distingue partout : dans le frontispice du Parthénon, dans les sculptures grecques ou même dans les cathédrales.
L'idée, reprise et popularisée en 1931 par le diplomate Matila Ghyka, connaît un immense succès. Dans son livre *Le Nombre d'or* (première apparition de cette appellation), celui-ci invente une histoire mythique du nombre d'or qui aurait été découvert par les Egyptiens, glosant sur un savoir resté secret durant des siècles… Des théories qui ont un écho chez des architectes comme Le Corbusier (1887-1965), qui propose en 1949 le Modulor, un système de proportion basé sur ce nombre.
Aujourd'hui, φ est surtout une curiosité mathématique. Il n'en reste pas moins que ses particularités géométriques et son lien avec la suite de Fibonacci lui confèrent un rôle singulier dans la zoologie mathématique. PHILIPPE PAJOT

Figure 11 – Extrait de Sciences et Avenir, Hors-série Octobre / Novembre 2009 « La magie des nombres »

La question posée aux élèves : Saurais-tu trouver la valeur de ce « nombre d'or » ?

A partir du document et après lecture en classe, les élèves sont amenés à former des petits groupes afin de répondre à la problématique posée.

Plusieurs démarches sont envisageables :

- Recherche de valeurs approchées pour résoudre l'équation $x^2 = x + 1$;
- Construction géométrique ;
- Tracé de la fonction $f(x) = x^2 - x + 1$ et résolution graphique de $f(x) = 0$.

Des ordinateurs sont mis à disposition (pour le tracé de fonction…).

La mise en commun des différentes pistes empruntées met en évidence qu'aucune d'elles n'aboutit à une valeur exacte.

Il s'ensuit la proposition d'un protocole de résolution des équations du second degré et l'application de ce protocole à la détermination du nombre d'or.

Cette activité peut s'intégrer aux objectifs :

- rechercher, extraire et organiser l'information utile (écrite, orale, observable) ;
- inventorier des paramètres et former des hypothèses ou des conjectures ;
- élaborer et utiliser des modèles théoriques ;

Dans la thématique :

Evolution des sciences et techniques, découvrir les nombres à travers l'histoire des mathématiques.

La démarche demandée à l'élève est ici beaucoup plus complexe que dans les deux premières activités présentées en Seconde et l'autonomie est aussi plus importante. Ce type d'activité semblerait ainsi difficile à mettre en œuvre en Seconde.

Quelques réflexions sur la démarche d'investigation

Nous avons voulu montrer que la mise en œuvre de la démarche d'investigation peut prendre différentes formes en lycée professionnel, sans entrer dans des considérations épistémologiques quant à sa définition.

Elle se doit d'être mise en œuvre de façon progressive au cours des années de formation des élèves. On ne peut demander une autonomie des élèves sans leur avoir donné les moyens de la développer. Il est par ailleurs nécessaire de faire un choix judicieux de situations afin de ne pas tendre vers des activités ou la démarche d'investigation ne serait qu'un « *emballage* » parfois superficiel par l'utilisation de supports pas toujours pertinents.

Nous pouvons constater qu'elle obtient globalement l'adhésion des élèves. Elle permet, considérant le public de lycée professionnel, de redonner du sens à des apprentissages dans nos disciplines où la motivation des élèves était parfois difficile compte tenu des situations courantes d'échecs dans les classes précédentes. Elle peut ainsi permettre de limiter la sempiternelle question : « *A quoi ça sert les maths* ? » en rendant l'élève plus acteur de ses apprentissages. L'impact sur les élèves en difficultés est cependant encore difficile à estimer par la nécessité de formalisation (tant orale qu'écrite).

Sa mise en place se révèle aussi très coûteuse en temps, surtout en Seconde où les élèves y sont peu familiers. Il est ainsi difficile de concilier démarche d'investigation et traitement du programme dans son intégralité. Nous ne pouvons que souhaiter un réel positionnement de nos institutions sur cette question.

Cette problématique est renforcée par le passage de quatre à trois années de formation. Beaucoup d'entre nous ont ainsi l'impression d'avoir largement réduit le champ des connaissances abordées et cette démarche peut donner l'impression d'amplifier cette situation.

Enfin, elle nécessite un repositionnement important de l'enseignant. Son rôle de médiation entre problématique, formulation d'hypothèse ou conjecture et mise en place d'un protocole devenant ici central.

La mise en œuvre de cette démarche d'investigation est par ailleurs nécessaire pour envisager une évaluation en contrôle en cours de formation telle que préconisée, dans un esprit d'évaluation par compétences…

Le contrôle en cours de formation : Evaluation par compétences ?

Nous sommes amenés à mettre en place deux types d'évaluation en CCF :

- La certification intermédiaire (BEP ou CAP) se déroule en deux phases au cours des deux premières années de formation avec deux épreuves d'une demi-heure en mathématiques et deux épreuves d'une demi-heure en sciences.
- La certification baccalauréat professionnel se déroule au cours de la dernière année de formation avec deux épreuves de 45 minutes en mathématiques et deux épreuves de 45 minutes en sciences.

Les compétences évaluées en mathématiques sont les suivantes :

- Rechercher, extraire et organiser l'information - (C1)
- Choisir et exécuter une méthode de résolution - (C2)
- Raisonner, argumenter, critiquer et valider un résultat - (C3)
- Présenter, communiquer un résultat - (C4)
- Capacités liées à l'utilisation des TIC (expérimenter ou simuler ou émettre des conjectures ou contrôler la vraisemblance de conjectures) ;

Et en sciences :

S'approprier (rechercher, extraire et organiser l'information utile, comprendre la problématique du travail à réaliser, montrer qu'il connaît le vocabulaire, les symboles, les grandeurs, les unités mises en œuvre).
Analyser (analyser la situation avant de réaliser une expérience, formuler une hypothèse, proposer une modélisation, choisir un protocole ou le matériel / dispositif expérimental).
Réaliser (organiser son poste de travail, mettre en œuvre un protocole expérimental, utiliser le matériel choisi ou mis à sa disposition, manipuler avec assurance dans le respect des règles élémentaires de sécurité).
Valider (exploiter et interpréter des observations, des mesures, vérifier les résultats obtenus, valider ou infirmer une information, une hypothèse, une propriété, une loi…).
Communiquer (rendre compte d'observation et des résultats des travaux réalisés, présenter, formuler une conclusion, expliquer, représenter, argumenter, commenter).

Les compétences évaluées sont ainsi très larges. Il est difficile de lier ces compétences aux capacités et connaissances du référentiel, autour d'une problématique issue de la vie courante ou professionnelle comme cela est préconisé.

Une part de l’évaluation se fait lors d’appels de l’élève. La capacité à communiquer à l’oral et à argumenter prend ainsi une part importante dans la note finale de l’épreuve.

Par ailleurs, les capacités expérimentales sont évaluées en sciences comme en mathématiques (usage des TIC) comme le montrent les grilles nationales d’évaluation.

● **Liste des capacités, connaissances et attitudes évaluées**

Capacités	
Connaissances	
Attitudes	

Thématique utilisée :

● **Évaluation**

		Questions	**Appréciation du niveau d’acquisition**[4]
Aptitudes à mobiliser des connaissances et des compétences pour résoudre des problèmes[2]	Rechercher, extraire et organiser l’information. } **APPEL** Choisir et exécuter une méthode de résolution. Raisonner, argumenter, critiquer et valider un résultat. Présenter, communiquer un résultat.		
			/ 7
Capacités liées à l’utilisation des TIC[3]	Expérimenter ou Simuler ou Émettre des conjectures ou Contrôler la vraisemblance de conjectures. } **APPEL**		
			/ 3
		TOTAL	**/ 10**

Figure 12 – Grille nationale d’évaluation en mathématiques

Cette grille porte la mention suivante :

> Le professeur peut utiliser toute forme d’annotation lui permettant de noter la première rubrique sur 7 points et la deuxième sur 3 points.

Cette évaluation nécessite donc un choix judicieux et précis de critères observables et d’indicateurs de réussite afin d’être la plus fiable et objective possible. La détermination de ces différents éléments représente un travail non négligeable mais indispensable à un déroulement de l’évaluation dans de bonnes conditions.

Les documents de cadrage publiés sur Eduscol mettent en avant les définitions et caractéristiques du CCF. L’on peut y lire :

> L'évaluation par CCF est réalisée par sondage sur les lieux où se déroule la formation (établissement et milieu professionnel), par les formateurs eux-mêmes (enseignants et/ou tuteurs ou maîtres d'apprentissage), au moment où les candidats ont atteint le niveau requis ou ont bénéficié des apprentissages nécessaires et suffisants pour aborder une évaluation sommative et certificative.
> Le CCF s'intègre naturellement dans le processus de la formation. Le formateur évalue, quand c'est possible et sans interrompre ce processus, ceux qui sont réputés avoir atteint les compétences et connaissances visées par la situation d'évaluation.

Ainsi nous évaluons nos propres élèves, dans nos classes, lorsque ceux-ci sont considérés comme prêts ou tout du moins préparés. Cette recommandation peut être perçue comme une obligation de réussite des élèves. En effet, en cas d'échec de l'élève, qui porte cette responsabilité ? L'évaluation a-t-elle été menée au bon moment ? L'élève était-il suffisamment préparé ?

Cela pose aussi bien évidemment des problèmes dans l'organisation des séances. Que faire des élèves non évalués ? Comment organiser un suivi efficace des élèves évalués en gardant en charge le reste de la classe ?

Un exemple de sujet en sciences :
Certification intermédiaire CAP métiers de l'automobile, première épreuve.

<u>Situation</u> **Un drôle de client !**

Marcel arrive au garage avec son tracteur dont il souhaite faire vérifier l'état de corrosion du pont arrière.
Le garagiste, embarrassé, lui annonce qu'il doit vérifier si le pont de levage va résister…

<u>Problématique :</u>

Sur la carte grise du tracteur de Marcel est indiqué 2 400 kg.
Sur la plaque signalétique du pont de levage est indiqué « maximum 30 000 N »

Nous vous demandons, au cours de ce TP, de retrouver expérimentalement la relation qui lie ces deux grandeurs afin de déterminer si le pont peut résister au tracteur.

Figure 12 – Un exemple de sujet en sciences

Un sujet en mathématiques : Certification intermédiaire BEP, 2ème épreuve

Un entrepreneur veut lancer un nouveau modèle. Il souhaite prévoir sa production mensuelle et ceci sur un an.
Différents points sont à prendre en considération :

- **Premier souhait :** La production du premier mois doit être de 1 010 unités et le douzième mois de 2 000 unités.
- **Deuxième souhait** : La production devra toujours augmenter au fil du temps.
- **Troisième souhait :** il préférerait qu'au début de l'année la production augmente moins vite qu'à la fin.

Trois tactiques lui sont proposées :

Tactique A : Commencer la production à 1010 unités et l'augmenter chaque mois de 90 unités.
Tactique B: Modéliser la production par la fonction *f* sur [1 ;12] par :
$f(x) = 6,67x^2 +3.33x + 1000$
Tactique C : Modéliser la production par la fonction *g* sur [1 ;12] par :
$g(x) = 13,33x^2 -83,33x + 1080$

Problématique :

Quelle est la tactique à adopter pour exaucer les trois souhaits ?

La tactique A est elle adaptée au premier souhait de l'entrepreneur ?

 1	**Présenter oralement une méthode pour vérifier si la tactique A est adaptée au premier souhait**

Réponse : ……………………………………………………………………………………

Les tactiques B et C sont-elles adaptées au premier souhait de l'entrepreneur ?

Vérification pour les deuxième et troisième tactiques :
Par la suite x est le rang du mois et f(x), g(x) la production.
Elles sont toutes deux définies sur [1 ; 12]
La production suit la fonction :

2ème tactique : $f(x) = 6,67x^2 +3.33x + 1000$

3ème tactique : $g(x) = 13,33x^2 -83,33x + 1080$

Calculer à l'unité près : f(1)= …………………… f(12)= ……………………

g(1)= …………………… g(12)= ……………………

Que peut-on en conclure ? ……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………

Quelle est la tactique à adopter au vue des souhaits 2 et 3 ?

 2	**Faire vérifier votre résultat et présenter oralement la méthode envisagée pour choisir la meilleure tactique au vue des souhaits 2 et 3**

Figure 13 – Un exemple de sujet en mathématiques

A chaque appel, en fonction de la capacité de l'élève à répondre aux questions posées, un document lui est donné en cas de difficulté :

A NE DISTRIBUER AUX ELEVES QU'EN CAS DE DIFFICULTE AU NIVEAU DE L'APPEL N°1

Quelle est la nature de la suite de nombres définie par cette tactique ? ……………………

Donner son premier terme et sa raison : ……………………………………………………

Ouvrir **Excel** et utiliser la programmation des cellules pour déterminer le douzième terme de cette suite : …………

Cette tactique vérifie-t-elle le premier souhait ? ……………………………………

A NE DISTRIBUER AUX ELEVES QU'EN CAS DE DIFFICULTE AU NIVEAU DE L'APPEL N°2

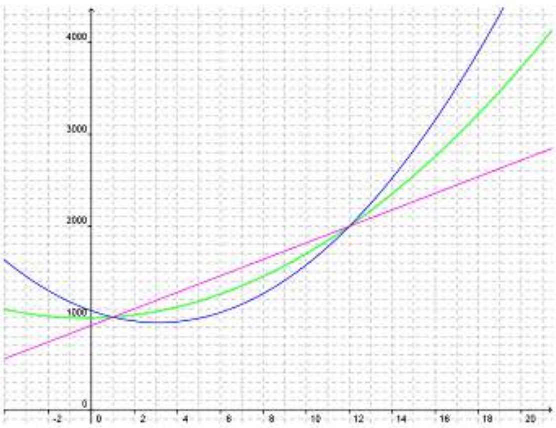
Toutes les fonctions sont définies sur [1 ; 12].

A la première tactique A correspond la fonction h : $h(x) = 90x + 920$

Pour la tactique B : $f(x) = 6,67x^2 + 3.33x + 1000$

Pour la tactique C : $g(x) = 13,33x^2 - 83,33x + 1080$

Ci-dessous les représentations graphiques des fonctions h, f, g :



Toutes les tactiques vérifient-elles le deuxième souhait ? Justifier votre réponse en utilisant un vocabulaire mathématique.

Quelle est la tactique la plus adaptée au troisième souhait ? Justifier votre réponse textuellement.

Répondre à la problématique

Figure 13 – Des documents à distribuer aux élèves en cas de difficulté au niveau des appels

Un exemple de sujet en mathématiques :
Baccalauréat professionnel groupement B, première épreuve de terminale

Un système de chauffage au gaz est régulé par l'intermédiaire d'un thermostat d'ambiance (intérieur) et d'une sonde externe. Afin de surveiller et d'estimer au mieux la consommation de gaz, on a relevé les écarts de températures intérieur/extérieur et la consommation journalière en gaz. Le thermostat d'intérieur reste fixé à 19°C.

Écart de températures (°C)	*Consommation quotidienne de gaz (kWh)*
15	250
16,5	255
17	268
18	285
19	292
19,5	304
20	311
20,5	319
21	320
22	338

Comment évaluer la consommation de gaz pour un mois où la température moyenne extérieure sera de -7°C ?

Vous présenterez en détails, une méthode rapide et fiable[1] qui permettra de répondre à la problématique ci-dessus.

La rigueur et la précision de votre démarche tiendra pour partie importante dans la notation.

1. Fiable : qui donnera le même résultat, quel que soit l'utilisateur.

Figure 14 – Un autre exemple de sujet en mathématiques : baccalauréat professionnel groupement B, première épreuve terminale

Sujet de l'évaluation : date : Classe :	Compétences	Rechercher, extraire et organiser l'information.				Choisir et exécuter une méthode de résolution.					Raisonner, argumenter, critiquer et valider un résultat.				Présenter, communiquer un résultat.				TIC				
	Critères	Prise en compte du tableau de valeurs, tracé du nuage de points				Obtention de la droite d'ajustement affine					Détail de la méthode utilisée				Calcul de l'estimation				Utilisation du tableur				
NOM Prénom	Indicateurs	Rien	Saisie du tableau	Saisie + nuage de points	Aide du professeur	Tracé de la droite au jugé	Courbe de tendance avec calcul des 2 points moyens	Courbe de tendance sans équation	Courbe de tendance avec équation affichée	Aide du professeur	Aucune précision sur la méthode exécutée	Quelques phrases manquant de détails	Explicitations précises et suffisantes	Aide du professeur	Aucun résultat	Estimation sans calcul (graphique par exemple)	Estimation avec présentation du calcul	Aide du professeur	Tracé du nuage sans aide	Obtention de la droite de tendance sans aide.	Travail sur papier	Aide du professeur	Note /20
																							0
																							0
																							0

Figure 15 – Critères observables et indicateurs de réussite

Quelle évolution dans l'organisation d'un énoncé ?

Voici deux énoncés correspondant à une même situation :

CHAINE DE PRODUCTION

Le responsable de la production de fabrication de pieds de lit, fait un relevé de mesure toutes les demi-heures (voir ci-contre), pour contrôler les pièces fabriquées.

La pièce est correcte si elle se trouve dans l'intervalle [149,5 mm ; 150,5 mm].

1) Tracer le nuage de points.
2) Séparer le nuages en 2 groupes de points
3) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 les points moyens de chaque groupe.
4) Placer les points G_1 et G_2
5) Tracer la droite (G_1G_2)
6) Etablir l'équation de la droite (G_1G_2)
7) Rechercher sur le graphique l'heure à laquelle la tolérance de la mesure n'est plus respectée.
8) Vérifier votre résultat par le calcul.
9) En déduire l'heure à laquelle la mesure de la pièce sortira de l'intervalle proposé.

Heure du prélèvement	Rang du prélèvement	Longueur (mm)
06:00	1	150,40
06:30	2	150,50
07:00	3	150,40
07:30	4	150,30
08:00	5	150,20
08:30	6	150,20
09:00	7	150,30
09:30	8	150,20
10:00	9	150,10
10:30	10	149,90
11:00	11	150,00
11:30	12	149,80

Figure 16 – Dans ce premier énoncé, la démarche de résolution est guidée pas à pas.

AVANT QUELLE HEURE FAUDRA-T-IL FAIRE INTERVENIR L'ÉQUIPE DE MAINTENANCE ?

Une chaîne de fabrication d'une société de menuiserie, réalise des pieds de lits.

Le cahier des charges fixe la longueur des pieds de la façon suivante :

150 mm $^{\pm 0,5 \text{ mm}}$

Le responsable qualité de la chaîne de production effectue des relevés toutes les demi-heures afin d'estimer à quel moment, il doit faire intervenir l'équipe de maintenance.

Heure du prélèvement	Rang du prélèvement	Longueur (mm)
06:00	1	150,40
06:30	2	150,50
07:00	3	150,40
07:30	4	150,30
08:00	5	150,20
08:30	6	150,20
09:00	7	150,30
09:30	8	150,20
10:00	9	150,10
10:30	10	149,90
11:00	11	150,00
11:30	12	149,80

Figure 17 – Ce deuxième type d'énoncé pourrait correspondre à une évaluation en CCF

Ce deuxième type d'énoncé pourrait correspondre à une évaluation en CCF, en demandant à l'élève de proposer un mode de résolution, cela entrant dans son évaluation :

> L'élève appelle le professeur pour lui présenter, à l'oral (lors d'un APPEL), l'expérimentation ou la simulation ou l'émission de conjectures ou le contrôle de la

> vraisemblance de conjectures qu’il a réalisés. (Annotation aux grilles nationales d’évaluation).

La démarche d’investigation est ainsi privilégiée. Un document plus guidé peut ensuite être proposé en cas de difficulté.

L’évaluation en CCF sur le terrain

Nous ne pouvons que constater qu’il existe de réelles différences d’exigences entre les collègues. Il nous paraît donc nécessaire de mettre en place des documents permettant d’harmoniser les sujets.

Beaucoup d’entre nous sont en « quête de sens » par rapport à ces modalités d’évaluation et ont l’impression de passer une grosse part de l’année à évaluer. En effet, les évaluations trimestrielles sont maintenues dans les établissements indépendamment des évaluations certificatives et la perte d’une année de formation renforce ce sentiment.

L’esprit CCF privilégie une évaluation « au fil de l’eau ». Cependant, pour des raisons d’organisation, les élèves sont souvent évalués de façon quasi-ponctuelle, en banalisant quelques jours au sein des établissements pour faire passer les épreuves.

Chaque élève est susceptible d’être évalué sur un thème différent. Il est donc important de prendre le temps de leur expliquer les modalités de cette évaluation afin d’anticiper l’impression d’injustice parfois ressentie. Il est cependant positif de voir ce mode d’évaluation permettre de s’affranchir de l’inévitable bachotage lié au baccalauréat.

Les appels peuvent permettre de contourner des difficultés liées à l’écrit et le dialogue élève-enseignant est un moyen très efficient pour « débloquer » les élèves et observer le degré d’acquisition des compétences. Mais il est difficile de gérer des appels simultanés, les élèves qui n’appellent pas, ceux qui n’osent pas ou qui ont besoin de plus de temps…

Conclusion

La réforme de la voie professionnelle a modifié en profondeur les pratiques enseignantes ainsi que les modalités d’évaluation des élèves.

Il faudra du temps pour que, sur le terrain, ces évolutions soient totalement prises en compte.

Il peut être paradoxal d’observer que la mise en place de démarches devant donner du sens aux apprentissages s’accompagne d’une quête de sens chez les enseignants. Mais ce paradoxe ne sera résolu sans une réelle réflexion et un positionnement institutionnel sur la place des connaissances en lycée professionnel.

C’est un vaste débat que nous n’avions pas ici pour objectif de développer.

Nous avons souhaité faire apparaître que la modification des pratiques, des modes d’évaluation et de l’organisation des connaissances étaient liées de façon indissociable. Nous pensons que ce n’est que par la prise en compte de cette globalité et de toutes les problématiques inhérentes que cette réforme pourra avoir une chance de représenter une évolution positive au sein des lycées professionnels.

TEXTE OFFICIEL

Bulletin Officiel spécial n°2 du 19 février 2009.

REFERENCES EDUSCOL

Séminaire « Le livret de compétences au collège »

http://eduscol.education.fr/pid24097-cid51939/les-enjeux-pedagogiques.html

Définition et caractéristiques du CCF.

http://eduscol.education.fr/cid47717/definition-et-caracteristiques-du-ccf.html

Des réponses aux questions d'organisation.

http://eduscol.education.fr/cid47720/des-reponses-aux-questions-d-organisation.html#reponses

L'organisation des enseignements dans le cadre de l'autonomie des établissements : approches organisationnelles et pédagogiques.

http://eduscol.education.fr/cid45841/l-organisation-des-enseignements-dans-le-cadre-de-l%19autonomie-des-etablissements%C2%A0-approches-organisationnelles-et-pedagogiques.html

A PARAITRE :

Évaluer par compétences en classe de baccalauréat professionnel. *Repères IREM* juillet 2012

MATH & MANIP AVEC APPRENTI GEOMETRE
AIRES ET AGRANDISSEMENTS AU COLLEGE AVEC UN LOGICIEL DE GEOMETRIE DYNAMIQUE

M-F. GUISSARD, V. HENRY, P. LAMBRECHT, P. VAN GEET, S. VANSIMPSEN

Résumé – L'atelier s'intéresse à l'influence de la duplication des dimensions d'une figure sur son aire. La mise en place de techniques efficaces de comparaison des aires conduit à la généralisation à d'autres facteurs entiers. Ce sujet est abordé par des activités qui peuvent être traitées soit par un travail papier-crayon, soit en utilisant le logiciel de géométrie dynamique *Apprenti Géomètre*. Les spécificités des compétences développées par l'usage de ce logiciel sont mises en exergue.

Introduction

Le CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgique) est actuellement impliqué dans une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par le recours à des manipulations effectuées par les élèves (Bkouche, 2008 ; Borel, 1904 ; Dias & Durand-Guerrier, 2005). Nous appelons *Math & Manips* (Guissard, Henry, Agie & Lambrecht, 2010) les séquences d'apprentissage conçues et mises au point au cours de ce travail. Cet atelier décrit plus particulièrement une activité, destinée aux élèves du début du collège, qui s'intéresse à l'influence de la duplication des longueurs des côtés d'un polygone sur son aire. La mise en place de techniques efficaces de comparaison des aires conduit à la généralisation à d'autres facteurs entiers. Ce sujet est abordé par des activités qui peuvent être traitées soit par un travail papier-crayon, soit en utilisant le logiciel de géométrie dynamique gratuit *Apprenti Géomètre*. Nous mettrons en exergue les spécificités des compétences développées par l'usage de ce logiciel par rapport à celles qui sont mobilisées par la même activité, en version papier-crayon.

Découverte du logiciel Apprenti Géomètre

Apprenti Géomètre est un logiciel de géométrie dynamique mis au point par le CREM à partir de 2004 et disponible librement au téléchargement sur le site du CREM (www.crem.be). Il est conçu pour pouvoir être utilisé avec des élèves très jeunes, dès le primaire. C'est un logiciel destiné notamment à faciliter l'apprentissage de la géométrie et, par conséquent, son fonctionnement est spécifique, différent de celui d'un logiciel de dessin. Le logiciel est d'un accès aisé, la lecture du guide utilisateur en facilite la prise en main.

De courtes séquences sont intégrées à la *Math & Manip* pour guider les élèves dans leur découverte du logiciel et leur faire tester les principales fonctionnalités. Les fichiers nécessaires à la réalisation de l'ensemble de l'activité sont disponibles sur le site du CREM, de même que des fiches de travail présentant brièvement le logiciel, les formes qu'il permet de construire et les mouvements et opérations qu'on peut leur appliquer.

Construction de polygones

Après avoir découvert le logiciel et la façon de construire un segment et des polygones, les élèves doivent reproduire le dessin du fichier *ChapeauxPointus.fag* (figure 1) et mettre les figures en couleur. Ils sont amenés à construire, sur une grille, un polygone régulier, un polygone quelconque, des segments et des triangles particuliers. Pour tracer les polygones, les élèves doivent les identifier au préalable (nombre de côtés, propriétés...).

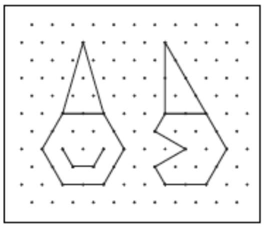


Figure 1 – Visualisation du fichier ChapeauxPointus.fag

Dans les classes, on observe que les polygones réguliers sont généralement familiers, mais que c'est rarement le cas des polygones irréguliers et encore moins des polygones concaves. Des triangles particuliers (isocèle ou rectangle) ont été insérés dans le dessin pour que les élèves prennent conscience de l'importance de l'ordre de construction des points dans le logiciel.

Notons que, lors de cette activité préliminaire, certains élèves éprouvent des difficultés à se repérer dans le plan, même sur du papier pointé, d'autres ne reconnaissent pas les polygones à reproduire… L'activité est donc plus compliquée pour eux mais permet de mettre en évidence ces problèmes et d'y remédier avant d'aborder la séquence proprement dite.

Quelques fonctionnalités

Pour mettre en couleur l'intérieur d'un polygone, il faut commencer par choisir une couleur via la fonctionnalité `Colorier` dans le menu *Outils* avec l'option `Couleur_fond`. Ensuite, il reste à sélectionner le polygone. Si des élèves reproduisent les formes en travaillant par segments, il leur sera impossible de colorier leur dessin car une succession de segments ne constitue pas une forme.

Les fonctionnalités `Glisser`, `Tourner` et `Zoomer` qui se trouvent dans le pavé à gauche de l'écran s'appliquent tant aux figures qu'à la feuille de dessin. Le bouton `Modifier` est utile notamment lorsqu'on souhaite déplacer un point tout en conservant les propriétés de la figure.

Une spécificité du logiciel *Apprenti Géomètre* est la possibilité de `Dupliquer` une figure (dans le menu *Opérations*) de manière à disposer d'autant de figures identiques que nécessaire. Des liens unissent les formes dupliquées à celle de départ : toute modification apportée à l'une d'elles entraîne la même modification aux autres.

Diviser et découper des formes avec Apprenti Géomètre

Cette section consacrée à la découverte de `Diviser` et `Découper` peut se faire plus tard, mais en tous cas avant les pavages de polygones (section 4).

Dans un premier temps, l'enseignant montre comment construire, à partir d'un carré, les triangles du fichier *Exemple.fag* (figure 2). Dans un second temps, les élèves devront effectuer un travail similaire avec d'autres formes.

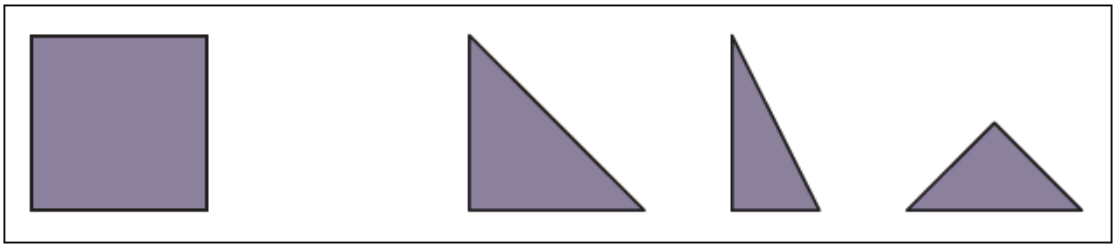


Figure 2 – Visualisation du fichier Exemple.fag

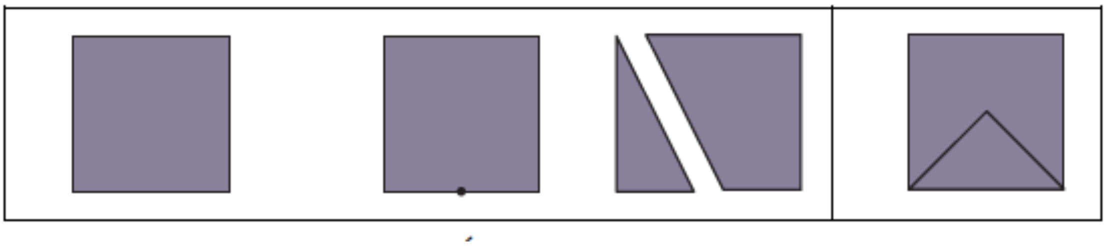
Pour obtenir les triangles à partir du carré, il faut leur trouver des points communs que l'enseignant repère en glissant les triangles sur le carré. Les élèves observent alors que ces figures ont même base ou même hauteur que le carré de départ.

Pour obtenir le premier triangle, l'enseignant utilise l'*Opération* qui consiste à `Découper` le carré selon une de ses diagonales, ce qui produit deux triangles dont l'un correspond au grand triangle rectangle isocèle si la diagonale a été bien choisie. *Apprenti Géomètre* crée les morceaux découpés au-dessus de la figure originale. Ceci permet aux utilisateurs de conserver la forme de départ, ce qu'un travail papier-crayon ne permet pas.

Pour créer les deux triangles suivants, des points supplémentaires sont nécessaires pour découper le carré. Ces points n'existent pas encore, il faut donc les créer.

Dans un cas, il faut créer le point milieu de la base du carré en la divisant en deux parties égales via l'*Opération* `Diviser`. Une fois la division effectuée, il reste à `Découper` le carré. L'un des deux morceaux correspond au triangle rectangle (figure 3).

Dans l'autre cas, pour obtenir le petit triangle rectangle isocèle, on observe que le sommet du triangle se trouve au centre du carré (figure 4). Ce point est obtenu par l'*Opération* `Construire le centre`. Il reste à `Découper` le carré en commençant et terminant par les points situés sur son bord.



Figures 3 et 4 – Etapes de la construction des triangles

L'enseignant demande ensuite aux élèves de faire un travail similaire pour construire les polygones du fichier *Hexagone.fag* (figure 5) à partir de l'hexagone.

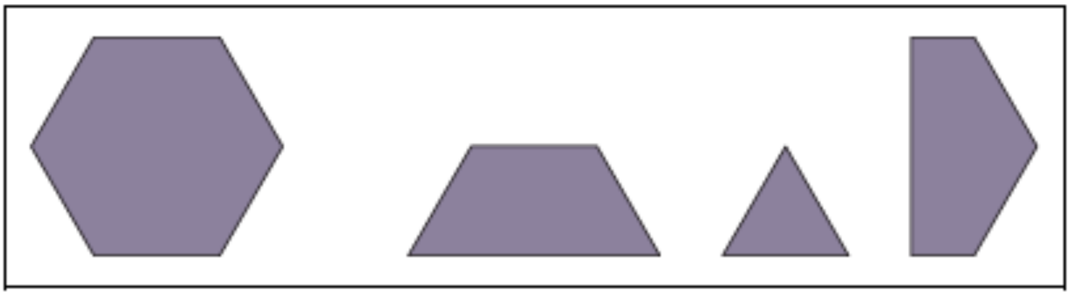


Figure 5 – Visualisation du fichier Hexagone.fag

Agrandissements

Doubler les longueurs

Dans les fichiers *Campagne.fag* et *Egypte.fag* (intitulés respectivement « À la campagne » et « Vacances en Égypte »), il est demandé aux élèves de reproduire sur la deuxième moitié de chaque feuille les différents éléments du dessin en doublant chacune des longueurs, y compris les distances qui les séparent.

Les figures 6 et 7 illustrent les dessins proposés ainsi que les agrandissements qui sont obtenus en doublant toutes les longueurs. Remarquons que deux types de grilles ont été utilisées en fonction des polygones à représenter.

Les élèves ne devraient pas rencontrer de difficultés pour doubler les dimensions. Par contre, l'enseignant devra peut-être insister sur le fait qu'il est important de doubler également les distances entre les différents éléments des dessins. C'est ainsi que l'apparence globale sera conservée.

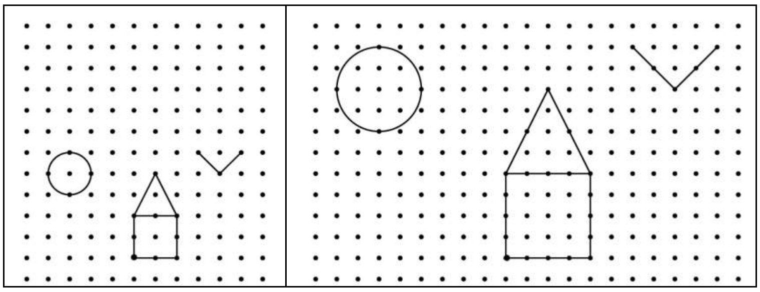


Figure 6 – Visualisation du travail réalisé dans Campagne.fag

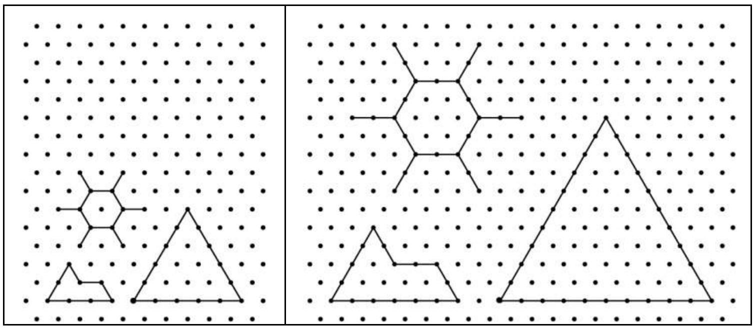


Figure 7 – Visualisation du travail réalisé dans Egypte.fag

Pour réaliser l'activité, les élèves auront dû reconnaître les différents polygones figurant dans les dessins. Notamment, pour représenter le sphinx du dessin intitulé « Vacances en Égypte », il faut l'identifier au préalable à un pentagone.

Caractéristiques d'un agrandissement

L'enseignant indique aux élèves que les reproductions ainsi construites sont appelées des agrandissements, et leur demande alors ce qui, selon eux, caractérise un agrandissement. Un travail collectif débouche sur la construction d'un tableau qui reprend l'ensemble des propositions des élèves.

Ce qui reste identique par un agrandissement	Ce qui est modifié par un agrandissement
carré	mesures
triangle	longueurs
triangle isocèle	hauteurs
oiseau	espacements
image	diamètres
…	périmètres
	aires
	…

Tableau 1 – Propositions d'élèves

Au fil des propositions, les élèves remarquent que certains éléments peuvent être rassemblés. Par exemple, que ce soit un carré qui reste un carré ou un triangle qui reste un triangle dans l'agrandissement, on peut dire que la forme est conservée. Il est rare que les élèves identifient d'eux-mêmes la conservation des angles comme la propriété mathématique qui garantit l'invariance de la forme. Pour guider les élèves, l'enseignant propose d'observer l'oiseau du dessin « À la campagne », et un autre oiseau, qu'il dessine au tableau, avec des ailes de longueurs doubles mais dont l'ouverture n'est pas de même amplitude (figure 8).

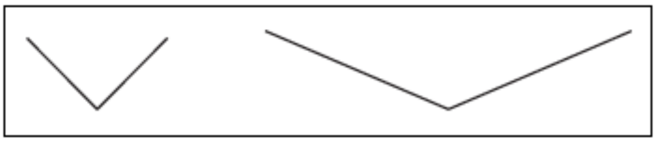


Figure 8 – Oiseaux à observer

Les élèves devraient s'apercevoir que l'oiseau de droite de la figure 8 n'est pas un agrandissement de l'oiseau de gauche parce que les angles ne sont pas identiques. À ce stade, certains élèves n'ont pas une représentation claire de ce qu'est un angle. Ils associent un angle à la longueur de ses côtés. Avec ces élèves, c'est justement l'occasion de travailler ce concept plus en profondeur. L'usage d'*Apprenti Géomètre* permet de déplacer les polygones de départ sur leurs agrandissements et remarquer que, en chacun des sommets, les angles se superposent parfaitement.

L'enseignant synthétise alors ce tableau avec les élèves et y relève les caractéristiques mathématiques d'un agrandissement.

Ce qui reste identique par un agrandissement	Ce qui est modifié par un agrandissement
les formes et leurs propriétés	les longueurs
les angles	les aires

Tableau 2 – Caractéristiques mathématiques d'un agrandissement

L'enseignant introduit finalement le vocabulaire correct : les polygones de départ et leurs agrandissements respectifs sont qualifiés de « polygones semblables ».

Remarquons que, lorsqu'on double les longueurs des côtés d'un polygone, celui-ci ne conserve pas nécessairement ses angles, et donc son apparence. En effet, contrairement aux triangles, les polygones de quatre côtés et plus sont déformables. Si les longueurs des trois côtés d'un triangle sont données, il n'est possible d'en construire qu'un seul. Par contre, connaissant les longueurs des côtés d'un quadrilatère, il est possible d'en construire une infinité (figure 9). Si les angles sont connus, sa construction est unique.

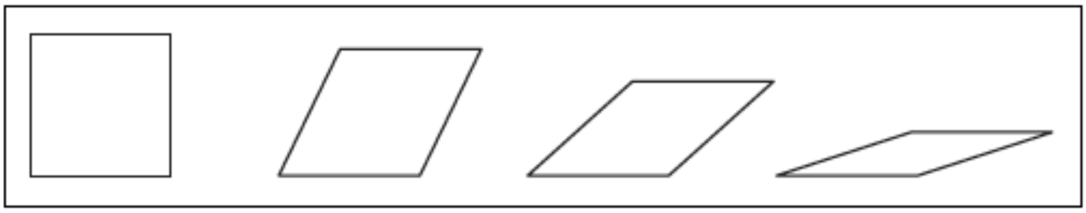


Figure 9 – Différents quadrilatères avec côtés de même longueur

Pavages de polygones

À partir des fichiers *PavageTriangle.fag*, *PavageCarre.fag*, *PavagePentagone.fag*, *PavageHexagone.fag* et *PavageChat.fag* présentant chacun un polygone particulier, on demande combien de ces polygones sont nécessaires pour couvrir (sans superposition) la figure semblable dont la longueur des côtés a été doublée. Pour réaliser le pavage, on ne découpera que lorsque c'est indispensable.

Pour le triangle, il suffit de dupliquer trois fois le triangle et de glisser les duplicata dans l'agrandissement ; le blanc apparent est facilement identifié comme le quatrième triangle qui a subi une rotation d'un demi-tour (figure 10).

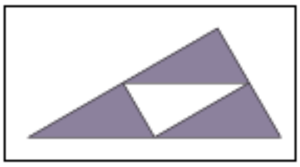


Figure 10 – Pavage d’un triangle

Le pavage de l'agrandissement du carré est réalisé très simplement car il suffit de dupliquer quatre fois le carré initial et de placer les quatre exemplaires côte à côte dans l'agrandissement.

Le pavage suivant est celui d'un pentagone irrégulier, le sphinx des « Vacances en Égypte » (inspiré de Noël, 2008). Il est possible de paver celui-ci avec quatre pentagones de départ sans aucun découpage. Cependant, les élèves ne verront peut-être pas cette possibilité et découperont plusieurs pièces pour paver l'agrandissement.

Contrairement à ce qui se passe avec un puzzle en carton découpé, dont les pièces sont manipulées un peu au hasard, les élèves doivent décider consciemment de chaque mouvement à appliquer aux petits pentagones avant de les glisser dans le contour du grand. Pour que les élèves réalisent le pavage de la figure 11 sans trop de difficultés, un premier pentagone a été placé dans le fichier car il faut notamment penser à retourner certaines pièces.

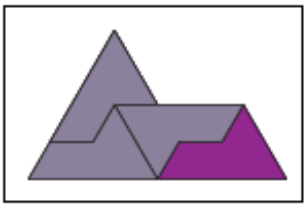


Figure 11 – Pavage d’un pentagone

Les élèves observent que, jusqu'ici, quatre polygones initiaux sont nécessaires pour paver leur agrandissement de côtés de longueurs doubles.

Ensuite, lorsque les élèves pavent l'agrandissement de l'hexagone, ils s'aperçoivent rapidement qu'il n'est plus possible de placer quatre formes entières. Ils peuvent placer trois hexagones entiers mais l'agrandissement n'est pas totalement couvert. Les élèves doivent alors penser à découper un hexagone pour compléter ce puzzle. Ils s'apercevront qu'un hexagone coupé en trois losanges comme dans la figure 12 permet de finaliser le pavage. Le découpage est réalisé facilement si les élèves utilisent l'*Opération* `Construire le centre`. Une alternative pour paver l'agrandissement consiste à placer un hexagone au centre et à répartir des demi-hexagones tout autour (figure 13).

Comme précédemment, quatre polygones initiaux sont nécessaires pour paver l'agrandissement de côtés de longueurs doubles.

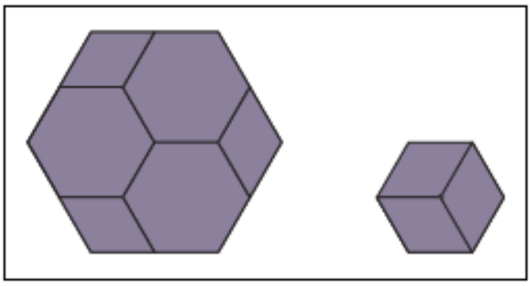


Figure 12 – Pavage d'un hexagone

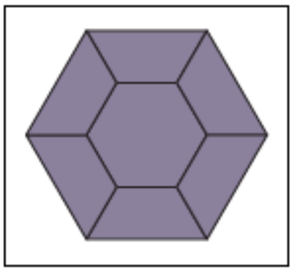


Figure 13 – Autre pavage d'hexagone

Rappelons que, lors des découpages avec *Apprenti Géomètre*, les deux morceaux découpés se superposent à la figure initiale. Les duplicata créés lors des découpages pourraient perturber les élèves dans le décompte du nombre d'hexagones nécessaires à la réalisation du pavage. Il est donc intéressant de proposer aux élèves, après avoir réalisé le pavage, de glisser les différentes pièces utilisées afin de reconstituer des hexagones entiers.

Le travail se poursuit avec une figure qui a l'apparence d'une tête de chat. Comme pour les autres polygones, les élèves essayent de paver l'agrandissement de côtés de longueurs doubles avec un maximum de petites « têtes de chat » entières.

Il ne faut pas laisser les élèves s'attarder car cette figure a pour objectif de leur faire prendre conscience qu'une solution raisonnée permet l'économie d'un grand nombre de découpages fastidieux. En travaillant avec cette figure, les élèves se rendent compte qu'il n'est pas toujours possible de paver un polygone avec des figures qui lui sont semblables. L'enseignant propose alors de procéder autrement et de se référer à un polygone qui a été pavé simplement et qui pourrait lui-même être utilisé pour paver des polygones plus compliqués. Le pavage du carré paraît simple mais il est impossible de décomposer le polygone en forme de tête de chat en carrés. Par contre, le pavage du triangle quelconque a également été réalisé rapidement et la « tête de chat » est décomposable en triangles.

Le procédé que l'on adopte est donc le suivant : partager en triangles le polygone et son agrandissement de la même manière (figure 14) et paver ensuite chaque grand triangle avec les petits (figure 15).

Il est possible de décomposer le polygone en triangles de nombreuses manières. Pour travailler avec un minimum de triangles, une des solutions consiste à choisir un sommet et à le relier à tous les autres comme dans la figure 14. Cette décomposition a l'avantage de respecter la symétrie de la figure.

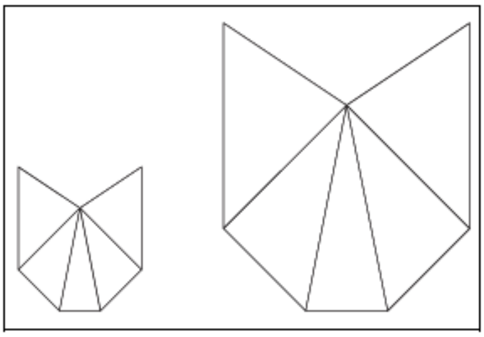


Figure 14 – Proposition de décomposition de la figure en triangles

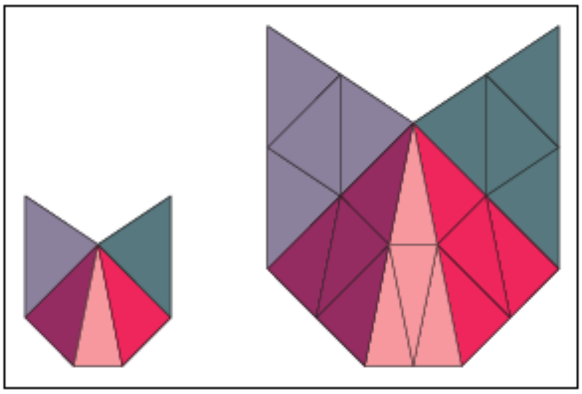


Figure 15 – Pavage de la figure

À partir du fichier *PavageChatInit.fag*, l'enseignant demande de partager de la même manière les deux « chats » en triangles et, après avoir mis chaque triangle du petit chat en couleur (une couleur différente par triangle), de paver les triangles du grand chat avec ceux du petit chat.

Pour décomposer les figures en triangles, les élèves commenceront probablement par placer des segments pour visualiser ces triangles, mais au moment d'utiliser l'*Outil* `Colorier` (`Couleur_Fond`), ils prendront conscience qu'il est impossible de colorier un triangle qui n'a pas été construit en tant que tel.

Une fois les triangles du « petit chat » coloriés, les élèves effectuent la même démarche que précédemment en recomposant chacun des grands triangles avec quatre petits triangles identiques. Ils observent ainsi que les morceaux de quatre exemplaires de la petite tête de chat sont nécessaires pour paver l'agrandissement de côtés de longueurs doubles (figure 15).

Comparaison des aires

Après la réalisation des différents pavages, l'enseignant demande, pour chacun des polygones rencontrés, de comparer les aires avec celles de leur agrandissement de côtés de longueurs doubles.

Pour paver l'agrandissement du triangle de côtés de longueurs doubles, quatre exemplaires du triangle ont été nécessaires. Les élèves devraient alors déduire que « lorsqu'on double les longueurs des côtés d'un triangle, son aire est multipliée par quatre ».

La même conclusion peut être formulée pour les autres polygones rencontrés : l'aire du polygone semblable de côtés de longueurs doubles est quatre fois plus grande que l'aire du polygone initial.

Afin de généraliser, un raisonnement en plusieurs étapes est nécessaire. L'une d'elles consiste à se convaincre que tout polygone est un assemblage de triangles. Il faut également remarquer que, si un polygone et son agrandissement (de côtés de longueurs doubles) sont décomposés en triangles de la même manière, chaque triangle de l'agrandissement a des côtés de longueurs doubles de celles des triangles semblables de la décomposition du polygone initial.

Suite à ces réflexions et en partant du polygone de la figure 16 (à gauche), le raisonnement suivant peut être établi.

- Tout polygone est un assemblage de triangles (figure 16).

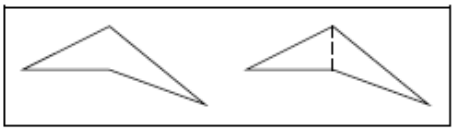


Figure 16 – Décomposition d'un polygone en triangles

- Les grands triangles de la décomposition d'un agrandissement (de côtés de longueurs doubles) ont des côtés de longueurs doubles des petits triangles de la décomposition du polygone initial (figure 17).

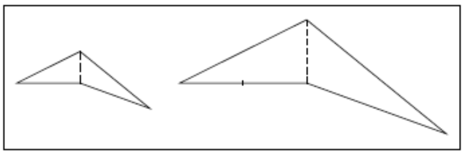


Figure 17 – Décomposition semblable du polygone agrandi

- Lorsqu'on double les longueurs des côtés d'un triangle, l'agrandissement est pavé avec quatre exemplaires du triangle de départ. Son aire est donc multipliée par quatre (figure 18).

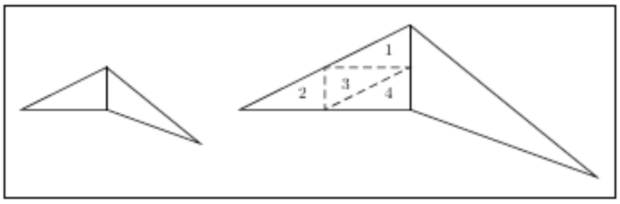


Figure 18 – Pavage d'un triangle de côtés de longueurs doubles

La conclusion suit : « lorsqu'on multiplie les longueurs des côtés d'un polygone par deux, l'aire de son agrandissement est égale à quatre fois celle du polygone initial. ».

Notons que la démarche mentale sous-jacente à la justification de la conclusion implique une réorganisation des pièces du puzzle qui correspond à une mise en évidence, ou à une distributivité, comme l'illustre la figure 19.

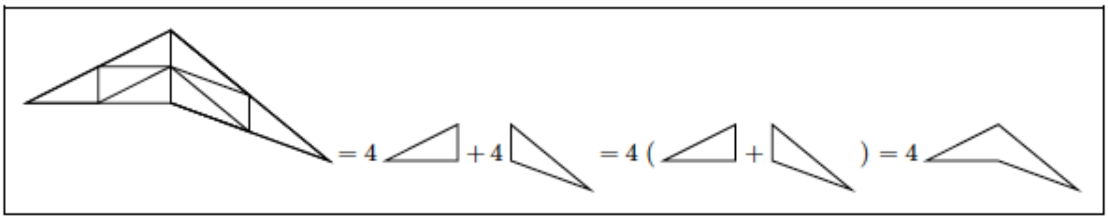


Figure 19 — Réorganisation des pièces

Construire des agrandissements

Agrandissements de côtés de longueurs doubles

L'enseignant demande aux élèves d'ouvrir une nouvelle fenêtre dans *Apprenti Géomètre*, d'y tracer un triangle quelconque, puis après l'avoir mis en couleur, de construire son agrandissement de côtés de longueurs doubles par assemblage de triangles.

En l'absence de quadrillage, il n'est plus possible de dessiner d'abord le contour du triangle agrandi pour le remplir ensuite. En s'inspirant des manipulations précédentes, les élèves devraient parvenir à obtenir le contour de la figure agrandie en dupliquant trois fois le triangle initial et en glissant les duplicata dans la position adéquate (figure 20). L'utilisation du logiciel permet d'exécuter cette construction rapidement avec toute la précision requise.

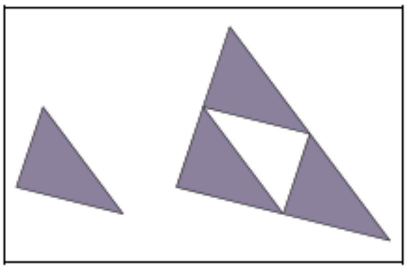


Figure 20 – Construction de l'agrandissement d'un triangle avec côtés de longueurs doubles

De plus, cette construction permet aux élèves de justifier qu'ils ont effectivement construit un triangle semblable puisque les angles sont conservés. Notons que les élèves ne se contentent généralement pas de placer les trois triangles qui forment le contour de l'agrandissement, certains éprouvent le besoin de placer le quatrième exemplaire dans l'espace vide.

Pour aller plus loin, on demande d'effectuer un travail similaire avec un pentagone quelconque[1] c'est-à-dire de construire son agrandissement de côtés de longueurs doubles par assemblage de triangles.

Après avoir décomposé le pentagone initial en triangles, on colorie chaque triangle dans une couleur différente pour y voir plus clair. On réalise ensuite l'agrandissement comme le montre la figure 21.

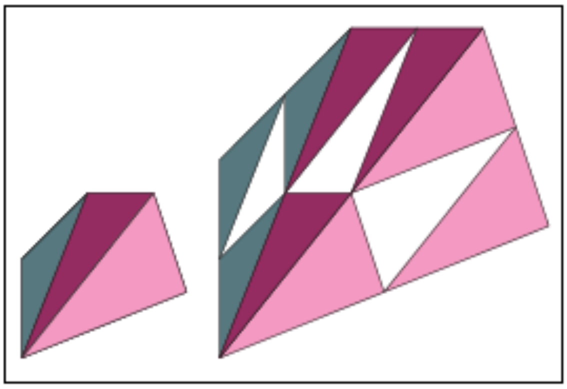


Figure 21 – Construction de l'agrandissement d'un pentagone avec côtés de longueurs doubles

Moyennant un travail sur la somme des angles, ce procédé permet de justifier que la construction réalisée est bien un agrandissement du pentagone initial puisque les angles sont conservés. De plus, cette méthode est généralisable aux agrandissements de tout polygone.

Construire l'agrandissement du pentagone n'est pas évident pour tous, certains élèves ont besoin de consignes plus précises. Soit l'enseignant les guide en leur proposant de réaliser l'agrandissement de chacun des triangles pour commencer, soit il leur suggère de former le contour du pentagone agrandi en plaçant à chaque fois deux triangles en respectant l'alignement des côtés de manière à construire des côtés de longueurs doubles. Cette deuxième méthode permettra d'aborder plus facilement l'activité de la section suivante.

Agrandissements de côtés de longueurs triples

Le travail accompli jusqu'ici établit que « lorsque les longueurs des côtés d'un polygone sont multipliées par deux, l'aire de son agrandissement est égale à quatre fois l'aire du polygone initial ». Pour aller plus loin dans la démarche, on se demande ce qu'il advient de l'aire d'un polygone lorsqu'on construit un agrandissement de côtés de longueurs triples.

En appliquant le procédé de construction utilisé dans l'activité précédente, *Apprenti Géomètre* permet ici encore de réaliser facilement un polygone dont les côtés sont de

---

[1]Il est possible que le fonctionnement du logiciel amène les élèves à construire des polygones croisés. Il vaut mieux les rejeter à cause des difficultés propres aux aires de ces polygones (Noël & Noël, 2010).

longueurs triples de celui de départ, en utilisant seulement deux fonctionnalités (`Dupliquer` et `Glisser`).

Le travail sur le triangle quelconque montre que neuf triangles sont nécessaires pour paver l'agrandissement, on déduit alors que son aire est neuf fois plus grande que celle du triangle initial (figure 22).

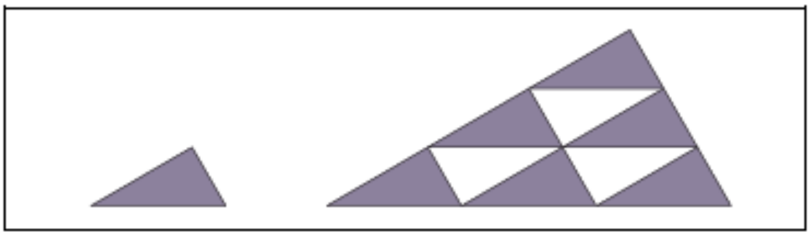


Figure 22 – Construction de l'agrandissement d'un triangle avec côtés de longueurs triples

Ce travail peut également être réalisé pour un polygone quelconque. Considérons par exemple le pentagone de la figure 21 et construisons l'agrandissement de côtés de longueurs triples. Une fois encore, il n'est pas obligatoire de placer les neuf triangles de chaque sorte pour former l'agrandissement dont les côtés sont trois fois plus longs. Les espaces vides suggèrent d'eux-mêmes les triangles absents (figure 23).

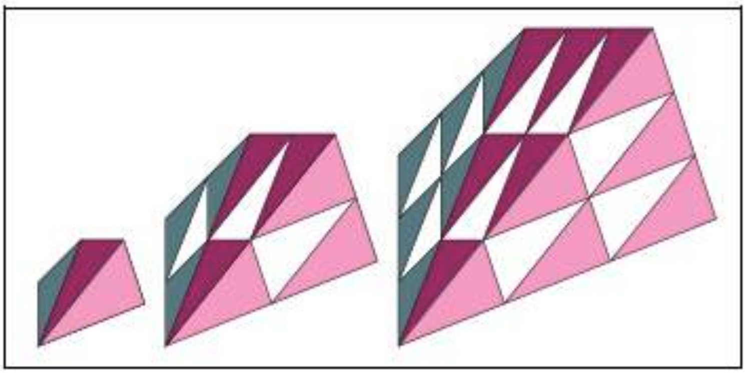


Figure 23 – Construction de l'agrandissement d'un pentagone avec côtés de longueurs triples

Les élèves ont dès à présent les outils nécessaires pour généraliser le procédé à un polygone quelconque et pour formuler une conclusion. Ils ont observé précédemment que tout polygone était un assemblage de triangles. Ils peuvent facilement voir que les triangles de la décomposition d'un agrandissement de côtés de longueurs triples ont des côtés de longueurs triples des triangles de la décomposition du polygone initial. Après avoir mis en évidence ci-dessus que, lorsque les longueurs des côtés d'un triangle sont multipliées par trois, l'aire est multipliée par neuf, les élèves peuvent enfin conclure que « lorsque les longueurs des côtés d'un polygone sont multipliées par trois, l'aire de son agrandissement est égale à neuf fois l'aire du polygone initial. ».

Généralisation et extension

Multiplier les longueurs des côtés par un nombre entier

Les élèves ont pu observer jusqu'ici comment se comporte l'aire d'un polygone lorsqu'on l'a agrandi en multipliant les longueurs de ses côtés par deux ou par trois. Un travail similaire peut être réalisé pour observer comment l'aire des polygones varie lorsque leurs longueurs sont multipliées par un autre facteur entier mais nous n'envisageons pas de poursuivre la démarche de décomposition en triangles au-delà du facteur trois.

La figure 24 offre un moyen de retenir comment évolue l'aire d'un agrandissement en fonction de la multiplication des longueurs des côtés d'un polygone initial. En effet, un carré peut être vu comme une juxtaposition de deux triangles, ce qui permet d'admettre que l'analogie persiste au-delà du facteur trois. La suite de carrés permet d'imaginer ce qui se passe pour d'autres multiples entiers.

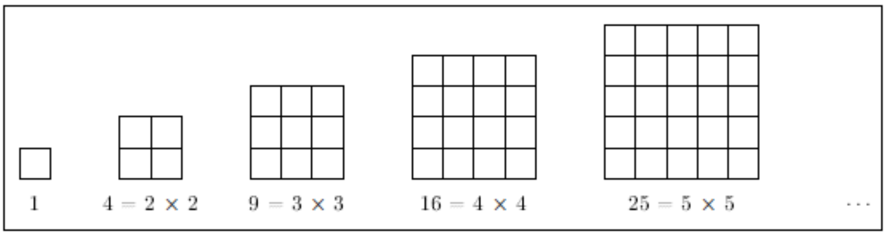


Figure 24 – Suite des nombres carrés

À partir de tout le travail accompli jusqu'ici, les élèves peuvent conclure que « si les longueurs des côtés d'un polygone sont multipliées par un nombre, l'aire du polygone agrandi sera alors égale à l'aire du polygone initial multipliée par le carré de ce nombre ». Nous n'envisageons pas ici l'extension de la règle à des multiples non entiers.

L'aire du disque de rayon double

L'enseignant invite les élèves à observer les agrandissements réalisés dans la section 3.1 et demande ce qu'il advient de l'aire des figures agrandies. Pour les polygones, la conclusion découle du travail effectué au long de la séquence qui précède : l'aire des figures dont les longueurs ont été doublées a été quadruplée. Par contre, pour le disque, il est impossible de paver l'agrandissement avec quatre exemplaires du disque de départ. Il n'est pas non plus possible de partager le disque en triangles afin de mener à la généralisation de la section 5. Il est alors nécessaire d'adopter une technique qui permet d'approcher le disque.

En observant la suite de polygones réguliers de la figure 25, les élèves remarquent que, plus le nombre de côtés du polygone est grand, plus son contour est proche d'un disque.

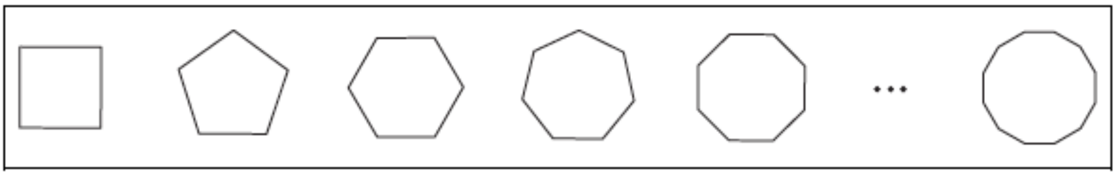


Figure 25 – Polygones à observer

Si on imagine le disque comme un polygone avec de nombreux côtés, on pourrait lui appliquer la démarche réalisée précédemment. La figure 26 est une illustration du raisonnement sur un dodécagone, mais on peut comprendre qu'on pourrait le faire avec un polygone dont le nombre de côtés devient aussi grand que l'on veut.

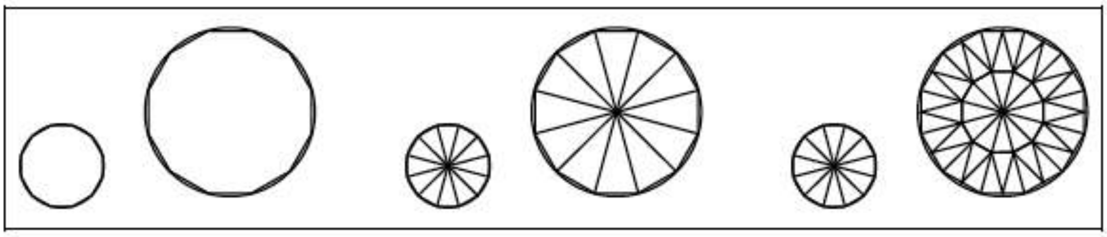


Figure 26 – Illustration du raisonnement sur un dodécagone

REFERENCES

Bkouche, R. (2008) Du caractère expérimental des mathématiques. À propos des laboratoires de mathématiques. *Repères IREM, 70,* 123-137.

Borel, É. (1904) Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. Musée Pédagogique, Paris. Conférence prononcée le 3 mars.

Dias, T. & Durand-Guerrier, V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM, 60,* 61-78.

Guissard, M.-F. *& al.* (2010) Math & Manips. *Losanges, 7,* 39-46.

Noël, G. (2008) D'assemblages au théorème de Thalès. *Losanges, 2*, 56-61.

Noël, G. & Noël, Y. (2010) Le théorème de Varignon (2). *Losanges, 11*, 37-45.

LES ENSEIGNANTS FACE A L'ENTREE DE L'ALGORITHMIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU LYCEE SCIENTIFIQUE EN FRANCE

Mariam HASPEKIAN[1], Claver NIJIMBERE[2]
EDA, Université Paris Descartes

Résumé – Après avoir interrogé le prescrit et interviewé un groupe d'enseignants sur leurs rapports à l'enseignement des savoirs algorithmiques dans les nouveaux programmes de mathématiques en seconde en France, il se dégage deux représentations de l'algorithmique : l'une tournée vers la logique mathématique, en dehors de tout contexte technologique, l'autre tournée vers la programmation. Ces deux approches se retrouvent dans les programmes officiels où les notions algorithmiques sont présentées dans une tension mathématiques-informatique, ainsi que dans les propos des enseignants. Les pratiques des enseignants et celles de leurs élèves sont très influencées par ces représentations. Une confusion de terminologie chez les enseignants atteste des frontières floues entre algorithmique et programmation qui méritent d'être précisées au cours des formations.

1. Contexte

1.1. Introduction

Les programmes des mathématiques en France ont été récemment réformés avec une évolution qui semble en rapport avec les utilisations grandissantes de l'informatique. En effet, selon Modeste (2009), c'est l'évolution des mathématiques elles-mêmes et la présence croissante de l'informatique et de ses applications qui incitent à requestionner l'enseignement des mathématiques. Il en est de même pour Vagost, pour qui le développement technologique renforce de plus en plus le voisinage existant entre les mathématiques et l'informatique et la nécessité de donner un caractère algorithmique à l'enseignement des mathématiques (Vagost, 2010). L'introduction des éléments de l'algorithmique et de la programmation au lycée est effectivement une grande caractéristique de ces nouveaux programmes, en vigueur au lycée depuis la classe de seconde, dès la rentrée 2009/2010 et qui se sont depuis étendus à tout le lycée dans leur enseignement. Nous nous interrogeons alors d'une part sur les contraintes et difficultés de ce nouvel enseignement, d'autre part sur les pratiques des enseignants face à ces nouveautés : comment les enseignants, spécialistes des mathématiques, se sont-ils approprié cet enseignement ? Comment parviennent-ils à mettre en application ces nouveaux programmes ? Quels savoirs et quelles formations supplémentaires nécessite cet enseignement ? Quels changements exige-t-il ? Quelles sont les pratiques des élèves et les difficultés majeures qu'ils rencontrent ?

Cet article, qui reprend certains éléments issus de notre travail de mémoire de master 2, Nijimbere (2011) interroge donc à la fois les programmes et cherche à avoir une

1 mariam.haspekian@univ-paris5.fr

2 claver.nijimbere@etu-paris5.fr

première idée des pratiques des enseignants en algorithmique en tentant de les croiser avec leurs effets sur l'apprentissage des élèves.

1.2. Corpus et Méthodologies appliquées

Afin de pouvoir répondre à ces questions, nous nous sommes tournés vers deux ensembles de corpus et avons utilisé une méthode qualitative propre à chacun de ces deux volets : une analyse du prescrit pour ce qui concerne les programmes et des entretiens semi-directifs pour ce qui concerne les pratiques.

Le prescrit comporte deux documents : le programme proprement dit et le guide d'accompagnement de ce programme. Ce programme de mathématiques en seconde présente, en introduction, d'une part, sur une demi-page, les objectifs généraux prescrits, le raisonnement et le langage mathématique recommandé, et, d'autre part, sur une page, les outils logiciels proposés, les diverses activités de l'élève, l'organisation du programme et le mode d'évaluation des élèves.

Nous avons ainsi analysé les textes officiels de mathématiques en classe de seconde (programme et guide d'accompagnement). Ce programme comporte des éléments d'algorithmiques valables pour les trois classes (seconde, première et terminale) du lycée scientifique.

Le prescrit est analysé d'abord selon les champs lexical et sémantique des termes utilisés, les méthodes d'enseignement et les types d'activités proposés, l'expression langagière utilisée, les langages ou logiciels de programmation proposés, les savoirs enseignés et savoir-faire comme les compétences visées, les modes et formes d'évaluation proposés...

Pour les entretiens, nous avons choisi des lycées ayant une section concernée par la réforme. Cinq enseignants, provenant de trois lycées différents, ont accepté de participer à nos entretiens.

La méthode d'entretiens semi-directifs a été privilégiée dans le sens où elle offre des opportunités aux différents interviewés d'exprimer leur point de vue (Darricarrère et Bruillard, 2010). Ces derniers, en répondant librement aux thèmes en question, révèlent d'autres points auxquels l'intervieweur n'avait pas pensé dans la construction de la grille d'entretien. L'intervieweur, quant à lui, a aussi les possibilités de relancer des questions pour avoir plus de précisions sur les nouveaux points évoqués qu'il juge importants.

Des enregistrements audio d'entretiens, d'une heure environ chacun, avec ces 5 enseignants ont été faits. Les entretiens ont été transcrits, codés et analysés. Après une lecture répétée de ces transcriptions, une grille d'analyse de ces entretiens a été construite et structurée.

Dans la suite, nous présentons les analyses et résultats respectifs à ces deux volets avant de lancer quelques pistes de discussion.

2. Analyse du prescrit

2.1. Méthode d'analyse

La procédure de notre analyse est d'abord lexicale. Elle a consisté à repérer dans les textes officiels les notions en rapport avec l'algorithmique ou faisant référence à l'algorithmique. Ces notions ou expressions ont été classifiées dans les catégories, constituées selon leur champ sémantique : technique, activité, outil…

Nous avons aussi repéré dans les textes les termes ou expressions relatifs aux TIC et les noms de logiciels proposés. Nous avons finalement mis en relation la terminologie soulignée précédemment et les savoirs et savoir-faire comme compétences attendues de l'élève selon le prescrit des textes officiels. Cela nous a permis de déterminer la place qui revient à l'enseignement de l'introduction de l'algorithmique dans le nouveau programme de mathématiques au lycée.

Enfin, nous avons repéré des expressions langagières qui montrent l'importance à donner à l'argument proposé. Ces expressions ont un sens qui va de la recommandation à une plus forte incitation : « dans la mesure du possible… », « le cas échéant », « il serait souhaitable… », « une piste intéressante est… », « il est intéressant de... », « on aura intérêt à… », « … peut avantageusement avoir… », « … gagne à être mise en œuvre… », « … l'accent est systématiquement mis sur… », « il est indispensable de… », « … en particulier… », « il est important de… », « il importe particulièrement que… », « il convient de… », « il conviendrait de… », etc.

2.2. Résultats de l'analyse

Sur huit pages, se trouve une description des contenus du programme, disposée en trois colonnes intitulées respectivement : « contenus », « capacités attendues » et « commentaires ». Le programme est découpé en 3 parties : Fonctions, Géométrie, et Statistiques et probabilités.

Pour chaque partie, les capacités attendues sont identifiées et l'accent est systématiquement mis sur le type de problème que les élèves doivent savoir résoudre. L'acquisition de techniques est présentée comme indispensable, mais il est souligné qu'elle doit être au service de la pratique du raisonnement qui est la base de l'activité mathématique des élèves.

Bien que l'algorithmique ne soit pas une partie à part entière, on remarque qu'à côté des objectifs généraux de ce programme et des objectifs spécifiques pour chacune de ses parties, sont précisés, à part, les objectifs spécifiques de l'algorithmique.

2.2.1. Une argumentation pour l'introduction de l'algorithmique

Dans les programmes et le guide d'accompagnement, une argumentation est proposée, pour justifier l'introduction de l'algorithmique et l’étude des algorithmes dans l’enseignement de mathématiques. On note dans cette argumentation, le souci de relier le domaine de l’algorithmique aux mathématiques (et non à l’informatique) en utilisant divers points de vue. Les programmes montrent du point de vue historique, un lien originel entre ces deux champs, du point de vue de la pratique des mathématiques une omniprésence des algorithmes, et du point de vue de l’enseignement et de l’apprentissage, les vertus et apports de l’algorithmique pour l’apprentissage du raisonnement et de toutes les autres parties du programme de mathématiques.

Cependant, malgré ce souci, les programmes mettent également en avant le lien entre l’algorithmique et l’usage des technologies dans notre univers actuel ; à ce titre l’algorithmique pourrait être vue comme étant un domaine plutôt à rapprocher de la programmation et de l’informatique. Cette tension qui existe dans les programmes entre « algorithmique-informatique » et « algorithmique-mathématiques » se révélera être une difficulté pour les enseignants ainsi que pour les formateurs en charge de concevoir des formations sur l'algorithmique.

Un lien originel entre mathématique et algorithmique

Plusieurs expressions renvoient à un lien originel entre les mathématiques et l'algorithmique :

> L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilités, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante. (Programme, p.11, souligné par nous).
> La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle des mathématiques. (Programme, p.11, souligné par nous).

C'est un lien originel, que l'on retrouve dans l'enseignement de mathématiques lui-même :

> Dans le cours de mathématiques, les algorithmes apparaissent très tôt dans la scolarité. (Guide d'accompagnement, p.3, souligné par nous).

Au collège, les élèves ont rencontré des algorithmes (algorithmes opératoires, algorithme des différences, algorithmes d'Euclide, algorithme de construction en géométrie) » (Programme, p.11, souligné par nous).

Une omniprésence des algorithmes

Une autre justification repose sur l'omniprésence des algorithmes dans les mathématiques de la vie courante. Un paragraphe intitulé : « présence universelle des algorithmes » l'explique :

> Les mathématiques sont partout présentes dans la vie courante : traitement de données, statistiques, codage, simulation numérique... Mais cette présence qui se renforce, est souvent occultée aux yeux du public qui ne voit que le produit fini. Cette observation s'applique parfaitement aux algorithmes dont on voit plus souvent les résultats que les principes fondamentaux. (Guide d'accompagnement, p.3).

Cependant, un autre paragraphe explique la « présence d'algorithme » en la reliant cette fois à notre « univers technologique » dans la vie courante (Guide d'accompagnement, p.3) :

> La présence d'algorithmes dans l'univers technologique qui nous entoure n'est plus à démontrer. Depuis l'automate le plus simple jusqu'aux systèmes les plus complexes, les algorithmes ordonnent beaucoup de nos gestes quotidiens.

Des capacités transversales et des compétences clairement identifiées

Ces deux arguments sont renforcés par le fait que, dans le nouveau programme, l'introduction de l'algorithmique ne constitue pas une section à part entière du programme mais, est intégrée dans chacune des trois parties (fonctions, géométrie, statistiques et probabilités). Cette forme est justifiée par un argument de transversalité des capacités attendues en algorithmique :

> Les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique d'une part et du raisonnement d'autre part, sont transversales et doivent être développées à l'intérieur de chacune des trois parties. (Programme, p.4)

Un dernier argument est plutôt pratique et tourne là encore les algorithmes vers leur implémentation dans des machines. Les méthodes manuelles dans la résolution de certains problèmes peuvent en effet s'avérer insuffisantes, d'où le besoin de méthodes plus performantes dont l'utilisation de la machine :

> L'introduction de chaque nouvel élément (variable, boucle, itération, etc.) devrait apparaître lors de la résolution des problèmes pour lesquels les démarches habituelles sont trop longues ou peu performantes : par exemple dans le cas de répétition d'une tâche, ou dans le cas d'un traitement trop long pour être envisagé « à la main ». (Guide d'accompagnement, p.4)

La présence de « machines » et de la programmation se confirme par la suite dans les activités auxquelles les élèves doivent « être suffisamment entraînés » que les textes officiels listent :

> • décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
> • en réaliser quelques-uns à l'aide d'un tableur ou d'un petit programme réalisé sur une calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
> • interpréter des algorithmes plus complexes. (Programme, p.11)

2.2.2. Une description des contenus à enseigner

De même, les contenus à enseigner naviguent là encore entre un apprentissage purement mathématique de l'algorithmique et conjointement une traduction « machine » de ces algorithmes, sans faire la part des choses claire entre ce qui relève des mathématiques et ce qui relève d'une « extension », laissant l'enseignant dans un flou au final sur ce qu'est l'algorithmique :

Dans le cadre de l'algorithmique, les objectifs prescrits et poursuivis par le programme sont les suivants :

> * formalisation en langage naturel <u>propre à donner une traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel</u> ;
> *familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : <u>gestion des entrées</u>, affectation d'une valeur et <u>mise en forme d'un calcul</u>.» (programme, p.11, c'est nous qui soulignons)

Il en est de même dans le guide d'accompagnement. Sur les trente-trois (33) pages qui le composent, vingt-cinq (25) sont réservées aux contenus à enseigner dans lesquelles le guide :

- rappelle les définitions, les principes et les notions de base de l'algorithmique : « instructions », « variables », « structures de contrôle », etc. Bref, il donne un cours synthétique et complet.
- donne des illustrations (d'affectation des données dans des variables, de <u>lecture (entrée)</u> des données et <u>d'écriture (sortie) des résultats)</u> dans un pseudo-langage.
- donne des <u>illustrations dans deux des logiciels préconisés</u> dans le programme : Scratch et Xcas.
  Ces illustrations concernent les notions d'affectation de données dans des variables, de sortie de résultats et de structures de contrôle.

  > Avec Scratch cela prend l'allure suivante : […]. (Guide d'accompagnement, p.7).
  > […]dans Xcas, l'instruction « input (A) ; » va affecter dans la variable nommée A un nombre ou une expression tapés au clavier. (Guide d'accompagnement, p.7).
- donne une illustration imagée de l'affectation :

> On peut comparer l'affectation de valeur à une variable comme le rangement d'un objet dans un petit tiroir (ne pouvant contenir qu'un objet à la fois); sur la façade du tiroir figure un nom, c'est l'identificateur qui permet de parler du tiroir lui-même. Cette notion est très proche de celle de variable au sens mathématique. (Guide d’accompagnement, p.7)

On voit aux citations précédentes que le souci d’un rapprochement avec les mathématiques est noyé dans des instructions propres à un langage machine (« *input* », *lecture* à l’entrée de l’algorithme, *écriture* à la sortie…) qui côtoient pourtant l’introduction d’un pseudo-langage dans les textes officiels.

Le guide d’accompagnement introduit en effet l’utilisation d’un pseudo langage français pour la description formelle des algorithmes :

> […] identificateur prend la valeur valeur […]. Ainsi l’instruction « A prend la valeur 2 » affecte la valeur 2 à la variable dont A est l’identificateur et ceci quelle que soit la valeur contenue au préalable dans la variable A (laquelle sera perdue). (Guide d’accompagnement, p.7)

Mais dans le même pseudo langage, est précisé que l’entrée et la sortie des données peuvent respectivement être traduites :

> Saisir identificateur […]. Afficher identificateur. (Guide d’accompagnement, p.7)

Or ces instructions n’ont strictement aucune utilité d’un point de vue « algorithmique » (c’est-à-dire au sens mathématique). Elles sont par contre nécessaires bien entendu d’un point de vue « programmation » de l’algorithme. Les termes « Saisie » et « Afficher » proviennent du monde « calculatrice » et « programmation » mais ne se justifient pas du point de vue strict de l’algorithme. Ils constituent d’ailleurs une erreur fréquente d’écriture des algorithmes chez les étudiants de première année universitaire. Notre propos n’est pas de contester la présence de ce point de vue, un enseignement uniquement formel serait sans doute déraisonnable, mais de montrer que les textes officiels n’aident pas les enseignants à faire la part des choses précisément entre ces différents points de vue, à délimiter clairement ce qui relève de l’algorithmique au niveau des raisonnements de ce qui relève des nécessités de son implémentation technologique.

2.2.3. Usage des TIC

Enfin, il est souligné dans le programme (p.11) que : «Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé », mais les langages et outils logiciels sont néanmoins largement introduits dans les textes avec là encore aucune précision sur le fait qu’on entre là dans un travail distinct de celui du travail de l’algorithme pur, travail qui engendre des questions propres et nouvelles purement liées à la programmation (interaction avec un utilisateur, capacités de calcul, limitations de mémoire, complexité en temps, etc.).

Des logiciels recommandés non obligatoires

Les textes donnent une liste de logiciels libres et de langages, pouvant être utilisés : « Scratch », « Xcas », « Linotte », « Maxima », « Python », « Scilab », « Execalgo » et il est précisé qu'il est possible d'employer d'autres logiciels :

> [...] cette liste n'est pas limitative et rien n'empêche que d'autres logiciels existants ou à venir puissent être employés pour illustrer l'algorithmique. (Guide d'accompagnement, p.31)

Le choix est laissé libre aux enseignants, aucun logiciel ne fait l'objet d'une plus forte préconisation :

> La liste ne suit pas un ordre particulier (mais le premier logiciel [Scratch] est un peu à part) [...]. L'environnement SCRATCH se distingue de ceux qui suivent par sa capacité à gérer la programmation événementielle voire parallèle : un projet SCRATCH ne se réduit pas à un seul algorithme, il inclut généralement des éléments multimédias (sons, images animées) ainsi qu'une multiplicité d'algorithmes s'exécutant tour à tour. (Guide d'accompagnement, p.31)

Les logiciels utilisés sont variés et semblent répartis selon les domaines mathématiques sans qu'il n'y ait d'outil logiciel ou langage strictement réservé à une notion ou à un domaine. En effet, certaines classes d'instruments sont transversales aux domaines mathématiques. C'est le cas :

- des calculatrices (TI et CASIO) qui sont mentionnées dans tous les trois domaines ;
- du tableur qui est dans les fonctions comme en statistiques et probabilités ;
- du langage Python en géométrie comme dans les fonctions ;
- Scilab en statistique et probabilités comme dans les fonctions ;
- Scratch dans les fonctions comme en géométrie ;
- Xcas en statistique et probabilités comme en géométrie.

Enfin, les calculatrices programmables peuvent être utilisées également, mais au final si le choix de l'outil est à la liberté de l'enseignant, il serait néanmoins impensable, vu l'insistance et le foisonnement d'exemples des préconisations officielles, de ne pas en choisir un. Le guide donne même diverses informations pratiques de sites où on peut télécharger gratuitement des logiciels et des systèmes d'exploitation :

> Les logiciels proposés sont «libres» au sens où leur téléchargement, leur installation sont autorisés sans aucune restriction. (Guide d'accompagnement, p.31-32)

Par ailleurs, il est précisé que certaines activités d'élèves nécessiteront l'usage de l'ordinateur :

> Les calculatrices graphiques programmables seront exploitées grâce à leur commodité d'usage en classe entière. Cependant, leurs limites dues à leur petite taille et leur capacité mémoire incitent à proposer aux élèves des activités s'appuyant sur des logiciels utilisables sur ordinateur. (Guide d'accompagnement, p.5)

On voit ici clairement soulevées de réelles problématiques liées à la programmation et non plus à l'algorithmique, telles que la rapidité d'exécution : certains logiciels ou langages de programmation présentent l'intérêt d'être plus rapides que d'autres notamment s'ils doivent effectuer un grand nombre de calculs :

> Jeu du lièvre et de la tortue : [...] L'intérêt d'un langage de programmation devient évident : l'itération est très rapide aussi bien à écrire qu'à exécuter (ce qui n'est pas le cas avec un tableur). On pourra noter, à cette occasion, que certains langages sont beaucoup plus rapides que d'autres. (Guide d'accompagnement, p.28)

Le seul endroit où une nuance est évoquée est non pas pour distinguer clairement les aspects liés à la programmation mais pour souligner simplement que l'algorithmique ne consiste pas seulement en l'écriture de programme (ce qui laisse entendre que l'écriture de programmes est partie intégrante de l'activité algorithmique). Le guide d'accompagnement précise en effet que les activités à proposer aux élèves dans le cadre de l'algorithmique doivent être variées et ne pas consister seulement à rédiger des programmes :

> La pratique de l'algorithmique ne se résume pas à l'écriture de programmes ; il serait même judicieux de ne pas commencer par là. Il convient donc de proposer aux élèves des situations, activités et organisations pédagogiques variés (…). Les travaux pratiques seront conçus dans une perspective d'action de l'élève et lui seront présentés le plus souvent possible dans un cadre plus large que celui de la simple réalisation isolée d'un programme. Ce sont notamment des travaux qui s'inscrivent dans la durée et dans une organisation individuelle et/ou collective. (Guide d'accompagnement, p.4, souligné par nous).

2.2.4. Un discours du changement des méthodes pédagogiques

Enfin, l'expression « algorithme » ou « algorithmique » est souvent accolée dans les textes officiels à une idée de changement dans les rapports de l'élève aux mathématiques mais si l'on regarde bien, ce n'est pas par l'algorithmique elle-même qu'il y a changement mais parce que l'algorithmique est dans les instructions immanquablement accolée aux outils technologiques.

> Le programme de seconde a été conçu pour être enseigné et mis en œuvre en s'appuyant assez largement sur les progrès de la science et de la technique informatique, qu'il s'agisse de logiciels ou de la pensée algorithmique. (Guide d'accompagnement, p.3, souligné par nous).
>
> L'algorithmique modifiera profondément le rapport entre l'élève et les outils ou instruments auxquels il sera confronté dans son environnement scolaire et particulièrement ceux habituellement identifiés comme issus du monde des TIC dans l'enseignement (calculatrices, ordinateurs, logiciels mais aussi les divers objets comme les appareils photos numériques, etc.).(Guide d'accompagnement, p.4, souligné par nous)
>
> L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, ouvre largement la dialectique entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement. (Programme, p.4, souligné par nous).

2.3. Conclusion sur les textes officiels

L'analyse du prescrit montre clairement une argumentation en faveur de l'introduction de l'algorithmique, appelée à être enseignée à l'intérieur des autres parties des mathématiques. Le lien originel entre les mathématiques et l'algorithmique, l'omniprésence des algorithmes, les capacités transversales de l'algorithmique à l'ensemble de l'enseignement semblent les principales raisons de ce choix de présentation. Mais ce souci d'inscrire l'algorithmique pleinement dans une activité mathématique est noyé dans une autre visée officielle, celle d'utiliser les technologies informatiques. Le domaine de l'algorithmique subit alors une tension entre « pensée algorithmique » et problématiques de programmation sans que les textes officiels n'aident les enseignants à faire la part des choses entre ces enjeux de natures différentes. Il nous semble que pour un enseignant non expert qui situerait l'algorithmique complètement du côté informatique, les programmes et documents d'accompagnement ne constituent pas une aide et contribuent au contraire à entretenir l'amalgame. Enfin, le guide d'accompagnement, structuré comme un cours et mis à la disposition des enseignants, modélise fortement un enseignement de l'algorithmique incapable de se détacher de l'implémentation informatique.

Quelle perception les enseignants de mathématiques ont-ils alors de ce nouvel enseignement suivant qu'ils associent algorithmique à mathématiques ou bien seulement à TIC, programmation et informatique ? De nombreuses études ont montré déjà la difficile intégration des TIC elles-mêmes dans l'enseignement des mathématiques (voir par exemple les travaux sur les calculatrices symboliques dans Artigue 2002 et sur le tableur dans Haspekian 2005). De manière analogue, nous faisons l'hypothèse que les enseignants associant « algorithmique » uniquement à « TIC » ou ayant des représentations de l'algorithmique comme étant trop éloignées des mathématiques, pour reprendre une idée de distance telle qu'évoquée dans (Haspekian 2005) pour le cas du tableur, intégreront difficilement cet enseignement dans leurs pratiques. A l'inverse, les enseignants ayant une représentation de l'algorithmique proche des mathématiques s'approprieront plus facilement cet enseignement. Ces hypothèses ont une importance cruciale en termes de formations. Si elles s'avèrent exactes, alors une formation sur l'algorithmique aura plus ou moins d'impact sur les pratiques suivant qu'elle situe l'activité algorithmique comme partie intégrante des mathématiques en la distinguant bien d'une activité de programmation, sans pour autant occulter cette dernière, ou bien qu'elle présente l'algorithmique d'emblée comme partie intégrante de l'informatique.

Ces questions font l'objet de notre recherche actuelle et nous n'y apportons pas ici de réponse prématurée. Nous en avons néanmoins une première idée à travers les entretiens que nous avons menés avec 5 enseignants de mathématiques quant à leurs représentations et pratiques de l'algorithmique. Ces enseignants n'ont pas été réticents à introduire l'algorithmique dans leur enseignement des mathématiques, avec cependant des motifs divers d' « adhésion ». Leurs discours montrent que la plupart ont une représentation de l'algorithmique intégrée aux mathématiques et sans confusion avec la programmation. Seul l'un d'eux rapproche fortement algorithmique d'informatique mais comme il est par ailleurs très favorable à l'intégration de l'informatique, cela n'est donc pas un frein à l'introduction de l'algorithmique, au contraire !

3. Entretiens : les enseignants face aux nouveaux programmes

Les entretiens ont concerné un échantillon très limité de cinq enseignants de mathématiques en classe de seconde, dont deux hommes (H1, H2) et trois femmes (F1, F2, F3). Ils proviennent de trois lycées différents : deux dans un même lycée, deux dans un autre et un dans un troisième. Nous donnons ci-après les analyses de ces entretiens et leurs résultats. Les pages indiquées réfèrent aux annexes de notre mémoire de Master, dans lequel figurent les transcriptions de ces entretiens (Nijimbéré, 2011).

Dans ces entretiens, on notera a priori une image plutôt positive du nouveau programme qui se révèle au final pas si nette que cela ; les tensions du programme que nous avons évoquées plus haut se reflétant dans les propos des enseignants, tension qui finit par montrer que l'algorithmique reste en débat, même chez ces enseignants a priori très volontaires. Nous terminerons évoquant des éléments de pratiques déclarés, notamment les contraintes et difficultés rencontrées.

3.1. Des représentations et des pratiques : premiers éléments

Les enseignants affichent des représentations différentes de l'algorithmique. Pour certains, l'algorithmique n'a d'intérêt en seconde que par son côté logique, la programmation n'y ayant aucune place :

> Moi, j'apprécie l'algorithmique en tant que logique. Ce qui m'intéresse moi dans l'introduction de l'algorithmique est l'introduction à la logique parce que c'est très logique l'algorithmique, je trouve que c'est très bien. Par contre, ce que je trouve totalement ridicule c’est d’aller jusqu’à la programmation pour les élèves de seconde […]. (F2, p.11-12)

Selon leurs représentations et leurs goûts pour l’informatique, d'autres enseignants vont se situer complètement, contrairement aux précédents, dans la programmation qui devient le centre de l'algorithmique :

> […] j’ai toujours apprécié l’informatique et le côté programmation surtout, c’est ça qui m’intéresse en informatique […] si je leur donne un travail par exemple à faire à la maison, un devoir où il faut construire un algorithme, ils écrivent l’algorithme puis m’écrivent aussi le programme qu’ils doivent entrer sur la calculatrice. […] il y en a qui, tout de suite, se sont passionnés pour la chose et qui arrivent très bien à faire un programme, assez simple à réaliser quoi ! […] (H1, p.8)

La conception de H1 de l’algorithmique détachée des mathématiques et proche de l’informatique se confirme par la suite, lorsqu’il évoque le travail qu’il a fait faire à ses élèves d’écrire l’algorithme qui calcule les coordonnées du milieu d’un segment :

> C'est pas parce qu'on va utiliser l'algorithme que ça dispense de connaître à temps les mathématiques, puisque on a besoin quand même de, pour connaître les coordonnées du milieu, de savoir qu'il faut additionner les coordonnées des extrémités et diviser par deux, donc faire la demi-somme. Ben, si on sait pas ça on peut pas avancer ! (H1, p.10)

Les propos de H1 montrent clairement que dans sa conception, la partie « algorithme » de ce travail n’est pas considéré comme faisant partie des mathématiques telles qu’il les entend : le travail mathématique qui est nécessaire se situe en amont : savoir additionner les coordonnées des extrémités et diviser par deux pour connaître celles du milieu.

Les représentations qu'ont les enseignants sur l'algorithmique influencent son enseignement. Pour F3, H1 et H2, des exercices concernant la construction des algorithmes simples et leur programmation de la calculatrice sont déjà proposés aux élèves. F3 raconte :

> Dans le cas de la résolution de problème, les élèves doivent être capables d’écrire un programme permettant un calcul, un programme calculant et donnant la valeur d’une fonction ainsi que les instruction d’entrée sortie nécessaires au traitement. (F3, p.5)

Les pratiques d'enseignement sont diverses. Trois d'entre eux F1, F2 et H1 introduisent directement les notions algorithmiques dans d'autres parties du programme. Comme en témoigne F2 « Il n'y a pas de séance d'algorithmique » (F2, p.15)

Contrairement à eux, les deux enseignants, F3 et H2, introduisent l’algorithmique dans quelques séances préalables dites de « familiarisation », consacrées à l'enseignement des notions algorithmiques qui seront par la suite utiles dans les chapitres du programme.

Les contenus algorithmiques à enseigner semblent bien identifiés de tous les enseignants interviewés. Prévus pour tout le lycée, ils vont de la notion de variable aux boucles itératives en passant par les instructions simples, mais aussi leur utilisation dans la résolution des problèmes. Une différence revient à l'appréciation de chaque enseignant concernant des notions à aborder dans chaque classe. F3 revient sur ces contenus et explique ce qu'elle compte aborder en seconde :

> […] ce qu'on est sensé apprendre aux élèves de seconde sont les instructions élémentaires d'affectation, calcul d'entrée sortie. […] On a aussi la boucle itérative, c'est à dire faire

> faire des petites instructions en boucle et puis les instructions conditionnelles donc les élèves dans le cas d'une résolution de problème. Il doit être capable de programmer un calcul itératif dont le nombre d'itérations est déjà donné, de programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif avec une fin de boucle conditionnelle. Voilà ça, c'est pour le lycée or je vais probablement cette année en seconde peut être abordé les deux. Je ne sais pas si je vais aller jusqu'à l'instruction de boucle. (F3, p.5-6)

Pour s'y retrouver dans les contenus, les textes officiels n'aident pas. Dans les ressources utilisées, on trouve plutôt une domination des manuels. Dans leur préparation des cours en rapport avec des notions algorithmiques, tous les enseignants disent avoir, pour s'aider, davantage recours aux manuels scolaires qu'aux textes officiels. Trois principaux manuels « Maths x », «Transmath » et « Repères » sont les plus utilisés :

> Essentiellement le livre parce qu'il est bien fait ! (F2, p.4)
> J'ai trouvé un peu plus difficile sur l'algorithmique le guide d'accompagnement par rapport à nos élèves, un peu trop ambitieux par rapport à nos élèves. J'ai trouvé des choses beaucoup plus simples dans les livres après. (H1, p.4)

Si un seul enseignant dit n'avoir pas besoin d'autres ressources en plus des manuels pour sa préparation (H2, p.6) : « Moi, il me semble que c'est suffisant ! », d'autres au contraire, complètent les manuels par d'autres ressources. Quatre d'entre eux consultent, en complément du manuel, différents sites Internet : sites personnels de leurs collègues, ou d'autres professeurs, sites d'associations d'enseignants comme l'APMEP. Ils affirment néanmoins qu'ils n'ont pas de site privilégié (H1, p.4). Deux enseignants, F1 et F3 s'inspirent aussi des cours des autres niveaux d'enseignement, notamment de terminale L ou d'université, le cas échéant. Dans leur préparation, ils se préoccupent à prévoir une activité simple, intéressante et concrète qui leur permet d'introduire des notions algorithmiques à enseigner. Les activités prévues (exercices, figures...) sont polycopiées pour permettre à chaque élève d'avoir sa copie afin de bien suivre en classe.

3.2. Une tension qui se reflète dans les propos des enseignants

Les enseignants ressentent le caractère obligatoire des outils informatiques dans ce nouveau programme :

> Jusqu'au nouveau programme, il est conseillé d'utiliser le matériel informatique, maintenant, ce n'est plus un conseil, c'est une obligation ! Parce qu'il faut qu'absolument les élèves aient une familiarité avec l'outil informatique. Alors, moi, je le fais à travers tous les logiciels qui sont géoplan, géospace et puis géogebra, là ça sera essentiellement la partie géométrie, […] et puis une partie calculatoire avec la TI et puis je vais utiliser Excel. (H2, p. 2-3)

L'utilisation des logiciels dépend de la partie du cours en question. La géométrie et la statistique semblent les domaines du programme qui amènent le plus les enseignants à aller dans la salle informatique. Mais l'utilisation de l'ordinateur pour les notions algorithmiques est quasi absente pour les enseignants interrogés ici, seule la calculatrice est utilisée. Par exemple, F2 projette l'usage de la salle informatique pour l'algorithmique plus tard dans l'année et F1 ne compte pas l'utiliser en 2nde l'année en cours. Pour les enseignants qui ne l'utilisent pas, des raisons diverses sont données. F1 par exemple explique :

> Pour l'instant, je n'ai pas fait de séance en salle informatique, je n'ai fait que des exercices en classe. […] parce que ces salles sont prises en priorités par les Terminales STGM (Sciences technologies gestion et mécanique). Ils sont prioritaires et moi, je ne

> peux y emmener que la demi-classe. Je peux pas emmener 35 élèves dans une salle d'ordinateurs, je ne peux pas. Je n'ai pas beaucoup de choix, tous les mardis matins, toutes les salles sont réservées et je ne les emménerai jamais cette année. (F1, p.4)

La mise en demi-groupe des élèves en salle informatique semble une pratique commune des enseignants. Deux raisons sont données : l'insuffisance des postes informatiques, et surtout la volonté d'un bon encadrement des élèves en travail individuel, sont principales (H2, p.8). La calculatrice est alors plus accessible comme outil pour tester l'exactitude sinon des algorithmes du moins de leur programmation, tout en soulignant qu'elle ne remplacera jamais une démonstration mathématiques papier-crayon :

> Ça introduit un objet qui fait foi, la calculatrice. […] le professeur va s'appuyer là-dessus. Il dira « tu vois, t'as mal programmé les choses parce que la calculatrice te répond pas correctement ! ». (H1, p.10)
> […] pouvoir constater par soi-même qu'on s'est trompé avec la calculatrice. (H1, p.3)
> […] l'outil informatique est une aide, ça ne remplacera jamais une démonstration mathématique. Ça leur permet de voir si oui ou non, ce qu'ils ont fait est juste. (H2, p.10)

3.3. Une tendance à la résistance des enseignants

Le manque de formation et les contraintes matérielles, techniques et un travail excessif que nous verrons au §3.4 sont surtout les principales difficultés des professeurs. Néanmoins, une forme d'inquiétude des enseignants de mathématiques, révélatrice d'une certaine résistance à l'enseignement de l'informatique, accompagne ces contraintes. L'enseignante F1 s'exprime à propos :

> La crainte c'est qu'on devient de plus en plus prof d'informatique alors qu'on pouvait être prof de maths sans faire l'informatique. Donc il y a cette inquiétude là mais je trouve que si on se contente de l'approche de l'algorithmique, ça peut au contraire être profitable aux élèves et ça peut leur apporter quelque chose pour faire des maths. (F1, p.6)

Mais alors pourquoi utiliser les TIC ? La raison principale semble être que l'utilisation des outils informatiques motive les élèves. Cette motivation, bien que soulignée par tous les enseignants, est variable. Un d'eux, H2, précise qu'elle est limitée seulement à la partie informatique du cours et se perd en revenant au travail « à la main » des mathématiques :

> […] je leur fais suffisamment d'exercices. S'il n'y avait pas la partie informatique, alors là, ça serait la désolation ! Ils veulent utiliser cet outil-là quoi ! […] Voilà, de taper le programme mais avant de taper un programme, il faut qu'on cherche, il faut qu'on sache quel type de traitement […]. (H2, p.14)

Certains élèves de H1 et F3, motivés, sont déjà capables de construire de petits algorithmes et de les faire tourner sur une calculatrice. Pour H1, certains de ses élèves ne sont pas seulement motivés par l'usage des outils informatiques, mais, sont aussi passionnés pour l'algorithmique. Cette situation a d'effets sur leurs apprentissages des mathématiques :

> Ban, oui, oui, oui, il y en a qui, tout de suite, se sont passionnés pour la chose et qui arrivent très bien à faire un programme, avec un algorithme assez simples à réaliser quoi ! Ban, c'est le cas par exemple, on a fait les coordonnées du milieu d'un segment, un algorithme qui pourra, ayant donné les coordonnées des extrémités, nous donne les coordonnées du milieu par exemple. Bon, ça, il y en a qui ont fait très très rapidement. (H1, p.8)

3.3. L'algorithmique en débat

Tous les enseignants interviewés placent l'algorithmique au service des mathématiques. Leurs appréciations positives de ce programme concernent d'une part, le caractère innovant de l'algorithmique d'autre part, son caractère formateur. Mais dans les deux cas, les discours des enseignants montrent que ces caractères sont pensés en relation avec les outils et la programmation des algorithmes.
Le caractère innovant participe au renouveau des mathématiques :

> J'aime la nouveauté, je suis un prof particulier, j'aime ce programme. J'ai 57 ans, j'ai encore 5 ans à faire. Ce programme me plaît parce qu'il introduit la nouveauté dans mon métier, je n'ai aucune raison de le rejeter parce que j'ai horreur de la routine ! (F3, p.11)

Mais il est immédiatement après mis en regard du manque de mesures matérielles d'accompagnement :

> […] Le programme est innovent mais ne s'accompagne pas de mesures matérielles qui permettent l'égalité de chances de tous. (F3, p.19)

Le caractère formateur pour acquérir esprit logique et rigueur :

«ça peut obliger à avoir un peu plus de rigueur dans leur façon de raisonner, de bien détailler chaque étape. (…) Peut être que ça leur a donné un peu plus de rigueur dans leur travail » (F1, p.7)

Mais là encore associée à la calculatrice :

> Je crois que l'algorithmique au démarrage est surtout une gymnastique pour faire des petits raisonnements rigoureux, pour pouvoir constater par soi-même qu'on s'est trompé avec la calculatrice. (H1, p.3)
> […] Le professeur va s'appuyer là-dessus. Il dira « tu vois, t'as mal programmé les choses parce que la calculatrice te répond pas correctement ! ». (H1, p.10)
> Ça leur permet de voir si oui ou non, ce qu'ils ont fait est juste. (H2, p.10)

La place accordée à l'algorithmique dans le programme est plutôt contrastée : en général petite, de l'ordre de 10 %, elle varie selon le rapport personnel de chacun des enseignants à l'algorithmique. Pour les uns, elle est une aide parmi les autres et ne changera pas fondamentalement beaucoup de choses dans le rapport des élèves aux mathématiques. Pour les autres, elle apporte un renouveau dans l'enseignement des mathématiques et une motivation des élèves. Le professeur F3 donne son point de vue :

> J'y accorde du poids, enfin du poids, un petit peu, parce que ça fait la nouveauté, c'est des choses qui sont concrètes. […] moi, je dirai que, si vous voulez, dans les programmes, le poids est un peu fonction des dadas des profs. Je suppose que vous avec dû interviewer des passionnés de l'algorithmique : ben eux, ça va devenir le centre de leur programme de seconde. (F3, p.8)

Malgré la volonté d'innover en introduisant l'algorithmique et l'informatique dans l'enseignement, des critiques du programmes ne manquent pas chez les enseignants. F3 évoque les difficultés de l'autorité compétente en matière de la mise en place des programmes d'enseignement, des choix de priorités entre « tête bien faite et tête bien pleine » pour proposer des programmes raisonnables afin de sortir de la « culture de mille feuilles » en France. Selon elle, des programmes, à la fois innovants et surchargés, mettent les enseignants dans la course permanente sans fondamentalement changer grand chose. F2, compare ces réformes incessantes à un « amusement » du fait qu'elles ont lieu sans études préalables des effets des programmes précédents. Trois des enseignants, F1, F2 et H1, s'interrogent sur le caractère plus formateur de l'algorithmique pour les élèves que celui de la géométrie, du fait que cette dernière s'est vue amputée d'une grande partie de ses contenus au profit de l'algorithmique.

Et finalement, au fil des entretiens, les enseignants reviennent même sur l'idée de renouveau au départ positivement perçue. A la question de savoir si l'introduction de l'algorithmique et des outils informatiques vont changer le rapport des jeunes aux mathématiques, les enseignants ne sont pas tout à fait d'accord. Selon H1, ces outils ont une condition vitale et efficace en mathématiques après le travail papier et crayon :

> Bon, moi j'en suis pas persuadé que la culture mathématique… On n'est pas toujours avec un ordinateur sur soi, une calculatrice avec soi, donc dans ces moments-là. Il faut toujours avoir un papier et un crayon sur soi pour pouvoir faire le travail. Si on sait pas le faire avec le crayon et le papier, on sera toujours démuni. Disons que ça peut être une aide parmi d'autres mais je pense pas qu'on n'a pas à attendre la panacée quand on ne sait pas, parce qu'il y a toujours ce côté recherche, rigueur, se casser la tête qu'on aura toujours en mathématiques quels que soient les supports qu'on a à faire face. (H1, p.11)

Et on finit par se demander si ça a un intérêt, tant, pour les enseignants interrogés, l'algorithmique pose également beaucoup de difficultés conceptuelles et peut paraître prématurée pour les élèves de seconde :

> Il me semble que c'est un peu dur quand les élèves sont un peu plus âgés, peut être que je me trompe. Il me semble que là on les prend un peu jeunes et que c'est un peu dur pour eux. Pourquoi non plus ne pas les faire faire des choses un peu dures, je sais pas vraiment si ça a un intérêt. (F2, p. 14)

3.4. Les pratiques : contraintes et difficultés rencontrées

La mise en œuvre de ce programme occasionne des contraintes et difficultés nouvelles. La perte de temps dans la mise en place des matériels didactiques informatiques qui doivent être déplacés, beaucoup de temps exigé par les notions algorithmiques au détriment des autres notions mathématiques, plus de temps de travail qu'avant; manque de matériel didactique et le travail excessif... sont les quelques-unes des difficultés soulevées par les enseignants.

3.4.1. Un surcroît de travail pour les enseignants

Certains enseignants trouvent le temps de travail largement augmenté avec ce nouveau programme de mathématiques de seconde. Les expressions comme « augmenté considérablement », « tension permanente », « quasiment étranglé », sont utilisées par les enseignants F3 et H1 pour qualifier l'augmentation de leur temps de travail avec ce programme. F3 témoigne :

> C'est clair et net, ça je vais le témoigner, c'est vraiment très important à le dire à tout le monde. Moi, j'ai vraiment une pratique professionnelle de 35 ans, [...] l'introduction de l'informatique et de l'algorithmique, nous a, en tant que profs de mathématiques, augmenté considérablement le temps de préparation. Donc, actuellement, nous sommes quasiment étranglés ! (F3, p.21)

H2 explique comment il passe assez de temps à la correction des travaux d'élèves :

> Moi, j'ai beaucoup de difficultés à corriger des erreurs mathématiques, etc. Sur l'écran. Comme j'ai pas d'imprimante chez moi, je le fais au lycée. Je l'imprime au lycée, je le lis et je fais mes corrections sur ça. Ça, ça prend du temps que si je le faisais sur papier, mais bon, c'est pas de difficultés insurmontables ! (H2, p.14)

3.4.2. Un manque de formation en algorithmique

Bien que les enseignants soient satisfaits de ce programme, ils affirment ne pas disposer de formation requise pour l'enseigner. En effet, sur les cinq enseignants qui ont participé aux entretiens, ont une formation universitaire, deux seulement sont formés en informatique. Les trois autres ont une formation universitaire en mathématiques avec quelques connaissances en informatiques acquises en tant qu'autodidactes :

> Je fais partie de la génération des profs qui a vécu et qui a aimé les maths à travers le programme du groupe Bourbaki […] j'ai aimé les maths parce que moi à mon époque il y avait une réforme et non seulement on nous enseignait au fait les programmes extrêmement théoriques en algèbre et du coup l'algorithmique est, pour moi, totalement décalée par rapport à ma formation initiale. […] je me sens compétente en algorithmique beaucoup moins puisque la formation que j'ai est une formation d'autodidacte. (F3, p.2-3)

D'autres enseignants, par manque de formation, sont obligés à travailler durement pour se former et s'informer. C'est le cas de cet enseignant qui explique sa situation de la formation en informatique et comment il essaie de la gérer :

> Ah, essentiellement en autodidacte, dirais-je. La formation, bon, parce que, moi, j'ai quitté il y a pas mal d'années la fac qu'à l'époque il n'y a tellement de cours d'informatique où après j'ai participé à quelques formations au sein de la MAFPEN, le dispositif de stage sur trois ou quatre jours dans l'année. Mais, bon, ça passe très loin quoi ! On est obligé de travailler par semaine énormément quoi ! Surtout donc, avec des livres et avec des collègues qui ont passé du temps sur les logiciels, qui connaissent et qui peuvent t'indiquer comment on pourrait l'utiliser quoi. (H1, p.2)

3.4.3. Des insuffisances techniques et matérielles

Certains enseignants affirment travailler dans des environnements matériels difficiles. Le manque d'ordinateurs en nombre suffisant dans les salles informatiques, la non disponibilité de la salle quand ils en ont besoin et les pannes techniques qui restent non réparées, sont les principaux problèmes mis en évidence. Si F2 affirme ne pas avoir de difficultés majeures avec les matériels didactiques utilisés, tous les enseignants soulignent qu'il faut d'abord réserver à temps la salle informatique parce que sollicitée par leurs collègues. Le manque des personnels de maintenance rend aussi le peu de postes disponibles non utilisables faute de réparation.

3.4.4. L'algorithmique, difficultés conceptuelles des élèves et pratiques d'enseignants : premiers éléments

Les difficultés rencontrées par les élèves en algorithmique sont surtout d'ordre conceptuel. Les enseignants interrogés comparent les difficultés des élèves en algorithmique à celles habituellement vécues par les élèves débutants en algèbre et en géométrie. Suites à ces difficultés conceptuelles chez certains, H1 craint à d'éventuels écarts entre élèves, créés par l'algorithmique, comme c'est le cas dans certaines autres parties des mathématiques, dont la géométrie :

> […] en donnant des exercices où on doit avoir à construire un algorithme, où on doit avoir à programmer. C'est ce qui est en train de se mettre actuellement en place. Donc, il y en a qui déjà ont un bon niveau de pratique : en quelques minutes, certains arrivent à programmer leur calculatrice, à faire que leur algorithme tourne. Ils arrivent à donner des donner aux variables de façon intelligente... alors que d'autres ont, à peine débuté quand les autres finissent (rires). Je crois que l'algorithmique risque de créer autant de différences que l'enseignement de la géométrie, pareil ! (H1, p.7)

F2 quant à elle rapproche ces difficultés conceptuelles nouvelles des élèves à celles posées non pas par la géométrie mais par l'algèbre au collège :

> Curieusement, pour des gamins qui sont habitués à manipuler les ordinateurs, l'algorithmique leur pose de vrais problèmes, je dirais conceptuels […]. Finalement l'algorithmique leur fait le même effet que l'algèbre en 4e. [...] c'est le genre de difficulté conceptuelle qui est vraiment difficile à mesurer. (F2, p.12)

Pour certains enseignants, une autre difficulté des élèves en algorithmique est l'agencement de leurs idées pour pouvoir résoudre un problème. Cette difficulté, liée à la précédente, consiste à associer les différentes actions élémentaires pour constituer un tout cohérent. H1 s'exprime en donnant aussi quelques raisons à l'origine de cette difficulté :

> Je crois que c'est mettre en ordre la pensée toujours, arriver à construire un schéma rigoureux pour pouvoir arriver au résultat qui est demandé ! Alors déjà, il y a en beaucoup qui n'ont pas compris la consigne, qui ne savent pas à quel résultat on doit aboutir. (H1, p.10)

Selon H2, les difficultés des élèves en algorithmique se situent au niveau de la construction de l'algorithme, ici pis au sens directement de « programme » :

> Il y a le programme purement informatique qu'ils devraient taper et tout ce qui est traitement, tout ce qu'il faut faire, etc. Pour eux, c'est toujours le barrage insurmontable, eux, ce qu'ils voudraient c'est qu'on donne directement le programme. (H2, p.10)

Une affectation des variables qui pose problème

Une des notions conceptuelles d'algorithmique qui semble difficile à appréhender par les élèves (et les enseignants) est la notion d'affectation de variables. Une enseignante qui a choisi de passer beaucoup de temps avec les élèves au travail « à la main » sur des notions algorithmiques, affirme avoir déjà fait quelques structures que ça soit les structures de branchement ou itératives. Elle précise que ses élèves ont eu des difficultés à comprendre l'opération d'affectation :

> J'ai commencé très simple, puis petit à petit j'ai commencé doucement des algorithmes tous simples « faire ceci », « faire cela », « afficher » , « terminer »... Prend la valeur x étal temps, dans le livre, ils l'appellent ça prend la valeur, le fait d'affecter quelque chose. Ça, ça leu a posé curieusement de problèmes le fait de mettre une donnée dans une zone. Après on a passé un temps sur « Si... Alors... Sinon » puis aux boucles « Pour » et « Jusqu'à ». (F2, p.4)

On notera que là encore dans sa description, l'instruction propre à la programmation « afficher » est citée sans discernement à côté des autres notions. L'enseignante a-t-elle conscience d'être d'emblée dans la programmation ? Est-ce ce qu'elle a souhaité ? Pourtant F2 est bien celle qui disait (voir §3.1) « trouver totalement ridicule d'aller jusqu'à la programmation »...

Face à ces difficultés, les enseignants adoptent alors quelques changements dans leurs pratiques.

En salle de classe, des exercices concernant la lecture, la compréhension, la correction, la complétude et la modification d'un algorithme et l'exécution d'un algorithme avec des valeurs données, sont proposés en pratique aux élèves par tous les enseignants. A ce propos, celle-ci s'exprime :

> Soit on lit des algorithmes, on les comprend, on les complète, ou on les corrige, je n'en ai pas encore écrit un. J'ai fait un exercice sur les modifications d'un algorithme, ça c'est

> bien passé. […] Quelques fois ce sont des algorithmes qui sont faux qu’il faut corriger, quelques fois ce sont des algorithmes incomplets qu’il faut compléter, quelques fois ce sont des questions de type « que fait cet algorithme ? ». (F3, p.3)

Une pratique de « devoirs à la maison »

Tous les enseignants axent beaucoup sur le travail à la maison (sous forme individuelle le plus souvent). Mais pour les uns, ce sont des exercices d'application à l'instar de F2 alors que d'autres donnent des exercices qui demandent un peu plus de réflexion. H2 explique ses prescriptions :

> […] quand je donne un exercice en devoir à la maison, je le trouve dans la partie du livre qui s'appelle « exercices d'approfondissement » où là vraiment il y a une petite recherche à faire, c'est pas une simple application. (H2, p.11)

Les élèves se retrouvent ainsi avec beaucoup de travaux à faire à domicile. Là encore, la forme et les outils à utiliser changent selon les représentations des enseignants. Si pour certains, les travaux à faire à domicile peuvent nécessiter la programmation de la calculatrice, pour d'autres, ils sont limités à des travaux à faire « à la main ». H1, intéressé par la programmation explique ce qu'il fait :

> […] si je leur donne un travail par exemple à faire à maison, un devoir où il faut construire un algorithme, ils écrivent l’algorithme puis m’écrivent aussi le programme qu’ils doivent entrer sur la calculatrice. Ce sont de petits programmes en cours de démarrage […] mais, même en fin d‘année, ça ne prendra pas plus de 7 lignes les programmes tels que je les vois dans les manuels. (H1, p.7)

Contrairement à H1, F2 justifie pourquoi elle se limite seulement aux travaux maison à faire avec du papier et crayon :

> […] Je peux pas leur donner un exercice à faire sur calculatrice à la maison, c'est pas raisonnable. Je leur demande de faire des exercices qui sont sur papier pour l'instant et je peux même pas demander de faire des exercices sur ordinateur non plus. Je ne sais pas ceux qui ont un ordinateur, et donc, je ne peux pas leur donner un exercice à faire à la maison que sur papier. (F2, p.10)

Une entrée en douceur pour les élèves, favorable par une activité

Pour les enseignants interrogés, les élèves ont des difficultés à assimiler les connaissances algorithmiques données théoriquement. Si l'assimilation est difficile, la transmission est aussi difficile pour les enseignants lorsque l'enseignement est fait sous forme de cours, décontextualisé des autres parties du programme. Selon les enseignants interrogés, introduire ces notions par une activité semble moins difficile pour les élèves :

> C'est pas facile mais si on explique, ils arrivent à comprendre : […] de toute façon, c'est plus facile que de faire un cours. Je me suis aperçu que c'est mieux. J'ai testé les deux : faire un cours en disant il se passe ceci, puis cela, ça passe pas, ils en ont pas l'habitude, ils ne comprennent pas bien ! C'est comme, c'est un peu comme si je démarrais l'algèbre quoi ! J'ai rencontré le même genre de difficultés que j'ai rencontrées quand j'étais en collège quand je démarrais l'algèbre. (F2, p.8)

Les enseignantes F1 et F2 ont choisi de passer beaucoup de temps à faire travailler leurs élèves sur des exercices sous forme de travaux dirigés ou pratiques « à la main » avec du papier et du crayon. L'écriture d'un algorithme est rare, et encore plus la programmation d'un algorithme sur un logiciel. F2 trouve cette façon de faire efficace pour aborder les concepts algorithmiques :

> […] on fait beaucoup d'exercices, on lit des algorithmes, pour l'instant, on s'est pas rendu une seule fois en salle informatique pour les écrire, j'attends ! […] la prochaine étape, je vais demander d'en écrire quelques uns quand on aura fini de lire et d' analyser ceux qu'on a, je leur demanderai d'en écrire les plus faciles sur papier et on ira les faire en salle informatique. Je vais longuement passer sur cette étape d'écrire par crayon […]. (F2, p. 4)

De nouvelles pratiques d'évaluation

L'introduction de l'algorithmique et les outils relatifs proposés pour cet enseignement des mathématiques n'ont pas seulement influencé les pratiques de préparation et d'enseignement, mais aussi celles d'évaluation. Les enseignantes F2 et F3 témoignent de leurs pratiques en ce sens. Selon F2, l'algorithmique, comme son enseignement, est évaluée de façon transversale :

> […] j'ai pris l'habitude et dans chaque contrôle, je mets un exercice d'algorithmique, des choses simples évidemment, du type « que fait cet algorithme ? ». J'ai pas encore demandé de faire des corrections d'algorithmes. (F2, p.5)

Des changements dans le système de notations traditionnelles des copies d'évaluation des élèves sont aussi adoptés, et les notes chiffrées ne sont plus d'actualité dans ce nouveau programme. A ce propos, F3 témoigne :

> Moi, j'ai modifié la manière de corriger : je ne note plus... ces copies ne sont plus notées au quart de point près. […] maintenant, je note avec le codage des lettres A, B, C, D. Un élève dont je sais qu'il ne maîtrise pas, qui est quand même allé au CDI, je peux pas lui mettre D, je le mets B en disant « c'est bien » pour l'encourager mais, je suis obligée d'utiliser un système pour lui montrer que tout n'est pas parfait […]. (F3, p. 21)

3.5. Conclusion sur les entretiens

Pour les professeurs interviewés, l'enseignement des notions algorithmiques en classe de seconde s'installe petit à petit. Dans les pratiques de classe, l'algorithmique est enseignée à l'intérieur des autres parties du programme de mathématiques sans constituer de chapitre à part. Dans une leçon, ces notions sont introduites par une activité, non nécessairement mathématique, mais bien choisie au cours de la préparation. Cette dernière utilise essentiellement les manuels, complétés par les ressources en ligne des collègues ou avec leurs échanges directs.

Une différence fondamentale des pratiques d'enseignement de ces notions permet de classer les enseignants interviewés en deux groupes : celui de deux enseignants, d'un même lycée, qui ont quelques séances de cours formels. Pour eux, ces séances sont une occasion pour introduire ces notions théoriques et pour amener les élèves à se « familiariser » avec elles avant qu'ils n'interviennent dans les autres parties du programme. Un autre groupe est celui de trois autres, de deux lycées, qui n'ont pas ces séances théoriques de l'algorithmique. Ces derniers introduisent progressivement et en douceur ces notions et les expliquent directement sur le tas au fur et à mesure qu'il s'avère opportun de les introduire à travers une activité dans les différentes parties du programme.

L'essentiel des activités proposées concerne surtout des exercices « à la main » sur des algorithmes donnés. Certains algorithmes sont ensuite programmés et exécutés sur une calculatrice, qui occupe une place centrale dans les pratiques de classe des élèves. Des écarts dans les pratiques informatiques des élèves sont notables : elles sont en relation avec le rapport personnel de l'enseignant avec l'algorithmique. Certains vont jusqu'à la construction de petits algorithmes et de leur exécution sur la calculatrice alors que d'autres, en plus du travail au papier-crayon, programment la calculatrice pour des algorithmes proposés. Ces différences de mises en activité des élèves sont conséquentes des représentations des enseignants de ce qu'est l'algorithmique. Par contre, ceux ayant de l'algorithmique une vision de la programmation, ont déjà proposé à leurs élèves des exercices dont ils doivent concevoir eux-mêmes des algorithmes simples avant de les programmer et les exécuter sur leurs calculatrices. Les autres insistent, en classe comme en devoir maison, sur le travail en papier-crayon des élèves si bien que la calculatrice est quelques fois utilisée mais peu. Pour tous ces enseignants, il n'y a pas d'usage d'un langage ou d'ordinateur avec l'algorithmique, la salle informatique est ainsi réservée à d'autres parties du programme de mathématiques. Bien que l'algorithmique n'occupe qu'une petite place, environ 10% du programme selon les dires des enseignants, elle exige plus de temps de travail des enseignants, en préparation, en enseignement en classe comme dans la correction des travaux d'élèves : certains enseignants se disent débordés.

Les effets notés par les enseignants sont, grâce à l'usage des outils informatiques que ce nouveau programme véhicule, la motivation des élèves, même une passion pour certains, un travail sur la preuve, l’outil aidant la vérification, les calculatrices « font foi » pour reprendre l'expression d'un des enseignants. A côté de ces effets positifs, l'algorithmique pose aussi de sérieuses difficultés conceptuelles déjà notées dans de précédentes recherches (voir par exemple Rogalski, 1985) : logique, rigueur, déconstruction d'un problème en éléments élémentaires... Les difficultés d'affectation des valeurs dans les variables, soulevées par les enseignants, chez les élèves sont par exemple bien confirmées dans le travail de Nguyen (2005).

La mise en œuvre de ce programme ne manque pas de contraintes mais aussi de difficultés du côté des enseignants comme des élèves. Les contraintes ressenties telles que l'usage obligé des outils informatiques dans un contexte généralisé de manque de formation surtout en informatique sont avancées par les enseignants comme des arguments qui limitent leur épanouissement dans l'exercice de leur travail.

4. Discussion et perspectives

Deux ans après la mise en œuvre de ce nouveau programme, l'enseignement des notions algorithmique est variable chez les enseignants et laisse voir beaucoup d'écarts avec les textes officiels.

Les résultats obtenus ne sont pas généralisables parce que, d'une part, la population expérimentale est trop petite pour représenter la population enseignante de mathématiques en seconde, et d'autre part, les enseignants interrogés avaient une longue ancienneté (plus de 10 ans d'expérience). Nous supposons que cette variable «ancienneté» dans le métier peut influencer le rapport enseignant/algorithmique, ce qui peut conduire à d'autres résultats avec des enseignants plus jeunes dans le métier. De plus, les enseignants interviewés se sont proposés volontaires, ce qui peut laisser supposer que l'étude a porté sur un groupe particulièrement motivé, et donc non représentatif de la population enseignante concernée. Enfin, la recherche n'a pas suffisamment eu de temps et s'est contentée seulement des entretiens avec les enseignants. Une recherche plus vaste convoquant, en plus des entretiens, des observations systématiques des séances de cours, aussi bien en classe qu'en salle informatique, mais aussi analysant à fond les manuels scolaires, et croisant avec les apprentissages des élèves, est nécessaire. Nos perspectives de recherche portent également sur l'observation de formations et de leurs effets sur les pratiques.

En effet, comme nous l'avons vu, pratique de l'algorithmique et écriture de programmes sont indistinctement mêlés et l'analyse des instructions officielles montrent que les programmes et documents d'accompagnement eux-mêmes entretiennent la confusion, étant régulièrement ponctués d'aspects technologiques.

Nous voyons dans les analyses des entretiens effectués que cette pollution technologique n'aide pas les enseignants à clarifier ce qui relève des mathématiques de ce qui relève de la programmation informatique. Nous l'avons constaté avec les cinq enseignants interrogés ici qui, dans leurs propos, naviguent entre ces deux aspects, confondent même parfois les deux en ne signalant jamais par exemple une nette prise de conscience des distinctions entre une activité algorithmique d'un point de vue mathématique et des questions liées aux interactions avec un utilisateur.

Bien qu'ils restent cependant majoritairement volontaires pour s'approprier ce programme, nous faisons l'hypothèse que pour d'autres enseignants, cette pollution technologique peut ne pas aider non plus, en amont même, à adhérer à cette partie du programme. Des effets de « résistance » devraient pouvoir s'observer, suivant que les conceptions des enseignants sur l'algorithmique sont plus ou moins proches des mathématiques ou de l'informatique. Les enseignants de mathématiques montrent en effet des difficultés à intégrer les outils informatiques et ces difficultés ont été analysées en didactique des mathématiques (voir Artigue 2002) comme provenant de la non neutralité de ces outils sur les mathématiques à enseigner (techniques, objets et symbolisations modifiées, apparition de nouveaux objets et symboles, de nouvelles techniques…). Dans le cas du tableur, nous avons avancé, dans (Haspekian 2005), l'idée que les résistances des enseignants seraient dues à une trop grande distance, dite instrumentale (générée par l'instrument), entre les mathématiques telles qu'ils les conçoivent et celles que font vivre l'instrument. Des aspects sociaux, culturels et épistémologiques contribuent à créer de la distance. L'algorithmique n'est pas un « nouvel outil », mais un nouveau domaine à enseigner, en ce sens, elle ne génère pas elle-même une distance comme le fait l'outil tableur, mais si elle est, dans les conceptions des enseignants, plus proche de l'informatique que des mathématiques, des phénomènes de résistance analogues à ceux créés par la distance instrumentale devraient pouvoir s'observer. Les enseignants se sentiraient tout aussi « complexés » ou peu « légitimes » à enseigner l'algorithmique et nous avons vu avec le tableur à quel point ce sentiment de légitimité a un rôle dans les questions d'intégration du tableur. Ces hypothèses font l'objet de notre travail en cours et interrogent d'emblée les formations. En effet, l'approche adoptée quant aux contenus de formations en algorithmique serait alors cruciale pour que les enseignants adhèrent et par suite s'approprient cette partie du programme. Une formation axée sur des aspects techniques, des langages de programmation, sans mise à distance avec l'informatique, ni mise en exergue de ce qui relève de l'activité algorithmique mathématique par rapport à ce qui relève du monde de la programmation et des machines serait a priori moins efficace à « décomplexer » les enseignants. La formation des enseignants longtemps évoquée dans beaucoup de recherches (Baron et Bruillard, 2011) est la seule à rapprocher les représentations et les pratiques des enseignants.

REFERENCES

Artigue, M. (2008) L’influence des logiciels sur l’enseignement des mathématiques : contenus et pratiques, Actes du séminaire DGESCO de février 2007, http://eduscol.education.fr/D0217/actes_math_et_tice.pdf

Artigue, M. (2002) Learning mathematics in a CAS environment : The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, 245-274.

Baron, G.-L. et Bruillard, E. (2011) L'informatique et son enseignement dans l'enseignement scolaire français : enjeux de pouvoir et de savoirs In J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dirs.) : Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique : technologie, sciences, mathématiques (pp.79-90). Paris : De Boeck,

Darricarrère, J. et Bruillard, E. (2010) Utilisation des TIC par des professeurs de mathématiques de collège : discours et représentations. Bulletin de la Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences, 39.

Haspekian, M. (2005) Intégration d’outils informatiques dans l’enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs. (Thèse de Doctorat, Université Paris 7, France. tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011388/en/

Ministère de l’Education Nationale (2009) Programme d’enseignement des mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Bulletin officiel N°30 du 23 juillet 2009.

Ministère de l’Education Nationale (2009) Guide d’accompagnement pour la classe de Seconde : algorithmique. DGESCO.

Modeste, S. (2009) La place et le rôle de l'algorithme dans l'enseignement : vers un apprentissage de la preuve. Mémoire de Master, Université Joseph Fourier – Grenoble, p.69

Modeste, S., Gravier, S., Ouvrier-Buffet, C. (2010) Algorithmique et apprentissage de la preuve. *Repères-Irem, 79*.

Nguyen, C-T. (2005). Etude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Nijimbere, C. (2011) L’enseignement de l’algorithmique en classe de seconde en France : étude exploratoire, Mémoire tutoré de Master 2, ENS de Cachan.

Rogalski, J. (1985) « Alphabétisation informatique », *Bulletin APMEP, 347*, 61-74.

Vagost, D. (2010) L’algorithmique en seconde : un exemple de mise en œuvre dans la classe. *Bulletin APMEP, 486*.

Manuels

Barra, R. & al. (2010) Transmath. Paris Nathan.

Choquer-Raoult, H. & al. (2010) Maths repères. Paris Hachette Education.

Gastin, H., Guignard, M., Guillemet, D. (2010) Math’x. Paris Didier.

ACTIVITES DE STATISTIQUE DECLINEES DE LA SIXIEME A LA TERMINALE : UN EXEMPLE AUTOUR DE LA CLIMATOLOGIE

Philippe GARAT, Florent GIROD, Damien JACQUEMOUD, Frédérique LETUE
Groupe Probabilités et Statistique – IREM de Grenoble

Résumé – En première partie d'exposé, nous présentons des exemples d'activités de Statistique proposés cette année à des élèves de collège et lycée, sur le thème de la climatologie (autour de données de la station météorologique de Besançon, Doubs). Nous montrons comment peuvent être déclinées diverses problématiques de statistique, selon le niveau des élèves et selon les éléments contenus dans les nouveaux programmes de mathématiques du lycée. Le but de ces activités de statistique est de faire comprendre la notion de fluctuation d'échantillonnage sur des exemples concrets, et d'expliquer (sans théorisation formelle) le raisonnement qui est à la base des tests d'hypothèses. En deuxième partie de l'atelier, nous exposons quelques considérations plus théoriques sur la manière dont les logiciels statistiques et les calculatrices opèrent pour calculer les fractiles empiriques d'une série statistique. En effet, plusieurs algorithmes existent, trouvant leur justification dans la théorie de l'estimation. Ce thème peut être éventuellement traité dans le cadre d'une APe.

PARTIE I. Exemples d'activités de Statistique proposées à des élèves de collège et lycée

Le groupe de travail de Probabilités et Statistique de l'IREM de Grenoble a fait le choix de travailler cette année sur la mise en place d'activités autour de données réelles, pour les élèves allant de la classe de 6ème à la celle de Terminale. L'activité présentée ici concerne les classes de 3ème et de 1ère ES, sur le thème de la météorologie.

1. Une activité en classe de Troisième

1.1. Les notions de statistiques vues en classe de 3ème

Les notions de statistiques ont été abordées en trois temps dans cette classe, dans le cadre d’une progression de type spiralée.

Dans un premier temps, les notions de médiane, d’étendue ont été vues au mois d’octobre 2011. La médiane et la moyenne en particulier ont été confrontées, mettant en évidence les spécificités de chacune de ces notions.

Dans un second temps, la notion de quartiles a été abordée. Cette activité a permis, en réinvestissant la notion de médiane, de montrer l’intérêt des quartiles pour étudier la répartition d’un échantillon de valeurs. Ce travail a eu lieu au mois de février 2012. Il a consisté dans tout d’abord à répondre à un sondage permettant le calcul de l’Indice de Masse Corporelle (IMC) par tous les élèves de 3ème du collège (figure 1).

Filles ou Garçon (F / G) : . . .

année de naissance : . . .

Taille : . . . Poids (en kg) : . . .

IMC (arrondi au dixième) : . . .

Figure 1 – Questionnaire adressé aux élèves de 3ème du collège

Ensuite, les élèves ont complété une fiche de travail en classe, cette fiche étant associée aux courbes de corpulence présentée par l'INPES (voir annexe 2).

Enfin, le dernier temps consacré aux apprentissages liés aux notions de statistiques a été consacré à un problème ouvert, laissant le choix aux élèves de la méthode la plus appropriée. C'est ce travail, réalisé au mois d'avril 2012 qui est présenté ici.

1.2. Une problématique

Une problématique est donnée en classe : « le climat de ces dernières années est-il significativement différent de celui des années précédentes ? ».

Un travail de réflexion a lieu en classe entière, pour s'approprier le sujet, aller plus loin que les clichés, et mettre en place une démarche.

Des données sont fournies : les températures minimales journalières de la ville de Besançon (données existantes depuis le 1er janvier 1890). Elles sont disponibles, comme de très nombreuses autres données sur le site ECA&D (European Climate Assessment and Dataset) (voir annexe 1).

Même après avoir ramené ces données à celles concernant les normales saisonnières (de 1971 à 2000), elles restent trop nombreuses si elles ne sont pas traitées. Un choix a été fait : faire la moyenne mensuelle des températures minimales journalières. Un tableau (donné sous tableur : voir ci-dessous) reprend toutes ces valeurs : c'est à partir de ce tableau que les élèves vont pouvoir donner des éléments de réponses par rapport à la question posée au départ.

1.3. Travail avec les données informatiques

Après un travail en groupe pour échanger et mettre en place une stratégie, la classe s'est rendue en salle informatique où était fourni le tableur cité précédemment.

Ce travail s'est prolongé à la maison. Un point a été fait quelques séances suivantes où des groupes ont présenté leur travail. Par la suite, le travail s'est terminé en tant que devoir à la maison. Le travail rendu était un texte, incluant des graphiques ou des tableaux.

1.4. Travail des élèves

Beaucoup d'élèves sont restés un peu déconcertés par cette activité. Un manque d'aisance par rapport au tableur, un manque d'habitude de traiter des problèmes ouverts, peu d'initiatives. Il a fallu relancer les groupes durant la séance en salle informatique, mais aussi par la présentation en classe de certains travaux pour échanger sur les techniques et les idées, sur la pertinence des choix faits pour traiter la question. Environ la moitié des groupes a utilisé la moyenne pour donner des résultats du type suivant (figure 2).

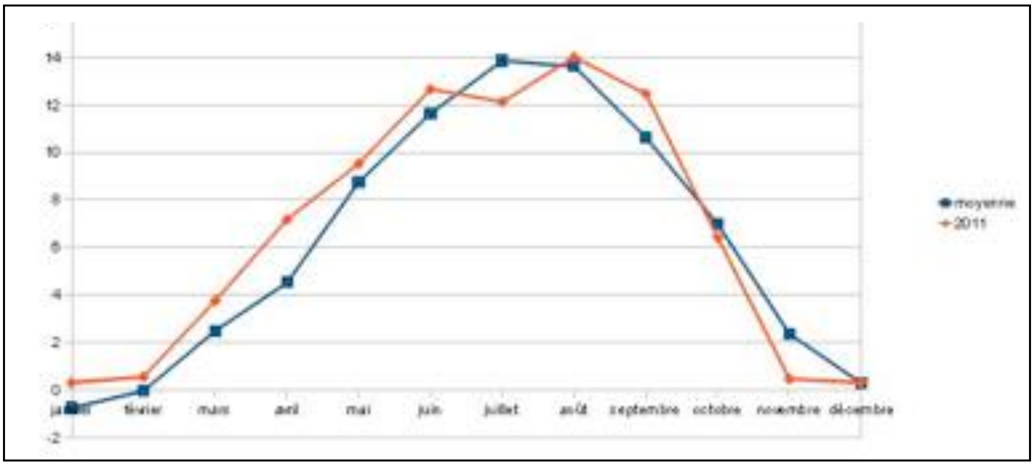


Figure 2 – Environ la moitié des groupes a utilisé la moyenne

Le texte accompagnant ce type de graphique était assez pauvre, dans la mesure où le seul fait d'être au-dessus ou en dessous de la moyenne pouvait être constaté. Un groupe a présenté ces résultats sous la forme d'un tableau :

2) Traitement numérique :

a) On a pris les quartiles et la médiane de la température moyenne minimale entre les années 1970 et 2000. Puis on a classé les années de 2001 à 2012 dans un tableau ci-dessous en fonction des quartiles.

b) **Quartiles**

	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
2001	4eme	4eme	4eme	3eme	4eme	2eme	4eme	2eme	2eme	2eme	2eme	3eme
2002	1er	4eme	4eme	3eme	4eme	4eme	3eme	3eme	2eme	3eme	4eme	4eme
2003	1er	1er	4eme	4eme	4eme	4eme	4eme	4eme	2eme	1er	4eme	3eme
2004	2eme	2eme	2eme	4eme	2eme	4eme	3eme	4eme	4eme	4eme	3eme	2eme
2005	1er	1er	2eme	4eme	3eme	4eme	4eme	1er	4eme	4eme	2eme	2eme
2006	1er	2eme	2eme	4eme	4eme	4eme	4eme	2eme	4eme	4eme	4eme	3eme
2007	4eme	4eme	2eme	4eme	4eme	4eme	3eme	2eme	1er	2eme	2eme	2eme
2008	4eme	4eme	2eme	4eme	4eme	4eme	3eme	2eme	1er	1er	4eme	3eme
2009	1er	2eme	3eme	4eme	4eme	4eme	4eme	4eme	4eme	2eme	4eme	3eme
2010	2eme	3eme	2eme	4eme	3eme	4eme	4eme	2eme	1er	2eme	4eme	1er
2011	3eme	3eme	4eme	4eme	3eme	4eme	1er	3eme	4eme	2eme	1er	3eme
2012	2eme	2eme										

3) Conclusion :

Le climat de ces dernières années est révélateur du changement climatique car l'hiver, les températures moyennes minimales sont un peu en dessous (les trous dans la couche d'ozone peuvent en être la cause) des normales saisonnières mais en été, elles sont très souvent dans le quatrième quartile (36/55 entre mars et juillet).

Figure 3 – Les résultats présentés par un groupe d'élèves

Ce groupe a mis en évidence qu'entre mars et juillet, la proportion de mois faisant partie du quatrième quartile était très élevée, beaucoup plus que le quart attendu.

On peut critiquer le choix de la période (mars à juillet) qui est un parti pris. Le fait de faire cette comparaison est tout de même une démarche intéressante : c'est un premier pas vers la comparaison d'une fréquence à une proportion attendue. De là se sont engagées des discussions en classe sur le thème de la fluctuation : est-ce « normal » que la fréquence observée ne soit pas exactement égale à un quart ? A partir de quelle valeur pourrait-on considérer que la fréquence est « anormale » ? Tout en restant qualitatif, ces questionnements permettent de préparer aux notions vues en classe de Seconde sur la fluctuation d'échantillonnage.

Un groupe a mis en place les courbes suivantes :

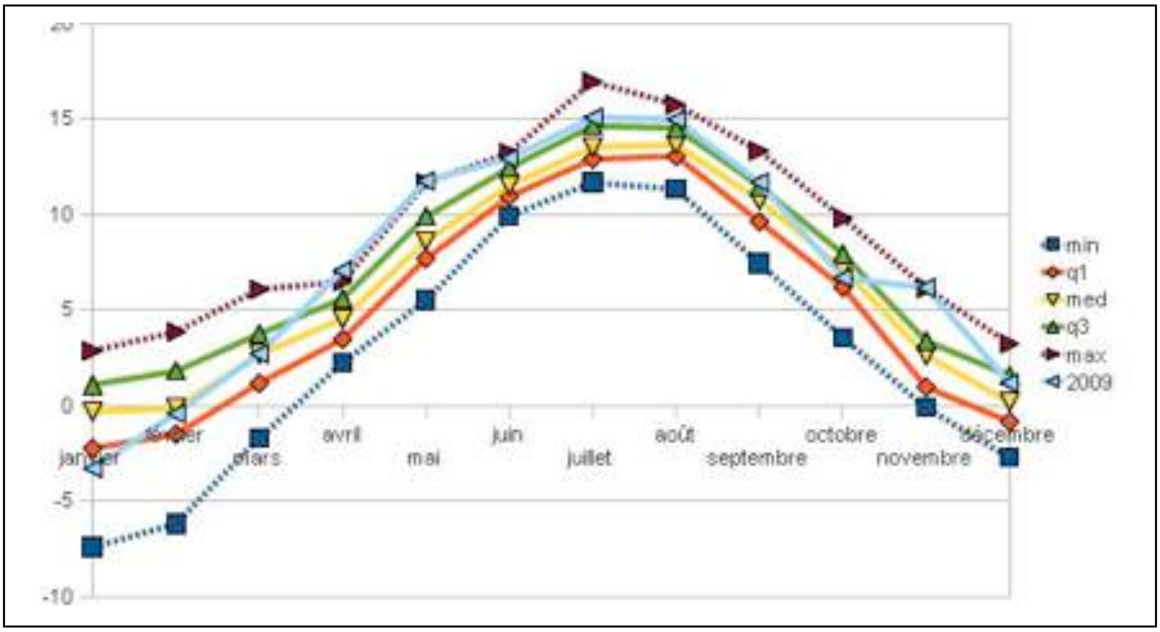


Figure 4 – Production d'un autre groupe d'élèves

Les élèves ont en quelque sorte créer les courbes de l'INPES concernant l'IMC, en mettant en place les courbes « minimum », « premier quartile », « médiane », « troisième quartile » et « maximum » en partant des valeurs des normales saisonnières.

Ils ont pu ensuite situer chaque année dans ces courbes, en qualifiant les mois de « froid », « plutôt froid », « plutôt chaud » et « chaud ».

1.5. Quelques remarques

La plupart des élèves ont le réflexe de calculer des moyennes quand on leur demande de traiter des données numériques. Le cadre scolaire avec l'importance des moyennes des notes, le fait de rencontrer cette notion assez tôt dans la scolarité n'y sont sans doute pas étrangers.

Le fait de mettre les élèves face à de nombreuses données rend pour ainsi dire obligatoire l'utilisation de l'outil informatique. Il faut s'organiser pour que les élèves puissent utiliser ces données, en classe et à la maison. Des clés USB et un site Internet ont été utilisés. Par ailleurs, quelques problèmes techniques (compatibilité OpenOffice / Excel) ont gêné quelques groupes.

Ces difficultés techniques nous ont amenés dans notre établissement à la réflexion suivante : pourquoi ne pas demander dans la liste de matériel de rentrée, d'installer

OpenOffice (et d’autres logiciels, notamment en géométrie dynamique) sur les ordinateurs à la maison, pour que les élèves puissent poursuivre ce type de travail sans difficultés techniques ? Il va de soi que l’établissement doit être en mesure de mettre à disposition des postes pour les élèves qui ne seraient pas équipés à la maison.

2. Une activité en classe de 1ère ES

2.1. Progression sur l’année

Les notions de statistiques descriptives (moyenne, écart-type, médiane et quartiles, diagramme en boîte) ont été vues en octobre 2011. La loi binomiale a été abordée en janvier 2012. La notion de fluctuation d’échantillonnage a été vue ensuite. Les calculs d’intervalle de fluctuation au seuil de 95% ont été vus en mars 2012.

2.2. Activité

La même problématique qu’en classe de 3ème a été présentée en classe de 1ère ES, sur le thème de la météo. Le même type de discussion a été mené. Les élèves ont été plus guidés, pour construire des diagrammes en boîtes relatifs aux moyennes mensuelles des températures minimales journalières. Ces courbes ont rappelé à certains les courbes présentes dans le carnet de santé.

Une deuxième partie du travail a consisté à mettre en place le modèle suivant :

- On compte le nombre de jours dans un mois, où la température minimale est inférieure à 0°C. On considère le fait que cette température soit au dessus ou en dessous de zéro respectivement comme « échec » et « succès » d’une épreuve de Bernoulli.
- Les normales saisonnières (données de 1971 à 2000) donnent le nombre de jours moyens, par mois, où la température minimale est inférieure à 0°C. Par exemple, il est de 16,6 pour le mois de Janvier (toujours pour la ville de Besançon).
- Il s’agira de construire un intervalle de fluctuation, par mois, concernant le nombre de jours où la température minimale est inférieure à 0°C.

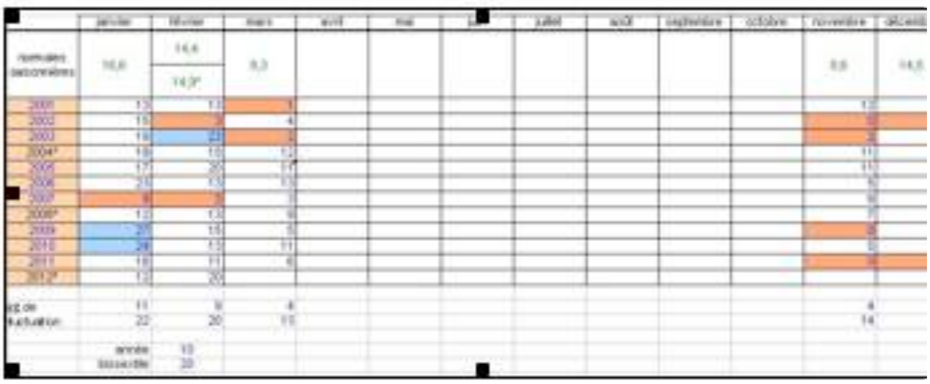


Tableau 1 – Ce tableau résume le travail décrit ci-dessus

Par exemple, pour le mois de janvier, la loi de Bernoulli de paramètres p =16,6/31 et n =31 donne un intervalle de fluctuation au seuil de 95% égal à [11 ; 22]. Cela veut dire que pour ce modèle, un mois de janvier conforme aux normales saisonnières comptera entre 11 et 22 jours où la température minimale aura été inférieure à 0°C. Si la température minimale a été moins de 11 fois inférieure à 0°C, on considérera ce mois comme « chaud » (sur fond gris foncé dans le tableau 1), et si la température minimale a été plus de 22 fois inférieure à 0°C, on considérera ce mois comme « froid » (sur fond gris clair, dans le tableau 1). Le travail a été fait pour les mois d'hiver : janvier, février (deux calculs selon que l'année est bissextile ou pas), mars, novembre et décembre. Cela représente 6 déterminations d'intervalles de fluctuation.

2.3. Travail des élèves

Ce travail, démarré en salle informatique, s'est poursuivi à la maison sous la forme d'un devoir à la maison. Certains élèves ont joué le jeu : des allers-retours de leur travail par courriel a permis de l'enrichir pour arriver à un résultat très satisfaisant. D'autres ont vu un autre intérêt d'un travail informatique en enregistrant le travail d'un camarade sous leur nom (c'est encore plus rapide que de recopier un devoir à la maison à la main !).

Mis à part ce problème de « copie », cette activité a permis aux élèves de déterminer de nombreux intervalles de fluctuation hors d'un cadre classique. Ils ont été évalués plus classiquement par la suite, cette évaluation ne laissant pas de doute sur ceux qui avaient les recherches par eux-mêmes et ceux qui avaient simplement repris le travail.

Ce travail part d'un certain nombre d'hypothèses qui ont conduit à mettre en place un modèle : une loi binomiale pour étudier la conformité d'un mois par rapport aux normales saisonnières. Ce modèle a ses limites. En effet, l'indépendance des expériences de Bernoulli (ici, le fait que la température d'un jour est indépendante de celle de la veille) est discutable. Il faut bien mettre en évidence que cela fait partie de la démarche : mettre en place un modèle en ayant conscience de ses limites.

3. Quelques réflexions par rapport à l'arrivée des probabilités statistiques dans l'enseignement secondaire

3.1. Transformations de l'enseignement et contraintes pour l'enseignant

Il nous semble qu'il est important de problématiser les notions présentées : présenter les quartiles et les déterminer sans avoir vu leur intérêt sera très démotivant. S'il est important de réaliser des exercices d'entraînement sur plusieurs séries, il est indispensable de montrer la pertinence de ces notions. La recherche d'activités de ce type n'est pas aisée. Les manuels ne sont pas toujours très riches à ce niveau.

Par ailleurs, les probabilités-statistiques, par l'importance qu'elles ont prise, peuvent permettre de renforcer la formation du citoyen en ce sens que de nombreux documents que l'ont peut voir dans les journaux, à la télévision ou sur Internet sont critiquables voire faux. Prenons l'exemple de ce graphique présenté sur France 2 lors d'une émission consacrée aux élections présidentielles :

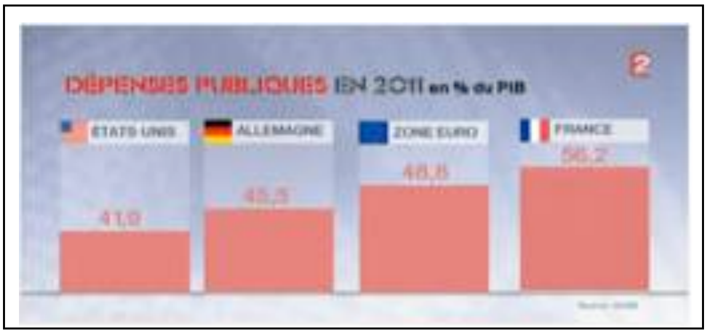


Figure 5 – Graphique extrait de l'émission « Des Paroles et des Actes » (2012)

Le type d'activités présentées nous paraît donc primordial en terme de problématisation des notions vues dans le cadre du cours, ces activités permettent également d'aiguiser l'esprit argumentatif et critique des élèves.

Cependant, une double contrainte de temps s'impose :

- pour l'enseignant : ces activités demandent beaucoup de temps en terme de préparation ;
- pour l'enseignement : ces activités, si on veut les mener jusqu'au bout, demandent beaucoup de temps.

Il faut donc faire des choix et cerner quelques thèmes sur l'année scolaire.

3.2. Répercussions pour les élèves et conséquences en terme d'évaluation

Ces activités ont exigé une continuité du travail : en classe, en salle informatique, à la maison, voire pour certains avec l'utilisation du courriel, des échanges avec l'enseignant. Beaucoup d'élèves ne sont pas habitués à ce type de démarche et ne conçoivent le travail que dans le cadre scolaire.

Les thèmes abordés, changeant de cadre, permettent un réinvestissement de notions vues en classe, permettent un transfert. Cette démarche n'est pas non plus évidente et demande à être travaillée régulièrement. Elle demande en particulier une prise d'initiative.

Enfin, évaluer ce type de travail n'est pas évident si l'on veut en donner une évaluation chiffrée. Comment valoriser la démarche, l'investissement, même si le résultat n'est pas probant ? Comment s'assurer que le travail a bien été réalisé par les élèves eux-mêmes ? Est-il indispensable de noter ce type de travail ? Si on ne le fait pas, ne court-on pas le risque d'un laisser-aller de la part de certains ? Dans les expériences réalisées, les travaux ont été évalués sous la forme de devoirs à la maison, c'est-à-dire notés avec un coefficient très faible.

PARTIE II. Calculs de fractiles empiriques à l'aide des logiciels statistiques et calculatrices

1. Introduction : importances des fractiles dans la décision statistique

Les fractiles d'une distribution permettent de construire aisément des intervalles de fluctuation pour une variable étudiée, et de façon corollaire des régions critiques, des seuils critiques. On utilise les fractiles de la loi binomiale dans le test exact d'une proportion. Le rôle de la médiane est essentiel en tant que paramètre de localisation. De nombreux ouvrages en Génie Civil sont dimensionnés par rapport aux valeurs centennales de variables climatiques (hauteur d'eau, neige, force du vent …). Un autre exemple en santé publique : analyse de sang…

Les fractiles dans l'enseignement secondaire :

- les fractiles usuels, médiane et quartiles, sont enseignés dès la classe de Seconde ;
- le diagramme en boîte est enseigné en Première ; il est parfois préconisé d'utiliser les déciles D1 et D9 pour tronquer les « moustaches » du diagramme ;

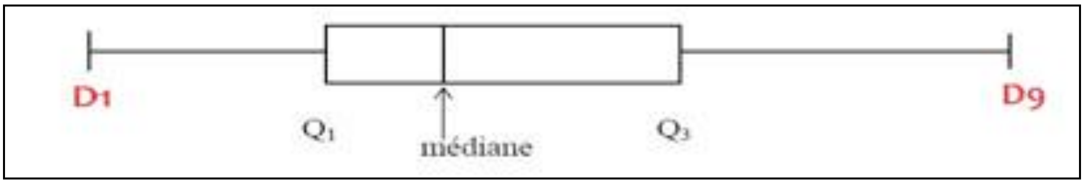


Figure 6 – Une boîte à moustaches dont les extrémités sont les déciles

- En Terminale S, le seuil $u_{0.05}$ est en réalité le fractile de probabilité 97.5 % ;
- des applications statistiques autour des fractiles sont possibles en économie, SVT, environnement, etc ...
- Le calcul des fractiles peut donner lieu à des exercices en algorithmique.

2. Fractiles d'une loi de probabilité : cas d'une loi discrète

2.1. Définition : fractiles d'une loi discrète

Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots$ l'ensemble des modalités d'une variable discrète X et soient $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ les probabilités associées.

On appelle fractile d'ordre p de X (et on note x_p) la plus petite modalité a_j telle que la probabilité d'être inférieure ou égale à a_j soit au moins égal à p, c'est-à-dire :

$$\text{Prob}[X < a_j] < p \quad \text{et} \quad \text{Prob}[X \leq a_j] \geq p \qquad (1)$$

Soit encore :

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{j-1} < p \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_{j-1} + p_j \geq p.$$

Considérant $F(x)$ la fonction de répartition de X, on peut aussi définir le fractile d'ordre p de X comme étant le plus petit élément de l'ensemble antécédent par F de $[\,p\,;1\,]$:
$x_p = \min \{ x \in \text{IR} \,/\, F(x) \geq p \}$

2.2. Exemple

Considérons l'expérience aléatoire consistant à tirer *avec remise* 30 boules dans une urne contenant 1/3 de boules blanches. Cette expérience est régie par la loi binomiale B(30 ; 1/3).

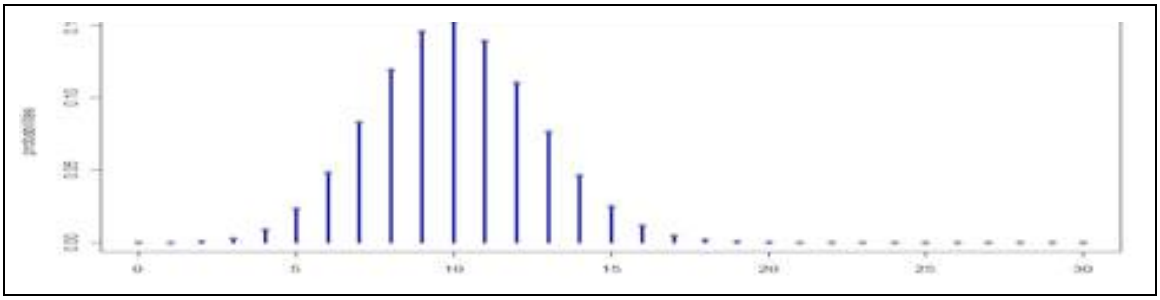


Figure 7 – Loi binomiale B(30 ; 1/3)

Le tableau des probabilités cumulées donne :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prob[$X \leq a$]	0.000	0.000	0.001	0.003	0.012	0.035	0.084	0.167	0.286	0.432	0.585
a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Prob[$X \leq a$]	0.724	0.834	0.910	0.957	0.981	0.993	0.998	0.999	1	1	1
a	22	23	24	25	26	27	28	29	30		
Prob[$X \leq a$]	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

Tableau 2 – Le tableau des probabilités cumulées

Nous en déduisons par exemple les *fractiles* de la loi de *X* suivants :

Q0.025	Q0.05	Q0.10	Q0.25	Q0.50	Q0.75	Q0.90	Q0.95	Q0.975
5	6	7	8	10	12	13	14	15

Tableau 3 – Les fractiles de la loi de X

Il est à noter que, par construction, la probabilité que *X* soit inférieur (strictement) à son fractile d'ordre *p* est au plus égale à *p*, et que la probabilité que *X* dépasse (strictement) son fractile d'ordre *p* est au plus égale à (1 – *p*). Cette propriété sera très utile en statistique inférentielle pour la recherche de seuil critique. Nous l'écrivons :

$$\text{Prob}[X < x_p\,] \;<\; p \qquad \text{et} \qquad \text{Prob}[X \;> x_p\,] \;<\; 1 - p.$$

Cela implique en particulier :

$$\text{Prob}[X < x_{p1} \;\; \text{ou} \;\; X > x_{1\text{-p2}}\,] \;<\; p_1 + p_2.$$

On illustre *sur l'exemple* :

$$\text{Prob}[X < Q_{0.05} \;\; \text{ou} \;\; X > Q_{0.95}\,] \;<\; 10\ \%.$$

Le calcul exact donne :

$$\text{Prob}[X < 6 \;\; \text{ou} \;\; X > 15\,] \;=\; 0.035 + 0.019 \;= 5.4\ \%.$$

2.3. Fractiles empiriques d'une série statistique : cas d'une variable statistique discrète

Au-delà de la définition des fractiles théoriques d’une variable statistique *X*, il se pose le problème d’estimer ces fractiles à partir d’un échantillon (x_1, x_2, … , x_n) lorsque la loi de *X* est inconnue. Nous appellerons fractiles empiriques de tels fractiles.

Le cas discret ne pose *a priori* pas de problème particulier : il suffit de remplacer dans la définition (1) les probabilités théoriques p_1, p_2, …, p_k … par les fréquences empiriques f_1, f_2, …, f_k, … obtenues lors de l'analyse fréquentielle (tri-à-plat) de l'échantillon (méthode 1).

En pratique, deux autres méthodes sont parfois proposées selon les logiciels utilisés :

1) trier l'échantillon $x_1, x_2, \dots , x_n$ par ordre croissant des valeurs ;
2) associer à chaque valeur x_j la fréquence cumulée $F(x_j) = j / n$;
rechercher les deux valeurs d'indice $j - 1$ et j dont les fréquences cumulées encadrent la probabilité p, c'est-à-dire : $(j - 1) / n < p \leq j / n$;
3) calculer le fractile d'ordre p selon l'une des 3 méthodes :

- méthode 1 : $Q(p) = x_j$;
- méthode 2 : $Q(p) = x_j$ si $p < j / n$ et $Q(p) = (x_j + x_{j+1}) / 2$ si $p = j / n$;
- méthode 3 : $Q(p) = x_{j-1}$ ou x_j selon que p est plus près de $(j - 1)$ ou de j ; lorsque $p = j / n$, on choisit x_{j-1} ou x_j correspondant à un indice pair.

Graphiquement :

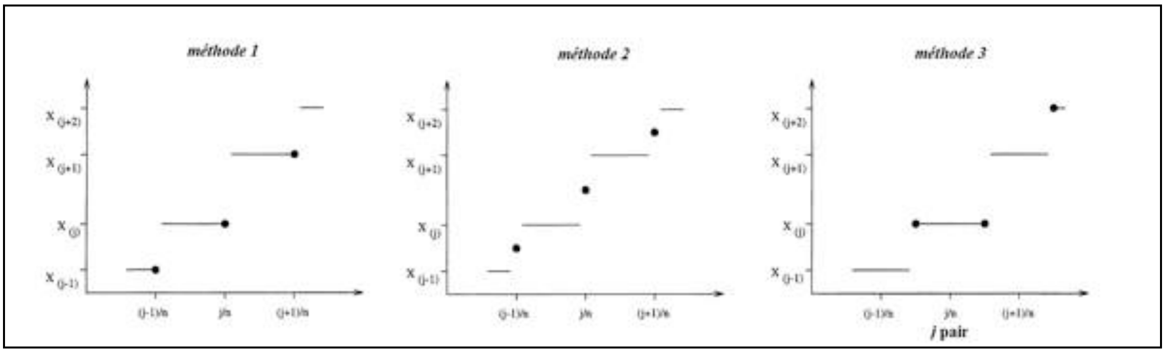


Figure 8 – Fonctions Quantile

Remarques :

- la définition « lycée » de la médiane correspond à la méthode 2 ;
- la définition « lycée » des quartiles Q1 et Q3 correspond à la méthode 1.

3. Fractiles d'une loi de probabilité : cas d'une loi absolument continue

3.1. Définition des fractiles d'une loi absolument continue (loi à densité)

Soit X une variable aléatoire absolument continue admettant une densité de probabilité $f(x)$ et une fonction de répartition $F(x)$ sur IR. On appelle fractile d'ordre p la valeur x_p de X telle que la probabilité d'être inférieure ou égal à x_p vaut exactement p ; c'est-à-dire :

$$\text{Prob}[X \leq x_p] = p \qquad (2)$$

Soit :

$$F(x_p) = p.$$

L'existence et l'unicité de x_p est garantie par le caractère continu et croissant de la fonction de répartition $F(x)$. Le fractile x_p est l'antécédent de p par la fonction $F(x)$.

$$x_p = F^{-1}(p) \qquad (3)$$

3.2. Exemple de loi continue

Considérons la loi exponentielle « unilatérale » sur IR^+ d'espérance unité, c'est-à-dire la loi définie par la densité :

$$f(x) = \exp(-x), \quad x \geq 0.$$

La fonction de répartition associée à cette loi est :

$$F(x) = 1 - \exp(-x), \quad x \geq 0.$$

Le fractile x_p d'ordre p s'obtient en résolvant en x :

$$F(x) = p.$$

On obtient :

$$x_p = -\ln(1-p).$$

On en déduit par exemple les fractiles de la loi de X suivants :

Q0.025	Q0.05	Q0.10	Q0.25	Q0.50	Q0.75	Q0.90	Q0.95	Q0.975
0,0253	0,0513	0,1054	0,2877	0,6931	1,3863	2,3026	2,9957	3,6889

Tableau 4 – Les fractiles de la loi de X

3.3. Fractiles empiriques d'une série statistique : cas d'une variable statistique continu

Le cas continu est plus difficile que le cas discret, et de nombreux algorithmes existent, donnant des résultats ayant des propriétés mathématiques sensiblement différentes.

Par exemple, le tableur Excel adopte la méthode suivante :

- trier l'échantillon $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par ordre croissant des valeurs ;
- associer à chaque valeur x_i la fréquence cumulée corrigée :
$$F_n^*(x_j) = (j-1)/(n-1) ;$$
- rechercher les deux valeurs x_{j-1} et x_j dont les fréquences cumulées encadrent la probabilité p, c'est-à-dire
$$F_n^*(x_{j-1}) < p \leq F_n^*(x_j) ;$$
- calculer le fractile d'ordre p à l'aide de la formule d'interpolation linéaire :
$$\tilde{Q}_p = [\,(F_n^*(x_j) - p) * x_{j-1} + (p - F_n^*(x_{j-1})) * x_j\,] / (F_n^*(x_j) - F_n^*(x_{j-1})).$$

Cette méthode consiste donc à approcher la fonction de répartition théorique de X par une fonction continue et linéaire par morceaux, notée $F_n^*(x)$ et à rechercher l'antécédent de p par $F_n^*(x)$.

Compte tenu de la définition de $F_n^*(x_j) = (j-1)/(n-1)$, on voit que cette méthode fournit une valeur de médiane empirique égale à : $x_{[(n+1)/2]}$ si n est impair, et $(x_{[n/2]} + x_{[(n+1)/2]})/2$ si n est pair. Cette méthode est une alternative à la démarche « naturelle » consistant à interpoler linéairement les fréquences cumulées non corrigées $F_n(x_j) = j/n$ ou à interpoler linéairement les milieux des paliers de la fonction de répartition empirique, c'est-à-dire :

$$F_n(x_j) = (j - 0.5)/n$$

3.4. Cinq méthodes disponibles

Diverses méthodes de calcul se différencient sur la manière de corriger les fréquences cumulées $F_n(x_j)$:

- méthode 4 : $F_n(x_j) = j / n$;
- méthode 5 : $F_n(x_j) = (j – 0.5) / n$;
- méthode 6 : $F_n(x_j) = j /(n + 1)$;
- méthode 7 (utilisée par *EXCEL* (et *R* par défaut) : $F_n(x_j) = (j – 1) / (n – 1)$;
- méthode 8 : $F_n(x_j) = (j – 1/3) / (n + 1/3)$.

On justifie les méthodes 4 à 8 en remarquant que :

$$F(X(j)) \text{ suit la loi Bêta } (j , n – j + 1).$$

Par conséquent : $E [F(X(j))] = j / (n + 1)$ et Mode $[F(X(j))] = (j – 1) / (n – 1)$.

De manière approximative : Médiane $[F(X(j))] = (j – 1/3) / (n + 1/3)$.

4. Expérimentations et Simulations

On souhaite savoir laquelle des cinq méthodes donne de meilleurs résultats pour estimer les fractiles d'une loi exponentielle à partir d'un échantillon de taille $n = 20$ ou d'un échantillon de taille $n = 50$. Des simulations Monte-Carlo (nombre de répétitions = 10.000) avec le logiciel R donnent les résultats suivants :

n = 20	Q0.025	Q0.05	Q0.10	Q0.25	Q0.50	Q0.75	Q0.90	Q0.95	Q0.975
Méthode 1	*141*	*73*	*54*	*34*	*24*	*21*	*21*	*23*	*26*
Méthode 4	*142*	*72*	*53*	*34*	*25*	*21*	*21*	*24*	*25*
Méthode 5	*142*	*82*	*56*	*35*	*25*	*21*	*21*	*23*	*26*
Méthode 6	*142*	*71*	*52*	*35*	*25*	*22*	*25*	*31*	*26*
Méthode 7	*209*	*116*	*68*	*37*	*25*	*21*	*21*	*23*	*24*
Méthode 8	*142*	*74*	*53*	*35*	*25*	*21*	*22*	*25*	*26*

n = 50	Q0.025	Q0.05	Q0.10	Q0.25	Q0.50	Q0.75	Q0.90	Q0.95	Q0.975
Méthode 1	*89*	*52*	*34*	*22*	*16*	*13*	*15*	*15*	*17*
Méthode 4	*60*	*45*	*34*	*22*	*16*	*13*	*14*	*15*	*17*
Méthode 5	*74*	*52*	*35*	*22*	*16*	*14*	*14*	*15*	*17*
Méthode 6	*60*	*45*	*34*	*22*	*16*	*14*	*15*	*17*	*24*
Méthode 7	*96*	*58*	*39*	*23*	*16*	*13*	*14*	*15*	*17*
Méthode 8	*67*	*49*	*35*	*22*	*16*	*14*	*14*	*16*	*19*

Tableau 5 – Erreur relative absolue moyenne par rapport à la bonne valeur des fractiles (en %)

n = 20	Q0.025	Q0.05	Q0.10	Q0.25	Q0.50	Q0.75	Q0.90	Q0.95	Q0.975
Méthode 1	*0.02*	*0.00*	*0.00*	*-0.01*	*-0.02*	*-0.07*	*-0.22*	*-0.42*	*-0.11*
Méthode 4	*0.02*	*0.00*	*0.00*	*-0.01*	*-0.02*	*-0.07*	*-0.22*	*-0.42*	*-0.61*
Méthode 5	*0.02*	*0.03*	*0.03*	*0.03*	*0.03*	*0.03*	*0.03*	*0.08*	*-0.11*
Méthode 6	*0.02*	*0.00*	*0.00*	*0.01*	*0.03*	*0.08*	*0.23*	*0.53*	*-0.11*
Méthode 7	*0.05*	*0.05*	*0.05*	*0.04*	*0.03*	*-0.02*	*-0.17*	*-0.37*	*-0.59*
Méthode 8	*0.02*	*0.02*	*0.02*	*0.02*	*0.03*	*0.04*	*0.10*	*0.23*	*-0.11*

n = 50	Q0.025	Q0.05	Q0.10	Q0.25	Q0.50	Q0.75	Q0.90	Q0.95	Q0.975
Méthode 1	*0.01*	*0.01*	*0.00*	*0.01*	*-0.01*	*0.01*	*-0.09*	*0.00*	*-0.20*
Méthode 4	*0.00*	*0.00*	*0.00*	*0.00*	*-0.01*	*-0.03*	*-0.09*	*-0.17*	*-0.32*
Méthode 5	*0.01*	*0.01*	*0.01*	*0.01*	*0.01*	*0.01*	*0.01*	*0.00*	*0.05*
Méthode 6	*0.00*	*0.00*	*0.00*	*0.00*	*0.01*	*0.03*	*0.09*	*0.22*	*0.53*
Méthode 7	*0.02*	*0.02*	*0.02*	*0.02*	*0.01*	*-0.01*	*-0.07*	*-0.15*	*-0.31*
Méthode 8	*0.01*	*0.01*	*0.01*	*0.01*	*0.01*	*0.01*	*0.03*	*0.07*	*0.21*

Tableau 6 – Biais d'estimation

Ces résultats de simulations montrent au final que les diverses méthodes de calcul donnent des résultats sensiblement équivalents du point de vue de la précision d'estimation, à l'exception de certains fractiles extrêmes de la loi exponentielle compte tenu de la taille d'échantillon relativement faible.

ANNEXE 1

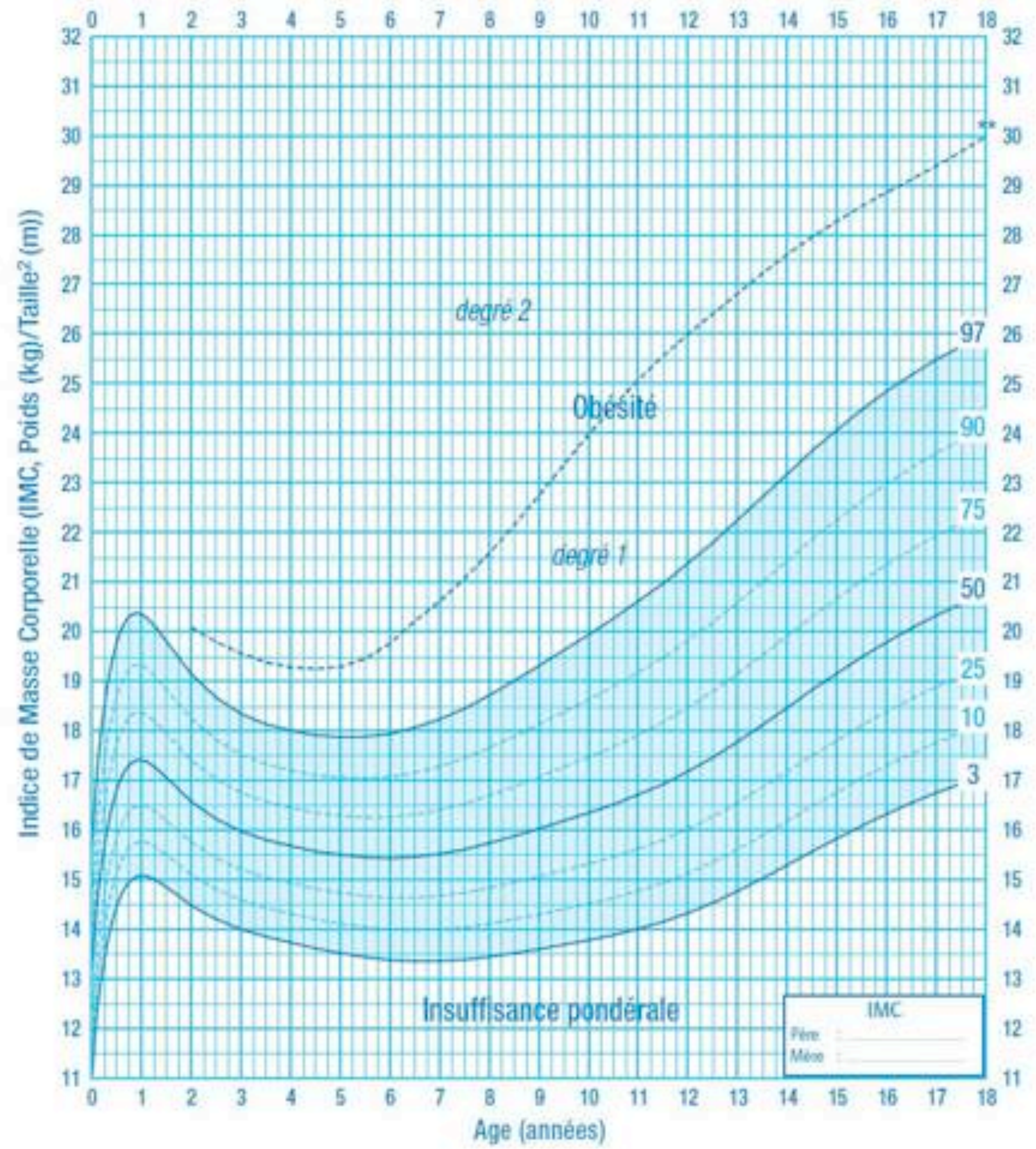
MOYENNES MENSUELLES DES TEMPERATURES MINIMALES DE 1971 A 2011 POUR LA VILLE DE BESANÇON (SOURCE : ECA&D)

moyenne mensuelle des températures minimales de 1971 à 2011 pour la ville de Besançon (toutes les températures sont données en °C)

	janvier	février	mars	avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre	novembre	décembre
1971	-3	-0,77	-1,69	6,04	9,6	10,75	13,81	13,72	9,21	6,31	1,02	-0,54
1972	-1,06	1,05	2,63	4,29	7,69	9,91	12,76	12,03	7,43	4,81	2,19	-2,14
1973	-3,07	-1,49	0,12	2,25	9,14	12,09	13,46	14,92	11,03	5,2	1,66	-0,84
1974	2,39	2,18	4,21	3,57	7,35	10,34	11,91	13,79	10,57	3,56	3,53	3,11
1975	2,31	-0,06	1,9	4,56	7,69	10,72	13,26	14,5	12,41	4,86	2,8	-2,26
1976	-0,04	-0,02	0,55	3,74	8,7	12,42	14,75	11,77	9,59	7,98	3,23	-1,78
1977	1,1	3,86	4,68	3,21	7,96	11,23	12,89	12,2	8,49	7,94	3,14	0,42
1978	-0,6	-0,24	2,94	3,32	8,46	10,43	12,73	11,31	8,98	5,54	0,1	1,17
1979	-4,21	0,7	3,75	3,29	7,57	12,25	12,6	11,73	10,16	8,15	2,22	1,57
1980	-1,91	1,9	2,81	3,57	7,46	10,93	11,68	13,34	10,73	5,41	0,46	-2,74
1981	-2,71	-2,66	5,88	5,4	8,32	11,11	13	12,85	11,49	7,06	1,71	0,2
1982	0,44	-0,17	1,61	3,19	8,37	13,23	15	13,35	12,1	7,45	3,68	1,45
1983	0,89	-1,95	2,29	5,04	7,18	12,44	16,95	14,29	11,18	6,8	1,42	-0,39
1984	0,41	-0,77	-0,12	3,48	6,67	10,89	12,45	13,22	10,45	7,58	4,57	-0,04
1985	-7,42	-1,91	1,17	5,19	8,54	10,84	14,45	12,49	10,93	6,53	0,16	1,58
1986	0,1	-6,17	1,23	4,04	10,38	12,41	13,30	13,04	10,58	7,85	3,54	0,18
1987	-6,75	-0,19	0,05	5,6	6,6	11,46	14,64	13,78	13,05	8,9	3,29	0,24
1988	2,87	0,26	2,46	6,16	10,59	11,57	13,14	14,02	10,9	8,57	0,93	1,96
1989	-1	0,46	4,16	4,83	9,93	11,38	14,31	13,57	10,61	7,24	0,38	-0,23
1990	-1,24	3,76	3,34	4,53	10,14	11,64	13,96	14,11	9,62	8,87	3,21	-1,33
1991	-0,28	-3,44	5,03	3,34	5,51	11,31	14,92	14,65	12,77	6,19	2,63	-1,86
1992	-2,89	-0,47	3,06	4,94	10,19	12,55	14,64	15,33	10,76	6	4,26	1,23
1993	1,56	-2,09	1,36	6,49	9,87	12,72	13,35	13,12	10,4	6,54	-0,11	2,73
1994	1,25	1,18	6,98	4,2	9,88	12,6	16,01	16,41	11,57	7,47	6,15	3,08
1995	-0,56	3,81	1,15	5,74	8,52	11,1	16,11	14,65	9,24	9,8	2,63	-0,48
1996	-0,13	-1,68	0,68	4,83	8,88	12,49	13,37	13,5	7,79	7,05	2,91	-1,06
1997	-2,23	1,81	4,29	3,45	9,68	12,35	13,58	15,75	10,95	6,5	3,39	1,75
1998	1,11	0,08	2,74	5,62	9,72	12,49	14,18	13,17	11,22	7,65	0,01	-0,29
1999	1,26	-0,82	3,52	5,76	11,66	11,26	15,32	14,55	13,32	7,42	0,98	0,78
2000	-0,36	1,86	2,91	5,97	10,43	12,85	12,63	14,52	11,66	8,23	4,69	3,24
2001	1,62	1,2	5,62	4,63	11,47	11,1	14,74	15,14	9,43	10,32	1,14	-1,32
2002	-0,42	4,06	3,9	4,78	8,34	14,24	13,5	14,42	10,49	7,35	5,86	3,59
2003	-0,89	-2,57	3,54	5,56	10,44	17,12	15,34	17,54	10,31	5,02	4,06	0,73
2004	0,02	-0,42	1,55	5,79	7,69	12,47	13,79	14,94	11,67	9,5	2,84	-0,35
2005	-1,02	-1,96	2,12	6,32	9,34	13,6	14,84	12,1	12,14	9,18	2,08	-0,84
2006	-2,16	-0,51	2,36	5,45	10,3	13,17	18,45	13,04	14,07	10,72	4,87	1,1
2007	3,7	3,24	2,5	8,04	11,47	14,41	14,13	13,57	9,18	6,68	2,27	-0,74
2008	1,93	1,21	2,55	5,53	11,37	13,6	14,25	13,39	9,32	5,92	3,97	0,22
2009	-3,27	-0,42	2,71	7,07	11,76	12,94	15,07	14,97	11,68	6,68	6,17	1,19
2010	-2,61	0,44	1,82	5,95	9,11	13,65	15,9	13,43	9,44	6,21	4,17	-1,58
2011	0,31	0,55	3,76	7,18	9,53	12,67	12,14	14,02	12,48	6,43	0,47	0,3
2012	0,17	-0,49										

ANNEXE 2

COURBES DE CORPULENCE (POUR LES GARÇONS) ISSUE DE L'INPES



INTERVALLES DE FLUCTUATION ET DE CONFIANCE POUR UNE PROPORTION : ASPECTS MATHEMATIQUES ET STATISTIQUES

Yves DUCEL et Bruno SAUSSEREAU
IREM – Université de Franche-Comté

Résumé – Cet atelier a pour objectif de proposer une approche synthétique des diverses définitions d’intervalles de fluctuation et de confiance introduites par les programmes de la Seconde aux classes post-bac On espère ainsi apporter un éclairage sur les choix effectués.

A cet effet on examine les relations que ces multiples définitions entretiennent entre elles, notamment en :

- comparant les diverses définitions introduites de la Seconde à la Terminale ;
- explicitant le cadre mathématique qu'elles supposent, notamment en vue du nouveau programme de Terminale ;
- détaillant le passage de la notion d'intervalle de fluctuation à celle d'intervalle de confiance.

Enfin, à travers cette démarche, on s’efforce de mettre en évidence quelques idées directrices dans la construction mathématique des intervalles de fluctuation et de confiance, ainsi que dans la discussion de leur pertinence en statistique.

Le texte correspondant à cet atelier est consultable à l’adresse suivante :

http://bsauss.perso.math.cnrs.fr/IREM_FC_GrouProbaStat/grouprobastat.html

COLLOQUE DES 14 ET 15 JUIN 2012

THEME : LA FORMATION ET LE RECRUTEMENT DES ETUDIANT(E)S QUI SE DESTINENT AU METIER DE PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES, PREMIERS BILANS ?

Ce thème est l'occasion de faire le point après deux années de la réforme dite de la « mastérisation ». Les ateliers permettent d'étudier des maquettes de master et/ou des dispositifs de formation et d'analyser comment s'articulent les différents axes de la formation : préparation au concours, enseignement du master et formation professionnelle. Les deux premières années de la mastérisation font apparaître une diminution très sensible du nombre d'étudiants se destinant à l'enseignement des mathématiques ainsi qu'une forte baisse du nombre de candidats au concours du CAPES. Cette tendance laisse entrevoir une possible crise du recrutement.

Parallèlement à ce constat, le nouveau concours du CAPES a introduit de nouvelles modalités au sein des épreuves écrites et surtout orales (épreuve d'oral 1, épreuve sur dossier, épreuve « agir en fonctionnaire de l'état de façon éthique et responsable », introduction des TICE, du C2I2E).

Enfin la formation des professeurs stagiaires a été fortement réduite et pose encore de nombreux problèmes à tous les niveaux. Nous étudions comment ces transformations influencent les contenus de la formation.

RECRUTEMENT DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES : CONSTATS ET PERSPECTIVES

Xavier SORBE
Inspecteur général de l'éducation nationale

Résumé – L'évolution récente des concours de recrutement d'enseignants, qui se caractérise par une élévation du niveau de qualification des candidats, a également donné lieu à d'importants changements dans la nature des épreuves.
Il conviendra d'analyser l'impact de ces transformations sur la formation des futurs professeurs.
Mais cette réforme a coïncidé avec une chute préoccupante du nombre de candidats, particulièrement au CAPES externe, dont nous devons préciser les contours en vue d'en interpréter les causes.

Évolution des épreuves

Les nouvelles épreuves définies par l'arrêté du 28 décembre 2009 renforcent la prise en compte de la dimension professionnelle dans le recrutement des enseignants.

La possibilité de proposer plusieurs problèmes dans chaque épreuve écrite permet de diversifier la nature des sujets.

La nouvelle conception des épreuves orales rapproche le candidat de la situation d'enseignement, en plaçant l'élève au cœur des préoccupations, en donnant la possibilité d'accéder à différentes ressources (manuels et logiciels) et en élargissant la réflexion au fonctionnement du système éducatif.

La présentation par le candidat d'un plan sur le sujet de la leçon nécessite un effort pour rechercher une cohérence d'ensemble et proposer des contenus suffisamment riches, illustrés par des exemples et des applications.

La liste des sujets a été renouvelée, avec notamment des thèmes ayant une portée transversale, obligeant à une prise de recul :

- Proportionnalité et linéarité ;
- Problèmes de constructions géométriques ;
- Problèmes de lieux géométriques ;
- Problèmes conduisant à la résolution d'équations différentielles ;
- Problèmes conduisant à l'étude de fonctions ;
- Exemples d'études de courbes ;
- Aires ;
- Exemples d'algorithmes ;
- Exemples d'utilisation d'un tableur ;
- Les différents types de raisonnement en mathématiques ;
- Applications des mathématiques à d'autres disciplines.

L'épreuve sur dossier, dans sa partie « Exercice », conduit à amorcer une réflexion pédagogique en prenant appui sur des productions d'élèves, des extraits de manuels ou des passages des programmes officiels.

L’étude de productions d’élèves fait appel à une certaine clairvoyance et à des qualités de bon sens. Les candidats sont amenés à repérer les aspects positifs d’une démarche ou à émettre des hypothèses sur les causes de certaines erreurs.

Exemple de sujet

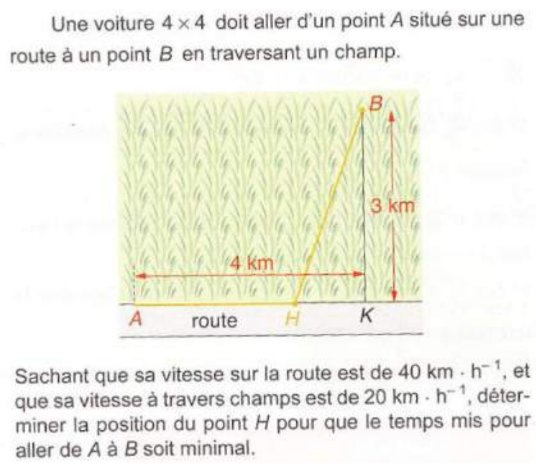
L’exercice

Soit f la fonction définie sur l’intervalle [0 ; 4] par :

$$f(x) = \frac{x}{40} + \frac{1}{20}\sqrt{x^2 - 8x + 25}$$

Expliquer pourquoi la fonction f est dérivable et calculer sa dérivée.
Dresser le tableau de variation de f. Déterminer pour quelle valeur x_0, cette fonction admet un extremum.
Donner les valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies à 10^{-3} de x_0 et de $f(x_0)$.

Un extrait de manuel


Une voiture 4 × 4 doit aller d’un point *A* situé sur une route à un point *B* en traversant un champ.

Sachant que sa vitesse sur la route est de 40 km · h⁻¹, et que sa vitesse à travers champs est de 20 km · h⁻¹, déterminer la position du point *H* pour que le temps mis pour aller de *A* à *B* soit minimal.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Comparer les compétences développées par la résolution de chacun des deux exercices ci-dessus.
2 – Citer différentes possibilités d’utilisation d’un logiciel permettant d’approcher une solution de l’exercice du manuel et développer l’une d’entre elles.
3 – Exposer une correction de la question 2 de l’exercice.
4 – Proposer plusieurs exercices sur le thème de l’optimisation.

Figure 1 – Un sujet de la partie « Exercice » de l’épreuve sur dossier du CAPES externe

Par ailleurs, la partie « Agir en fonctionnaire » permet d’apprécier si le candidat a conscience des obligations d’un enseignant et s’est approprié les valeurs du service public. Elle lui donne l’occasion d’exprimer sa conception du travail en équipe et des relations hiérarchiques ou de faire part de sa vision d'ensemble des missions du professeur.

Si l'on ne peut exiger qu'ils maîtrisent dans les détails le fonctionnement de l'institution scolaire, il est attendu des futurs enseignants une certaine connaissance des grands enjeux et débats sur le système éducatif.

Le jury a apprécié que de nombreux candidats aient su valoriser l'expérience acquise durant leurs stages en établissements.

Cette épreuve a eu un réel impact sur les résultats. 84% des candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 5 sur 6 ont été reçus.

Effectifs

Le CAPES externe

Les tableaux et graphiques suivants montrent que la baisse des effectifs, très nette, résulte d'un mouvement de fond antérieur à la mastérisation, qui a été sensiblement accentuée par celle-ci.

CAPES externe	Postes	Présents à l'écrit
1999	945	7332
2000	890	6750
2001	990	5676
2002	1125	4948
2003	1195	4428
2004	1003	4194
2005	1310	4074
2006	952	3983
2007	952	3875
2008	806	3453
2009	806	3160
2010	846	2695
2011	950	1285
2012	950	1464

Tableau 1 – Nombre de postes au CAPES externe et nombre de candidats présents, par année, de 1999 à 2012

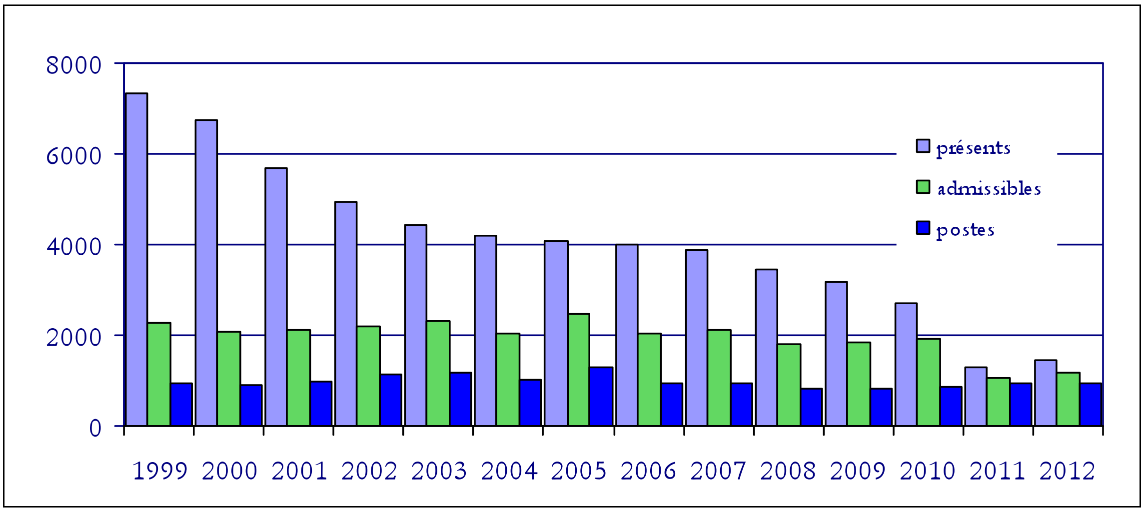


Figure 2 – Par année, de 1999 à 2012, nombre de postes au CAPES externe, nombre de candidats présents, nombre de candidats admissibles

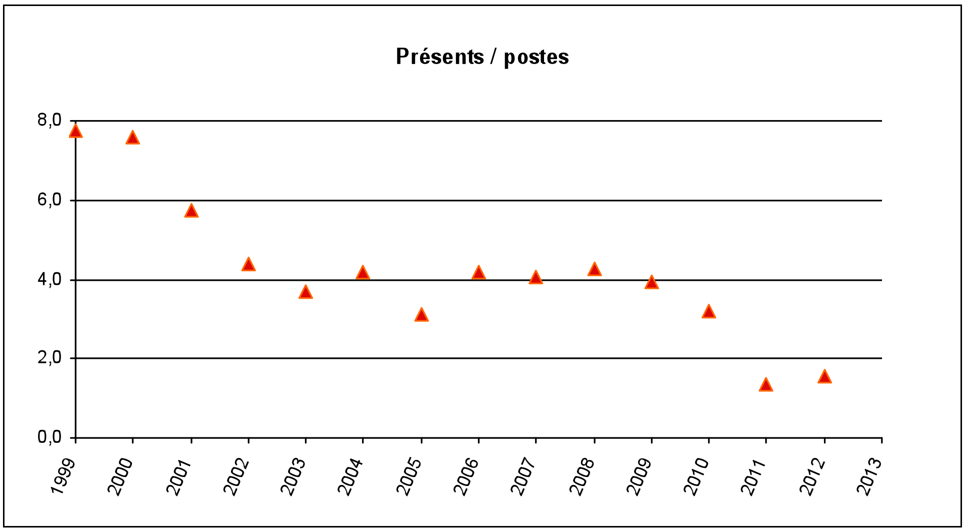


Figure 3 – Par année de 1999 à 2012, rapport du nombre de candidats présents au nombre de postes au CAPES externe

Pour prendre en compte les besoins des académies en enseignants titulaires, il a été nécessaire d'adopter une approche très ouverte. Ainsi lors de la session 2011, 45% des candidats présents à l'écrit ont été admis.

CAPES externe	présents / postes	admissibles / présents	admis / présents
1999	7,8	31%	13%
2000	7,6	31%	13%
2001	5,7	37%	17%
2002	4,4	45%	23%
2003	3,7	53%	27%
2004	4,2	49%	24%
2005	3,1	61%	32%
2006	4,2	51%	24%
2007	4,1	54%	25%
2008	4,3	52%	23%
2009	3,9	58%	26%
2010	3,2	71%	31%
2011	**1,4**	**81%**	**45%**

Tableau 2 – Par année de 1999 à 2011, rapport du nombre de candidats présents au nombre de postes, pourcentage de candidats admissibles par rapport aux candidats présents, pourcentage de candidats admis par rapport aux présents

D'autres disciplines

Voici les ratios admissibles / postes pour les CAPES externes (session 2012) dans plusieurs disciplines :

Histoire-Géographie : 2,2 ;
SES : 1,7 ;
Anglais : 1,4 ;
Mathématiques : 1,2 ;
Lettres modernes : 1,2 ;
Allemand : 1,1 ;
Education musicale : 0,9 ;
Lettres classiques : 0,5.

Lors des dernières sessions, des trajectoires comparables ont pu être observées en Mathématiques et Histoire-Géographie, mais la situation est aujourd'hui moins critique dans cette dernière discipline, où le vivier de départ était nettement plus important.

CAPES	Postes Maths	Présents Maths	Postes Hist-Géo	Présents Hist-Géo	Postes Maths/H-G	Présents Maths/H-G
2005	1310	4074	1040	5598	1,3	0,7
2006	952	3983	730	5126	1,3	0,8
2007	952	3875	730	4848	1,3	0,8
2008	806	3453	604	4525	1,3	0,8
2009	806	3160	616	3731	1,3	0,8
2010	846	2695	610	3292	1,4	0,8
2011	950	1285	550	2088	1,7	0,6
2012	950	1489	580	2055	1,6	0,7

Tableau 3 – Comparaison entre Mathématiques et Histoire-Géographie

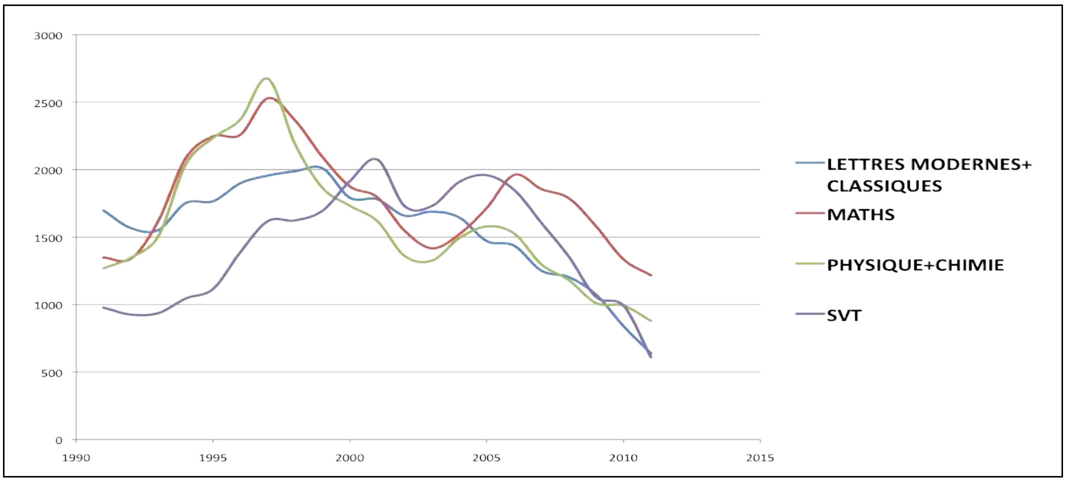


Figure 4 – Présents aux épreuves écrites du CAPES externe

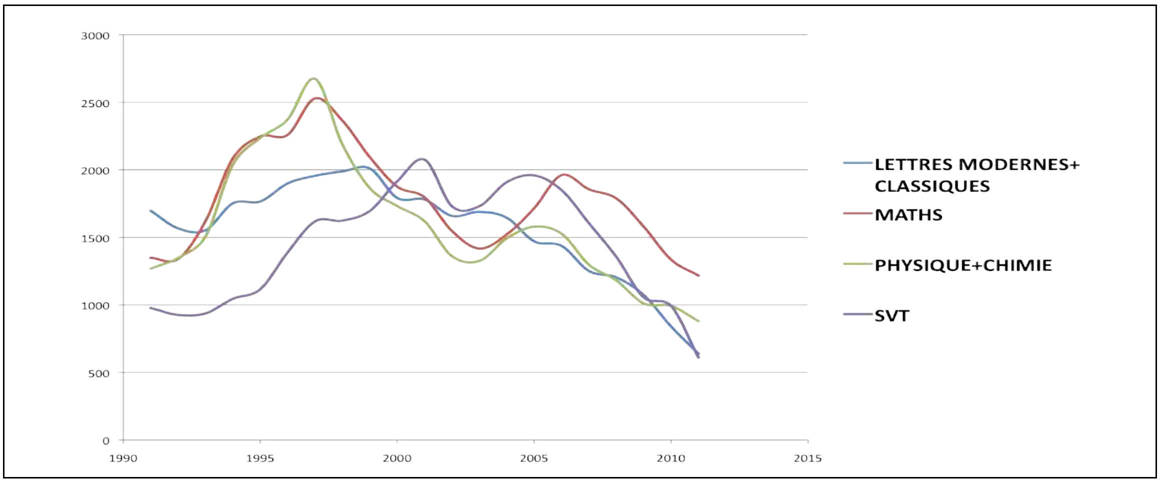


Figure 5 – Présents aux épreuves écrites de l'agrégation externe

Le flux et le stock

L'analyse des effectifs des titulaires met en évidence une vague prochaine de départs massifs en retraite, ne faisant qu'accentuer la difficulté engendrée par la conjoncture actuelle en matière de recrutement.

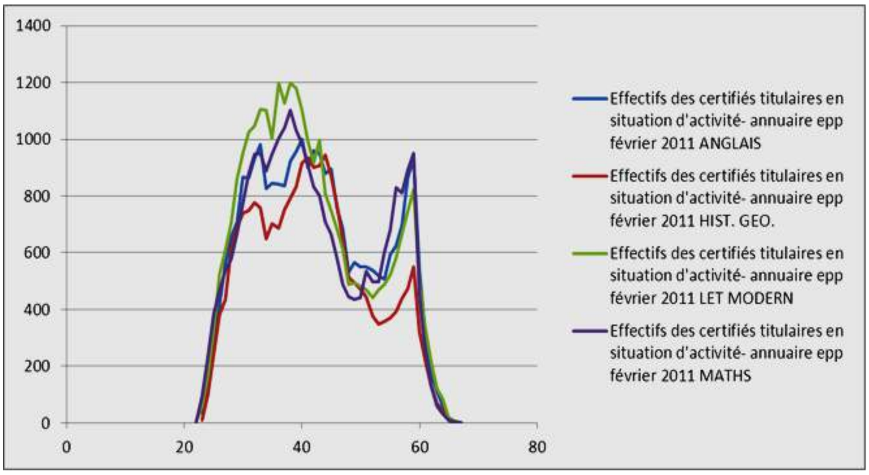


Figure 6 – Effectifs des professeurs certifiés en fonction de l'âge

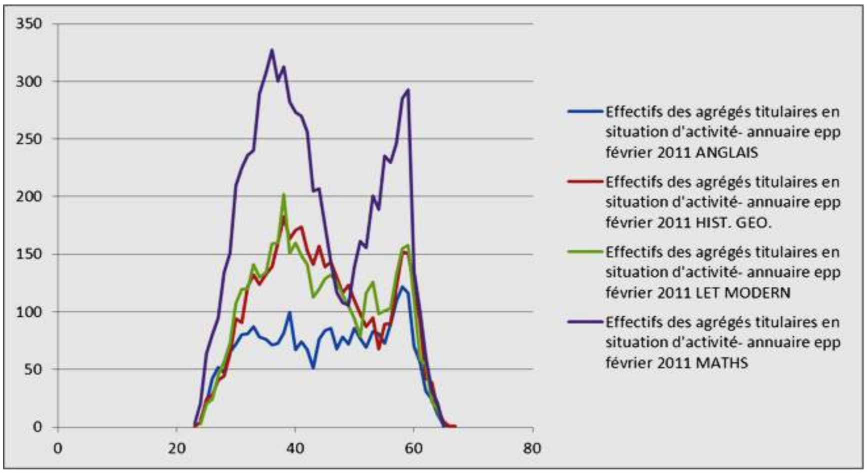


Figure 7 – Effectifs des professeurs agrégés en fonction de l'âge

Dans la plupart des académies, le nombre de professeurs non titulaires ou issus d'une autre discipline, qui enseignent les Mathématiques, a considérablement augmenté.

Voici quelques exemples (enseignement public).

non titulaires ou autre discipline	Enseignement général et technologique	Enseignement professionnel	situation au 01/11/2009	situation au 01/11/2010
Clermont-Ferrand	4%	16,5%	46	47
Créteil	9,5%	20%	230	268
Grenoble	5%	8,5%	99	115
Lyon	3%	7%	51	84
Nantes	10%	7%	100	108
Poitiers	5%	5%	65	90

Tableau 4 – Quelques exemples qui montrent que le nombre de professeurs non titulaires ou issus d'une autre discipline, qui enseignent les Mathématiques, a considérablement augmenté

Analyse et perspectives

Le manque d'attractivité du métier d'enseignant résulte de plusieurs facteurs.

Depuis plusieurs années, l'image du métier donnée par les medias, mais aussi parfois par l'institution, s'est dégradée.

Le salaire d'un professeur certifié débutant, qui était de 2 × SMIC en 1970 est passé à 1,2 × SMIC au début 2010.

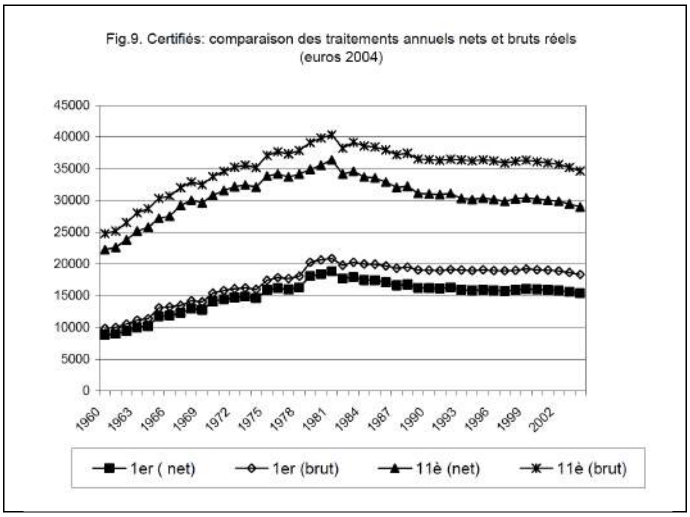


Figure 8 – Extrait de « Les traitements des enseignants français, 1960-2004 : la voie de la démoralisation ? » (2007 – B.Bouzidi, T.Jaaidane, R.Gary-Bobo)

Actuellement, l'absence de perspective d'une deuxième carrière peut faire hésiter des jeunes à s'engager dans une voie qui apparaît à ceux dont la vocation est incertaine comme un long tunnel sans issue.

Enfin, plusieurs aspects de la mastérisation ont incontestablement eu un effet négatif :

- l 'allongement de la durée des études a pu décourager certains étudiants, engendrant un coût que ne peuvent assumer les plus défavorisés ;

- à niveau égal de qualification, des étudiants titulaires d'un master ont préféré s'orienter vers d'autres voies qu'ils jugeaient plus attractives ou apportant une rémunération supérieure (informatique, finances, etc.) ;
- l'obligation de produire des certificats supplémentaires (particulièrement le CLES pour les scientifiques) a eu un effet repoussoir, que n'ont pu atténuer les aménagements apportés en cours d'année ;
- enfin, la perspective d'une formation initiale considérablement réduite est de nature à inquiéter au moment de choisir un métier dont l'exercice réclame des compétences professionnelles multiples.

Il convient cependant de garder à l'esprit qu'historiquement, le nombre de postes offerts au concours a toujours eu un impact sur le nombre de candidats se présentant trois ou quatre ans plus tard, comme le montre très bien le graphique ci-dessous.

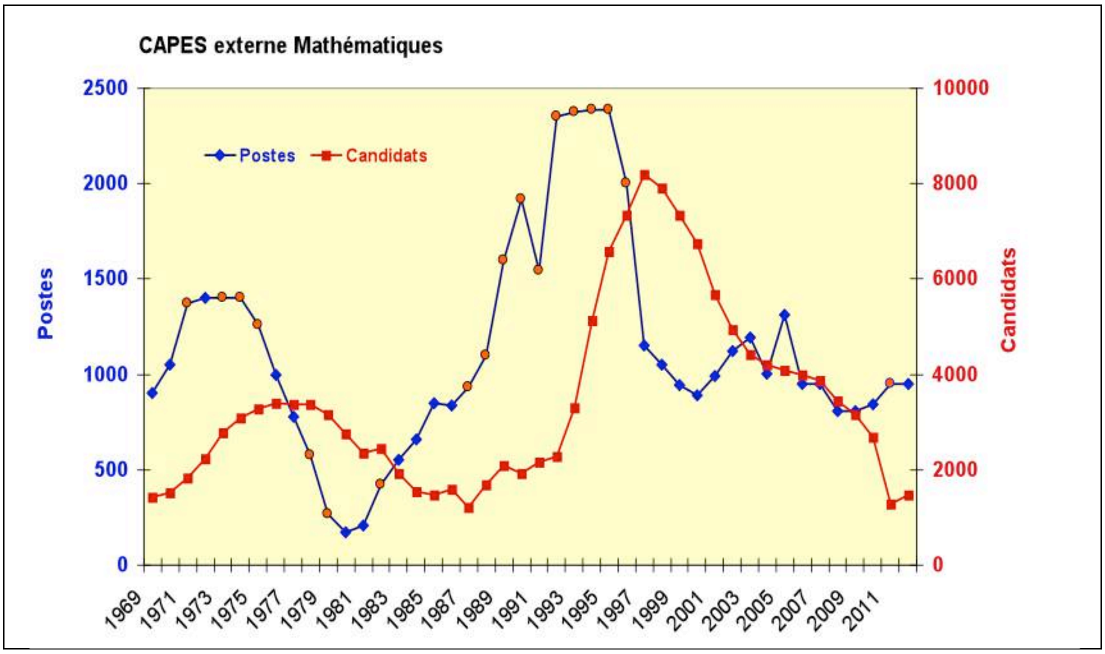


Figure 9 – le nombre de postes offerts au concours a toujours eu un impact sur le nombre de candidats se présentant 3 ou 4 ans plus tard (d'après Pierre Arnoux, université de Luminy)

Corrélation Postes / Présents	**CAPES**	**Agrégation**
à l'année 0	-0,07	0,25
à l'année +1	0,26	0,55
à l'année +2	0,60	0,80
à l'année +3	0,82	0,89
à l'année +4	0,89	0,75

Tableau 5 – D'après Charles Torossian – IGEN

Quelques pistes

Promouvoir un discours qui mette en évidence l'importance du rôle des enseignants dans notre société, témoigne d'une considération pour leur travail et valorise les réussites.

Décider d'un pré-recrutement, en fin de L2 ou de L3, dans les disciplines connaissant une crise de recrutement et offrir aux étudiants pré-recrutés une formation spécifique leur permettant de bénéficier d'une pré-professionnalisation dans la perspective des concours.

Rétablir une formation initiale à la hauteur des besoins des nouveaux professeurs recrutés, en articulant celle-ci autour de stages en établissements, réellement préparés, accompagnés et exploités.

Plus largement, engager une réflexion conduisant à actualiser la définition du métier d'enseignant, conformément aux missions qui leur sont actuellement confiées.

Instaurer une formation continue ambitieuse afin de mieux accompagner les enseignants dans l'exercice de leur métier.

Développer une recherche pédagogique de qualité, fondée sur une concertation étroite entre l'institution et l'université, dont les conclusions seront au service de la formation et des pratiques.

LA FORMATION DES FUTURS PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DANS LE PAS DE CALAIS : EVOLUTION ET PERSPECTIVES

Carole BAHEUX[1], Françoise CHENEVOTOT[2], Marie-Pierre GALISSON[3], Christine MANGIANTE[4]

Résumé – Les dispositifs de formation professionnelle dans le contexte de la mastérisation transforment le rapport aux contraintes du métier des futurs enseignants. Notre objectif est de présenter quelques éléments d'analyse mettant en rapport les choix adoptés en termes de dispositif de formation professionnelle et leurs effets sur le développement professionnel des futurs enseignants puis de dégager des alternatives en termes d'évolution de la formation.

La mastérisation de la formation des enseignants induit une certaine évolution de l'articulation entre la formation théorique (apports disciplinaires et didactiques) et la formation professionnelle (culture professionnelle et stages). Comment se traduit cette évolution dans la manière dont les étudiants appréhendent leur futur métier ? Dans cette communication, notre intention est de mettre en regard les grands choix de conception du dispositif (actuel et à venir) avec les transformations sur le rapport aux contraintes du métier des futurs enseignants (en master actuellement).

1. Le dispositif actuel de formation

1.1. Présentation générale du Master

Le Master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » est une Spécialité du Master « Mathématiques et Applications » co-habilitée par les universités d'Artois, du Littoral, de Lille 1 et de Valenciennes. Ceci était un souhait des quatre Présidents d'Université du Nord / Pas-de-Calais.

Ce master comporte des contenus scientifiques (disciplinaires, fondamentaux en sciences humaines et sociales, ouvertures et culture scientifiques), des contenus professionnels (mathématiques comme discipline scolaire, leçons de mathématiques, stages et culture professionnelle, analyse de pratique) et des unités préparatoires aux épreuves du concours.

Chaque semestre est constitué d'unités obligatoires (104 ECTS au total, dont 50 ECTS professionnalisants et 44 ECTS disciplinaires) et d'unités optionnelles (16 ECTS

[1] Université d'Artois, IUFM Nord / Pas-de-Calais – LML, France, carole.baheux@univ-artois.fr

[2] Université d'Artois, IUFM Nord / Pas-de-Calais – LDAR, France, francoise.chenevotot@lille.iufm.fr

[3] Université d'Artois, IUFM Nord / Pas-de-Calais – LML, France, marie-pierre.galisson@lille.iufm.fr

[4] Université d'Artois, IUFM Nord / Pas-de-Calais – LML, France, christine.mangiante@lille.iufm.fr

professionnalisants à l'Université d'Artois) (cf. annexe 1). Ces options permettent de garantir une certaine spécificité de l'offre de formation de l'Université d'Artois. Le cursus est organisé de façon à intégrer peu à peu des unités professionnalisantes afin de construire le plus tôt possible une articulation entre formation professionnelle, formation disciplinaire et préparation au concours.

Le premier semestre comporte deux unités pluridisciplinaires et trois unités disciplinaires obligatoires complétées par 4 ECTS à choisir dans une liste d'options.

Dès le deuxième semestre, deux unités professionnelles viennent s'ajouter à une unité disciplinaire. Là encore, des options sont proposées aux étudiants. Elles représentent 12 ECTS et visent à permettre aux indécis de conforter leur projet professionnel ou au contraire de choisir une autre orientation à la fin du M1.

Le troisième semestre prépare essentiellement à l'écrit du concours mais la dimension professionnelle est toujours présente avec une unité « Leçon de Mathématiques » et une unité « formation à l'usage professionnel des nouvelles technologies ».

Enfin, tout au long du quatrième semestre, la préparation à l'oral du concours se poursuit. Les étudiants préparent aussi la certification CLES et, pour offrir des possibilités de réorientation aux étudiants non admissibles, différents parcours sont prévus.

1.2. Les points forts de la maquette actuelle

L'oral joue un grand rôle dans le métier d'enseignant. Soucieux de prendre en compte cette spécificité, les concepteurs de la maquette ont prévu un temps important de préparation aux interventions orales par l'intermédiaire des deux unités « Leçons de mathématiques ».

Ces leçons donnent l'occasion aux étudiants de faire des cours de mathématiques à différents niveaux (du collège à la licence) avec le regard du professeur qui doit expliquer, plutôt qu'avec le regard de l'étudiant qui doit (seulement) apprendre. Par l'intermédiaire de ces leçons, ils doivent jeter un regard critique sur les manuels scolaires et réfléchir sur les programmes, leur cohérence et leur architecture. Ils doivent également connaitre l'évolution historique des idées en mathématiques.

Chaque séance dure 2h30 et débute par la présentation d'une leçon pendant environ 60 minutes. Chaque exposé s'accompagne d'un texte de quelques pages, contenant un résumé, des références bibliographiques et des exercices sur le sujet traité. Les 90 minutes restantes sont consacrées à une critique de la leçon proposée par le groupe et l'enseignant, à la résolution d'exercices et à d'éventuels compléments apportés par l'enseignant.

Ainsi, au cours de ces séances, les formateurs poursuivent un double objectif : préparer les étudiants à l'oral et à l'écrit du concours mais aussi à l'exercice du métier en ayant un regard critique sur les manuels, les programmes….

Par ailleurs, la formation proposée vise à offrir une formation disciplinaire suffisamment solide pour permettre une réorientation vers une deuxième année de Master dans une autre spécialité. Les stages et les différentes unités professionnelles doivent permettre aux étudiants d'appréhender, dès la première année, les diverses facettes du métier pour éventuellement se réorienter.

1.3. *Une ouverture vers la vie professionnelle*

Cette volonté de mettre l'accent sur la formation professionnelle se manifeste aussi à travers le choix des options proposées. A l'Université d'Artois, les 16 ECTS optionnels sont professionnalisants. Il s'agit des UE « Les Mathématiques, discipline scolaire et culture professionnelle », « Histoire de l'enseignement des mathématiques », « La didactique des mathématiques liée aux contenus enseignés » et des séminaires de recherche, soit un total de 55% d'ECTS professionnalisants pour 8,33% d'ECTS pluridisciplinaires et 36,67% d'ECTS disciplinaires.

Parmi ces options, les unités « Les Mathématiques, discipline scolaire et culture professionnelle » et « La didactique des mathématiques liée aux contenus enseignés » proposent notamment une étude détaillée des programmes et des documents d'accompagnement actuels, abordent la question de la continuité des apprentissages pour plusieurs domaines donnés, initient les étudiants à la comparaison de programmes et de manuels, les entrainent à repérer les erreurs significatives dans des productions d'élèves et leur donnent les outils nécessaires à l'élaboration et à l'analyse de séances.

Les trois unités « Stage et culture professionnelle » représentent un total de 24 ECTS sur les deux années. Les heures de « Stage » permettent de compléter ce qui a été fait dans les unités « Les Mathématiques, discipline scolaire » et « Didactique des mathématiques liée aux contenus enseignées », mais aussi de recueillir des données intéressantes pour les deux rapports de stage de la première année et le mémoire professionnel de seconde année. En ce qui concerne la présence devant les élèves, une progression existe : deux stages d'observation (3 heures par semaine sur 5 semaines pour le premier et une semaine complète pour le deuxième) au premier semestre du M1 puis un stage filé de pratique accompagnée d'une semaine avec prise en main d'une classe au deuxième semestre du M1, enfin un stage en responsabilité de deux mois au deuxième semestre du M2. Ces stages permettent d'observer la vie d'une classe, mais aussi celle d'un établissement dans son ensemble (administration, médecine scolaire, infirmerie).

Les heures de « Culture professionnelle » permettent aux étudiants de se préparer à la deuxième partie de la deuxième épreuve orale du CAPES, en particulier la connaissance du système éducatif et de ses acteurs, la déontologie, l'éthique professionnelle, les objets et enjeux sociaux et institutionnels, la prévention et gestion des perturbations, les sanctions et punitions…

1.4. *De la conception de la maquette à sa mise en œuvre*

La maquette n'a pas été parfaitement respectée au moment de la mise en œuvre effective de la formation. Certaines contraintes ont induit des modifications quant à l'organisation des stages. Au premier semestre, les 3 heures par semaine initialement réparties sur 5 semaines ainsi que la semaine bloquée ont été regroupées sur 2 semaines. Au deuxième semestre, 9 jours filés ont remplacé la semaine filée et enfin, au quatrième semestre, si l'année dernière la maquette avait été respectée, cette année, au lieu des deux mois de stage prévus en responsabilité, les étudiants ont effectué entre 54h et 96h de stage de pratique accompagnée.

Au-delà des modifications apportées quant à la planification des stages, se pose le problème de l'accueil des étudiants dans les classes. Les maîtres de stage ne sont pas formés pour assurer le suivi des étudiants et, de plus, ils sont choisis par le directeur de l'établissement selon des critères que les formateurs ne connaissent pas. Il est vrai que la multiplicité des partenaires (IUFM, Rectorat, Etablissements, Université) ne facilite ni les échanges d'informations ni la concertation.

Enfin, du point de vue des formateurs, ces stages ne préparent pas suffisamment les étudiants à l'entrée dans le métier. Or, il ne faut pas oublier que ceux qui auront le CAPES devront assurer un service complet ou presque dès leur année de titularisation.

Les stages sont aussi censés fournir aux étudiants les données nécessaires à la rédaction d'un mémoire professionnel. Au premier semestre, il leur est demandé de rédiger un premier rapport complété au deuxième semestre par des analyses a priori et a postériori des séances décrites pour ensuite, au quatrième semestre[5], rédiger un mémoire professionnel avec choix d'une problématique, une partie théorique et une partie pratique. Or, il est bien difficile pour les étudiants d'exploiter les différents stages dans la perspective de la rédaction d'un mémoire devant s'inscrire dans une certaine continuité du M1 au M2 alors qu'ils doivent faire face à des difficultés souvent peu prévisibles comme par exemple certaines erreurs des élèves.

1.5. La mastérisation : des choix à questionner

La maquette du Master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » de l'Université d'Artois a été conçue pour répondre aux objectifs précis fixés par ses concepteurs. Il s'agissait de proposer une formation disciplinaire suffisamment solide pour permettre une réorientation vers une deuxième année de Master dans une autre spécialité, mais aussi de préparer le concours en prenant en compte la spécificité du métier d'enseignant en mathématiques et en offrant une bonne préparation aux interventions orales. Les stages et les différentes unités professionnelles devaient permettre aux étudiants d'appréhender, dès la première année, les diverses facettes du métier pour éventuellement se réorienter.

Si la volonté des concepteurs de mettre l'accent sur les aspects professionnels de la formation est manifeste, il est légitime de s'interroger sur les effets des changements apportés sur le développement professionnel des futurs professeurs.

2. Le développement professionnel des professeurs débutants

2.1. Le contexte et les contraintes locales

Tant pour le chercheur que pour le formateur, l'intérêt d'étudier l'effet des changements apportés sur le développement professionnel d'enseignants débutants nous a paru important, d'une part pour repérer leur cheminement et d'autre part pour repérer les incontournables dans le cadre de la formation.

Notre étude a débuté en 2009-2010, juste avant la mise en œuvre de la réforme de la mastérisation de la formation des enseignants[6]. Notre intention était alors d'étudier le développement professionnel d'étudiants-professeurs, plus précisément de stagiaires qui avaient suivi la formation PLC2 avant la mastérisation et nous avons ensuite prolongé ce travail par le suivi d'étudiants après mastérisation.

---

[5] Au troisième semestre, il ne leur est pas demandé de remettre un rapport.

[6] Cette recherche a été soutenue par l'IUFM du Nord / Pas-de-Calais entre 2009 et 2011.

Notre démarche consiste à identifier des indicateurs du développement professionnel des professeurs de mathématiques débutants afin de repérer d'éventuels changements induits par la réforme.

2.2. Le cadre théorique

Notre problématique s'inscrit dans un questionnement plus large, celui portant sur le développement professionnel des enseignants. Comment en repérer les traces ? Comment le caractériser ? Dans le contexte de la mastérisation, la question du passage du statut d'étudiant à celui d'enseignant revêt une importance particulière. Comment rendre compte de cette mutation ?

Les travaux sur le développement professionnel soulignent la complexité de ce concept polysémique, multidimensionnel. En témoigne, par exemple, la caractérisation qu'en donne Wittorski (2008) : « *une dynamique personnelle qui sous-tend un parcours de formation, suivi propre à chaque individu, parfois en tension avec la formation proposée* » ; ou encore la conception de Wells (1993) qui l'apparente à un processus d'apprentissage en lien avec la Zone Proximale de Développement (ZPD) de Vygotsky. Si nous rejoignons ces approches, la complexité de ces processus nous impose de nous limiter à l'identification d'un certain nombre d'indicateurs du développement professionnel (modes de prise en compte des problèmes professionnels).

Nous nous inscrivons dans le cadre de la théorie de l'activité et de la perspective développementale de la didactique professionnelle (Pastré 2002) qui conçoivent le développement professionnel comme « *un processus d'élaboration de schèmes, d'invariants opératoires, de concepts organisateurs de l'action* ».

Plus précisément, nous nous référons au cadre de la double approche ergonomique et didactique des pratiques développé par Robert et Rogalski (2002). En tant que professionnels exerçant un métier spécifique qui possède ses propres règles, les enseignants sont soumis à des contraintes. Si une certaine marge de manœuvre existe, chaque enseignant doit toutefois se donner les moyens de prendre en compte et de gérer les plus fortes contraintes du métier. Nous retenons donc pour notre recherche l'idée selon laquelle le développement professionnel est en partie révélé par le niveau de prise en charge des contraintes professionnelles.

Ces différents niveaux de prise en charge sont appréhendés dans la filiation des travaux de Deblois et Squalli (2002) qui permettent de distinguer, dans une cohorte de futurs instituteurs en formation, des postures évolutives : élève, étudiant et enseignant. Notre intention étant de mieux comprendre comment des étudiants deviennent des enseignants, nous retenons de ces travaux la notion de posture comme « *une certaine façon de prendre en compte et de traiter les erreurs des élèves* » pour l'étendre à un certain nombre de problèmes professionnels. Pour ce faire, nous faisons nôtre (dans sa simplicité) l'une des caractérisations de Bucheton (2009) : la posture comme « *une certaine manière de s'emparer de la tâche* ». Dans notre approche, ces tâches sont corrélées aux contraintes professionnelles (Robert et Rogalski 2002).

2.3. Dispositif de recueil de données et démarche

Nos données reposent sur les réponses des futurs enseignants à des questionnaires. Ces questionnaires ont été conçus à partir de nos hypothèses à propos des postures et visent à en faire émerger des indicateurs au sens de Deblois et Squalli (2002, p.223) :

> Un ensemble d'éléments informationnels significatifs perçus, traités et présentés dans l'optique d'évaluer une certaine qualité d'une perspective adoptée par les futurs maîtres.

Le choix des questions est étayé par le plan de formation disciplinaire des PLC2 (un guide des apports potentiels de la formation et des attentes sous-jacentes des stagiaires par rapport à celle-ci), « Qu'est-ce que j'attends de la formation ? Qu'est-ce qu'elle m'apporte ? » et par le référentiel de compétences utilisé pour l'évaluation des stages et du mémoire professionnel (un descriptif en termes d'exigences du métier), « Comment je m'y prends pour régler les problèmes professionnels ? ».

Nous avons travaillé sur environ 80 questionnaires en 2009-2010 puis 5 en 2010-2011 et 8 en 2011-2012[7].

La construction des indicateurs repose sur une étude exploratoire qui nous a permis de mettre en évidence des profils de stagiaires et de dégager des indicateurs (Chenevotot et *al*, à paraître, Mangiante et *al*, à paraître). Cette étude nous donne les outils pour dresser un « état des lieux » du développement professionnel de chaque futur enseignant. Nos indicateurs (cf. tableau 2) mettent en évidence, pour chaque sujet, des niveaux différenciés de prise en compte des contraintes du métier (des postures).

	Niveau 1 **Posture étudiant**	**Niveau 2** **Posture stagiaire**	**Niveau 3** **Posture enseignant**
Indicateur 1 **Prise en compte des programmes et des attentes institutionnelles pour organiser et concevoir son enseignement**	Son enseignement n'est pas hors programme	Se réfère aux programmes et les utilise de façon ponctuelle	Se réfère aux programmes de façon non ponctuelle
Indicateur 2 **Prise en compte des enjeux des apprentissages pour organiser son enseignement**	Envisage le savoir mathématique principalement comme objet d'apprentissage	S'interroge à propos des démarches d'enseignement et des difficultés d'apprentissage	Se pose des questions à la fois plus larges mais aussi plus contextualisées
Indicateur 3 **Prise en compte de l'activité des élèves**	Constate le comportement des élèves	Analyse le comportement des élèves	Ajuste son enseignement au comportement des élèves
Indicateur 4 **Prise en compte des erreurs des élèves**	Identifie les erreurs, repère ce qui est faux	Analyse l'origine des erreurs en termes d'apprentissage non réalisé	Propose un mode (relativement stable) de gestion des erreurs

Tableau 2 – Indicateurs de prise en compte des contraintes du métier

[7] La variabilité des flux s'explique par la baisse actuelle du nombre de candidats pour le concours du CAPES et par la concurrence exercée par les autres universités de l'académie.

L'analyse des données recueillies a permis de dresser le profil de futurs enseignants au regard de nos indicateurs de prise en charge des contraintes les plus fortes du métier, celles qui correspondent aux normes professionnelles. Il existe en effet des normes « dont le respect semble être une valeur en soi » (Cirade 2006, p. 10).

> Tout professeur est ainsi tenu de corriger les travaux de ses élèves et de le faire dans un délai raisonnable. Qui s'affranchirait de cette norme traditionnelle ferait un grand pas vers sa mise au ban professionnel ! (Cirade 2006, p 10).

Mais, nous avons aussi constaté combien le cheminement de chaque individu était singulier, dépendant de ses rapports personnels au métier et à la formation, et c'est pourquoi nous avons introduit un paramètre supplémentaire visant à mieux distinguer les différents profils obtenus. Ce paramètre vise à prendre en compte la dialectique qui s'installe entre les contraintes du métier et les exigences de la formation au sein du parcours de l'étudiant-professeur. Il dépend de l'attitude du PLC face à la formation et à ses collègues, de sa capacité à s'adapter à un nouveau contexte, à l'image qu'il a du métier, de sa capacité à travailler au sein d'une équipe… Il traduit la manière dont le sujet « incorpore » une norme du métier qui peut être fortement liée à la culture de l'institution de formation ou détachée de celle-ci, du moins dans la perception du sujet.

3. Etude de cas

3.1. Présentation

Nous allons présenter quelques études de cas emblématiques par rapport aux questions posées par la recherche et illustrant les changements intervenus dans la formation :

- Avant mastérisation : Manon et Léa (stagiaires PLC1 en 2009–2010)
- Après mastérisation : Zoé et Oscar (étudiants en M1 en 2011–2012)

Quelle est leur prise en compte des contraintes institutionnelles ? Quel est leur rapport à la formation ?

3.2. Avant master : Manon et Léa, un rapport différent à la formation

Manon est stagiaire PLC1 en formation à l'IUFM avant la réforme de la mastérisation. L'analyse des questionnaires montre que celle-ci a une posture enseignant en ce qui concerne la prise en compte des programmes et des attentes institutionnelles pour organiser et concevoir son enseignement (cf. tableau 3, indicateur 1) car elle situe son enseignement dans la continuité des apprentissages. Manon consulte les programmes pour « *savoir ce que les élèves ont acquis et ce qu'ils doivent apprendre* ».

Manon a une posture stagiaire pour la prise en compte des enjeux des apprentissages pour organiser son enseignement (indicateur 2) car elle créé des liens entre les apprentissages, recherche une cohérence entre les savoirs enseignés et la gestion de la classe mais aussi se réfère à son propre vécu en tant qu'élève. Manon construit ses séances selon un déroulement standard (activité introductive, trace dans le cours et exercices). Elle semble toutefois mettre en place des « *modes de communication* » avec les élèves en prélevant régulièrement des informations sur les apprentissages réalisés afin d'ajuster au mieux ses séances.

Manon a une posture enseignant pour la prise en compte de l'activité des élèves (indicateur 3) car elle est capable d'adaptation. Pour Manon, les ajustements portent à la fois sur le travail des élèves et sur l’enseignant. « *Parfois, je change les formulations des propriétés dans la leçon, je change d’activité* ».

Enfin, Manon a une posture stagiaire pour la prise en compte des erreurs des élèves (indicateur 4) car elle ne fait pas le lien avec le savoir. Elle renvoie les élèves à la correction et n’annote la copie que si nécessaire.

Manon	Niv.1	Niv.2	Niv.3
Ind.1			
Ind.2			
Ind.3			
Ind.4			
Manon entretient un rapport utilitaire à la formation et privilégie le compagnonnage			

Tableau 3 : Indicateurs de prise en compte des contraintes du métier pour Manon

Concernant ses attentes en matière de formation, Manon exprime des besoins urgents : un accompagnement sur la gestion de la classe, des astuces, des conseils pour la notation et les punitions. Ses préoccupations semblent très pragmatiques Manon n’adhère pas à la formation. A la question : *« Quels sont les outils construits en formation que vous utilisez régulièrement ? »*. Elle répond : *« Rien. Les meilleurs conseils que l’on me donne viennent des collègues débutants aussi ou des collègues du collège ».*

Le deuxième profil, celui de Léa, également stagiaire PLC1 avant mastérisation, est bien différent. En ce qui concerne la prise en compte des programmes et des attentes institutionnelles pour organiser et concevoir son enseignement (cf. tableau 4, indicateur 1), Léa a une posture stagiaire qui se conforme à un modèle d’organisation pédagogique transmis par l’institution. Elle analyse les programmes pour concevoir ses leçons.

Pour la prise en compte des enjeux des apprentissages pour organiser son enseignement (cf. tableau 4, indicateur 2), Léa a une posture étudiant. Son analyse met en évidence une réflexion en termes de savoirs mais elle se réfère à son propre vécu en tant qu’élève.

Pour la prise en compte de l’activité des élèves (indicateur 3), Léa a une posture stagiaire. Il y a prise de conscience d’une gestion du temps en lien avec les tâches proposées aux élèves et donc avec leur activité. Léa fait des bilans et réajuste : « *gestion du temps - difficultés des exercices* ».

Pour la prise en compte des erreurs des élèves (indicateur 4), Léa a une posture stagiaire car elle fait le lien avec le savoir en jeu. Léa essaie de cibler l’endroit exact où l’erreur apparait et fait référence au cours ou aux propriétés utilisées.

Léa	Niv.1	Niv.2	Niv.3
Ind.1			
Ind.2			
Ind.3			
Ind.4			
Léa est un « bon » sujet qui tire parti à la fois des apports de la formation et de ses stages.			

Tableau 4 – Indicateurs de prise en compte des contraintes du métier pour Léa

Concernant ses attentes en matière de formation, Léa attend des conseils pour la préparation des séances et la gestion de classe. Contrairement à Manon, Léa adhère à la formation. Ses préoccupations initiales sont centrées sur la conception d'un enseignement en conformité avec les exigences institutionnelles. Léa (sans anxiété préalable) a appris de la formation et le stage en établissement lui a vraisemblablement fait découvrir la complexité du métier.

Ainsi, Manon et Léa prennent toutes les deux en compte certaines contraintes du métier mais leur rapport à la formation est très différent. Si Léa est soucieuse de répondre aux attentes des formateurs, Manon résiste à la formation. Il faut aussi souligner le rôle que joue le stage dans le développement professionnel de Manon. En effet, malgré son manque de confiance vis à vis de la formation, celle-ci investit tout autant que Léa son futur métier mais cela se fait directement via les expériences vécues en classe.

3.3. Après master : Zoé et Oscar, une prise en compte différente du comportement des élèves

Zoé est étudiante en master M1. Ses réponses sont si incomplètes que nous ne pouvons situer avec suffisamment d'arguments ni sa prise en compte des programmes et des attentes institutionnelles pour organiser et concevoir son enseignement (cf. tableau 5, indicateur 1), ni sa prise en compte des erreurs des élèves (indicateur 4).

Toutefois, nous sommes en mesure d'attester que Zoé a une posture enseignant pour la prise en compte des enjeux des apprentissages pour organiser son enseignement (indicateur 2) car elle perçoit les enjeux des apprentissages et la complexité du métier. Elle précise que :

> Les cours sont basés sur les échanges avec les élèves. C'est une autre manière d'enseigner. Le prof a beaucoup plus de missions. Il ne fait pas que transmettre un savoir.

Elle intègre des activités TICE dans ses enseignements.

Enfin, les réponses que Zoé révèlent une posture enseignant pour la prise en compte de l'activité des élèves (indicateur 3) car elle est capable de s'adapter aux élèves. Elle relate une expérience d'enseignement au cours de laquelle elle a su s'adapter aux élèves, en particulier en ce qui concerne la gestion du temps.

Zoé	Niv.1	Niv.2	Niv.3
Ind.1			
Ind.2			
Ind.3			
Ind.4			
Zoé n'a aucune expérience mais exprime des besoins concernant les savoirs.			

Tableau 5 – Indicateurs de prise en compte des contraintes du métier pour Zoé

Zoé n'a pas d'expérience en termes de situations éducatives Ses attentes en matière de formation portent principalement sur les enjeux des activités d'apprentissage, leur conception et leur mise en œuvre en lien avec la gestion de la classe. Zoé adhère et a une opinion sur la formation, souhaite une étude plus approfondie des programmes et des méthodes dans le secondaire, davantage de pratique.

Nous terminons par le profil d'Oscar, également étudiant en M1. Là encore, nous ne pouvons renseigner certains indicateurs. Les réponses d'Oscar ne permettent de situer ni sa prise en compte des programmes et des attentes institutionnelles pour organiser et concevoir son enseignement (cf. tableau 6, indicateur 1), ni sa prise en compte des erreurs des élèves (indicateur 4).

Pour la prise en compte des enjeux des apprentissages pour organiser son enseignement (indicateur 2), Oscar a une posture stagiaire. Il prépare ses séances, élabore des barèmes de correction de DS.

Pour la prise en compte de l'activité des élèves (indicateur 3), Oscar a une posture étudiant car il prend en compte le comportement des élèves mais pas davantage. Oscar est éducateur sportif et a fait de l'aide aux devoirs mais « *les élèves ont changé et le métier aussi* ». Il a appris « *à ne pas montrer son stress aux élèves* ». Cela peut sembler au premier abord paradoxal, mais son expérience à gérer des jeunes au sport, à aider des élèves, ne semble pas lui apporter une certaine assurance. Contrairement à Zoé, ses propos traduisent une plus grande sensibilité au comportement des élèves. Cela peut s'expliquer par le fait qu'il connaît peut-être mieux les adolescents que Zoé.

Oscar	Niv.1	Niv.2	Niv.3
Ind.1			
Ind.2			
Ind.3			
Ind.4			
Oscar tire peu profit de ses expériences éducatives qu’il ne relie pas avec les contraintes du métier.			

Tableau 6 – Indicateurs de prise en compte des contraintes du métier pour Oscar

Oscar a une expérience des situations éducatives. Pour autant, ses attentes en matière de formation révèlent des besoins touchant à l’ensemble des contraintes du métier, le besoin d’être rassuré. Oscar apprécie la formation qui « *donne des idées pour gérer la classe, éviter que le cours ne parte à la renverse* ». Oscar tire parti de la formation mais sans doute de façon un peu scolaire, en termes d’aides tant pour la gestion de la classe que pour la conception de situations d’apprentissage.

Zoé et Oscar témoignent tous les deux d’une prise en compte différente du comportement des élèves. Malgré des profils distincts, dus en partie à des parcours et des expériences différentes, Zoé et Oscar se réfèrent, tous les deux, prioritairement à la formation pour investir leur futur métier.

3.4. Conclusion sur l’étude de cas

Les études de cas que nous venons de présenter illustrent les régularités qui se dégagent des profils des étudiants-professeurs suivis avant et après la réforme.

Avant mastérisation, le rôle des stages dans le développement professionnel des jeunes enseignants est prépondérant. En particulier, le stage leur permet de prendre conscience des difficultés du métier (comportement et travail des élèves) auxquelles ils sont confrontés. Les stagiaires s’appuient sur leur vécu lors des stages et se distinguent par leur manière de prendre en compte ces difficultés.

Après mastérisation, les étudiants s’appuient sur la formation et perçoivent le métier à travers le filtre de la formation. Plus précisément, les étudiants adhèrent à la formation même s’ils entretiennent un rapport parfois « utilisateur » vis-à-vis de celle-ci. Ils prennent peu en compte l’étendue des « savoirs du professeur de mathématiques ». Mais cependant, ils ne restreignent pas ces savoirs à la connaissance approfondie des programmes. La prise en compte de l’activité mathématique des élèves leur apparait moins centrale ou elle est moins appréhendée. Ils jugent la formation par les stages en responsabilité trop faible.

4. Les Perspectives

4.1. Présentation du dispositif futur

Les résultats de notre étude et également notre position de formateurs auprès des futurs professeurs de mathématiques nous ont permis de relever que les étudiants rencontrent certaines difficultés pour passer de la posture « d'étudiant » à celle « d'enseignant » lorsqu'ils sont confrontés à leurs classes en début de carrière.

Suite à ce constat, les responsables du master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » de l'Université d'Artois ont décidé d'accepter la proposition de Madame Le Recteur de transformer ce master en un master en alternance à titre expérimental pour l'année 2012-2013. Cependant, les volumes horaires sont maintenus dans toutes les unités afin de conserver la co-habilitation établie avec les autres universités du Nord / Pas-de-Calais.

Dès la rentrée prochaine, les étudiants effectueront, au cours de leur première année de Master, un stage d'observation - pratique accompagnée. Le maître de stage sera toujours présent dans la classe. Ce stage aura lieu de mi- septembre à juin à raison d'une journée par semaine soit entre 4h et 6h de stage par semaine, toujours dans le même établissement.

De plus, ces étudiants auront la possibilité de faire, sur la base du volontariat, de l'accompagnement éducatif ou de l'aide aux devoirs, ce qui leur permettra d'être seul face à des élèves en petit groupe et d'être rémunérés pour ces heures.

En deuxième année du Master, les étudiants auront une classe en responsabilité dès le premier jour de la rentrée de septembre 2012 et ce jusqu'au dernier jour de l'année scolaire. Chaque étudiant sera suivi par un maître de stage, mais celui-ci ne sera pas présent dans la classe. Pour ne pas surcharger l'emploi du temps des étudiants, seules des classes de collège, de premières des sections Littéraires ou Economiques et Sociales pourront leur être confiées, soit 3 à 4h par semaine, réparties sur deux demi-journées. Les étudiants seront rémunérés.

4.2. Les avantages de ce nouveau dispositif

Ce dispositif est basé sur le volontariat (alternance / classique). Cependant, après discussions avec les étudiants, ceux-ci souhaitent tous faire le master par alternance et sont très satisfaits de pouvoir commencer les stages dès septembre.

De plus, il va exister une vraie progression dans les stages avant la réussite au CAPES : Observation – Pratique accompagnée – Une seule classe en responsabilité dès le début de l'année – Un service complet ou presque pendant l'année de titularisation. La transition se fera donc « en douceur ».

En première année, le volume horaire sera supérieur et, en deuxième année, ils auront la certitude d'avoir un stage dans l'Education Nationale. En effet, cette année, les étudiants non admissibles devaient chercher un stage hors Education Nationale, par exemple, dans un GRETA. Des réunions avec les maîtres de stage, l'inspection, les équipes universitaires, les responsables des stages à l'IUFM vont être organisées pour discuter des contraintes des étudiants de Master qui préparent un concours mais effectuent aussi des stages (en pratique accompagnée ou en responsabilité).

4.3. Les inconvénients de ce nouveau dispositif

Ce dispositif implique une organisation différente par rapport aux années précédentes. Il va également obliger les étudiants de deuxième année à travailler davantage, en particulier entre septembre et novembre où ils devront mener de front le stage, le master et la préparation au concours.

Beaucoup d'étudiants de deuxième année seront en collège alors qu'ils ont déjà effectué des stages en collège en première année et n'auront donc pas de stage en lycée. Mais est-ce un problème dans la mesure où la majorité des admis sont affectés en collège ?

4.4. Du côté des formateurs (partie professionnalisante)

En première année

Nous allons augmenter la cohérence entre les enseignements proposés pour étudier les Mathématiques en tant que discipline scolaire.

Nous allons leur fournir des outils d'analyse de gestes professionnels, d'analyse des pratiques enseignantes à partir de vidéos (postures de l'enseignant, activité de l'élève). La conception et l'analyse a priori mais aussi a posteriori de séances ainsi que la « lecture » des programmes ne seront pas oubliées.

Nous commencerons à préparer les oraux du CAPES, mais aussi à travailler à partir d'articles de revues (Repère IREM, Petit x) pour préparer le mémoire professionnel du semestre 4.

En deuxième année

Nous allons poursuivre le travail de suivi collaboratif (formateurs mathématiciens, historiens, didacticiens) dans le cadre de l'élaboration par les étudiants de leur mémoire professionnel.

Nous allons créer du lien entre formation disciplinaire, professionnelle et entrée réflexive dans le métier

Conclusion

La réforme de la mastérisation a conduit les formateurs à repenser, au sein même de l'organisation des cursus, l'articulation entre la formation théorique et la formation professionnelle et à faire des choix. Malgré la volonté à l'Université d'Artois de conserver un certain équilibre entre les différents objectifs poursuivis, les modalités de stage ont considérablement été modifiées. Ces changements ne sont pas sans conséquence sur la manière dont les étudiants appréhendent leur futur métier.

Dans cette communication, notre analyse du développement professionnel de professeurs de mathématiques débutants révèle des transformations sur le rapport aux contraintes du métier de ces futurs enseignants. Les stages n'occupant plus la même place dans la formation, ces derniers découvrent le métier dans un contexte que l'on pourrait qualifier de protégé et le perçoivent principalement à travers le filtre de la formation.

Nos résultats reposant principalement sur des données déclaratives issues de questionnaires, nous envisageons de poursuivre cette analyse en nous basant sur le discours sur le ressenti des acteurs, à partir de ce qu'ils mettent vraiment en place dans les classes : conception de séquences d'enseignement, test de ces ressources dans les classes, analyses de vidéos, analyses de productions d'élèves. Nous souhaitons axer notre étude sur la pratique effective des professeurs débutants.

REFERENCES

Bucheton, D. (2009) L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés. Toulouse : Octarès.

Chenevotot, F., Galisson, M.-P., Mangiante, C. (à paraître) Une étude du développement professionnel de professeurs de mathématiques débutants. *16ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*. 8 pp. Carcassonne, France, 21 au 28 août 2011.

Cirade, G. (2006) Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problèmes professionnels. *Thèse de doctorat*. Marseille : Université Aix-Marseille1.

Deblois, L, Squalli, H. (2002) Implication de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres du primaire. *Educational Studies in Mathematics* 50, 213-238.

Mangiante, C., Chenevotot-Quentin, F., Galisson, M.-P. (à paraître) Développement professionnel de professeurs débutants : Quels indicateurs ? Quels retours vers la formation ? In Dorier J.L. (Ed) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2012, Enseignement et contrat social : enjeux et défis pour le 21ème siècle.* 14 pp. Genève, Suisse, 3 au 7 février 2012.

Pastré, P., (2002) L'analyse du travail en didactique professionnelle. *Revue Française de Pédagogie* 138, 9-16.

Robert ,A., Rogalski, J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des Sciences, des Mathématiques et de la Technologie* 4(2), 505-528.

Wells, G. (1993) Working with teacher in the zone of proximal development: Action research on the learning and teaching of sciences. *Ontario Institute for Studies in education*. www.oise.utoronto.ca/gwells/teacherzpdf.txt

Wittorski, R. (2008) La professionnalisation, Note de synthèse. http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00339073/fr/

LA FORMATION EN DIDACTIQUE ET SES LIENS AVEC LES AUTRES MODULES DE LA FORMATION : LE CAS DU MASTER « MATHEMATIQUES ET ENSEIGNEMENT » A TOULOUSE

Marie-Hélène LÉCUREUX-TÊTU

Résumé – On présente ici quelques-uns des dispositifs mis en place dans le cadre du master *Mathématiques et enseignement* (ME) proposé par l'université Toulouse 3, en association avec l'IUFM Midi-Pyrénées. Nous nous centrerons plus particulièrement sur la formation en didactique, pour l'essentiel issue des recherches menées en théorie anthropologique du didactique (TAD), et sur les liens entre cette formation et la préparation aux épreuves d'admission du CAPES.

1. Présentation générale du master *Mathématiques et enseignement* à Toulouse

L'IUFM Midi-Pyrénées est une école interne de l'université Toulouse 2 Le Mirail (UT2), « arts lettres et langues, sciences humaines et sociales, sciences technologies santé, droit économie gestion », qui comporte un département de mathématiques et un département de sciences de l'éducation.

En mathématiques, avant la « mastérisation », l'IUFM avait la maîtrise des deux années de formation des PLC de mathématiques. En première année, l'enseignement y était dispensé majoritairement par des formateurs IUFM. Quelques enseignants chercheurs de l'université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3), l'université toulousaine qui possède le plus gros département de mathématiques (environ 150 enseignants chercheurs et enseignants) intervenaient dans la formation pour la préparation au CAPES, pour un nombre d'heures assez faible. La préparation à l'agrégation dépendait de l'université Toulouse 3.

Lors de la mastérisation, un accord cadre a été signé entre l'académie de Toulouse, le PRES et les établissements d'enseignement supérieur. L'université Toulouse 3 a ainsi obtenu la responsabilité des masters donnant accès au recrutement des enseignants du second degré, en mathématiques, physique-chimie, sciences de la vie et de la terre, et EPS.

Nous nous intéressons au master donnant accès au recrutement des enseignants du second degré en mathématiques : le master ME (Mathématiques et enseignement). Ce master, monohabilité par UT3, est adossé à l'institut de mathématiques de Toulouse, UMR qui ne comporte pas de didactique. Ce master ME possède deux parcours, le parcours Agrégation et le parcours CAPES. Le parcours Agrégation ne comporte pas d'enseignement de didactique. Nous nous intéresserons ici au parcours CAPES.

Les maquettes de master, plus particulièrement de ce qui deviendra le « parcours CAPES » auquel nous nous intéresserons dans cette communication, ont été élaborées par une petite équipe constituée de personnels d'UT3 et de formateurs IUFM. La maquette a été faite pour assurer la préparation au CAPES tout en réservant une place non négligeable, mais un peu marginale, à des UE de didactique. Le master est pris en charge par une institution qui n'a pas de légitimité en termes de formation des professeurs (les mathématiciens qui interviennent dans le cadre du master n'ont pas les compétences en matière de formation à l'enseignement qu'ont les formateurs IUFM et ne connaissent que très marginalement l'enseignement secondaire avec lequel ils n'ont généralement aucun rapport professionnel).

Dans la présentation que l'on peut trouver sur le site du master, ce qui est mis en avant est la préparation aux épreuves d'admissibilité, les « écrits », et aux épreuves d'admission, les « oraux », la préparation « professionnelle » ne donnant lieu qu'à une prise de contact (voir le site de ce master : http://www.math.univ-toulouse.fr/m2me) ; on y trouve une rubrique « objectifs généraux », dont voici un extrait :

Ces deux années de formation consistent en premier lieu en une préparation intensive aux écrits et aux oraux du CAPES/CAFEP de mathématiques. Elles permettent en second lieu une prise de contact progressive avec la réalité de l'exercice du professorat, sous forme de cours, de conférences et de stages. En troisième lieu, elles permettent de mieux percevoir le rôle des mathématiques dans la science et la société, à travers des projets et des conférences d'ouverture vers la recherche académique ou appliquée. Une réorientation vers d'autres parcours en mathématiques est possible au premier semestre.

Les conférences d'ouverture signalées dans la citation ci-dessus n'ont jusqu'à présent jamais eu lieu. Des UE autour de la notion de modélisation ainsi que des UE d'histoire des mathématiques font travailler le lien entre la science et la société.

Chaque semestre, une UE est consacrée « à la prise de contact progressive avec la réalité de l'exercice du professorat ». Ces quatre UE sont intitulées « didactique des mathématiques et stage » : DDMS1, DDMS2, DDMS3 et DDMS4. Tous les stages sont de type SOPA (stage d'observation et de pratique accompagnée).

La maquette est révélatrice du poids de la préparation du concours. Les diagrammes circulaires ci-dessous donnent la répartition des horaires sur les 600 h présentielles par an. Ils ont été construits à partir des objectifs affichés de chaque UE. Les UE de modélisation et d'histoire des mathématiques dont la finalité est de faire travailler le lien entre la science et la société ont été rassemblées, de façon un peu simplificatrice, sous l'intitulé « culture ». Il est à noter que la préparation à l'oral du second semestre du M2 comporte la formation à l'épreuve « agir en fonctionnaire de façon éthique et responsable ».

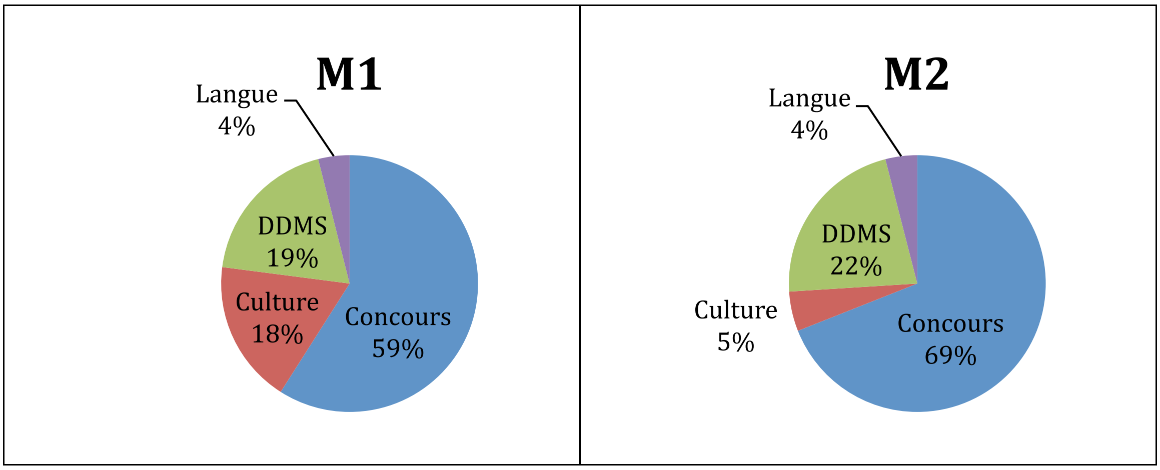


Figure 1 – Répartition des horaires sur les 600 présentielles par an

En sus des 600 h en M1, les étudiants doivent réaliser un travail d'étude et de recherche qui porte sur les mathématiques.

En M2, il faut rajouter plusieurs journées d'oraux blancs et la formation au C2i2e aux 600 h prévues par la maquette.

2. Organisation générale de l'enseignement de didactique

À chaque semestre du master, l'enseignement de la didactique est une partie de l'UE intitulée « didactique des mathématiques et stage 1, 2, 3 ou 4 ». Nous donnons ici le cadre général de cet enseignement. Les cours magistraux DDMS1, DDMS3 et DDMS4 sont réalisés par une MCF didacticienne, DDMS2 par une formatrice PRAG.

DDMS 1 comprend des heures d'enseignement ainsi qu'un stage d'une semaine dans un établissement scolaire du second degré. La préparation et l'exploitation du stage sont assurées dans le cadre des enseignements, qui comportent une partie consacrée à la didactique des mathématiques (25 h) et une autre à la connaissance du système éducatif (15 h). Les heures de connaissance du système éducatif sont soit des conférences données par des acteurs du système éducatif (chef d'établissement, CPE, etc.), soit des TD. La formatrice chargée de ces TD est MCF en psychologie.

DDMS 2. Cette UE comprend des heures d'enseignement ainsi qu'un stage de deux semaines dans un établissement scolaire du second degré. Entièrement consacrée à la didactique des mathématiques, elle comporte 24 h de cours, 18 h de TD et 18 h de TP en salle informatique. Cet enseignement donne lieu à un mémoire professionnel.

DDMS 3. Les enseignements de cette UE sont pensés pour assurer à la fois la préparation aux épreuves d'admission et la préparation du stage du M2, d'une durée de quatre semaines, qui aura lieu au début du semestre suivant. Ils comportent une partie consacrée à la didactique des mathématiques (60 h décomposées en 24 h de cours, 24 h de TD et 12 h de TP) et une autre partie consacrée à la conduite de classe (12 h de TD, dédoublés, encadrés par deux MCF en psychologie).

DDMS 4. Pour ce dernier semestre du master, l'étude du système éducatif n'est plus conduite dans le cadre de l'UE « DDMS », mais dans celui de la préparation de l'épreuve sur dossier du CAPES. L'UE DDMS 4 ne comporte donc que de la didactique des mathématiques (incluant, comme les autres UE DDMS, l'étude des mathématiques à enseigner), en 60 h décomposées en 20 h de cours, 20 h de TD et 20 h de TP. Cet enseignement donne lieu à un travail d'étude et de recherche (TER) qui, actuellement, s'appuie fortement sur le stage.

3. Analyse de la partie « cours » des UE didactique des mathématiques et stage

Le cours est préparé sur traitement de texte, et projeté pendant la séance. Après avoir éventuellement été modifié en cours de séance en fonction des interventions des étudiants, il est ensuite mis en forme et déposé sur le bureau numérique de l'université de Toulouse (BUT) sous forme de fichier PDF. Les étudiants ont ainsi un support pour l'étude aussi complet que possible. Ce sont ces notes de séances qui ont servi à l'analyse du cours présentée par la suite : l'analyse repose sur ces traces écrites, (Cirade 2012 ; Lécureux-Têtu 2012) et non pas sur une observation de séances.

1. Dispositifs présents dans tous les semestres

Les séances de didactique commencent toujours par une information pour la promotion. Cette information, qui peut éventuellement concerner tout le master, contribue à créer une unité à la classe. En particulier, c'est à ce moment qu'il est expliqué aux étudiants l'organisation des stages, ce qui sera demandé dans le mémoire, etc. En début d'année, il est mis à disposition des étudiants des fichiers qui rassemblent les programmes des classes du primaire au cycle terminal dans les différentes sections, et les documents « Ressources pour la classe ».

La séance se poursuit par une « veille » sur les informations professionnelles, qui donne les informations utiles parues au *BO*, sur le site *Éduscol*, etc. Ces informations sont de tous ordres : aussi bien administratif, que concernant l'enseignement des mathématiques. On donne ainsi aux étudiants l'habitude de la consultation des sites officiels.

Lors de certaines séances a lieu un dispositif particulier : le « forum des questions ». Ce dispositif est inspiré de ce qui a été mis en place il y a maintenant une vingtaine d'années à l'IUFM d'Aix-Marseille. Un temps est pris pendant le cours pour que chaque étudiant rédige par écrit une question relative aux difficultés rencontrées dans la formation. La liste de ces questions, rendues anonymes, est disponible pour la promotion, devenant ainsi un problème posé devant la promotion. Un travail collectif pourra alors avoir lieu, à partir de ces problèmes, ce travail étant différé.

2. Analyse du cours de didactique de DDMS 1

Dans le cadre des UE DDMS, l'enjeu de l'étude est le « type de tâches suivant, qui est la raison d'être du professeur de mathématiques : mettre en place, dans une classe de collège ou de lycée, une certaine organisation de savoir “mathématique” » (Chevallard 2002, Organiser l'étude 1, p. 5).

Pour réaliser ce type de tâches, il faut savoir déterminer l'organisation de savoir mathématique à mettre en place. L'observation des classes pendant les stages ne suffit pas à l'acquisition de ce savoir : nous avons remarqué depuis longtemps que, sans formation préalable, les futurs professeurs devant observer une séance se focalisent sur la gestion de la classe. Nous l'avons observé aussi bien avec les anciens stagiaires PLC2 ou, depuis la réforme, avec les étudiants de master.

Aussi pour la formation de didactique en DDMS1, nous nous intéressons au type de tâches :

T_0 : *« Observer et analyser une séance de mathématiques dans l'enseignement secondaire, plus particulièrement les mathématiques enjeu de l'étude et la structure de la séance. »*

L'observation sera travaillée essentiellement au cours du stage d'une semaine, qui a lieu en novembre.

Pour étudier l'analyse d'une séance, on utilise au début du semestre une observation déjà réalisée, via la vidéo et le compte rendu d'une séance, comme par exemple celle d'une séance menée en classe de 4^{e} en 2004-2005 par une professeure stagiaire à l'époque (bien que le programme de la classe ait changé depuis, cette séance présente plusieurs avantages pour apprendre à analyser).

Dans cette séance, les élèves ont à construire le sommet *C* d'un triangle *ABC*, les sommets *A*, *B* et le centre de gravité *G* de ce triangle étant donnés.

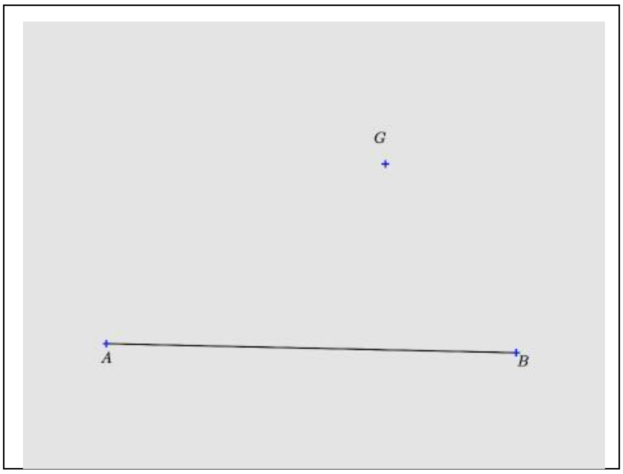


Figure 2 – Construire le sommet C d'un triangle ABC, les sommets A,B et le centre de gravité G de ce triangle sont donnés

Pour résoudre ce problème de construction, il émerge dans la classe le fait que le centre de gravité a une position bien précise sur les médianes.

Un premier avantage de cette séance est que l'analyse du savoir mathématique mis en place n'est pas trop complexe. En TAD, on peut modéliser cette organisation mathématique de la façon suivante (extrait des notes de séance) :

> Le *type de tâches T* étudié peut s'énoncer ainsi : « D'un triangle *ABC* [quelconque], il ne reste que le côté [*AB*] et le centre de gravité *G* ; construire le point *C* à la règle et au compas. »
> La *technique* τ qui émerge dans la classe peut être décrite ainsi :
> 1) Construire le milieu *C'* de [*AB*].
> 2) Tracer la demi-droite [*C'G*).
> 3) Sur la demi-droite [*C'G*) et à partir de *G*, reporter deux fois la distance *C'G*. Le deuxième point obtenu est le point *C*.
> La *technologie* θ, soit le discours qui justifie que cette technique permet bien d'obtenir le résultat escompté, s'appuie sur plusieurs éléments technologiques (définition d'une médiane, propriété de concours des médianes, etc.), l'élément technologique clé, enjeu de l'étude durant la séance, étant énoncé ainsi : « Dans un triangle, le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet. »

L'organisation mathématique (OM) est composée du type de tâches, de la technique, de la technologie ainsi que de la théorie Θ. Un élément théorique ici est que, quel que soit l'endroit où l'on est, on réalisera la même figure. La notion de théorie est évoquée, mais ne sera pas travaillée ici. Une organisation mathématique complète est l'ensemble [*T* / τ / θ / Θ]. On utilisera aussi la notion de praxéologie (extrait des notes de séance) :

> Une telle organisation [*T* / τ / θ / Θ] est appelée, d'une manière générale, une ***praxéologie*** (ou organisation praxéologique), le mot de « praxéologie » décalquant la structure [*T* / τ / θ / Θ], puisqu'il est formé à partir du grec ***praxis***, qui signifie « pratique », et qui renvoie au bloc pratico-technique [*T* / τ] et du grec ***logos***, qui signifie « raison », « discours raisonné » et renvoie au bloc technologico-théorique [θ / Θ].

Le second avantage de la séance observée est qu'elle montre la réalisation d'une AER (activité d'étude et de recherche). Les étudiants voient ainsi la réalisation d'une séance en conformité avec ce qui est préconisé depuis un certain nombre d'années dans l'enseignement secondaire, et qu'on modélise en TAD par la notion d'organisation ternaire de l'étude : AER, synthèse, exercices et problèmes (quaternaire si l'on rajoute les travaux notés).

En TAD, ce qu'on appelle « activité d'étude et de recherche » (AER) est un dispositif visant à faire émerger l'OM dans son ensemble en permettant la réalisation des trois premiers moments de l'étude. Dans la séance observée, c'est ce qui se produit : après avoir compris ce qui était demandé (moment de première rencontre), essayé de faire la construction (moment exploratoire), la classe se rend compte qu'il serait bien commode de savoir où se place le centre de gravité sur une médiane ; la classe travaille alors sur des triangles pour conjecturer la position du centre de gravité (moment de création du bloc technologico-théorique, la propriété centrale étant justifiée expérimentalement) avant de revenir au moment exploratoire.

Les séances qui seront analysées au cours de ce semestre montreront des AER, ce qui permet de rencontrer plus facilement lors de l'analyse, l'OM enjeu de l'étude « au complet », et cela permet aussi aux étudiants de rencontrer la structuration ternaire de l'étude, comme le montre l'extrait suivant du document de cours :

> Le schéma suivant symbolise le changement intervenu depuis plus d'une vingtaine d'années, au collège d'abord, puis, plus progressivement, au lycée (dans l'immédiat, nous laisserons de côté les questions relatives à l'évaluation) :

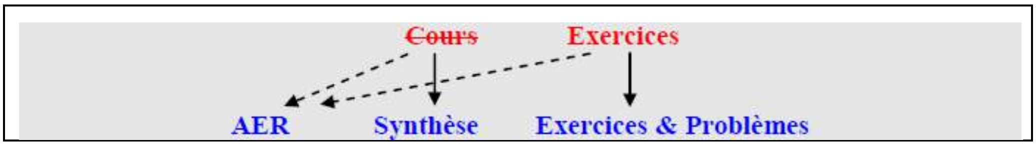


Figure 3 – Changement intervenu depuis plus d'une vingtaine d'années

> Comme l'indiquent les flèches, le contenu du « cours » d'autrefois est reversé pour l'essentiel dans la ***synthèse*** – laquelle, on le verra, ne se limite pas pour autant à ce seul contenu. Semblablement, une partie de la catégorie traditionnelle des « exercices » trouve sa place dans les ***activités d'étude et de recherche (AER)***, le terme d'***exercices*** reprenant ici son sens vrai : on ne saurait l'appliquer qu'à ce qui permet ***de s'exercer***, et non, par conséquent, à une difficulté que l'on rencontre ***pour la première fois***.

Le fait de choisir des séances avec des AER dignes de ce nom pour l'analyse permet de faire émerger un point important : le professeur doit enseigner une OM complète, l'enseignement ne doit pas se restreindre à une partie de l'OM, (Chevallard 2009). Ce point est toujours difficile, les étudiants ont toujours tendance à ne dégager que la technologie et à passer sous silence les blocs pratico-techniques.

Durant ce semestre, les étudiants auront appris à analyser la structure d'une séance en repérant les grandes phases de cette séance, et en se demandant : est-ce une AER ? Une synthèse ? Une résolution d'exercices ou de problèmes ? Dans ces phases ils auront appris à déterminer les types de tâches, les techniques et technologies des organisations mathématiques enjeux de l'étude. On travaille essentiellement sur les organisations mathématiques ponctuelles (OMP), ce qui correspond à des sujets d'étude.

Ce premier enseignement de la didactique est accompagné d'un travail sur des sujets du concours. Il a été repris un extrait de la première épreuve d'admissibilité du CAPES 2010, proche du problème de construction de la première séance étudiée. Ce travail a surtout eu pour but de faire travailler les mathématiques « pour le professeur », plus que les « outils » de la didactique. En particulier, il est apparu des faiblesses sur le raisonnement par analyse-synthèse, auxquelles on a essayé de remédier. Un autre travail mathématico-didactique a été fait sur les rationnels et les racines carrées en 3e.

Le travail d'analyse de séance s'est poursuivi en analysant une autre séance, contenant une AER : on considère un parallélogramme *ABCD*, le point *C* est en dehors de la feuille ; il faut tracer la diagonale (*AC*).

Dans la seconde partie du semestre, les étudiants se sont exercés à dégager des OMP sur des exercices proposés par le jury dans l'épreuve sur dossier du CAPES. Cette année, ce travail a été fait plus particulièrement sur un exercice sur les nombres complexes. Les faiblesses en mathématiques des étudiants ont rendu difficile le travail d'analyse des OMP : pour pouvoir analyser un problème, il faut commencer par le résoudre, et ce n'est pas facile pour tous les étudiants.

3. Analyse du cours de didactique de DDMS 2

Deux organisations du savoir didactique ont été présentes dans le cours de DDMS2, l'une autour de l'analyse, l'autre autour de la conception. Nous allons les présenter successivement.

Dans un premier temps, l'analyse est approfondie en passant de l'analyse structurelle à l'analyse fonctionnelle ; pour cela on utilise le modèle des moments de l'étude, que nous rappelons brièvement ci-dessous.

En TAD, on modélise le déroulement de l'étude par six moments (qui ne se présentent pas forcément dans cet ordre en classe). L'extrait de cours de DDMS2 propose la synthèse suivante :

- Lorsque la classe va rencontrer le type de tâches à étudier, il y a eu un moment de première rencontre avec le type de tâches *T*.
- Lorsqu'il s'agit de faire émerger une technique, on a un épisode de ce qu'on appelle le moment exploratoire ; cela reste vrai même si la technique ne fonctionne pas.
- Lorsqu'il s'agit de dégager un élément technologique, c'est-à-dire un élément de ce qu'on appelle l'environnement technologico-théorique, on dit qu'il s'agit là d'un épisode relevant du moment technologico-théorique.
- Lorsqu'on met en forme les composantes de l'organisation mathématique, on a un épisode de ce qu'on appelle le moment d'institutionnalisation. […]
- Le moment de travail où l'on s'exerce.
- Le moment d'évaluation où l'on évalue en particulier la technique et la maîtrise que l'on a de cette technique.

Pour commencer cette analyse fonctionnelle, on s'est appuyé sur le compte rendu de séance proposé à l'analyse (des OM et structurelle) lors de l'examen terminal du semestre précédent. Après la correction de l'analyse de l'OM étudiée, et de l'analyse structurelle de la séance, les questions suivantes sont posées :

> À partir des organisations mathématiques précisées pendant le temps de correction, on se pose les questions suivantes :
> 1) Quels sont les éléments T_i, τ_i, θ_i des organisations mathématiques qui sont le plus travaillés dans la séance ?
> 2) Comment se fait ce travail ?

Lorsqu'on veut analyser les moments de l'étude réalisés, une technique consiste à se poser ces questions, les réponses permettant de déterminer les moments de l'étude. Cela implique d'avoir fait l'analyse des organisations mathématiques correctement au préalable.

Dans l'avancée du cours de DDMS2 les moments de l'étude ont été rencontrés progressivement. Au départ, la séance étudiée comporte principalement un moment technologico-théorique, qui a été présenté de façon isolée. Ensuite, on analyse la séance déjà rencontrée en DDMS1, présentant une AER (propriété du parallélogramme), ce qui permet de découvrir les premiers moments de l'étude.

Parallèlement, on a poursuivi le travail d'analyse d'OMP en analysant des énoncés extraits du document « Ressource pour la classe de première générale et technologique, statistiques et probabilités» sur les probabilités en première. Le choix de ce document est motivé par deux raisons : les mathématiques à enseigner, mais aussi le fait que dans ce document on voit apparaître un moment d'évaluation de la technique, ce qu'on observe assez rarement.

La synthèse sur les moments de l'étude sera faite au milieu du semestre. On poursuivra en analysant les moments de l'étude dans la première séance étudiée en DDMS1. On travaille aussi les différents types d'évaluation.

Il est à noter que pour réaliser l'analyse sur les séances comportant une AER, on a vu apparaître la notion de milieu didactique. En effet la justification des technologies s'est faite dans ces séances à partir d'une organisation mathématique ponctuelle, qui n'est pas enjeu de l'étude, mais qui appartient au milieu.

Le travail sur la conception de séquences s'effectue par le biais du dispositif des mémoires professionnels de ce second semestre. On s'intéresse particulièrement au type de tâches

T_1 : « Concevoir l'organisation mathématique à mettre en place pour enseigner un secteur donné »

Ce mémoire est réalisé en équipe. Les sujets concernent des secteurs d'enseignement, comme les vecteurs en seconde, ou le calcul littéral en quatrième. Il est demandé aux équipes de commencer par réfléchir aux points suivants (extraits des notes de séances) :

> 1) Chercher les types de tâches T_i enjeux de l'étude, dans les programmes eux-mêmes, dans les documents ressources, les sites internet, les manuels scolaires.
> 2) Voir quels sont les liens entre ces différents types de tâches.
> 3) Déterminer les techniques et technologies permettant d'accomplir les types de tâches enjeux de l'étude.

Un des objectifs du mémoire professionnel est de faire rencontrer aux étudiants des organisations mathématiques régionales (OMR), c'est-à-dire au niveau d'un secteur, ou des organisations mathématiques locales (OML), c'est-à-dire au niveau d'un thème (une séquence d'enseignement), pour arriver à penser l'enseignement de façon moins diffractée, (Bosch, Fonseca, Gascón 2004).

Deux personnes encadrent les mémoires professionnels : la formatrice chargée des TD, la formatrice chargée du cours. Il n'y aura pas d'autre indication donnée de façon générale sur le contenu du mémoire. Les formatrices encadrantes guident le travail de chaque équipe, mais devant toute la promotion : pendant chaque TD et chaque cours, les équipes présentent l'avancée de leur travail devant tous.

Plusieurs fois les étudiants ont été amenés à réfléchir à la façon de modéliser les organisations mathématiques sur lesquelles ils ont travaillé. Plusieurs équipes ayant travaillé sur les fonctions (en troisième, en seconde) ont ainsi fait émerger la question : faut-il penser au type de tâches « résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = a$ », puis à la même chose de façon algébrique, ou faut-il penser à « résoudre une équation de la forme $f(x) = a$ », en déclinant dans la technique le choix entre utiliser le graphique ou l'équation ? Le mémoire a permis de s'interroger collectivement sur la façon d'analyser.

Ainsi le travail en commun devant la promotion a permis de s'interroger collectivement sur l'analyse d'une OM, de mettre en évidence des praxéologies communes dans plusieurs secteurs et de faire en sorte que des liens soient identifiés par les étudiants.

Au cours de la rédaction du mémoire, il a été plusieurs fois demandé aux équipes de réfléchir aux raisons d'être des praxéologies à l'étude dans l'enseignement des mathématiques. On a pu noter qu'il est très difficile pour les étudiants de déterminer des raisons d'être de ce qui est enseigné en mathématiques.

4. Les stages en M1

En M1, les étudiants partent en stage une semaine au premier semestre, en novembre, et deux semaines au second semestre, en mars.

L'introduction des notions de didactique enseignées en M1 ne s'appuie que très peu sur les stages réalisés par les étudiants eux-mêmes. Les mémoires de stage (l'un au premier semestre du M1, l'autre au second) servent au travail des notions déjà rencontrées, en particulier l'observation de l'organisation mathématiques ponctuelle (premier semestre), et l'organisation mathématiques locale (second semestre), comme le montrent les extraits de la lettre adressée aux maîtres de stage :

Extrait de la lettre pour DDMS1

> Votre rôle, durant cette période, sera surtout de les aider à observer les séances en classe (l'enjeu mathématique de la séance et l'organisation de l'étude, avec notamment le rôle des élèves et le rôle du professeur) ainsi que la façon dont l'enseignement est organisé (séances et séquences, travail hors classe, évaluation, etc.).

Extrait de la lettre pour DDMS2

> Votre rôle, durant cette période, sera surtout de les aider à observer les séances en classe (l'enjeu mathématique de la séance et l'organisation de l'étude, avec notamment le rôle des élèves et le rôle du professeur) ainsi que la façon dont l'enseignement est organisé (séances et séquences, travail hors classe, évaluation, etc.), en portant une attention particulière à l'organisation des séquences d'enseignement.

Au premier semestre, les étudiants ont eu à faire une analyse de la structure de la moitié des séances observées. Il a été demandé la réalisation d'au moins une séance durant le stage, aucune description n'a été demandée dans leur mémoire de stage.

Au second semestre, il était demandé aux étudiants de faire une analyse rapide de la structure des séances pour toute une séquence, choisie avec le maître de stage. Il a été demandé de réaliser deux séances au cours du stage, et de décrire rapidement la préparation, le déroulement, un petit bilan.

Les stages ont été aussi l'occasion de développer la connaissance du système éducatif.

Les questions qui ont pu se poser aux étudiants pendant le stage sont discutées par le biais du forum des questions.

5. Analyse du cours de didactique DDMS3

Durant ce semestre, les TD seront beaucoup plus liés au cours qu'en DDMS2. En particulier, c'est en TD qu'on prend le temps de poser les questions du forum des questions, et le cours sera le lieu des réponses.

Ce semestre va être l'occasion d'une reprise d'étude sur les notions étudiées au premier semestre, et d'autant plus qu'il faut permettre à quelques étudiants venant de M1 de mathématiques, sans didactique, d'acquérir ces notions.

Pour ce faire, on donne à analyser un compte rendu de séance, en classe de seconde. Cette séance comporte une AER sur les variations de fonctions du second degré. Cette AER est construite à partir d'une situation du monde (un problème d'enclos). On y rencontre une organisation mathématique enjeu secondaire de l'étude, autour de la résolution d'une équation de la forme $f(x) = k$.

On appelle organisation mathématique mixte (OMM) une organisation autour d'un type de tâches qui n'est pas seulement mathématique (Chevallard 2002, Organiser l'étude 3, p. 48). Dans une synthèse, il sera montré comment présenter une OMM, et l'analyse des deux organisations mathématiques, celle qui est enjeu principal, et celle qui est enjeu secondaire, et leur lien entre elles.

Les contraintes d'organisation ont pesé cette année et ont perturbé l'étude de la didactique. Des séances de cours où cette analyse a été travaillée ont été séparées de trois semaines, ce qui n'a pas facilité l'apprentissage. Cela explique pourquoi cette séance a été la seule analysée avant l'examen partiel.

Après l'examen partiel, en cours comme en TD, il a été travaillé en classe l'analyse de sujets de l'épreuve sur dossier du CAPES. On s'est efforcé de dégager, non seulement l'OM enjeu de l'étude, mais aussi les moments de l'étude – certains sujets se rapportent au moment technologico-théorique, d'autres au moment de travail, etc. –, ce qui a permis une reprise partielle de l'étude du cours du deuxième semestre de M1.

6. Analyse du cours de DDMS4

Ce semestre commence par le stage de quatre semaines en établissement, où les étudiants vont observer pendant la première semaine, et « prendre en main » une classe pendant les trois dernières semaines. Chaque étudiant devra réaliser un compte rendu de séance, qui sera exploité par la suite dans le TER. Comme en M1, les étudiants devront faire l'analyse d'une séquence, en analysant la structure et le contenu. Ils apporteront aussi des traces écrites d'élèves. Ce travail permet des remontées du terrain qui sont très utiles pour la formation.

Au retour du stage, lors de la première séance, en réponse à la question, issue du forum des questions « comment obtenir le calme en classe », deux comptes rendus de visite de professeurs stagiaires sont présentés. Dans les deux comptes rendus apparaissent des problèmes d'agitation, qui sont reliés à des problèmes de conception de séance : l'organisation mathématique mise en place dans la séance montre des faiblesses.

Ainsi apparaît la raison d'être de l'enjeu de l'étude pour ce semestre, qui sera autour du type de tâches :

T'_0 : « *Observer, analyser, évaluer une séance de mathématiques et développer une éventuelle amélioration.* »

On remarquera que ce type de tâches est un prolongement du type de tâches T_0 travaillé en M1.

Cette étude sera faite à partir du dispositif du travail d'étude et de recherche (TER). Les TER sont réalisés en équipe, à partir d'un compte rendu de séance choisi parmi ceux rapportés par l'équipe. Quatre formatrices encadrent les équipes.

Un TER collectif est réalisé pendant les cours de DDMS4. Ce TER est mené à partir d'une séance réalisée en 4^e sur le thème de la proportionnalité. Ce travail, étalé sur cinq séances de cours, permet de montrer ce qui est attendu dans le TER, et comment le réaliser.

Un temps de travail par équipe pour la réalisation du TER de chaque équipe est pris pendant le cours ; une seconde formatrice a pu intervenir permettant ainsi de dédoubler la promotion. Cela a permis de soulager les étudiants, qui par ailleurs sont très sollicités par la préparation au concours, bien évidemment.

Les difficultés d'organisation du semestre n'ont pas permis de faire un travail qui nous satisfasse sur le développement.

7. Retours des étudiants, lien avec le concours

Cette année, UT3 a organisé une évaluation de tous ses masters.

Les étudiants délégués du M2 ont signalé qu'ils utilisaient beaucoup l'analyse de l'OM pour la préparation à l'épreuve sur dossier. Cela correspond à ce que l'équipe de formation a pu noter : la notion de praxéologie peut être considérée comme utilisée par la plupart des étudiants. Il est à souligner que les formateurs intervenant dans les UE de didactique ou les UE de préparation à l'épreuve sur dossier sont généralement familiers avec cette notion et son utilisation et que les nouveaux formateurs sont pris en charge par l'équipe. Des étudiants ont pu utiliser aussi l'analyse praxéologique pour la préparation à l'épreuve de leçon, alors que certains formateurs n'ont aucune formation en didactique.

Le modèle des moments de l'étude a été beaucoup moins réinvesti par les M2. Le cours de didactique de M1 présenté ici n'est pas exactement celui qui a fonctionné l'an dernier, les M2 actuels ont moins travaillé en didactique les moments de l'étude, et dominent moins cette notion que la notion de praxéologie. Il sera intéressant de voir si les promotions suivantes arrivent à utiliser les moments de l'étude pour la préparation au concours.

RÉFÉRENCES

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004) Incompletud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques, 24*(2-3), 205-250.

Chevallard, Y. (2002) Organiser l'étude 1. Structures & fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2002) Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2009) Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée ? Les mathématiques dans la cité. *Exposé présenté dans le cadre des conférences de la Famille mathématique le 18 mars 2009 à l'IUFM d'Aix-Marseille.*

Cirade, G. (2012) *Didactique des mathématiques et stage 1 – Année 2011-2012* (document interne).

Cirade, G. (2012) *Didactique des mathématiques et stage 3 – Année 2011-2012* (document interne).

Cirade, G. (2012) *Didactique des mathématiques et stage 4 – Année 2011-2012* (document interne).

Lécureux-Têtu, M.-H. (2012) *Didactique des mathématiques et stage 2 – Année 2011-2012* (document interne).

MEN (2011) *Ressources pour la classe de première générale et technologique, Statistiques et probabilités.*

Annexe

	UE1	UE2	UE3	UE4	UE5	UE6	UE7	UE8		UE9
	Disciplinaire						Culture disciplinaire professionnelle (CDP)	CDP et intervention didactique	CDP et Intervention éducative	Culture professionnelle
S1	Analyse 1 60h 6 ECTS	Algèbre 60h 6 ECTS	Probabilités Statistiques 60h 6 ECTS	Analyse 2 (option) 40h 4 ECTS			Les Mathématiques, discipline scolaire et culture professionnelle (option) 60h 4 ECTS	Stages et 24h	culture professionnelle 12h 6 ECTS	Anglais 24h 2 ECTS
S2	Analyse numérque et programmation (option) 60h 6 ECTS	Arithmétique (option) 60h 6 ECTS	Séminaires de recherche (option) 30h 3 ECTS	Histoire de l'enseignement de mathématiques (option) 30h 3 ECTS	Épistemologie et histoire des mathématiques 60h 6 ECTS	Didactique des mathématiques liée aux contenus des enseignements (option) 60h 6 ECTS	Leçons de mathématiques et initiation à la recherche 60h 6 ECTS	Stages et 24h	culture professionnelle 12h 6 ECTS	
S3	Mathématiques pour l'enseignement 108h 12 ECTS	Géométrie 60h 6 ECTS					Leçons de mathématiques et initiation à la recherche 40h 6 ECTS	Formation à l'usage professionnel des nouvelles technologies 48h 6 ECTS		
S4a	Préparation à la première épreuve orale 84h 8 ECTS						Préparation à la deuxième épreuve orale disciplinaire 72h 12h 8 ECTS	Stages et mémoire professionnelle 36h	culture professionnelle 12h 12 ECTS	Anglais 24h 2 ECTS
	S4a est adressé aux étudiants admissibles									
S4b	Préparation théorique aux stages en enterprise 84h 6 ECTS						Autre langue vivante 36h 4 ECTS	Stages en enterprise et mémoire professionnelle 48h 14 ECTS		Anglais 54h 6 ECTS
	S4b est adressé aux étudiants non-admissibles en réorientation									
S4c	Préparation à la première épreuve orale 84h 8 ECTS						Préparation à la deuxième épreuve orale 72h 12h 8 ECTS	Stages en enterprise ou en milieu scolaire 48h 12 ECTS		Anglais 24h 2 ECTS
	S4c est adressé aux étudiants non-admissibles en gardant un projet d'enseignement									

Tableau 1 : Maquette Master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » (gris foncé : disciplinaire ; gris clair et très clair : histoire, professionnalisation et pluridisciplinaire)

BILAN DES ATELIERS DISCUSSION SUR LES MASTERS « ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES »

Michèle GANDIT, Sylvie COPPE, Aurélie CHESNAIS, Lalina COULANGE, Jean-Philippe LE BORGNE

On note une grande disparité des dispositifs de formation et même des intitulés dans les masters : les mêmes intitulés de formation recouvrent des contenus très différents.

Place, forme et contenu des mémoires de master

Les mémoires sont placés différemment dans les cursus des masters : en première ou bien seconde année, ou encore sur les deux niveaux. Même si les objectifs de formation sont communs, la forme du mémoire oscille entre celle d'un écrit amenant l'étudiant à une réelle réflexion professionnelle et celle d'un écrit directement opérationnel, compte tenu des nouvelles contraintes.

Conclusion

- Il est nécessaire que les étudiants connaissent les programmes et la littérature professionnelle et qu'ils sachent l'utiliser.
- Il est important qu'ils sachent présenter leurs pratiques, échanger et écrire autour de leurs pratiques.
- Le mémoire doit permettre au futur enseignant d'analyser ses pratiques d'enseignement avec des outils, en se centrant sur les contenus.
- Des liens devraient être faits entre les différentes composantes de la formation telles que les stages, le C2i2e et la préparation à l'oral 2 du CAPES. Aussi est-il demandé une épreuve de concours liée au mémoire professionnel, avec un cadrage serré et explicite.

Place de la didactique dans les enseignements

Nous avons remarqué la très grande disparité entre universités concernant la place de la didactique dans les masters et les contenus enseignés : de quelques heures dans certains masters à une place confortable dans d'autres ; de contenus très appliqués au métier dans certains masters à l'enseignement des concepts de didactique dans d'autres. Une tendance s'est dégagée dans l'atelier : à partir d'exemples professionnels, on nomme certains concepts de la didactique. Dans certains masters cependant, on enseigne des théories didactiques.

Conclusion

- Il est demandé une réflexion nationale sur la place de la didactique dans les masters et les contenus à enseigner. Quels concepts de didactique enseigner ?

Quelles théories ? Et surtout, la didactique doit-elle être explicitement enseignée ou seulement utilisée par les formateurs ?

- La formation dispensée dans les masters étant à visée professionnelle, nous demandons une coordination entre les unités d'enseignement relatives au métier et l'organisation des stages.
- Nous avons les moyens, à partir de la recherche en didactique des mathématiques, de déterminer les savoirs professionnels utiles aux enseignants.
- Nous demandons que les contenus des enseignements dans les masters soient équilibrés entre savoirs mathématiques et savoirs pour l'enseignement (didactique et sciences humaines et sociales).
- Nous demandons des mémoires qui portent vraiment sur des questions du métier.

Organisation des stages durant les deux années de master

On note une très grande diversité concernant les stages : durée dans l'année, fonction, objectifs, accompagnement, contenu, organisation, évaluation, etc…, avec de fortes contraintes venant des diverses institutions (universités, rectorat, master). Il a été question des modalités de stage (filé ou groupé), des avantages et des inconvénients des deux types, ainsi que de l'accompagnement des stages (quels contenus sont abordés, quels sont les formateurs). Les choix des lieux de stage et des tuteurs ne sont pas toujours cohérents, ni pertinents. Il a été également discuté du lien entre le stage et le mémoire professionnel ou le rapport de stage. Les visites sont-elles prévues ou non, sont-elles formatives ou évaluatives, prises en compte ou non dans l'évaluation du master ? La formation des enseignants en alternance va se développer ; elle va s'accompagner d'une remise en question des rythmes et des contenus de la formation.

Conclusion

- Prévoir une progressivité dans les stages : stage d'observation, stage de pratique accompagnée, stage en responsabilité.
- Prévoir une formation et une professionnalisation des tuteurs.
- Les stages doivent aussi permettre aux étudiants de découvrir l'établissement en dehors de la classe.
- Concernant les stages, il est demandé un cadrage national.
- Il est également demandé la reconnaissance des compétences professionnelles lors des concours de recrutement des enseignants.

Liens entre la préparation au concours et la professionnalisation

Il n'a pas semblé nécessairement naturel d'articuler la préparation au concours et la professionnalisation. On s'est cependant demandé comment, dans les unités d'enseignement, qui ne relèvent pas de la préparation au concours, favoriser la prise en compte de la préparation aux épreuves orales du concours ou comment amener des éléments de professionnalisation dans les unités d'enseignement destinées à la préparation des épreuves orales. L'épreuve dite d'oral sur dossier (oral 2) semble être l'épreuve la plus tournée vers la professionnalisation.

Une grande hétérogénéité a été constatée concernant les contenus et les horaires des unités d'enseignement destinées à la préparation au concours. Sur le plan de l'articulation entre les stages et la préparation au concours, la première année de master permet aux étudiants de faire une synthèse des mathématiques enseignées dans le secondaire, les stages favorisant la prise en compte des savoirs liés aux mathématiques enseignées en collège ou en lycée. Les données recueillies en stage sont moins intéressantes, sur le plan professionnel, qu'avant la mastérisation, ce qui amène, dans les enseignements de master, à une centration plus grande sur les savoirs enseignés.

Il semble clair que les étudiants des différentes universités ne sont pas tous placés dans les mêmes conditions par rapport au concours. Ils établissent eux-mêmes une hiérarchie dans les différentes unités d'enseignement, privilégiant, dans l'ordre, d'abord le concours, ensuite le master, enfin la professionnalisation.

Conclusion générale

- Un cadrage national est-il possible ou non ?
- Nous demandons qu'il y ait un pré-recrutement des futurs enseignants.
- Nous retenons l'idée d'un oral professionnel (en référence à l'épreuve du CAPES interne) qui consisterait en un dossier que le candidat présenterait au jury, en lien avec les stages suivis.
- Deux points importants à retenir : l'encadrement du stage (préparation, accompagnement et exploitation), de même que le lien de celui-ci avec le mémoire au sein des masters.