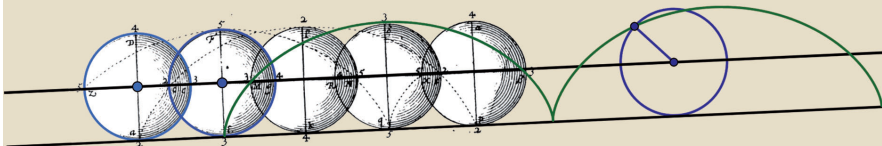


# Géométries d'hier à demain

Pratiques, méthodes, enseignement

Sous la direction de  
Nathalie CHEVALARIAS



$b = 27.5$





Géométries d'hier à demain :  
Pratiques, méthodes, enseignement

ISBN : 978-2-85954-107-1

©IREM&S de Poitiers, juillet 2022

bâtiment H3, SP2MI Futuroscope, Boulevard Marie et Pierre Curie

TSA 61 125, 86 073 POITIERS Cedex 9

Téléphone : (33-0) 5 49 45 38 77

Fax : (33-0) 5 49 49 69 01

Mél : irem@math.univ-poitiers.fr

Comité d'organisation du colloque : Youssef Barkatou, Nathalie Chevalarias, Nathalie Echevard, Dominique Gaud, Julien Michel.

Comité de pilotage PNF du colloque : Pierre Ageron, Youssef Barkatou, Bertrand Cavaye, Nathalie Chevalarias, Frédéric Métin, Yann Muzellec, Claudine Picaronny, Anne-Marie Sanchez, Evelyne Touchard.

Comité scientifique : Pierre Ageron, Évelyne Barbin, Nathalie Chevalarias, Frédéric Métin, Dominique Tournès.

Relecteurs et relectrices : Pierre Ageron, Évelyne Barbin, Dominique Baroux, Sandra Bella, Alain Bernard, Anne Boyé, Martine Bühler, Philippe Chauvin, Nathalie Chevalarias, Thierry Chevalarias, Maryse Cheymol, Renaud Chorlay, Dominique Gaud, François Goichot, Jacqueline Guichard, Jean-Paul Guichard, Loïc Jussiaume, Odile Kouteynikoff, Hombeline Languereau, Frédéric Laurent, Xavier Lefort, David Leprêtre, Anne-Valérie Marignan, Philippe Martinet, Frédéric Métin, Anne Michel-Pajus, Nicolas Minet, Guillaume Moussard, Marc Moyon, François Plantade, Dominique Tournès, Didier Trotoux.

Mise en page : Philippe Chauvin et Nathalie Chevalarias

Conception de l'affiche et de la couverture des actes : Jocelyne Attab et Nathalie Chevalarias

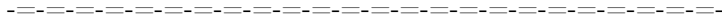
Illustrations de la couverture : d'après des figures extraites de MANESSON-MALLET Allain, 1702, *La géométrie pratique*, volume 1, Chez Anisson, Paris, Planche LXXI p. 181 (Domaine Public) ; CLAIRAUT Alexis-Claude, 1741, *Éléments de géométrie*, Chez David Fils, Paris, Planche V (Domaine Public) ; Père André TACQUET, 1992, « Dissertation physico-mathématique sur les roulements du cercle », *Courrier du Centre International Blaise-Pascal* [en ligne], n° 14, <https://journals.openedition.org/ccibp/620> (dernier accès 02/07/2022)

Imprimeur : RBS 86, 4 Bd Jeanne d'Arc, 86000 Poitiers

Sous la direction de Nathalie CHEVALARIAS

# GÉOMÉTRIES D'HIER À DEMAIN :

Pratiques, méthodes, enseignement



IREM&S de POITIERS  
2022



## Sommaire

Introduction	1
<b>I Géométrie et grandeurs</b>	<b>11</b>
1 Les <i>Éléments</i> de géométrie, d'Euclide au début du XIX <sup>e</sup> : une source d'inspiration pour les enseignants et enseignantes	13
2 Aires sans formules	29
3 Rectangulation & quadrature des figures	47
4 Décomposer un solide : de la Chine des Han à une exploration en classe avec les outils d'aujourd'hui	75
5 La duplication du cube vue par deux algébristes de la Renaissance	91
6 La géométrie comme science de courbes	111
<b>II Géométrie pratique</b>	<b>129</b>
7 Mesurer la terre et l'univers : de l'Histoire à la pratique en classe	131
8 Quelques calculs d'aires pour un quadrilatère, entre XV <sup>e</sup> et XX <sup>e</sup> siècle	155

---

9	Géométrie pratique d'inaccessibles, avec G. de Longchamps	165
10	Planimètres, intégraphes, tractoriographes : les instruments de la géométrie transcendante	185
III	Géométrie et algorithmique	203
11	La géométrie pour justifier ou inventer des algorithmes : Autour des <i>Métriques</i> de Héron d'Alexandrie	205
12	La géométrie graphique : vers un langage de programmation des algorithmes de tracés des figures géométriques	223
IV	Géométrie et art	241
13	À la recherche des modèles géométriques des mosaïques antiques	243
14	Deux enquêtes sur la « géométrie pratique » romaine	259
15	Apports de la perspective à la géométrie – Illustrations dans l'histoire et l'enseignement	273
V	Enseignement de la géométrie	289
16	Importance et diversité des méthodes dans l'enseignement secondaire de la géométrie en France au XIX <sup>e</sup> siècle	291
17	La conception houëllienne de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire dans les années 1860-1880 : une approche « expérimentale » basée sur une version revisitée des <i>Éléments</i> d'Euclide	309
18	Tours et détours de l'enseignement de la géométrie au XX <sup>e</sup> siècle	325
19	Approche des fondements épistémologiques de la géométrie du cycle 3	347
20	Comment structurer l'étude des expressions géométriques de la proportionnalité au cycle 4 ?	363
21	Des recherches en histoire pour comprendre le contenu des manuels d'aujourd'hui ? La révolution de l'ère Meiji et les manuels de géométrie actuels dans les collèges japonais	387

---

<b>VI Géométrie et géométries</b>	<b>403</b>
<b>22 De quelques notables tentatives de démonstrations du cinquième postulat d'Euclide : de l'Antiquité au XVII<sup>e</sup> siècle</b>	<b>405</b>
<b>23 Le père Jésuite Giromalo Saccheri (1677-1733) correcteur d'Euclide et inventeur de résultats de la géométrie hyperbolique à venir</b>	<b>419</b>
<b>24 La géométrie tropicale, benjamine des géométries</b>	<b>441</b>
<b>Table des matières</b>	<b>463</b>
<b>A propos des auteurs et des autrices</b>	<b>469</b>





# Introduction

Nathalie CHEVALARIAS

La géométrie est présente dans les programmes d'enseignement de l'école primaire à l'université sous des formes très diverses : géométrie des figures, géométrie vectorielle, géométrie analytique, etc. On peut l'aborder sous l'aspect « construction », sous l'aspect « numérique », sous l'aspect « démonstration ». Selon les niveaux, différents choix et différentes situations peuvent se présenter. L'histoire des mathématiques peut apporter aux enseignants et enseignantes des éléments de réflexion pour prendre du recul sur ces choix et organiser les contenus.

Le rapport « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » de Cédric Villani et Charles Torossian indique : « En tirant parti de l'histoire des mathématiques, les professeurs inscrivent leur enseignement dans l'évolution de la pensée. De plus, les élèves sont souvent sensibles à la “légende des mathématiques”. La narration peut jouer ici un rôle motivant. D'autre part, les leçons épistémologiques qui se dégagent de l'histoire (rôle des problèmes, enchevêtrement des concepts et des techniques, nécessité de l'abstraction) sont évidemment de nature à contribuer à la formation, notamment en permettant de dépasser un utilitarisme à courte vue. »<sup>1</sup> Il est possible d'aller plus loin dans son utilisation en s'appuyant sur des situations, des textes, des problèmes hérités de l'histoire des mathématiques. La commission Inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques<sup>2</sup> propose depuis de nombreuses années d'introduire une perspective historique en classe, avec les élèves. Il ne s'agit pas de faire de l'histoire des mathématiques mais bien de faire des mathématiques en s'appuyant sur leur histoire. Intégrés à la progression, ces éléments contribuent à donner du sens aux notions et problèmes tout en développant l'esprit critique. Les programmes du lycée général donnent d'ailleurs, depuis 2019, des indications en ce sens : « L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items

---

1. Le rapport est accessible à l'adresse <https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242>

2. <https://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique15>

“Histoire des mathématiques” identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur peut s’appuyer sur l’étude de documents historiques. »

Les chapitres de cet ouvrage présentent des expériences et proposent des ressources en histoire des mathématiques à l’intention des enseignants et des formateurs dans le domaine de la géométrie. Ils donneront des éléments de réponses à des questions fondamentales pour l’enseignement. Pourquoi et comment les savoirs géométriques ont-ils été construits et pratiqués ? Comment peut-on extraire de sources historiques des situations géométriques pertinentes pour l’enseignement d’aujourd’hui et exploitables avec les nouveaux outils pédagogiques ? Comment la géométrie a-t-elle été enseignée en différents temps et différents lieux ? En quoi a-t-elle joué un rôle moteur dans le développement d’autres domaines des mathématiques comme l’algèbre ou l’analyse ?

## Géométrie et grandeurs

La première partie de cet ouvrage aborde la géométrie sous l’aspect de l’étude des grandeurs longueur, aire et volume. Dans « *Les Éléments de géométrie*, d’Euclide au début du XIX<sup>e</sup> : une source d’inspiration pour les enseignants et enseignantes », Dominique Baroux et Martine Bühler commencent par revenir sur l’importance des cas d’égalité des triangles et de la notion d’aire dans les démonstrations d’Euclide. Ces méthodes ont perduré jusque dans des manuels du XIX<sup>e</sup> siècle. Elles proposent en particulier une réflexion sur des démonstrations du théorème sur les lignes proportionnelles. Selon que l’on utilise ou pas des formules pour exprimer les aires des triangles et selon la manière dont on manipule les rapports de longueurs, des difficultés différentes se présentent et nous questionnent sur la manière de travailler ces démonstrations en classe actuellement. Elles attirent notre attention en conclusion sur l’importance de ne pas occulter la vision des aires comme grandeurs au profit de leur vision comme nombres à travers des formules.

Illustrant ce propos, Carène Guillet et Marie-Line Moureau proposent de travailler au lycée des « Aires sans formule ». Elles présentent dans ce deuxième chapitre cinq problèmes autour des aires qui ont été traités avec des élèves ou des stagiaires : « étant donné un polygone convexe, construire un carré de même aire » (en seconde), « trouver un triangle égal à un cercle » (en première), « déterminer des aires de surfaces curvilignes par des méthodes d’invention » (en seconde), « quelle relation y a-t-il entre l’aire du cercle générateur et celle sous une arche de cycloïde ? » et « comparer l’aire du segment de parabole à celle du triangle inscrit » (en stage de formation continue). Les activités proposées s’appuient sur des textes historiques. Elles permettent, entre autres, de réinvestir la géométrie de collège, de travailler le raisonnement par l’absurde, d’illustrer des problèmes avec des logiciels de géométrie dynamique répondant ainsi à diverses demandes des programmes de lycée.

Nous restons sur le sujet des aires avec le chapitre de Jean-Paul Guichard « Rectangulation & quadrature des figures » qui nous emmène de l’Inde védique du XV<sup>e</sup> siècle av. J.-C. à l’Angleterre du début du XX<sup>e</sup> siècle en passant par la Chine, Alexandrie, Bagdad et Nuremberg. De nombreux exemples de constructions de quadratures de figures sont donnés. Ils fournissent des pistes de travail

abordables au collège et au lycée, en particulier sur le théorème de Pythagore, sur la démonstration en s'interrogeant sur l'exactitude des constructions et sur la résolution de problème en tenant compte du contexte dans lequel il s'est posé.

Après les longueurs et les aires, Philippe Martinet nous présente un travail mené en EPI au collège avec un collègue de technologie dans le chapitre « Décomposer un solide : de la Chine des Han à une exploration en classe avec les outils d'aujourd'hui ». Nous suivons en détail sa lecture d'un passage des *Neuf Chapitres*, ses choix pour construire une activité et la présentation qu'il en fait aux élèves. Après une étude de découpage de solides avec les figures définies par Liu Hui, les élèves vont construire des maquettes numériques et papier de leur propre solide en s'appuyant sur un logiciel de modélisation 3D. Pour les volumes comme pour les aires, l'utilisation de logiciels permet de mettre en œuvre des constructions anciennes pour les étudier et les comprendre avec des outils modernes, et réciproquement, ces problèmes fournissent des situations-problèmes riches pour travailler avec les logiciels de manière raisonnée et non artificielle.

Les deux derniers chapitres de cette première partie s'appuient encore au départ sur des problèmes concernant des grandeurs géométriques, mais ils vont ouvrir davantage de perspectives vers d'autres domaines des mathématiques – même si l'algèbre pouvait déjà être sous-jacente à certaines situations évoquées ci-avant. Avec la trisection de l'angle et la quadrature du cercle, la duplication du cube fait partie des trois grands problèmes de l'Antiquité dont l'impossibilité sera démontrée au XIX<sup>e</sup> siècle. Odile Kouteynikoff nous en fait découvrir deux solutions dans « La duplication du cube vue par deux algébristes de la Renaissance ». Ces deux méthodes proposées mêlent étroitement l'algèbre et la géométrie. La première est une mise en œuvre géométrique de la technique de double fausse position que l'on trouve, entre autres, chez Fibonacci pour la résolution de problèmes numériques. La deuxième s'appuie sur la construction de moyennes proportionnelles. Bien sûr, nous savons rétrospectivement que ces solutions ne peuvent être exactes, ce qui permet – au-delà de la compréhension des méthodes et du lien avec l'algèbre – de réfléchir à la notion d'erreur dans les démonstrations.

Enfin, Évelyne Barbin part aussi de ces grands problèmes grecs dans « La géométrie comme science de courbes », mais pour montrer comment l'invention de certaines courbes a permis de donner des réponses à ces problèmes. Elle présente ensuite de nombreuses autres situations – problèmes cinématiques ou physiques – qui, à partir du XVII<sup>e</sup> siècle, conduisent à étudier les courbes selon de nouveaux aspects et même à définir le concept de courbe, et plus tard celui de fonction. Ce panorama très riche nous amène à réfléchir sur les programmes scolaires où les courbes tiennent une place secondaire par rapport aux fonctions alors qu'elles sont le support de problèmes scientifiques en lien étroit avec l'analyse.

## Géométrie pratique

La deuxième partie ne quitte pas vraiment les grandeurs, qui restent des objets essentiels de la géométrie, mais en les abordant sous l'aspect de la géométrie pratique. Dans « Mesurer la terre et l'univers : de l'Histoire à la pratique en classe », Anne-Marie Aebischer liste de nombreux instruments de cette géométrie pratique :

le bâton de Gerbert, l'arbalestrille, le bâton de Jacob, la croix du bûcheron, le carré géométrique et l'équerre articulée. Présentant pour chacun le contexte dans lequel il a été créé ainsi que son inventeur, elle détaille ensuite le principe de leur utilisation en théorie et en pratique, en particulier pour la mesure de distances inaccessibles (largeur d'une rivière, hauteur d'une tour, profondeur d'un puits), et elle donne des pistes concrètes d'utilisation en classe ainsi que des indications pour construire ses propres instruments.

Dans le chapitre suivant, « Quelques calculs d'aires pour un quadrilatère, entre XV<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècle », Anne Boyé et Xavier Lefort développent sur un même exemple de départ les méthodes données par trois arpenteurs : Boysset au début du XV<sup>e</sup> siècle, Pellos à la fin du XV<sup>e</sup> siècle et Abraham au début du XVII<sup>e</sup> siècle. Ils comparent les résultats obtenus, entre eux et à des méthodes exactes de calcul, ce qui permet de s'interroger sur l'exactitude des méthodes d'un point de vue théorique, mais aussi aux contraintes liées à la prise de mesures réelles. Ces deux premiers chapitres sur la géométrie pratique s'appuient sur les notions relativement élémentaires de la géométrie du collège ou du début du lycée. Les deux suivants nous emmènent plus loin dans les contenus mathématiques de la fin du lycée voire du supérieur.

Tout d'abord, René Guitart nous fait découvrir la « Géométrie pratique d'inaccessibles, avec G. de Longchamps ». De manière générale, l'ouvrage de Longchamps privilégie l'utilisation de notions de géométrie développées au XIX<sup>e</sup> siècle (transversales, division harmonique, perspective, inversion...) sur des problèmes pratiques, notamment des problèmes d'arpentage et d'art de la guerre. Plusieurs exemples sont détaillés dans le chapitre comme la construction d'une ellipse point par point, le calcul de la distance d'un point donné à un point inaccessible et invisible depuis le point donné ou encore le calcul de l'aire d'un triangle inaccessible. Ces problèmes sont, chez Longchamps, des supports d'enseignement de théories géométriques qui peuvent être source d'inspiration pour l'enseignement dans le supérieur.

Puis nous retrouvons des instruments dans le chapitre « Planimètres, intégraphes, tractoriographes : les instruments de la géométrie transcendante ». Les planimètres servent à mesurer des surfaces, l'intégraphe permet de construire une courbe intégrale de la courbe d'une fonction  $f$  donnée et enfin le tractoriographe qui construit la tractoire d'une courbe et qui permet, entre autres, de réaliser la quadrature du cercle. Dominique Tournès, Isabelle Voillequin et Claude Voillequin décrivent chacun de ces instruments, expliquent leur utilisation pratique et en détaillent la justification mathématique.

## Géométrie et algorithmique

Si la troisième partie revient sur le calcul d'aire et la construction de figures, c'est sous un aspect algorithmique qu'elle s'y intéresse. L'algorithmique est de plus en plus présente dans les programmes de l'enseignement primaire et secondaire. La géométrie peut être un support de la mise en œuvre et de la construction d'algorithmes, que ce soit dans le domaine numérique ou dans le domaine graphique. Dans « La géométrie pour justifier ou inventer des algorithmes : Autour des *Métriques* de Héron d'Alexandrie », Alain Bernard expose deux propositions

de Héron, celle des calculs de l'aire et de l'hypoténuse d'un triangle rectangle et celle du calcul de l'aire d'un trapèze rectangle. En s'appuyant sur les textes de Héron qui mêlent l'aspect numérique du calcul de grandeur et celui géométrique de la démonstration qui légitime ce calcul, il réhabilite les algorithmes correspondant à de « simples » formules de calcul dans l'enseignement actuel. En associant les étapes du calcul à celles de la démonstration, il invente le concept d'« algorimonstre » et nous propose une réflexion sur l'enseignement des formules d'aires en primaire et au collège.

Le deuxième chapitre de cette partie « La géométrie : vers un langage de programmation des algorithmes de tracés des figures géométriques » nous amène à nous intéresser à la notion de complexité d'un algorithme. Sylviane R. Schwer y présente les travaux de Lemoine, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle sur une nouvelle branche des mathématiques dont le principe est de traduire les raisonnements et constructions scientifiques à l'aide d'un langage formel pour en calculer leur « simplicité » puis leur « exactitude » afin de les comparer, d'en améliorer l'efficacité. D'un point de vue des connaissances, le calcul de complexité d'un algorithme relève davantage de l'enseignement supérieur. Mais l'état d'esprit et les calculs de la géométrie de Lemoine apportent des éléments de réflexion sur les activités de constructions géométriques, à la main ou avec des logiciels, que nous pouvons proposer aux élèves.

## Géométrie et art

La quatrième partie de cet ouvrage aborde la géométrie sous un angle plus artistique. L'art et la géométrie ont toujours développé des liens étroits, de deux types. Les figures géométriques peuvent servir d'objet dans la production artistique : nous pouvons penser par exemple aux rosaces des vitraux des cathédrales. La géométrie peut aussi fournir les outils utiles à la construction de l'œuvre, comme les règles de la perspective artistique. Nous retrouvons ces deux aspects dans les trois chapitres de cette partie. Le premier nous emmène « À la recherche des modèles géométriques des mosaïques antiques ». Ces décors utilisent des cercles, des carrés, des hexagones, des octogones, etc. Mais il n'est pas toujours simple de connaître les étapes du tracé à la seule vue du motif, et il n'existe que très peu de traces du travail préparatoire des *pictors* de l'Antiquité. Sur quelques mosaïques du I<sup>er</sup> au V<sup>e</sup> siècle, Bernard Parzys donne des exemples de démarches pour reconnaître des motifs, les reconstruire, les comparer à l'original, comprendre quels types de techniques ont pu être utilisés. Constructions exactes ou approchées, à la règle et au compas ou sur quadrillage, l'analyse mathématique permet de distinguer des motifs qui pourtant paraissent presque identiques !

Dans « Deux enquêtes sur la “géométrie pratique” romaine », Bernard Parzys nous détaille aussi le travail du chercheur non plus seulement sur des figures géométriques mais sur des objets a priori inconnus. Sur les exemples d'une lame d'ivoire et de caissons de stuc retrouvés à Pompéi, il nous montre les étapes de la réflexion, y compris les erreurs possibles, qui conduisent à comprendre l'objet étudié, sa construction, son rôle. En plus des figures géométriques obtenues, de leurs propriétés et de leur utilisation possible avec des élèves, cette trace du travail

de recherche permet de leur montrer l'activité de modélisation sur une « vraie » situation et de mettre en évidence le travail interdisciplinaire, car dans les deux enquêtes le mathématicien, l'archéologue et le spécialiste du décor antique doivent collaborer pour résoudre le problème. Parmi les hypothèses sur la lame d'ivoire, celle d'un guide pour un dessin en perspective artistique a été finalement éliminée.

Les règles mathématiques du dessin en perspective sont données par Alberti dans son ouvrage *De pictura* en 1435 puis Della Francesca dans *De prospectiva pingendi* vers 1470. Elles seront utilisées dans l'art par de nombreux peintres du XV<sup>e</sup> siècle mais elles auront aussi des retombées en géométrie, ce que développe Rosane Tossut dans « Apports de la perspective à la géométrie – Illustrations dans l'histoire et l'enseignement ». D'une part, elle explique comment, au XVII<sup>e</sup> siècle, Desargues étudie les coniques en utilisant la perspective et la notion d'involution. D'autre part, elle montre comment la théorie de la perspective met en avant les propriétés d'incidence qui sont formalisées par Taylor au début du XVIII<sup>e</sup> siècle.

Calculs d'aires, de volumes, de longueurs accessibles ou inaccessibles, constructions de figures planes ou solides, chacun des chapitres précédents se centre sur une notion ou une méthode de géométrie en s'appuyant sur des textes historiques. Ces textes et ces notions peuvent donner lieu à un travail de classe avec des élèves. Chaque auteur ou autrice ouvre à minima des pistes d'utilisation voire donne des exemples explicites de l'introduction d'une perspective historique dans le cours de mathématiques grâce à ces situations.

## Enseignement de la géométrie

Les chapitres de la cinquième partie abordent aussi l'enseignement de la géométrie, mais davantage sous l'aspect de sa propre histoire ou de l'apport de l'histoire et de l'épistémologie pour analyser nos actuels programmes d'enseignement. Tout d'abord Guillaume Moussard nous montre l'« Importance et diversité des méthodes dans l'enseignement secondaire de la géométrie en France au XIX<sup>e</sup> siècle ». Il illustre avec des exemples précis extraits de différents ouvrages d'enseignement des méthodes générales : méthode synthétique, application de l'algèbre à l'analyse des figures, analyse géométrique, géométrie analytique, méthodes de la géométrie moderne (dont celles vues dans le chapitre sur G. de Longchamps). Il présente aussi des méthodes particulières à certains types de problèmes comme la méthode des figures semblables ou celle des lieux géométriques. En plus de l'intérêt des méthodes elles-mêmes, tous ces exemples nous interrogent sur la notion de problème au cours du temps mais aussi dans notre enseignement actuel de la géométrie. Établir des liens entre les problèmes résolus par une méthode commune ou résoudre un même problème par des méthodes différentes pour les confronter peuvent être des éléments de réflexion pour construire des activités riches pour les élèves d'aujourd'hui.

Dans le chapitre suivant, François Plantade expose « La conception houëllienne de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire dans les années 1860 - 1880 : une approche "expérimentale" basée sur une version revisitée des *Éléments* d'Euclide ». Dans le contexte de l'enseignement européen de la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle où l'Italie impose un retour à l'usage des *Éléments* d'Euclide alors qu'un

mouvement contestataire anti-Euclide se développe en Angleterre, Jules Houël prend position dans le débat et il publie sa propre vision de l'enseignement de la géométrie. Dans son « Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire », il propose de reprendre le livre I des *Éléments* d'Euclide mais en le revisitant avec un rôle accru du mouvement et une approche expérimentale de certaines notions. Cet « Essai » est largement détaillé et commenté dans le présent chapitre. La conception de Houël, étendue de la géométrie aux mathématiques en général, nous invite à réfléchir aux programmes actuels dont certains aspects rappellent ceux de la réforme de 1902 et des idées de Houël.

Le chapitre « Tours et détours de l'enseignement de la géométrie au XX<sup>e</sup> siècle » d'Anne Boyé prend la suite chronologique du précédent. Elle détaille pour quatre grandes époques de l'enseignement mathématiques (réforme de 1902 ; période 1925-1960 ; réforme des « maths modernes » ; contre-réforme de 1981) le contexte national voire international, des éléments des programmes et des exemples caractéristiques extraits des manuels. Chaque époque a ses idées, ses grands mathématiciens impliqués dans la réflexion sur l'enseignement des mathématiques, ses débats qui parfois reviennent dans d'autres contextes et nous questionnent sur notre propre pratique.

Les deux chapitres suivants nous ramènent dans notre époque avec des réflexions didactiques et épistémologiques sur des contenus de géométrie enseignés aux cycles 3 et 4. Tout d'abord, dans le chapitre « Approche des fondements épistémologiques de la géométrie du cycle 3 », Alex Esbelin, Anne-Cécile Mathé et Aurélie Roux présentent des éléments de la géométrie védique et de la géométrie milésienne dans le but de s'interroger sur les fondements épistémologiques des géométries que l'on enseigne actuellement, en particulier en étudiant les paradigmes en jeu dans les différents exemples donnés. Ils exhibent quelques similitudes entre la géométrie védique et celle enseignée à l'école primaire. Ces similitudes leur permettent de mettre en évidence la résolution de problèmes et d'envisager différemment la géométrie des tracés, notamment comme support du raisonnement même s'il n'est pas hypothético-déductif. De même, le changement de paradigme dans la géométrie milésienne amène à réfléchir aux changements de paradigme dans l'enseignement, en particulier pour le passage à la démonstration mathématique au collège.

Frédéric Laurent nous montre comment un éclairage historique et épistémologique peut enrichir la compréhension des notions enseignées et éclairer les choix didactiques. Dans un programme de collège qui demande de travailler les triangles semblables, le théorème de Thalès, l'homothétie et l'agrandissement-réduction, il est légitime de se demander « Comment structurer l'étude des expressions géométriques de la proportionnalité au cycle 4 ? ». L'analyse d'extraits des *Éléments* d'Euclide et des *Éléments de géométrie* de Clairaut permet de réfléchir à l'ordre dans lequel enseigner chaque notion, à leur pertinence selon l'usage que l'on en fait, ainsi qu'aux liens entre les aspects géométriques et numériques de la proportionnalité.

Enfin, le dernier chapitre de cette partie nous emmène hors de France, au Japon, avec Marion Cousin pour « Des recherches en histoire pour comprendre le contenu des manuels d'aujourd'hui ? La révolution de l'ère Meiji et les manuels de

géométrie actuels dans les collèges japonais ». Elle étudie la forme, le rôle et le langage des démonstrations géométriques dans les manuels japonais depuis le XIX<sup>e</sup> siècle jusqu'à nos jours. Cela l'amène à comparer les difficultés des élèves français et japonais face au travail scolaire de démonstration : place que donne l'élève à ce travail, identification des chaînes déductives, vocabulaire utilisé.

## Géométrie et géométries

La dernière partie nous emmène au-delà de la géométrie usuelle de l'enseignement primaire et secondaire. Tout d'abord, Didier Bessot nous donne un panorama détaillé « De quelques notables tentatives de démonstrations du cinquième postulat d'Euclide : de l'Antiquité au XVII<sup>e</sup> siècle ». Il retrace les démarches essentielles développées pour répondre à ce problème de l'essai de redéfinition des parallèles par Posidonius au II<sup>e</sup>-I<sup>er</sup> siècles av. J.-C., à l'admission d'un principe de similitude par Wallis en 1663, en passant par les travaux de plusieurs mathématiciens arabes du Moyen Âge sur la définition des parallèles et les propriétés des quadrilatères. Le quadrilatère birectangle isocèle de al-Hayyān sera ensuite un élément clé du travail de Saccheri dont Didier Bessot détaille toute la démarche du premier livre de son traité *Euclides ab omni nœvo vindicatus : sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ Principia* dans « Le père Jésuite Giromalo Saccheri (1677-1733) correcteur d'Euclide et inventeur de résultats de la géométrie hyperbolique à venir ». Ce chapitre met en valeur la richesse du travail de Saccheri qui, s'il se solde en apparence par un échec à son époque, trouve tout son sens dans le corpus de la géométrie hyperbolique de Lobatchevski au XIX<sup>e</sup> siècle. Si elle n'est pas directement présente dans les programmes du lycée, cette géométrie peut néanmoins être source d'activité pour les élèves<sup>3</sup>, notamment en s'appuyant sur l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.

Enfin, dans le dernier chapitre, André-Jean Glière nous fait découvrir « La géométrie tropicale, benjamine des géométries », en illustrant par de nombreux exemples les notions premières de cette théorie comme les droites tropicales, les polynômes tropicaux et leurs subdivisions duales. Il montre que cette géométrie, née dans les années 1970, permet d'écrire une version tropicale du théorème de Bézout de 1779 sur les degrés des équations algébriques et de répondre en partie au seizième problème posé par Hilbert en 1900. Mais c'est résolument vers l'avenir qu'elle se tourne avec des recherches en mathématiques qui se sont développées depuis une quinzaine d'années.

De la géométrie védique à la géométrie tropicale, des constructions à la règle et au compas aux logiciels de géométrie, de l'enseignement au XIX<sup>e</sup> siècle aux manuels d'aujourd'hui, les chapitres de cet ouvrage nous entraînent dans un voyage de plus de 3000 ans dans les géométries d'hier à demain.

---

3. Un atelier présenté sur ce thème lors du colloque par Boris Allart avait déjà donné lieu à la publication d'un chapitre « Aborder la géométrie hyperbolique au lycée : comment et pourquoi ? » dans l'ouvrage *Mathématiques en perspectives. Hommage à Rudolf Bkouche* aux éditions PULIM en 2020.



## Remerciements

Les chapitres de cet ouvrage correspondent à des contributions au 23<sup>e</sup> colloque de la commission inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques « Géométries d'hier à demain : Pratiques, méthodes, enseignement » qui a été organisé du jeudi 23 mai au samedi 25 mai 2019 sur le campus du Futuroscope de l'Université de Poitiers. Je remercie tous les intervenants de ces journées, particulièrement Marion Cousin, Sébastien Maronne et Guillaume Moussard pour leurs conférences plénières. Je remercie aussi Evelyne Barbin, Thérèse Gilbert (Belgique), Snezana Lawrence (Angleterre), Fátima Romero (Espagne) pour la tenue d'une réunion débat sur le thème « Géométrie et histoire des mathématiques dans les programmes de lycée : nouveautés, comparaisons européennes, besoins en formation ». Enfin, je remercie Marc Moyon pour sa conférence grand public donnée, en complément du colloque, à l'Espace Mendès-France à Poitiers.

Le colloque a été organisé grâce à l'appui financier et logistique de l'IREM&S de Poitiers, de l'Université de Poitiers, de l'UFR Sciences fondamentales et appliquées, du département de mathématiques, du Laboratoire de Mathématiques et Applications UMR 7348, de l'ESPE Poitou-Charentes, de Grand Poitiers, de la région Nouvelle-Aquitaine, du ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, de l'ADIREM (Assemblée des directeurs des IREM) et de l'ADERHEM (Association pour le développement des études et des recherches en histoire et épistémologie des mathématiques). Je remercie ces partenaires pour avoir permis de développer des temps d'échanges riches autour de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques entre des participants venant d'horizon divers : des chercheurs en histoire des mathématiques, des inspecteurs, des formateurs ESPE, des animateurs IREM, des enseignants de mathématiques du primaire à l'université. Cette diversité des participants a notamment été la conséquence de l'ouverture des inscriptions au colloque via le réseau des IREM, via le PAF de l'académie de Poitiers et via le PNF du ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse.

Je remercie tous les auteurs et autrices, dont vous trouverez une brève présentation à la fin de cet ouvrage, pour leur contribution ainsi que les relecteurs et relectrices. Je remercie enfin les membres de l'IREM&S de Poitiers qui m'ont apporté leur aide pour la réalisation de cet ouvrage, en particulier Philippe Chauvin, Jacqueline Guichard, Jean-Paul Guichard, Julien Michel et notre directeur Youssef Barkatou.



Première partie

Géométrie et grandeurs



## Les *Éléments* de géométrie, d'Euclide au début du XIX<sup>e</sup> : une source d'inspiration pour les enseignants et enseignantes

Dominique BAROUX, Martine BÜHLER

### Introduction

Le programme du cycle 4 paru au BO du 26 juillet 2018 remet la démonstration et le raisonnement à l'honneur : « La formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées (par exemple problèmes de nature arithmétique ou géométrique). »

Le programme précise également la place de la démonstration dans le « cours de mathématiques » : « Il est important que le cours de mathématiques ne se limite pas à l'application de recettes et de règles, mais permette de mettre en place quelques démonstrations accessibles aux élèves. De nombreux résultats figurant dans ce programme peuvent être démontrés en classe, selon des modalités variées. » L'importance d'une trace écrite structurée et cohérente est soulignée : « Une trace de cours claire, explicite et structurée aide l'élève dans l'apprentissage des mathématiques [...] la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les procédures et les stratégies étudiées. [...] En particulier, il est essentiel de distinguer le statut des énoncés (définition, propriété – admise ou démontrée –, conjecture, démonstration, théorème) et de respecter les enchaînements logiques. » Les enseignants et enseignantes sont invités à faire des choix pédagogiques de démonstrations : « Certaines démonstrations possibles (aussi bien sur les nombres et le calcul qu'en géométrie) sont identifiées dans le programme. Les enseignants ont la liberté de choisir ceux des résultats qu'ils souhaitent démontrer ou faire démontrer, en fonction du niveau et des besoins de leurs élèves. »

Les manuels actuels n'aident guère les enseignants et enseignantes à structu-

rer leur progression en « respectant les enchaînements logiques », ni à choisir les résultats à « démontrer ou faire démontrer ». L'objectif de l'atelier était d'aider à la réflexion sur ces sujets, en étudiant des extraits de différents textes historiques, en réfléchissant sur les choix opérés par les différents auteurs, en s'intéressant à l'évolution des différents traités du point de vue de l'ordre et de la présentation des résultats. Il nous a semblé que cette lecture de textes pouvait aider chacun et chacune à prendre du recul par rapport aux notions enseignées et à bâtir sa propre progression (Barbin, 2001). Nous souhaitions également que ces lectures donnent des idées d'activités en classe autour des raisonnements et des démonstrations en géométrie plane.

Vous trouverez sur le site de l'IREM de Paris<sup>1</sup>, auquel il sera souvent fait référence dans cet article, les textes étudiés dans l'atelier, des propositions d'activité en classe ainsi que des compléments biographiques et bibliographiques.

## Les cas d'égalité et la méthode des aires

### Les *Éléments* d'Euclide

La lecture des *Éléments* d'Euclide nous a paru incontournable pour qui s'intéresse à l'histoire de la géométrie. D'Euclide, on ne sait quasiment rien. Nos principales sources sur son existence sont de petites anecdotes sujettes à différentes conjectures, relatées par Pappus (vers 300), un des derniers grands mathématiciens grecs, et le philosophe néoplatonicien Proclus (probablement 412 – 485). Il semblerait qu'Euclide ait vécu à Alexandrie au III<sup>e</sup> siècle avant Jésus-Christ. Les *Éléments*, l'ouvrage le plus connu d'Euclide, comporte 13 livres essentiellement consacrés à la géométrie, sauf les livres V (théorie des proportions), VII, VIII et IX (arithmétique) et X (incommensurables). Ils suivent une structure axiomatico-déductive, modèle de rigueur pendant plus de 2000 ans. Les présentations que nous ferons par la suite concernant les textes et les figures s'appuient sur la version de Vitrac citée en bibliographie<sup>2</sup>. Le livre I débute par 23 définitions, 5 demandes et 9 notions communes (Euclide, 1990). Dès le début du livre I on reconnaît un de nos cas d'égalité de deux triangles, c'est la proposition 4.

« Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent. »

Euclide en fait une justification par superposition d'une manière analogue à celle que l'on pourrait faire dans les classes de collège. Cette proposition est immédiatement utilisée dans les démonstrations des propositions suivantes.

La proposition 8 n'est pas exactement un cas d'égalité : « Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, s'ils ont de plus la base égale

---

1. Dans les documents du groupe M. :A.T.H.(dossier « Histoire et Géométrie ») : <https://irem.univ-paris-diderot.fr/documents-du-groupe-math>.

2. Les deux premiers tomes de cette traduction sont disponibles sur la page personnelle de Bernard Vitrac.

à la base, ils auront aussi un angle égal, à savoir celui qui est contenu par les droites égales. » Cependant, elle jouera un rôle analogue ; en effet, la proposition 8 permet d'obtenir une égalité d'angles à partir d'égalités de côtés. Les propositions suivantes montrent comment sont utilisés ces résultats.

9

« Couper un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Soit l'angle rectiligne donné sous  $BAC$ . Il faut alors le couper en deux parties égales. Que soit pris au hasard le point  $D$  sur  $AB$ . Et que, de  $AC$ , soit retranchée la droite<sup>3</sup>  $AE$ , égale à  $AD$  (Prop. 3), et que  $DE$  soit jointe (Dem. 1). Que soit construit sur  $DE$  le triangle équilatéral  $DEF$  (Prop. 1), et que  $AF$  soit jointe (Dem. 1). Je dis que l'angle sous  $BAC$  est coupé en deux parties égales par la droite  $AF$ .

En effet, puisque  $AD$  est égale à  $AE$ , que  $AF$  est commune, alors les deux  $DA$ ,  $AF$  sont égales aux deux  $EA$ ,  $AF$ , chacune à chacune. Et la base  $DF$  est égale à la base  $EF$  (Df. 20)<sup>4</sup>. Donc l'angle sous  $DAF$  est égal à l'angle sous  $EAF$  (Prop. 8). Donc l'angle rectiligne donné sous  $BAC$  est coupé en deux parties égales par la droite  $AF$ . Ce qu'il fallait faire. »

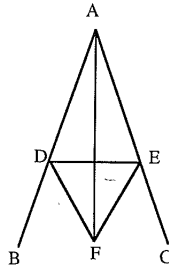


FIGURE 1 – Euclide, I.9

10

« Couper en deux parties égales une droite limitée donnée.

Soit  $AB$  la droite limitée donnée. Il faut alors couper la droite limitée  $AB$  en deux parties égales. Que soit construit sur elle le triangle équilatéral  $ABC$  (Prop. 1) et que l'angle sous  $ACB$  soit coupé en deux parties égales par la droite  $CD$  (Prop. 9). Je dis que la droite  $AB$  est coupée au point  $D$  en deux parties égales » (Euclide, 1990).

Euclide montre alors l'égalité des triangles  $ACD$  et  $BCD$  par la proposition 4, et obtient ainsi  $AD = DB$ .

3. Euclide nomme « droite » ce que nous nommerions « segment ».

4. La définition 20 est celle de « triangle équilatéral ».

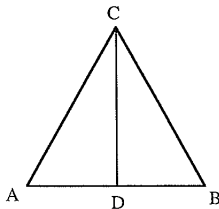


FIGURE 2 – Euclide, I.10

Nous voyons là l'un des deux types de propositions du livre I : un « problème », ici un problème de construction, avec le « rituel » euclidien de présentation : un énoncé général, un énoncé où l'on nomme les objets, la construction elle-même, enfin la démonstration que la construction est correcte. Les propositions 1 à 26 donnent ainsi des théorèmes ou résolvent des problèmes de construction, toujours en donnant des démonstrations s'appuyant sur les demandes et notions communes et/ou sur les propositions précédentes. Les propositions 27 à 32 traitent de la théorie des parallèles (angles alternes internes, angles correspondants,...), la proposition 32 donnant la démonstration explicitement au programme du cycle 4 du résultat sur la somme des angles d'un triangle : « Dans tout triangle, l'un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs d'un triangle sont égaux à deux droits ». Le texte de la démonstration se trouve sur le site de l'IREM de Paris<sup>5</sup>.

Les propositions suivantes portent sur les parallélogrammes, et démontrent des résultats fondamentaux, comme la proposition 35, elle aussi explicitement au programme :

« Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

Soient  $ABCD$ ,  $EBCF$  des parallélogrammes sur la même base  $BC$ , et dans les mêmes parallèles  $AF$ ,  $BC$ . Je dis que le parallélogramme  $ABCD$  est égal au parallélogramme  $EBCF$ .

En effet, puisque  $ABCD$  est un parallélogramme,  $AD$  est égale à  $BC$  (Prop. 34). Alors pour la même raison  $EF$  est aussi égale à  $BC$ . De sorte que  $AD$  est aussi égale à  $EF$  (N.C. 1). Et  $DE$  est commune donc  $AE$  toute entière est égale à  $DF$  toute entière. Or  $AB$  est aussi égale à  $DC$  alors les deux  $EA$ ,  $AB$  sont égales aux deux  $FD$ ,  $DC$ , chacune à chacune. Et l'angle sous  $FDC$  est égal à l'angle sous  $EAB$ , l'extérieur à l'intérieur (Prop. 29). Donc la base  $EB$  est égale à la base  $FC$  et le triangle  $EAB$  sera égal au triangle  $DFC$  (Prop. 4). Que  $DGE$  soit retranché de part et d'autre : le trapèze restant  $ABGD$  est donc égal au trapèze restant  $EGCF$  (N.C. 3). Que le triangle  $GBC$  soit ajouté de part et d'autre : le parallélogramme  $ABCD$  tout entier est donc égal au parallélogramme  $EBCF$  tout entier (N.C. 2). Donc

---

5. Voir note 1



les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux. Ce qu'il fallait démontrer. » (Euclide, 1990)

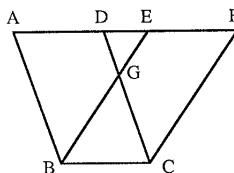


FIGURE 3 – Euclide, I.35

Cette démonstration nous paraît tout à fait utilisable en classe et nous donnons sur le site de l'IREM de Paris<sup>6</sup> une idée d'activité.

On constate que le mot « égal » peut avoir différents sens chez Euclide : deux figures peuvent être « égales » dans le sens superposables, ou bien égales « en grandeur », c'est-à-dire d'aires égales. La proposition 35 permet de comprendre comment la proposition I.4 pourrait justifier que des figures non superposables sont d'aires égales, par découpage, recollement, et complémentation. La suite du livre I montre que tout polygone est « rectangulable », c'est-à-dire qu'on peut construire un rectangle de même aire que tout polygone donné, résultat complété dans le livre II par la « quadrature » d'un rectangle quelconque. Les problèmes de décomposition de polygones de même aire en pièces superposables ont donné lieu à diverses études ; le théorème de Bolyai affirme : « Deux polygones sont décomposables par les mêmes dissections polygonales si et seulement s'ils ont la même aire. » Cependant, la décomposition peut devenir assez compliquée et nécessiter un nombre grandissant de pièces, par exemple pour des parallélogrammes de même base entre les mêmes parallèles, lorsque les angles à la base sont très différents.

Euclide n'utilise pas de nombres, ni de mesures de grandeurs. Il utilise la notion d'aire comme grandeur (Bkouche, 2000). Ainsi, les aires ne sont pas des nombres, mais des grandeurs. C'est la mesure qui crée un lien entre une grandeur et le nombre associé (Bühler-Pajus, 2020). La proposition I.35 étudiée ci-dessus montre comment on peut démontrer des égalités d'aires sans mesure ni formule. Il est important pour nos élèves de se réapproprier cette notion d'aire travaillée au cycle 2. Les formules leur font souvent oublier le sens de ce qu'est une aire. Alors qu'ils auront besoin de retrouver ce sens dans leurs études ultérieures, par exemple en calcul intégral. Les résultats sur les parallélogrammes donnent des résultats sur les triangles, et réciproquement, du fait que la diagonale d'un parallélogramme le partage en deux triangles superposables.

Une lecture attentive du livre I montre à quel point la proposition I,4 est fondamentale : elle est utilisée dans 11 propositions sur les 48 du livre I ; 10 d'entre elles sont nécessaires pour des résultats ultérieurs, la proposition 47 est le résultat que nous appelons « théorème de Pythagore ». L'outil fondamental des cas d'égalité des triangles, longtemps disparu des programmes, a fait son retour dans les

6. Voir note 1

programmes de 2015 ; nous pouvons donc l'utiliser avec nos élèves pour les initier à la démonstration en géométrie, et nous appuyer sur ces énoncés simples et fondamentaux pour bâtir une progression cohérente. Ces cas d'égalité ont été utilisés par les géomètres jusqu'au XIX<sup>e</sup> siècle et présents dans les manuels jusqu'en 1969.

### *Géométrie élémentaire de Bos (1830 – 1888)*

Pour illustrer cette longévité, nous présentons un manuel scolaire écrit à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et réédité ultérieurement. Les méthodes et les résultats démontrés perdureront globalement jusqu'à la réforme « des maths modernes » des années soixante. Bos justifie les deux premiers cas d'égalité donnés par transport d'un triangle sur l'autre et le dernier par un raisonnement par l'absurde, utilisant un résultat sur les angles de deux triangles ayant deux côtés égaux et le troisième inégal. Il énonce ensuite une « remarque générale » sur les cas d'égalité :

« Les théorèmes des n°31, 32 et 35 constituent ce qu'on appelle les trois cas d'égalité des triangles, et l'on en fait un usage fréquent en géométrie. Ces théorèmes montrent que si trois éléments d'un triangle, angles ou côtés, convenablement choisis, sont égaux aux trois éléments correspondant d'un autre triangle, les deux triangles sont égaux dans toutes leurs parties ; de telle sorte que l'égalité des trois premiers éléments chacun à chacun entraîne l'égalité des trois autres ; on conçoit sans peine le parti qu'on peut tirer de ces théorèmes pour démontrer l'égalité de deux lignes ou de deux angles appartenant à une même figure ou à deux figures différentes. Il est essentiel de remarquer que, dans deux triangles égaux, les côtés égaux sont toujours opposés aux angles égaux. » (Bos, 1903)

Bos ainsi ne se contente pas de donner les cas d'égalité, mais explique comment les utiliser dans des démonstrations : si l'on veut démontrer que deux angles ou deux segments sont égaux, il faut les « incorporer » dans deux triangles de la figure, qu'on pourra démontrer égaux en utilisant les données du problème. Ceci donne une méthode aux élèves pour résoudre des problèmes. Cette méthode peut permettre à tous et toutes les élèves de « démarrer » un problème de géométrie en voyant au moins ce qu'il faudrait faire. Bien sûr, les difficultés inhérentes aux démonstrations demeurent (comme distinguer les données de la conclusion cherchée), mais du moins les élèves peuvent comprendre ce qu'on cherche à faire.

Bos démontre ensuite les résultats usuels de géométrie élémentaire, dont celui sur la somme des angles d'un triangle et les propriétés des quadrilatères, parallélogrammes, rectangles ; certaines propriétés sont démontrées dans le « cours », d'autres laissées en exercice : une méthode que nous continuons d'employer, avec des démonstrations collectives dialoguées avec la classe, et d'autres laissées à l'initiative des élèves, dont le résultat est ensuite institutionnalisé dans la « trace écrite » du cours. Vous trouverez sur le site<sup>7</sup> quelques-uns de ces résultats.

---

7. Voir note 1

## La transmission des *Éléments*

Nous donnons ci-dessous un aperçu rapide des tribulations des *Éléments* de l'Antiquité au XVII<sup>e</sup> siècle. Pour une étude approfondie, nous renvoyons à l'*Introduction générale* de la traduction des *Éléments* d'Euclide par Vitrac, introduction écrite par Maurice Caveing, dont nous nous inspirons pour les lignes qui suivent, ainsi qu'aux écrits de Djebbar et Vitrac.

L'ouvrage d'Euclide semble avoir supplanté les écrits antérieurs du même type. Dès l'Antiquité Grecque, il a été abondamment commenté par divers auteurs, entre autres Héron d'Alexandrie, Pappus ou Proclus, dont le *Commentaire au Premier Livre des Éléments d'Euclide* constitue une source importante sur les *Éléments*.

À partir du VII<sup>e</sup> siècle s'ouvre une période d'expansion rapide du monde arabo-musulman. Une nouvelle tradition scientifique va émerger, s'appuyant au départ sur les foyers scientifiques pré-existant dans les zones conquises (Djebbar, 2010). Après une période d'assimilation des savoirs grecs et indiens grâce à la traduction d'ouvrages scientifiques, des savoirs nouveaux émergent.

L'ouvrage d'Euclide est traduit une première fois en arabe dès le début du IX<sup>e</sup> siècle ; il donnera lieu à des commentaires et des travaux novateurs, en particulier sur la théorie des parallèles et la théorie des proportions.

À partir de la fin du XI<sup>e</sup> siècle, l'Occident médiéval est en contact avec la civilisation musulmane, en particulier en Sicile et en Espagne. Des équipes de traducteurs rassemblant des savants de diverses confessions traduisent en latin et en hébreu les versions arabes des *Éléments*. Les traductions latines les plus marquantes sont celles de Gérard de Crémone (1114 – 1187), Adélarde de Bath (entre 1100 et 1130) et Campanus de Novare (1259). Campanus était un excellent mathématicien qui a composé la meilleure version latine à partir de l'arabe du point de vue mathématique. Son édition comporte des commentaires pour expliquer ou clarifier les démonstrations. Les débuts de la Renaissance sont marqués par l'invention de l'imprimerie. La première impression des *Éléments* a lieu en 1482 à Venise. C'est la version de Campanus qui a cet honneur et c'est le premier livre mathématique d'importance à être imprimé.

La chute de Constantinople en 1453 va aussi influencer sur la transmission des *Éléments* ; dès la fin du XV<sup>e</sup> siècle, des manuscrits des *Éléments* écrits en grec font leur apparition en Italie. De multiples éditions et traductions d'Euclide vont apparaître. La version latine de Federigo Commandinus d'Urbino (1509-1575), parue à Pesaro en 1572, sera très utilisée. Dès 1540 on voit apparaître des traductions en langue vernaculaire : italien, toscan, allemand, français, espagnol, anglais, hollandais... La parution en 1574 (qui aura de nombreuses rééditions) à Rome de la version latine des *Éléments* de Clavius (1537-1612) est un moment important : ce livre permettra de disposer d'*Éléments* mathématiquement instructifs et sera très utilisé, en particulier dans les collèges jésuites (Kouteynikoff et al., 2012).

Au XVII<sup>e</sup> siècle, apparaissent des critiques sur les Anciens et, en particulier, la présentation des propositions dans les *Éléments* est remise en question. Il est mis en avant que le fait de démontrer des résultats sans en présenter l'heuristique ne donne pas de méthodes pour trouver des résultats nouveaux. La question de la méthode, la recherche de méthodes générales, sont alors centrales. D'autres

*Éléments* sont publiés, revendiquant un ordre « plus naturel », une présentation différente et éventuellement des démonstrations reposant sur d'autres ressorts. L'idée de Descartes de « conduire par ordre [ses] pensées » inspire à Arnauld (1612-1694) un ordre très différent de celui d'Euclide pour ses *Nouveaux Éléments de géométrie* (Arnauld, 1667).

## Les *Éléments de géométrie* de Clairaut (1713 – 1765)

Clairaut va lui aussi émettre des critiques sur l'ordre euclidien, mais elles seront motivées par des préoccupations pédagogiques « modernes ». Dès sa préface, il précise qu'il cherche « à intéresser et éclairer les Commencants ». Il s'élève contre l'habitude « de faire débiter l'enseignement par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes et cherche plutôt à développer les principes [de la Géométrie] d'une manière naturelle ». Pour cela, il s'appuie sur la mesure des terrains, et des distances accessibles et inaccessibles, partant ainsi de problèmes concrets de mesure pour faire découvrir aux Commencants les principes dont dépendent ces mesures. « Ainsi, je parviens à faire découvrir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant » (Clairaut, 1753). Cette méthode lui paraît propre à encourager « ceux qui pourraient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications ». Mais, surtout, « elle accoutumera l'esprit à chercher et à réfléchir ». Clairaut évite, dit-il, de donner des démonstrations « de telle ou telle vérité, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir ».

Un bon exemple de cette méthode est la manière dont il introduit notre théorème de Pythagore, non pas comme un résultat donné a priori, mais en posant un problème, qu'on peut imaginer se poser dans un cadre concret : comment transformer deux carrés en un seul carré<sup>8</sup>.

Il commence par examiner le cas de deux carrés égaux, pour lesquels la solution se trouve facilement par découpage et recollement, les triangles  $CDA$  et  $CEF$  de la figure 4 étant égaux aux triangles  $GBA$  et  $GBF$ . Pour le cas général, il se demande où placer le point  $H$ , pour qu'on puisse amener le triangle  $ADH$  sur  $Adh$  en le faisant tourner autour du point  $A$ , et amener le triangle  $EFH$  sur  $Efh$ , avec le même point  $h$  sur  $(Cd)$ . Il montre alors qu'il suffit de placer  $H$  sur  $[DF]$  de sorte que  $DH$  est égal à  $CF$ , et que le quadrilatère  $AHEh$  ainsi obtenu est un carré (texte complet sur le site<sup>9</sup>).

Après ces réflexions autour de la méthode des aires et des cas d'égalité, nous proposons l'étude de textes plus tardifs portant plutôt sur le théorème dit « de Thalès » et sur les triangles semblables. La fin du XVIII<sup>e</sup> siècle voit avec la Révolution de profonds bouleversements dans l'enseignement. Entre 1789 et 1794, l'intérêt pour les questions d'enseignement est attesté par la création du Comité d'Instruction Publique de la Législative et de la Convention, par de nombreux rapports, des décrets, plusieurs plans concernant ce sujet. Legendre sera chef du premier bureau de la Commission Nationale Exécutive de l'Instruction Publique Section Sciences et Lettres (poids et mesures, inventions et découvertes, encoura-

---

8. C'est d'ailleurs un problème qui se posait concrètement aux artisans du monde arabo-musulman (Djebbar, 2009).

9. Voir note 1

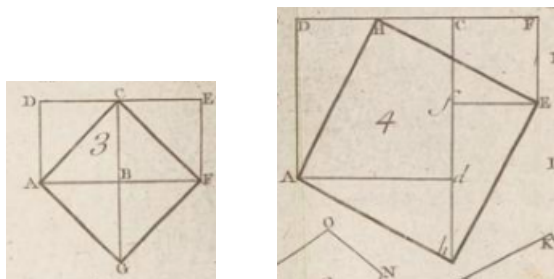


FIGURE 4 – Clairaut, Planche VII figures 3 et 4 (Clairaut, 1753)

gement aux sciences). En 1793, il a été chargé de rédiger des *Éléments* de calcul et de géométrie. Encouragé par Condorcet, il travaillait déjà à ses *Éléments de géométrie*, qui paraîtront en 1794. Ce livre connaîtra de nombreuses éditions et sera utilisé pendant plus d'un siècle pour l'enseignement, avec celui de Lacroix qui aura aussi une influence considérable.

## Théorème des lignes proportionnelles et figures semblables

### Les *Éléments de géométrie* de Legendre (1752 – 1833)

Legendre revendique dans sa préface le retour à l'ordre euclidien : « On nous reprochera peut-être d'avoir mêlé indistinctement les propriétés des lignes avec celles des surfaces ; mais en cela nous avons suivi à peu près l'ordre d'Euclide, et cet ordre ne peut manquer d'être bon si les propositions sont bien enchaînées les unes aux autres ». On retrouve ainsi une préoccupation actuelle : une cohérence dans l'ordre des énoncés. L'objectif est clair : « je désire surtout qu'il [son ouvrage] soit utile à l'instruction de la jeunesse et qu'il contribue à former des géomètres<sup>10</sup> dignes de succéder à ceux qui ont illustré le XVIII<sup>e</sup> siècle ». Legendre se préoccupe aussi de la pédagogie à mettre en œuvre : « Il me semble au reste que si l'étude de la géométrie doit être précédée de quelques leçons d'algèbre, il ne sera pas inutile non plus de mener de front l'étude de ces deux sciences, et de les entremêler, autant qu'il sera possible, l'une avec l'autre ». (Legendre, 1800)

Legendre définit les figures (rectilignes) semblables comme des figures ayant les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels. Avant d'aborder les propositions de géométrie mettant en jeu la proportionnalité, il prévient qu'il faut avoir en tête la théorie des proportions et renvoie aux livres d'algèbre et de géométrie pour cela. Il ramène les grandeurs à des nombres par la mesure (Bühler-Pajus, 2020), en admettant les nombres « incommensurables ». Il élude ainsi une difficulté, admettre qu'à chaque grandeur est associé un nombre, difficulté qui ne sera élucidée qu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle (Bkouche-Lubet-Marmier,

10. Ce mot signifie à l'époque « mathématiciens ».

2009). Il démontre cependant la formule donnant l'aire d'un rectangle, dont découleront celles du parallélogramme (par le biais d'une proposition qui est exactement la I.35 d'Euclide vue plus haut) et du triangle (moitié de parallélogramme) : sa démonstration utilise un raisonnement par l'absurde, et l'existence d'une quatrième proportionnelle. Il peut ensuite reprendre la démonstration d'Euclide du théorème « des lignes proportionnelles », que l'utilisation des nombres et des formules d'aires rend plus accessible pour nos élèves.

La formule donnant l'aire d'un triangle permet de justifier que le rapport des aires de deux triangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases.

Sur la figure 5,  $(DE)$  est parallèle à  $(BC)$ ; les triangles  $DEB$  et  $EDC$  ont même base  $DE$  et même hauteur (car  $(DE)$  est parallèle à  $(BC)$ ), donc ils ont même aire. Le rapport des aires des triangles  $ADE$  et  $DEB$  est égal au rapport de leurs bases  $AD$  et  $DB$ , car ils ont même hauteur. De même le rapport des aires des triangles  $ADE$  et  $EDC$  est égal au rapport de leurs bases  $AE$  et  $EC$ . Comme les triangles  $DEB$  et  $EDC$  ont même aire, on obtient l'égalité des rapports  $\frac{AD}{DB}$  et  $\frac{AE}{EC}$ , c'est-à-dire aussi celle de leurs inverses  $\frac{DB}{AD}$  et  $\frac{EC}{AE}$ , enfin, par manipulation de cette égalité :  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ . La réciproque est joliment démontrée : on suppose  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ . Si  $(DE)$  n'est pas parallèle à  $(BC)$ , alors on appelle  $O$  le point d'intersection de  $(AC)$  et de la parallèle à  $(BC)$  passant par  $D$ .  $O$  est sur  $[AE]$  ou sur  $[EC]$ ; supposons d'abord qu'il est sur  $[AE]$ . Le théorème qu'on vient de montrer assure :  $\frac{AD}{DB} = \frac{AO}{OC}$ . On aurait donc :  $\frac{AE}{EC} = \frac{AO}{OC}$ . Ceci est impossible car  $AO < AE$  et  $OC > EC$ . Legendre démontre ensuite le premier cas de similitude des triangles (deux triangles ayant leurs trois angles égaux chacun à chacun ont leurs côtés proportionnels) : les deux triangles  $ABC$  et  $DCE$  étant équiangles, il les place comme sur la figure 5 et prolonge  $[DE]$  jusqu'à son intersection  $F$  avec  $(AB)$ ; on applique alors le théorème précédent, en utilisant le parallélisme de  $(AC)$  et  $(EF)$ , pour obtenir  $\frac{BC}{CE} = \frac{BA}{AF}$ . Or  $AF = CD$  ( $FACD$  est un parallélogramme); donc  $\frac{BC}{CE} = \frac{BA}{CD}$ . On montre de même  $\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{DE}$ . On obtient ainsi la proportionnalité des côtés homologues.

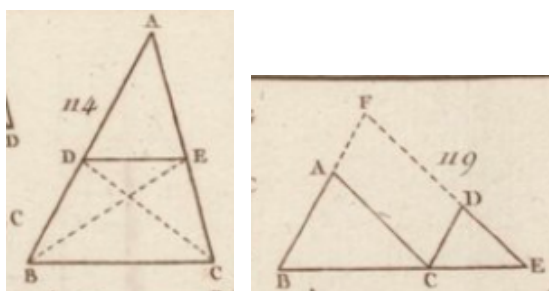


FIGURE 5 – Legendre, Planche 4 figures 114 et 119 (Legendre, 1800)

– Source : BnF

La manipulation des rapports d'aires n'est pas simple pour les élèves, et, si on veut utiliser cette démonstration, il faut sans doute un travail préalable pour s'appropriier les différents résultats utilisés. D'autres démonstrations sont possibles.

## Les *Éléments de géométrie* de Lacroix (1765 – 1843)

Nous présentons ici la démonstration que donne Lacroix du « théorème des lignes parallèles ». On retrouve chez Lacroix les cas d'égalité des triangles comme outils de démonstration, mais il abandonne la méthode des aires pour la démonstration du théorème « des lignes parallèles ». Il est influencé par les *Éléments de géométrie* d'Arnauld qui démontre que « les parallèles menées par les points pris à égale distance sur les côtés d'un angle, coupent aussi l'autre côté en parties égales, proposition dont ceux qui ont suivi l'ordre qu'il avait adopté, ont fait depuis la base de la théorie des lignes proportionnelles. »

Lacroix, dans ses *Éléments de géométrie*, montre d'abord que, lorsque deux droites quelconques sont coupées par des droites parallèles menées à partir de points équidistants sur l'une des droites, alors les points d'intersection avec la deuxième droite sont également équidistants. Autrement dit, sur la figure 6, lorsque  $AB = BC = CD = DE = EF$ , alors  $GH = HI = IK = KL = LM$ . En effet, on mène  $(GN)$ ,  $(HO)$ ,  $(PI)$ ,  $(KQ)$ ,  $(LR)$  parallèles à  $(AF)$ . Alors,  $GN$ ,  $HO$ ,  $IP$ , etc., respectivement égaux à  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , etc., sont égaux entre eux. Ceci permet de montrer l'égalité des triangles  $GHN$ ,  $HIO$ ,  $IKP$ ,  $KLQ$ ,  $LMR$  entre eux, et d'en déduire l'équidistance des points  $G$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ .

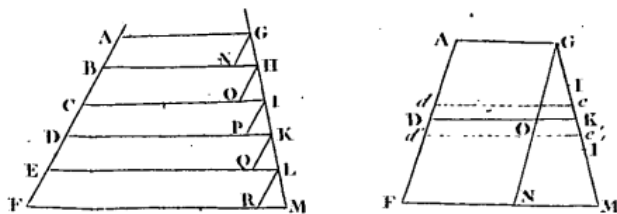


FIGURE 6 – Lacroix, Planche II figures 33 et 34 (Lacroix, 1808) – Source : BnF

Ceci lui permet d'obtenir le théorème de Thalès sous la forme « Trois parallèles coupent toujours deux droites quelconques en parties proportionnelles », autrement dit, avec la figure 6 :  $\frac{AD}{DF} = \frac{GK}{KM}$ . La démonstration découle facilement du théorème précédent dans le cas de lignes commensurables et Lacroix fait un double raisonnement par l'absurde dans le cas incommensurable. Le théorème de Thalès sous la forme triangles n'est alors qu'un cas particulier. Ce résultat sur des sécantes parallèles à deux droites quelconques était encore à l'honneur en collègue dans les années quatre-vingt, avec une démonstration semblable à celle de Lacroix, mais limitée à un exemple générique de rapport rationnel. Lacroix fait une remarque en note très intéressante (page 35) :

« On éprouvera peut-être quelque difficulté à transporter aux parties de l'étendue la notion de rapport, telle qu'on la conçoit à l'égard des nombres, surtout lorsqu'il s'agira de lignes incommensurables entre elles ; mais l'obscurité disparaîtra, si l'on fait attention qu'on ne peut comparer deux lignes qu'en les supposant rapportées à une commune mesure, et qu'alors leur rapport est vraiment un nombre, ou une frac-

tion dont les termes sont exprimés par les nombres de mesures communes comprises dans chaque droite. Quoique cette fraction cesse d'être rigoureusement assignable dans le cas où le rapport est incommensurable, elle n'en existe pas moins, puisqu'on peut en approcher d'aussi près qu'on voudra ; et deux rapports incommensurables devront être regardés comme égaux, dès qu'on prouvera que, quelle que loin que soit poussée l'approximation pour l'un et pour l'autre, leur différence demeurera toujours nulle. » (Lacroix, 1819)

Cette difficulté dans le théorème des lignes proportionnelles, qui tient aux rapports incommensurables, est également soulignée dans son *Essai sur l'enseignement en général et des mathématiques en particulier* (Lacroix, 1838).

La même préoccupation sur les grandeurs incommensurables se trouvait déjà chez Clairaut (pages 98-99) :

« Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourrait-il naître quelques soupçons sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionnalité des figures semblables. On a vu qu'en comparant ces figures, nous avons toujours supposé qu'elles avaient une échelle qui pouvait également servir à mesurer toutes leurs parties : supposition qui paraît devoir maintenant être limitée, à cause de ce qui vient d'être dit. Il faut donc que nous revenions sur nos pas et que nous examinions si nos propositions, pour être vraies, n'auraient pas elles-mêmes besoin de quelques modifications. »

Clairaut reprend alors sa démonstration (voir plus bas) du fait que deux triangles  $abc$  et  $ABC$  équiangles ont leurs côtés proportionnels et prend pour exemple le cas où le rapport de  $AB$  à  $ab$  est celui de la diagonale au côté d'un carré, un cas d'incommensurabilité dont il a déjà traité plus haut.

« Quoique, suivant ce que nous avons vu, quelque grand que pût être le nombre des parties qu'on supposerait arbitrairement dans  $ab$ ,  $AB$  ne pourrait jamais contenir un nombre exact de ces parties, il est cependant aisé de s'apercevoir que plus ce nombre sera grand, plus  $AB$  approchera d'être mesuré exactement avec les parties de  $ab$ . »

Il suggère alors de diviser  $ab$  en 100 parties (respectivement 1000 parties), et explique qu'alors  $AB$  sera compris entre 141 et 142 (respectivement 1414 et 1415) parties, et qu'on trouvera que  $AC$  contiendra aussi entre 141 et 142 (respectivement 1414 et 1415) parties de  $ac$  (divisé lui-même en 100, puis 1000 parties) et que, « en général,  $AC$  contiendra toujours autant de parties de  $ac$ , avec un reste, que  $AB$  contiendra de parties de  $ab$ , avec un reste. Ces restes seront[...] d'autant plus petits que le nombre des parties de  $ab$  sera plus grand. Donc il sera permis de les négliger. »

Nous avons ainsi vu deux types de démonstrations du théorème de Thalès, utilisables en classe de collège, chacune comportant ses propres difficultés et ses avantages. La méthode des aires permet de montrer aux élèves une méthode féconde en géométrie et évite de se poser le problème de l'incommensurabilité ; celui-ci est masqué par un résultat sur les aires de triangles et parallélogrammes (deux



parallélogrammes entre les mêmes parallèles sont entre eux comme leurs bases) ou, pour nos élèves, par l'utilisation de la formule donnant l'aire d'un triangle à partir de celle sur l'aire d'un rectangle, qui nécessiterait pour une démonstration rigoureuse de se préoccuper du cas où longueur et largeur du rectangle sont incommensurables. L'utilisation des rapports dans la démonstration peut cependant poser difficulté, et, si la démonstration est convaincante, elle n'est peut-être pas très éclairante.

La démonstration utilisant les triangles égaux est sans doute plus accessible, surtout si elle est faite sur un exemple générique, ce qui n'est pas gênant, car on peut « imaginer » avec les élèves ce qu'on pourrait faire avec un rapport de nombres différents, même plus grands ; mais il est visible qu'elle fonctionne seulement pour des rapports rationnels. Comme Clairaut, on pourrait aborder ce problème plus tard, en rencontrant en exercice des rapports qui ne sont pas rationnels . . . ou ne pas l'aborder.

## Retour à Clairaut

Les cas d'égalité des triangles avaient été amenés dans le livre de Clairaut par la nécessité de mesurer des parcelles triangulaires dont un côté est inaccessible : il suffit alors de reproduire sur un terrain suffisamment plat et grand le triangle à mesurer, ce qui est possible lorsqu'on a pu mesurer un angle et deux côtés par exemple. Mais, il peut s'avérer impossible de trouver à proximité un tel terrain convenable, on est amené à s'intéresser à des triangles de « même forme », et nous voici en train d'étudier des figures rectilignes semblables, définies par Clairaut comme des figures ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels.

Clairaut démontre que des triangles équiangles ont leurs côtés homologues proportionnels, d'abord dans le cas particulier de deux triangles  $abc$  et  $ABC$  tels que  $ab$  est la moitié de  $AB$  (Voir figure 7). Pour démontrer que les deux autres côtés sont dans la même proportion, il commence par amener le triangle  $abc$  sur le triangle  $ABC$ , de sorte que  $b$  soit sur  $[AB]$  et  $c$  sur  $[AC]$  ; il trace ensuite la parallèle à  $(AB)$  passant par  $c$  qui coupe  $(BC)$  en  $g$ . Comme les angles  $Abc$  et  $ABC$  sont égaux, la droite  $(cb)$  est parallèle à  $(CB)$  donc  $bcgB$  est un parallélogramme,  $cg = bB$  et  $bc = Bg$ . L'égalité de  $Ab$  et  $bB$  (puisque  $Ab = \frac{1}{2}AB$ ) entraîne celle de  $cg$  et  $Ab$ . Les triangles  $Abc$  et  $cgC$  sont égaux (un côté égal entre deux angles égaux du fait des parallélismes). Donc  $Ac = cC$  et  $Cg = cb = Bg$ , donc  $c$  est le milieu de  $[AC]$  et  $g$  est le milieu de  $[BC]$ , donc  $Ac$  est égal à la moitié de  $AC$  et  $bc$  est la moitié de  $BC$ . Une démonstration facilement adaptable pour nos élèves afin de montrer que la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté coupe le troisième en son milieu.

Il explique ensuite que la démonstration serait analogue si « le côté  $ab$  était contenu trois ou quatre ou tel nombre qu'on voudra dans  $AB$  car on pourrait placer le long de  $AC$  trois, quatre, &c. triangles [...] égaux à  $acb$ . »

De même si  $ab$  n'est pas contenu un nombre entier de fois dans  $AB$ , mais « n'y fut contenu qu'avec quelque fraction ». La figure 8 est l'illustration du cas où un côté du petit triangle est égal au tiers du côté homologue du grand triangle. Cette figure pourrait servir aussi pour un rapport égal à deux-tiers.

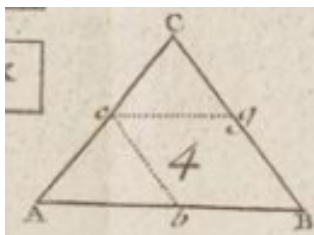


FIGURE 7 – Clairaut, Planche IV figure 4 (Clairaut, 1753)

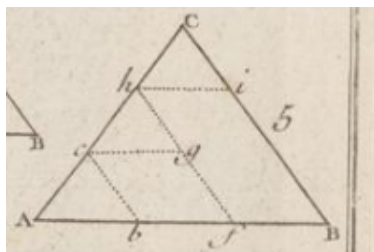


FIGURE 8 – Clairaut, Planche IV figure 5 (Clairaut, 1753)

Clairaut n'énonce jamais le théorème que nous appelons actuellement théorème de Thalès. De fait, pour justifier le premier cas de similitude (la proportionnalité des côtés homologues de deux triangles équiangles), Clairaut a commencé par placer ses triangles en « situation de Thalès », et ne voit aucune nécessité de traiter à part ce cas. Le théorème de Thalès tel que nous le connaissons dans les programmes actuels est de toute façon plus facile à utiliser en considérant les triangles semblables de la figure, en repérant les côtés homologues, ce qui évite de faire des erreurs dans les égalités de rapports. De fait, Euclide commençait par ce cas, car il utilisait des comparaisons d'aires valables dans ce cas de figure, puis en déduisait le premier cas de similitude grâce à des égalités de triangles.

## Conclusion

Ainsi, les choix des auteurs de traités anciens peuvent nous éclairer sur les difficultés et les avantages de telle ou telle méthode et nous aider à faire nos propres choix avec nos élèves, dans le cadre des programmes du cycle 4 : choix d'une progression qui reste cohérente mathématiquement, mais aussi pédagogiquement ; choix des démonstrations de cours que nous estimons utiles et/ou nécessaires, à faire en dialogue avec la classe ou laissées à l'initiative des élèves ; étude de configurations permettant des exercices riches, avec constructions et démonstrations, ... Ainsi l'introduction des cas d'égalité le plus tôt possible au cycle 4 permet de donner aux élèves un outil très fécond pour les démonstrations en géométrie. Il peut être plus pertinent pour une progression cohérente de traiter le théorème des lignes proportionnelles avant les triangles semblables, mais adopter le choix de Clairaut

de n'aborder que les triangles semblables peut éviter aux élèves des erreurs dans les égalités de rapports. Les textes interrogent également le sens des notions étudiées, comme les aires. Il nous faudra concilier la vision des aires comme grandeurs et comme nombres, ne pas occulter la première totalement par l'utilisation systématique de formules. La difficulté des incommensurables est soulignée par les textes : à nous de voir comment nous traitons cette difficulté, à quel moment cela se révèle pertinent pour nos élèves.

## Références bibliographiques et sitographiques

- ARNAULD Antoine, 1667, *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, Charles Savreux, accessible sur le site Gallica <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6565463h.texteImage>, dernier accès le 28 juillet 2022.
- BARBIN Évelyne, 2001, « Qu'est-ce que faire de la géométrie ? », *Repères-IREM*, n° 43, pp. 59-83.
- BKOUCHE Rudolf, 2000, « La place du numérique dans la construction de la géométrie », in *La mémoire des nombres*, p. 655-688, Caen, IREM de Basse-Normandie.
- BKOUCHE Rudolf, LUBET Jean-Pierre, MARMIER Anne-Marie, 2009, *Grandeurs et nombres*, Recueil de textes et commentaires, Villeneuve d'Ascq, IREM de Lille.
- BOS Henri, 1903, *Géométrie élémentaire*, 1<sup>re</sup> éd. 1881, Paris, librairie Hachette et C<sup>ie</sup>, accessible sur le site Gallica <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1162625k?rk=42918;4>, dernier accès le 28 juillet 2022.
- BÜHLER Martine et MICHEL-PAJUS Anne, 2020, « Autour du théorème de Pythagore : grandeurs et nombres », in dir. JOUVE Guillaume, MARMIER Anne-Marie, MOYON Marc, RECHER François, TAZZIOLI Rossana, TOURNÈS Dominique, *Mathématiques en perspectives, Hommage à Rudolf Bkouche*, Limoges, PULIM, p. 143-157.
- CLAIRAUT Alexis, 1753, *Éléments de géométrie*, Paris, Chez David, <https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-4548> (ETH-Bibliothek Zürich, Rar 5319), dernier accès le 28 juillet 2022.
- DJEBBAR Ahmed, 2009, *Textes géométriques arabes (IX<sup>e</sup>-XV<sup>e</sup> siècles)*, Dijon, IREM de Dijon.
- DJEBBAR Ahmed, 2010, « Les mathématiques en pays d'islam : héritages, innovations et circulation en Europe » in *Circulation, Transmission, Héritage*, Actes du colloque C2I de Caen, p. 3-28.
- EUCLIDE, 1990, *Les Éléments* (vol.1), traduction de Bernard Vitrac, 4 volumes, Paris, PUF.
- KOUTEYNIKOFF Odile, LOGET François, MOYON Marc, 2013, Quelques lectures renaissantes des *Éléments* d'Euclide, in *Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, PULIM, p. 13-28.
- LACROIX Sylvestre François, 1808, *Éléments de géométrie à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations*, Paris, accessible sur le site Gallica <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2081879?rk=85837;2>, dernier accès le 28 juillet 2022.

LACROIX Sylvestre François, 1838, *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*, Paris.

LEGENBRE Adrien-Marie, 1800, *Éléments de géométrie*, seconde édition, Paris, chez Firmin Didot (An VIII), accessible sur le site Gallica <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6212886v?rk=42918;4>, dernier accès le 28 juillet 2022.

VITRAC Bernard, page personnelle : <https://cnrs.academia.edu/BernardVitrac>.

Page du groupe M. : A.T.H., dossier « Histoire et Géométrie » : <https://irem.u-paris.fr/histoire-et-geometrie>

## Aires sans formules

Carène GUILLET, Marie-Line MOUREAU

### Introduction

Notre point de vue sur les aires est issu du travail que nous avons mené au sein du groupe de recherche<sup>1</sup> en histoire des mathématiques de l'IREM des Pays de la Loire, qui est formé d'enseignantes du secondaire (collège et lycée) et du supérieur (CPGE et université). Nous avons constaté que les aires ne sont pour nos élèves ou étudiants qu'un nombre, voire ne sont réduites qu'à la formule permettant de calculer ce nombre. Tous ont oublié que les aires sont des grandeurs et qu'en tant que telles, elles peuvent être comparées, additionnées, soustraites. Cette conception explique d'après nous certaines difficultés rencontrées par ces mêmes élèves pour résoudre les problèmes d'aires sans intégrales dans les exercices de bac<sup>2</sup> et certainement même en partie les erreurs dans les changements d'unités.

Suite au travail que nous avons mené sur la balance et le poids suspendu d'Archimède à Camus (GRHEM<sup>3</sup>, 2018) nous avons formulé l'hypothèse qu'un enseignement utilisant l'histoire des mathématiques permettrait aux élèves de voir l'aire comme une grandeur. Ils pourraient ainsi renouer avec leurs premiers apprentissages dans ce domaine, en cycle 3, où les aires des polygones sont comparées par découpages et recompositions avant toute introduction d'une quelconque mesure (Perrin, 2005).

Nous étudierons d'abord des aires de surfaces rectilignes, puis curvilignes : le cercle, la parabole et la cycloïde. Pour chacune de ces figures nous avons, avec un retour aux textes et des constructions effectives « papier crayon », bâti des activités que nous avons pour la plupart expérimentées en classe avec nos élèves

1. BARBIN Évelyne, BOYÉ Anne, BUROT Annabelle, GUILLET Carène, MOUREAU Marie-Line, NIZAN-PICARD Catherine, VOILLEQUIN Isabelle.

2. Par exemple : exercice 4 bac ES Antilles Guyane juin 2017, exercice 3 bac S Polynésie juin 2018, exercice 3 bac STMG Métropole juin 2019, visibles sur le site de l'APMEP.

3. Groupe de Recherche sur l'Histoire et l'Enseignement des Mathématiques.

de seconde générale, en travaux dirigés ou dans le cadre de l'enseignement de « Méthodes et Pratiques Scientifiques », et de première « Sciences de l'Ingénieur » en accompagnement personnalisé. Regroupées et présentées sous forme de problèmes, nous les avons aussi proposées lors de stages pour la formation continue des enseignants du secondaire (Plan Académique de Formation ou ateliers lors des journées académiques de notre IREM). Nous avons alors choisi de terminer par la parabole, rompant avec l'ordre chronologique, mais optant pour un ordre croissant dans les difficultés. Si les textes présentés sont classiques, nous pensons que leur regroupement et notre approche globale le sont moins.

## Problème 1 : Étant donné un polygone convexe, construire un carré de même aire

### Une expérimentation en classe de seconde

Cette expérimentation peut, nous en sommes persuadées, être faite avec profit avec des élèves de quatrième ou troisième, mais c'est avec des élèves de seconde (lors de différents TD du premier trimestre) que le travail a été mené.

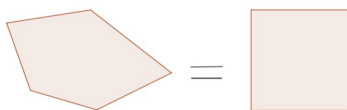


FIGURE 1 – Quadrature d'un polygone

La figure 1 étant projetée au tableau, nous commençons par indiquer aux élèves qu'il s'agit dans cette séquence d'établir la quadrature du polygone c'est-à-dire de construire un carré de même aire. À la façon des géomètres grecs nous obtiendrons l'égalité des aires sans calculs mais par des découpages et des recompositions en nombre fini. De plus, toutes les constructions se feront par intersections de droites et de cercles, c'est-à-dire à la règle et au compas. Nous les rassurons en leur signifiant que notre objectif n'est pas qu'ils redécouvrent seuls la construction du carré. Notre but est de remobiliser des connaissances géométriques, de les confronter à la rigueur du raisonnement hypothético-déductif ainsi que de leur offrir une ouverture culturelle. Il leur est précisé que ce problème correspond à la proposition 14 du livre II des *Éléments* d'Euclide, et que pour le résoudre, du fait de la construction des *Éléments*, il faut remonter le cours du traité jusqu'à un point sur lequel on s'accorde. Pour Euclide il s'agit bien évidemment de ses postulats, demandes et axiomes, mais pour notre travail en classe, il s'agira de la proposition 35 du livre I. Le cheminement sera de construire d'abord un rectangle de même aire que le polygone (objectif des deux premières séances) puis de réaliser la quadrature de ce rectangle (objectif de la dernière séance).

Nous distribuons les propositions d'Euclide qui seront utiles, certaines sont destinées à être lues et commentées en un cours dialogué, d'autres sont les supports

de constructions ou démonstrations réalisées par les élèves.

« Proposition 35. Les parallélogrammes qui sont construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux. » (Euclide, 1804, p. 54)

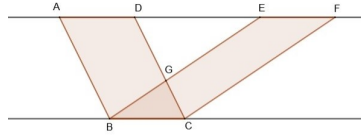


FIGURE 2 – Les parallélogrammes  $ABCD$  et  $BCFE$  ont la même aire

En effet les triangles  $ABE$  et  $DFC$  sont égaux car  $AE$  égale  $DF$ ,  $AB$  égale  $DC$  et l'angle  $DAB$  égale l'angle  $FDC$ . On peut retrancher le triangle  $DEG$  à chacun de ces triangles, les figures restantes sont égales (en aire) et en leur ajoutant le triangle  $BCG$ , les figures obtenues, les parallélogrammes  $ADCB$  et  $EFCB$ , ont des aires égales.

Cette démonstration est une utilisation du cas d'égalité des triangles côté-angle-côté<sup>4</sup> qui fait partie du programme de quatrième depuis 2018<sup>5</sup>, mais c'est surtout un « modèle » (au sens des programmes 2011 et suivants<sup>6</sup>). En effet elle met en œuvre le découpage de la figure en éléments pertinents, procédé que l'on souhaite ériger en méthode.

« Proposition 36. Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux. » (Euclide, 1804, p. 55)

Ces deux parallélogrammes étant donnés, la démonstration de cette proposition passe par la construction du parallélogramme intermédiaire.

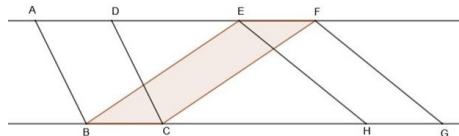


FIGURE 3 – Transitivité de l'égalité d'aire

L'égalité s'obtient alors grâce à la proposition précédente et à la transitivité de l'égalité des grandeurs. Cette transitivité est la première des notions communes énoncées par Euclide dans ses « demandes », en début du livre I : « Les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entre elles. » (Euclide, 1804, p. 5)

Cette démonstration a également valeur de « modèle » puisqu'elle permet d'établir avec les élèves que pour démontrer que deux grandeurs sont égales, il suffit de

4. EUCLIDE, Propriété 4 livre I.

5. BO n° 30 du 26-7-2018.

6. « Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées » BO spécial n° 1 du 22-01-19.

montrer qu'elles sont égales à une même troisième. Ce raisonnement pourra être réinvesti dans la comparaison d'expressions numériques ou algébriques.

Problème 1-1 : Construire un rectangle de même aire qu'un triangle donné.

Ce problème leur étant soumis, les élèves visualisent assez bien le rectangle mais ils ont recours aux formules pour justifier l'égalité d'aire. Nous leur proposons de suivre le protocole de construction de la proposition 42 en choisissant un angle droit.

« Proposition 42. Construire dans un angle donné, un parallélogramme égal à un triangle donné. » (Euclide, 1804, p. 62)

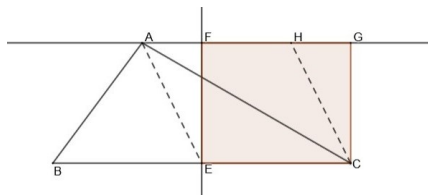


FIGURE 4 – Rectangle et triangle de même aire

Le triangle  $ABC$  étant donné, nous faisons construire à la règle et au compas :  $E$  le milieu de la base  $[BC]$ , ce qui revient à construire la médiatrice de cette base, construction donnée proposition 5 du livre I (Euclide, 1804, p. 11), la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A$  et le point  $H$  tel que  $AECH$  soit un parallélogramme. Alors  $AECH$  et  $ABC$  sont tous les deux le double du triangle  $AEC$  d'après la proposition 34 selon laquelle la diagonale partage un parallélogramme en deux parties égales (Euclide, 1804, p. 53) et la « proposition 38. Les triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux. » (Euclide, 1804, p. 58). C'est l'occasion de réactiver ces résultats élémentaires de géométrie. La construction des points  $F$  et  $G$  sur la droite  $(AH)$  tels que  $FGCE$  soit un rectangle permet d'achever la résolution de notre problème 1-1 grâce à la proposition 35.

Problème 1-2 : Construire un rectangle de même aire qu'un triangle donné et dont un des côtés a une longueur fixée arbitrairement.

Pour la résolution de ce problème 1-2 il reste à construire un rectangle de même aire que le rectangle  $EFGC$  précédent et dont un des côtés est fixé au préalable. Nous présentons aux élèves la « proposition 43. Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui sont autour de la diagonale sont égaux entre eux. » (Euclide, 1804, p. 64)

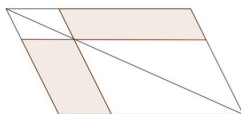


FIGURE 5 – Les deux parallélogrammes grisés sont égaux en aire



La démonstration basée sur la proposition 34 déjà évoquée ne pose pas de problème. La construction du rectangle est alors laissée aux élèves puisqu'il ne s'agit que de reconstruire la figure de la proposition 43 en faisant en sorte que le rectangle obtenu comme solution de notre problème 1-1 et le rectangle cherché soient les compléments autour de la diagonale d'un grand rectangle.

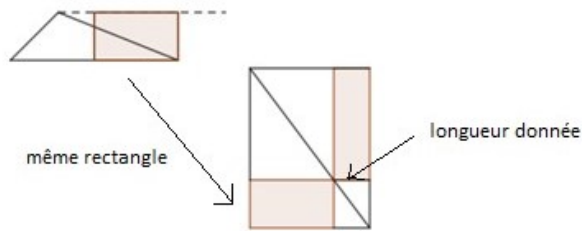


FIGURE 6 – Deux rectangles de même aire

Les deux rectangles de part et d'autre de la diagonale ont la même aire, donc le deuxième a la même aire que le triangle initial et a bien un côté de longueur donnée.

Il reste à suivre la « Proposition 45. Construire, dans un angle donné, un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée. » (Euclide, 1804, p. 67)

La figure est décomposée en triangles, une base est fixée arbitrairement, et il s'agit « d'empiler » les différents rectangles ayant cette base pour un de leurs côtés et de même aire que les triangles. La figure obtenue est un grand rectangle dont l'aire est celle de la figure rectiligne. Cette construction est facile à concevoir mais sa réalisation est longue et elle n'a pas été demandée effectivement. En conclusion des deux premières séances, elle est donnée à voir en une animation GeoGebra réalisée en utilisant les macros sous l'onglet *Outils*.

Pour finir de résoudre notre Problème 1, il ne reste plus qu'à suivre la proposition 14 du livre II : « Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée. » (Euclide, 1804, p. 105)

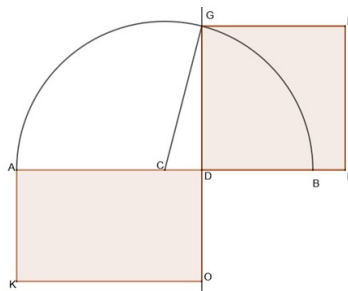


FIGURE 7 – Quadrature d'un rectangle

Il s'agit de construire un rectangle de même aire que la figure et, si ce rectangle n'est pas un carré, de construire un carré de même aire. Pour réaliser cette ultime quadrature, nous distribuons la figure 7 où, à partir du rectangle  $ADOK$ , il a été construit  $B$  sur  $(AD)$  tel que  $DB$  soit égal à  $DO$  et  $C$  le milieu de  $[AB]$  et où le carré  $DGIH$  a la même aire que le rectangle  $ADOK$ . Les élèves démontrent l'égalité d'aires mais ils reviennent aux calculs en nommant les différentes longueurs. Certains utilisent le théorème du triangle inscrit dans un demi-cercle qui, à ce moment des *Éléments* n'a pas encore été démontré.

Nous suivons alors avec eux la démonstration d'Euclide qui repose sur le théorème dit de Pythagore et la proposition 5 livre II : « Si une droite est coupée en deux parties égales et en deux parties inégales, le rectangle compris sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le carré de la droite qui est placée entre les points de section, est égal au carré de la moitié de cette droite. » (Euclide, 1804, p. 84)

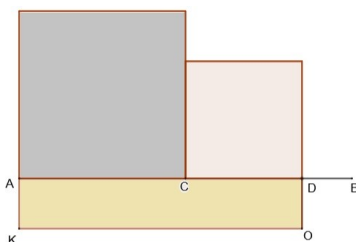


FIGURE 8 – Un carré somme d'un carré et d'un rectangle

Nous reformulons cette proposition pour les élèves : si sur le segment  $[AB]$  on place d'une part son milieu  $C$  et d'autre part un point  $D$  quelconque entre  $C$  et  $B$  alors le carré de côté  $AC$  a pour aire la somme de l'aire du rectangle  $ADOK$  de côtés  $AD$  et  $DB$  et du carré de côté  $CD$ . Cette égalité est à relier au théorème de Pythagore et lui redonne son sens géométrique : la construction d'un carré égal (en aire) à la somme de deux carrés.

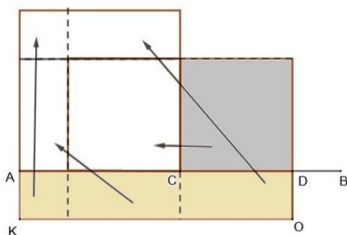


FIGURE 9 – Démonstration par découpages et recombinaison

Dans la figure 8 le segment  $[AB]$  est partagé en deux parties égales (avec  $C$ ) et inégales (avec  $D$ ). D'une part la somme des aires du rectangle  $ADOK$  et du

carré de côté  $[CD]$  égale l'aire du carré de côté  $[AC]$ , d'autre part l'aire du carré de côté  $[AC]$  égale l'aire du carré de côté  $[CG]$ , elle-même égale à la somme des aires des carrés de côté  $[CD]$  et  $[DG]$ . Il s'ensuit que l'aire du rectangle  $ADOK$  est égale à celle du carré de côté  $[DG]$ .

## Bilan

Durant toute cette séquence, les élèves ont joué le jeu et ont eu l'occasion de construire des figures, réfléchir, argumenter et... calculer (ce qui n'était pas recherché!). De plus, nous sommes dans l'esprit des programmes de seconde parus au B.O. du 22 janvier 2019 qui invitent les enseignants et les enseignantes à démontrer des identités géométriquement, comme en témoigne l'extrait suivant : « Pour  $a$  et  $b$  positifs, démontrer géométriquement l'égalité  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  »

Dans le domaine numérique, l'item « Établir l'inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs. » n'est qu'une application de la quadrature du rectangle. En effet elle contient une construction effective de la moyenne arithmétique (le rayon  $CG$  du demi-cercle), et de la moyenne géométrique (le côté  $DG$  du carré). Il est clair que  $CG$  est supérieur à  $DG$  (propriété de l'hypoténuse) et donc la moyenne arithmétique de deux nombres positifs est supérieure à leur moyenne géométrique.

Ainsi ce travail, où nous avons mobilisé des savoirs et des savoir-faire géométriques dans des activités parfois difficiles mais ayant l'attrait du dépaysement pour les élèves, a-t-il permis de jeter des ponts entre différentes parties du programme.

## Problème 2 : Trouver un triangle égal à un cercle

### Une expérimentation en classe de première

Nous avons proposé cette activité en classe de première S au mois de mars avec 32 élèves répartis en groupes de 16 durant deux séances d'une heure d'accompagnement personnalisé. L'objectif était de faire travailler le raisonnement par l'absurde, en approfondissement des contenus abordés durant l'année. En effet, les programmes stipulent que la démonstration par l'absurde doit être introduite en classe de seconde, puis mobilisée pendant le cycle terminal. On trouve ici un double raisonnement par l'absurde, puisque Archimède montre que le cercle, ne pouvant pas être plus grand que le triangle et ne pouvant pas non plus être plus petit, est égal au triangle.

L'objectif de l'activité est de faire comprendre aux élèves la proposition première du traité *De la mesure du cercle* et les principales étapes de sa démonstration : « Un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés est égal au rayon de ce cercle et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle. » (Archimède, 1846, p. 116).

L'enjeu majeur avec les élèves n'est pas de prouver la proposition I du livre X d'Euclide : « Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une

certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées. » (Euclide, 1804, p. 377-378), qui garantit pourtant le début de la preuve d'Archimède. C'est par un échange avec le professeur que la classe parvient à adhérer intuitivement à ce principe.

Le premier objectif pédagogique est la résolution du problème suivant :

Problème 2-1 : Comparer le polygone régulier inscrit dans un cercle et le triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est le périmètre du polygone et l'autre côté l'apothème des triangles.

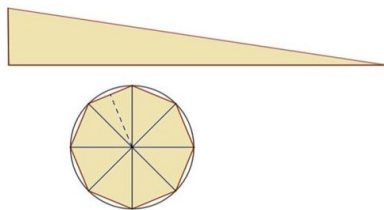


FIGURE 10 – Octogone et triangle de même aire

Nous avons d'abord défini le terme « apothème », nouveau pour eux, puis nous leur avons distribué la figure ci-dessus, en leur demandant de comparer l'aire de l'octogone<sup>7</sup> à celle du triangle, en complétant si besoin les tracés. Après un temps de recherche d'une dizaine de minutes, certains élèves avaient trouvé qu'il suffisait de tracer sur la base du triangle les huit triangles isocèles constituant l'octogone, et l'ont donc indiqué aux autres. La comparaison ne leur a ensuite posé aucun problème. Nous avons alors généralisé cette égalité à un polygone régulier à  $n$  côtés.

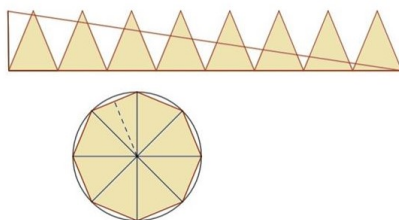


FIGURE 11 – Développement de l'octogone

Le texte d'Archimède est difficile d'accès pour les élèves. Nous leur avons donc posé des questions préalables assez larges pour leur permettre, sans avoir à rentrer dans les détails, de comprendre les grandes étapes de raisonnement : « Quelle

7. Nous avons choisi l'octogone, ayant un nombre de côtés suffisant pour lui donner un caractère général mais pas trop grand non plus afin de ne pas rendre la construction fastidieuse.

égalité Archimède démontre-t-il? », « L'énoncé et la preuve comportent-ils des formules, des calculs? », « Quel est le type de démonstration employée, repérer sa structure logique? ». Nous avons pu constater qu'aucun élève ne connaissait la démonstration par l'absurde. Nous avons ensuite présenté la première partie du raisonnement d'Archimède, qui montre que l'aire du disque ne peut pas être supérieure au triangle, en un cours dialogué, qui a été bien suivi par les élèves. Les questions ont été nombreuses, tant sur les aspects historiques, comme la forme des textes mathématiques de l'époque, que sur des aspects strictement mathématiques, comme le statut logique de la preuve par l'absurde, ou encore des points techniques, comme le traitement des inégalités.

Voici comment cette preuve a été faite devant les élèves :

Supposons donc que le cercle  $C$  soit supérieur au triangle  $T$  tel que défini dans la proposition d'Archimède : un côté de l'angle droit est le rayon et l'autre la circonférence du cercle. Posons alors  $C - T = e$ .

Construisons un carré inscrit dans le cercle, puis un octogone, etc. en multipliant le nombre de côtés par deux. Ces polygones sont de plus en plus proches du cercle et on est assuré de finir par obtenir un polygone  $P$ , tel que  $C - P < e$  grâce au principe d'Eudoxe. Alors, de  $C - T = e$  et  $C - P < e$ , il découle que  $P$  est supérieur au triangle  $T$ .

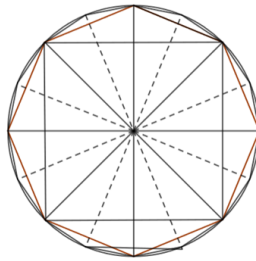


FIGURE 12 – Polygones réguliers successifs

Cependant, d'une part ce polygone est constitué de triangles isocèles d'apothème inférieur au rayon du cercle, d'autre part le périmètre du polygone est inférieur à la circonférence du cercle. Donc l'aire du triangle  $T'$  est inférieure à l'aire du triangle  $T$ . Or,  $T'$  et  $P$  ont la même aire, donc l'aire du triangle  $T$  est supérieure à celle du polygone  $P$ .

Comme  $T$  ne peut pas être, à la fois, supérieur et inférieur à  $P$ , il faut réfuter l'hypothèse : le cercle n'est pas supérieur au triangle  $T$ .

La deuxième partie nous a paru plus difficile et nous avons choisi de ne pas la détailler. En revanche, en complément de cette activité, nous avons fait réaliser à la classe une figure sur GeoGebra dans laquelle, partant d'un cercle de rayon 1 donné, ils ont dû construire un carré, un octogone puis un hexadécagone, d'abord inscrits dans le cercle, puis circonscrits au cercle, pour enfin observer l'évolution de leurs aires. Ils ont pu retrouver ainsi par approximations successives un encadrement de  $\pi$ .

## Bilan

À l'issue de cette séance, lorsque les élèves se rendent compte que la fameuse formule  $\pi \times R^2$  signifie que l'aire du disque est le produit de la demi-circonférence par le rayon, ils en sont stupéfaits car le sens géométrique d'une formule, apprise sans la comprendre, leur apparaît pour la première fois.

Nous pensons sans l'avoir expérimenté que l'activité serait adaptable pour une classe de seconde. Nous avons également proposé cette séquence en formation continue lors d'un stage inscrit au PAF. Nous avons passé environ une heure trente avec des professeurs stagiaires globalement novices en histoire des mathématiques, à présenter le texte, les laisser réfléchir, puis développer la preuve, pour finir par exposer les activités que nous avons réalisées à destination des élèves.

En formation continue, il nous semble important de signaler que contrairement à ce qu'on lit parfois, il ne s'agit pas de remplir le cercle par une suite de polygones de plus en plus proches. La succession de polygones construits (en pensée) n'a pas vocation à épuiser le cercle et il n'y a pas de passage à la limite. Pour les géomètres grecs le cercle n'est pas un polygone ayant une infinité de côtés, ce qui serait accepter un infini en acte, alors qu'ils n'acceptent que l'infini potentiel, qui permet d'imaginer un processus se prolongeant aussi longtemps que l'on veut. C'est ainsi par exemple, qu'une droite n'est pas un ensemble infini de points mais que tout segment peut être prolongé indéfiniment.

## Problème 3 : Déterminer des aires de surfaces curvilignes par des méthodes d'invention

### De nouvelles méthodes

Au XVII<sup>e</sup> siècle les démonstrations telles que celle d'Archimède dans notre problème 2 sont contestées. Leur principe permet certes de résoudre de façon rigoureuse différents problèmes mais au prix de calculs et développements longs et difficiles. Mais surtout il faut savoir ce que l'on doit trouver avant de démontrer qu'il ne peut en être autrement ! Or au XVII<sup>e</sup> siècle les géomètres découvrent de nouvelles courbes et s'intéressent à de nouveaux objets. Ils cherchent donc à élaborer des méthodes, dites d'invention, permettant d'établir de nouveaux résultats et d'éviter de trop longues démonstrations. Ils soupçonnent les Grecs d'avoir élaboré de telles méthodes mais de les avoir jalousement gardées secrètes.

En 1635, dans son livre *Geometria indivisibilibus contunuorum nova quadam ratione promota* (Cavalieri, 1653), le jésuite Bonaventura Cavalieri présente une méthode, la méthode des indivisibles, grâce à laquelle il peut effectivement déterminer des aires ou des volumes nouveaux. Les indivisibles ne sont pas acceptés par tous car leur nature pose problème, et entre autres, des problèmes de dimension. En effet la notion d'indivisibles fait intervenir des grandeurs non homogènes : les indivisibles d'une surface sont des lignes, et ceux d'un volume des surfaces. Comment concevoir qu'en ajoutant des lignes on obtient une surface ? Faire d'une surface un ensemble infini de lignes s'oppose à la conception du continu héritée d'Aristote. Malgré tout, pendant près d'un siècle, c'est-à-dire jusqu'à l'invention du

calcul intégral, cette méthode a été utilisée et elle a montré son efficacité. Roberval, Pascal, Torricelli et Leibniz y ont recours. Cependant elle a aussi toujours eu ses détracteurs et même Galilée, protecteur de Cavalieri mais atomiste convaincu, s'est montré plus que réticent à son utilisation qui mêle infini et infiniment petits (Barbin, 1987, Merker, 2001).

## Une expérimentation en classe de seconde

Dans le cadre de l'enseignement MPS nous avons mené durant la première période de l'année un travail sur la détermination d'aires selon diverses méthodes. Sur deux séances nous avons choisi de faire découvrir à nos élèves la méthode des indivisibles. Le texte de Cavalieri étant d'un abord trop difficile, nous avons présenté les indivisibles dans *Les Éléments de géométrie* publiés en 1685 par Bernard Lamy, soit cinquante ans après le *Geometria indivisibilibus* de Cavalieri. Ce texte s'éloigne de la théorie première car la notion de mouvement est totalement absente dans la *Géométrie des indivisibles* de Cavalieri. Mais évoquant un segment qui se déplace en laissant une trace (Lamy, 1740, p. 115), il fait écho aux connaissances des lycéens habitués à utiliser GeoGebra et il leur permet d'approcher la notion.

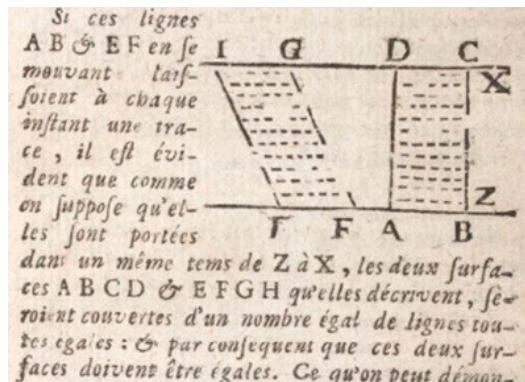


FIGURE 13 – Le texte de Bernard Lamy

Puis nous avons décidé de travailler un texte d'Antoine Arnauld. Ce janséniste, compose ses *Nouveaux élémens de géométrie* dont une première version paraît en 1667 et une seconde en 1683 comme un manuel destiné aux Petites écoles de Port-Royal. Il y montre un véritable souci de se rendre intelligible. Arnauld est hostile au raisonnement par l'absurde qui cherche à convaincre l'esprit sans l'éclairer et il critique l'organisation des *Éléments* d'Euclide. Les quatre premiers livres de ses *Nouveaux Éléments* traitent des grandeurs, la géométrie n'intervenant qu'ensuite.

Le texte choisi est le cinquième théorème du livre quizième des *Nouveaux élémens*. Il énonce : « Le cercle est égal au triangle qui a pour côtés de son angle droit le rayon du cercle et une ligne égale à la circonférence du cercle. » (Arnauld, 1683, p. 370)

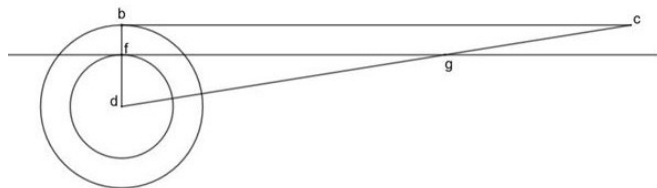


FIGURE 14 – Cercle et triangle de même aire selon Arnauld

Avant la distribution du texte d'Arnauld, les élèves ont construit la figure avec le logiciel GeoGebra à partir de la description : la droite  $(bc)$  est la tangente au cercle et égale à la circonférence, le point  $f$  un point sur le rayon  $[bd]$ , à partir duquel on trace le cercle de centre  $d$ , (ce cercle est un indivisible du cercle de rayon  $bd$ ), et  $(fg)$  la parallèle à  $(bc)$  (le segment  $[fg]$  est un indivisible du triangle  $bcd$ ). Faisant varier le point  $f$ , et en activant les traces, les élèves ont vu les indivisibles remplir les figures et ont conclu à l'égalité des aires sans juger nécessaire de démontrer l'égalité des indivisibles chacun à chacun. Lorsqu'ils ont ensuite rédigé cette démonstration, sans surprise pour nous, ils ont reconnu une configuration de Thalès et écrit des égalités de rapports sous forme de fractions. Ils ont ensuite été confrontés au texte d'Arnauld tel qu'il apparaît dans l'édition de 1683. Il a fallu expliciter l'expression des égalités de rapports et les élèves ont pris conscience que la formule donnant la circonférence d'un cercle en fonction du rayon, qu'ils avaient utilisée, exprime de fait une relation de proportionnalité.

En conclusion de cette activité nous notons avec les élèves que nous avons établi une égalité d'aire entre un cercle et un triangle et que nous savons réaliser la quadrature de n'importe quel triangle mais, que pour autant, nous n'avons pas résolu le problème de la quadrature du cercle ! En effet le problème de la construction, à la règle et au compas, d'un segment de longueur égale à la circonférence du cercle n'est pas résolu. Cette recherche vaine de la quadrature du cercle est un élément culturel fort que nous trouvons pertinent d'évoquer à ce moment avec eux.

## Problème 4 : Quelle relation y a-t-il entre l'aire du cercle générateur et celle sous une arche de cycloïde ?

### La cycloïde

Objet de défi, source de rivalités, désignée cycloïde, roulette ou trochoïde au gré des auteurs, la cycloïde est la courbe du XVII<sup>e</sup> siècle<sup>8</sup>. Son étude a aiguillonné les mathématiciens dans leurs recherches de nouveaux outils. Le père Marin Mersenne, de l'ordre des Minimes, introduit la cycloïde pour résoudre le paradoxe de la roue d'Aristote et pense y reconnaître une demi-ellipse. Roberval étudie ses tangentes,

8. Lire à ce propos l'article d'Évelyne BARBIN dans ce même ouvrage.



mettant au point pour cela une méthode d'invention relevant de la cinématique. Il obtient sa quadrature et contredit la conjecture de Mersenne.

Selon la définition de Torricelli, reprise par Pascal dans son *Traité Sur la roulette* (Pascal, 1658), et tout à fait usuelle de nos jours, une cycloïde est la trajectoire d'un point sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On se donne l'image mentale d'un clou sur un pneu de voiture.

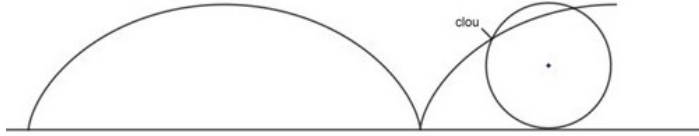


FIGURE 15 – Une cycloïde

Mais Roberval en a une vision différente : il s'agit de « [la trajectoire] d'un point d'un cercle tournant autour du centre dans le même temps que ce cercle se déplace parallèlement à lui-même » (Roberval, 1693, p.191). Le cercle n'est pas une roue et ne tourne pas. Le point sur le cercle est animé par deux mouvements : le sien propre de rotation autour du centre, et le glissement rectiligne du cercle. Les courbes sont des trajectoires et Roberval construit les tangentes à partir de la composition des mouvements du mobile supposé parcourir la courbe.

Gilles Personne de Roberval occupe en 1634 la chaire de mathématiques du collège Royal. Il est membre de l'académie fondée en 1635 par Mersenne et qui se donne la vocation de faire progresser les sciences en créant une émulation et une collaboration entre les savants européens. Roberval est aussi l'un des premiers membres de l'Académie Royale des Sciences et c'est cette académie qui publie son *Traité des indivisibles, explication de la roulette* après sa mort. La façon dont Roberval établit que l'aire sous l'arche de la cycloïde vaut trois fois le disque est d'une belle ingéniosité. Sa démonstration s'appuie sur la construction de la cycloïde et d'une deuxième courbe, appelée « la compagne » de la cycloïde et qui est la trajectoire du même point sur le cercle lorsqu'il est animé (cette fois) d'un mouvement rectiligne sur le diamètre pendant que le cercle se déplace « parallèlement à lui-même ».

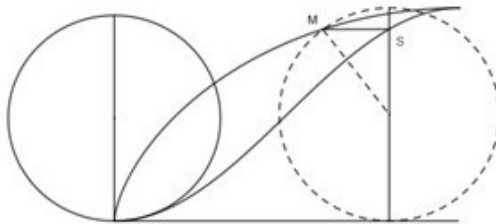


FIGURE 16 – La cycloïde et sa compagne

Il utilise ensuite les indivisibles pour montrer que l'aire du domaine entre la cycloïde et sa compagne, est égale à celle du demi-disque. Puis grâce au théorème d'Archimède à propos de l'aire d'un disque (voir problème 2), il établit que le triangle  $ACD$  et le disque ont la même aire, puis que l'aire sous la demi-arche de cycloïde est trois fois celle du demi-disque. Celle sous une arche est donc égale à trois fois l'aire du disque.

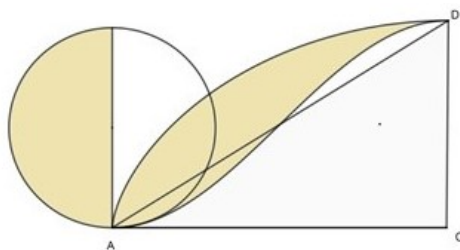


FIGURE 17 – Comparaison d'aires

## Une expérimentation lors d'un stage

Nous avons proposé à un groupe d'enseignants de lycée de découvrir cette démonstration. À la recherche d'éléments de culture sur l'histoire des mathématiques, ces enseignants avaient jusqu'alors assez peu lu de textes originaux. Ayant déjà eu l'occasion d'évoquer avec eux les indivisibles de Cavalieri, nous les avons laissés découvrir le texte de Roberval et construire pas à pas la figure à partir d'une amorce.

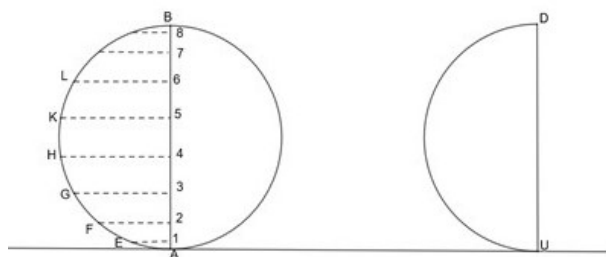


FIGURE 18 – L'amorce de la construction de la cycloïde

Comme nous nous y attendions les notations de Roberval ont dû être explicitées ainsi que la notion oubliée de sinus verse. La construction point par point de la cycloïde et de sa compagne ainsi que la démonstration sur les égalités d'aires ont été une belle découverte pour nos collègues.

## Problème 5 : Comparer l'aire du segment de parabole à celle du triangle inscrit

Les coniques ont été étudiées par les géomètres grecs : Euclide aurait écrit un traité (perdu) sur les coniques et Apollonius de Perga est l'auteur d'un traité en huit livres (seuls sept nous sont parvenus) sur les sections coniques. C'est dans ce traité qu'il donne leurs noms actuels à l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Les lycéens d'aujourd'hui tracent bien des hyperboles et des paraboles, mais elles ne sont pour eux que des courbes représentatives de fonctions. Toutefois dans les programmes de 2019, la parabole apparaît également dans la partie Géométrie repérée comme ensemble des points équidistants à un point donné et à une droite donnée ; la voici de nouveau objet géométrique.

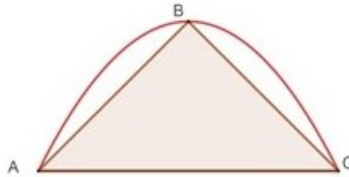


FIGURE 19 – Le segment de parabole est quatre tiers du triangle inscrit

Jusqu'au début du  $XX^e$  siècle, le résultat d'Archimède « un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment » (Archimède, 1807, p. 337) était connu grâce à sa lettre à Dosithee. La démonstration qu'il y présente est établie sur le mode du double raisonnement par l'absurde. Mais en 1906, une copie d'une lettre à Eratosthène où il présente sa *méthode* est découverte. Archimède y explique que cette « méthode mécanique » lui permet de trouver maints résultats qu'il peut ensuite prouver par des démonstrations géométriques classiques (Archimède, 1960). Comme pressenti par les géomètres du  $XVII^e$  siècle, Archimède avait bien une méthode d'invention, mais elle n'était pas tenue secrète, simplement perdue pour un (très long) temps.

Dans cette figure (figure 20),  $(CZ)$  est la tangente à la courbe en  $C$ . Archimède met en « balance » autour du point  $K$ , milieu de  $[AZ]$ , les segments  $[HS]$  et  $[MX]$ . Ils sont en équilibre du fait de la propriété VII du livre I de son ouvrage *De l'équilibre des plans et de leurs centres de gravité* (Archimède, 1807, p. 282), puisque  $MX$  est à  $SH$  comme  $TK$  est à  $KN$ . Il établit ce rapport de grandeurs à l'aide des propriétés géométriques de la parabole et des triangles semblables.

L'ensemble de tous les segments  $[MX]$  s'équilibre donc avec l'ensemble de tous les segments  $[HS]$  et donc les segments  $[OX]$ . Par conséquent, le triangle  $AZC$  est en équilibre avec le segment de parabole  $ABC$ . Le rapport d'équilibre est  $1/3$ , rapport de  $KT$  à  $KP$ , où  $P$  est le centre de gravité du triangle  $AZC$ . La parabole « pèse » ainsi le tiers du triangle  $AZC$ . Il suffit alors d'observer que  $[AB]$  est une médiane de  $AKC$  pour conclure que le triangle  $ABC$  est le quart du triangle  $AZC$ .



leur faire faire des mathématiques, celles qui correspondent aux programmes, tout en montrant qu'elles sont une construction collective, inscrite dans la durée et le temps, pour répondre à des questions, ici la détermination des aires. Cet aspect culturel ne nous est pas indifférent alors que se profile dans un horizon très proche que de nombreux élèves abandonneront l'étude des mathématiques en fin de seconde.

## Références bibliographiques

- ARCHIMÈDE, 1807, « De la mesure du cercle », « De la quadrature de la parabole », « De l'équilibre des plans et de leurs centres de gravité », (*Œuvres d'Archimède*, trad. F. Peyrard, Paris, Buisson.
- ARCHIMÈDE, 1960, « De la méthode », *Les Œuvres complètes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon*, trad. P. Ver Eecke, Liège, Vaillant-Carmane.
- ARNAULD Antoine, 1683, *Nouveaux élémens de géométrie*, 2<sup>e</sup> édition, Paris, Desprez.
- BARBIN Évelyne, 2013-2014, « Histoire des mathématiques : les courbes », polycoché, master d'histoire des sciences et techniques, Nantes, Université de Nantes.
- BARBIN Évelyne, 1987, « Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles en Italie », *Fragments d'histoire des mathématiques*, Tome 2, Paris, APMEP, p.125-159.
- BELLA Sandra, 2018, *De la géométrie et du calcul des infiniment petits : les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690-1706)*, Thèse de doctorat en histoire des mathématiques, sous la direction d'Évelyne Barbin, Nantes, Université de Nantes.
- CAVALIERI Bonaventura, 1653, *Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota*, Bologne, typis C FerroniiEx typographia de Ducijs.
- CAVALIERI Bonaventura, 1647, *Exercitationes geometricae sex*, Bologne, Typis Iacobi Montij.
- DIAGNE Mali, LATOUCHE Serge, LELONG Alain, LEROY Annette, VAN DEN BOOM Isabelle, VIDAL Claudine, 2005, « La géométrie des indivisibles ». *Histoire d'aires chap. 4, Les cahiers de l'IREM d'Orléans*, n° 3, Orléans, IREM d'Orléans.
- EUCLIDE, 1804, *Les Éléments de géométrie*, trad. F. Peyrard, Paris, F. Louis.
- FRÉMONT Christiane, 2003, *Singularités individus et relations dans le système de Leibniz*, Paris, Librairie Philosophique Vrin.
- FRIEDELMEYER Jean-Pierre, 1998, « Les aires : outils heuristique – outil démonstratif », *Repères IREM*, 31, Metz, Topiques éditions, p. 39-62.
- GRHEM des Pays de la Loire, 2018, « Expérience et Théorie : la balance et le poids suspendu d'Archimède à Camus », in BARBIN Évelyne (éd.), BÉNARD Dominique, MOUSSARD Guillaume, *Les mathématiques et le réel*, Rennes, PUR.
- GUICHARD Jean-Paul, 2011, « Petite histoire de la grandeur aire. Premier épisode. Les aires chez Euclide », *Corol'aire* n°85, Poitiers, APMEP, p. 4-5.

- GUILLET Carène, MOUREAU Marie-Line, VOILLEQUIN Isabelle, 2019, « Mathematics and experiment : How to calculate areas without formulas? », *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*, Oslo, Oslo Metropolitan University, p. 227-243.
- LAMY Bernard, 1740, *Les élémens de géométrie ou de la mesure de l'étendue*, 6<sup>e</sup> édition, Paris, Hourdel.
- MERKER Claude, 2001, *Le chant du cygne des indivisibles*, Besançon, PUFC.
- MERKER Claude, 2004, « La méthode des indivisibles racontée lors d'un stage », *Repères IREM* n°54, Metz, Topiques éditions, p. 57-76.
- NOUET Monique, 1992, « Histoire des mathématiques en classe de terminale », *Repères IREM*, n°9, Metz, Topiques éditions, p.15-33.
- PASCAL Blaise, 1658, *Traité sur la roulette*, « Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavi », Paris.
- PERRIN Daniel, 2005, *Mathématiques d'école : nombres, mesures et géométrie*, Paris, Cassini.
- PLANE Henry, 2007, « Les indivisibles » *PLOT. Nouvelle série* n°20, Paris, AP-MEP, p. 26-28.
- ROBERVAL (de) Gilles Personne, 1693, « Traité des indivisibles », *Divers ouvrages de Mathématique et de physique, par messieurs de l'Académie royale des sciences*, Paris, Imprimerie Royale, p. 190-245.

## Rectangulation & quadrature des figures

Jean-Paul GUICHARD

### Introduction

Construire un rectangle ou un carré d'aire égale à celle d'une ou plusieurs figures données est un champ de problèmes qui parcourt l'histoire des mathématiques et des civilisations : Inde, Chine, Grèce antique, Monde arabe, Europe de la Renaissance, et jusqu'au XX<sup>e</sup> siècle. On y retrouve des problèmes ou théorèmes célèbres comme la quadrature du cercle ou le théorème de « Pythagore », et des méthodes aussi différentes que la construction à la règle et au compas (ou avec une corde) ou le découpage. Ce champ de problèmes permet de comprendre comment les hommes ont pu trouver diverses formules exactes ou approchées pour calculer l'aire de figures simples, comment avec plusieurs carrés égaux ils ont réalisé un seul carré de même aire, comment ils ont trouvé le théorème de « Pythagore ».

La plupart des problèmes que nous étudierons permettent de montrer qu'une partie de la géométrie et du calcul, des cycles 3 et 4, peut s'apprendre à partir de ces problèmes de construction et d'aire. Certains de ces problèmes peuvent également fournir de bonnes situations d'étude pour les programmes de lycée. C'est un champ de problèmes qui donne du sens aux mathématiques enseignées et aux apprentissages scolaires : calcul des aires, calcul algébrique, programmes de construction, raisonnement et souci de justification.

### L'Inde védique (1500-500 av. J.-C.) : Les *Sulbasutras* de Baudhayana

Les *Sulbasutras* de Baudhayana sont les plus anciens textes mathématiques de l'Inde. Ils sont écrits en sanskrit, sans aucune figure, et constituent la partie des *Sutras* consacrée aux règles de construction des autels sacrificiels. C'est donc

le rituel védique qui justifie l'existence de ces mathématiques ainsi que le type de problèmes à résoudre et la façon de les résoudre. Pour construire ces autels de forme simple (cercle, carré, rectangle, losange) ou composée de formes simples (faucon), le sacrificateur utilisait une corde (sulba) et des piquets; il était un tendeur de corde (sulbaka). Si tracer un cercle, un triangle isocèle, un losange avec une corde et des piquets est simple en pliant la corde en parties égales, par contre tracer un carré n'est pas évident. D'autre part le passage du mythe au rite imposait au sulbaka de savoir transformer un autel de forme donnée, par exemple circulaire, en un autel de même aire ayant une autre forme, par exemple carrée. Il se trouvait donc confronté au problème de la quadrature du cercle, et plus généralement à des problèmes de quadrature, dont il se servait aussi pour réaliser des agrandissements d'autels selon des règles prescrites, comme celui en forme de faucon. De plus, tous les autels devaient être engendrés à partir du carré de un purusa de côté (hauteur du sacrificateur les bras levés). On voit donc que la construction du carré, et les problèmes de quadrature sont au cœur des mathématiques indiennes. Il n'est alors pas étonnant que le premier problème de construction abordé soit celui de la construction du carré. Tous les textes des *Sulbasutras* cités proviennent de l'article d'Olivier Keller (Keller, 2000). On trouvera des approfondissements dans l'ouvrage *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes* (Barbin, 2014).

## La construction du carré

« Si l'on veut un carré, une méthode est de prendre une corde de longueur égale au carré donné [c'est-à-dire à son côté], faire des nœuds aux deux extrémités et une marque en son milieu. On trace la ligne [Ouest-Est] et on plante un piquet en son milieu. On fixe les deux nœuds au piquet et on trace un cercle avec la marque. Deux piquets sont plantés aux deux extrémités du diamètre.

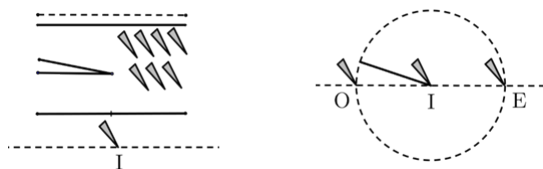


FIGURE 1 – Instruments & mise en place de la construction du carré

Un nœud étant fixé à l'Est, on trace un cercle avec l'autre; la même chose à l'Ouest. Le second diamètre est obtenu des points d'intersection de ces deux; on plante deux piquets aux deux extrémités du diamètre.

Avec deux nœuds fixés à l'Est, on trace un cercle avec la marque; on fait la même chose au Sud, à l'Ouest et au Nord. Les points d'intersection donnent le carré. »



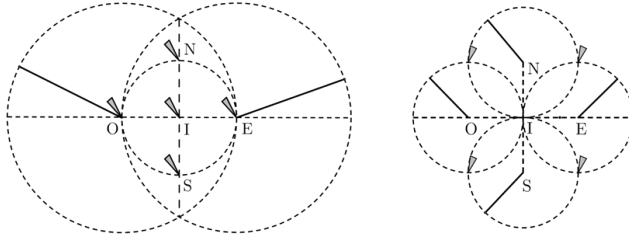


FIGURE 2 – Construction du carré avec une corde

Comme nous l'avons déjà dit, il n'y a pas de figures dans le texte. Ces figurations ont été ajoutées pour en faciliter la compréhension. Tracer les cercles et les diamètres peut se faire à la règle et au compas, mais il faut remarquer que le côté du carré étant donné au départ, en obtenir la moitié, ou le milieu, est plus facile à faire en pliant la ficelle en deux qu'en utilisant règle et compas. Une bonne occasion de se poser le problème et de le résoudre.

La construction qui suit immédiatement celle que nous venons de voir donne un autre moyen de construire le carré, en montrant comment tracer un angle droit. Elle est basée sur ce que nous appelons la réciproque du théorème de Pythagore. Le sulbaka doit prendre une corde double du côté du carré, faire deux nœuds à chaque extrémité et faire trois marques, par trois pliages en deux : en son milieu, au milieu M de la deuxième moitié, et enfin au milieu N du deuxième quart, marque nommée nyancana.

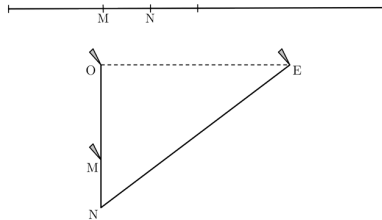


FIGURE 3 – Construction de l'angle droit avec une corde

## La quadrature du cercle

Plusieurs méthodes sont données. En voici une.

« Pour transformer un cercle en carré, diviser le diamètre en quinze parties et le réduire de deux d'entre elles ; cela donne le côté approché du carré. »

Pour diviser la corde en 15 parties égales, on peut la diviser en 5, puis diviser un cinquième de la corde en 3 parties égales. On aborde ainsi le problème du partage des longueurs et de sa réalisation pratique, qui dépend des instruments utilisés :

pour partager le diamètre en 15 parties égales sur la feuille de papier, on peut, dès le primaire, utiliser un guide à ne, outil simple et évident, mais justifier son usage relève de connaissances vues en cycle 4. Ensuite en ne tenant pas compte de 2 de ces parties, la longueur de la corde (ou le compas) permet de tracer le côté du carré, en utilisant la méthode de son choix.

On sait, depuis le XIX<sup>e</sup> siècle, que la construction d'un carré d'aire égale à celle d'un cercle donné est impossible à la règle et au compas, donc aussi à la corde. D'où le sens de l'expression : c'est la quadrature du cercle. Mais l'énoncé du sutra précise bien que la construction proposée ne donne qu'une valeur approchée du côté. On peut comparer, par diverses manipulations, l'aire de la partie de cercle qui dépasse du carré et celle du carré qui dépasse du cercle, et se rendre compte que l'aire du carré construit est un peu plus petite que celle du cercle donné. La formule usuelle qui donne l'aire du cercle permet d'évaluer la différence des aires des deux figures : elle est de moins de 5%. Se poser la question de la nécessité ou non de constructions exactes, de la précision de constructions approchées, voilà aussi des enjeux intéressants de l'étude de ce type de situations.

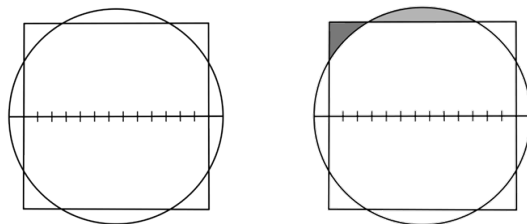


FIGURE 4 – Quadrature du cercle avec une corde

## Agrandir l'autel en forme de faucon

L'autel en forme de faucon est formé de sept carrés unités (carrés de 1 purusa de côté), et de trois rectangles dont la somme des aires est la moitié de celle du carré unité. Le sulbaka doit agrandir l'autel d'un carré unité à chaque étape, jusqu'à réaliser un autel en forme de faucon d'aire demandée : on trouve des exemples avec 21,5 unités, et même 101,5 unités. La première étape est de passer de 7,5 unités à 8,5 unités.

Voici la démarche.

1. Construire un carré de même aire que l'autel : pour cela il faut savoir construire un carré de même aire que celle d'un rectangle.
2. Construire un carré d'une unité.
3. Construire un carré d'aire la somme des aires des deux carrés.
4. On partage le carré en 15 parts rectangulaires égales.
5. On construit un carré de même aire que celle d'un rectangle formé de 2 de ces rectangles.
6. Le côté de ce carré sert de nouvelle unité pour construire le nouvel autel.

7. On recommence jusqu'à ajouter le nombre d'unités prescrites.

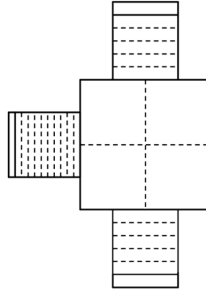


FIGURE 5 – L'autel en forme de faucon

Donc pour pouvoir agrandir l'autel d'une unité, il faut, pour la première étape, savoir faire la quadrature d'un rectangle (2 fois), et faire la quadrature d'une « somme » de deux carrés. Puis il suffit d'enchaîner la quadrature d'une « somme » de deux carrés, le partage du carré obtenu en 15 rectangles égaux, et la quadrature d'un rectangle formé de 2 rectangles.

Comment réaliser ces deux quadratures ?

### La quadrature d'une « somme » de carrés

Plusieurs cas sont traités dans les *Sulbasutras*. En effet on pouvait vouloir faire la quadrature de plusieurs carrés égaux, comme les carrés de un purusa dans l'autel en forme de faucon, puis de deux carrés d'aires différentes, et ainsi de proche en proche réaliser la quadrature d'un ensemble de carrés.

*Pour deux carrés égaux* : « La diagonale du carré produit le double de l'aire »

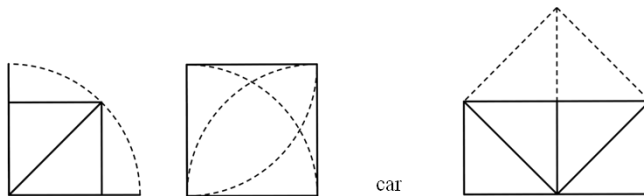


FIGURE 6 – Construction du carré d'aire double avec une corde

*Pour trois carrés égaux* : « La largeur d'un rectangle étant le côté d'un carré donné et la longueur le côté d'un carré double, la diagonale est le côté du carré triple »

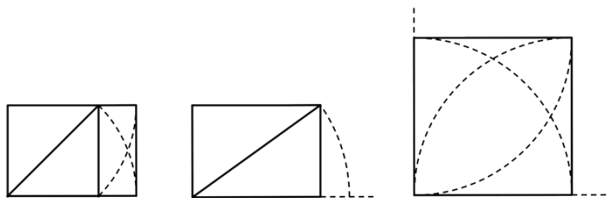


FIGURE 7 – Construction du carré d'aire triple avec une corde

Ces deux constructions sont faciles à réaliser avec une corde à partir d'un carré déjà construit, comme le suggèrent les représentations proposées.

**Pour  $n$  carrés égaux :** on pourrait poursuivre la voie précédente, mais on multiplie alors les manipulations. On trouve dans les *Sulbasutras* de Katyayana une construction bien plus facile.

« Le côté transversal [c'est-à-dire la base du triangle] doit mesurer un de moins que le nombre de carrés à combiner en un carré ; les deux [autres] côtés doivent mesurer un de plus que cela. On forme un triangle [isocèle] ; l'altitude le produit [le côté du carré] ».

En voici une illustration pour 7 carrés.

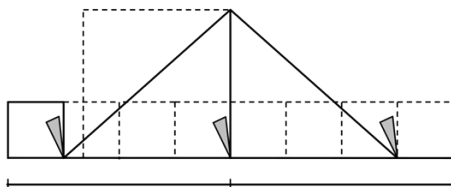


FIGURE 8 – Quadrature de 7 carrés égaux avec une corde

Théorème de Pythagore et calcul algébrique permettent de justifier cette construction : une bonne situation à proposer aux élèves pour faire utiliser les identités remarquables, mais aussi pour réaliser la construction ou une animation avec des outils informatiques.

**Pour deux carrés inégaux :** « Si l'on souhaite combiner deux carrés de mesures différentes : couper une partie du plus grand avec le côté du plus petit. La diagonale de la partie coupée est le côté du carré combiné ».

Ce sutra est souvent désigné comme le sutra de la diagonale. Il correspond à ce que nous appelons le théorème de Pythagore. Mais nous voyons bien ici que c'est un problème de quadrature d'aires et non de calcul de longueurs qui le motive. Voilà le sulbaka en possession d'une technique très simple à mettre en œuvre avec une corde pour réaliser la quadrature de la « somme » de deux carrés.

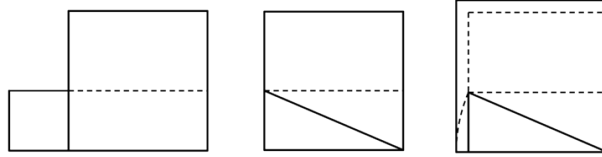


FIGURE 9 – « Théorème de Pythagore » avec une corde

## La quadrature du rectangle

« Si l'on souhaite transformer un rectangle en carré, prendre sa largeur comme côté d'un carré ; le reste est divisé en deux parties égales et placé sur deux côtés. La place vide est remplie avec un morceau ; l'enlèvement de ce morceau a déjà été établi. » La première étape consiste à transformer le rectangle en une figure

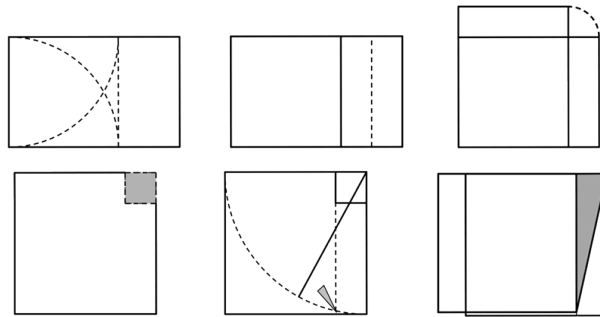


FIGURE 10 – Quadrature du rectangle avec une corde

d'aire égale ayant la forme d'une équerre, le gnomon des Grecs : un carré auquel il manque un carré. Il s'agit alors de construire un carré dont l'aire est la différence de celles de deux carrés. C'est le sutra de la diagonale qui fournit la solution, mais énoncé sous la forme suivante dans le sutra qui le suit : « Si l'on souhaite enlever un carré d'un autre : couper une partie du grand avec le côté du petit que l'on veut enlever. Le côté de la partie coupée est placé en travers de façon à toucher le côté opposé ; par ce contact, c'est coupé. Avec ce qui est coupé la différence est obtenue. »

On peut remarquer que toutes les constructions données sont exactes, mais ne sont pas justifiées. D'une part, la forme même des *Sulbasutras* y incite : c'est un recueil de prescriptions à suivre par le *sulbaka* qui doit connaître toutes les constructions, choisir celles dont il a besoin, voire en enchaîner plusieurs, avec une certaine marge de liberté au niveau des stratégies à mettre en œuvre. D'autre part, ces traités sont la mise par écrit tardive de traditions orales, sous une forme versifiée facilitant ainsi leur mémorisation. On trouve dans ces écrits des références aux anciens maîtres. Il est fort probable que les maîtres connaissaient et enseignaient

des preuves de la validité de toutes ces constructions qui ne sont certainement pas le fruit du hasard (Keller, 2006, p. 153-168). Nous retrouverons les preuves de ces constructions dans un tout autre contexte et dans une autre civilisation. Mais toutes ces constructions, parfois surprenantes, sont une incitation à la recherche de preuves par les élèves, et donc à un travail sur la démonstration dans un contexte qui la motive.

## La Chine ancienne (II<sup>e</sup> siècle av. J.-C.) : Les *Neuf Chapitres* de Liu Hui

Les *Neuf Chapitres sur l'art mathématique* est le plus vieux texte des mathématiques chinoises. Nous nous intéresserons au chapitre 1 qui traite du calcul des aires, et dont le titre, *Champs rectangulaires*, nous donne la clé du calcul des aires : transformer la figure dont on cherche à calculer l'aire en un rectangle de même aire. C'est ce que nous appelons la rectangulation des figures, par analogie avec la quadrature des figures dont nous venons de voir des exemples en Inde ancienne.

Le chapitre est constitué d'une suite de problèmes, accompagné chacun de la réponse à la question posée. Ce n'est qu'après quelques exemples du même type qu'est donnée la méthode conduisant à la solution sous forme d'une procédure. Cette présentation du calcul d'aire se prête bien à un travail sur l'algorithmique et la programmation, tant au collège qu'au lycée, avec les nouveaux programmes. Travailler sur la rectangulation des figures nous semble être une des premières compétences à acquérir au cycle 3 à propos des aires, et à pratiquer ensuite pour établir et donner sens aux formules de calcul sur les aires. On en trouvera une mise en œuvre en 6<sup>e</sup> dans la brochure *Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs en sixième : les Aires* (IREM Poitiers, 2009), et en CM dans la brochure *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : Matériaux pour expérimenter* (IREM Poitiers, 2019). Voici le plan du chapitre et quelques problèmes qui en sont extraits dans la traduction de Karine Chemla (Chemla, 2005).

### Chapitre 1 : Champs rectangulaires

- 1 à 24 : champ rectangulaire
- 25-26 : champ triangulaire
- 27-28 : champ oblique
- 29-30 : champ trapézoïdal
- 31-32 : champ circulaire

1. 25 « Supposons qu'on ait un champ triangulaire de 12 bu de largeur et de 21 bu de hauteur (longueur droite). On demande combien fait le champ.

*Réponse* : 126 bu. »

1. 26 « Supposons à nouveau qu'on ait un champ triangulaire de 5 bu  $1/2$  bu de largeur et de 8 bu  $2/3$  de bu de hauteur (longueur). On demande combien fait le champ.

*Réponse* : 23 bu  $5/6$  de bu.

*Procédure* : on prend la moitié de la largeur et on en multiplie la hauteur.

Si l'on prend la moitié de la largeur, c'est qu'avec ce qui est en excédent, on comble ce qui est vide, pour faire un champ rectangulaire. On peut aussi prendre la moitié de la hauteur et en multiplier la largeur.

*Commentaire* : si la moitié de la largeur multiplie la hauteur, c'est pour prendre la moyenne, et, par conséquent, la largeur et la hauteur étant multipliées l'une par l'autre, cela fait les bu du produit. Le diviseur des mu divise ceci, ce qui donne le résultat.

*Remarque* :  $1 \text{ mu} = 240 \text{ bu}$ , donc quand l'aire dépasse 240 bu, on divise le nombre de bu par 240. »

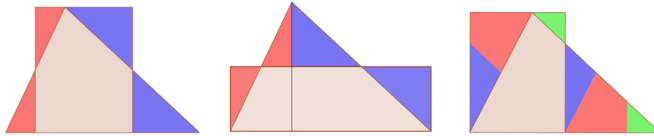


FIGURE 11 – Rectangulation du triangle par découpage

Les explications de la procédure suggèrent les découpages mis en illustration : les deux premiers sont classiques. Le troisième, comme le deuxième, utilisent directement le milieu de la base ou de la hauteur, et l'une des deux moitiés obtenues pour obtenir le rectangle de même aire que le triangle. Perpendiculaire, milieux et symétrie centrale en sont les outils clés, mais aussi droite des milieux, triangles superposables (égaux ou isométriques), translation, alignements pour élaborer des justifications (voir, en annexe, l'étude d'une situation en cycle 4, à paraître dans la brochure *Enseigner les mathématiques en cycle 4 à partir des grandeurs : les Aires*).

Dans le cas où la hauteur est extérieure au triangle, on peut être amené à adapter les découpages. Voici deux solutions. Construire ces découpages à la règle

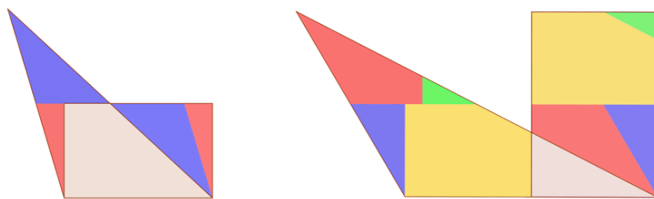


FIGURE 12 – Découpages pour d'autres configurations

et au compas ou avec un logiciel de géométrie, les justifier, vérifier leur domaine de validité, écrire des programmes de construction, autant de compétences que les programmes demandent de développer chez nos élèves du cycle 3 au lycée.

Les problèmes suivants concernent l'aire du trapèze. Les deux premiers portent sur un cas particulier : le champ oblique qui est un rectangle tronqué (un trapèze rectangle), facile à découper pour obtenir un rectangle en utilisant la technique

mise en œuvre pour le triangle. La procédure donnée dans le deuxième problème suggère deux découpages. Pour le trapèze, la procédure donne un découpage en deux trapèzes rectangles pour justifier l'identité des procédures dans les deux cas.

1. 27 « Supposons qu'on ait un champ oblique de 30 bu de largeur à une extrémité, de 42 bu de largeur à l'autre extrémité, et de 64 bu de hauteur (longueur droite). On demande combien fait le champ.

*Réponse* : 9 mu 144 bu. »

1. 28 « Supposons à nouveau qu'on ait un champ oblique de 65 bu de hauteur (largeur droite), de 100 bu de longueur d'un côté, et de 72 bu de longueur de l'autre côté. On demande combien fait le champ.

*Réponse* : 23 mu 70 bu.

*Procédure* : on somme les deux inégaux, on prend la moitié de ceci, et on en multiplie la longueur ou la largeur droite. Autrement, on peut prendre la moitié de la longueur ou de la largeur droite, et en multiplier la somme. On divise par le diviseur des mu. »

1. 29 « Supposons qu'on ait un champ trapézoïdal dont la langue vaut 20 bu de largeur, le talon 5 bu de largeur, et la hauteur (longueur droite) 30 bu. On demande combien fait le champ.

*Réponse* : 1 mu 135 bu. »

1. 30 « Supposons à nouveau qu'on ait un champ trapézoïdal dont la langue vaut 117 bu de largeur, le talon 50 bu de largeur, et la hauteur (longueur droite) 135 bu. On demande combien fait le champ.

*Réponse* : 46 mu 232 bu et demi.

*Procédure* : on somme talon et langue, on prend la moitié de ceci, et on en multiplie la longueur droite. On divise par le diviseur des mu. Si l'on coupe en son milieu le champ trapézoïdal, alors cela fait deux champs obliques, c'est pourquoi leurs procédures sont semblables l'une à l'autre. Autrement, on peut sommer talon et langue, prendre la moitié de la longueur droite et en multiplier ceci. »

On voit ainsi comment des problèmes de calcul d'aire peuvent mettre en interaction algorithmique, géométrie et calcul, et en suivant cette voie donner sens aux algorithmes de calcul d'aires trop souvent réduits à des formules à appliquer, fournies sans démonstration.

## Alexandrie (III<sup>e</sup> siècle av. J.-C.) : Les *Éléments* d'Euclide

Cette idée de trouver pour une figure donnée un rectangle de même aire, clé essentielle pour le calcul des aires, nous la retrouvons chez Euclide : dans un contexte plus théorique que pratique, et sous forme plus générale. C'est la proposition 45 du livre I des *Éléments* « Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée. » (Euclide, 1990, p. 277).

La figure de référence est le parallélogramme, et la « rectangulation » donnée



est valable pour toute figure polygonale. Voici les figures supports de la démonstration :

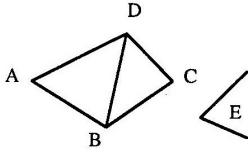


FIGURE 13 – Proposition I. 45

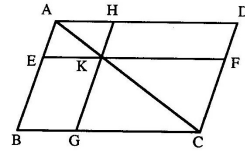
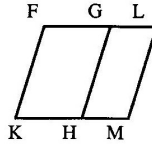


FIGURE 14 – Proposition I. 43

## La « rectangulation » d'un polygone

Euclide commence par trianguler le polygone. Puis pour le premier triangle, il construit un parallélogramme d'angle donné et de même aire, problème traité dans la proposition 42. Pour le triangle suivant, il fait de même, puis transforme le parallélogramme obtenu en un parallélogramme de même aire, de même angle et de côté égal à celui du premier parallélogramme, problème traité dans la proposition 44. Euclide obtient ainsi un seul parallélogramme, d'angle donné, et d'aire égale à celle de la figure formée par les deux premiers triangles, comme le montre la figure de la proposition 45. La construction de la proposition 44 repose sur la propriété établie dans la proposition 43 (aire de  $BGKE$  = aire de  $DFKH$ , voir figure 14), propriété que l'on retrouve souvent en exercice dans les manuels des classes de 4<sup>e</sup>, mais sans savoir à quoi peut bien servir cette propriété. On voit par là que l'étude du problème de la « rectangulation » donne du sens à des savoirs souvent rencontrés hors de tout contexte.

## La « rectangulation » d'un triangle

Examinons dans le détail la proposition 42 pour mesurer les analogies et les différences entre la méthode d'Euclide et celle des Chinois (Euclide, 1990, p. 270).

*« Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à un triangle donné.*

Soit, d'une part  $ABC$ , le triangle donné, d'autre part  $D$  l'angle rectiligne donné. Il faut alors construire un parallélogramme égal au triangle  $ABC$  dans l'angle rectiligne  $D$ .

Que  $BC$  soit coupée en deux parties égales au point  $E$  (Proposition 10), et que  $AE$  soit jointe (Demande 1); et que, sur la droite  $EC$  et au point  $E$  qui est sur elle, soit construit l'angle sous  $CEF$  égal à l'angle  $D$  (Proposition 23). Et que, par le point  $A$  d'une part  $AH$  soit menée parallèle à  $EC$ , par le point  $C$  d'autre part  $CH$  soit menée parallèle à  $EF$  (Proposition 31).  $FECH$  est donc un parallélogramme. Et puisque  $BE$  est égale à  $EC$ , le triangle  $ABE$  est aussi égal au triangle  $AEC$ , car ils sont sur des bases égales :  $BE$ ,  $EC$  et dans les mêmes parallèles :  $BC$ ,  $AH$  (Proposition 38).

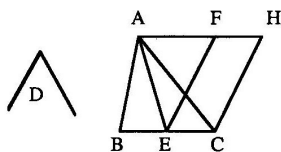


FIGURE 15 – Proposition I. 42

Donc le triangle  $ABC$  est double du triangle  $AEC$ . Et le parallélogramme  $FECH$  est aussi double du triangle  $AEC$  car il a la même base que lui et il est dans les mêmes parallèles (Proposition 41). Donc le parallélogramme  $FECH$  est égal au triangle  $ABC$  (Notion commune 1). Et il a l'angle sous  $CEF$  égal à l'angle donné  $D$ .

Donc le parallélogramme  $FECH$  a été construit égal au triangle donné  $ABC$  dans l'angle  $CEF$ , qui est égal à  $D$ . Ce qu'il fallait faire. »

L'étude de cette proposition montre l'essence de la démarche d'Euclide : toute construction est justifiée par référence aux axiomes de départ (demandes et notions communes) et aux autres propositions précédemment démontrées.

En prenant l'angle droit pour angle du parallélogramme, on peut alors facilement trouver les formules classiques donnant l'aire des figures usuelles : triangle, parallélogramme, trapèze. . . Pour le triangle on retrouve alors la première procédure chinoise.

## La quadrature d'un polygone

Si la « rectangulation » d'un polygone termine quasiment le livre I des *Éléments*, sa quadrature termine le livre II. Euclide reprend la proposition 45, suppose construit le rectangle de même aire que le polygone, et cherche à construire le carré de même aire. Le problème est donc ramené à la quadrature d'un rectangle, problème que nous avons vu résolu chez les Indiens. Voici comment Euclide le résout. C'est la proposition 14 du livre II (Euclide, 1990, p. 361).

« Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée.

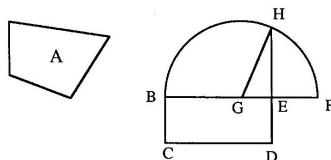


FIGURE 16 – Proposition II. 14

Soit  $A$  la figure rectiligne donnée. Il faut alors construire un carré égal à la figure rectiligne  $A$ .

En effet, que soit construit  $BD^1$  parallélogramme rectangle égal à la figure rectiligne  $A$  (Proposition I. 45).

Si effectivement  $BE$  est égale à  $ED$ , ce qui était prescrit aura été fait : car le carré  $BD$  a été construit égal à la figure rectiligne  $A$ .

Sinon, l'une des droites  $BE$ ,  $ED$  est plus grande. Que ce soit  $BE$  la plus grande et qu'elle soit prolongée vers  $F$ , et que soit placée  $EF$ , égale à  $ED$ .

Que  $BF$  soit coupée en deux parties égales en  $G$ , et que du centre  $G$  avec l'un des  $GB$ ,  $GF$  comme intervalle, soit décrit le demi-cercle  $BHF$  ; et que  $DE$  soit prolongée jusqu'en  $H$  ; et que  $GH$  soit jointe.

Or puisque la droite  $BF$  a été coupée d'une part en segments égaux en  $G$ , d'autre part en segments inégaux en  $E$ , le rectangle contenu par  $BE$ ,  $EF$ , pris avec le carré sur  $EG$ , est donc égal au carré sur  $GF$  (Proposition II. 5). Or  $GF$  est égale à  $GH$  (Définition I. 15). Donc le rectangle contenu par  $BE$ ,  $EF$ , pris avec le carré sur  $GE$ , est égal au carré sur  $GH$ . Or les carrés sur  $HE$ ,  $EG$  sont égaux à celui sur  $GH$  (Proposition I. 47). Donc le rectangle contenu par  $BE$ ,  $EF$  pris avec le carré sur  $GE$  est égal à ceux sur  $HE$ ,  $EG$  (Notion commune 1).

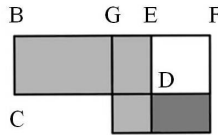


FIGURE 17 – Proposition II. 5

Que le carré sur  $GE$  soit retranché de part et d'autre : ce qui reste, le rectangle contenu par  $BE$ ,  $EF$  est donc égal au carré sur  $EH$  (Notion commune 3). Mais le rectangle contenu par  $BE$ ,  $EF$  est  $BD$ , car  $EF$  est égale à  $ED$ . Donc le parallélogramme  $BD$  est égal au carré sur  $HE$ . Or  $BD$  est égal à la figure rectiligne  $A$ . Et donc la figure rectiligne  $A$  est égale au carré qui sera décrit sur  $EH$ .

Donc un carré, égal à la figure rectiligne donnée  $A$ , a été construit : celui qui sera décrit sur  $EH$ . Ce qu'il fallait faire. »

Si la démonstration est loin d'être facile, la construction elle-même est très simple à exécuter et aura un grand avenir que ce soit pour réaliser la quadrature d'un rectangle comme nous le verrons avec Dürer, que pour construire géométriquement une racine carrée comme on le trouve dans la *Géométrie* de Descartes (1637).

1. Le parallélogramme est nommé par sa diagonale.

## La quadrature d'une « somme » de carrés

Si dans sa démonstration de la quadrature du rectangle, Euclide utilise notre fameux théorème de Pythagore, ce théorème n'intervient pas dans la construction du carré, contrairement à ce que nous avons vu pour la construction des Indiens. Mais il s'énonce, comme chez les Indiens, sous forme d'un problème d'aires. C'est la proposition 47 du livre I : « Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit. », et sa célèbre figure où on peut lire les grandes lignes de la démonstration d'Euclide. Démonstration qui utilise les égalités d'aires entre triangles et parallélogrammes établies dans le livre I, et les égalités de deux triangles. L'aire du rectangle de

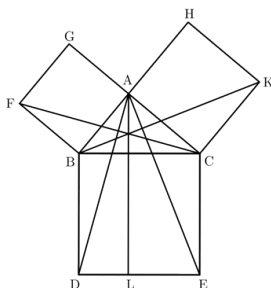


FIGURE 18 – Proposition I. 47

diagonale  $BL$  est égale au double de celle du triangle  $ABD$ , égal à  $BFC$ , qui a une aire moitié de celle du carré  $ABFG$ . De même pour le rectangle de diagonale  $CL$ , d'où l'égalité entre l'aire du carré  $BCED$  et la somme de celles des carrés  $ABFG$  et  $ACKH$ . Pour rendre cette construction effective, il faut être capable de construire un carré de côté donné. C'est l'objet de la proposition 46.

Donc Euclide attend le moment où il va avoir besoin de construire un carré, pour l'introduire. Il y aurait là aussi des leçons à tirer pour notre enseignement où bien des notions et constructions sont introduites sans motivation. On peut remarquer, que comme pour les Indiens, c'est le problème de la quadrature des figures qui amène à exposer une construction du carré.

Nous avons vu celles des Indiens, voyons maintenant celle que propose Euclide (Euclide, 1990, p. 279).

## La construction du carré

Proposition 46, livre I :

« Décrire un carré sur une droite donnée.

Soit  $AB$  la droite donnée il faut alors décrire un carré sur la droite  $AB$ .

Que soit menée  $AC$  à angles droits avec la droite  $AB$ , à partir du point  $A$  situé sur celle-ci (Proposition 11). Et que soit placée  $AD$  égale à  $AB$  (Proposition 2). Et, d'une part que par le point  $D$  soit menée

$DE$ , parallèle à  $AB$ , d'autre part que par le point  $B$ , soit menée  $BE$ , parallèle à  $AD$  (Proposition 31).

$ADEB$  est donc un parallélogramme. Donc, d'une part  $AB$  est égale à  $DE$ , d'autre part  $AD$  est égale à  $BE$  (Proposition 34). Mais  $AB$  est égale à  $AD$ . Donc les quatre  $BA$ ,  $AD$ ,  $DE$ ,  $EB$  sont égales entre elles (Notion commune 1) ;  $ADEB$  est donc un parallélogramme équilatéral. Je dis alors qu'il est aussi rectangle. En effet, puisque la droite  $AD$  tombe sur les parallèles  $AB$ ,  $DE$ , les angles sous  $BAD$ ,  $ADE$  sont donc égaux à deux droits (Proposition 29). Or celui sous  $BAD$  est droit, donc celui sous  $ADE$  est aussi droit (Notion commune 3). Or les côtés et les angles opposés des aires parallélogrammes sont égaux entre eux (Proposition 34). Donc chacun des angles opposés, ceux sous  $ABE$ ,  $BED$ , est aussi droit. Donc  $ADEB$  est rectangle. Et il a été aussi démontré équilatéral. Donc il est carré. Et il a été décrit sur la droite  $AB$ . Ce qu'il fallait faire. »

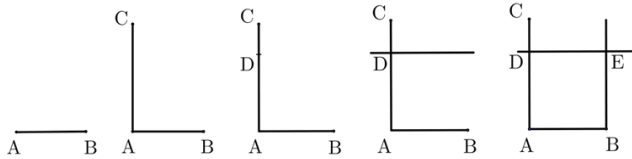


FIGURE 19 – Construction du carré dans la proposition I. 46

Les connaissances requises sont le tracé de perpendiculaires et de parallèles, et le report d'une longueur. Mais aucun instrument n'est mentionné, et l'on peut très bien faire cette construction à l'école primaire en utilisant une équerre pour tracer la perpendiculaire comme les parallèles. La formulation en terme de parallèles permet par contre à Euclide d'affirmer immédiatement que la figure tracée est un parallélogramme, et d'en déduire presque aussi vite qu'il est équilatéral (à côtés égaux). Par contre il démontre avec soin que ses quatre angles sont droits, alors que, pour la plupart d'entre nous, le fait qu'un angle droit soit donné suffit à prouver que la figure est un carré. L'étude des démonstrations anciennes est source d'enseignement, et peut éviter des conceptions trop rigides de la démonstration que nos élèves ont du mal à accepter.

## Bagdad (990) : *Constructions géométriques pour l'artisan*, Abul Wafa

Avec Abul Wafa, mathématicien persan arrivé à Bagdad à l'âge de 20 ans, nous quittons le domaine théorique pour nous retrouver dans un contexte pratique : celui des artisans. C'est pour eux qu'il va écrire son ouvrage : *Le livre des constructions géométriques nécessaires à l'artisan*. Voici ses motivations pour le chapitre où se trouve le problème que nous allons étudier :

« Dans le chapitre actuel, nous traiterons de la décomposition des figures, matière dont beaucoup de praticiens ont besoin, et qui est un objet particulier de leurs recherches. Il s'agit en cela de décomposer des carrés de telle sorte qu'il en résulte de petits carrés, et de réunir ensemble plusieurs carrés de telle sorte que de tous ces carrés il résulte un seul carré. En vue de ces opérations, nous allons poser des principes généraux qui se rapportent à ces problèmes ; car toutes les méthodes pratiquées par les ouvriers ne sont fondées sur aucun principe, ne méritent aucune confiance et sont très fautives, et c'est d'après ces procédés qu'ils font leurs divisions. » (Abul Wafa, 1855, p. 344).

Les praticiens auxquels il fait allusion sont essentiellement des décorateurs réalisant des mosaïques. Voici le problème et son contexte relaté par Abul Wafa lui-même, dans son livre : « Je fus présent à une réunion où se trouvèrent une quantité de praticiens et de géomètres, auxquels on demanda de quelle manière ils feraient un seul carré de trois carrés égaux. » (Abul Wafa, 1855, p. 349).

Puis il raconte qu'un géomètre proposa la construction d'un carré d'aire triple (la même que celle de Baudhayana : « La largeur d'un rectangle étant le côté d'un carré donné et la longueur le côté d'un carré double, la diagonale est le côté du carré triple »). Mais les praticiens refusèrent cette construction car il s'agissait pour eux, mosaïstes, de découper les trois carrés donnés d'une certaine manière, puis d'en recomposer les parties de telle façon que le tout forme un carré. On voit donc s'affronter deux types de constructions : celle à la règle et au compas ou à la corde, que nous avons vue chez les Indiens et Euclide, efficace pour la pratique des uns et la théorie de l'autre, et celle par découpage que nous avons vue à l'œuvre chez les Chinois et qu'utilisent les artisans mosaïstes arabes.

Abul Wafa relate alors la proposition faite par un praticien, puis il en fait la critique (Abul Wafa, 2010, p. 235-239). Nous avons là une excellente situation pour amener nos élèves du cycle 3 au lycée à voir la nécessité de justifier une construction, de rédiger une démonstration. Le domaine des découpages et des puzzles est un terrain propice pour faire de la géométrie et travailler sur la preuve (voir APMEP, 2016, et Moyon, 2013).

## La construction fautive de l'artisan

« L'un des artisans place un carré au milieu, divise le deuxième [carré] par une diagonale et place les deux parties sur les côtés du carré. Il réunit le milieu du troisième [carré] par deux lignes avec les deux sommets non situés sur une diagonale pour former un triangle [rectangle]. Ensuite par une ligne, l'artisan réunit le milieu du carré avec le milieu du côté opposé au triangle formé par deux lignes et par un côté du carré. Ce carré est partagé en deux trapèzes et un triangle. Il place ce triangle sur le côté inférieur du premier carré, et les deux trapèzes sur le côté supérieur de sorte que leurs côtés se trouvent au milieu. On obtient un carré, comme il est montré sur cette figure :

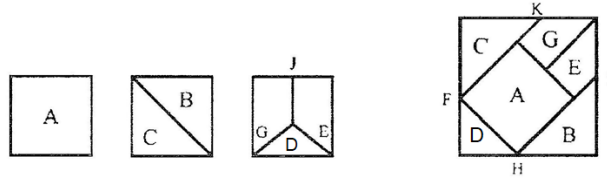


FIGURE 20 – Construction fautive de l'artisan

Cette construction dans l'imagination de celui qui n'est pas habile dans la pratique et ne connaît pas la géométrie semble juste. Et, lorsqu'on l'examine plus en détail, et l'on dit en quoi elle est fautive, il s'aperçoit que le procédé n'est pas juste. Et la raison pour laquelle cette construction semble juste est que les angles du carré sont effectivement droits et ses côtés sont égaux, et c'est pourquoi on a l'impression que ce procédé est juste. En effet, chacun des angles des triangles  $C$ ,  $B$ ,  $D$  qui sont les angles du carré, est droit, et le quatrième angle est composé de deux angles, dont chacun est la moitié d'un angle droit, c'est-à-dire des angles  $E$  et  $G$  des deux trapèzes. En ce qui concerne les côtés, chacun d'eux est composé d'un côté du carré donné et de la moitié de la diagonale de ce carré, ils sont donc égaux. Enfin la composition est correcte du fait que la somme de tous les angles au point de jonction des droites est égale à deux angles droits. Car la somme des trois angles qui sont réunis au point  $H$  est égale à deux angles droits, ces angles sont l'angle du carré qui est égal à un angle droit et les deux angles de deux triangles rectangles chacun d'eux étant la moitié d'un angle droit. Il en est de même pour les trois angles au point  $F$ . Pour ce qui est de l'angle  $I$ , il [est fait] de deux angles, dont l'un est l'angle d'un triangle, c'est-à-dire la moitié d'un angle droit, et l'autre angle est l'angle du trapèze, c'est-à-dire un angle droit et demi. Il en est de même pour les angles au point  $K$ . C'est pourquoi, si les angles sont droits, et si les côtés sont des lignes droites [égales entre elles], alors il est évident pour quiconque qu'on obtiendra un carré constitué de trois carrés, et on ne trouve pas d'endroit où il a commis une erreur.

Cependant remarquons que, comme on le sait, chaque côté de ce carré est égal au côté d'un des carrés et à la moitié de sa diagonale. Mais le côté du carré constitué de trois carrés ne peut pas être égal à cette grandeur, car il doit être supérieur à cette grandeur. Posons que chaque côté du carré est long de dix coudées ; [alors] il est clair que le côté du carré construit avec trois carrés est la racine de trois cent coudées qui est approximativement égale à dix-sept coudées plus un tiers, alors que le côté de ce carré est long de dix-sept coudées plus la moitié d'un septième. Entre ces valeurs il y a une grande différence.

[Par ailleurs] quand nous avons partagé le carré  $BC$  en deux et que nous avons placé chacune de ses moitiés aux côtés de l'autre carré, donné,

on voit que la diagonale du carré  $BC$  est ajustée avec les lignes  $HI$  et  $FK$ , alors que c'est impossible pour deux raisons : premièrement, la diagonale du carré  $BC$  est un nombre irrationnel, alors que  $HI$  ou  $FK$  est égal au côté du carré  $BC$  et à la moitié de celui-ci qui est un nombre rationnel, or un nombre rationnel ne peut pas être égal à un nombre irrationnel.

Deuxièmement la diagonale du carré  $BC$  est approximativement égale à quatorze et un septième, et la ligne  $HI$  à quinze. Par là, l'impropriété de cette division et de cette construction est démontrée. »

Il est intéressant de noter qu'Abul Wafa donne trois preuves de l'inexactitude de la construction de l'artisan, dont une porte sur la nature des nombres qui mesurent deux longueurs : un nombre rationnel ne peut pas être égal à un nombre irrationnel. Une argumentation en phase avec les nouveaux programmes de seconde du lycée. Intéressants aussi les arguments que donne Abul Wafa pour prouver que la figure est bien un carré : 4 angles droits, 4 côtés égaux, pas de problème d'alignement des morceaux de côtés (comme dans le puzzle de Lewis Carroll  $64 = 65$ ). Nous avons donc affaire à une situation riche au point de vue de l'argumentation et des mathématiques qui y sont présentes, et simple au niveau de sa compréhension et de sa matérialisation. Et elle débouche sur la recherche d'une solution exacte qui est un vrai problème. Voici celle que propose Abul Wafa.

## La construction d'Abul Wafa

« Mais la division du carré par un procédé juste, établi grâce aux démonstrations, est ainsi ; divisons deux carrés suivant leur diagonale [nous obtiendrons quatre triangles rectangles], plaçons un côté de chacun d'eux sur les côtés du troisième carré ; de plus, plaçons un angle du triangle égal à la moitié d'un angle droit sur un des angles du carré et plaçons l'hypoténuse du triangle sur un côté du carré ; alors une partie du triangle du côté de l'autre angle sera saillante. Réunissons [les sommets] des angles droits des triangles par des lignes droites, alors nous obtiendrons le côté du carré cherché. Ainsi de chaque grand triangle un petit triangle se détache, mettons-le à la place du triangle manquant de l'autre côté du carré.

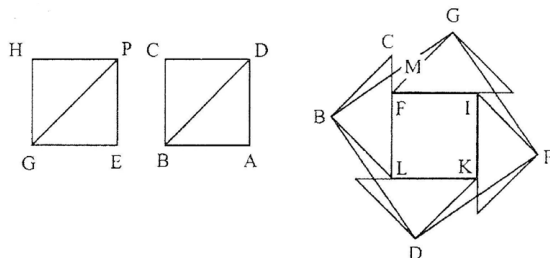


FIGURE 21 – Construction d'Abul Wafa



Exemple : pour construire cela avec trois carrés égaux  $ABCD$ ,  $EPGH$  et  $FIKL$  divisons deux de ces carrés par leurs diagonales en deux parties, en menant  $PG$  et  $DB$  et plaçons-les sur les côtés du troisième carré. Ensuite, réunissons les sommets des angles droits des triangles par les lignes  $BG$ ,  $GP$ ,  $PD$ , et  $DB$ . Avec ces lignes de l'autre côté de chaque triangle, apparaîtra un petit triangle égal à chaque triangle retranché du grand triangle. C'est pourquoi le triangle  $BCM$  est égal au triangle  $MFG$  puisque l'angle  $C$  est la moitié d'un angle droit et que l'angle  $MFG$  est la moitié d'un angle droit, les deux angles opposés par le sommet  $M$  sont égaux, le côté  $BC$  est égal au côté  $FG$ , c'est donc que le triangle  $BCM$  est égal au triangle  $MFG$ . C'est pourquoi les autres côtés d'un triangle sont égaux aux autres côtés d'un autre triangle, et un triangle est égal à un autre triangle. Donc si nous plaçons le triangle  $BCM$  à la place du triangle  $MFG$  alors la ligne  $BG$  sera le côté d'un carré constitué de trois carrés, ce procédé est juste et il est le plus proche de la vérité, [puisqu'il est établi au moyen d'une démonstration]. »

L'artisan avait trouvé un découpage en 6 pièces, mais inexact. Abul Wafa en donne un exact, mais en 9 pièces, et avec plus de coupes à faire. Il faudra attendre 2010 pour que Blanvillain trouve une solution exacte avec le même nombre de pièces que celle de l'artisan, mais avec des pièces concaves. La quadrature de la somme de trois carrés peut-elle être réalisée avec moins de pièces ? Le problème est ouvert. Trouver de tels découpages pour transformer une ou plusieurs figures en une figure de même aire et de forme donnée, est un problème fondamental de la théorie des aires et un sujet vivant de la recherche contemporaine. Euclide a montré qu'on pouvait toujours construire (à la règle et au compas) un carré d'aire égale à celle d'un polygone quelconque. Mais ce n'est qu'au XIX<sup>e</sup> siècle que l'on a montré que c'était vrai aussi par découpage. Et que dire de la quadrature du cercle par découpages ? (Voir APMEP, 2016)

## Nuremberg (1525) : La *Géométrie* de Dürer

De Bagdad où nous étions, à Nuremberg, où nous arrivons, cinq siècles ont passé. Au cœur de l'Allemagne, dans l'effervescence de la Renaissance, beaucoup de métiers d'art, tailleurs de pierre, sculpteurs, charpentiers, orfèvres, graveurs, peintres, ont besoin de constructions géométriques dans la pratique de leur métier. Et c'est l'un d'eux, le célèbre peintre et graveur Albert Dürer, qui va écrire un livre de géométrie à leur intention : *Instructions pour la mesure à la règle et au compas des lignes, plans et corps solides, réunies par Albrecht Dürer, et imprimées avec les figures correspondantes, à l'usage de tous les amateurs d'art, en l'an M.D.XXV* (Dürer, 1995). Comme Abul Wafa, il s'adresse à des praticiens, avec des intentions didactiques claires : « Le très perspicace Euclide a rassemblé les fondements de la géométrie. Celui qui les entend bien n'a guère besoin de ce qui suit, car ces choses s'adressent uniquement aux jeunes et à ceux qui n'ont personne pour fidèlement les instruire » (p. 139). Mais, contrairement aux décou-

peurs de mosaïques de Bagdad, les artisans auxquels Dürer s'adresse usent dans leurs métiers de la règle et du compas. Et pour eux, « il est nécessaire d'avoir une petite idée sur la manière d'obtenir des figures ayant des aires égales » (p. 222). Nous allons donc retrouver dans l'ouvrage de Dürer des quadratures et rectangulations obtenues par des constructions à la règle et au compas. Pour Dürer l'objectif n'est pas, contrairement à Euclide, de fournir des démonstrations de la validité des constructions, mais de décrire les gestes et manipulations à accomplir pour les artisans. Qui veut les démonstrations, n'a qu'à aller lire Euclide, que Dürer a étudié avec l'aide d'un ami. Le style de Dürer peut nous surprendre, mais devrait nous interroger sur cette étape clé de la construction des figures, avec les mains et les instruments, dont notre enseignement a tendance à s'affranchir le plus rapidement possible, et qui a rarement droit à une trace écrite. Lisons, dans le texte, la quadrature de trois figures.

### La quadrature du triangle équilatéral (p. 222)

« Qu'on construise donc un triangle et qu'on en déduise un carré de même aire. De même pour d'autres corps réguliers.

Procède comme suit. Soit un triangle  $abc$ , dont le côté  $ac$  est divisé en son milieu par un point  $d$ . Élève une ligne  $bd$  et le triangle sera coupé en deux. Tourne la moitié  $abd$  tête-bêche et applique-la à l'autre moitié  $bc$ . Tu obtiendras un quadrilatère oblong [un rectangle] ayant ses angles  $a, b, c, d$  égaux et ayant même aire que le triangle  $abc$ . Transforme ensuite le quadrilatère oblong en un quadrilatère droit [le rectangle en carré] ayant même aire que le triangle. Pour procéder correctement, note ce qui suit. Prends deux côtés du rectangle  $acd$ , un long et un court, et juxtapose-les sur une horizontale. Désigne ces trois points par  $e, f, g$ . Marque un point  $h$  au milieu de la ligne  $e, f, g$ , prends un compas, pose une de ses pointes sur le point  $h$  et décris de l'autre un arc issu de  $e$  et rejoignant  $g$ . Élève en  $f$  une ligne droite verticale allant jusqu'à l'arc de cercle. Marque  $i$  le point où elle le coupe. En assemblant à angles égaux quatre lignes de longueur  $if$ , tu obtiendras un carré ayant même aire que le rectangle  $abcd$  et donc aussi le triangle  $abc$ . On peut aussi comparer par une méthode rapide un triangle à un carré, comme suit. Construis un carré, divise un de ses côtés en deux parties et fais en sorte que le côté du triangle dépasse d'un tiers celui du carré. Forme un triangle, comme je l'ai représenté ci-dessous. »

Dürer suit donc la méthode que nous avons vue chez Euclide, en l'appliquant au triangle équilatéral (triangle régulier) : il commence par rectangler le triangle, puis transforme le rectangle en un carré de même aire en utilisant la construction de la proposition 14 du livre II des *Éléments*. Si la rectangulation peut-être considérée comme ne nécessitant guère de preuve, par contre le fait que le carré soit de même aire que le rectangle ne tombe pas sous le sens. Encore une bonne situation pour travailler des constructions utiles aux artisans et dans laquelle on sent la nécessité de démontrer.

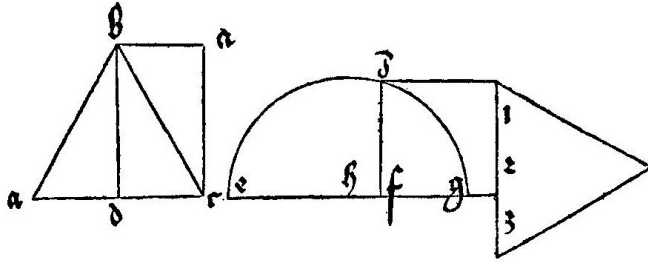


FIGURE 22 – Quadrature du triangle équilatéral

### La quadrature de 7 carrés égaux (p. 225)

« Et afin que l'on retienne bien les choses très utiles que je viens d'expliquer, je vais encore construire par la méthode précédente un carré dont l'aire vaut sept fois celle d'un carré donné.

Je procède comme suit. Je me donne un quadrilatère rectangle  $abcd$  ayant ses côtés et ses angles égaux. Puis je juxtapose huit fois son côté sur une horizontale dont  $d$  est l'origine et  $e$  l'autre extrémité. Je divise  $de$  par un point  $f$  en son milieu, je prends mon compas, je le pose avec une de ses pointes sur le point  $f$  et je décris de l'autre un arc de cercle joignant par le haut  $d$  à  $e$ . Puis je construis sur le premier côté le petit quadrilatère  $abcd$ , je prolonge la verticale  $bc$  jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en  $g$ . Si je forme un carré avec cette longueur et trois autres identiques, il contiendra sept fois plus que le premier  $abcd$ , comme je l'ai représenté ci-dessous. »

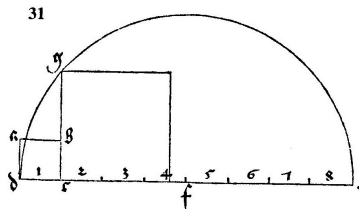


FIGURE 23 – Quadrature de 7 carrés égaux

Nous retrouvons la quadrature de la somme de plusieurs carrés égaux que nous avons vue traitée, en Inde, par Katyayana. Mais avec une construction différente, qui est exactement la même que la précédente. Ce qui montre la puissance et la simplicité de la construction euclidienne. Nous pouvons remarquer que dans le cas traité par Dürer, si  $dc = 1$ , alors  $cg = \sqrt{7}$ . On retrouve donc cette construction dans presque tous les traités et manuels de géométrie jusqu'au milieu du XX<sup>e</sup> siècle pour construire géométriquement une racine carrée. Elle peut se justifier facilement en utilisant la similitude des triangles  $cgd$  et  $ceg$  qui forment le triangle

rectangle  $dge$  inscrit dans le demi-cercle. Si  $\sqrt{7}$  ne peut s'exprimer ni sous forme d'un rapport de deux entiers, ni sous forme décimale finie, elle peut se construire exactement à la règle et au compas.

## La quadrature du cercle (p. 227)

« Il est nécessaire de connaître la quadratura circuli, c'est-à-dire la comparaison d'un cercle à un carré, l'un et l'autre devant avoir même contenu. Mais une telle chose n'a pas encore été démontrée par les érudits. La résolution en peut être expédiée, sans cependant que cela se voie trop dans les ouvrages, si on procède de façon approchée, comme suit. Dessine un quadrilatère [un carré] et divise sa diagonale en dix parties. Trace ensuite un cercle dont le diamètre comporte huit de ces parties, dont la quadrature en compte dix ainsi que je l'ai représenté ci-contre. »

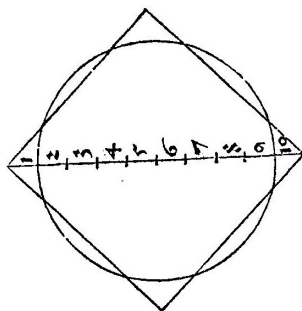


FIGURE 24 – Quadrature du cercle

Culturellement, ce texte est intéressant car il montre que la quadrature du cercle est, à l'époque de Dürer, un problème ouvert. Et les élèves peuvent se demander s'il a été résolu. Apprendre qu'il l'a été il y a un peu plus d'un siècle montre que les mathématiques se construisent dans la longue durée. Mais aussi que les mathématiques s'intéressent à des constructions approchées pour les besoins des hommes. Et on peut essayer d'estimer l'approximation faite, liant ainsi calcul et géométrie.

## Sussex (1902) : *Les puzzles de Canterbury* de Dudeney

Nous terminerons notre voyage à l'orée du XX<sup>e</sup> siècle, avec le premier problème de quadrature que nous venons d'étudier chez Dürer, mais traité à la façon d'Abul Wafa. En effet, il s'agit dans ce problème extrait des *Canterbury puzzles and other*

*curious problems* (Dudeney, 1908), de découper un triangle équilatéral en 4 morceaux pour en réaliser la quadrature. Lisons le texte.

*La quadrature articulée du triangle équilatéral ou le puzzle du tailleur (problème n° 26).*



FIGURE 25 – Puzzle du tailleur

### Le problème (p. 24-25)

« Il montra un morceau de tissu ayant la forme d'un triangle équilatéral parfait, comme le montre l'illustration, et dit : "Y a-t-il, parmi vous tous, un sage pour découper comme il faut ce tissu ? Je ne pense pas. Tout homme pour son travail, ainsi que le savant, peut apprendre du valet, et le sage du fou. Maintenant, si vous le pouvez, montrez-moi de quelle façon ce morceau de tissu peut être coupé en quatre morceaux qui assemblés pourront faire un carré parfait". Certains des plus savants de la compagnie ont déjà trouvé un moyen de le faire en cinq morceaux, mais pas en quatre. »

### La solution (p. 142-143)

« L'illustration montrera comment la pièce triangulaire de tissu pourra être coupée en quatre morceaux différents qui pourront être ajustés ensemble et former un carré parfait.

Divisez  $AB$  en deux en  $D$  et  $BC$  en  $E$  ; tracez la ligne  $AE$  jusqu'à  $F$  en faisant  $EF$  égal à  $EB$  ; divisez  $AF$  en deux en  $G$  et décrivez l'arc  $AHF$  ; tracez  $EB$  jusqu'à  $H$ , et  $EH$  est la longueur du côté du carré cherché ; de  $E$  avec la distance  $EH$ , tracez l'arc  $HJ$ , et faites  $JK$  égal à  $BE$  ; maintenant, des points  $D$  et  $K$  abaissez des perpendiculaires sur  $EJ$  en  $L$  et  $M$ . Si vous avez fait cela avec soin vous avez maintenant les directions cherchées pour les coupes. »

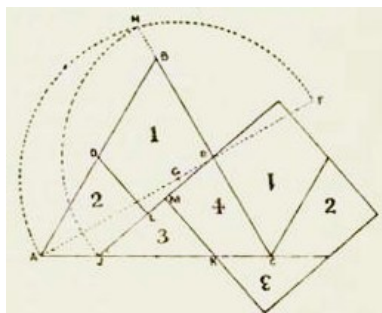


FIGURE 26 – Découpage de Dudeney

Dudeney, comme Abul Wafa, réclame une construction exacte, mais, comme Dürer, il ne justifie pas l'exactitude de sa construction. Il la laisse au lecteur, comme nous pourrions la laisser à nos élèves. On y retrouve la construction d'Euclide! Mais son découpage du triangle équilatéral a une propriété extraordinaire : mettez trois articulations en  $E$ ,  $D$  et  $J$  (ou  $K$ ), et vous obtenez un triangle articulé qui se transforme automatiquement en un carré. Dudeney, conscient de l'innovation qu'apportait son découpage, a fait construire son puzzle en acajou, avec des articulations en cuivre, et l'a présenté à la Royal Society en 1905! On trouve actuellement des tables transformables réalisant le puzzle articulé de Dudeney fabriquées par des designers. Et les puzzles articulés, qui sont la transformation d'une figure en une figure d'aire égale, ont, depuis Dudeney, fait l'objet de recherches mathématiques. Il a été démontré en 2008 que deux polygones de même aire peuvent être transformés, par découpage, en un puzzle articulé (voir APMEP, 2016). Nous avons à faire avec des mathématiques vivantes, problématisées, et en lien avec des réalisations matérielles.

## Conclusion

Que retenir de notre exploration du domaine des rectangulations et quadratures ?

Tout d'abord que c'est un champ de problèmes qui articule géométrie et calcul, construction et partage, règle-compass et découpage, utilisation d'instruments et raisonnement. Pour un même type de problème, construire une figure d'aire égale à celle d'une (ou plusieurs) figure d'aire donnée, nous avons vu que la solution est dépendante du but poursuivi. S'agit-il de construire un autel avec une corde comme pour les Indiens, une géométrie du cercle et de la droite comme pour Euclide, d'exécuter des tracés à la règle et au compas comme pour les artisans et artistes auxquels s'adresse Dürer? Même dans ces trois cas qui relèvent d'une géométrie de la règle et du compas, nous avons vu trois constructions différentes du carré, chacune étant la mieux adaptée au contexte dans lequel elle était utilisée. Ou bien s'agit-il de partager des figures, de les découper, pour calculer des aires

comme chez les Chinois, pour réaliser des mosaïques comme chez les artisans de Bagdad que côtoie le mathématicien Abul Wafa, pour proposer un défi comme le fait Dudeney ? La possibilité de découper et de manipuler les pièces pour réaliser la construction permet de proposer cette géométrie du découpage dès l'école primaire (voir Moyon, 2013). S'interroger sur l'exactitude de la figure construite amène, à tous les niveaux, à sentir la nécessité de preuves et de démonstrations, et à les travailler dans un contexte qui fait sens.

Les conditions imposées à la construction influent sur la solution donnée au problème et même sur son existence. La trisection de l'angle impossible à la règle et au compas, est possible en origami ! Cela montre que nous aurions intérêt à ne pas trop décontextualiser les situations et problèmes que nous proposons à nos élèves. Leur faire étudier des textes et problèmes historiques concourt à ce but, et permet de leur montrer en plus la dimension culturelle et humaine des mathématiques.

Pour l'enseignement, nous voyons plusieurs grands axes d'intérêt à l'étude du type de problèmes que nous avons présentés :

- Redonner du sens et des techniques pour calculer des aires et élaborer des formules, tout en travaillant la géométrie des figures (voir IREM de Poitiers, 2010).
- Remettre en perspective le théorème de Pythagore qui est un problème de quadrature avant d'être un problème de calcul de longueurs.
- Travailler les constructions géométriques et leur description, leur justification, et par là le raisonnement sur de vrais problèmes ancrés historiquement à la fois sur des pratiques et des questions théoriques, de la maternelle à l'université. Les modalités peuvent être variées. Par exemple, suivre les instructions d'un sutra védique pour réaliser une construction du carré vieille de plus de 3000 ans, en extérieur avec corde et piquets, ou sur une feuille en l'adaptant pour la règle et le compas, ou sur écran avec un logiciel de géométrie, et constater qu'elle donne bien un carré.
- Déboucher sur une autre pratique des mathématiques : utiliser la géométrie pour comprendre et résoudre des problèmes de calcul et d'algèbre (voir APMEP, 2016).

## Références bibliographiques

### Les textes

- KELLER Olivier, 2000, « La géométrie des Sulbasutras, exemple de géométrie rituelle de l'Inde védique : l'agrandissement de l'autel en forme de faucon », *Repères-IREM*, n°40, Topiques éditions, p. 115-124, (disponible en ligne).
- CHEMLA Karine et SHUCHUN Guo, 2005, *Les neuf chapitres : Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris, Dunod.
- EUCLIDE, 1990, *Les Éléments*, Vol. 1, Introduction générale, Livres I à IV, traduction et commentaires Vitrac, B., introduction Caveing, M., Paris, PUF.

- ABUL WAFI, 1855, *Livre des constructions géométriques nécessaires à l'artisan* (Kitāb fi mā yaḥtaj ilayh al-ṣāni' min al-a'māl al-handasiyya), *Chapitre XI*, trad. Woepcke, M. F., *Mathématiques chez les orientaux*, *Journal asiatique*, avril 1855, p. 344-352.
- ABUL WAFI, 2010, *Sur ce qui est indispensable aux artisans dans les constructions géométriques* (Kitāb fi mā yaḥtaj ilayh al-ṣāni' min al-a'māl al-handasiyya), édition bilingue, Jafar Aghayani-Chavoshi, co-édition Miras-e Maktoob, Téhéran, IFRI.
- DÜRER Albrecht, 1995, *Géométrie*, présentation et traduction Peiffer, J., Paris, Seuil.
- DUDENEY Henry Ernest, 1908, *The Canterbury puzzles and other curious problems*, illustrated by Paul Hardy, the author and others, New York, E. P. Dutton and co., (disponible en ligne).

## Autour des textes

- APMEP, 2016, *Maths & Puzzles*.
- BARBIN Évelyne & alii, 2014, *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses.
- IREM DE POITIERS, 2010, *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les AIRES*.
- IREM DE POITIERS, 2019, *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : Matériaux pour expérimenter*.
- IREM DE POITIERS, à paraître, *Enseigner les mathématiques au cycle 4 à partir des grandeurs : les AIRES*.
- KELLER Olivier, 2006, *La figure et le monde : une archéologie de la géométrie*, chapitre 6, *La géométrie du sacrifice dans les Sulbasutras de l'Inde védique*, Paris, Vuibert.
- MOYON Marc, 2013, *Diviser en multipliant les approches*, Repères-IREM, n°93, Topiques éditions, p. 47-77, (disponible en ligne, travaux d'élèves).
- MOYON Marc, TOURNÈS Dominique et alii, 2018, *Passerelles, Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*, Arpeme. (Documents pédagogiques disponibles sur le Portail des IREM, CII Epistémologie et Histoire des mathématiques, Ressources).

## Liens vers les grands textes (Portail des IREM, CII Épistémologie et Histoire des Mathématiques, Ressources)

*Les Neuf Chapitres* : <http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1289>

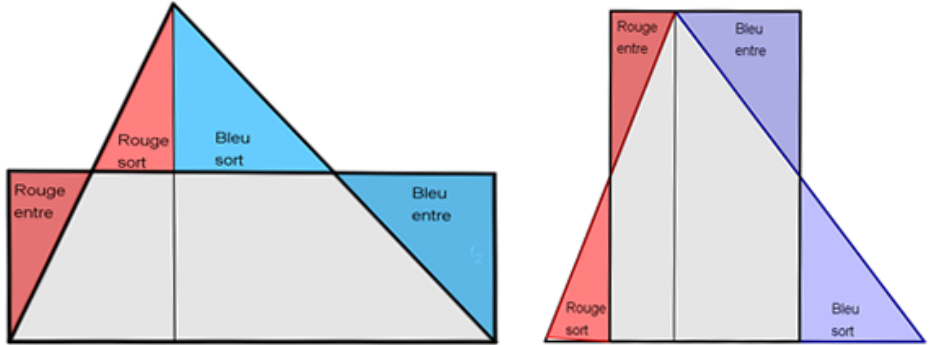
*Les Éléments d'Euclide* : <http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1263>



## Annexe

## L'aire du triangle dans la Chine ancienne

Les deux figures montrent comment les Chinois, il y a plus de 2000 ans, construisaient un rectangle de même aire que celle d'un triangle quelconque donné.



1. Tracer un triangle quelconque. Puis construire, à la manière chinoise, un rectangle de même aire que ce triangle.
2. Écrire votre programme de construction, et justifier que la figure que vous avez construite est bien un rectangle, et qu'il a la même aire que le triangle.
3. À partir des 2 figures, trouver 2 formules qui permettent de calculer l'aire d'un triangle.

**Indications**

Même si l'aire du triangle a été vue en fin de cycle 3, ces constructions permettent de retrouver une méthode fondamentale pour le calcul de l'aire d'une figure : construire un rectangle d'aire égale. Elles sont aussi l'occasion de prendre conscience du fait que l'on doit s'assurer que la figure construite répond bien au cahier des charges, et de travailler les caractérisations du rectangle.

Elles permettent de trouver des formules non usuelles pour l'aire du triangle. La comparaison des 3 formules qui donnent la même aire permet de se familiariser avec le calcul littéral, et lui donne du sens.

L'étude du cas où la hauteur considérée est à l'extérieur du triangle, amène à chercher d'autres découpages, et à utiliser un logiciel de géométrie pour tester le domaine de validité du découpage.

**Source :** *Maths & Puzzles* (APMEP, 2016)



## Décomposer un solide : de la Chine des Han à une exploration en classe avec les outils d'aujourd'hui

Philippe MARTINET

### Introduction

Aussi loin que je me souviens, j'ai toujours pris beaucoup de plaisir aux jeux de constructions. Aussi, lorsqu'en 2017 la Principale du collège me demande de créer un Enseignement Pratique Interdisciplinaire (EPI)<sup>1</sup> en classe de 3<sup>e</sup>, j'imagine faire concevoir par mes élèves des puzzles en 3D. La discipline avec laquelle s'associer est évidente : ce sera la technologie car j'ai été initié lors d'un stage à un logiciel de modélisation 3D (*Google SketchUp*) qui permet de décomposer assez facilement un solide et de le reconstituer. Je sais que mon collègue de technologie le connaît bien et l'initiation à un « modeleur 3D » – c'est le terme employé par mon collègue – est au programme de technologie en Collège. Par ailleurs, quelques années auparavant, j'ai été marqué par un article de Michèle Grégoire retraçant quelques moments clés de l'histoire du volume de la pyramide, en particulier par la partie évoquant la période chinoise (Grégoire, 1993). J'en ai alors tiré des énoncés de devoirs à la maison pour le niveau 4<sup>e</sup>. Est alors née en moi l'envie de reprendre, en les étoffant, certains de ces éléments afin de fournir en quelque sorte un supplément d'âme à l'EPI. Un ouvrage de référence sur cette période et cette civilisation est paru quelques années plus tôt : *Les neuf chapitres* (Chemla, Shuchun, 2005). J'ai déjà été amené à le consulter et je sais que je trouverai là le matériau qui permettra d'enrichir à coup sûr et de façon précise mon projet d'EPI. Je sais aussi que sa lecture n'est pas aisée. Qu'à cela ne tienne, je ne suis pas seul, mes camarades du groupe IREM de Dijon m'aideront si besoin est. Je me lance donc.

---

1. Les EPI ont été introduits lors de la réforme du Collège en 2016, avec pour objectif de développer la démarche de projet et l'interdisciplinarité.

Le but de cet article est de présenter cet ouvrage, les éléments d'histoire des mathématiques que j'en ai extraits pour notre projet, et la façon dont ces éléments ont été insérés et exploités en classe. Enfin, je terminerai en dégageant quelques aspects de l'intérêt d'une telle démarche pour les élèves.

## L'ouvrage que nous avons utilisé

L'ouvrage en question est la traduction commentée et annotée par Karine Chemla et Guo Shuchun d'une œuvre majeure de la Chine ancienne, *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques*. Par souci de clarté, convenons de nommer dans la suite par le *Classique* l'ouvrage originel sans les commentaires ni les compléments établis par Karine Chemla et Guo Shuchun et par *l'ouvrage* l'œuvre originelle traduite et augmentée des commentaires et annotations de nos deux auteurs.

### Le contenu et quelques caractéristiques du *Classique*

Cet ouvrage se présente comme un recueil de 246 problèmes qui, comme son titre l'indique, comporte neuf parties dont les titres soulignent le caractère résolument pratique de leurs contenus. Citons en guise d'illustration les trois premiers : *Champs rectangulaires*, *Petit mil et grains décortiqués* et *Parts pondérées en fonction des degrés*. Le premier a pour objet le calcul d'aires de diverses formes, et contrairement à ce que laisse penser le titre, il ne se limite pas aux rectangles puisqu'il va jusqu'à considérer des sections circulaires. Le deuxième traite des échanges, de tarifs, tandis que le troisième évoque la répartition de biens ou d'argent en utilisant la proportionnalité. Mais on trouve aussi des énoncés qui échappent à ce caractère pratique. Donnons-en deux exemples :

« (6.14) Supposons qu'un lapin coure d'abord 100 bu et qu'un chien, le poursuivant sur 250 bu, manque de le rattraper de 30 bu et s'arrête. On demande, si le chien ne s'était pas arrêté, combien de bu il aurait encore parcouru avant de le rattraper.

[...]

(9.1) Supposons que la base (gou) soit de 3 chi et la hauteur (gu) de 4 chi. On demande combien fait l'hypoténuse. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 9)

La variété des problèmes qui se trouvent rassemblés dans le *Classique* est résumée par Karine Chemla de la façon suivante : « Les neuf chapitres mêlent donc des énoncés qui nous apparaissent tour à tour concrets, récréatifs ou abstraits. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 9)

Les mathématiques du *Classique* diffèrent des mathématiques occidentales. Le mathématicien et historien des mathématiques du début du XX<sup>e</sup> siècle, Ogura Kinnosuke, le commentera ainsi :

« *Les Neuf chapitres sur l'art mathématique* sont l'ouvrage fondamental des mathématiques chinoises [...]. Si on le compare aux mathématiques

grecques, il leur est inférieur pour ce qui est de la géométrie et de la théorie des nombres ; pour ce qui est de l'arithmétique et de l'algèbre (avant Diophante – vers 275 de notre ère), je suis persuadé qu'il les surpasse. » (Kinnosuke, 1935)<sup>2</sup>

## La structure de l'ouvrage

L'ambition de l'ouvrage, nous disent les deux chercheurs, est de « permettre un accès au *Classique* qui a fondé les traditions mathématiques de la Chine ancienne, dans sa subtilité, dans la singularité des concepts et de la pratique des mathématiques dont il témoigne » (Chemla, Shuchun, 2005, préface p. XIV). La structure de cette traduction et de ses compléments présente plusieurs particularités qui en font à la fois un outil de diffusion de connaissances tout à fait remarquable mais aussi un ouvrage difficile d'accès. Il me paraît donc utile de nous y attarder quelque peu, en particulier pour le lecteur qui souhaiterait prolonger et approfondir cet article par la consultation de cet ouvrage. Remarquable par l'ampleur du savoir mathématique d'une époque et d'une civilisation fort éloignée de la nôtre qu'il permet de mettre à disposition d'un large public, remarquable aussi par l'environnement qui accompagne ce corpus et qui permet de mieux y entrer.

Ainsi, le *Classique* est précédé de quatre présentations dont deux éclaireront grandement le non-spécialiste. La première est écrite par Karine Chemla qui décrit le contenu même du texte, sa forme générale. Ainsi, on y apprend par exemple que le texte originel n'a rien d'un traité mathématique au sens euclidien du terme. On ne trouve pas de construction axiomatique ici, mais une succession de problèmes en général suivis de leur solution. La procédure, qui peut être porteuse d'un caractère algorithmique, est parfois détaillée. En voici un exemple :

« (9.9) Supposons qu'on ait un rondin de bois de section circulaire enfoncé dans un mur et dont on ne connaît pas les dimensions. Si, à l'aide d'une scie, on le scie à une profondeur de 1 cun, le trajet de la scie a 1 chi de longueur. On demande combien vaut le diamètre.

Réponse : Le diamètre du rondin vaut 2 chi 6 cun.

Procédure : La moitié du trajet de la scie étant multipliée par elle-même,

[...]

on divise par la profondeur de 1 cun, et on augmente ceci de la profondeur de 1 cun, ce qui donne le diamètre du rondin. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 8-9)

La numérotation « (9.9) » désigne le problème 9 du chapitre 9 dont le titre est *Base et hauteur* et traite essentiellement de calculs de longueur dans le triangle rectangle (théorème de « Pythagore »). Précisons pour la compréhension de l'énoncé du problème que le « chi » et le « cun » désignent des unités de mesure de

2. Cette citation est présente en page 29 de l'ouvrage (Yabuuti, 2000) dans lequel le lecteur intéressé trouvera davantage d'informations sur les mathématiques chinoises.

longueur qui peuvent être traduites<sup>3</sup> respectivement par « pieds » et « pouces », avec 1 chi = 10 cun. Enfin, rajoutons pour le lecteur qui souhaiterait résoudre le problème que le rondin de bois est enfoncé dans le sens de la longueur dans le mur<sup>4</sup>. Mais je souhaite surtout à travers cet exemple vous donner un aperçu de la forme générale des énoncés que l'on trouve dans le *Classique*. La partie que j'ai omise consiste en deux commentaires, l'un de Liu Hui, l'autre de Li Chunfeng<sup>5</sup>. Ces commentaires ont été rajoutés au fil du temps dans le but d'éclairer, préciser, voire corriger certains éléments du *Classique*.

Dans cette première présentation, on prend aussi connaissance de certaines hypothèses quant à la façon dont le *Classique* a pu être utilisé et de certaines absences qui peuvent surprendre. Ainsi, pas de détails sur la façon dont étaient faits les calculs de base : additions, soustractions, multiplications, divisions. Citons Karine Chemla à ce propos :

« *Les Neuf chapitres* tiennent pour acquise la connaissance d'algorithmes qui permettent d'effectuer les opérations arithmétiques de base.  
[...]

Nous n'avons donc de certitude ni pour ce qui est de la manière dont les auteurs des *Neuf chapitres* représentaient les nombres, ni au sujet des algorithmes qu'ils utilisaient pour les opérations arithmétiques. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 5)

Néanmoins, la thèse la plus couramment admise est que les calculs avaient lieu sur une surface à l'aide de baguettes :

« Un aperçu des textes mathématiques chinois sous ce rapport nous sera utile pour argumenter la thèse, usuelle, que les ouvrages datant des Han renvoient tous deux à l'usage, mieux attesté quelques siècles plus tard, de baguettes à calculer qu'on disposait sur une surface quelconque et à l'aide desquelles on représentait les nombres. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 15)

De même, il est fait allusion à plusieurs reprises pour des explications concernant les solides à des auxiliaires nommés « blocs » de différentes couleurs et dont on peut supposer qu'il s'agissait de solides qui étaient réellement manipulés :

« Il est remarquable qu'à aucun endroit, *Les neuf chapitres* ne renvoient à une figure ou à une autre forme de visualisation. En fait, les premières mentions d'auxiliaires visuels dans les mathématiques de la Chine ancienne se rencontrent dans les commentaires aux *Classiques*, comme si figures et autres étaient attachés à l'activité d'exégèse.  
[...]

---

3. Une explication des unités utilisées est donnée en deuxième de couverture de (Chemla, Shuchun, 2005)

4. Pour le détail de la résolution de ce problème on peut aussi se reporter à une version vulgarisée du neuvième chapitre parue aux éditions du Kangourou sous le titre *Les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne, extraits du neuvième chapitre* (Deledicq, 2013)

5. Li Chunfeng (602-670) est un mathématicien, astronome et historien chinois, connu notamment pour le grand nombre de commentaires qu'il a insérés dans le *Classique*.

Les questions de géométrie dans le plan et dans l'espace recourent à deux modes distincts de visualisation : les figures (tu) pour le plan, les blocs (qi) dans l'espace. Dans les deux cas, il semble qu'il se soit agi du temps des commentateurs, d'objets matériels. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 34)

Une deuxième présentation, par Guo Shuchun, retrace l'histoire du texte, des origines, aux alentours du III<sup>e</sup> siècle avant notre ère, jusqu'à nos jours, en passant par l'époque charnière que représente le moment où Liu Hui rédige ses commentaires, donc au III<sup>e</sup> siècle de notre ère. Notons que la plus ancienne version du *Classique* qui nous soit parvenue date du XIII<sup>e</sup> siècle.

Par ailleurs, dans les compléments rédigés par les deux traducteurs, figurent en tête de chacun des neuf chapitres une introduction, parfois très étoffée, qui éclaire, précise ou circonscrit certains aspects du texte qui suit. Autant de minitraités qui enrichissent et facilitent grandement la lecture du texte, et qui constituent donc un outil précieux pour le professeur qui souhaite créer des documents à l'intention des élèves.

## Éléments des *Neuf chapitres* explicitement utilisés en classe

Deux problèmes, très inégaux dans leur ampleur et leur profondeur ont été exploités en classe : d'une part le problème 15 du chapitre 5 et son commentaire par Liu Hui, qui concerne le calcul du volume d'une pyramide. D'autre part la première partie du problème 6 du même chapitre qui se résume du point de vue mathématique au calcul du volume d'un prisme particulier, donc qui ne présente pas de difficultés. Avant d'évoquer la façon dont j'ai utilisé les éléments mathématiques en question, je vais donc vous présenter en détails la méthode très originale<sup>6</sup> de Liu Hui pour justifier ce que nous appellerions aujourd'hui la « formule du volume de la pyramide ».

### Le problème 15 et le commentaire de Liu Hui

Le problème 15 consiste à calculer le volume d'un *yangma*, c'est-à-dire d'une pyramide à base rectangulaire dont une arête est aussi hauteur. Voici l'énoncé de ce problème avec la réponse et la procédure qui le suivent :

« (5.15) Supposons que l'on ait un *yangma* de 5 *chi* de largeur et, de 7 *chi* de longueur et de 8 *chi* de hauteur. On demande combien vaut le volume.

Réponse : 93 *chi* un tiers de *chi*.

Procédure : Longueur et largeur étant multipliées l'une par l'autre, on multiplie ceci par la hauteur et on divise par 3. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 429-431)

6. À ce propos, le lecteur intéressé trouvera la description d'autres méthodes et d'autres traditions relatives au calcul du volume d'une pyramide dans l'article de Jean-Paul Mercier intitulé *Le volume de la pyramide chez Euclide, Liu Hui, Cavalieri et Legendre* (Mercier, 2012).

Puis suit le commentaire de Liu Hui (Chemla, Shuchun, 2005, p. 431-433) dont je vais vous donner les grandes lignes. La procédure ci-dessus prend pour acquise le fait que le volume d'une pyramide du type *yangma* est égal au tiers du pavé ayant même hauteur et même base que le *yangma*. Pour justifier cette procédure, Liu Hui utilise trois types de solides : le pavé droit, le demi-pavé droit (appelé *qiandu*) obtenu en coupant le pavé en diagonale, le *yangma* que nous venons de voir et le *bienao*. Le *bienao* est un tétraèdre particulier qui peut se définir comme le complément du *yangma* dans un *qiandu* ayant même base et même hauteur que ce *yangma*. Ainsi, figure 1 ci-dessous,  $ABDECF$  est le *qiandu*,  $ADEBC$  est le *yangma* et  $DEFC$  est le *bienao*.

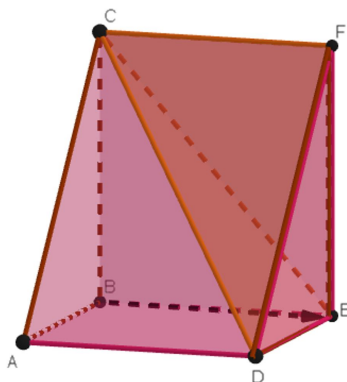


FIGURE 1 – Décomposition d'un *qiandu* en *yangma* et *bienao*

Ce dernier occupe pour Liu Hui une place tout à fait singulière dans le bestiaire des solides dont il traite : il ne correspond à aucun objet concret et son rôle est central dans la méthode pour établir la formule du volume. Voici ce qu'en dit Liu Hui lui-même la fin de son commentaire :

« L'objet *bienao* n'est pas identique à un ustensile ; la forme du *yangma* peut varier dans sa longueur et dans sa largeur. Mais si l'on n'avait pas le *bienao*, on n'aurait pas de moyen d'examiner les valeurs attachées aux *yangma*. Si l'on n'avait pas le *yangma* on n'aurait pas les moyens de connaître les catégories des cônes et des pyramides tronquées. Il joue le rôle de fondement des travaux et des volumes. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 433)

Précisons que le mot « cônes » désigne chez Liu Hui tout solide ayant une forme en pointe. Il englobe donc à la fois les cônes au sens où on l'entend chez nous mais aussi les pyramides<sup>7</sup>. C'est le terme « zhui » qui renvoie à l'idée de pointe ; ainsi « fang zhui » désignera une pyramide à base carrée tandis que « yuan zhui » renvoie à notre cône à base circulaire (« fang » renvoie à l'idée de « carré » tandis

7. Signalons que la présence d'un glossaire des termes mathématiques chinois anciens en fin d'ouvrage est tout à fait passionnante et utile, même pour le lecteur qui n'a aucune notion de chinois. Par exemple la notion de cône est développée (Chemla, Shuchun, 2005, p. 1034).



que « yuan » désigne le mot « cercle »). Le cœur de la méthode de Liu Hui se trouve dans l'affirmation suivante : « En coupant en oblique le *qiandu*, un des morceaux fait un *yangma*, l'autre fait un *bienao*. Que le *yangma* en occupe 2 quand le *bienao* occupe 1, ce sont des *lü* invariables » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 431). Ici le mot « *lü* » renvoie à l'idée de « relation » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 956). Autrement dit, Liu Hui conjecture ici que le *bienao* occupe un tiers du *qiandu* et le *yangma* deux tiers. Comme un *qiandu* a pour volume la moitié du pavé ayant même base et même hauteur que le *yangma*, il s'ensuit que le volume du *yangma* sera donc un tiers de celui du pavé. Et la procédure sera alors justifiée. Reste à prouver la conjecture. Pour cela, Liu Hui procède par dissection (voir figure 2) : il considère un *qiandu* comme à la figure 1. Ce *qiandu* peut être considéré comme la moitié d'un pavé droit qu'on appellera dans la suite « pavé de base ». (Chemla, Shuchun, 2005, p. 431)

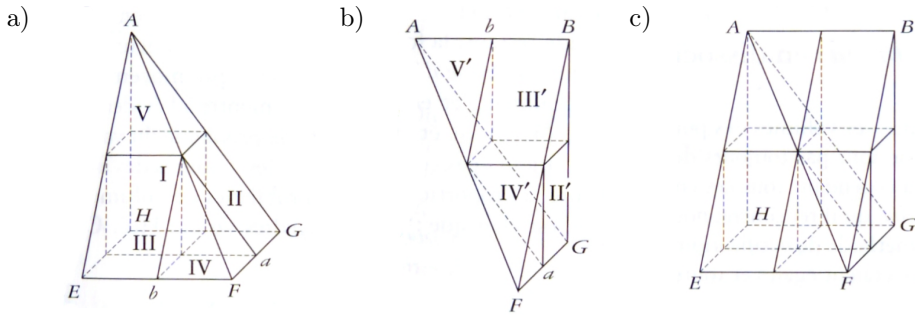


FIGURE 2 – Reconstitution de décompositions de solides en blocs (Chemla, Shuchun, 2005, p. 397)

Liu Hui coupe le *qiandu* par un plan parallèle à la base du *yangma* passant par le milieu de la hauteur (voir figure 2 (c)). Puis, cette section étant faite, il fait apparaître en dessous du plan de section des solides qui sont tous d'un des quatre types évoqués précédemment. Notons que le raisonnement de Liu Hui est présenté sans figure. Pour rendre le discours plus compréhensible, il distingue par des couleurs le *yangma* et le *bienao* du départ : le *yangma* est noir tandis que le *bienao* est rouge. Si on rassemble les *qiandu* II et III du *yangma* (a) (voir figure 2), on obtient un pavé, ce qui fait que le *yangma* de départ se décompose en un pavé qui est la réduction à l'échelle  $\frac{1}{2}$  du pavé de base et deux exemplaires d'un *yangma* qui est la réduction à l'échelle  $\frac{1}{2}$  du *yangma* de départ. Pour le *bienao*, les deux *qiandus* II' et III' ne s'appliquent pas l'un sur l'autre pour reformer un pavé mais on peut vérifier néanmoins qu'ils ont le même volume : un huitième du pavé de départ. Donc le *bienao* de départ se décompose en volume en un huitième de pavé de base et il reste deux exemplaires d'un *bienao* qui est la réduction à l'échelle  $\frac{1}{2}$  du *bienao* de départ.

Notons  $v$  le volume correspondant à un huitième du pavé de base et récapitulons en revenant au *qiandu* (c) : dans ce *qiandu*, il y a donc en volume l'équivalent de

deux  $v$  provenant du *yangma* et d'un  $v$  provenant du *bienao* et il reste deux exemplaires du *yangma* et du *bienao*, tous deux à l'échelle  $1/2$  par rapport à ceux de départ. Le volume du *qiandu* de départ est de quatre  $v$ . Donc Liu Hui vient de montrer que dans trois quarts du *qiandu*, *yangma* et *bienao* occupent l'espace dans un rapport de 2 à 1. Il poursuit de la façon suivante :

« Si on veut aller jusqu'au bout avec les quantités, on place les valeurs de la longueur, de la largeur et de la hauteur de reste, on prend la moitié de chacune, et on peut alors à nouveau savoir (ce qu'il en est) dans ses  $3/4$ . Plus la division par 2 les diminue, plus ce qui reste est fin, on le dit infime ; infime, il n'a donc pas de forme. Considéré de ce point de vue, comment obtiendrait-on un reste ? ». (Chemla, Shuchun, 2005, p. 433)

Autrement dit, il considère dans ce paragraphe les deux *yangma* et les deux *bienao* constituant le quart restant. En les rassemblant par paires, on obtient deux nouveaux *qiandus* pour lesquels on peut réitérer tout le raisonnement qui vient d'être fait. À chaque étape, on peut montrer que le rapport « 2 : 1 » d'occupation de l'espace dans le *qiandu* entre *yangma* et *bienao* est valable dans les trois quarts du nouveau solide envisagé. Autrement dit, il ne reste à la fin de chaque étape qu'à examiner le quart restant. Citons Guo Shuchun dans la présentation qu'il fait du raisonnement de Liu Hui :

« La découpe peut être réitérée indéfiniment : la partie où l'on ignore encore la proportion des deux corps sera de plus en plus petite, successivement  $1/4^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Or il est clair que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$$

Par conséquent, la démonstration est achevée dans tout le *qiandu*. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 398)

## Insertion des éléments d'histoire des mathématiques

Il était prévu que cette insertion se fasse selon deux modalités : tout d'abord pour la classe entière à l'occasion de la présentation de l'EPI, puis seulement pour certains groupes (ceux en avance ou ceux ayant le plus d'appétence) afin d'enrichir éventuellement leur prestation orale en présentant la schématisation d'un problème extrait du Classique ainsi que les calculs permettant de retrouver la réponse annoncée. Dans les faits, seul un groupe a eu le temps et l'envie de mener jusqu'au bout le travail selon cette seconde modalité. Nous vous présenterons dans la suite le problème sur lequel il a travaillé. Mais pour commencer, donnons les détails de la première modalité.

### Lors de la présentation de l'EPI

La présentation en question est un moment crucial de l'EPI. Il s'agit d'emporter l'adhésion sinon l'enthousiasme de la classe au projet global et aux différentes

déclinaisons qui en sont proposées par groupes de 4 ou 5 élèves. Tout ce qui peut contribuer à le rendre plus attrayant est le bienvenu. À destination en particulier des moins motivés des élèves, nous commençons par montrer des casse-têtes, des puzzles géométriques, autant d'éléments ludiques permettant de retrouver (peut-être!) l'envie de s'investir. Puis avec de nouvelles diapositives nous glissons vers des notions de plus en plus géométriques en montrant notamment des exemples d'intervention de l'étude des solides dans d'autres domaines : cristallographie, architecture, histoire de l'art et histoire des mathématiques.

En ce qui concerne les éléments d'histoire des mathématiques, après une introduction rapide où j'indique que la figure qui va leur être présentée est une reconstitution moderne d'un raisonnement qui a été tenu il y a près de 2000 ans en Chine par un certain Liu Hui, j'ai fait le choix de montrer d'emblée aux élèves la figure 2 que j'ai longuement évoquée ci-dessus. Je pose alors la question : « À votre avis, quel était le but recherché par les mathématiciens chinois de cette époque ? ». La recherche du volume étant évoquée nous avons alors brossé un rapide historique du calcul du volume d'une pyramide, en nous basant essentiellement sur l'article (Grégoire, 1993) déjà mentionné. Nous avons par ailleurs développé l'épisode de la conférence de Hilbert de 1900 intitulée « Sur les problèmes futurs des mathématiques ». À l'occasion de cette conférence restée célèbre pour bien des raisons<sup>8</sup>, Hilbert dressait une liste de 23 problèmes ouverts qui allaient selon lui marquer le siècle qui s'ouvrait. Citons les propos du mathématicien tels que rapportés par Étienne Ghys à travers la traduction de Léonce Laugel<sup>9</sup> :

« Qui ne soulèverait volontiers le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'œil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs ? Dans ce champ si fécond et si vaste de la science mathématique, quels seront les buts particuliers que tenteront d'atteindre les guides de la pensée mathématique des générations futures ? Quelles seront, dans ce champ, les nouvelles vérités et les nouvelles méthodes découvertes par le siècle qui commence ? »<sup>10</sup>

Il nous a semblé que ce discours empreint de lyrisme était de nature à donner à nos élèves une autre image des mathématiques, une image peut-être moins sèche que celle qu'ils ont. Mais revenons au volume de la pyramide. Parmi ces 23 problèmes, le troisième étudie la possibilité, étant donnés deux polyèdres d'égal volume, de découper le premier en un nombre fini de polyèdres et les rassembler pour former le second polyèdre. Cet énoncé est un des seuls de la liste compréhensible par un élève de collège (et même de lycée!), il serait dommage de ne pas en profiter pour l'évoquer. C'est en outre l'occasion de demander à la classe ce que serait l'analogue de cet énoncé dans le plan<sup>11</sup>, et de l'étudier dans le cas de triangles

8. Pour en savoir plus, vous pouvez consulter le site « Images des mathématiques » à la page <http://images.math.cnrs.fr/Les-problemes-de-Hilbert.html>

9. LAUGEL Léonce, traducteur scientifique francophone (1855-1925), traducteur entre autres d'une grande partie des œuvres de Riemann.

10. cité dans (Ghys, 2010).

11. Quelques mois après cette conférence mémorable, Max Dehn, un élève de Hilbert, démontrera que la réponse à ce problème est négative. En revanche, elle est positive dans le plan.

par exemple. Bref une opportunité pour donner une image vivante et dynamique des mathématiques. Et rappelons qu'un des objectifs majeurs de cette première séance est d'emporter l'adhésion même des plus récalcitrants de nos élèves. Pour cet objectif, dans le cadre d'une simple présentation, je ne pense pas que la difficulté qu'on peut « voir » sur la figure 2 soit un obstacle à l'intérêt mais au contraire un levier, en ce que l'image, dans sa complexité, fascine et pique la curiosité : que signifie cette image ? Qu'y a-t-il derrière ? Évidemment, si on veut la faire parler jusqu'au bout, il y a fort à faire et c'est à chaque professeur, en fonction de sa classe qu'il revient de définir jusqu'où aller dans l'interprétation et le lien avec le problème général du calcul du volume d'une pyramide. Voici en substance ce que pour notre part nous avons été amenés à dire ou faire et qui peut être un exemple de version *a minima* du discours qui pourrait accompagner la présentation orale de cette figure. Nous avons d'abord guidé le regard, en suggérant d'observer telles ou telles choses : un des trois solides est la réunion des deux autres ; pouvez-vous préciser lequel ? Combien de solides différents interviennent dans ces différentes décompositions ? Faites-en la liste. Quel est le solide qu'on ne retrouve pas dans les trois décompositions ? Un solide est commun aux trois décompositions, lequel ? On peut aussi s'intéresser à chaque décomposition, indépendamment des autres. Ainsi, pour le *yangma*, certains blocs ont exactement la même forme que le *yangma* lui-même ; lesquels ? Retrouve-t-on un phénomène du même type pour le *bienao* ? Pour le *qiandu* ? Etc. Les élèves ainsi familiarisés avec cette figure, on peut alors indiquer l'objectif de Liu Hui : montrer que le *yangma* occupe deux fois plus de place dans le *qiandu* que le *bienao*. Avant de donner les grandes lignes du raisonnement, on peut demander d'expliquer le lien entre ce rapport « 2 : 1 » et la formule du volume d'une pyramide. Pour cela il me paraît préférable de se centrer sur le *yangma* en montrant que le rapport « 2 : 1 » se traduit en fraction par le fait que le *yangma* occupe deux tiers du *qiandu* qui lui-même occupe la moitié d'un pavé ayant même base et même hauteur que le *yangma*.

Pour le cœur du raisonnement de Liu Hui, j'ai en substance tenu le discours suivant : dans le grand *yangma* et le grand *bienao*, si on oublie momentanément les blocs semblables à l'échelle  $\frac{1}{2}$ , le volume dans le *yangma* est le double de celui du *bienao*, pourquoi ? Liu Hui imagine alors qu'on pourrait alors rassembler deux à deux les deux petits *yangma* et *bienao* restants et recommencer la décomposition pour chacun des *qiandu* obtenus. On montre ainsi que le rapport « 2 : 1 » entre *yangma* et *bienao* est vérifié dans une partie de plus en plus grande du *qiandu* de départ. Et la partie dans laquelle on n'a pas encore vérifié est de plus en plus petite. Il m'a semblé que c'était le moment de communiquer aux élèves l'une des deux traductions que j'ai trouvées de la conclusion de Liu Hui :

« Plus la division par 2 les diminue, plus ce qui reste est fin. L'extrême du fin on le dit infime ; infime, il n'a donc pas de forme. Considéré de ce point de vue, comment obtiendrait-on un reste ? [...] Cela n'implique pas de calculs avec les baguettes. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 433)

« Les dimensions des morceaux restants sont de plus en plus petites. Ce qui a des dimensions extrêmement petites n'a plus de forme, pourquoi s'en inquiéter ? » (Grégoire, 1993, p. 69)

J'ai alors évoqué la notion de limite, en rapport avec la notion d'infini, en indiquant notamment aux élèves que c'était une notion essentielle en mathématiques et qu'ils la rencontreraient au lycée pour l'approfondir éventuellement dans l'enseignement supérieur.

## Exploitation d'un problème du chapitre 5

De nombreux problèmes de ce chapitre « Discuter des travaux » peuvent se prêter à une utilisation en classe. Nous avons fait le choix de développer ici l'utilisation du problème 6, qui se présente en deux temps. En voici l'énoncé avec les réponses qui le suivent immédiatement, dans la traduction de Karine Chemla :

« (5.6)

Supposons qu'on ait une douve de 1 zhang 6 chi 3 cun de largeur supérieure, de 1 zhang de largeur inférieure, de 6 chi 3 cun de profondeur, et de 13 zhang 2 chi 1 cun de longueur. On demande combien vaut le volume.

Réponse : 10 943 chi 8 cun.

[...]

En été, il est de règle qu'une personne travaille 871 chi. (Ici) cela comprend le travail de sortir la terre, qui en représente le  $\frac{1}{5}$ , et le travail dû au gravier, à l'eau et aux pierres, qui fait les deux tiers de ceci. Le travail déterminé est donc de 232 chi  $\frac{4}{15}$  de chi. On demande combien cela requiert de forçats.

Réponse : 47 personnes  $\frac{409}{3484}$  de personne. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 417-418)

Nous avons en outre joint (voir figure 3) l'énoncé dans la graphie chinoise<sup>12</sup> puisque, rappelons-le, l'ouvrage de Karine Chemla et Guo Shuchun se présente sous la forme d'une édition bilingue avec à gauche le texte en chinois et à droite la traduction française. La présentation aux élèves des deux documents me paraît souhaitable pour des raisons qui débordent largement les mathématiques, et que nous ne développerons pas ici. Alors, pourquoi ce problème plutôt qu'un autre ? D'abord ce problème présente deux parties bien séparées mais complémentaires. Dans la première est évalué le volume d'une douve de dimensions données et dans la seconde est demandé le nombre de « forçats » nécessaire pour creuser cette douve. Ce problème illustre parfaitement, dans un autre contexte, l'aspect pratique des mathématiques de l'époque, en lien étroit avec la vie des hommes, en réponse à des besoins concrets. Ce problème présente aussi l'avantage pour le professeur non spécialiste d'être commenté dans la présentation que fait Guo Shuchun du chapitre 5, dans la dernière des trois parties de cette présentation intitulée « Les problèmes de répartition des travaux » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 406). Enfin la forme « douve » étudiée dans ce problème avait été choisie par un des groupes d'élèves et la première partie du problème était parfaitement adaptée pour être exploitée par ce groupe. Nous en dirons un mot.

12. Merci à Danielle Bergeron pour le repérage du problème 6 dans le corps du texte et ses précieuses explications de base sur l'écriture chinoise.

今有壄，上廣一丈六尺三寸，下廣一丈，深  
六尺三寸，袤一十三丈二尺一寸。問積幾何。  
答曰：一萬九百四十三尺八寸。八寸者，謂

FIGURE 3 – L'énoncé du problème 6, en version originale (Chemla, Shuchun, 2005, p. 416)

En ce qui concerne l'exploitation pédagogique qui a été dévolue aux élèves, seule la première partie du problème a été effectivement travaillée et présentée lors du passage à l'oral par un groupe. Il avait été simplement demandé aux élèves de faire un schéma de la situation et de présenter les calculs permettant de vérifier la réponse donnée. La forme « douve » correspond en langage d'aujourd'hui à un prisme ayant pour base un trapèze isocèle. Pour le calcul de son volume, les élèves, au niveau du Collège, ne disposant pas de la formule de l'aire d'un trapèze, ont décomposé le trapèze en un rectangle et deux triangles rectangles. Nous leur avons en outre fourni le document suivant (voir figure 4) permettant de travailler avec les unités de l'époque et d'avoir une idée du résultat dans des unités d'aujourd'hui.

*Pour décrypter les unités du texte*  
*Lien entre les unités : 1 zhang = 10 chi = 100 cun.*  
*Correspondance avec nos unités : un consensus entre*  
*historiens établit la valeur du chi aux alentours de 24 cm.*

FIGURE 4 – Les unités utilisées dans le problème 6 (Chemla, Shuchun, 2005, page intérieure de couverture)

## Le déroulement en classe et les productions des élèves

### Présentation du dispositif EPI

Les objectifs officiels de ce dispositif mis en place lors de la réforme 2016 du collège sont donnés dans le décret n° 2015-544 du 19 mai 2015 relatif à l'organisation des enseignements au collège :

« Les EPI s'adressent à tous les élèves du collège. Mobilisant au moins deux disciplines, ils permettent de construire et d'approfondir des connaissances et des compétences inscrites dans les programmes d'enseignement. Ils s'appuient sur une démarche de projet et conduisent à une réalisation concrète, individuelle ou collective ».

Dans le cas qui nous occupe, mon collègue de technologie et moi-même avons décidé d'étaler le projet pour les élèves sur douze semaines, à raison de deux heures

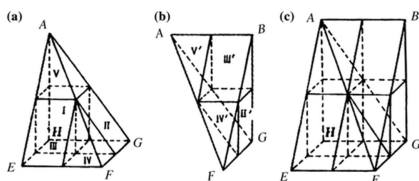
par semaine, une en cours de technologie avec co-intervention avec le professeur de mathématiques et une en cours de mathématiques, cette heure étant assurée par le seul professeur de mathématiques. Ce choix fut essentiellement dicté par notre souhait d'initier de façon suffisamment solide les élèves au logiciel *SketchUp*, afin qu'ils puissent accéder à une autonomie qui leur permette d'en faire un assistant de création et d'exploration de puzzle 3D. La philosophie de ce logiciel est très différente d'un logiciel de géométrie type *Geogebra*, la classe a ainsi pu bénéficier de deux professeurs pour se familiariser avec les commandes de base. Les deux dernières semaines furent consacrées à des évaluations orales à raison d'environ quinze minutes par groupe, pour six groupes.

## Le projet tel que présenté aux élèves

À l'issue d'une séance d'environ quarante minutes de présentation, des groupes ont été formés dans la classe puis la proposition décrite à travers les diapositives suivantes a été soumise aux élèves (voir figures 5, 6 et 7). Charge aux membres de chaque groupe de négocier pour choisir un des projets proposés.

La proposition faite aux élèves :

« À la façon de Liu Hui ... »



... vous imaginerez une décomposition d'un solide à choisir dans la liste ci-dessous :

- la pyramide régulière tronquée ou « fang-ting »,
- le prisme à base trapézoïdale ou « cheng » (le trapèze en question est isocèle),
- le pavé droit à base carrée ou « baodao »,
- le demi pavé droit (coupé en diagonale) ou « qiandu »,
- pyramide à base carrée dont la hauteur est une arête ou « yangma »,
- pyramide à base triangulaire dont toutes les faces latérales sont des triangles rectangles ou « bienao ».

FIGURE 5 – Diapositive de dévolution 1    FIGURE 6 – Diapositive de dévolution 2

Précisons que l'expression « À la façon de Liu Hui » signifiait d'imaginer une décomposition non simpliste. Mon collègue de technologie et moi-même avons fait le choix d'un énoncé volontairement vague afin d'éviter les projets trop simples (uniquement des prismes par exemple). Le *fang-ting* et le *bienao* (voir figure 6) ont été choisis deux fois, les deux autres choix se sont portés sur le *yangma* et le *cheng*. Les différents groupes ont imaginé des maquettes numériques au format « .skp » du logiciel *SketchUp*. En particulier les outils « Déplacer » et « Orbite » permettent de visualiser l'assemblage et le démontage du puzzle de façon dynamique. Pour en donner une idée, la figure 8 ci-dessous présente 3 captures d'écran de l'animation de la production d'un des groupes ayant choisi le *bienao*.

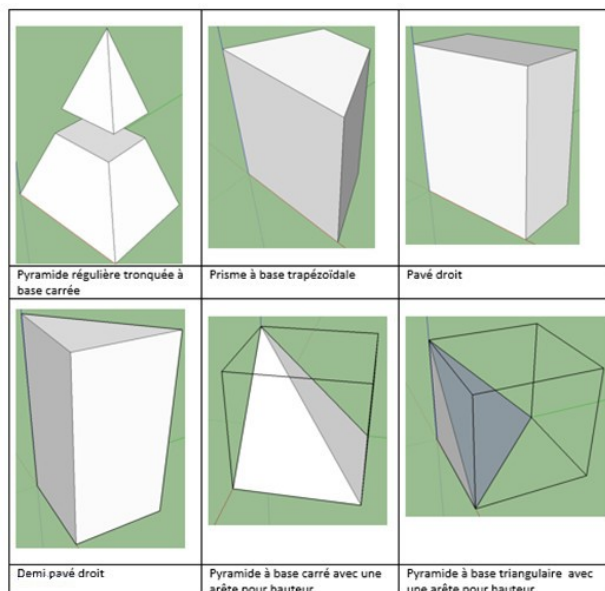


FIGURE 7 – Diapositive de dévolution 3

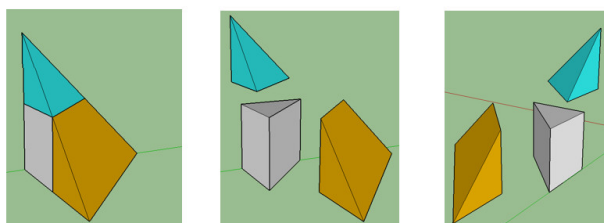


FIGURE 8 – Un exemple de puzzle imaginé

Outre des maquettes numériques, qui étaient ensuite exploitées pour fabriquer des prototypes à l'aide d'une imprimante 3D (partie spécifiquement technologique), il était demandé aux élèves de construire en papier bristol au-moins un puzzle complet par groupe. Dans certains groupes tous les élèves ont réussi à faire leur propre puzzle.

## Intérêt d'une telle démarche

D'abord remarquons que pour lancer l'EPI, la figure 2 déjà évoquée occupe une place centrale. Centrale en ce qu'elle donne à voir d'un seul coup d'œil ce qui sera attendu des élèves pour réaliser leur projet. Centrale aussi du point de vue historico-didactique dans la reconstitution de la démarche de Liu Hui pour établir le volume d'une pyramide. Pour que l'élève puisse aussi goûter cet aspect, il est bien entendu indispensable que le professeur s'en fasse le médiateur, nous avons



donné plus haut un exemple de ce que pourrait être une telle médiation. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article de Jean-Paul Mercier déjà mentionné pour une alternative (Mercier, 2012, p. 95-97). Mais dans tous les cas, il nous semble que donner les grandes lignes du raisonnement, en mettant bien en avant l'irruption de l'infini pour conclure, est l'occasion d'évoquer la notion de limite qui sera étudiée au lycée par de nombreux élèves. C'est donc une occasion de mettre du sens et des perspectives dans ce que l'élève est en train d'apprendre. Enfin, la conjugaison des deux facteurs, c'est-à-dire le fait de « voir » un puzzle déjà fait sur la figure 2 avec le fait de savoir que ce puzzle a une utilité pratique profonde du point de vue mathématique donne peut-être dans l'esprit de certains un surcroît de noblesse au travail qui va devoir être accompli par la suite pour réaliser leurs projets.

Les éléments historiques évoqués précédemment, et de nombreux autres problèmes du chapitre 5 de l'ouvrage présentent aussi un double intérêt didactique : ils permettent de travailler la notion de généralisation et celle de modélisation. Par exemple, un *yangma* dont la hauteur et le côté de la base sont de même longueur permet avec deux autres exemplaires de reconstituer un cube. Il est tentant de penser qu'on doit pouvoir reconstituer un pavé droit avec trois exemplaires d'un *yangma* dont la hauteur et le côté de la base ne seraient plus de la même longueur. La manipulation montre que ça ne marche pas. Sur la notion de modélisation, les énoncés des problèmes étant donnés sans figures, il est nécessaire pour leur donner du sens (voir problème 5.6 ci-dessus) de leur associer une figure sur laquelle on pourra porter les dimensions indiquées.

Enfin évoquer des éléments historiques de la Chine ancienne en mathématiques permet à la fois une ouverture culturelle et assure la transversalité des enseignements. L'ouverture culturelle peut être déclinée de bien des façons. Dans notre cas nous avons choisi d'évoquer (étant engagé depuis deux ans dans un travail auprès d'allophones) l'aspect linguistique, c'est la raison pour laquelle nous avons tenu à faire apparaître un extrait original en chinois. La transversalité avec l'histoire coïncide par ailleurs de façon heureuse avec l'introduction récente dans les programmes officiels du collège d'éléments sur la Chine des Han dans un paragraphe intitulé « Regards sur les mondes lointains : Chine et Inde ».

## Conclusion

L'insertion d'éléments d'histoire des mathématiques dans cet EPI a pour première vertu, selon moi, de donner aux élèves une autre image des mathématiques, à la fois plus profonde que celle qui leur est présentée habituellement, et plus proche aussi des préoccupations des hommes. Une modification qui peut se faire de plusieurs façons : d'abord, le côté concret des énoncés (évaluer un volume de terre ou le nombre de personnes pour creuser par exemple) peut contribuer à rendre plus aimable la discipline parce que répondant à des problèmes eux-mêmes facilement compréhensibles et concrets pour les élèves. On peut aussi évoquer la profondeur du raisonnement mis en scène par Liu Hui (voir figure 2) qui peut chez certains provoquer ce petit déclic qui fait naître les vocations. Enfin, les mathématiques qui sont présentées ici, par exemple ce qui a trait à l'Histoire du calcul du volume de

la pyramide, permettent de donner une image qui est tout sauf figée, une image où les vérités s'établissent petit à petit, où les énoncés se précisent petit à petit, bref une image qui les rendent plus humaines. Enfin, au-delà des mathématiques proprement dites, c'est le sens même des apprentissages qui peut être renforcé grâce à un tel projet. Je peux témoigner ici que tous les élèves, quel que soit leur niveau, se sont investis dans cet EPI, et ont même montré pour certains une motivation et une opiniâtreté que j'avais rarement vue. La complexité, loin d'être un handicap, s'est révélée pour certains groupes un levier de motivation.

Pour terminer, éloignons-nous un peu des élèves. Je ne le cache pas, le professeur intéressé par l'épistémologie qui sommeillait en moi a été définitivement séduit par cette phrase : « Les dimensions des morceaux restants sont de plus en plus petites. Ce qui a des dimensions extrêmement petites n'a plus de forme, pourquoi s'en inquiéter ? » (Grégoire, 1993, p. 69) Le côté elliptique de la fin, s'il s'éloigne peut-être un peu de la traduction au plus près du texte original, a enveloppé ces mathématiques d'un tel halo de mystère et d'exotisme que j'ai voulu en savoir davantage, que j'ai voulu me forger ma propre opinion sur la question que je me posai alors : le raisonnement tenu par Liu Hui est-il rigoureux ou suis-je simplement charmé par la formulation au parfum un peu taoïste ? Après avoir travaillé et retravaillé le sujet, ma conviction est que le raisonnement de Liu Hui est parfaitement rigoureux.

## Références bibliographiques

- CHEMLA Karine et SHUCHUN Guo, 2005, *Les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris, Dunod.
- DELEDICQ André, 2013, *Les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne, extraits du neuvième chapitre*, Paris, ACL-les Editions du Kangourou.
- GHYS Étienne, 2010, *Les problèmes de Hilbert*, sur le site « Images des mathématiques », à la page <http://images.math.cnrs.fr/Les-problemes-de-Hilbert.html>, consultée le 22/10/2019.
- GRÉGOIRE Michèle, 1993, « Comment mesurer la pyramide ? », in Commission Inter IREM, *Histoire de problèmes, Histoire des mathématiques*, p. 59-86, Paris, Ellipses.
- KINNOBUKE Ogura, 1935, « L'aspect social des mathématiques chinoises : la société des Qin et des Han vue à travers les Neuf chapitres sur l'art mathématique » (en japonais), *Sugakushi kenkyu*, Iwanami shoten, Tokyo, vol. 1, p. 189-207
- MERCIER Jean-Paul, 2012, « Le volume de la pyramide chez Euclide, Liu Hui, Cavalieri et Legendre » in BARBIN Evelyne (dir.) *Les mathématiques éclairées par l'histoire, des arpenteurs aux ingénieurs*, Vuibert-ADAPT-SNES, p. 91-112
- YABUUTI Kiyosi, 2000, *Une histoire des mathématiques chinoises*, Paris, Belin-Pour la science.

## La duplication du cube vue par deux algébristes de la Renaissance

Odile KOUTEYNIKOFF

### Introduction

Cet article, qui fait partie d'un ouvrage centré sur la géométrie, aborde les méthodes calculatoires<sup>1</sup> que deux mathématiciens du XVI<sup>e</sup> siècle crurent pouvoir mettre en œuvre pour la résolution d'un problème géométrique ancien.

Il s'agit ici de suggérer que, quand les programmes d'enseignement séparent trop radicalement les domaines du numérique et du géométrique, ils risquent de dissimuler les liens profonds entre ces deux registres, constitutifs des mathématiques tout entières. Il s'agit aussi de rappeler que, de façon générale, les savoirs, mathématiques en particulier, se construisent par étapes, au fil d'expériences du type « essai-erreur » dont témoignent de nombreux textes. Enfin, les « cas d'école » présentés ici sont pédagogiquement exemplaires des risques encourus à « voir » sur une figure, sans procéder aux validations exigibles.

Les problèmes dits « impossibles » de l'Antiquité le plus souvent cités sont la trisection de l'angle, la duplication du cube<sup>2</sup> et la quadrature du cercle, auxquels on ajoute parfois la construction de l'heptagone régulier, premier des polygones

---

1. À l'intention des personnes qui, très normalement, n'auraient pas rencontré récemment les questions anciennes que sont la division des rapports (ou insertion de moyennes proportionnelles) ou les règles de fausses positions, nous espérons avoir donné dans cet article des fils directeurs qui suffisent à la compréhension des enjeux. Nous ne proposons pas une histoire de ces notions mais l'examen d'occurrences datées donnant lieu à des démarches intéressantes.

2. Les Déliens, ayant demandé à l'oracle de Delphes comment faire cesser l'épidémie de peste dont ils étaient victimes, se seraient vu demander de doubler l'autel cubique d'Apollon. Platon aurait interprété cette réponse de l'oracle comme un appel à cultiver les mathématiques. Le texte le plus ancien relatant la légende du problème délien est dû à Ératosthène (276-194). Nous donnons *infra* quelques indications historiques en lien avec les textes cités, mais l'objet de cet article n'est pas l'histoire de la duplication du cube.

réguliers non constructibles à la règle et au compas.

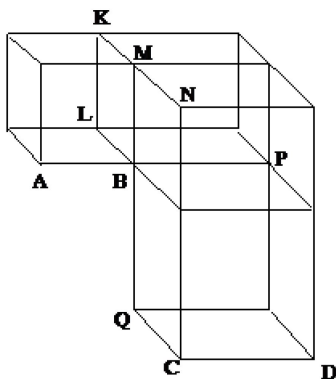
Le problème de la duplication du cube a retenu l'attention, en particulier, de deux algébristes de la Renaissance, Michael Stifel et Guillaume Gosselin. Ce sont leurs « solutions » que nous proposons d'examiner. Pour ouvrir la question, nous reproduisons précisément l'analyse que donne Bernard Vitrac de ce problème de géométrie des solides :

« Quand on a quatre < segments de > droites continûment proportionnelles  $AB, CD, EF, GH$  ( $AB : CD :: CD : EF :: EF : GH$ ), les Anciens disent que le rapport  $AB : GH$  est le rapport triplé du rapport  $AB : CD$ .

Ce que nous écrivons, en termes modernes :  $(AB/GH) = (AB/CD)^3$ .

Soit  $AK$  le cube décrit sur la droite  $AB$  (donc  $AB = BL = LK$ ), et  $BD$  le cube décrit sur la droite  $CD$  (donc  $DC = CQ = QB$ ).

On complète les parallélépipèdes<sup>3</sup> rectangles  $KP$  et  $PN$ . Alors :



$AK : KP :: AB : BP :: AB : CD$  car  $BP = CD$  ;

$KP : PN :: KM : MN :: AB : CD$  car  $KM = AB$  et  $MN = CD$  ;

$PN : BD :: MB : BQ :: AB : CD$  car  $MB = AB$  et  $BQ = CD$ .

Donc  $AK : BD$  est le rapport triplé du rapport  $AB : CD$ .

Ce que nous écrivons, en termes modernes :  $AB^3/CD^3 = (AB/CD)^3$ .

Étant données une droite  $AB$  et son double  $GH$ , si nous insérons entre elles deux moyennes proportionnelles  $CD, EF$ <sup>4</sup>, le rapport du cube décrit sur  $AB$  à celui décrit sur  $CD$  sera celui de  $AB$  à  $GH$ . Autrement dit le cube sur  $CD$  sera le double du cube sur  $AB$ . » (Vitrac, 2007, <https://cm2.ens.fr/node/2743>)

3. Un parallélépipède est désigné par sa diagonale et le rapport de deux parallélépipèdes est celui de leurs grandeurs, c'est-à-dire, en termes modernes, de leurs volumes.

4. C'est-à-dire  $AB : CD :: CD : EF :: EF : GH$ . La question des moyennes proportionnelles est approfondie *infra* au paragraphe intitulé « La résolution de Michael Stifel »

La duplication du cube se ramenant donc à l'insertion de deux lignes <segments> moyennes proportionnelles entre une ligne et la ligne de longueur double, la difficulté, ou plutôt l'obstacle, réside plus dans la construction exacte (à la règle et au compas) des lignes que dans les justifications du fait que, sur une figure supposée construite, les lignes montrées sont bien les lignes cherchées.

Au premier livre de son traité d'algèbre, le *De Arte Magna libri quatuor* (Paris, 1577), Guillaume Gosselin prolonge son étude des règles de fausses positions, en arithmétique et en algèbre, par une extension de la règle de fausse position double au champ géométrique, pour la résolution de la duplication du cube et de problèmes s'y rapportant.

Avant Gosselin, Michael Stifel a proposé une procédure de construction du côté du cube double d'un cube donné, au deuxième livre de son *Arithmetica Integra* (Nuremberg, 1544) intitulé « Sur les nombres irrationnels », dans lequel il développe sa lecture, arithmétique, du dixième livre des *Éléments* d'Euclide.

Ce sont des outils mathématiques élémentaires, mais riches des contraintes accompagnant leur utilisation, que ces deux algébristes mobilisent pour la résolution de la duplication du cube qui continuera de retenir l'attention de nombreux mathématiciens jusqu'à ce que Pierre-Laurent Wantzel démontre en 1837 que la racine cubique de 2 n'est pas constructible à la règle et au compas et que, par conséquent, le côté du cube double d'un cube donné ne l'est pas non plus.

Nous plaçons, en avant-propos, deux images emblématiques des travaux de leurs auteurs, extraites respectivement du *De Arte Magna* (figure 1, Gosselin, 1577, f° 35v) et de l'*Arithmetica Integra* (figure 2, Stifel, 1544, f° 119v). Elles sont au cœur de notre étude.

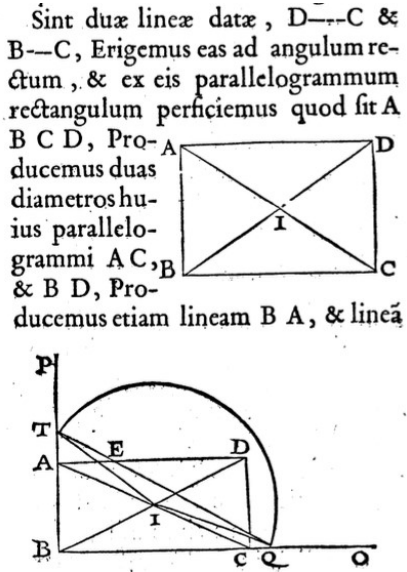


FIGURE 1 – Gosselin, 1577, f° 35v

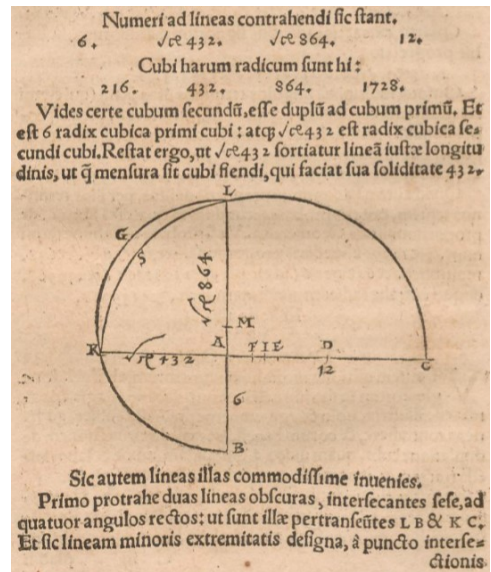


FIGURE 2 – Stifel, 1544, f° 119v

## La résolution de Guillaume Gosselin

### L'auteur et son œuvre

On sait peu de chose de Guillaume Gosselin, si ce n'est qu'il est « de Caen », mort de la peste vers 1590, qualifié de jeune à la fin des années 1570, comme en témoignent les textes d'hommage inclus dans ses traités. Proche du Collège royal et proche du pouvoir royal, Gosselin est associé à des cercles de poètes, lié à des savants et amis qui appartiennent au monde du Parlement.

En même temps qu'il travaille au *De Arte Magna* (figure 3), Gosselin fait éditer *L'Arithmétique de Nicolas Tartaglia Brescian* (Paris, 1578), qui est une traduction par ses soins d'italien en français, à la fois abrégée et augmentée de ses propres « additions », des deux premières parties du *General Trattato di Numeri et Misura* de Nicolò Tartaglia parues à Venise en 1556 (figure 4).

Ces deux traités, d'algèbre et d'arithmétique, que Gosselin écrit de façon délibérément coordonnée, sont à parts égales constitutifs de son œuvre. Les règles de fausse position, qu'il nomme règles d'hypothèse, auxquelles nous nous intéressons, sont étudiées parallèlement dans les deux traités<sup>5</sup>.

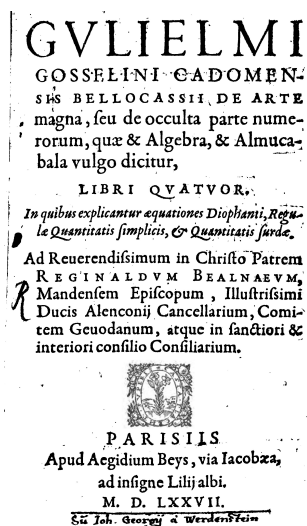


FIGURE 3 – Gosselin, 1577

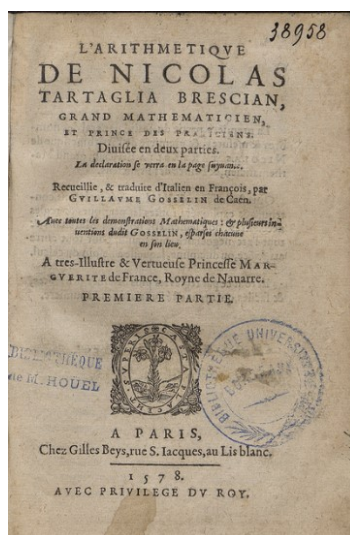


FIGURE 4 – Gosselin, 1578, I

Les deux premiers livres du *De Arte Magna* établissent les liens étroits entre les règles arithmétiques que Gosselin rappelle soigneusement et les règles algébriques que les premières contribuent à fonder. Les dix-sept chapitres du premier livre posent d'entrée les questions fondamentales de la nature de l'algèbre, de sa

5. On retrouve la plupart des résultats établis dans l'un et l'autre traités dans le troisième ouvrage que l'on doit à Gosselin, la *Prælectio* de 1583, sa *Leçon sur la manière d'étudier et d'enseigner la mathématique*.

finalité, de la reconnaissance de ses termes primitifs, traitent des algorithmes d'ex-  
 tractions de racines de différentes multiplicités, carrées, cubiques, cinquièmes, etc.,  
 des opérations sur les rapports, des règles de fausse position simple<sup>6</sup> et double<sup>7</sup>.  
 Les quatorze chapitres du deuxième livre traitent des règles opératoires qui gou-  
 vernent les termes primitifs de l'algèbre, nos actuels monômes, et les expressions  
 polynomiales, fractionnaires et irrationnelles, la présentation choisie soulignant les  
 imbrications entre les registres arithmétique et algébrique. Les treize chapitres du  
 troisième livre sont consacrés aux règles du « grand art » pour la résolution des  
 équations à une inconnue, du premier et du deuxième degré ou s'y ramenant, les  
 équations cubiques n'étant qu'abordées. Les deux chapitres du quatrième livre, en-  
 fin, sont consacrés aux systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues, pour  
 la résolution desquels Gosselin fait preuve d'une réelle maîtrise.

C'est à la fin du premier livre que Gosselin adjoint à son travail soigné d'algébri-  
 sation des règles de fausses positions un dix-septième chapitre inattendu consacré  
 à une extension de la règle de fausse position double au champ géométrique –  
 envisageable dans la mesure où les sommes, les différences, et les proportionnalités  
 de lignes sont constructibles – pour la résolution, précisément, de la duplication  
 du cube et de problèmes s'y rapportant. On trouve là l'unique incursion de la  
 géométrie dans les deux traités de Gosselin.

## La règle de double hypothèse dans le champ numérique

Dans *L'Arithmétique* comme dans le *De Arte Magna*, Gosselin fait une étude  
 théorique de la règle de fausse position double. Il en donne d'abord un énoncé gé-  
 néral, relatif aux nombres dans le traité d'arithmétique, et formulé pour les quantités  
 dans celui d'algèbre. Sa règle présente l'originalité de s'énoncer complètement en  
 une seule fois puisqu'elle intègre les variantes possibles des signes des erreurs.

« Le théorème de la règle

Si, pour la quantité inconnue d'une question, on prend deux valeurs  
 quelconques du même genre & que l'on traite l'énoncé de la question à  
 partir de l'une et de l'autre séparément, si l'on inscrit ce qui finalement  
 est de trop ou de moins avec la marque de l'excès ou celle du défaut,  
 la différence des erreurs opératoires, tous calculs faits, sera à l'une  
 ou l'autre de ces deux erreurs comme la différence des hypothèses à  
 l'erreur d'hypothèse dont l'erreur opératoire a été prise comme second  
 proportionnel ; erreur d'hypothèse qui, soit qu'on l'ajoute à l'hypothèse  
 si l'hypothèse était plus petite qu'il ne fallait, soit qu'on l'en retranche  
 si elle était plus grande, fournit la quantité cherchée. » (Gosselin, 1577,  
 f° 24v-25r, Gosselin 1578, I, f° 111v-112r)

6. Fausse position simple : En termes anachroniques, pour la résolution de l'équation  $f(x) = c$ ,  
 on calcule  $f(x_1) = c_1$  et de l'égalité supposée  $\frac{x_1}{c_1} = \frac{x}{c}$ , on déduit la valeur de  $x$ .

7. Fausse position double : En termes anachroniques à nouveau, pour la résolution de l'équa-  
 tion  $f(x) = c$ , on calcule  $f(x_1) = c_1$  et  $f(x_2) = c_2$  et, de la proportionnalité supposée entre  
 les accroissements de la variable et les accroissements de la fonction,  $\frac{x_2 - x_1}{c_2 - c_1} = \frac{x - x_1}{c - c_1} = \frac{x - x_2}{c - c_2}$ ,  
 on déduit l'accroissement de la variable correspondant à l'un ou l'autre des accroissements de la  
 fonction  $c - c_1$  ou  $c - c_2$ .

Bien que la question mathématique traitée ne nécessite pas en elle-même de larges développements, nous choisissons de transcrire l'énoncé de Gosselin en termes modernes (figure 5), de façon à montrer plus aisément sur quoi portent ses démonstrations et en quoi consistent les perfectionnements qu'il introduit.

La forme  $ap + b = c$  s'impose puisque c'est celle des exemples numériques choisis par Gosselin au long de son étude, celle, bien sûr, pour laquelle la règle donne des résultats exacts. En restant au plus près des termes utilisés par Gosselin, nous notons  $p_0$  la « quantité inconnue de la question »,  $p_1$  et  $p_2$ , les positions ou « hypothèses » choisies arbitrairement, c'est-à-dire les « valeurs quelconques prises » ;  $p_1 - p_0$  et  $p_2 - p_0$  sont alors les « erreurs d'hypothèses » à déterminer pour trouver la valeur exacte  $p_0$ . Nous notons  $\varepsilon_1 e_1$  et  $\varepsilon_2 e_2$  les « erreurs opératoires » respectivement associées à chaque hypothèse, c'est-à-dire les écarts entre les résultats du calcul et la valeur attendue, affectés du signe  $\varepsilon$ , + ou -, qui leur revient, auquel Gosselin porte l'attention requise.

$$\begin{array}{ll}
 ap_0 + b = c & \\
 ap_1 + b = c_1 = c + \varepsilon_1 e_1 & \text{(i) } p_1 - p_0 = \frac{\varepsilon_1 e_1 (p_2 - p_1)}{\varepsilon_2 e_2 - \varepsilon_1 e_1} \\
 ap_2 + b = c_2 = c + \varepsilon_2 e_2 & \\
 a(p_1 - p_0) = c_1 - c = \varepsilon_1 e_1 & \text{(ii) } p_2 - p_0 = \frac{\varepsilon_2 e_2 (p_2 - p_1)}{\varepsilon_2 e_2 - \varepsilon_1 e_1} \\
 a(p_2 - p_0) = c_2 - c = \varepsilon_2 e_2 & p_0 = p_1 - (p_1 - p_0) \\
 a(p_2 - p_1) = c_2 - c_1 = \varepsilon_2 e_2 - \varepsilon_1 e_1 & p_0 = p_2 - (p_2 - p_0)
 \end{array}$$

FIGURE 5 – Une transcription moderne de l'énoncé général de Gosselin

L'énoncé du théorème est suivi d'une démonstration détaillée et argumentée<sup>8</sup>, à l'issue de laquelle Gosselin revient en quelques lignes sur les questions de signes qui ont joué un rôle décisif dans sa démonstration et qu'il sait inhabituelles ; il souligne « deux points particulièrement dignes d'attention » :

« Il ressort d'ailleurs de cette démonstration deux points particulièrement dignes d'attention, le premier est que si l'hypothèse est plus grande que le vrai nombre, l'erreur opératoire doit être marquée du signe du défaut et non de celui de l'excès, et qu'au contraire, si l'hypothèse est trop petite, on doit affecter à l'erreur opératoire le signe de l'excès, le second est que l'on doit toujours prendre la différence des erreurs opératoires. » (Gosselin, 1577, f° 30r)

$\begin{array}{c} 4 \\ 6 \quad 2 \text{ Hypothefes} \\ P \quad M \\ M \quad 6 \quad P \quad 6 \text{ Errores operis.} \\ M \quad A \quad 12 \quad PB \text{ Errores hypothefis.} \\ 4 \end{array}$

FIGURE 6 – Gosselin, 1577, f° 27v. L'inscription des signes des erreurs

8. Pour une étude plus complète, on pourra voir Gosselin, 2016, p.101-114.



Pour expliciter le premier point, nous reproduisons le tableau (figure 6) sur lequel Gosselin montre la manière d'inscrire les signes : les signes de la troisième ligne du tableau traduisent le constat qui est fait de l'excès (P) ou du défaut (M) de la valeur calculée par rapport à la valeur attendue. Les erreurs d'hypothèses seront alors affectées de signes indiquant la correction à prévoir – il faudra retrancher (M) l'excès si l'hypothèse est trop grande ou ajouter (P) le défaut si l'hypothèse est trop petite – et les erreurs opératoires sont, par anticipation, affectées de ces mêmes signes.

Le second point souligné par Gosselin stipule que, à partir du moment où les erreurs sont affectées de signes, la règle s'exprime par une consigne unique et générale qui recouvre tous les cas : on introduit toujours la différence des erreurs opératoires, quels que soient leurs signes. C'est la force de sa règle.

Les égalités (i) et (ii) de la figure 5 synthétisent les outils dont Gosselin dispose pour s'aventurer dans le champ géométrique et y aborder la question de la duplication du cube : ce sont la proportionnalité à l'œuvre dans la règle arithmétique ancienne de fausse position et la maîtrise du maniement des signes dans la forme algébrique nouvelle qu'il a donnée à cette règle.

## La règle de double hypothèse dans le champ géométrique

Gosselin ouvre le chapitre qu'il consacre à cette question en insistant sur la filiation de la règle, « venue de l'algèbre<sup>9</sup> », mais dont l'efficacité tient, en dernier ressort, à la compétence du mathématicien. C'est la forme générale qu'il a su donner à la règle de double hypothèse qui, à ses yeux, rend possible l'extension de son champ d'application au-delà de celui de l'algèbre, et son emploi pour les quantités continues – c'est-à-dire en géométrie<sup>10</sup> – dans la mesure où les sommes, les différences, et les proportionnalités de lignes < segments > sont constructibles :

« L'emploi de la règle double pour les quantités continues<sup>11</sup>. Ch. XVII  
Comme est admirable la règle qui ne se cantonne pas à une seule espèce de quantité mais dans toutes les directions se diffuse à travers toutes les quantités, puisque (pour tout dire d'un seul mot), quoique venue de l'algèbre, elle a des capacités dont sa mère l'Algèbre est dépourvue et qu'elle ne connaît pas ; ce n'est en effet pas par l'algèbre que l'on pourra obtenir ce genre d'emploi, mais on doit recourir à la règle en suivant la méthode par laquelle nous l'avons transmise car, à la façon dont les autres la traitent, elle ne vaut pas pour la quantité continue. Il convient donc d'établir par cette règle la méthode de doublement

---

9. Il est difficile d'éclaircir, dans le cadre restreint de cet article, les ambiguïtés que Gosselin entretient de façon fondatrice entre arithmétique, algèbre et arithmétique générale, au travers des liens qui assujettissent les unes aux autres la règle de trois, la règle d'hypothèse et la règle de la chose (ou règle de l'algèbre).

10. Gosselin, 1577, f° 1r : « Toute quantité est, selon Aristote, ou continue, ou disjointe & discrète. La quantité continue est appelée grandeur, la quantité disjointe reste par conséquent attachée au nombre. »

11. En extension, dans la table des chapitres : L'emploi de la règle double pour les quantités continues, où l'on démontre le procédé mathématique de duplication du cube, et trois autres problèmes s'y rapportant, et manquant jusqu'ici. Ch. xvii.

du cube, ce que personne avant nous n'a atteint mathématiquement. »  
(Gosselin, 1577, f° 34v)

Gosselin reprend alors à son compte l'opposition ancienne entre mécanique et mathématique, qui entoure les problèmes « impossibles » de l'Antiquité, pour en faire, ici comme en quelques occasions, le symbole de l'écart entre la connaissance superficielle qui procède par tâtonnement ou accumulation, et la connaissance approfondie qui, par la cause, conduit à des solutions concises et générales. Il évoque des tentatives de construction qui ont vu le jour dans l'Antiquité, soit par l'emploi de dispositifs instrumentaux plus ou moins complexes, dont Platon lui-même aurait donné un modèle, soit par intersection de courbes, comme celles des auteurs que Platon aurait critiqués, alors que ces dernières constructions ont pu être considérées comme théoriques :

« C'est à bon droit assurément que Platon a blâmé Eudoxe, Archytas & Ménechme, pour ce qu'ils entreprenaient de ranger la duplication du cube dans les outils & travaux mécaniques et tentaient de cette manière de trouver pour deux lignes données deux lignes proportionnelles insérées entre elles, car, dans ce projet, l'avantage de la géométrie est gâté & détruit, ramenée qu'elle est aux choses sensibles. Et de fait, Platon lui-même n'a pas résolu mathématiquement l'oracle proposé par Apollon aux Déliens, à ces Déliens peu avisés qui, pour doubler l'autel cubique du Dieu, en avaient, en doublant chacun des quatre côtés, obtenu l'octuple, à cause de l'erreur induite par l'analogie prescrivant le double en longueur. » (Gosselin, 1577, f° 34v-35r)

Archytas de Tarente (428-350), Eudoxe de Cnide (408-355) et Ménechme (380-320) sont en effet parmi les nombreux mathématiciens qui, dès l'Antiquité, se sont penchés sur le problème de la duplication du cube. On peut douter que les critiques évoquées par Gosselin aient été formulées à l'époque de Platon (427-347), au motif qu'elles ne figurent dans aucun de ses textes et ne sont mentionnées qu'à une époque tardive, par Plutarque (46-125)<sup>12</sup>.

Sans nous attarder sur les différentes formes qu'ont pu prendre selon les auteurs, les figures et les justifications des proportionnalités que montrent ces figures, nous examinons la construction que propose Gosselin, « à la règle et au compas », par la méthode de double hypothèse, pour le premier des quatre problèmes géométriques qu'il résout :

« Problème 1. Deux lignes étant données, rechercher mathématiquement deux moyennes proportionnelles.

---

12. Les assertions de Plutarque sont elles-mêmes contestables. En effet, à la différence d'Eutocius (480-540) au VI<sup>e</sup> siècle, Plutarque ne prend pas en compte la nécessité de distinguer les solutions qui restent théoriques parce qu'elles se fondent sur des intersections de courbes, telles celles d'Archytas, de Ménechme, sans doute d'Eudoxe, et plus tardivement de Dioclès (240-180), de celles qui, employant des dispositifs instrumentaux plus ou moins complexes, sont authentiquement mécaniques et doivent, à ce titre, être écartées de la mathématique. Eutocius attribue les premières solutions mécaniques à des mathématiciens du III<sup>e</sup> siècle, dont le plus ancien est Philon (280-220), bien postérieur à Platon. On pourra voir à nouveau B. Vitrac <https://cm2.ens.fr/node/2743>. On lira avec intérêt É. Barbin [http://www.foad-mooc.auf.org/IMG/pdf/AUF-cours\\_UEC1.pdf](http://www.foad-mooc.auf.org/IMG/pdf/AUF-cours_UEC1.pdf)

Soient les deux lignes données  $D-C$  &  $B-C$  (figure 7). Nous les construirons à angle droit et compléterons sur elles un parallélogramme rectangle, soit  $ABCD$ . Nous tracerons les deux diamètres de ce parallélogramme,  $AC$  &  $BD$ , nous tracerons aussi la ligne  $BA$  & la ligne  $BC$ , soient  $BAP$ ,  $BCO$ . Il faut rechercher la ligne telle que, quand on la porte du centre du parallélogramme  $ABCD$  qui est  $I$  jusqu'à la ligne  $AP$  & la ligne  $CO$ , la ligne tracée à partir des deux points passe par le point  $D$  [...] » (Gosselin, 1577, f° 35v-36v)

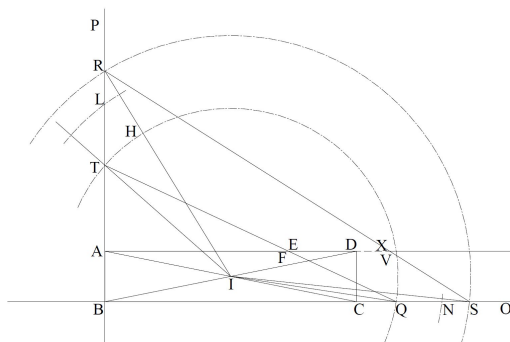


FIGURE 7 – D’après Gosselin, 1577, f° 35v-36v. La construction des données et la formulation de la question

Testant un premier rayon ( $IT = IQ$ , hypothèse  $p_1$ ), Gosselin constate l’erreur opératoire par défaut  $ED$  ( $\varepsilon_1 e_1$ ). Prenant alors un second rayon ( $IR = IS$ , hypothèse  $p_2$ ), il constate l’erreur opératoire par excès  $DX$  ( $\varepsilon_2 e_2$ ). La différence des hypothèses de  $IT$  à  $IR$  ( $p_2 - p_1$ ) apparaît en  $RH$ , et la différence des erreurs opératoires de  $ED$  à  $DX$  ( $\varepsilon_2 e_2 - \varepsilon_1 e_1$ ) apparaît en  $FV$ , dans une vision géométrique tout à fait remarquable de la différence de lignes « comme affectées de signes » (figure 8).

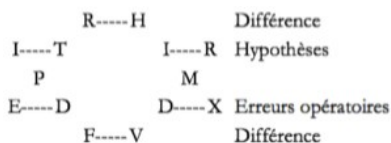
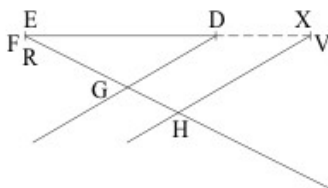


FIGURE 8 – D’après Gosselin, 1577, f° 36v. L’identification des erreurs sur la figure

Conformément à l’égalité (i) *supra* (figure 5), on obtient l’erreur de l’hypothèse  $IT$  en construisant  $RG$  tel que le rapport soit le même de  $FV$  à  $ED$  que de  $RH$  à  $RG$ . (figure 9). Gosselin s’appuie, pour cette construction, sur les propositions VI-9 et VI-12 d’Euclide<sup>13</sup>.

13. Euclide 1990-2001, II, p.179 : « VI-9. D’une droite donnée, retrancher une partie prescrite. » ; p.183 : « VI-12. De trois droites données, en trouver une quatrième proportionnelle. »



$$RG : RH :: ED : FV$$

FIGURE 9 – D’après Gosselin, 1577, f° 37r. La construction des rapports égaux

Le rayon cherché est alors  $IL = IT + RG$ , somme de l’hypothèse  $IT$  et de son erreur  $RG$ .

Et Gosselin de conclure : « [...] et ainsi la ligne  $IL$  est le rayon de cercle cherché, tel que si tu traces la ligne  $IL$  du point  $I$  jusqu’à la ligne  $AP$  & jusqu’à la ligne  $CO$ , et que tu obtiens les points  $L$ ,  $N$ , & que tu traces la ligne droite du point  $L$  au point  $N$ , celle-là passera par le point  $D$ , comme on peut le voir<sup>14</sup>. » (Gosselin, 1577, f° 37v)

Gosselin complète alors le tracé du cercle de centre  $I$  et de rayon  $IL$  et propose une figure dont les propriétés de symétrie sous-tendent les affirmations qui suivent (figure 10) :

« Ces choses étant établies, je complète le cercle  $LMN$ , je trace la ligne  $BM$ , la ligne  $CR$ , les lignes  $DQ$ ,  $DR$ ,  $QR$ ,  $LQ$ ,  $MK$ , puis je raisonne ainsi : les lignes  $LA$ ,  $BM$ ,  $QD$ ,  $CK$  sont parallèles & sont également distantes du même centre, elles sont donc égales ; pour la même raison la ligne  $DR$  est égale à la ligne  $CN$ ,  $QM$  est diamètre du cercle  $LMN$ , c’est pourquoi  $QRM$  est un demi-cercle & le triangle  $QRM$  est rectangle d’après la proposition 31 du troisième livre < d’Euclide ><sup>15</sup>, et donc le triangle  $QRC$  est droit également, et pour la raison que la ligne  $DR$  est perpendiculaire à la base  $QC$  & qu’elle divise l’angle droit  $R$ , la ligne  $DR$  sera moyenne proportionnelle entre  $QD$  &  $DC$ , mais la ligne  $CN$  est égale à la ligne  $DR$ , comme nous l’avons démontré [...] » (Gosselin, 1577, f° 37v-38r)

Sur la figure achevée, Gosselin établit les proportionnalités attendues, en faisant référence successivement à plusieurs propositions euclidiennes dont le détail nous emmènerait loin du sujet traité<sup>16</sup>.

14. Nous commentons plus bas la solidité de l’argument « comme on peut le voir ».

15. Euclide, 1990-2001, I, p.449 : « III-31. Dans un cercle, d’une part l’angle dans le demi-cercle est droit, d’autre part celui dans un segment plus grand [qu’un demi-cercle] est plus petit qu’un droit, celui dans un segment plus petit, plus grand qu’un droit. De plus l’angle du segment plus grand est plus grand qu’un droit et l’angle du segment plus petit, plus petit qu’un droit. »

16. Pour les personnes dont la curiosité serait éveillée, il s’agit, dans l’ordre, des propositions II-14, III-36, VI-8, VI-13, V-7, I-29, I-32, VI-4, des *Éléments* d’Euclide.

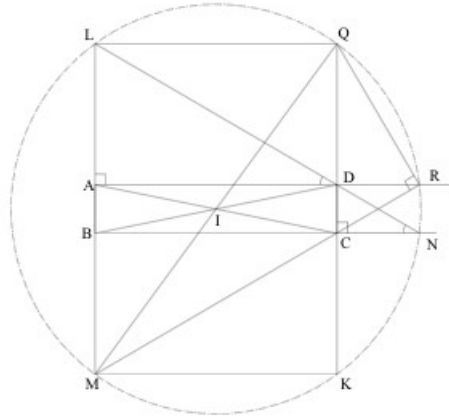


FIGURE 10 – D’après Gosselin, 1577, f° 37v. Sur la figure complétée, les proportionnalités attendues

En résumé, et en termes modernes, dans le triangle rectangle  $QRC$  :

$$\frac{DC}{DR} = \frac{DR}{DQ} \text{ soit } \frac{DC}{CN} = \frac{CN}{LA}$$

et dans les triangles  $LAD$  et  $DCN$  qui sont semblables :

$$\frac{DC}{CN} = \frac{LA}{AD} \text{ soit } \frac{DC}{CN} = \frac{LA}{BC}$$

d’où la relation cherchée :  $\frac{DC}{CN} = \frac{CN}{LA} = \frac{LA}{BC}$

qui signifie que  $CN$  et  $LA$  sont les deux lignes moyennes proportionnelles cherchées, que si  $DC$  est le côté du cube à doubler, et  $BC$  le double de ce côté, alors  $CN$  est le côté du cube double.

Il se fait que les figures de Gosselin dans le *De Arte Magna* ont l’apparence exacte des figures de Tartaglia dans le *General trattato*, exceptionnellement reproduites par Gosselin dans *L’Arithmetique*, au paragraphe « Comment on peut trouver par voye Geometrique le costé Cubique d’un nombre, tant Cube, que non Cube » du chapitre consacré aux extractions de racines cubiques.

Ci-dessous la première figure (figure 11) et la traduction que donne Gosselin du passage du texte de Tartaglia associé :

« Cecy estant ainsi fait nous prendrons nostre compas, & mettrons le pié immobile sur le centre i, puis avec l’autre pié nous chercherons vn point sur la ligne g, k, & vn autre sans varier le pié immobile de nostre compas du point i, sur la ligne f, e, lesquels deux points soient tels, que si nous tirons vne ligne droite de l’un en l’autre, icelle passe précisément par le point h, ce que nous ferons en ceste sorte :



Quoi qu'il en soit, Gosselin exploite au mieux le résultat auquel il est parvenu. La solution serait généralisable et il détaille en son deuxième problème (Gosselin 1577, f° 39r-40r) que l'on peut pareillement construire le cube triple ou le cube quadruple d'un cube donné, « et ainsi indéfiniment ». Le troisième problème (Gosselin 1577, f° 40r) qu'il se contente d'énoncer, est également géométrique : « Dessiner un cube égal à un parallélépipède quelconque<sup>19</sup>. » Quant au quatrième problème, « Rechercher géométriquement le côté cubique d'un nombre quelconque », que Gosselin énonce pour clore le chapitre, c'est celui que Tartaglia traite par tâtonnement avec le support de la figure reproduite plus haut.

## Bilan

L'excursion de Gosselin dans le champ de la géométrie, où il prête à la règle d'hypothèse le pouvoir supérieur de construire les moyennes proportionnelles, l'a emmené fort loin, semble-t-il, du terrain des nombres où il se tient habituellement, et ne manque pas d'interroger. Pourtant, tout bien considéré, ce détour s'inscrit de façon pertinente dans le projet de Gosselin de façonner toutes les démonstrations absentes du traité de Tartaglia, et qui ne se trouvent non plus chez aucun autre auteur. Ayant l'audace de penser des lignes « comme affectées de signes », il croit trouver en la règle de double hypothèse, qu'il a démontrée par l'algèbre, et dont le champ d'application dépasserait celui de l'algèbre, le moyen d'établir la construction exacte de la figure montrant le « costé Cubique d'un nombre, tant Cube, que non Cube » et, ce faisant, une démonstration de la règle d'extraction des racines cubiques, manquante jusque-là, et appartenant bien au champ du numérique à la perfection duquel il œuvre.

## La résolution de Michael Stifel

Michael Stifel s'est, avant Gosselin, penché sur le problème de la duplication du cube, en l'abordant comme une des conséquences bienvenues, en géométrie en particulier, de son interprétation numérique de la classification des lignes irrationnelles, présentée par Euclide au livre X des *Éléments*.

## L'auteur et son œuvre

Homme d'église au parcours un peu mouvementé, Michael Stifel fait paraître son premier texte mathématique, *l'Arithmetica Integra*, à Nuremberg, en 1544, alors qu'il est âgé de 57 ans (figure 12). L'ouvrage, qui se présente comme une synthèse des connaissances de l'époque, augmentée de contributions originales et pertinentes de l'auteur, connaît de nombreuses rééditions et est abondamment lu et exploité. Les publications suivantes de Stifel sont rédigées en langue vernaculaire. On lui doit en particulier une réédition en 1553 de *l'Algèbre* de Christoff Rudolff.

---

19. La solution se donne en deux étapes, la construction d'un parallélépipède égal au parallélépipède donné, de même hauteur et de base carrée égale à sa base rectangulaire, puis la construction des deux moyennes proportionnelles entre le côté du carré et la hauteur des parallélépipèdes. La plus petite des deux moyennes est le côté du cube cherché.

Que Stifel entend-il par « arithmétique entière » ou sans doute « arithmétique générale » ? Le traité est composé de trois livres consacrés respectivement à un large rappel des règles de l'arithmétique, aux nombres irrationnels à travers une relecture arithmétique du livre X des *Éléments* d'Euclide et à « L'Art parfait du calcul » ou algèbre.

Arithmétique entière, sans doute parce que l'arithmétique du premier livre est pensée comme un support pertinent pour l'algèbre dont traite le troisième livre et que les règles des signes qui régissent les opérations sur les expressions irrationnelles, reconnues au deuxième livre, sont au fondement des règles opératoires relatives aux expressions algébriques établies au troisième livre.

En ouverture du livre II de *l'Arithmetica Integra* (figure 13), Stifel pose d'entrée la question de « L'essence des nombres irrationnels », rappelant qu'on se demande avec raison s'ils sont réels ou fictifs. Soulignant l'intérêt qu'il y a, quoi qu'il en soit, à les considérer, et proposant au chapitre III de donner à voir ces nombres « abstraits » en les « contractant » sur des figures géométriques, lignes ou surfaces, Stifel passe en revue, au chapitre IIII, « Les espèces de nombres irrationnels » et met en évidence cinq espèces principales de nombres irrationnels abstraits<sup>20</sup>.

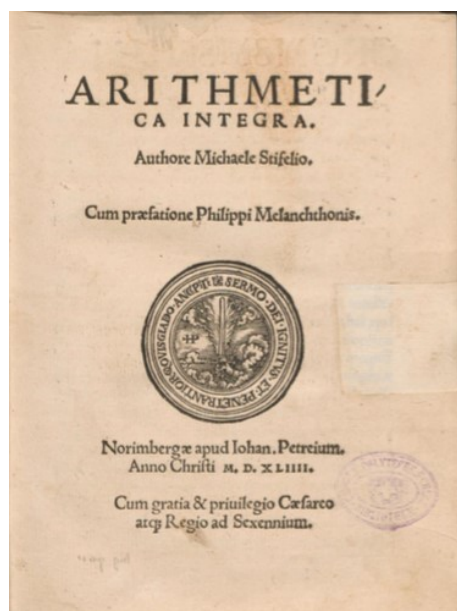


FIGURE 12 – Stifel, 1544

MICHAELIS STIFELII ARITHMETICAE LIBER SECVNDVS, DE NUMERIS IRRATIONALIBVS. LIBRI II.	
I.	De essentia numerorum irrationalium. 103
II.	Quid Euclides sēferit de numeris irrationalibus. 104
III.	De definitionibus decimi libri Euclidis. 105
IIII.	De speciebus numerorum irrationalium. 109
V.	Quid Euclides collegerit ex praedictis speciebus, & ut collectorum illorum usus sit. 111
VI.	De Algorithmis medialium. 114
VII.	De usu illorum medialium, quorum Euclides nullam mentionē facit in suo decimo; & de duplicatiōe cubi. 118
VIII.	De proportionibus irrationalibus. 121
IX.	De Algorithmis numerorum irrationalium cōpositorum, & tanquam compositorum. 123
X.	De Binomijs & Residuis, atq; de eorum radicibus quadratis extrahendis. 127
XI.	De Algorithmis minutiarum irrationalium & de probatione quadam huiusmodi Algorithmorum. 132
XII.	De surdis radicibus binomiorum & residuorum, & de Algorithmis earum. 134

[...]

FIGURE 13 – Stifel, 1544, f° 103

La première seule retiendra ici notre attention. Il s'agit des nombres irrationnels médiaux ou irrationnels simples, c'est-à-dire des racines sourdes des nombres rationnels, de la forme  $\sqrt[p]{a}$ . Voici ce qu'écrit Sabine Rommevaux à ce sujet :

20. Stifel se réfère à la recension des *Éléments* d'Euclide de Campanus, dont Erhard Ratdolt donne la première version imprimée en 1482.



« Pour Euclide, une ligne médiale est le côté d'un carré égal à un rectangle contenu par deux lignes exprimables, commensurables en puissance seulement. Ainsi, soit le rectangle  $ABCD$  formé par  $AB$  et  $BC$  exprimables et commensurables en puissance seulement, et soit  $E$  une droite exprimable de référence, on a par exemple :  $AB = p.E$  et  $BC = p^2\sqrt{q}.E$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers ou des fractions. Alors, le carré égal au rectangle  $ABCD$  a pour côté  $p^4\sqrt{q}.E$ . Ainsi, les nombres médiaux de Stifel généralisent les lignes médiales d'Euclide à d'autres racines que la racine quatrième. » (Rommevaux-Tani, 2014, p.182-183)

## Les moyennes proportionnelles

Au chapitre VII qu'il intitule alors « L'emploi des médiales, dont Euclide ne fait aucune mention en son dixième livre & la duplication du cube », Stifel apporte, à la question de la duplication du cube, une solution évidemment inédite qu'il fait ressortir de sa présentation des médiales des différentes espèces, lesquelles sont incontournables pour qui veut faire des insertions de moyennes proportionnelles, c'est-à-dire diviser des proportions.

« Et si Euclide, en son dixième livre, utilise seulement deux espèces de nombres médiaux, il ne faut pas pour autant penser que les nombres médiaux des autres espèces sont à ce point stériles qu'ils soient sans utilité, & ne soient d'aucun apport aux réflexions arithmétiques et géométriques. Et ce qu'est leur apport, nous en faisons l'expérience, tout particulièrement, quand nous prenons l'initiative d'appliquer aux nombres irrationnels aussi ce que nous avons appris à propos des nombres rationnels, comme les progressions arithmétiques, géométriques, harmoniques et contra-harmoniques<sup>21</sup>. Nous verrons de même les divisions des proportions, à propos desquelles ici la cause ressort en quelque sorte des exemples, et d'abord les divisions des proportions.

Les divisions des proportions

Ce qui sert à la division des proportions, c'est l'art de poser des moyennes proportionnelles, autant que l'on veut, entre n'importe quels nombres.

Et, cet art, je veux maintenant l'enseigner en peu de mots. » (Stifel, 1544, f° 118r)<sup>22</sup>

La nature des médiales requises dépend du nombre de moyennes proportionnelles attendues. On remarquera, sur l'extrait du texte original (figure 14), l'emploi, pour désigner les nombres irrationnels, des signes « cossiques » dont Stifel consacra l'usage comme signes du calcul algébrique, au troisième livre de l'*Arithmetica Integra*.

21. Stifel étudie les différentes proportionnalités au premier livre de l'*Arithmetica Integra*. Trois nombres  $a, b, c$  sont en proportionnalité harmonique si le rapport de la première différence à la deuxième différence est le même que le rapport du plus petit extrême au plus grand, c'est-à-dire si  $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$ . Ils sont en proportionnalité contra-harmonique si le rapport de la première différence à la deuxième différence est le même que le rapport du troisième nombre au premier, c'est-à-dire si  $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$ . Ces relations sont au fondement de l'harmonie musicale.

22. Traduction des extraits de l'*Arithmetica Integra* par l'auteur de l'article.

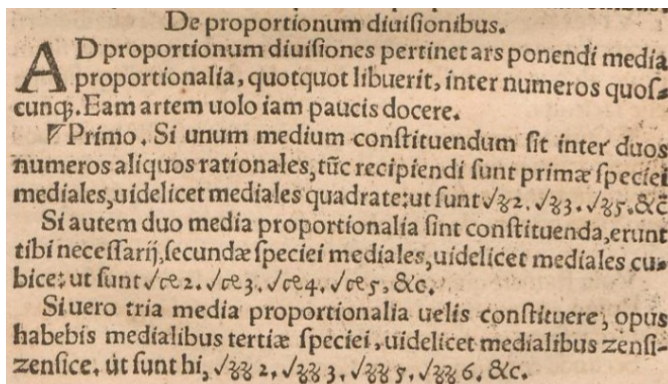


FIGURE 14 – Stifel, 1544, f° 118r. Où l'on voit les notations cossiques

« \* Premièrement. S'il s'agit de placer une moyenne entre deux nombres rationnels quelconques, il faut alors prendre les médiales de la première espèce, à savoir les médiales quarrées, comme  $\sqrt[2]{2}$ ,  $\sqrt[2]{3}$ ,  $\sqrt[2]{5}$ , etc. Mais, s'il s'agit de placer deux moyennes proportionnelles, les médiales de la deuxième espèce te seront nécessaires, à savoir les médiales cubiques, comme  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\sqrt[3]{5}$ , etc. Et si tu veux placer trois moyennes proportionnelles, tu auras besoin des médiales de la troisième espèce, à savoir des médiales quarrées-quarrées, comme celles-ci,  $\sqrt[4]{2}$ ,  $\sqrt[4]{3}$ ,  $\sqrt[4]{5}$ ,  $\sqrt[4]{6}$ , etc. Et s'il s'agit de placer quatre moyennes proportionnelles, il faudra utiliser la quatrième espèce des médiales, c'est-à-dire qu'il faudra prendre les médiales sursolides, comme celles-ci  $\sqrt[5]{2}$ ,  $\sqrt[5]{3}$ ,  $\sqrt[5]{4}$ , etc. Et ainsi de suite. » (Stifel, 1544, f° 118r-v)

Stifel développe alors la façon dont l'opération de division des proportions repose sur la considération des suites géométriques, avant de reprendre les étapes en les détaillant sur un exemple :

« Je veux établir cinq moyennes proportionnelles entre 6 & 18.

\* Premièrement, je prends le signe des médiales de la cinquième espèce,  $\sqrt[6]{}$ , et je le garde pour l'emploi que tu verras.

\* Deuxièmement, je mets en place la progression commençant à l'unité, dont la racine de la progression est le quotient de la division de 18 par 6, c'est-à-dire 3.

Et parce que je cherche cinq moyennes, il faut donc poser sept termes de la progression, à savoir,

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.

\* Troisièmement, je pose devant chaque terme, un à un, le signe radical, que j'avais dans un premier temps mis de côté ; la progression s'écrira alors ainsi :

$\sqrt[6]{1}$ .  $\sqrt[6]{3}$ .  $\sqrt[6]{9}$ .  $\sqrt[6]{27}$ .  $\sqrt[6]{81}$ .  $\sqrt[6]{243}$ .  $\sqrt[6]{729}$ .

\* Quatrièmement, une fois extraites les racines selon les signes à enlever, la progression s'écrira ainsi :

$$1. \sqrt[6]{3}. \sqrt[3]{3}. \sqrt[2]{3}. \sqrt[3]{9}. \sqrt[6]{243}. 3.$$

\* Cinquièmement, multiplie chacun des termes par 6 (qui est le plus petit des nombres entre lesquels on doit placer les moyennes proportionnelles); tu auras alors tes termes extrêmes, et, intercalées entre eux, les moyennes proportionnelles cherchées < et trouvées >, soit :

$$6. \sqrt[6]{139968}. \sqrt[3]{648}. \sqrt[2]{108}. \sqrt[3]{1944}. \sqrt[6]{11337408}. 18.$$

Et qu'il y ait proportionnalité continue entre les sept termes, tu pourras le prouver conformément à ce que j'ai dit au livre 1, sur la proportionnalité géométrique. Et de même, si tu veux prouver que le terme  $\sqrt[6]{139968}$  fait un partage proportionnel entre 6 &  $\sqrt[3]{648}$ , multiplie  $\sqrt[3]{648}$  par 6 (c'est-à-dire par  $\sqrt[3]{216}$ ), cela fait  $\sqrt[3]{139968}$ , dont tu extrais la racine carrée, ce qui fait  $\sqrt[6]{139968}$ .

Et ainsi des autres. » (Stifel, 1544, f° 118v-119r)

## La duplication du cube

Et pour que l'emploi des nombres médiaux soit parfaitement mis en lumière, Stifel offre de « démêler » la question de la duplication du cube, souvent « traitée avec inquiétude et difficulté », en contractant les nombres médiaux cubiques sur des lignes :

« Supposons donc que le cube à doubler ait six pieds de haut. Premièrement, je me donne une ligne ayant pour mesure la hauteur du cube à doubler. Deuxièmement, je me donne une ligne qui soit double de la hauteur du cube à doubler (& si le cube devait être triplé, il faudrait se donner une ligne triple de la hauteur du cube à tripler, & ainsi de suite). Je cherche alors, entre les deux lignes données, deux autres lignes, qui s'interposent entre elles proportionnellement. Et la première des lignes (s'interposant ainsi proportionnellement) sera la mesure du cube à construire, double du cube donné à doubler.

Les nombres à contracter sur les lignes se présentent ainsi.

$$6. \sqrt[3]{432}. \sqrt[3]{864}. 12.$$

Et les cubes de ces racines sont ici :

$$216. 432. 864. 1728.$$

Tu vois assurément que le deuxième cube est le double du premier cube. Et 6 est la racine cubique du premier cube : et  $\sqrt[3]{432}$  est la racine cubique du deuxième cube. Il reste donc à assortir  $\sqrt[3]{432}$  à la ligne de la bonne longueur pour que sa mesure soit celle du cube à construire, qui fasse 432 en volume. » (Stifel, 1544, f° 119r-v)

Il n'y aurait donc plus qu'à construire la ligne de longueur  $\sqrt[3]{432}$ !

Voici comment procède Stifel (figure 15) :

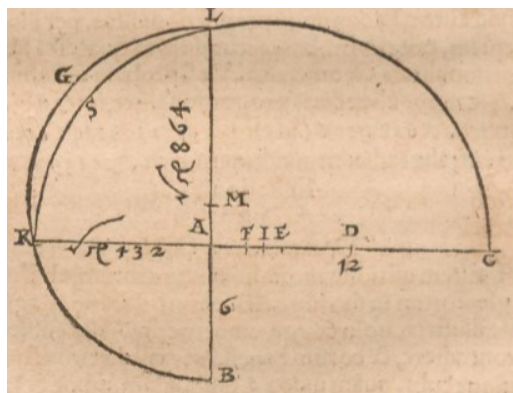


FIGURE 15 – Stifel, 1544, f° 119v

« Premièrement, trace deux lignes non précisées, se coupant entre elles, en formant quatre angles droits. Soient les lignes qui se traversent  $LB$  &  $KC$ . Et marque la ligne de l'extrême le plus petit, à partir du point d'intersection, vers le bas, sur la ligne non précisée, comme tu la vois marquée petite ligne  $AB$ . Et la ligne de l'extrême le plus grand, marque-la, sur l'autre ligne non précisée, à partir du même point d'intersection, vers la droite, comme tu la vois marquée ligne  $AC$ . Ensuite, à la mesure de  $AB$ , découpe  $AD$  sur  $AC$ , de façon évidemment que  $AD$  et  $AB$  soient égales. Divise ensuite  $AD$  en deux parties égales, au point  $E$ . Deuxièmement, divise  $AE$  en deux parties égales, au point  $F$ . Troisièmement, divise  $FE$  en deux parties égales, au point  $I$ . Pose alors au point  $I$  le pied fixe du compas, & tire l'autre pied du compas jusqu'au point  $C$ , c'est-à-dire jusqu'à l'extrémité de la ligne de l'extrême le plus grand. Trace alors le demi-cercle, comme tu vois que  $KHL$  est tracé sur le diamètre  $KC$ . Et tu as ainsi deux moyennes proportionnelles, évidemment  $KA$  et  $LA$ , posées entre les deux extrêmes  $BA$  &  $AC$ . » (Stifel, 1544, f° 119v-120r)

La justification de cette affirmation est évidemment malheureuse. S'il est vrai que l'égalité  $\frac{AK}{AL} = \frac{AL}{AC}$  résulte du marquage des points  $L$  et  $K$  lors du tracé du cercle de centre  $I$  et de rayon  $IC$ , il est bien osé d'affirmer, comme le fait Stifel, que  $KA$  est moyenne proportionnelle entre  $AB$  et  $AL$ , soit  $\frac{AB}{AK} = \frac{AK}{AL}$ , pour la raison que le tracé du demi-cercle de diamètre  $LB$ , « évidemment  $BKGL$  », constituerait la « preuve du fait » ! Il est en effet inexact que le demi-cercle de diamètre  $LB$  passe par  $K$  (un petit calcul peut aussi mettre l'erreur en évidence).

Ce n'est pourtant pas la raison pour laquelle Stifel exprime des doutes sur l'accueil qui pourrait être réservé à ses innovations. Concluant le paragraphe sur la duplication du cube par ces mots : « Je prévois ici une querelle sur les nombres irrationnels contractés sur les lignes. Mais je choisis de la laisser aux chicaneurs » (Stifel 1544, f° 120r), il s'affranchit avec hauteur des critiques à venir.

## Remarques finales

Engagé avec enthousiasme dans un travail original sur les nombres irrationnels, auxquels il donne vie et usage en les contractant sur des lignes, Stifel commet, sur le point précis de la duplication du cube, une erreur que l'on peut qualifier de grossière. Et sans le support d'une démonstration, ce que la figure donnerait à voir ne peut avoir valeur de preuve. Cette défaillance ponctuelle est d'autant plus surprenante de la part de Stifel que l'ensemble de son travail est au contraire ordonné et rigoureux.

Gosselin, quant à lui, porté par le sérieux de ses travaux, surestime la règle de double hypothèse qu'il a remaniée, démontrée précisément, et dont la mise en œuvre en géométrie est réalisable à la règle et au compas. Dans ces conditions, le « comme on peut le voir » (Gosselin, 1577, f° 37v) par lequel il termine la construction des moyennes proportionnelles, ne signifie pas que « c'est vrai parce que ça se voit » mais plutôt que « je l'ai démontré et cela apparaît ». La faute est plus subtile parce qu'elle est plus profonde et concerne le champ d'application de la règle de double hypothèse, dont les résultats ne sont exacts que si les fonctions sous-jacentes sont affines<sup>23</sup>.

## Références bibliographiques

- BARBIN Évelyne, « Les grands problèmes de la géométrie grecque et l'invention des courbes », [http://www.foad-mooc.auf.org/IMG/pdf/AUF-cours\\_UEC1.pdf](http://www.foad-mooc.auf.org/IMG/pdf/AUF-cours_UEC1.pdf)
- BUSARD H. L. L., 2005, *Campanus of Novara and Euclid's Elements*, 2 vol., Stuttgart, Franz Steiner Verlag.
- EUCLIDE d'Alexandrie, 1990-2001, *Les Éléments*, traduits du texte de Heiberg, Introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, I-IV, Paris, PUF.
- GOSSELIN Guillaume, 1577, *De Arte Magna libri quatuor*, Paris, Gilles Beys.
- GOSSELIN Guillaume, 1578, *L'Arithmétique de Nicolas Tartaglia*, I & II, Paris, Gilles Beys.
- GOSSELIN Guillaume, 1583, *De ratione descendæ docendæque Mathematices repetita prælectio*, SL.
- GOSSELIN Guillaume, 2016, *De Arte magna Libri Quatuor / Traité d'algèbre suivi de Prælectio / Leçon sur la mathématique*, Étude introductive, traduction française, annotations par O. Le Guillou – Kouteynikoff, Paris, Les Belles Lettres.
- ROMMEVAUX-TANI Sabine, 2014, « Irrationalité des nombres, irrationalité des lignes selon Michael Stifel et Simon Stevin », *Revue d'histoire des mathématiques*, 20/1, p. 171-209.

---

23. Pierre Ageron a composé une exploitation pédagogique du texte de Gosselin pour l'épreuve d'Histoire et Épistémologie des mathématiques du Master Enseignement, Éducation, Formation de mathématiques, deuxième année, en avril 2017 à l'Université de Caen. Il y suggère, entre autres choses, de porter une attention critique à des expressions telles que « comme on peut le voir ».

RUDOLFF Christoff, 1553, *Die Coss Christoffs Rudolffs*. Die schönen Exempeln der Coss. Durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt, Königsberg, Alexandre Lutomyslens.

STIFEL Michael, 1544, *Arithmetica Integra*, Nuremberg, Johann Petreius.

TARTAGLIA Nicolò, 1556, *General trattato di numeri et misure*, I & II, Venise, Curtio Troiano.

VITRAC Bernard, le 20/09/2007, « La duplication du cube », Article principal *Le cas Hippocrate : un premier scandale en géométrie*, <https://cm2.ens.fr/node/2743>

## La géométrie comme science de courbes

Évelyne BARBIN

### Introduction

Dans l'enseignement des mathématiques, les courbes apparaissent essentiellement en tant que graphes de fonctions, souvent associées à des formules analytiques. Ceci limite leur présence dans l'enseignement mathématique et les réduit à des exercices scolaires : « trouver le graphe de la fonction ». Ainsi, leurs intérêts propres en tant qu'objets mathématiques ou scientifiques ne sont pas mis en avant. Pourtant l'histoire montre leurs rôles majeurs dans la connaissance scientifique et qu'elles peuvent être abordées autrement que par l'analyse. En effet, de premières courbes sont inventées pour résoudre des problèmes géométriques dans l'Antiquité grecque. Puis un concept de courbe est introduit au XVII<sup>e</sup> siècle, en lien avec la détermination de courbes qui répondent à des problèmes cinématiques, physiques ou encore techniques. Les solutions ne passent pas nécessairement par une équation de la courbe, pour la cycloïde ou l'ovale cartésienne par exemple, mais par une propriété géométrique spécifique des points de la courbe. L'histoire indique aussi que la notion de fonction, introduite à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, est liée à des problèmes physico-mathématiques qui reviennent à déterminer une courbe tangente à une famille de droites ou de courbes.

Une approche historique dans l'enseignement, outre qu'elle permettrait de montrer l'intérêt de telle ou telle courbe, témoignerait du rôle des courbes et de la multiplicité de leurs conceptions dans la constitution des sciences. Nous proposons de défendre et d'illustrer ce point de vue épistémologique et pédagogique en parlant de problèmes historiques, dont la plupart ont été centraux dans l'histoire des mathématiques et des sciences.

## Constructions et inventions de courbes dans la géométrie grecque

La géométrie grecque commence au VI<sup>e</sup> siècle avant J.-C., mais les textes en notre possession datent du III<sup>e</sup> siècle avant J.-C., comme ceux d'Euclide, d'Archimède ou d'Apollonius. Cependant, nous avons des témoignages indiquant le rôle instigateur des problèmes de construction de figures par intersection de droites et de cercles, ou encore pour nous à la règle et au compas. Par ailleurs, les *Éléments* d'Euclide présentent une intrication de propositions et de constructions, car toute proposition sur une figure suppose que la figure à laquelle elle se rapporte soit ainsi construite. Ils peuvent se lire aussi comme un ouvrage de constructions de figures.

Certains problèmes de construction ont résisté aux géomètres, comme la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle. Le premier problème demande de construire un carré de même aire qu'un cercle donné, le second de construire le côté d'un cube de volume double d'un cube donné, et le troisième de diviser en trois parties égales un angle donné. Depuis le XIX<sup>e</sup> siècle, nous savons démontrer qu'aucun de ces problèmes ne peut être construit à la règle et au compas. Mais les Grecs ont inventé des instruments et des courbes pour les résoudre : la quadratrice d'Hippias (V<sup>e</sup> siècle avant J.-C.) et la spirale d'Archimède (III<sup>e</sup> siècle avant J.-C.) pour la quadrature du cercle ; les coniques de Ménechme (IV<sup>e</sup> siècle avant J.-C.) et la cissoïde de Dioclès (II<sup>e</sup> siècle avant J.-C.) pour la duplication du cube ; la conchoïde de Nicomède (II<sup>e</sup> siècle avant J.-C.) pour la trisection de l'angle. Nous allons examiner, comment, au-delà de la géométrie d'Euclide, trois de ces courbes ont été inventées et définies par des mouvements ou des intersections de solides, mais traitées de manière purement géométrique.

### La quadrature du cercle et les spirales par Archimède

La proposition I du traité de la *Mesure du cercle* d'Archimède énonce que l'aire d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est le rayon du cercle et l'autre la circonférence du cercle. La démonstration procède par l'absurde en démontrant géométriquement que l'aire du cercle ne peut être ni plus grande, ni plus petite que celle du triangle. Elle utilise des polygones inscrits dans le cercle dans le premier cas, et circonscrits dans le deuxième cas (Archimède, 1960, t. I, p. 127-128).

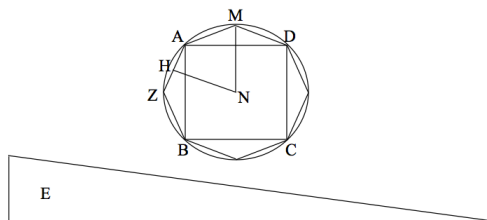


FIGURE 1 – La proposition 1 de la mesure du cercle



Dans le Livre II des *Éléments*, Euclide démontre qu'il est possible de quarrer un triangle rectangle. Donc, selon la proposition I, il serait possible de quarrer un cercle, à condition cependant de construire un segment égal à une circonférence de cercle. Ce dernier problème est nommé rectification (rendre droit) d'un cercle.

Or, dans le traité *Des spirales*, Archimède montre que ces courbes permettent d'obtenir une rectification du cercle, autrement qu'à la règle et au compas par conséquent. Au début de son traité, il donne la définition cinématique d'une spirale d'origine  $A$ , comme courbe décrite par un point  $M$  se déplaçant uniformément sur une demi-droite d'origine  $A$ , en même temps que celle-ci tourne uniformément autour de  $A$ . Mais il la fait suivre de la proposition XIV qui permet de traiter géométriquement la spirale : si  $D$  et  $E$  sont deux points de la spirale et si  $H$  et  $Z$  appartiennent au cercle de rayon  $AG$  avec  $G$  le point de la spirale obtenu en un tour alors le rapport de  $AE$  à  $AD$  est égal à celui des arcs  $GKZ$  et  $GKH$  (Archimède, 1960, t. I, p. 263-264).

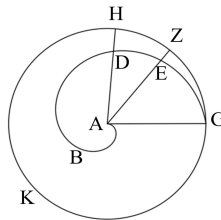


FIGURE 2 – Description géométrique de la spirale

Après bien d'autres, la proposition XVIII énonce que si le point  $G$  est obtenu en un tour et si on mène la tangente à la spirale en ce point, alors celle-ci rencontre la perpendiculaire à  $AG$  au point  $A$  en un point  $T$  tel que  $AT$  est égal à la circonférence  $(A, AG)$ . La démonstration procède par l'absurde, tandis que le texte n'indique ni comment cet énoncé a été trouvé, ni comment la démonstration a été obtenue (Archimède, 1960, t. I, p. 269-273).

### La duplication du cube et les coniques

Au v<sup>e</sup> siècle avant J.-C., Hippocrate de Chios a montré que le problème de la duplication du cube équivaut à construire deux segments  $x$  et  $y$ , moyennes proportionnelles entre un segment  $(a)$  donné et son double, ce que nous écrivons aujourd'hui :

$$a : x = x : y = y : 2a$$

Puis, au siècle suivant, Ménechme résout ce problème par intersection d'une parabole et d'une hyperbole, et il donne une définition des coniques.

Les coniques font l'objet des *Coniques* d'Apollonius du III<sup>e</sup> siècle avant J.-C., où elles sont définies comme les intersections d'un cône par des plans de différentes inclinaisons. Mais Apollonius caractérise aussitôt les points de chacune d'elles par

une relation géométrique, appelée « symptôme », qui en permet une étude géométrique. Pour la parabole, il écrit (Apollonius, 1959, p. 22) :

« Soit un cône dont le sommet est le point  $A$  et dont la base est le cercle  $BC$ . Coupons-le par un plan passant par l'axe, lequel détermine comme intersection le triangle  $ABC$ . Coupons-le aussi par un autre plan coupant la base du cône suivant  $DE$  perpendiculaire à  $BC$ , lequel détermine la ligne  $DZE$  comme intersection dans la surface du cône, tandis que le diamètre  $ZH$  de l'intersection est parallèle à l'un des côtés  $AC$  du triangle passant par l'axe. »

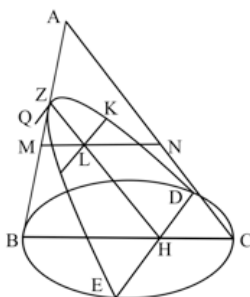


FIGURE 3 – La parabole chez Apollonius

Soit  $Z$  le sommet de la parabole sur  $AB$ , Apollonius appelle « côté droit » de la parabole un segment  $ZQ$  tel que :

$$ZQ : ZA = \text{Aire carré } BC : \text{aire rectangle } (BA, AC).$$

Si  $K$  est un point de la parabole et si  $KL$  est parallèle à  $HD$ , il obtient le « symptôme » en démontrant que :

$$\text{aire carré } KL = \text{aire rectangle } (ZQ, ZL)$$

Apollonius établit les symptômes des trois coniques, qui expriment une égalité, un dépassement ou une diminution par rapport à l'aire d'un carré. Ceci explique les noms des différentes coniques car « parabolleïn » (à côté) donne parabole, « hyperballeïn » (au-dessus) donne hyperbole, « elleipsis » (au-dessous) donne ellipse.

Les *Commentaires d'Eutocius d'Ascalon* au traité de la sphère et du cylindre d'Archimède, écrits au V<sup>e</sup> siècle (Archimède, 1960, t. II, p. 605-606) contiennent la construction de deux moyennes proportionnelles à deux segments  $AB$  et  $BC$  par intersection de deux paraboles en procédant par analyse, c'est-à-dire en partant de ce que l'on cherche. Considérons quatre segments tels que

$$AB : BE = BE : BD = BD : BC.$$

Disposons-les perpendiculairement puis construisons le rectangle  $EZDB$ .

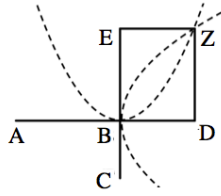


FIGURE 4 – La duplication du cube par intersection de deux paraboles

D'après une proposition du livre VI d'Euclide (« produit en croix ») on a :

$$\text{aire carré } ZD = \text{aire carré } BE = \text{aire rectangle } (AB, BD).$$

Donc  $Z$  est sur une parabole de diamètre  $BD$  et de côté droit  $AB$  (symptôme).  
De même :

$$\text{aire carré } ZE = \text{aire carré } BD = \text{aire rectangle } (BE, BC).$$

Donc  $Z$  est sur une parabole de diamètre  $BE$  et de côté droit  $BC$  (symptôme).  
La construction de  $Z$  s'obtient par intersection de deux paraboles, et donc aussi celles de  $E$  et  $D$ . Quand  $AB$  est double de  $BC$ , nous obtenons la duplication du cube.

### La trisection de l'angle et la conchoïde de Nicomède

D'après Pappus, Nicomède, mathématicien grec des II<sup>e</sup>-III<sup>e</sup> siècles avant J.-C., a préconisé la conchoïde pour construire la duplication d'un cube (Pappus, t. I, p. 185-186). Cette courbe permet aussi d'obtenir de manière simple la trisection d'un angle. Elle est obtenue point par point à partir de la donnée de trois éléments : un point  $B$ , une droite  $\Delta$  et un segment  $MN$  d'une longueur donnée. Un point  $E$  de la conchoïde est obtenu pour chaque point  $D$  de  $\Delta$ , en prolongeant  $BD$  d'une longueur  $DE$  égale à  $MN$ . La courbe a une forme de coquillage, d'où son nom.

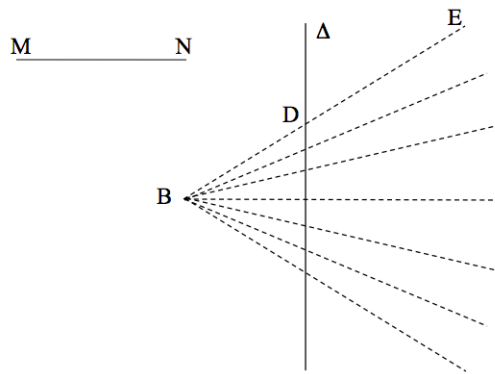


FIGURE 5 – La construction des points de la conchoïde

Pour obtenir la trisection d'un angle donné  $ABC$ , construisons la perpendiculaire  $\Delta$  à  $BC$  passant par  $A$  puis la conchoïde pour le point  $B$ , la droite  $\Delta$  et un segment de longueur  $2AB$ . La parallèle à  $BC$  menée du point  $A$  coupe la conchoïde en un point  $E$ , alors l'angle  $EBC$  est le tiers de l'angle  $ABC$ . La démonstration utilise l'inscription du triangle rectangle  $ADE$  dans un cercle de rayon  $AB$ .

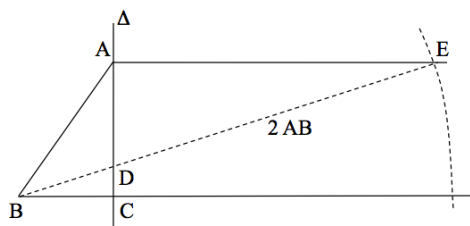


FIGURE 6 – La trisection d'un angle avec la conchoïde

Nicomède a fourni un instrument donnant un tracé continu de la conchoïde, qui est décrit dans les *Commentaires d'Eutocius d'Ascalon* (Archimède, 1960, t. II, p. 615-616). Il est composé de deux règles perpendiculaires solidaires  $AB$  et  $\Gamma\Delta$  et d'une règle  $KZ$  qui peut coulisser de sorte que l'instrument, mis en mouvement, contraint  $KZ$  à passer par  $\Delta$  tout en maintenant la même longueur  $KE$  avec  $AB$ . Le point  $K$  décrit une conchoïde pour le point  $\Delta$ , la droite  $AB$  et le segment de longueur  $KE$ .

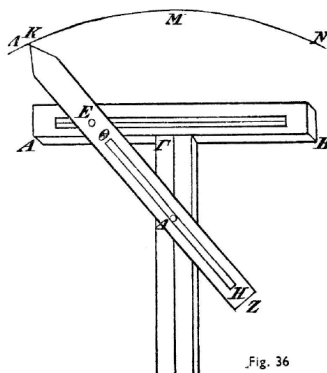


FIGURE 7 – L'instrument de Nicomède pour tracer la conchoïde

### La classification des problèmes selon Pappus

Moins d'une douzaine de courbes sont introduites dans l'Antiquité grecque, et, quelle que soit leur description, leur traitement et celui de leurs tangentes passent par la géométrie. Autrement dit, il n'y a pas de spécificité pour ces courbes et il n'y a pas une conception générale du courbe. Ainsi, dans *La Collection mathématique*

du IV<sup>e</sup> siècle, Pappus donne une classification des problèmes selon leurs modes de construction (Pappus, 1982, t. I, p. 206-207) :

« Lorsque les anciens géomètres ont voulu partager un angle rectiligne donné en trois angles égaux, ils ont été embarrassés à cause de ceci : nous avons dit qu'il y a trois genres de problèmes, et que nous les appelons plans, solides et grammiques. C'est donc à juste titre que ceux qui peuvent être résolus au moyen de droites et de la circonférence de cercles sont dits plans, et que les problèmes qu'on résout en assumant pour leur solution une des sections du cône, ou plusieurs de ces sections, sont appelés solides, parce qu'il faut faire usage de figures solides pour leur construction, notamment de surfaces coniques. Reste enfin le troisième genre de problèmes qu'on appelle grammiques [le gramme est ce qui est tracé], parce qu'on emploie pour leurs constructions d'autres lignes que celles dont nous venons de parler, lesquelles ont une génération plus variée et plus forcée, dérivant de surfaces moins régulières et de mouvements plus compliqués. »

## La courbe comme inconnue d'un phénomène et la notion de courbe au XVII<sup>e</sup> siècle

Les courbes introduites dans les années 1630-1670 ont une signification bien différente puisqu'elles sont les réponses à des problèmes, cinématiques ou physiques. Elles sont les inconnues dans un phénomène, comme la trajectoire d'un boulet de canon avec Galilée, la trajectoire d'un point sur un cercle qui roule avec Marin Mersenne, la forme d'un dioptré réalisant un effet optique avec René Descartes, la forme d'une lame réalisant un pendule isochrone avec Christian Huygens (Barbin, 2006). Ainsi, de nouvelles significations sont apportées : la courbe est un effet à déterminer, tandis que la tangente est un instrument de compréhension du phénomène.

Les géomètres introduisent alors des « méthodes d'invention » des tangentes, qui s'appliquent à « toutes » les courbes. Elles demandent une conception générale des courbes et aussi de mettre en avant la propriété spécifique d'une courbe comme individu dans un monde de courbes. Elles conduisent à un renversement de l'investigation par rapport à la géométrie grecque. En effet, nous trouvons chez les Anciens des études de courbes particulières (coniques, spirales) dans un corpus géométrique général, tandis que les Modernes s'intéressent à un problème particulier (les tangentes) qui nécessite une conception générale du courbe (Barbin, 2006, p. 139-140). Nous allons examiner ceci avec les méthodes des tangentes chez Roberval et Descartes.

### Quelle est cette courbe ? Le paradoxe d'Aristote et l'invention de la cycloïde

Dans les années 1630, Mersenne s'intéresse au paradoxe de la roue du Pseudo-Aristote, qui est le suivant : une petite roue qui roule parcourt en un tour sa

circonférence mais, si elle est solidaire d'un grand cercle, alors elle parcourt la circonférence de ce grand cercle. Pour y répondre, Mersenne transforme le problème en se demandant : quelle est la courbe que décrit un point d'une circonférence d'une roue qui roule ? Alors que Galilée, devant le même paradoxe, cherche à lui trouver une cause, il s'interroge sur un effet : la trajectoire. La question est difficile car elle suppose qu'il existe un moyen de caractériser une courbe.

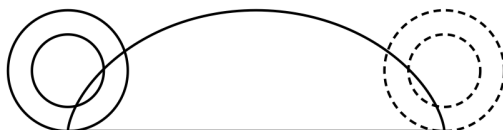


FIGURE 8 – Le paradoxe de la roue du Pseudo Aristote

La forme l'incitant, Mersenne écrit dans *Questions inouyes* de 1634 que la courbe est une semi-ellipse. Il n'a aucune certitude et il interroge le mathématicien Gilles de Roberval, qui finit par lui répondre en 1637 que : « Il paraît (et je vous le démontrerai aussi) que cette ligne n'est ni ellipse ; ni pas une des lignes courbes que nous trouvons dans les livres ; qu'au contraire, elle a ses propriétés à part, que je décrirais toutes, si j'avais assez de loisir » (Mersenne, 1960, t. VI, p. 175). La courbe n'est aucune des courbes étudiées par les Anciens car « elle a ses propriétés à part » : Roberval affirme ceci car il a obtenu la tangente à la courbe et l'aire sous une arche, qu'il peut comparer à celles des courbes des Anciens. Il a eu besoin, pour cela, d'introduire deux « méthodes d'invention », l'une pour les tangentes et l'autre pour les aires.

En 1638, René Descartes et Pierre de Fermat, reçoivent de Mersenne l'annonce des découvertes de Roberval. Mis au défi, ils obtiennent aussi l'aire sous une arche et la tangente en un point de la courbe, qui va être appelée « roulette » ou « cycloïde » (Cléro & Lerest, 1980, p. 69-83). Dès 1637, chacun d'eux est possesseur d'une « méthode d'invention » pour les tangentes.

### Les courbes cinématiques de Roberval

La méthode d'invention des tangentes est présentée dans le traité des *Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes aux lignes courbes*, publié en 1693 par l'Académie des Sciences (Roberval, 1693, p. 25) :

« Axiome ou principe d'invention. La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante [tangente] de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Règle générale. Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous

ces mouvements composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe ».

La méthode s'appuie sur la cinématique : la courbe est la trajectoire d'un point et la tangente est la direction du mouvement en un point. Roberval traite les courbes connues à son époque. Pour l'ellipse, la « propriété spécifique » est donnée par l'existence de deux foyers, à savoir qu'un point  $M$  d'une ellipse est tel que la somme de ses distances aux deux foyers  $F$  et  $G$  est constante. Il est donc soumis à deux « mouvements droits égaux », l'un qui le rapproche de l'un des foyers et l'autre qui l'éloigne de l'autre. Ils sont égaux car la somme des distances est constante. La tangente au point  $M$  s'obtient donc en construisant la bissectrice  $MC$  de l'angle  $HMG$ . La proposition sur les foyers d'une ellipse se trouve dans *Les coniques* d'Apollonius, mais maintenant elle donne lieu à une « propriété spécifique », un moyen de caractériser une courbe dans le cadre d'une méthode.

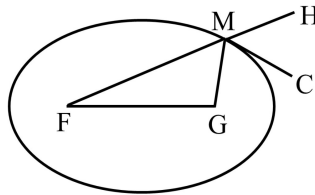


FIGURE 9 – La tangente à l'ellipse selon Roberval

La cycloïde est définie d'emblée par des mouvements, et nous comprenons que Roberval ait pu inventer sa méthode pour répondre à Mersenne. La trajectoire d'un point  $E$  est soumise à deux mouvements égaux, un mouvement selon  $EF$  parallèle à  $AC$  et un mouvement de rotation, associé à la tangente  $EP$  du cercle qui roule. Ils sont égaux parce que la base de la cycloïde est égale à la circonférence du cercle. La bissectrice de l'angle  $PEF$  est donc la tangente au point  $E$ . On en déduit que cette tangente est perpendiculaire à  $EM$ , où  $M$  est le point où le cercle touche la base.

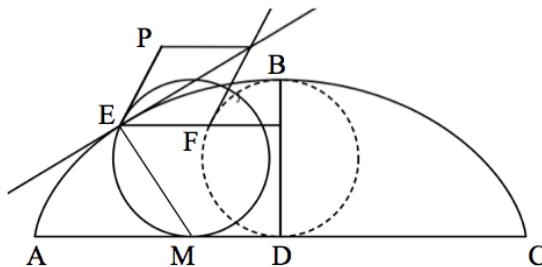


FIGURE 10 – La tangente à la cycloïde selon Roberval

Considérons le cercle de diamètre  $BD$  et le point  $F$ , intersection de ce cercle avec la parallèle à  $AC$  passant par  $E$ . Dans sa méthode des tangentes, que nous ne présenterons pas ici, Fermat exhibe la « propriété spécifique de la cycloïde », à savoir que  $EF$  est égal à l'arc de cercle  $FB$ . Elle sera employée plus tard par Christian Huygens pour résoudre le problème de l'isochronisme du pendule. Par définition de la cycloïde,

$$AM = \text{arc } EM \text{ et } AD = \text{arc } BD.$$

Donc

$$EF = MD = AD - AM = \text{arc } BD - \text{arc } EM = \text{arc } BD - \text{arc } FD = \text{arc } FB.$$

### Quelle est cette courbe ? Les courbes anaclastiques et les ovals cartésiennes

En 1627, Mersenne pose à Descartes un problème optique que Kepler n'a pas su résoudre, celui de déterminer une courbe, dite anaclastique, qui réalise un effet optique : il faut trouver la forme d'un dioptré (verre) tel que des rayons incidents parallèles s'y réfractent en rayons concourants en un point. Une solution se trouve dans une lettre de Descartes au lunetier Ferrier de novembre 1629 (Barbin, 2006, p. 114-115). Descartes est alors en possession de la loi de réfraction de la lumière. Il considère un triangle de verre  $GHF$  sur lequel arrive un rayon incident  $ID$  perpendiculaire à  $GH$  qui doit sortir en passant par un point  $A$ . Il introduit le point  $C$  tel que l'angle  $CDF$  égale l'angle  $FDA$  et il montre que  $DA - DC$  est une constante, donc le point  $D$  se trouve sur une hyperbole de foyers  $A$  et  $C$ .

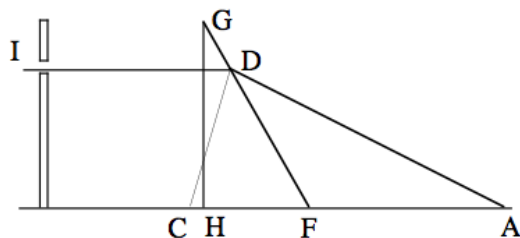


FIGURE 11 – La recherche de la courbe anaclastique par Descartes

L'ellipse est également une courbe anaclastique, comme le montre son ami Isaac Beeckman en 1630. Descartes démontre ces résultats dans *La dioptrique* de 1637 à l'aide de ce qu'il appelle les constructions des jardiniers de l'ellipse et de l'hyperbole (Descartes, 1637, p. 151 ; p. 161). Elles correspondent aux descriptions focales des deux courbes :

$$BI + BH = \text{constante} \quad \text{et} \quad BI - BH = \text{constante}$$



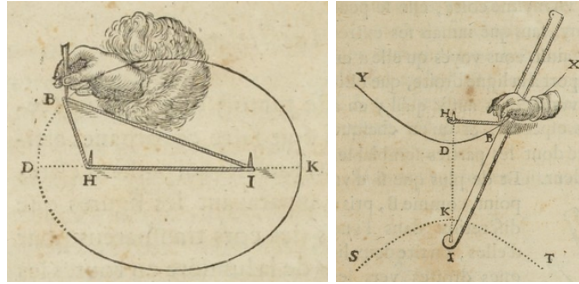


FIGURE 12 – Les constructions des jardiniers de l'ellipse et de l'hyperbole

Quelle courbe est une anaclastique ? Les deux géomètres ont pu répondre parce que les courbes étaient connues des Anciens et sont reconnues par l'existence de foyers, montrée par Apollonius. Il n'en n'est plus de même pour le problème des ovales, que Descartes formule dès 1629. Il faut trouver la forme d'un dioptré tels que des rayons incidents venant d'un même point se réfractent en rayons convergeant en un même point. Comme le montre *La dioptrique*, deux dioptrés anaclastiques accolés réalisent l'effet optique, par exemple un elliptique et un hyperbolique (Descartes, 1637, p. 168). Or Descartes obtient la solution grâce à une construction qui mélange celles de l'ellipse et de hyperbole (Barbin, 2006, p. 126-129). Ce sont des courbes à trois foyers  $F$ ,  $K$  et  $G$  telles que

$$2CK + CG - CF = \text{constante.}$$

Descartes résout le problème des ovales dans *La géométrie* de 1637 en utilisant leurs définitions focales et non pas leurs équations, qui montent au quatrième degré.

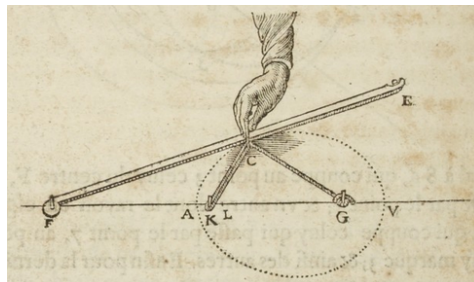


FIGURE 13 – La construction des ovales

### Les courbes géométriques de Descartes

Dans le livre I de *La géométrie* de 1637, Descartes arithmétise la géométrie afin d'énoncer une méthode pour résoudre « tous les problèmes de la géométrie ». En introduisant un segment unité, il montre que l'on peut multiplier deux segments entre eux pour obtenir encore un segment, alors que dans la géométrie grecque, la

multiplication de deux segments n'a pas de sens géométrique et que deux segments produisent un rectangle. De même, on peut diviser un segment par un autre ou prendre la racine carrée d'un segment et on obtient encore un segment (Barbin, 2006, p. 278-280).

L'arithmétisation de la géométrie permet de réduire un problème à la résolution d'équations où les inconnues sont de simples segments. La méthode procède en quatre étapes : il faut supposer le problème résolu, nommer les droites connues et inconnues par des lettres, parcourir le problème pour établir des équations et enfin résoudre les équations. Pour Descartes, un résultat obtenu par cette méthode peut être considéré comme démontré. Il écrit qu'il y a deux façons de démontrer, par l'analyse et par la synthèse (Descartes, 1949, p. 278-279) :

« L'analyse montre la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée, [...] en sorte que si le lecteur la veut suivre, [...] il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée, et ne la rendra pas moins sienne, que si lui même l'avait inventée.

La synthèse [...] se sert d'une longue suite de définitions, d'axiomes, de théorèmes et de problèmes, [...] elle arrache le consentement du lecteur. »

Dans le livre II de *La géométrie* sur « la nature des lignes courbes », Descartes donne une double conception des « courbes géométriques » : elles sont construites à l'aide de mouvements bien réglés les uns sur les autres et elles sont aussi exprimées par des équations polynomiales. Les autres courbes sont appelées « mécaniques », comme la spirale par exemple. Les équations présentent l'avantage de fournir une « carte d'identité » aux courbes et leur classement par les degrés des équations. Mais la construction par mouvements est parfois nécessaire, comme pour trouver les ovales. Descartes ne démontre pas que les deux conceptions sont équivalentes, se bornant à donner quelques exemples où la première conception implique la seconde, comme le « compas cartésien ».

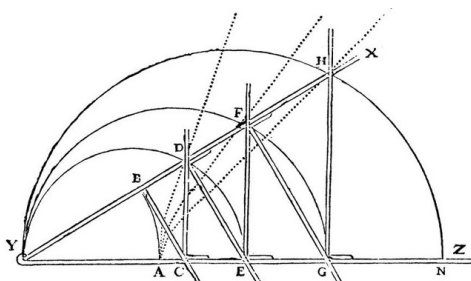


FIGURE 14 – Le compas cartésien

À sa suite, des géomètres chercheront à décrire des courbes par des mouvements bien réglés les uns sur les autres, comme Frans van Schooten pour l'hyperbole et l'ellipse (Schooten, 1646, p. 62 ; p. 65). La notion de système articulé permettra

à Alfred Kempe en 1875 de démontrer que la double conception des courbes de Descartes peut être bien fondée.

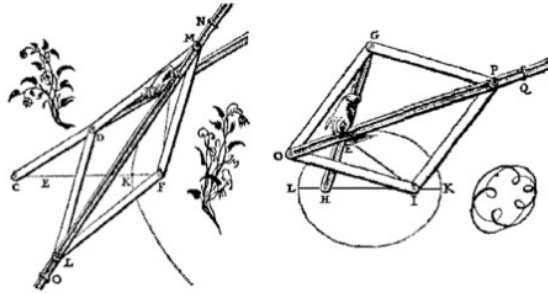


FIGURE 15 – Les instruments de van Schooten pour l’hyperbole et l’ellipse

Dans le livre II, Descartes applique sa méthode pour déterminer les cercles tangents à une courbe, et donc les normales (perpendiculaires aux tangentes) en un point. Pour lui la science doit apporter des fruits et il écrit que ceci est « le Problème le plus utile et le plus général non seulement que je sache, mais même que j’ai jamais désiré savoir en Géométrie » (Descartes, 1637, p. 370).

La méthode demande de nommer les lignes connues et inconnues. Descartes considère une courbe géométrique et une demi-droite  $GA$  à laquelle sont rapportés les points de la courbe, de sorte que la courbe soit associée à une équation, et un point  $C$  de cette courbe, où la normale est  $CP$ . Si  $CM$  est la perpendiculaire menée de  $C$  à  $AG$ , nommons  $MA = y$  et  $CM = x$ , alors  $x$  et  $y$  sont connues et reliées par l’équation de la courbe. Nommons  $PC = s$  et  $PA = v$ , alors  $s$  et  $v$  sont les inconnues à déterminer. Il faut ensuite traduire le problème en termes d’équations entre lignes connues et inconnues. D’après le théorème de Pythagore :

$$s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$$

qui est l’équation d’un cercle de centre  $P$  et de rayon  $s$ . Puisque  $x$  et  $y$  sont aussi reliées par l’équation de la courbe, nous pouvons déduire des deux équations, une nouvelle équation (S) où ne subsistent que  $x$  ou  $y$ . Il reste ensuite à exprimer le fait que le cercle est tangent à la courbe pour déterminer  $s$  ou  $v$ .

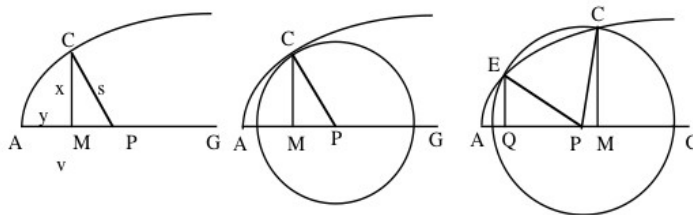


FIGURE 16 – La méthode des cercles tangents chez Descartes

La normale à un cercle est le rayon de ce cercle. Il suffit donc de trouver un cercle dont le centre appartient à  $GA$  et qui touche la courbe au seul point  $C$ , car  $CP$  sera alors le rayon de ce cercle. Descartes considère les deux cas possibles (Descartes, 1637, p. 373-374) :

« Il faut considérer que si ce point  $P$  est tel qu'on le désire, le cercle dont il sera le centre, et qui passera par le point  $C$ , y touchera la ligne courbe sans la couper : mais que si ce point  $P$ , est tant soit peu plus proche ou plus éloigné du point  $A$ , qu'il ne soit, ce cercle coupera la courbe, non seulement au point  $C$ , mais aussi nécessairement en quelque autre. »

Dans les deux cas, les points  $C$ , ou  $C$  et  $E$ , appartiennent à la fois au cercle et à la courbe, donc leurs coordonnées vérifient l'équation (S). Mais, dans le premier cas, l'équation (S) doit avoir deux solutions égales. Ainsi, le problème se traduit par une condition algébrique sur une équation. Dans le cas où l'équation (S) est du second degré, Descartes l'identifie à une équation :

$$y^2 - 2ey + e^2 = 0$$

Il donne des applications de sa méthode, en particulier pour une ellipse.

Descartes a pu être embarrassé en 1638 quand il apprend par Mersenne que Roberval a trouvé la tangente à la cycloïde (sans donner sa méthode). En effet, cette courbe n'est pas une courbe géométrique, puisqu'elle est décrite par deux mouvements séparés et elle n'a pas d'équation polynomiale. Il obtient la tangente par une « démonstration fort courte et fort simple » : « si on fait rouler un polygone rectiligne, sur une ligne droite, la courbe décrite par l'un de ses points sera composée de plusieurs parties de cercles » (Descartes, 1996, p. 308). Dans ce cas, la normale en un point  $B$  de la courbe est  $BG$  où  $G$  est le point de contact du polygone avec la base puisque la normale en un point d'un cercle est le rayon passant ce point. Il considère ensuite : « la roulette circulaire comme un polygone qui a une infinité de côtés, on voit clairement qu'elle doit avoir la même propriété ». Donc la normale au point  $B$  de la cycloïde est  $BO$ , où  $O$  est le point de contact du cercle avec la base. Ainsi, si on mène  $BN$  parallèle à la base  $AD$  et si on trace  $ND$ , alors la parallèle  $BO$  à  $ND$  est la normale à la cycloïde au point  $B$ . Cette « démonstration » s'appuie sur une géométrie simple, mais elle demande de considérer un cercle comme un polygone ayant une infinité de côtés. Ceci dépasse la géométrie d'Euclide mais sera au départ du calcul de Gottfried Leibniz.

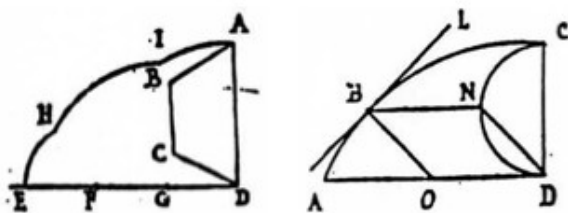


FIGURE 17 – La tangente à la cycloïde par Descartes

## Quelle est cette courbe ? La théorie des développées et des développantes de Huygens

Dans les années 1650, Christian Huygens s'intéresse au problème de déterminer la longitude d'un bateau en mer. Deux méthodes sont alors utilisées, en observant des phénomènes célestes ou en comparant l'heure sur le bateau à l'heure du port d'où est parti le bateau. Cette dernière méthode est difficile à mettre en œuvre, faute de posséder des horloges qui conservent correctement l'heure. En 1583, Galilée a proposé de réguler des horloges en utilisant un pendule car il pense que le pendule est isochrone, c'est-à-dire que le temps de descente est le même quel que soit l'endroit du lâcher. En 1636, Mersenne a contredit Galilée et, en 1656, Huygens cherche à construire un pendule isochrone.

Sa correspondance nous apprend comment Huygens a obtenu son pendule. Son approche est à la fois technique, quand en 1656, il a l'idée de faire osciller le pendule entre des « joues » de métal pour obtenir l'isochronisme, et théorique, quand en 1659, il obtient que les joues doivent avoir exactement la forme de deux demi-cycloïdes. Mais comment a-t-il déterminé cette forme ? Sa découverte est concomitante au concours de Blaise Pascal sur les centres de gravité d'aires et de volumes liés à la cycloïde. À cette occasion, en août 1658, l'Anglais Christopher Wren rectifie la cycloïde : il énonce que la longueur d'une demi-cycloïde vaut deux diamètres du cercle générateur. En février 1659, Pascal envoie la démonstration du résultat de Wren à Huygens, qui la lui a demandée (Barbin, 1987).

Huygens commente sa découverte dans une lettre à Estienne de 1668 (Huygens, 1895, p. 292) :

« J'ai premièrement découvert et démontré cette propriété, que si dans un creux ou un canal qui ait cette forme de roulette [...] l'on laisse rouler une petite boule depuis le point  $G$  pris en quelque part que l'on voudra, elle arrivera toujours en même temps au point  $D$ , le plus bas et l'ayant passé, et retournant, continuera à faire des allées et venues toutes isochrones. [...]

L'autre propriété que j'ai trouvée est que, joignant deux platines  $HKA$ ,  $HLB$  qui auraient chacune la figure des demi cycloïdes  $AD$  et  $BD$ , en sorte que toute la hauteur  $HD$  devenue double de la hauteur de la cycloïde  $DM$ , la boule attachée au fil  $HD$ , en se pliant contre les platines  $HKA$ ,  $HLB$ , parcourra avec son centre de gravité la roulette  $ADB$ . [...]

D'où il est aisé de voir, que les vibrations d'un tel pendule doivent être isochrones, aussi bien que les rouleaux de la boule  $GG$  desquels cela est démontré. »

Selon la première propriété, la descente d'un mobile sur une pente cycloïdale est isochrone : le temps de descente jusqu'en bas est le même quelque soit l'endroit du lâcher. Selon la seconde propriété, un pendule oscillant entre deux lames de forme cycloïdale parcourt une cycloïde, il est donc isochrone d'après la première propriété.

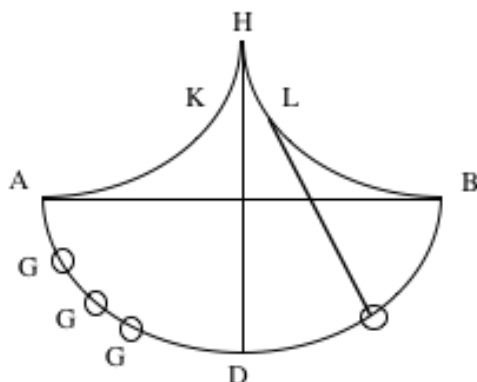
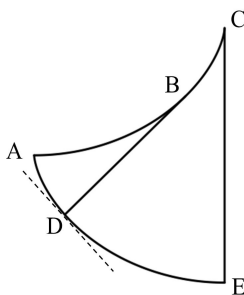


FIGURE 18 – Le pendule et ses joues dans la lettre à Estienne

Dans son *Horologium oscillatorium* de 1673, Huygens ne montre pas la seconde propriété dans sa singularité. Au contraire, la partie III de l'ouvrage est consacrée à une théorie des courbes, celle des développées et des développantes, qui permet d'engendrer des courbes à partir d'autres courbes. Étant donnée une courbe  $AC$  quelconque, si pour tout point  $B$  de  $AC$ ,  $BD$  est une tangente de longueur égale à la portion de courbe  $AB$ , alors  $D$  parcourt une courbe dite la développante  $AE$  de  $AC$ , elle-même dite la développée de  $AE$  (Huygens, 1934, p. 188). La proposition I énonce que toute tangente  $DB$  à la développée est une normale à la développante  $AE$ .

FIGURE 19 – La développée  $AC$  et la développante  $AE$ 

Dans la proposition V, Huygens démontre que la développante de la demi-cycloïde  $AC$  est une demi-cycloïde égale  $AF$  (Huygens, 1934, p. 198). Soit  $BK$  la tangente au point  $B$ . D'après la propriété de la tangente, si  $HB$  est parallèle à  $AK$  alors  $BK$  est parallèle à  $AH$ . Selon la propriété spécifique de la cycloïde,  $HB$  est égal à l'arc  $AH$ . Considérons un cercle égal au cercle générateur passant par  $K$ , et

prolongeons  $BK$  jusqu'en  $E$ . Les angles  $KAH$  et  $AKE$  sont égaux donc l'arc  $AH$  est égal à l'arc  $EK$ . Par conséquent,  $AK$  est égal à l'arc  $EK$  et donc  $E$  appartient à la cycloïde engendrée par le cercle passant par  $K$  (propriété spécifique) et  $EK$  est normale à cette cycloïde (propriété de la tangente), qui est donc la développante de la première cycloïde.

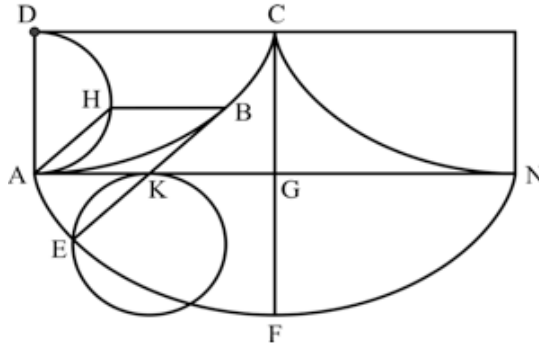


FIGURE 20 – La développante d'une demi-cycloïde d'après Huygens

Lors d'un séjour à Paris dans les années 1670, Leibniz est initié aux mathématiques de l'époque par Huygens. Il invente son calcul infinitésimal, présenté en 1684, en s'attaquant à des « problèmes inverses des tangentes », c'est-à-dire des problèmes où il faut déterminer une courbe connaissant une propriété de ses tangentes. Quelques années plus tard, il généralise la théorie inventée par son maître en introduisant le problème géométrique des enveloppes d'une courbe, qui consiste à déterminer une courbe tangente à une famille de courbes ou de droites. Il énonce ce problème en 1694 et le résout grâce à son calcul et en introduisant la notion de fonction.

## Conclusion

Pendant les cinquante années qui séparent les méthodes d'invention – de Roberval, Descartes ou Fermat – du calcul infinitésimal, le point de départ des nouvelles investigations mathématiques est la résolution de problèmes de détermination de courbes. Les courbes sont alors caractérisées par des mouvements ou des propriétés spécifiques, et leur traitement est cinématique, algébrique ou géométrique. Cette façon d'envisager les courbes reste celle des inventeurs du nouveau calcul, Newton comme Leibniz, qui sont loin de les introduire à partir d'une formule analytique. Le calcul infinitésimal finit par être admis de tous en vertu de sa force pour résoudre de nouveaux problèmes.

Ce calcul devient indépendant de l'étude des courbes avec le traité *Introduction à l'analyse infinitésimale* de 1748 de Leonhard Euler, qui renverse l'ordre historique en plaçant au début de son traité une notion de fonction. L'analyse est enseignée dans les lycées à partir de la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. À cette époque, les

courbes tiennent une bonne place dans les programmes, avec les méthodes synthétiques du XIX<sup>e</sup> siècle qui leur sont attachées. Une fois les courbes disparues dans les années 1960, en particulier les coniques, quelle signification accorder à une analyse coupée des problèmes scientifiques qu'elle peut résoudre ?

## Références bibliographiques

- APOLLONIUS, 1959, *Les coniques*, trad. P. Ver Eecke, Bruges, Paris, Blanchard.
- ARCHIMÈDE, 1960, *Œuvres complètes*, trad.. P. Ver Eecke, t. I., Paris, Vaillant-Carmanne.
- ARCHIMÈDE, 1960, *Œuvres complètes*, trad. P. Ver Eecke, t. II, Liège, Vaillant-Carmanne.
- BARBIN Évelyne, 1987, « Le secret des longitudes et le pendule cycloïdal de Huygens », *Les mathématiques dans la culture d'une époque*, IREM, Université de Strasbourg, p. 143-163.
- BARBIN Évelyne, 2006, *La révolution mathématique du XVII<sup>e</sup> siècle*, Paris, Ellipses.
- CLÉRO Jean-Pierre, LE REST (BARBIN) Évelyne, 1980, « La naissance du calcul infinitésimal au XVII<sup>e</sup> siècle », *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n<sup>o</sup> 16.
- DESCARTES René, 1637, *Le discours de la méthode*, Leyde, Jan Maire.
- DESCARTES René, 1949, *Œuvres et lettres*, éd. A. Bridoux, Paris, La Pléiade.
- DESCARTES René, 1996, *Œuvres*, t. II, éd. C. Adam et P. Tannery, Paris, Vrin.
- HUYGENS Christian, 1895, *Œuvres complètes*, t. VI, La Haye, Martinus Nijhoff.
- HUYGENS Christian, 1934, *Œuvres complètes*, t. XVIII, La Haye, Martinus Nijhoff.
- MERSENNE Marin, 1960, *Correspondance*, t. VI, éd. Cornélis de Waard, Paris, Éditions du CNRS.
- PAPPUS, 1982, *La collection mathématique*, t. I, trad. P. Ver Eecke, Paris, Blanchard.
- ROBERVAL Gilles, 1693, « Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes aux lignes courbes », *Recueil de l'Académie des sciences*, t. VI., Paris, Imprimerie royale, p. 1-89.
- SCHOOTEN van Frans, 1646, *Organica conicarum sectionum in plano descriptione, tractatus*, Leyde, Batavor.



Deuxième partie

Géométrie pratique



## Mesurer la terre et l'univers : de l'Histoire à la pratique en classe

Anne-Marie AEBISCHER

### Introduction

Mesurer la terre et l'univers est la destinée première de la géométrie. Cette discipline s'est fortement développée dans l'Antiquité mais il existe peu de témoignages sur les instruments utilisés alors. En Europe, les connaissances mathématiques de l'Antiquité et du monde arabo-musulman transmises à partir du x<sup>e</sup> siècle par des traductions de l'arabe ou du grec vont déclencher un nouvel essor scientifique et contribuer au développement d'instruments de mesures pour assister l'évolution de l'astronomie, de la navigation ou de l'arpentage. Parmi ceux-ci, le bâton de Gerbert, l'arbalestrille ou bâton de Jacob, la croix du bûcheron, le carré géométrique et l'équerre articulée.

Dans cet article, je vais présenter le contexte historique lié à l'apparition de ces instruments, ainsi que quelques textes attestant de leur utilisation et des modes de pensées de leur époque. Ces instruments sont d'une réalisation simple, leur fabrication est détaillée à la fin du texte.

Suivre le parcours d'anciens mathématiciens, réaliser des instruments de mesure, les utiliser en situation de façon raisonnée sont des activités porteuses de sens pour les élèves. La manipulation de ces instruments correspond aux entrées – Proportionnalité/ Théorème de Thalès/ Agrandissement réduction – des programmes de collège. Au fil du texte, des encadrés signalent des pistes d'exploitation en classe.

Cet exposé est issu du travail réalisé par par A.-M. Aebischer (IREM de Franche-Comté), J. Lorblanche (IREM de Bordeaux), G. Martin (IRES de Toulouse) au sein de la CII Popularisation des mathématiques (Commission Inter IREM) dans le thème *Mathématiques en plein air*.

## Le bâton de Gerbert

Voici une présentation rapide de cet instrument, très intéressant pour la classe, mais dont l'aspect historique n'est pas documenté ici.

Le bâton de Gerbert sert à mesurer une hauteur. Deux bâtons, un grand et un petit, assemblés à angle droit, déterminent en haut un triangle rectangle isocèle ( $AC = BC$ ). L'instrument étant maintenu vertical (fil à plomb) sur un terrain plat, l'observateur le positionne à une distance telle que la ligne de visée ( $AB$ ) passe par le sommet de l'objet à mesurer.

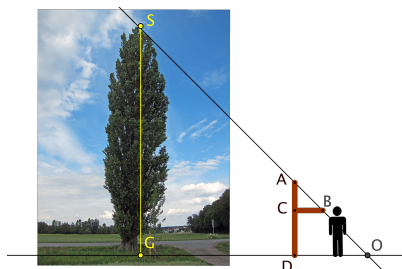


FIGURE 1 – Utilisation du bâton de Gerbert

La distance entre le pied de l'instrument et la base de l'objet à mesurer à laquelle on ajoute la hauteur totale de l'instrument est la hauteur cherchée.

Avec les notations de la figure 1, le triangle  $ABC$  est rectangle isocèle en  $C$ . Par égalités d'angles, les triangles  $OSG$  et  $OAD$  sont également rectangles isocèles, en  $G$  et en  $D$  respectivement :

$$D'où  $SG = GO = GD + DO = GD + DA$ .$$

**Outils : relations angulaires, propriétés des triangles rectangles isocèles**

**Activité :** Justifier l'utilisation du bâton de Gerbert - Réaliser des mesures de bâtiments autour du collège.

Le bâton de Gerbert tire son nom de Gerbert d'Aurillac (945-1003) qui deviendra pape en 999 sous le nom de Sylvestre II. Gerbert, ayant séjourné dans les abbayes catalanes de Vic et Ripoll a eu un accès précoce à des manuscrits d'astronomie, d'arithmétique ou de géométrie traduits de l'arabe en latin.

## L'arbalestrille et l'astronomie

L'arbalestrille, appelée aussi ray astronomique ou bâton de Jacob, est au départ un instrument créé par et pour les astronomes qui sert à mesurer des angles (hauteur d'un astre sur l'horizon, écart angulaire entre deux astres).

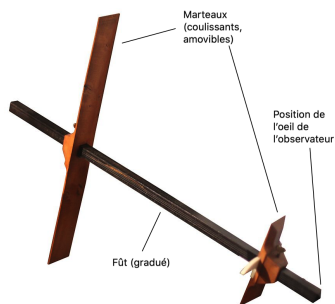


FIGURE 2 – Arbalestrille - Illustration de *Introductio Geographica* de Pierre Apian, 1533

L'arbalestrille est composée d'un long bâton gradué, le fût (ou la flèche), le long duquel coulisent des bâtons transversaux de tailles diverses appelés marteaux. On choisit un marteau de taille appropriée et plaçant son œil à une extrémité du grand bâton, on fait coulisser le marteau choisi jusqu'à ce que la ligne visuelle passant par les extrémités du marteau intercepte les extrémités de l'étendue visée.

Cet instrument sera beaucoup utilisé pour les mesures astronomiques<sup>1</sup> et pour la navigation. Nous allons étudier cet usage tout d'abord à travers l'œuvre de Levi Ben Gerson (détermination du centre de vision, graduation du fût, détermination de l'angle de visée), puis nous nous pencherons sur le problème de la graduation du fût dans l'œuvre de Gemma Frison.

## Levi Ben Gerson, l'inventeur

Levi Ben Gerson, appelé parfois Gersonide est né à Bagnols-sur-Cèze en 1288 et mort à Perpignan vers 1344. Mathématicien, astronome, physicien et philosophe juif, il fut l'esprit le plus universel du Moyen Âge juif.

Il a vécu à Orange dans une communauté juive. Les Juifs de Provence devaient faire face à des difficultés « si intenses qu'elles rendaient la méditation impossible »<sup>2</sup>. Né dans une famille de lettrés, il a été probablement autodidacte pour son éducation scientifique. Il parlait provençal mais n'a écrit qu'en hébreu. Ses textes et sa manière de citer des textes anciens laissent penser qu'il ne lisait pas l'arabe mais utilisait des traductions hébraïques d'ouvrages arabes. Certains de ses ouvrages ont été traduits en latin mais peu d'auteurs le citeront.<sup>3</sup>

Son ouvrage *Les guerres du Seigneur* comprend un *Traité d'astronomie* en 136 chapitres (constituant la première partie du livre V), dans lequel il critique

1. Son utilisation est indiquée dans (Apian, Frison, 1534) – pour d'autres exemples de sources on pourra consulter [http://clea-astro.eu/archives/cahiers-clairaut/CLEA\\_CahiersClairaut\\_144\\_06.pdf](http://clea-astro.eu/archives/cahiers-clairaut/CLEA_CahiersClairaut_144_06.pdf). Tycho Brahe, astronome danois du XVI<sup>e</sup> siècle, l'utilisera et construira des instruments pour améliorer la précision des mesures.

2. Citation de Levi Ben Gerson lui-même dans la préface des *Guerres du Seigneur* (1329).

3. Pour plus de détail sur sa biographie, on pourra consulter le site MacTutor History of Mathematics à la page <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Levi/>

les principes fondamentaux du système de Ptolémée. Il y présente un instrument dont il se déclare l'inventeur (connu ensuite sous le nom de bâton de Jacob ou d'arbalestrille, toutefois il ne le nomme pas) ainsi que des tables trigonométriques.

Dans son ouvrage *The astronomy of Levi Ben Gerson (1288-1344)*, Bernard Goldstein propose une traduction en anglais des 20 premiers chapitres du traité d'astronomie de Levi Ben Gerson, cette traduction est suivie de commentaires éclairant le texte. Les extraits qui suivent sont une transposition personnelle en français de la traduction de Bernard Goldstein.

## L'arbalestrille dans l'œuvre de Levi Ben Gerson

### Graduation et centre de vision

Dans le chapitre 6 de son traité d'astronomie, Gerson présente très clairement sa méthode de graduation du fût. Il commence par prouver que, lorsqu'on effectue une visée, le centre de vision n'est pas l'extrémité du fût à laquelle on applique l'œil, mais se trouve à l'intérieur de l'œil. Cela induit une correction<sup>4</sup>, la graduation du fût ne commencera pas à 0.

Dans l'extrait de texte qui suit, les annotations entre crochets se rapportent à la figure 3. L'arbalestrille y est matérialisée par son fût  $[AB]$ , et deux marteaux utilisés simultanément  $DG$  et  $ZE$ . Les marteaux (appelés ici tablettes) sont placés de façon à ce que lorsqu'on place un œil en  $A$ , la ligne visuelle effleure  $Z$  et  $D$  d'une part,  $G$  et  $E$  d'autre part. Les droites  $(DZ)$  et  $(GE)$  coupent la droite  $(AB)$  au même point  $L$  (symétrie), point qui représente le « centre de vision ».

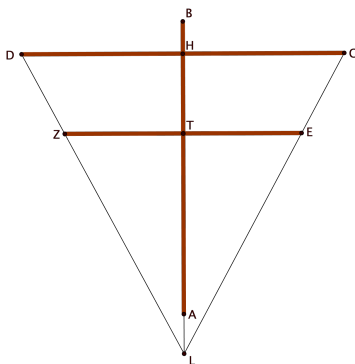


FIGURE 3 – Centre de vision

« 20- Nous prenons un bâton avec des surfaces planes et à une extrémité nous plaçons l'œil en son centre.

21- Nous avons également des tablettes [marteaux  $DG$  et  $ZE$ ] dont la surface est plane trouées en leur milieu et nous passons le bâton  $[AB]$

4. La correction introduite par Gerson sera retrouvée indépendamment plus tard – par Horrocks en 1637, et déjà signalée par Digges en 1573 – et appelée correction d'excentricité : voir dans (Goldstein, 1985)

à travers elles de façon à ce que leur hauteur par rapport au bâton soit légèrement plus basse que la hauteur de l'œil sur lui.

22- Nous construisons deux tablettes de façon à ce que l'une soit deux fois la taille de l'autre ou dans n'importe quel autre rapport.

23- Nous plaçons la petite tablette plus près de l'œil et nous la déplaçons jusqu'à ce qu'elle cache exactement la plus grande tablette.

24- Si nous procédons soigneusement, nous pouvons déterminer facilement le sommet de l'angle visuel.

25- Les deux tablettes sont parallèles et à angle droit avec le bâton, et des lignes parallèles qui coupent les côtés d'un triangle les divisent proportionnellement.

26- Puisque la longueur des tablettes est connue [ $DG$  et  $ZE$ ] ainsi que la distance entre elles [ $HT$ ] l'emplacement du point de vision [ $L$ ] est connu.

27- Ceci puisque le rapport entre la ligne qui le joint à la petite tablette et la ligne qui le joint à la grande tablette est égal au rapport entre la petite tablette et la grande tablette.  $\left[ \frac{TL}{HL} = \frac{ZE}{DG} \right]$

28- Lorsque nous alternons, séparons et inversons les rapports, nous trouvons que le rapport entre la petite tablette et la distance qui la sépare du centre de vision est égal au rapport de la différence entre les deux tablettes et leur différences de distance au centre de vision.  $\left[ \frac{ZE}{TL} = \frac{DG}{HL} = \frac{DG - ZE}{HL - TL} = \frac{DG - ZE}{HT} \right]$

29- Puisque le deuxième rapport est connu par l'observation, le rapport entre la petite tablette et sa distance au centre de vision est déterminé.

30- Mais la taille de la petite tablette est connue, sa distance au centre de vision [ $TL$ ] est donc déterminée. »

#### Outils : Théorème de Thalès - Calcul algébrique - Calcul fractionnaire

**Activité :** En réalisant l'expérience de Gerson pour trouver le centre de visée, on trouve avec les notations de la figure 3 :  $DG = 33,5$  cm,  $ZE = 15,5$  cm,  $HT = 37$  cm et  $AT = 29,5$  cm. Déterminer la position du centre de vision. Pourquoi ne pas faire l'expérience vous-même ?

Gerson décale donc de cette estimation le point de départ de la graduation du fût. Il gradue le fût en parties (P) contenant chacune 8 unités (1 partie fait environ 20 cm), les unités sont subdivisées en 60 minutes<sup>5</sup>. La graduation débute à  $\frac{1}{20}^P$  c'est-à-dire à  $0^P 0^u 24'$ . Il utilise un guide-âne (lignes parallèles équidistantes) pour lire plus précisément la position du marteau sur le fût :

5. Le système de numération sexagésimal était encore couramment employé.

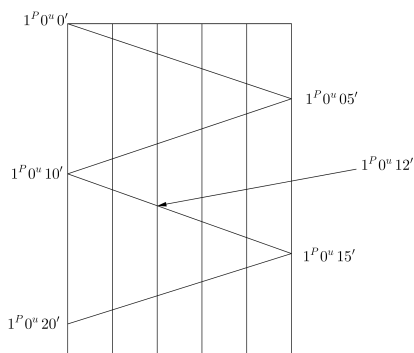


FIGURE 4 – Graduation et guide-âne

### Outil : Calcul fractionnaire

**Activité :** Gerson évalue la position du centre de visée à environ  $\frac{1}{20}$  de partie ( $P$ ). La partie est une unité mesurant environ 20 cm. Chaque partie est divisée en 8 unités ( $u$ ) et chaque unité est divisée en 60 minutes ( $'$ ). Il prétend que  $\frac{1}{20}P = 24'$ . Justifier cette affirmation.

Entraînement à la lecture sur le guide-âne.

### Détermination d'un angle

Au Chapitre 7 du traité d'astronomie, Gerson explique comment déterminer la distance angulaire entre deux étoiles à l'aide d'un marteau de longueur  $10^u$ . Une fois la visée réalisée, il relève que le marteau est à la position  $40^u$  de la graduation. C'est une table de cordes<sup>6</sup> (reliant pour un cercle de rayon donné la mesure d'un angle et la longueur de la corde correspondante) qui va lui permettre de déterminer l'angle.

La table de corde<sup>7</sup> qu'utilise Gerson est établie pour un cercle de rayon  $60^u$ . Il détermine donc le « rayon corrigé »  $AC$  (par le théorème de Pythagore) puis détermine, par proportionnalité, la longueur de la corde correspondant à  $CD$  dans un cercle de rayon 60. Sa table de cordes lui fournit alors par lecture inverse un encadrement de l'angle cherché.

Ici  $AI = 40$  et  $CD = 10$ , donc  $CI = 5$ . Il détermine  $AC = \sqrt{5^2 + 40^2} \simeq 40^u 19'$  (notation sexagésimale). Il en déduit que la corde à chercher dans la table est  $\frac{10^u \times 60}{40^u 19'}$ , soit environ  $14^u 53' 3''$  (notation sexagésimale). Il trouve un angle compris entre  $14^\circ$  et  $15^\circ$ .

6. Dans cet ouvrage Gerson propose aussi une table des sinus, mais il revient à la table de cordes pour cette résolution.

7. On peut consulter une telle table dans <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k64767c>, *La Composition Mathématique de Claude Ptolémée* traduite par M. Halma, p. 38.



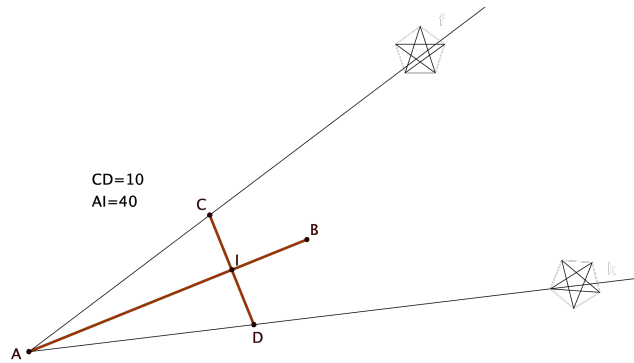


FIGURE 5 – Exemple de mesure d'un angle

### Outils : Fonctions trigonométriques (sinus) - Tableur

#### Activité :

1. Réaliser une table de cordes pour un cercle de rayon 60 en déterminant les cordes correspondant aux angles de  $10^\circ$  à  $20^\circ$  (valeurs entières).
2. Avec les notations de la figure 5,  $AI = 40$  et  $CD = 10$ . Déterminer l'angle à la façon de Levi Ben Gerson. (écriture décimale)
3. Pour les valeurs précédentes, proposez une autre méthode pour déterminer l'angle.

Le travail de Levi Ben Gerson sera peu diffusé, probablement isolé par sa particularité linguistique. Il sera néanmoins traduit en latin, mais par la suite peu cité. Toutefois l'arbalestrille ou bâton de Jacob deviendra un instrument extrêmement populaire du  $XV^e$  siècle jusqu'au  $XVIII^e$  siècle dans la navigation<sup>8</sup>.

## La graduation vue par Gemma Frison



FIGURE 6 – Gemma Frisius ou Frison, né Jemme Reinerszoon

8. Voir par exemple l'usage qu'en fait Jean-Baptiste Denoville dans (Hébert, 2008).

Gemma Frisius ou Frison (1508-1555) est un cartographe, mathématicien et médecin originaire de la Frise. Sa première œuvre est une révision du livre de cosmographie de Peter Apian. Il publie à Anvers en 1545 *De radio astronomico et geometrico* (*Le Ray astronomique et géométrique*).

Les extraits proposés dans la suite du texte sont tirés de l'ouvrage *Cosmographie ou Description du monde universel* par Pierre Apian et Gemma Frison, publié à Anvers en 1584 et disponible sur Gallica. Cet ouvrage réunit, dans une traduction en français, la *Cosmographie* de Pierre Apian, des textes de Gemma Frison dont *Le Ray astronomique et géométrique*, ainsi que quelques textes sur le sujet de différents auteurs, dont Sébastien Munster.

L'arbalestrille devient ici le Ray. Frison propose deux méthodes pour graduer directement le fût selon l'angle de visée.

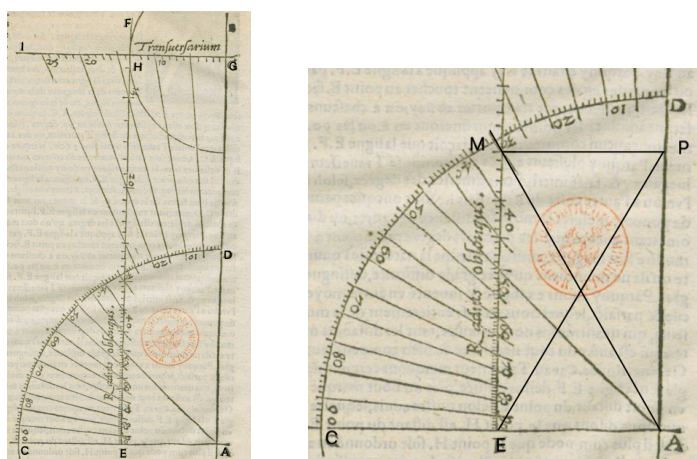


FIGURE 7 – Méthode de graduation du fût (Apian, Frison, 1584, p. 258) –  
Source : BnF

Tout d'abord, à l'aide d'un quart de cercle gradué de degré en degré. Le quart de cercle utilisé a un rayon  $AC$  égal à la longueur  $GI$  du marteau (ou traverseur).  $AGIC$  est un rectangle. On trace les droites (cf. figure 7) passant par chacune des graduations du quart de cercle et on reporte la mesure en degré correspondante à l'intersection entre la droite et le fût. Sur l'exemple de la figure 7, on peut voir par exemple le report de la graduation  $30^\circ$  en  $M$ . L'angle reporté n'est pas ici celui qui intercepte le marteau tout entier, mais sa moitié  $MP$ , d'après l'égalité  $\widehat{PAM} = \widehat{PEM}$  dans le rectangle  $MPAE$ .

Dans le paragraphe suivant, Frison explique comment on peut graduer directement le fût avec la valeur de l'angle grâce à une table des sinus<sup>9</sup>, dans le cas

9. Les mathématiciens indiens ont été les premiers à utiliser le sinus, les mathématiciens arabomusulmans ont introduit progressivement d'autres lignes trigonométriques, mais cette connaissance ne sera vraiment diffusée en Europe qu'à partir de Regiomontanus qui publie *De triangulis omnimodis libri quinque* (*Sur les triangles*) en 1464. Voir (Hébert, Vasseur, 2004)

où le demi-marteau représente 1000 unités. Le sinus était la ligne trigonométrique la plus utilisée, les tables étant alors rapportées à un rayon de cercle particulier, ici 100 000 (cercle de centre  $A$ , voir figure 8). Pour reporter la graduation de l'angle  $\alpha = \widehat{CAB}$  donné (de  $1^\circ$  à  $90^\circ$ ), on relève  $\sin \alpha$ ,  $\sin(90^\circ - \alpha)$  (c-à-d.  $\cos \alpha$ ) et par la propriété des triangles semblables on détermine la position du marteau  $F$  correspondant à  $\widehat{FDE} = \alpha$ . Il propose un calcul correspondant à l'expression

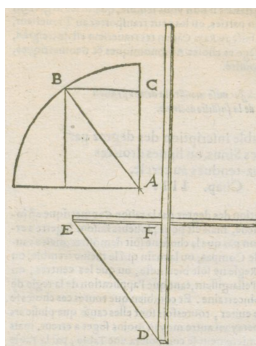
$$DF = \frac{\sin(90^\circ - \alpha) \cdot 1000}{\sin \alpha}.$$


FIGURE 8 – Graduation avec une table des sinus (Apian, Frison, 1584, p. 260) – Source : BnF

#### Outils : Tableur - Exemple de fonction non affine

**Activité :** Proposer une méthode pour graduer un fût d'1 mètre avec la valeur de l'angle de visée lorsqu'on utilise un marteau de 34 cm. (Cette méthode peut s'inspirer d'une des deux méthodes précédentes ou faire intervenir la fonction tangente).

## Le bâton de Jacob et l'arpentage

Dans le domaine de l'arpentage, l'arbalestrille prend plutôt le nom de bâton de Jacob. Sébastian Munster<sup>10</sup> rapporte que l'origine de ce nom pourrait être « à cause des paroles du patriarche Jacob qui dict au 32 de Genèse : Je suis passé avec un baston ce Jordain [Jourdain] ».

La mesure de longueur ou de hauteur à l'aide de l'arbalestrille est évoquée dans de nombreux ouvrages du XVI<sup>e</sup> siècle comme : *Margerita philosophica* de Gregor Reisch (1495), *Prothomathesis* d'Oronce Fine (1532), *Der furnembsten, notwendigsten der gantzen Architectur* de Walter Ryff (1547), *Arithmeticae Libri duo Geometriae septem et viginti* de Pierre La Ramée (1559). Nous allons étudier l'usage du bâton de Jacob pour l'arpentage à travers les textes de Gemma Frison

10. Sebastian Munster (1448-1552) - Extrait du *premier livre des principes de la géométrie*, ajouté à l'édition de 1584 de la *Cosmographie* d'Apian (Apian, Frison, 1584).

(*Le Ray astronomique et géométrique* déjà cité plus haut) et à travers l'ouvrage d'Alain Manesson Mallet<sup>11</sup> *La Géométrie Pratique* (1702), dont les textes sont d'un abord plus facile.

## Mesure d'une grandeur accessible

Le fût ( $MN$  sur la figure 9) est en général gradué en prenant la longueur d'un marteau ( $DC$  sur la figure 9) comme unité. Lorsqu'on effectue une visée, on se retrouve dans une situation de proportionnalité. Le fait de placer le marteau (ici curseur) sur une graduation multiple de sa longueur induit un rapport simple (1, 2 ou 3, ...) entre les figures semblables. Sur la figure 9 :  $\frac{MG}{DC} = \frac{ML}{AB}$ .

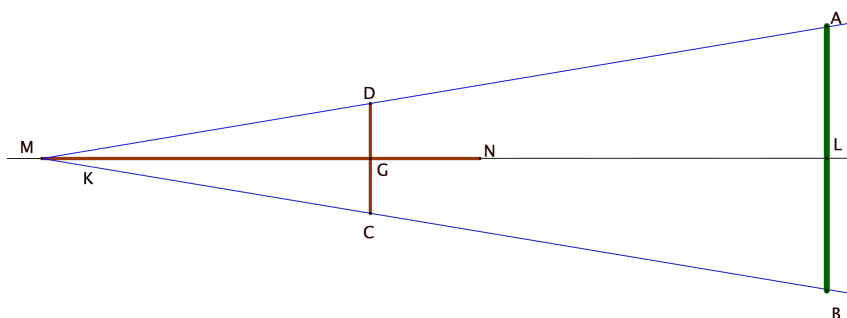


FIGURE 9 – Figures semblables

Ainsi, si on connaît la distance au segment visé on peut déterminer sa largeur, ou réciproquement, si on connaît sa largeur on peut déterminer la distance à laquelle on s'en trouve.

Voici une telle mesure évoquée par Frison (le marteau devient ici le Traverseur, les pinnules sont des repères placés aux extrémités du traverseur) :

« [...] estant le Ray tres diligemment estendu au niveau, mesurez la distance du lieu ou vous estes iusques au lieu du Traverseur au mesme Ray, iusques a l'interval des pinnules, la mesme tiendra la distance de ton pied de la hauteur veüe, [...] Multipliez doncques le nombre de la distance connue, par les parties qui tombent entre les pinnules, & divisez le produict par le nombre des parties au Ray dés l'œil iusques au Traverseur, & vous aurez le nombre & la mesure de la grandeur demandee. » (Apian, Frison, 1584, p. 271)

Il faut noter que lorsque le Traverseur est centré sur le Ray, on ne peut mesurer qu'en se plaçant sur la médiatrice de la distance à évaluer, ce qui est un handicap (en particulier pour les mesures de hauteurs). Nous verrons dans le dernier paragraphe, comment Frison propose de remédier à ce problème.

11. Allain Manesson Mallet, (1630-1706) est un ingénieur militaire, géographe et cartographe français.

### Largeur d'une rivière

Les deux situations qui suivent, tirées du traité *La Géométrie Pratique* de Manesson Mallet, sont plus complexes. Il s'agit de déterminer des mesures de grandeurs inaccessibles, cette détermination nécessitera deux mesures.

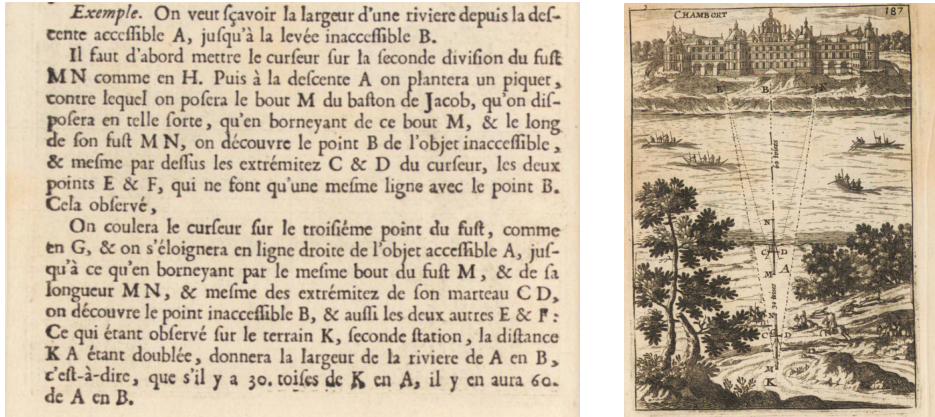


FIGURE 10 – Exemple 1 - Texte et représentation (Manesson-Mallet, 1702, p. 186-187) – Source : BnF

Le texte présenté dans la figure 10 explique qu'on réalise deux visées basées sur deux points de repère ( $E$  et  $F$ ) situés sur l'autre rive. Entre chacune de ces visées le marteau sera déplacé d'une graduation (de la deuxième à la troisième). La simple mesure du déplacement au sol ( $KA$ ) effectué entre les deux stations permet déterminer la largeur de la rivière ( $AB$ ), voir figure 11.

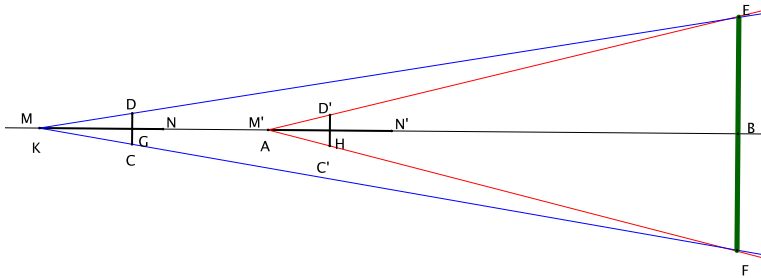


FIGURE 11 – Exemple 1 - Schéma

La solution (voir aussi figure 11) repose sur les propriétés des triangles semblables entre l'arbalétrille et la figure sur le terrain : lorsque le marteau est sur la deuxième graduation, la longueur délimitée sur le fût est le double de la taille du marteau. Ainsi en est-il du rapport entre les distances  $AB$  et  $EF$  :  $AB = 2EF$ . De même, lorsque le marteau est sur la troisième graduation, la longueur déli-

mitée sur l'arbalestrille est le triple de la longueur du marteau. On a donc par proportionnalité  $KB = 3EF$ .

$KA = KB - AB = 3EF - 2EF = EF$ , soit  $KA = \frac{1}{2}AB$ , on en déduit que  $AB = 2KA$ .

Le raisonnement effectué ici est qualifié de « raisonnement arithmétique ». Un tel raisonnement progresse vers le résultat cherché à partir des relations connues, sans perte de sens à aucune étape (à l'inverse d'un raisonnement algébrique). Ce mode de pensée plus ancien est aussi beaucoup plus simple à maîtriser par des élèves.

### Distance entre deux objets

Dans ce deuxième exemple (voir figure 12), on détermine une longueur  $AB$  située perpendiculairement au déplacement de l'arbalestrille.

*Exemple.* On demande combien il y a depuis le moulin A jusqu'à la tour B inaccessibles de l'un à l'autre.  
 Suivant la règle ci-dessus donnée, on coulera le marteau  $CD$  sur la seconde division du fust  $MN$  du baston de Jacob, comme en  $H$ . Puis étant vers le milieu de la distance des deux objets inaccessibles, on bornera par le bout du fust  $M$ , & par les deux extrémités du curseur  $CD$  (qu'on suppose parallèle à la ligne  $AB$ ) les deux objets  $A$  &  $B$ , c'est-à-dire, que dans le rayon de vue  $MC$ , il faut découvrir l'objet  $A$ , & dans le rayon  $MD$  l'objet  $B$ ; ce qu'on observera, étant, selon cet exemple, sur le terrain  $L$ , où l'on plantera un piquet pour première station.  
 Puis on fera couler le curseur  $CD$ , sur la troisième division du fust  $MN$  comme en  $G$ , & en s'éloignant du piquet ou station  $L$ , on bornera le piquet  $M$ , & les objets inaccessibles  $A$  &  $B$ , comme on a fait à la station  $L$ ; ce qu'on observera étant sur le terrain  $K$ , où l'on plantera (si l'on veut) un piquet pour seconde station. La distance qui se trouvera entre ces deux piquets, ou stations  $LK$ , sera égale à celle qu'il y a entre les objets inaccessibles  $AB$ , c'est-à-dire, que s'il y a 180. toises de  $L$  en  $K$ , il y en aura aussi 180. de  $A$  en  $B$ .



FIGURE 12 – Exemple 2 - Texte et représentation (Manesson-Mallet, 1702, p. 188 et 189) – Source : BnF

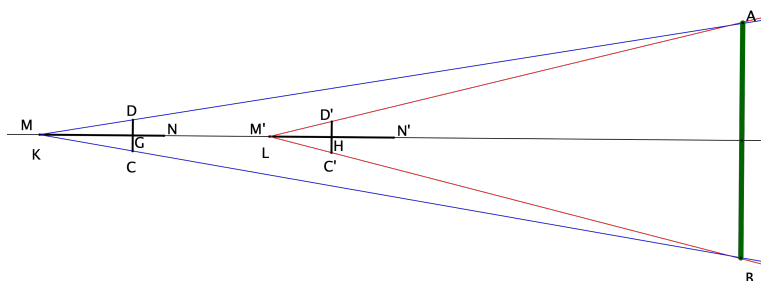


FIGURE 13 – Exemple 2 - Schéma



On évalue à nouveau les relations de proportionnalité qui découlent des différentes positions du marteau (notations de la figure 13 :  $M'I = 2AB$ ,  $MG = 3AB$ , il en découle que  $MM' = AB$ .

Cette modélisation du problème est imparfaite car, sur la représentation, les figures géométriques correspondant aux deux positions ne sont pas exactement coplanaires.

### Outils : Raisonnements de proportionnalité - Méthode arithmétique

**Activité :** Reprendre les situations précédentes pour déterminer des grandeurs inaccessibles. On peut faire varier le déplacement du marteau sur les graduations (de la première à la troisième, de la graduation 1,5 à la graduation 2, etc). Faire ses propres mesures.

### Évolution de l'arbalétrille

Lorsqu'on désire mesurer une hauteur, la condition de se placer sur la médiatrice impose de mesurer des objets qui sont d'une hauteur double de celle à laquelle est tenue l'arbalétrille. Revenons à l'ouvrage *De Radio astronomico et geometrico* de Gemma Frison à travers la traduction en français de 1584. Il y propose une ingénieuse modification de l'arbalétrille afin que le marteau puisse coulisser perpendiculairement au fût, car « [il faut] accomoder le Traverseur [marteau] selon les grandeurs apparentes des choses » (Apian, Frison, 1584, p. 263-265).

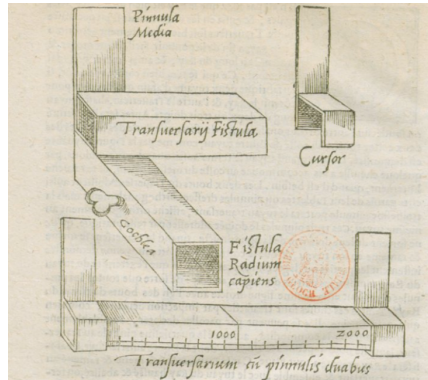


FIGURE 14 – Modification de l'arbalétrille - Gemma Frison ( Apian, Frison, 1584, p. 264) – Source : BnF

Il propose alors plusieurs exemples de mesure :

— Mesure en une station (Apian, Frison, 1584, p. 271) :

« Soit la distance des pinnules de 24 parties et la distance du traverseur à l'œil 240 particules. Je dis que la distance du pied jusques à la même chose proposée est dix fois autant que la grandeur veue. Parquoy si la distance a elle de 3400 pieds, la grandeur de la chose demandée sera 340 pieds, comme les regles des proportions démontrent. »

- Mesure en deux stations (Apian, Frison, 1584, p. 264-265) :  
 « [...] Remuez le Traverseur autant d'espace de son premier lieu vers la fin du Ray comme est la quantité du même Traverseur en adjoutant aux parties de la première assiette autant de parties que la distance des pinnules contient au Traverseur ou il sera arrêté. [ ] Par cette voye, sera l'espace entre deux stations égale à la chose qui est à mesurer, laquelle étant à mesurer par pieds, ou par toute autre sorte de mesure[...] ».

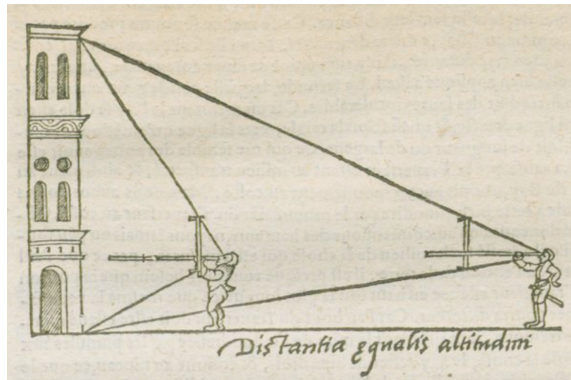


FIGURE 15 – Mesure de la hauteur en deux stations - Gemma Frison (Apian, Frison, 1584, p. 265) – Source : BnF

Dans cet extrait, Frison propose la mesure d'une hauteur par la distance entre les deux stations de visée. Il s'agit d'un raisonnement analogue à ceux que nous avons détaillé plus haut, mais plus complexe dans le sens où le Traverseur a été déplacé le long du Ray d'une distance égale à la longueur du Traverseur, mais sans l'avoir situé sur des graduations particulières : ainsi le coefficient de proportionnalité entre les triangles n'est pas précisé. Il souligne également l'indépendance entre l'unité choisie pour les graduations du Ray et les unités choisies pour mesurer les distances.

### La croix du bûcheron

On peut probablement relier au Ray géométrique l'instrument nommé Croix du bûcheron et qui permet, en accolant perpendiculairement deux bâtons de même longueur, de déterminer la hauteur d'un arbre par simple visée. Par agrandissement, la hauteur de l'arbre est égale à la distance à laquelle on réalise la visée. La position relative des deux bâtons se détermine en proportion entre la hauteur à mesurer et la hauteur à laquelle s'effectue la mesure. Cette situation fait déjà l'objet d'exercices dans les manuels scolaires :



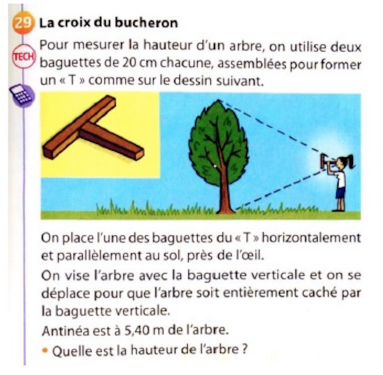


FIGURE 16 – Mission Indigo, Cycle 4, 2017, p. 491

## Le Carré géométrique

Le carré géométrique est un instrument de mesure de longueurs basé sur la proportionnalité des triangles qui apparaît au XVI<sup>e</sup> dans le *Quadraticum Geometricum* de Georg Peurbach (1516) ou chez Walter Ryff (déjà cité). Nous étudierons plus particulièrement ici l'ouvrage d'Oronce Fine, *Un bref et singulier Traicté touchant la composition et usaige d'un instrument appellé le quarré géométrique* (1538).



FIGURE 17 – Oronce Fine – Source : BnF

Oronce Fine (1494-1555) fut un éditeur, mathématicien et cartographe français. Défenseur des mathématiques, il obtint de François I<sup>er</sup> la création d'une chaire de mathématiques au sein du Collège de France. Sa *Protomathesis* (1532) est un ouvrage de mathématiques théoriques et pratiques où il présente des instruments (carré géométrique, équerre articulé, bâton de Jacob). Il publie ensuite des versions simplifiées et abrégées, pour leur assurer une meilleure diffusion dont ce traité de 1538 dans lequel il justifie ainsi la rédaction en français :

« Pour ce que plusieurs princes et autres gentils hommes ou capitaines de guerre De noble et subtil esprit ausquelz par l'inclemence du temps ou negligence de leurs parents ne a ete donne la congnoyssance de la

langue latine et des liberales consequement et parfaites sciences que l'on appelle mathematiques principalement de lart et science de Geometrie, Lesquels neantmois se delectent et prennent aucunesfois plaisir savoir et congnoitre quelqz portion de lusaige et plus utile pratique Dicelle. »(Fine, 1538)

Voici quelques exemples d'utilisation du carré donnés par Fine<sup>12</sup>. Tous ces exemples peuvent faire l'objet d'exercices.

### Mode d'emploi du carré géométrique



FIGURE 18 – Carré géométrique - Traité d'Oronce Fine (Fine, 1538, p. 5-6) – Source : BnF

Le carré géométrique est un cadre carré de grande taille, comme le montre la figure 18. Sur ce cadre s'articule une règle mobile servant à viser. Cette règle peut être munie d'un viseur (ici pinule). Les côtés du carré sont en général divisés en 60 parties.

Voici le mode d'emploi donné par Oronce Fine (Fine, 1538, p. 5), retranscrit :

« Quand vous voudrez mesurer par le susdit instrument et carré géométrique la longueur de quelque distance proposée étant comprise et étendue fort au long ou sur le large ou au travers d'une plane campagne, faites ainsi comme s'en suit. Placez sur l'un des bouts de la longueur proposée l'un des côtés de votre carré qui sont divisés en 60 parties sur le commencement et dressez l'autre des côtés perpendiculairement vers la fin d'icelle longueur le plus droitement que vous pourrez. Puis approchez l'œil du point *a* et en élevant ou déprimant tout bellement la règle mobile dudit carré, dressez toujours votre vue droitement par les fentes des pinules d'icelle règle jusqu'à ce que vous puissiez voir précisément l'autre bout et fin d'icelle longueur ou distance proposée. Ce fait, considérez où la ligne droite *af* de ladite règle qui passe par le point *a* et par le milieu des pinules divise ou coupe le côté dudit carré qui est érigé debout et combien il y a de parties desdites 60<sup>13</sup>. Depuis le commencement dudit côté jusqu'à ladite section ou division.

12. Voir aussi (Bénard, 2014).

13. Oronce Fine utilise la notation romaine *lx*.

Car autant de fois que 60 contiendront icelles parties ainsi comprises comme dit est : autant de fois ladite longueur ou distance proposée contiendra l'un des côtés dudit carré. »

### Outils : Figures semblables, proportionnalité

**Activité :** L'exemple suivant est tiré des pages 5 et 6 du *Traité* d'Oronce Fine, les notations sont celles de la figure 18) :

« Notez le cas par manière d'exemple que vous vouliez mesurer la longueur  $de$  de la suivante figure. Et qu'en mettant le coin  $d$  sur le commencement de la longueur et dressant le côté  $bc$  vers la fin  $e$ , la ligne visuelle passant par les pinules de la règle mobile  $af$  divise ledit côté  $bc$  sur le point  $g$  et que depuis  $b$  jusqu'au point  $g$  y ait dix parties de soixante dudit côté  $bc$ . Je dis que tout ainsi que soixante contienne dix six fois tout ainsi la longueur  $de$  contiendra l'un des côtés dudit carré six fois. Suppose donc que chaque côté dudit carré soit de cinq pieds, ladite longueur  $de$  contiendra trente pieds. Car cinq fois six font trente ainsi comment entendre de toutes les autres longueurs apposées. »

Justifiez le raisonnement d'Oronce Fine.

L'utilisation repose donc sur la similitude des triangles  $abg$  et  $ade$ .

Il faut souligner l'indépendance des unités : le carré est gradué jusqu'à 60, on rapporte à 60 la graduation lue, mais il faut ensuite faire intervenir la mesure du côté du carré dans l'unité choisie pour mesurer la distance.

Oronce Fine énonce la règle suivante : « multipliez soixante par le nombre de pieds [...] que contient le côté dudit carré et ce qui en viendra divisez par le nombre de parties entre  $b$  et  $g$  et vous aurez en pieds [...] la longueur  $de$  ». L'intérêt de la manipulation est qu'il n'y a pas de mesures à prendre sur le terrain, il suffit de relever la graduation. Ceci explique la nécessité d'avoir un instrument de grande taille pour ne pas avoir à diviser par un nombre trop petit. Il peut être intéressant avec des élèves d'observer la sensibilité de la mesure calculée à la lecture de la graduation ou de déterminer la distance maximale que l'on peut mesurer.

### Mesures d'un point élevé

À la page 7, Oronce Fine envisage 3 cas de visées, effectuées du haut d'une tour illustrant différents cas, selon que l'extrémité de la règle rencontre le côté inférieur, le sommet opposé ou le côté vertical du carré. Toutes les données du problème (en particulier la solution) peuvent se lire sur la figure, mais il peut être intéressant d'en tirer un exercice en effaçant la graduation de la droite  $ek$ . Le texte indique que la tour mesure vingt cinq pieds, que le côté du carré mesure cinq pieds et que les points  $l$  et  $k$  sont à la quarantième graduation. Il est alors facile de déterminer  $eg = 20$  pieds (similitude des triangles  $adh$  et  $aeg$ ) et  $ek = 45$  pieds (similitude des triangles  $abl$  et  $aek$ ).

Cette situation n'est pas aussi absurde qu'il peut paraître. Dans le cas de la détermination de  $ek$ , le calcul  $ek = \frac{60 \times ae}{\text{grad}(l)}$  est à comparer avec le calcul  $ek = \frac{60 \times ad}{\text{grad}(l')}$

qui correspondrait à la mesure effectuée en posant le cadran au sol et en relevant la nouvelle graduation correspondant au point  $l'$ . Le nombre de parties entre  $b$  et  $l$  est supérieur au nombre de parties entre  $b$  et  $l'$ , le résultat de la division sera donc moins sensible à l'incertitude due à la lecture.

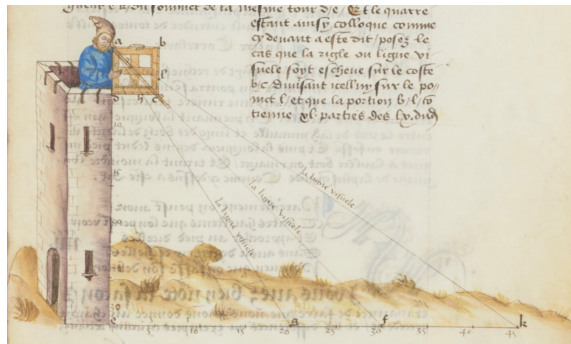


FIGURE 19 – Mesures d'un point élevé - Traité d'Oronce Fine (Fine, 1538, p.7) – Source : BnF

### Mesure d'une hauteur inaccessible dont le pied est accessible



FIGURE 20 – Mesure d'une hauteur inaccessible dont le pied est accessible - Traité d'Oronce Fine (Fine, 1538, p.9) – Source : BnF

Ici, également 3 cas d'incidence de la règle de visée. Les points  $h$  et  $l$  sont sur les graduations 40, le carré de 5 pieds de côté, le point  $a$  est situé à 30 pieds de la tour. Il est aisé de déterminer les hauteurs  $eg$ ,  $ef$  et  $ek$ .

### Mesure d'une hauteur inaccessible dont le pied est inaccessible

La hauteur  $EF$  à mesurer étant inaccessible, il sera procédé par double visée. Voici la solution d'Oronce Fine :

« [...]notez en quel point la règle [...] divisera le côté qui est dressé vers ladite hauteur et quelle [...] proportion ont les 60 parties de tout

le côté aux parties qui sont comprises par ladite règle [...] et notez à part le nombre [...] de ladite proportion et marquez [...] le lieu où est lors le coin au point  $a$  de votre dit carré. Après, ce vous convient avancer ou reculer aucunement ladite hauteur proposée le plus droite-ment que vous pourrez selon la commodité du lieu et faire tout ainsi comme auparavant. En examinant la hauteur par la ligne visuelle et en notant derechef les parties comprises d'icelle et quelle [...] proportion obtienne 60 auxdites parties en retenant à part le nombre [...] d'icelles proportion après avoir marqué [...] le lieu où sera le point  $a$  dudit carré  $abcd$ . Aimablement, convient [...] soustraire le plus petit de ces deux nombres ainsi réservés du plus grand, par le nombre qui restera [il] faut diviser le nombre des pieds [...] qui se trouveront entre les deux marques susdites. Car ce qui en viendra finalement sera précisément égal à la dite hauteur inaccessible. Pour ce que icelui nombre démontre combien de fois la hauteur est comprise entre les deux marques dudit tracé. » (Fine, 1538, p.10)



FIGURE 21 – Mesure d'une hauteur inaccessible dont le pied est inaccessible -  
Traité d'Oronce Fine (Fine, 1538, p.10) – Source : BnF

L'exemple suivant est tiré de la page 10, les notations sont celles de la figure 21 :

#### Outils : Figures semblables, méthode arithmétique

**Activité :** Lors de la première visée, le sommet du carré est posé en  $g$ , la ligne de visée passe par le point  $h$  du côté  $cd$  et  $dh$  contient 30 parties. Lors de la deuxième visée, le sommet du carré est posé en  $k$ , la ligne de visée passe par le point  $l$  du côté  $cd$  :  $dl$  contient 15 parties. On mesure l'écart  $gk$  :  $gk = 40$  pieds.

Quelle est la hauteur  $ef$  ?

Il s'agit encore d'un raisonnement arithmétique. Mais, si on se réfère directement à la formule donnée par Fine, on évalue  $\frac{60}{30} = 2$ . Le premier rapport est 2. Puis,  $\frac{60}{15} = 4$ , le deuxième rapport est 4, on doit donc avoir  $ef = \frac{kg}{4-2} = \frac{40}{2} = 20$  pieds.

Ce qui est évident puisque par similitude  $ke = 4ef$  et  $ge = 2ef$ .

Il vient alors  $kg = (ke - ge) = (4 - 2)ef$ , soit  $ef = \frac{kg}{(4-2)} = 20$ .

## Profondeur d'un puits

C'est un exemple célèbre qu'on retrouve dans beaucoup d'ouvrages d'enseignement. Il s'agit à nouveau d'une mesure de grandeur inaccessible.



FIGURE 22 – Profondeur d'un puits - Oronce Fine (Fine, 1538, p.14) –  
Source : BnF

### Outils : Figures semblables, proportionnalité

Voici un extrait du *Traité* d'Oronce Fine (p. 14) :

« Suppose donc que la longueur *de* soit 12 pieds et que la ligne visuelle venant droit au point *f* divise le côté *cd* sur le point *h* tellement que entre *d* et *h* soient 20 parties des 60. »

Quelle est la profondeur du puits ?

Ici encore, toutes les mesures, y compris la réponse figurent sur la représentation.

## L'équerre articulée

Dans sa *Protomathesis* (1532), Oronce Fine présente également une équerre articulée (rotation) fixée au sommet d'un bâton. Cette équerre permet de déterminer une distance par visée, en exploitant à nouveau la similitude des triangles. Il suffit de faire une mesure au voisinage du bâton pour en déduire la distance cherchée.

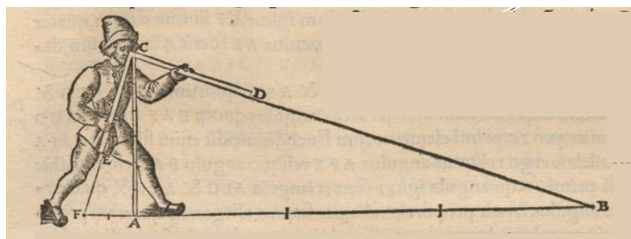


FIGURE 23 – Équerre articulée - Protomathesis (Fine, 1532, Livre II, p. 68)

En effet, dans le triangle rectangle  $BCF$  les triangles rectangles  $ACF$  et  $ABC$  sont semblables, on en déduit  $AB = \frac{AC^2}{AF}$ .

C'est toutefois un mode de mesure relativement imprécis, car la distance  $AF$  est en général assez petite et une imprécision sur sa mesure fait grandement varier le résultat de la division.

## Réalisation des instruments

Réaliser ces instruments est simple et peu coûteux. Voici quelques indications issues de notre expérience.

### Arbalestrille, bâton de Jacob

Le site <http://www.meridienne.org> de l'association Méridienne (Nantes) fournit dans la partie Atelier instrumental et documentaire (Navigation astronomique) des plans très précis pour réaliser un bâton de Jacob équipé de marteaux de différentes tailles. Le matériel nécessaire se limite à un grand tasseau de bois (2,4m x 17cm x 17cm), une petite plaque mince de contreplaqué dans laquelle on découpera de petites planches assurant la liaison des demi marteaux en laissant un espace dans lequel coulisse le fût et de la colle à bois.



FIGURE 24 – Arbalestrille réalisée par A. M. Aebischer

Les dimensions choisies ici respectent les suggestions du site. Le site propose de réaliser 4 marteaux de tailles différentes. Je n'en ai réalisé que deux. À chaque marteau correspond sa graduation propre si on veut reporter directement la valeur de l'angle de visée. Sur deux des quatre faces du fût, j'ai réalisé une graduation assortie à chaque marteau. Sur les deux autres faces, j'ai simplement reporté des graduations multiples de la longueur totale de chaque marteau pour un usage adapté à l'arpentage.

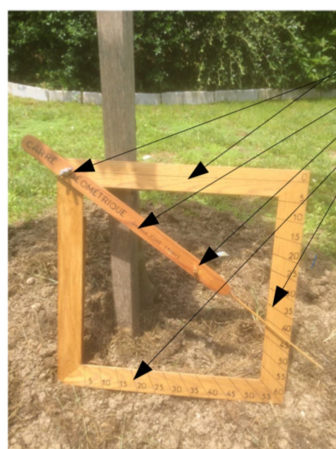
Le fût mesure 1m. Chaque marteau est constitué de deux demi-tasseaux. Ces demi-tasseaux mesurent 161mm x 17mm x 17mm pour le plus grand marteau et 71mm x 17mm x 17mm pour le plus petit. Pour chaque marteau, on découpe de plus deux cubes de 17mm de côté et deux plaques de 51mm x 34mm et on assemble comme indiqué sur la photo. Lors du collage, insérer une chute de tasseau pour préserver un espace central suffisant.



## Carré géométrique

- Comme évoqué plus haut, il y a deux façons d'utiliser un carré géométrique :
- au sol, il faut un carré assez grand, l'idéal étant d'avoir le coin en haut à gauche au niveau des yeux en position debout soit un côté d'environ 140 cm. Un tel carré est difficilement transportable ;
  - placé sur une hauteur (haut d'une tour, pont,...), il suffit alors d'un carré d'environ 60cm de côté que l'on posera devant soi en contrôlant la verticalité (fil à plomb).

La construction débute avec un cadre rigide aux angles parfaitement droits, le plus simple est de partir d'un cadre du commerce (explorez le rayon bricolage de votre magasin préféré) d'un peu plus de 60 cm de côté.



### MATÉRIEL

- Cadre carré d'environ 60 cm de côté.
- Ecrrou avec tête papillon et contre-écrou.
- Tasseau prolongé par une pique à brochettes.
- Une cheville bois pour le viseur.
- Les deux graduations.

Vernir l'ensemble à la fin, pour le pied prévoir un système au dos du côté gauche et au-dessus pour le maintenir.

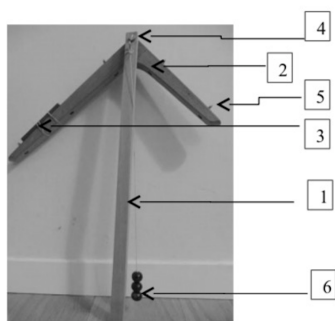
### GRADUATION

Bien commencer les deux graduations à la verticale et à l'horizontale de l'axe de rotation du tasseau.

Historiquement le côté du carré est gradué de zéro à soixante, mais vous pouvez choisir une autre graduation.

FIGURE 25 – Carré réalisé par G. Martin

## Équerre articulée



### Matériel nécessaire :

- un tasseau de 1m50 (1) pour le support ;
- une équerre d'étagère en bois (2)
- un fil à plomb (6) pour contrôler la verticalité, à fixer sur le support ;
- un boulon (vis et écrou) et un écrou papillon (avec rondelles) (4) pour articuler l'équerre sur le support ;
- des petits pitons à visser pour les visées (5), à placer relativement éloignés de l'angle droit ;
- accessoirement un stylo laser (3)
- une perceuse et une mèche à bois du diamètre du boulon.

FIGURE 26 – Équerre réalisée par G. Martin



## Conclusion

Il me semble important de partager avec les élèves des textes qui témoignent du long cheminement des mathématiques à travers l'histoire. Le texte d'Oronce Fine, magnifiquement illustré est d'un abord relativement facile, celui d'Alain Manesson Mallet également. Ce bref aperçu des mesures de grandeurs entre le XIII<sup>e</sup> siècle et le XVIII<sup>e</sup> siècle met en lumière des modes de pensée qui, indépendamment de l'émergence de l'algèbre, ont longtemps privilégié une méthode de raisonnement arithmétique. Toutes les situations précédentes sont un formidable moyen de travailler la proportionnalité sous toutes ses formes : fractions, agrandissement/réduction. Il est intéressant aussi de noter la longue marche vers la notion de fonctions, à travers l'établissement des tables diverses, ou à travers les modes de graduation de l'arbalestrille.

Se confronter aux aléas de la mesure sur le terrain permet de dépasser un cadre déjà modélisé (qui est le quotidien des élèves) et met véritablement les mathématiques en action. Pour les élèves, manipuler de tels instruments pour faire de vraies mesures est un changement de paradigme, un ancrage des mathématiques dans le monde réel et leur histoire. J'espère que cet article donnera aux enseignants l'envie de confronter leurs élèves à la réalisation de ces instruments et à leur utilisation sur le terrain.

## Références bibliographiques

- APIAN Pierre, FRISON Gemma, 1584, *La cosmographie ou description du monde universel*, Anvers, Arnoult Coninx.
- BARBIN Évelyne, 2018, « L'instrument mathématique comme invention et comme connaissance-en-action », *Repères-IREM*, n° 110, p. 59-77.
- BÉNARD Dominique, 2014, « Agrandir, réduire, cartographier, mesurer l'inaccessible » in BARBIN Évelyne (dir.), *Les constuctions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses.
- FINE Oronce, 1532, *Protomathesis*, Paris, Morrhius & Petrius.
- FINE Oronce, 1538 *Un bref et singulier Traicté touchant la composition et usaige d'un instrument appellé le quarré geometrique [...]*, manuscrit, Paris.
- GOLDSTEIN Bernard, 1985, *The Astronomy of Levi ben Gerson (1288-1344)*, 1<sup>re</sup> éd., New-York, Springer.
- HÉBERT Élisabeth (dir.), 2008, *Le traité de navigation de Jean-Baptiste Denoville 1760*, Rouen, Point de vue.
- HÉBERT Élisabeth, VASSARD Christian, 2004, « Aspect instrumental de la trigonométrie dans l'Occident latin » in HÉBERT Élisabeth (dir.), *Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Paris, Ellipses.
- MANESSON-MALLET Allain, 1702, *La Géométrie Pratique : tome second*, Paris, Jean Anisson.
- REISCH Gregor, 1496, *Margarita philosophica*, Fribourg, Johann Schoot.
- RYFF Walther Hermann, 1547, *Der furnembsten notwendigsten der gantzen Architectur angehörigen mathematischen und mechanischen Kunst eygentlicher [...]*, Nürnberg, Johan Petreius.



## Quelques calculs d'aires pour un quadrilatère, entre XV<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècle

Anne BOYÉ, Xavier LEFORT

### Introduction

Le calcul des aires, à commencer par celui de l'aire d'un quadrilatère convexe quelconque, a toujours été un exercice de base chez les arpenteurs, même chez les géomètres d'aujourd'hui. La lecture de quelques méthodes proposées aux XV<sup>e</sup> et XVII<sup>e</sup> siècles donne lieu, non seulement à leur expérimentation, mais aussi à quelques réflexions plus théoriques. Ces méthodes n'utilisent que des mesures de longueurs, à l'exclusion de toute mesure angulaire, les arpenteurs concernés ne disposant pas à l'époque des instruments nécessaires. Enfin, la méthode contemporaine, par les coordonnées, est un exemple simple de calcul automatique, et automatisé... Nous proposons dans les lignes qui suivent de tester d'abord quelques-unes de ces méthodes anciennes sur un « champ témoin », quadrilatère convexe, dont les mesures, préalablement effectuées, seront données au fur et à mesure des besoins. Le quadrilatère ci-dessous représentera ce champ témoin, les unités étant absolument arbitraires !

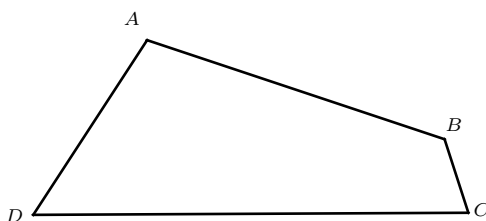


FIGURE 1 – Quadrilatère témoin

## Trois calculs d'arpenteurs

Bertrand Boysset (1345-1415) donne dans *Siensa de Destrar* (1405) la méthode suivante :

« Si tu avais à arpenter une terre ou une vigne en forme de coin régulier (un quadrilatère), arpente-la en croix par milieu et écris sa hauteur et combien elle aura de destres transversalement, puis double son résultat comme il se doit et tu ne te tromperas pas. » (Boysset, 1405, quatrième chapitre)

Le dessin ci-dessous représente le schéma d'origine, auquel nous avons ajouté les lettres. Si  $M, N, P$  sont les milieux respectifs des côtés  $DA, AB, BC$  du quadrilatère témoin et  $NH$  la perpendiculaire abaissée de  $N$  sur  $MP$ , les mesures ont donné :  $MP = 80,45$  et  $NH = 15,68$ .

L'auteur propose de calculer  $MP \times NH \times 2$ , ce qui donne 2522,91 unités d'aires.

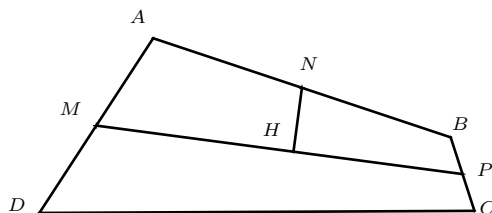


FIGURE 2 – Application de la méthode de Boysset au quadrilatère témoin

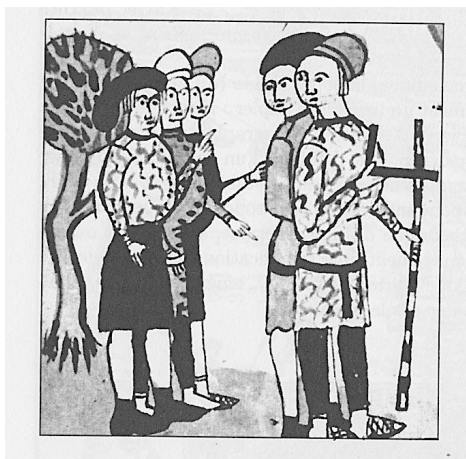


FIGURE 3 – Mesures sur le terrain, *Siensa de Destrar*

À la fin du même siècle, Frances Pellos propose une autre méthode dans *Compendion del abaco* (1492) :

« Soit une autre terre quadrangulaire qui a de hauteur 15 et de base 13, et d'un côté 64 et de l'autre 66. Pour savoir quelle est la grandeur de cette terre, [...] prend la moyenne d'en haut et celle d'en bas, soit 14, celle des côtés latéraux, soit 65. Tu multiplies 14 par 65, soit 910 autant est la vraie surface, pertinemment recherchée. » (Pellos, 1492, f.73)

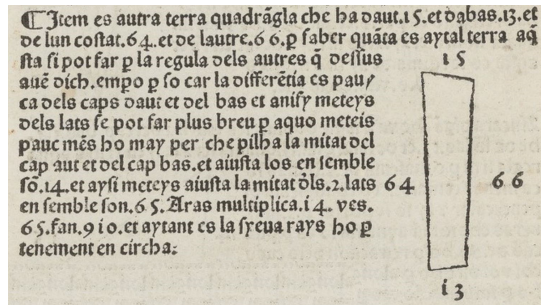


FIGURE 4 – *Compendion del abaco* – Source : BnF

Autrement dit, il s'agit de multiplier les moyennes des côtés opposés. Les côtés de notre quadrilatère témoin ont été mesurés :  $AB = 69,08$ ,  $BC = 17,03$ ,  $CD = 95,86$  et  $DA = 45,95$  Le calcul donne donc (à l'unité près) :

$$\frac{69,08 + 95,86}{2} \times \frac{17,03 + 45,95}{2} = 2597$$

En 1605, Jean Abraham, dit Launay, publie *l'Arithmétique, arpentage universel*, où pour calculer l'aire du quadrilatère, il propose de faire la demie somme des côtés les plus longs et de la multiplier par le côté le plus court. Ce qui donnerait pour notre quadrilatère, où  $AB = 69,08$ ,  $BC = 17,03$ ,  $CD = 95,86$  et  $DA = 45,95$  une aire de

$$\frac{69,08 + 95,86}{2} \times 17,03 = 1404 \quad (\text{à l'unité près}).$$

Ce sont trois méthodes basées sur des mesures de longueur ; celles-ci pouvant générer imprécisions et erreur (au sens usuel), il est nécessaire d'en utiliser le moins possible. D'autre part, la notion de mesure d'angle est absente, elle demande des appareils et des connaissances en dehors des possibilités de l'arpenteur de l'époque. Les résultats (arrondis) obtenus pour notre quadrilatère témoin sont les suivants :

Boysset : 2522,91 – Pellos : 2597 – Abraham : 1404

## Nous avons donc trois mesures. Laquelle retenir ?

Il existe une méthode sûre, explicitée assez tôt, qui consiste à découper le quadrilatère en deux triangles dont on sait calculer les aires (à savoir le demi

produit de la base par la hauteur), mais elle nécessite quatre mesures de longueur, en plus d'établir deux perpendiculaires. Cette méthode se trouve, entre autres, dans *La pratique de la Géométrie* (Clerc, 1669) ou *La Géométrie de l'Ingénieur ou l'Art de mesurer* (Clermont, 1693).

La diagonale  $DB$  du quadrilatère témoin a été mesurée de 89,39; les hauteurs des triangles  $ADB$  et  $DBC$  sont respectivement de 40,16 et 15,16.

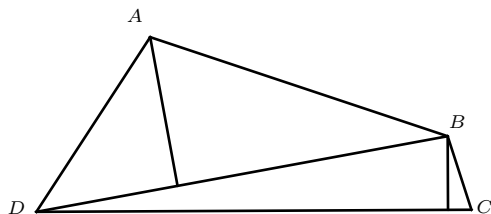


FIGURE 5 – Application de la méthode de Clermont au quadrilatère témoin

Les aires de chaque triangle sont donc lors respectivement de 1795,39 pour  $ADB$  et 726,62 pour  $BCD$ . Ce qui donne 2522 (arrondi) pour le quadrilatère. Les deux méthodes utilisant les mesures des côtés sont donc fausses. Il est d'ailleurs facile de se rendre compte qu'il faut rejeter tout calcul qui n'utiliserait que les mesures des quatre côtés. En effet, il existe une infinité de quadrilatères ayant les mêmes mesures et ils n'ont pas nécessairement la même aire. Par ailleurs, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, toute mesure de longueur est inévitablement entachée d'imprécision, et il est préférable d'en utiliser le moins possible...

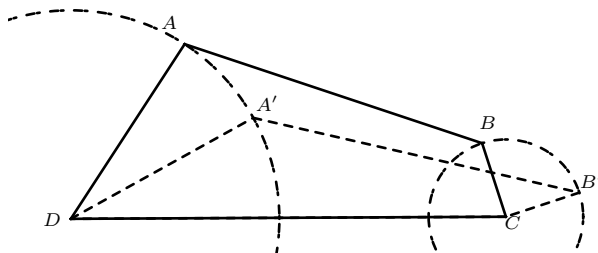


FIGURE 6 – Construction de deux quadrilatères de côtés égaux

Force est de constater que la méthode proposée par Boysset donne un résultat pratiquement égal à celui obtenu par la méthode proposée par Clermont et considérée comme sûre. Hasard ou proposition vraie? Une démonstration s'impose! Le schéma suivant peut servir de support à cette démonstration, en montrant l'égalité des aires des triangles de mêmes numéros.

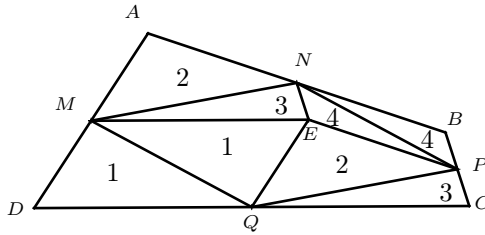


FIGURE 7 – Démonstration de la méthode Boysset

$MNPQ$  est un parallélogramme et, en construisant les parallèles  $ME$ ,  $QE$ ,  $NE$  et  $EP$  aux côtés du quadrilatère d'origine, on détermine un certain nombre de triangles égaux deux à deux ; la formule de Boysset revient alors à calculer l'aire de  $MNPQ$  et de la doubler.

## Une construction de mathématicien

La géométrie « théorique » a pu aussi proposer certaines méthodes se généralisant à tout polygone convexe. Dans les *Nouveaux Éléments de Géométrie* d'Antoine Arnauld (1667) se trouve ainsi la proposition suivante :

« Faire une figure égale à une donnée qui ait moins d'un costé que la donnée. C'est-à-dire que si la donnée en a 6, on en cherche une qui n'en ait que 5 ; & si elle en a 5, on en cherche une qui n'en ait que 4, de sorte que par là on pourra venir jusqu'au triangle. Soit proposé de réduire l'exagone  $bcdfgh$  en un pentagone qui luy soit égal. Ayant prolongé  $fg$ , je tire la ligne  $bg$ . Puis de  $h$ , je tire sur  $fg$  prolongée  $hl$  parallèle à  $bg$ . Et de  $b$  je tire  $bl$ . Je dis que le pentagone  $bcdfhl$  est égal à l'exagone donné. Car les triangles  $hbl$  &  $hlg$  sont égaux, parcequ'ils sont sur la même base & entre mêmes paralleles. Donc ostant  $hlo$ , commun à l'un & l'autre,  $hob$  demeurera égal à  $lgo$ , tout le reste est commun à l'exagone & au pentagone ». (Arnauld, 1667, p. 459)

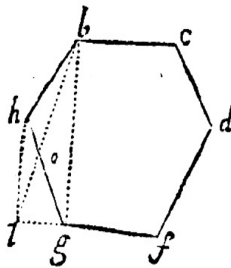


FIGURE 8 – Dessin original du texte d'Arnauld

Cette méthode permet donc de construire un polygone de même aire et d'un nombre de cotés inférieur d'une unité. Il est possible à partir d'un quadrilatère de construire un triangle de même aire, et d'utiliser alors la méthode habituelle du calcul de l'aire d'un triangle. Concernant notre quadrilatère témoin, il est possible de construire  $BE$ , parallèle à  $AC$ ,  $E$  étant sur le prolongement de  $DA$ . Les triangles  $AEB$  et  $EBC$  de côté commun  $BE$  sont égaux. En leur « ôtant »  $EOB$  commun,  $AEO$  et  $BOC$  ont même aire, et le triangle  $DEC$  a donc même aire que le quadrilatère  $ABCD$ .

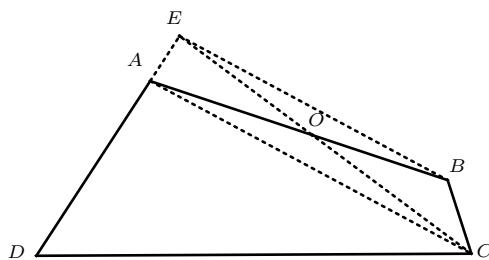


FIGURE 9 – Application de la méthode d'Arnaud au quadrilatère témoin

En pratique, le découpage de tout quadrilatère, voire de tout polygone, en triangles, ou en trapèzes, comme proposé dans l'ouvrage de Clermont, reste la méthode préconisée dans tous les manuels d'arpentage ou de topographie des siècles suivants, dans les cas, bien sûr, où les mesures d'angles ne sont pas utilisées.

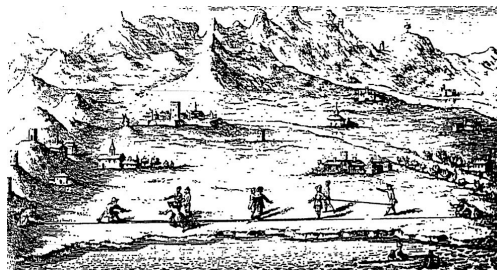


FIGURE 10 – Mesures sur le terrain au XVIII<sup>e</sup> siècle, *La Méridienne de Paris*, de Cassini de Thury (1740)

## Un calcul d'ingénieur

Mais dans le cas où il a été possible de mesurer les angles, ce qui a toujours été plus précis, plutôt que d'utiliser de multiples longueurs, et pour mettre en œuvre un calcul automatique, il s'est avéré rapidement préférable d'utiliser le système des coordonnées. La généralisation d'appareils à mesurer les angles, tels les théodolites



a permis d'établir des formules générales. En rappelant ce que sont les sinus et cosinus d'un angle, et comment se définissent et se calculent les coordonnées d'un point dans un repère orthonormé, un algorithme automatique de calcul d'aire de tout polygone va pouvoir s'établir aisément.

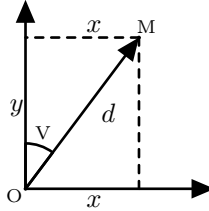


FIGURE 11 – Définition du sinus et du cosinus pour la topographie

Connaissant sa distance  $OM$  à l'origine et l'angle  $V$  (dit « gisement ») entre la direction de référence et la direction  $OM$ , compté dans le sens des aiguilles d'une montre :

$$x = d. \sin V \text{ et } y = d. \cos V$$

Attention : les angles étant comptés dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de la direction de référence (le Nord), le sinus est donc ici en abscisse et le cosinus en ordonnée !

L'utilisation des coordonnées permet alors d'obtenir les formules suivantes, pour un triangle ABC :

$$\text{Aire} = \frac{1}{2}(x_B y_A - x_A y_B + x_C y_B - x_B y_C + x_A y_C - x_C y_A)$$

formule qui se généralise à un polygone  $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ , les sommets  $P_i(x_i, y_i)$  étant ordonnés dans le sens trigonométrique :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

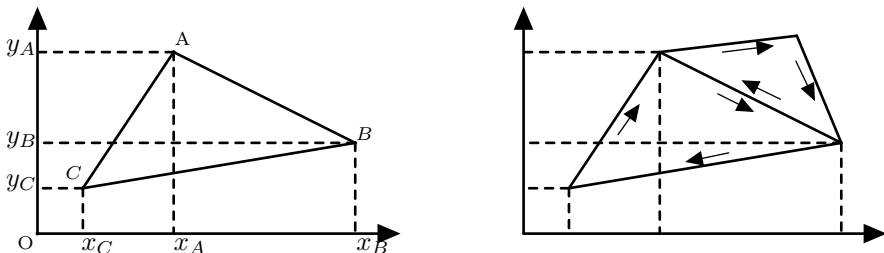
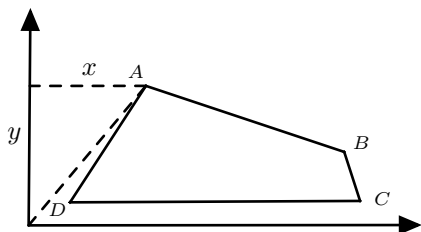


FIGURE 12 – Démonstration de la formule pour un triangle et un quadrilatère

La démonstration se fait en utilisant la formule du calcul d'aire d'un trapèze appliquée aux trois trapèzes construits avec les côtés du triangle, les perpendiculaires à l'axe des abscisses contenant  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et les segments correspondants sur l'axe. Il faut remarquer que le calcul s'opère par côtés et dans un certain sens. Pour l'aire de notre quadrilatère témoin, il faut d'abord calculer les coordonnées des quatre sommets, puis appliquer la formule. Voici les résultats obtenus :



	$x$	$y$	$x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$
A	44,92	55,02	
D	19,02	9,80	-606,2644
C	114,88	9,80	-939,428
B	107,12	24,96	1817,6288
A	44,92	55,02	4772,5392
		Somme :	5044,4756

FIGURE 13 – Application de la méthode au quadrilatère témoin

L'aire du quadrilatère est bien 2522 unités ! La démonstration s'étend aux quadrilatères, découpés en deux triangles : la somme des aires des deux triangles, en utilisant la formule précédente, fait apparaître une simplification, puisque le côté adjacent aux deux triangles est « parcouru » dans les deux sens. La formule se généralise par récurrence. D'autres formules ont été utilisées, en regroupant différemment les coordonnées, et en considérant les sommets pris trois par trois. La comparaison des résultats de deux de ces formules permettait de s'assurer de l'exactitude des calculs. Si, au siècle dernier, le calcul était établi en tableau regroupant les coordonnées des points, il est aujourd'hui effectué par un ordinateur intégré à l'appareil, dit « station totale », mis en place à portée de vue des points et orienté vers un axe des ordonnées arbitraire.

## Conclusion

La présentation du texte de Boysset, donnant une méthode élégante et originale pour calculer l'aire d'un polygone convexe quelconque nous a donné l'idée de proposer sa comparaison avec d'autres méthodes plus ou moins contemporaines. L'exercice donne l'occasion de mettre en défaut les analogies avec des cas particuliers, et de faire de la Géométrie ! Dans un second temps, l'exposé de la méthode actuelle répond à la curiosité légitime qu'il est possible d'avoir devant le travail d'un géomètre posant son théodolite ou sa station totale au bord d'une route ... Nous imaginons que ces quelques exemples peuvent fournir pour des élèves de collège ou lycée des idées d'activités, sources de réflexion sur la notion de calcul théorique versus mesures sur le terrain, et peut-être d'étonnement.

## Références bibliographiques

- ABRAHAM Jean, dit Launay, 1605, *Arithmétique, arpentage universel...* Rouen, Théodore Reinsart, <https://books.google.fr/books?id=wsNZAAAACAAJ&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>, dernier accès le 12/02/2021.
- ARNAULD Antoine, 1667, *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, Charles Savreux. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6565463h.texteImage>, dernier accès le 11 février 2021.
- BOYSSET Bertrand, 1405, *Siensa de Destrar*, Arles. ms autographe 327 f.33-64, Carpentras, Bibliothèque Inguimbertaine.  
Traduction française, notes et commentaires de Magdeleine Motte, 1988, Toulouse, École Nationale du Cadastre. <https://www.espaci-occitan.com/botiga/oc/histoire-etudes/2413-la-siensa-de-destrar-bertrand-boysset-1345-1414-9999000000185.html>, dernier accès le 12 février 2021.
- CASSINI DE THURY César-François, 1740, « La Méridienne de l'observatoire Royal de Paris », Mémoires de l'Académie des Sciences.
- CLERC (ou LECLERC) Sébastien, 1669, *Pratique de la géométrie*, Paris, Thomas Jolly.
- CLERMONT, 1693, *Géométrie pratique ou l'art de mesurer*, livre cinquième p. 151-152-176, problème 71, Strasbourg, Friderich Schmuck. <https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10053478?page=5>, dernier accès le 12 février 2021.
- PELLOS Frances, 1492, *Lo Compendion del Abaco*, Turin, Nicolo Benedetti et Suigo de Sancto Germano. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k321093k>, dernier accès le 10 février 2021.



## Géométrie pratique d'inaccessibles, avec G. de Longchamps

René GUITART

### Introduction

#### Problématique en trois questions

1. Atteinte de l'inaccessible? — La première question que soulève notre titre est la suivante : comment, avec des instruments matériels bien déterminés et limités, et sur un terrain bien fixé (d'arpentage ou de dessin) réel et borné, peut-on rendre compte des grandeurs et propriétés de figures inaccessibles, c'est-à-dire hors du terrain, visibles ou cachées?
2. Comprendre le théorique en jeu dans la pratique — La deuxième question serait alors : comment les outils théoriques et les méthodes à mettre en œuvre dans les réponses concrètes à la première question peuvent-ils être enseignés par, justement, la pratique des exercices et solutions des problèmes concrets mis en jeu?
3. Induire la formation du théorique depuis l'expérience pratique — Étant acquis que les déplacements utiles à la re-présentation des figures lointaines à proximité de l'observateur sont les mêmes que ceux qui constituent le groupe de la géométrie en jeu (Klein, 1872), la troisième et dernière question est celle-ci : ce que l'on éclaircit en répondant aux deux premières questions est-il que la « théorie géométrique » peut procéder du questionnement sur les pratiques, et spécifiquement sur les pratiques avec les inaccessibles?

Le but de cet article est de commencer à répondre à ces questions en examinant l'*Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* de Gaston Albert Gohierre de Longchamps (Longchamps, 1890), notamment à la lumière du travail de François-Joseph Servois (Servois, 1804), et donc de la théorie des transversales de Lazare

Carnot (Carnot, 1803), et encore des travaux de constructions géométriques de Lorenzo Mascheroni (Mascheroni, 1793, 1798), du livre de Claude-Lucien Bergery (Bergery, 1835) ; et partant des études depuis l'Antiquité de « géométrie pratique » — quoique celle-ci ne se réduise pas à ces questions ; et enfin de la géométrie générale des transformations du XIX<sup>e</sup> siècle.

Pour mieux introduire cette problématique, précisons tout de suite par des exemples ce qu'il faut entendre par « inaccessible » sur un terrain, points « en dehors de l'épure [du dessin] », par le terme « pratique », et l'enjeu vis-à-vis de l'enseignement.

## Atteindre un inaccessible, viser un invisible ? Deux exemples historiques

La distance d'un bateau en mer — Les historiens des sciences rapportent que les Ioniens, vers le VI<sup>e</sup> siècle avant J.-C., savaient mesurer la distance d'un bateau en mer ; ils ont émis l'hypothèse qu'ils utilisaient un cadran pour saisir et reporter des angles. Évelyne Barbin propose de comprendre le procédé (figure 1) par invention d'instruments matériels (cadran), de schémas réalistes de situations, de figures abstraites, de théorèmes (cas d'égalité de triangles) (Barbin, 2018<sub>b</sub>). Nous voyons ainsi que la distance inaccessible en mer (partie droite de la figure centrale) peut être reportée sur la terre accessible (partie gauche de la figure centrale) et donc être alors mesurée.

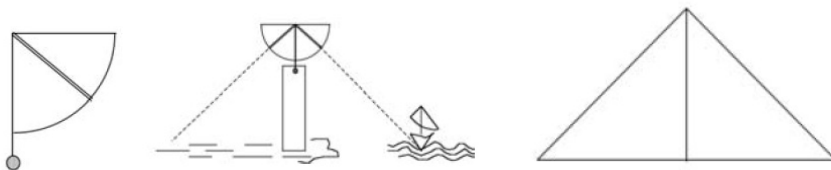


FIGURE 1 – Distance d'un bateau en mer : instrument, schéma et figure (Barbin, 2018<sub>b</sub>, p. 61)

Le tunnel de Samos — Au I<sup>er</sup> siècle après J.-C., Héron d'Alexandrie (Héron, 1858) propose la dioptré comme instrument d'arpentage et de mesure de distance au loin. Il explique comment, avec cet instrument, procéder au percement d'un tunnel par les deux bouts à la fois, pour aller en ligne droite d'un point *A* vers un point *B*, chacun caché à l'autre. Évelyne Barbin donne les figures correspondantes au procédé qu'il propose (Barbin, 2018<sub>a</sub>), où elle montre le passage du schéma à la figure géométrique (figure 2).

## *Un exercice de Longchamps : coins « en dehors des limites de l'épure »*

Longchamps propose, pour finir son *Essai*, vingt-deux exercices, tel l'exercice n°11 (Longchamps, 1890, p. 363), qui est typique (figure 3) : « Déterminer le centre

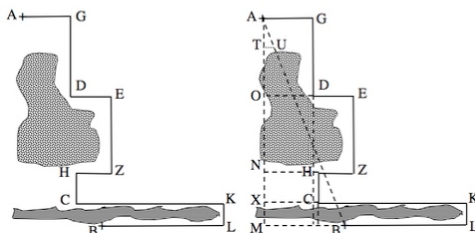


FIGURE 2 – Tunnel de  $A$  à  $B$  à travers un obstacle (Barbin, 2018<sub>a</sub>, figure 5, p. 38.)

de gravité  $G$ , le centre du cercle circonscrit, etc., d'un triangle, dont les sommets  $L, M, N$ , sont situés au dehors des limites de l'épure. »

Sur la feuille de dessin  $ABCD$  nous considérons la trace d'un triangle  $LMN$  qui dépasse de la feuille, de sorte que les sommets ne sont pas visibles ni a priori directement visibles depuis un point quelconque de la feuille, hormis depuis les points sur les traces des côtés, puisque chacun de ces côtés vise un de ces sommets. La question est de savoir de façon interne à la feuille limitée, et compte tenu des instruments limités choisis (règle, équerre), à quelles propriétés du triangle nous avons accès : points remarquables, longueur des côtés, aire, etc.

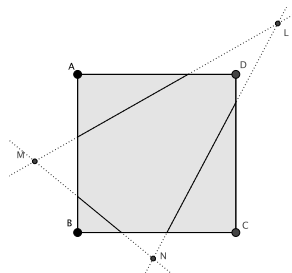


FIGURE 3 – Géométrie pour un triangle sans coins visibles

Longchamps résout tous ces problèmes d'un coup, en prenant sur la partie accessible du côté  $MN$  deux points  $P$  et  $Q$ , et, par ces deux points des parallèles aux côtés  $LM$  et  $LN$ , qui se coupent en un point  $R$ . Il sait mener par  $R$  une droite  $RL$  en direction du point inaccessible  $L$ , qui coupe  $MN$  en un point  $\omega$ , centre d'homothétie des triangles  $RPQ$  et  $LMN$ . Les points remarquables de  $RPQ$  donnent par cette homothétie ceux de  $LMN$ .

Il résout aussi plus directement la seule question du centre de gravité  $G$  en construisant les traces des médianes telles que  $LL'$ , avec  $L'$  milieu de  $MN$ . Pour cela il utilise le fait que  $LL'$  passe par le milieu de toute parallèle  $PQ$  à  $MN$ , avec  $P$  sur la trace de  $LM$  et  $Q$  sur la trace de  $LN$ . Il prend donc un point  $Y$  dans la feuille et par là trace une parallèle à la trace de  $MN$ , qui coupe les traces de  $LM$  et  $LN$  en  $P$  et  $Q$ , puis on construit le milieu  $X$  de  $PQ$ . Avec un deuxième point  $Y'$  il obtient  $P'$  et  $Q'$ , et  $X'$ , et alors  $XX'$  est un segment de la médiane  $LL'$ .

Reste donc à se reporter dans l'*Essai* aux explications pour prendre une parallèle à une droite visible et accessible, pour prendre le milieu d'un segment visible et accessible, etc., et cela avec la règle et l'équerre seules. Pour la parallèle c'est facile, en prenant deux perpendiculaires. Avec la règle et l'équerre on peut construire un parallélogramme  $ACBD$ , voire un parallélogramme ayant un segment  $AB$  donné pour diagonale, et alors l'autre diagonale coupe ce segment en son milieu (Longchamps, 1890, p. 27).

En fait, ayant ce parallélogramme  $ACBD$  préalablement dessiné, on peut, à la règle seule, tracer par un point donné une parallèle à une droite donnée : sur cette question, Longchamps (Longchamps, 1890, p. 25-26) renvoie à Jean-Henri Lambert (Lambert, 1987, p. 266). La construction de Lambert est exposée et commentée par Rudolf Bkouche (Bkouche, 1998, p. 167). Une construction par Jean-Victor Poncelet est donnée dans l'*Essai* (Longchamps, 1890, p. 232).

Longchamps rapproche ce type de raffinement du résultat suggéré par Jean-Victor Poncelet et démontré par Jakob Steiner (Steiner, 1833, p. 67), affirmant, qu'« un seul cercle, décrit une fois pour toutes, pouvait servir à résoudre tous les problèmes du second degré », comme l'écrit Luigi Cremona, qui en redonne aussi une démonstration (Cremona, 1875, p. 182). Ainsi, un parallélogramme, ou un cercle, ou telle figure ou courbe déjà tracée, représentation donc d'une configuration à voir (un théorème, au sens propre du mot) ou graphe d'une fonction, à utiliser et qui peut « servir » peuvent être considérés comme de véritables instruments. Comme, réciproquement, les instruments pratiques sont des « théories matérialisés » (Bachelard, 1934, p. 16), (Barbin, 2019).

## Pratique graphique ?

De l'Antiquité à nos jours, de nombreux ouvrages proposent l'étude de la géométrie praticable avec l'utilisation d'instruments (comme jalon, chaîne, règle simple, règle à deux bords parallèles, équerre, compas, et éventuellement de plus élaborés, comme la dioptré de Héron d'Alexandrie (Barbin, 2018<sub>a</sub>), ou encore le pantographe et divers systèmes articulés, ou encore diverses figures déjà tracées, parallélogramme ou cercle, voire des abaques). Il s'agit de résoudre des problèmes pratiques, dans la vie courante, quotidienne ou scientifique : mesures et divisions de terrains (Moyon, 2010), descriptions des formes des corps et bâtiments, plans de constructions, analyse et reproductions des ombres, des courbes, constructions de tunnels, de ponts, etc., et aussi dans les arts de la guerre (construction de fortifications, calculs des données de tir au canon). Donc les perspectives et la géométrie descriptive participent pleinement de la géométrie pratique. La résolution se fait par traçage ou « calcul graphique », avec les outils, sur une feuille de papier ou sur un terrain d'arpentage, de figures géométriques qu'il s'agit de composer et décomposer.

On réalisera que dans ses aspects ici évoqués, qu'il soit ou non explicitement question de données inaccessibles, la géométrie pratique tient à la représentation de données non-encore accessibles ou visibles.

On touche aux pratiques « entre "le réel", qui semble toujours inaccessible, et une réalité, qui semble accessible, parce qu'elle a été construite avec les mathéma-



tiques »(Barbin et al., 2018, p.11), (Bénard, 2014).

## Enseignement par problèmes ?

La géométrie pratique est un moyen commode (sic) pour enseigner la géométrie (Chevalarias, 2018). L'idée de « pratique » est liée aussi à l'approche de l'apprentissage par l'expérience des problèmes, issus ou non de questions pratiques. De l'approche par les problèmes, Alexis Clairaut écrivait : « en occupant continuellement mes lecteurs à résoudre des problèmes [...] par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention. » (Clairaut, 1741, p. viii-ix). L'étude des problèmes de géométrie pratique permet d'enseigner concrètement la géométrie, en « mettant la main à la pâte »(dans le monde) ; et enfin, par cette voie, l'apprenti saisira que les théorèmes émergent comme outils théoriques à partir de ces problèmes pratiques, après leurs examens et non avant. Ainsi les propriétés projectives émergent par la pratique de la règle seule (Bkouche, 1998).

## Longchamps, après Mascheroni, Servois, Bergery

Gaston Albert Gohierre de Longchamps (que nous désignerons maintenant couramment comme il signalait ses œuvres, soit par « G. de Longchamps », voire par « Longchamps ») a donc publié en 1890 son *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Longchamps, 1890), qui est d'un intérêt considérable pour les constructions avec règle et équerre seules, traitant principalement de constructions de courbes et de problèmes d'inaccessibles — et ce sont surtout ces derniers qui nous intéresseront ici —, et très-utile aussi pour l'ensemble des références sur la géométrie pratique : environ une centaine d'auteurs cités. Les quatorze les plus cités sont — dans l'ordre du nombre de citations : Servois, suivi de Chasles, Mascheroni, Bergery, Mac Laurin, Carnot, Menelaüs, Gergonne, Euclide, Ceva, Pappus, Schoute, van Schooten, Newton. Bien entendu toutes ces références sont riches, et d'autres, importantes mais moins fournies, sont : Lambert, Brianchon, Poncelet, Magnus, Tilly, Cremona, etc.

Mais la référence à Servois est toute particulière, puisqu'en introduction, Longchamps dit que le livre qui se rapproche le plus du sien est celui de Servois (Servois, 1804), dont Poncelet et Chasles (Chasles, 1837, p. 213) faisaient le plus grand cas, considérant qu'il montrait l'utilité de la théorie des transversales, en promouvant ce que Brianchon appelait la « géométrie de la règle ». En effet, le livre de Longchamps reprend l'ordre de celui de Servois qui était : théorèmes généraux sur les transversales, d'après Carnot, puis applications à l'art de la guerre avec les problèmes d'inaccessibles et la recherche de solutions praticables sur le terrain. Sur l'ouvrage de Servois, on pourra lire une étude récente sur sa vie et son œuvre (Aebischer & Languereau, 2010).

Longchamps ajoute à celui de Servois l'étude de la construction de courbes points par points, ce qui met en valeur la force des instruments admis, règle et équerre. Comme Servois, il cite beaucoup Mascheroni, en soulignant de belles constructions, et en écartant celles qui passent par la trigonométrie.

Sans revenir sur les destinataires du livre de Mascheroni, précisons bien que le livre de Servois est d'abord destiné aux artilleurs de terrain, ou aux élèves des écoles militaires, et ne vise pas à enseigner la géométrie théorique, quoiqu'il commence par des principes de celle-ci à utiliser en pratique ensuite. Celui de Bergery (Bergery, 1835), que Longchamps cite fréquemment, est un livre d'enseignement, mais plutôt un cours de « sciences industrielles », à vocation sociale, à l'usage des artisans et ouvriers, surtout un traité de dessin linéaire et de représentations par projections des formes des corps. Celui de Longchamps, même s'il concerne beaucoup de problèmes d'artillerie, est d'abord un livre d'exercices pour intéresser les élèves dans un cours de géométrie pure. Rouché souligne que parmi les mérites du livre de Longchamps, il y a le fait de faire à nouveau connaître celui de Servois, qui était depuis longtemps introuvable, et il confirme l'utilité du livre pour l'enseignement (Rouché, 1890). À notre sens, il surpasse le recours aux transversales et aux projections de Servois et Bergery, par l'emploi explicite de transformations, et particulièrement d'involutions de nature géométrique, qu'il emprunte à Magnus (Magnus, 1831), ou invente lui-même (Longchamps, 1866), sans aller jusqu'à une mise en scène « à la Klein », avec les groupes.

## Carrière et travaux de Longchamps

Nous commençons, pour situer la place de l'*Essai* dans l'œuvre de Longchamps, par rappeler sa carrière d'enseignant et de chercheur. Longchamps était mathématicien et professeur de mathématiques. Nous donnons quelques indications sur sa carrière pour situer l'*Essai* dans son travail. Plus d'informations se trouvent sur son *Essai* dans une analyse d'Eugène Rouché (Rouché, 1890), ainsi que sur sa carrière et ses travaux dans une notice (Legoux, 1907), et des écrits récents (Aymé, 2010), (Brasseur, 2011).

Gaston Albert Gohierre de Lonchamps (Alençon 1842 -Paris 1906) est boursier au lycée de Douai à neuf ans, et il a été soutenu par le saint-simonien Prosper Enfantin. Il a étudié au lycée Charlemagne en 1859, en 1862 au lycée Bonaparte (actuel Condorcet), à l'École normale supérieure à partir de 1863. Il commence à enseigner en 1866, à Mont-de-Marsan. Il enseigne à Poitiers en 1869, à Niort en 1871, puis à nouveau à Poitiers en 1872. Il est nommé titulaire de la chaire de mathématiques spéciales en 1875. En 1878 il est nommé à Paris, au lycée Rollin, puis en 1879 au lycée Charlemagne, puis en 1890 au lycée Saint-Louis jusqu'en 1897. Il est nommé au lycée Condorcet en 1898. Il a pris sa retraite en 1900. Il a co-édité le *Journal de mathématiques élémentaires* et le *Journal de mathématiques spéciales*, à la suite de leur fondation en 1877 par Justin Bourget. Il en est le seul directeur entre 1891 et 1896.

La notice de Longchamps sur ses travaux (Longchamps, 1894) comporte 96 livres et articles, dont 35 dans le *Journal de mathématiques spéciales*, et d'autres en Notes aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (CRAS), dans les *Annales scientifiques de l'ENS*, dans *Les nouvelles annales mathématiques* (NAM), *Mathésis*, la *Nouvelle Correspondance Mathématique* de Catalan, *El Progresso Matematico* de Saragosse, les *Bulletin de l'AFAS*. Ses recherches et articles concernent

l'arithmétique, les fonctions elliptiques, la géométrie des courbes et l'utilisation des transformations, la géométrie du triangle, la géométrie pratique.

Le nom de Longchamps est resté attaché à un point remarquable  $L$  d'un triangle  $ABC$  — dit donc « point de Longchamps » — qu'il a spécifié ainsi : en général les cercles  $(a)$ ,  $(b)$  et  $(c)$ , de centres respectifs  $A$ ,  $B$  et  $C$  et dont les rayons sont les mesures  $a$ ,  $b$  et  $c$  des côtés opposés ont un centre radical  $L$ , qui est par définition le point tel que

$$LA^2 - a^2 = LB^2 - b^2 = LC^2 - c^2.$$

Longchamps montre que ce point  $L$  est symétrique de l'orthocentre  $H$  par rapport au centre  $O$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  (Longchamps, 1886<sub>a</sub>). Il a aussi d'autres résultats sur la géométrie du triangle (Longchamps, 1886<sub>b</sub>).

Mais Longchamps a réalisé aussi beaucoup d'études de courbes nouvelles et d'études nouvelles de courbes connues, et encore ce « théorème de Longchamps » que nous examinerons plus loin.

Il a publié aussi, prolongeant son enseignement, un *Cours de mathématiques spéciales* (4 volumes, en 1883-1885 et 1890) et un *Cours de géométrie analytique* (3 volumes, en 1898-1899). En 1890, il publie aussi cet *Essai* qui nous intéresse tout spécialement ici, où — nous allons le préciser surtout par quelques exemples choisis au mieux — il introduit la géométrie pratique par les problèmes de tracés ou de mesures pratiques, à la règle et à l'équerre, de courbes, et de figures inaccessibles.

## La géométrie pratique de Longchamps : une vue d'ensemble

Nous continuons par une vue d'ensemble sommaire de l'*Essai*, que nous venons de situer, dans l'histoire, et dans l'œuvre de son auteur. Il contient 279 questions sur 366 pages, qu'il considère comme un chapitre d'un futur *Traité de géométrie pratique*. Outre de nombreux résultats nouveaux, l'originalité en est l'utilisation et la mise en valeur sur les problèmes pratiques de la géométrie développée au XIX<sup>e</sup> siècle : transversales, transformations, perspectives, géométrie du triangle. De plus l'auteur y voit un recueil d'exercices pour enseigner cette géométrie « nouvelle ».

Chez lui, le terme « pratique » signifie qu'il s'agit de constructions faisables sur une épure ou sur le terrain, tout spécialement avec la règle et l'équerre seules, si possible sans le compas ou la donnée d'un cercle déjà tracé. Les problèmes seront de construire par points des courbes, le plus simplement possible (première partie) et puis de résoudre des questions de topographie où sont en jeu des points inaccessibles, avec encore simplicité et élégance (seconde partie).

La première partie du livre (131 questions) donne d'abord des résultats généraux concernant les constructions de base (parallèles, perpendiculaires, symétriques, conjugués harmoniques, droites transversales aux triangles et aux quadrilatères). Pour les théorèmes classiques, il renvoie à Chasles ou à Rouché et Comberousse, mais il donne aussi des résultats peu connus, voire nouveaux (obtenus par lui-même) tel celui que nous nommons plus loin le « théorème de Longchamps » qui généralise ceux de Menelaüs et Ceva. Il insiste sur les outils utilisés et sur

l'élégance des constructions.

Puis, sans s'occuper de la question d'accessibilité, mais en insistant encore sur les outils, notamment la possibilité de n'utiliser que la règle et l'équerre, sont données des applications à de très nombreuses courbes (constructions de coniques, cubiques comme la cissoïde, et quartiques unicursales comme le limaçon de Pascal ou la lemniscate).

La seconde partie du livre (148 questions) traite des applications aux problèmes d'arpentage et à l'art de la guerre (problèmes de tir), qui consistent essentiellement en la détermination de points et distances inaccessibles, où il s'agit de figures lointaines dont il faut en quelque sorte « téléporter » les propriétés jusqu'ici (près du topographe ou du canonnier), à portée d'instruments et mesures. Sur ce type de problèmes, de la détermination de la hauteur d'une tour ou de la largeur d'une rivière, etc., et sur la question de l'élaboration des instruments les plus robustes nécessaires (téléètres), Longchamps donne de très nombreuses solutions, souvent de son cru, et il rappelle aussi les travaux de prédécesseurs qu'il cite largement (van Schooten, 1657), (Servois, 1804), (Bergery, 1835).

Mais soulignons encore que nombre de ces prédécesseurs destinaient d'abord leurs ouvrages à la « pratique matérielle » des artisans ou des ingénieurs, des militaires, tandis que Longchamps, de surcroît, vise plus explicitement à l'enseignement même de la géométrie pure par les « recherches pratiques ». L'*Essai* est pour lui un ouvrage d'enseignement, où — écrit-il dans sa préface — les professeurs trouveront de nombreux exercices d'enseignement pour aiguïser l'esprit des meilleurs élèves et fixer l'attention de ceux qui n'entrevoient pas toujours l'intérêt de ces études mathématiques (Longchamps, 1890, p. vii). D'ailleurs des chapitres de l'*Essai* sont parus auparavant dans le *Journal de mathématiques élémentaires*, destiné aux élèves et professeurs de l'enseignement secondaire. Et le livre se termine par une liste de 22 exercices, dont le 11<sup>e</sup> dont nous avons traité plus haut (figure 3).

De la matière très riche et souvent neuve de ce livre, nous rapporterons maintenant quelques exemples élégants pris parmi ceux que Longchamps a inventés.

## Constructions de courbes point par point

Longchamps a nettement la notion que la faisabilité des figures dépend d'une part de la limitation des outils, d'autre part de celle du terrain. Avec la question du cercle déjà tracé continûment (théorème de Poncelet-Steiner) que nous avons vu plus haut avec son exercice n° 11, qui permettrait de traiter tous les problèmes du second degré à la règle seule, il sait que règle et équerre constituent un moyen plus faible que règle et cercle tracé, ou règle et conique tracée. Il analyse la possibilité avec ces moyens moindres d'obtenir cependant point par point, autant de points que l'on voudra de nombreuses courbes déterminées (sans pour autant pouvoir créer un tracer continu desdites courbes, ni obtenir leurs intersections avec une droite). La force de ses moyens, règle et équerre, est bien montrée par un exemple de construction paramétrisant des coniques.

Longchamps signale lui-même dans l'introduction (Longchamps, 1890, § 48, p. 44-

45), pour faire entendre « sa pensée générale », une construction point par point d'une ellipse, connaissant trois sommets  $A, A', B$ , en employant seulement la règle et l'équerre, suivant la figure 4 (Longchamps, 1890, p. 45), où  $\angle CAB, \angle CDA$  et  $\angle mAM$  sont des angles droits.

Ainsi, à tout point  $m$  de  $CD$  est associé un point  $M$  de l'ellipse. En effet, si  $H$  est la projection orthogonale de  $M$  sur  $A'A$ , si  $a$  et  $b$  sont les longueurs des axes, on a le « symptôme » de l'ellipse, c'est-à-dire la relation géométrique caractéristique des points lui appartenant

$$\frac{MH^2}{AH \cdot A'H} = \frac{b^2}{a^2},$$

et puis, avec les triangles semblables de la figure,

$$\frac{MH}{A'H} = \frac{mD}{A'D} \quad \text{et} \quad \frac{MH}{AH} = \frac{AD}{mD}$$

et donc

$$\frac{MH^2}{AH \cdot A'H} = \frac{AD}{A'D} \quad \text{et} \quad \frac{AD}{A'D} = \frac{b^2}{a^2},$$

si bien que  $m$  se déplace sur  $CD$  quand  $M$  parcourt l'ellipse.

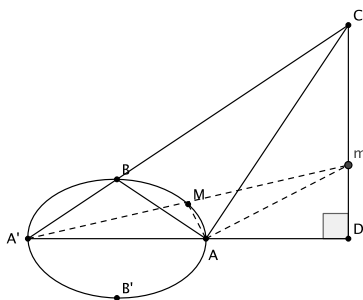


FIGURE 4 – Ellipse à la règle et l'équerre

Si on fait cette construction de Longchamps en fixant d'abord  $A'A$ , de longueur  $2a$ , son milieu que l'on note  $O$ , et en plaçant  $D$  sur  $A'A$  à la distance  $d > a$  de  $O$ , on obtient  $M = (x, y)$ , un point sur l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{d+a} + \frac{y^2}{d-a} = \frac{a^2}{d+a},$$

sauf le point  $A'$ .

On a  $OB = b = a\sqrt{\frac{d-a}{d+a}} = \frac{A'A}{2}\sqrt{\frac{AD}{A'D}}$ , et l'excentricité  $e = \sqrt{\frac{2a}{d+a}} = \sqrt{\frac{A'A}{A'D}}$ .

Si  $d < a$ , la construction donne une hyperbole, et si  $d = a$ , elle donne une parabole.

## Transversales et propriétés de perspectives

La première partie de l'*Essai*, est assez semblable au début du livre de Ser-vois. Après la présentation des outils ou instruments, elle donne des théorèmes de

Chasles, de Desargues, de Pappus, de Mac-Laurin et de Braikenridge, et, puis les théorèmes de Jean de Ceva (Ceva, 1678), Joseph Diaz Gergonne (Gergonne, 1818), Ménélaüs (Menelaüs, vers 80). Et elle donne le début de la « théorie générale des transversales », systématisée par Carnot (Carnot, 1801, 1803, 1806), qui étend le théorème de Menelaüs au cas de courbes algébriques (théorème de Carnot). Longchamps cite peu Carnot ou mal dans l'introduction, et corrige ensuite cette erreur (Longchamps, 1890, p. 198). La théorie des transversales est utilisée en « géométrie pratique » notamment par Servois (Servois, 1804) et Brianchon (Brianchon, 1818), pour mesurer des distances inaccessibles via des alignements, et, parmi les solutions, certaines sont rapportées par Longchamps, parmi diverses, de Bergery et autres.

## Ceva et Menelaüs

On considère la figure 5.

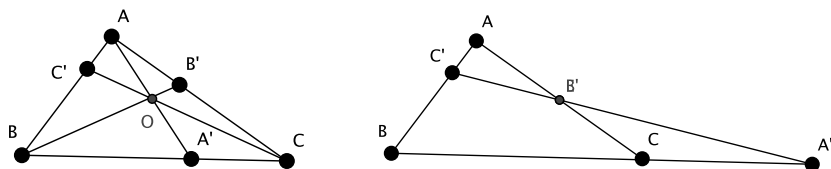


FIGURE 5 – Les figures de Ceva et Gergonne, et de Menelaüs

1. Lorsque trois droites partant des sommets d'un triangle  $ABC$ , concourent en un point  $O$  (figure 5 à gauche) et rencontrent les côtés de ce triangle aux points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , on a les relations :

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1, \quad \frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1,$$

chacune exprimant réciproquement la concourance de  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$ , pour  $A', B', C'$  pris sur  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ .

2. Lorsqu'une transversale  $\Delta$  rencontre les côtés d'un triangle aux points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  (figure 5 à droite), on a la relation :

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

qui exprime réciproquement l'alignement de  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  pris sur  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ .

En fait, les théorèmes de Menelaüs et de Ceva sont duaux l'un de l'autre, par « transformation par polaire réciproque », et de même, le théorème de Carnot qui généralise Menelaüs, admet un dual qui généralise Ceva (Cazamian, 1895).

Longchamps démontre qu'en fait les théorèmes de Ceva et de Menelaüs sont des cas particuliers du « théorème de Longchamps » que nous présentons plus loin (figure 10), précisant les aires des triangles en jeu. Si  $A'B'C'$  est plat, nous

obtenons le cas particulier de Menelaüs, si  $a'b'c'$  est un point, nous obtenons le cas particulier de Ceva. On comparera la figure 10 aux deux éléments de la figure 5.

Remarquons aussi qu'avec le cinquième postulat d'Euclide, le théorème dit en France « de Thalès » — dont la forme projective est le théorème de Desargues (Bkouche, 1998, p. 166) — permet de tester, localement, qu'au loin il n'y a jamais de rencontre (parallélisme). Enfin, notons que le théorème de Ménélaus, qui généralise celui de Thalès, permet donc de connaître, par mesure locale, à quelle distance a lieu telle rencontre lointaine, comme nous allons voir dans les prochains problèmes.

## Art de la guerre, problèmes d'arpentages et mesures inaccessibles : quelques exemples

Les principaux problèmes d'inaccessibles envisagés dans l'*Essai* sont de déterminer :

- le prolongement d'une droite au-delà d'un obstacle (Longchamps, 1890, p. 141, p. 166-190) ;
- la bissectrice d'un angle donné dont le sommet est inaccessible (Longchamps, 1890, p. 148) ;
- la largeur de la rivière (Longchamps, 1890, p. 153-166) ;
- la distance au point inaccessible (Longchamps, 1890, p. 190-205) ;
- une parallèle à une droite inaccessible, par un point donné  $C$  (Longchamps, 1890, p. 224) ;
- une visée du milieu d'un segment inaccessible (Longchamps, 1890, p. 235) ;
- la distance à une droite inaccessible (Longchamps, 1890, p. 238) ;
- la perpendiculaire à la droite inaccessible (Longchamps, 1890, p. 240) ;
- la distance de deux points inaccessibles, invisibles (Longchamps, 1890, p. 242-256) ;
- l'alignement de points inaccessibles (Longchamps, 1890, p. 257) ;
- l'aire du triangle inaccessible (Longchamps, 1890, p. 264-272) ;
- une visée du point de concours de deux droites inaccessibles (Longchamps, 1890, p. 272) ;
- reconnaître si trois droites inaccessibles sont concourantes (Longchamps, 1890, p. 273).

On comparera avec la table des matières de Servois, qui est très voisine (Servois, 1806).

Nous donnerons trois exemples.

### *La distance à un point inaccessible*

Un observateur sur la ligne  $ACBD$  veut déterminer la distance  $CM$  au point inaccessible  $M$ .

La solution de van Schooten (Longchamps, 1890, p. 197-198) tient à ce que les diagonales d'un quadrilatère complet déterminent sur chacune d'elles une division

harmonique (figure 6). On a donc :

$$\frac{1}{CM} = \frac{1}{CK} - \frac{2}{CI}.$$

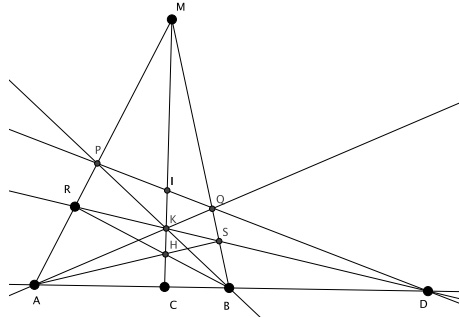


FIGURE 6 – Quadrilatère complet

Un observateur sur la ligne  $OAB$  veut déterminer la distance  $OM$  au point inaccessible  $M$ .

La solution de Mascheroni (Longchamps, 1890, p. 199) utilise le théorème Ménélaüs, tandis que la solution de Longchamps (Longchamps, 1890, p. 199-200) se fait à l'équerre. Dans la figure 7 on a, à gauche (pour Mascheroni), et à droite (pour Longchamps, avec deux angles droits  $OAM$  puis  $ABM$ ) :

$$OM = \frac{OA \cdot OC \cdot DB}{OA \cdot DB - AB \cdot DC}, \quad OM = \frac{OA^2}{OB}.$$

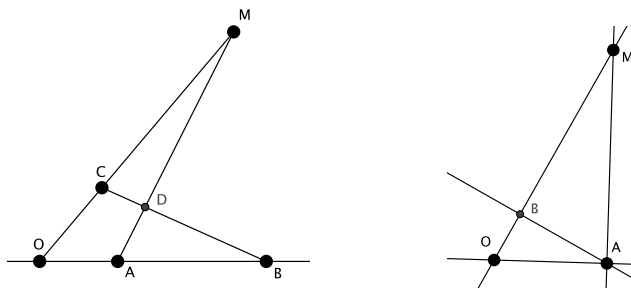


FIGURE 7 – Distance au point inaccessible  $M$  : Mascheroni, Longchamps

***La distance de  $O$  au point  $M$  inaccessible et, de plus, invisible depuis  $O$***

Un observateur sur la ligne  $AOB$  veut déterminer la distance  $OM$  au point inaccessible  $M$  invisible depuis  $O$ .



Longchamps (§ 43, p. 200-202) examine la figure 8. Il prend  $O'$  le conjugué harmonique de  $O$  par rapport à  $A$  et  $B$ , puis la transversale  $O'PQ$ , avec  $AP$  et  $BQ$  deux visées de  $M$  depuis  $A$  et  $B$ , et l'intersection  $C$  de  $PB$  et  $AQ$ . La visée depuis  $O$  vers  $M$  est alors la direction  $OC$ .

Il mène alors les parallèles  $PP'$  et  $QQ'$  à  $OC$ . Le théorème de Gergonne donne

$$\frac{OC}{OM} + \frac{PC}{PB} + \frac{QC}{QA} = 1,$$

et puisque

$$\frac{PC}{PB} = 1 - \frac{CB}{PB} = 1 - \frac{CO}{PP'} \quad \text{et} \quad \frac{QC}{QA} = 1 - \frac{CA}{QA} = 1 - \frac{CO}{QQ'},$$

il vient

$$\frac{OC}{OM} + 1 - \frac{CO}{PP'} - \frac{CO}{QQ'} = 0,$$

et donc la distance  $OM$  vaut :

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} - \frac{1}{CO}.$$

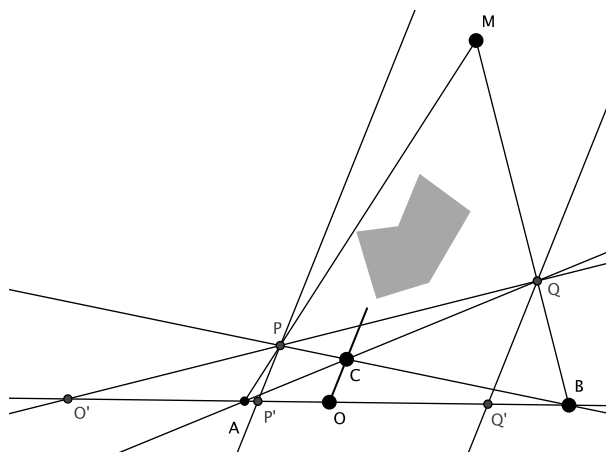


FIGURE 8 – Point inaccessible  $M$  invisible depuis  $O$

### *Problème de la distance entre deux points visibles inaccessibles*

Un observateur placé sur la ligne  $DC$  veut déterminer la distance  $AB$  entre deux points inaccessibles visibles depuis  $D$  et  $C$ .

Dans la figure 9 à gauche (Longchamps, 1890, p. 224-225), nous voyons comment obtenir une parallèle  $PQ$  accessible près de  $C$  à une droite inaccessible  $AB$ , en

menant par un point  $M$  quelconque sur  $CD$  les parallèles à  $DA$  et  $DB$ , qui rencontrent les parallèles à  $CA$  et  $CB$  en  $P$  et  $Q$  : alors  $PQ$  est parallèle à  $AB$ . La distance inaccessible  $AB$  est donnée par :

$$AB = PQ \frac{CD}{CM}.$$

Ayant déterminé  $PQ$ , une perpendiculaire à  $PQ$  est donc perpendiculaire à  $AB$ . Alors avec la figure 9 à droite (Longchamps, 1890, p. 246), la distance entre deux points inaccessibles  $A$  et  $B$  via leurs réciproques « en retour d'équerre »  $A'$  et  $B'$  vis-à-vis d'une perpendiculaire  $OH$  à  $AB$ , en zone accessible, est

$$AB = OH^2 \left( \frac{1}{HA'} - \frac{1}{HB'} \right).$$

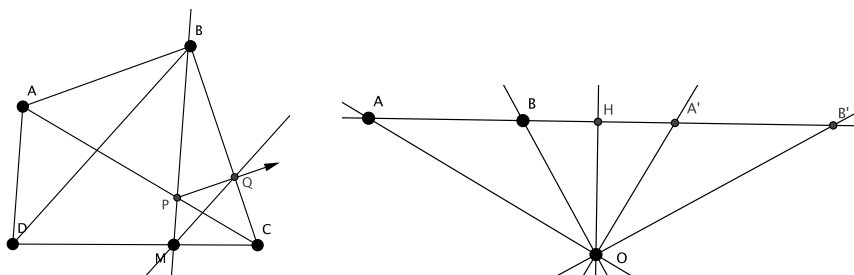


FIGURE 9 – Distance de deux points  $A$  et  $B$  inaccessibles, visibles depuis  $C$  et  $D$

## Associé et réciproque de Longchamps

Après avoir vu comment les théories de transversales et perspectives peuvent servir à traiter des inaccessibles, nous revenons au début de l'*Essai*, où Longchamps traite aussi d'une transformation « réciproque » de son cru, nouvelle, qui sera aussi un outil du côté des figures inaccessibles. On doit souligner qu'il s'agit d'un approfondissement véritable, innovateur, de la première partie du livre de Servois (Servois, 1804). En fait, il s'agit de l'introduction, en géométrie pratique, des transformations involutives dans le fil de Ludwig Magnus (Magnus, 1831).

Dans un article de 1866 (Longchamps, 1866), remarqué et apprécié par Michel Chasles, Longchamps introduisait, relativement à un triangle  $ABC$  la notion d'une « réciprocity », reprise dans l'*Essai* au chapitre II (p. 15 et s.), que nous présentons ci-après en quatre points (figure 10).

### La transformation réciproque (à suivre sur la figure 10)

1. Étant donné un triangle  $A'B'C'$  « inscrit » dans un triangle  $ABC$ , avec  $A'$  sur  $BC$ ,  $B'$  sur  $CA$ ,  $C'$  sur  $AB$ , alors les droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  se rencontrent deux par deux en  $c'$ ,  $a'$  et  $b'$ , déterminant ainsi un triangle  $c'a'b'$  dit « associé » à

$A'B'C'$ , sur lequel  $A'B'C'$  et  $ABC$  sont inscrits.

2. Soient  $A''$  le symétrique de  $A'$  par rapport au milieu  $\alpha$  de  $BC$ ,  $B''$  le symétrique de  $B'$  par rapport au milieu  $\beta$  de  $CA$  et  $C''$  le symétrique de  $C'$  par rapport au milieu  $\gamma$  de  $AB$ . Les triangles inscrits  $A''B''C''$  et  $A'B'C'$  sont dit « réciproques » et ils ont même aire. On note  $c''a''b''$  l'associé de  $A''B''C''$ .

3. Si  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont obtenus comme intersections avec  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$  de droites concourantes  $O'A$ ,  $O'B$  et  $O'C$ , alors  $AA''$ ,  $BB''$  et  $CC''$  sont concourantes en  $O''$  qui est dit réciproque de  $O'$  (voir Ceva).

4. Si  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont obtenus comme intersections avec  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$  d'une transversale  $\Delta'$ , alors  $A''$ ,  $B''$  et  $C''$  sont sur une droite  $\Delta''$  dite transversale réciproque de  $\Delta'$  (voir Menelaüs).

Dans l'*Essai* le théorème 68 et la remarque 69, le théorème 72, nous apprennent encore :

1. Lorsqu'un point  $O'$  est mobile sur une droite  $\Delta'$ , le point réciproque  $O''$  est mobile sur une conique  $\Gamma$  circonscrite au triangle  $ABC$ . La réciproque  $\Delta''$  de  $\Delta'$  passe par les points  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  où les tangentes à  $\Gamma$  en  $A$ ,  $B$  et  $C$  coupent  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ .

2. Lorsqu'une droite  $\Delta'$  tourne autour d'un point fixe  $K$ , la transversale réciproque  $\Delta''$  enveloppe une conique  $\Gamma$  inscrite au triangle de référence  $ABC$ .

### Application aux coniques

Par exemple, il applique sa transformation réciproque (Longchamps, 1890, § 76, p. 70) — qui est constructible à la règle et à l'équerre — pour « construire une conique connaissant cinq points  $A, B, C, D, E$  ». Il procède comme suit, avec sa transformation réciproque, que nous venons d'introduire. Prenons les points  $D'$ ,  $E'$  réciproques des points  $D$  et  $E$ , par rapport au triangle  $ABC$ . À tout point  $M'$ , pris sur  $D'E'$ , correspond un point réciproque  $M$  qui appartient à la conique cherchée. Celle-ci peut ainsi se construire point par point. Il ajoute qu'en prenant la transversale réciproque de  $D'E'$  on obtient une droite qui coupe les côtés du triangle  $ABC$  en des points  $\alpha, \beta, \gamma$ . Les droites  $A\alpha$ ,  $B\beta$ ,  $C\gamma$  sont les tangentes à la conique proposée aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Le lecteur comparera avec les solutions utilisant le théorème de Pascal ou celui de Chasles.

### Involutions et figures lointaines

On rapprochera cette « transformation réciproque » de Longchamps (Longchamps, 1866), aussi appelée « involution isotomique », de l'involution de Mathieu (Mathieu, 1865) nommée par Joseph Neuberg « involution isogonale ». Ce sont deux involutions quadratiques transformant les droites en des coniques passant par les sommets du triangle de référence. L'une s'obtient par trois symétries vis-à-vis des milieux des côtés, l'autre par trois symétries vis-à-vis des milieux des angles (bissectrices), elles sont donc en un sens duales. On pourra aussi comparer à l'inversion relative à un cercle qui se dégage des travaux plus généraux de Magnus (Magnus, 1831), que cite Longchamp dans son article (Longchamps, 1866). Mais ce qui compte ici, c'est que Longchamps promeut ainsi l'idée que les transformations, notamment celles qui s'obtiennent en composant des involutions, peuvent servir en

géométrie pratique, pour « approcher » les figures lointaines, comme nous allons le voir dans le problème qui suit.

### Théorème de Longchamps

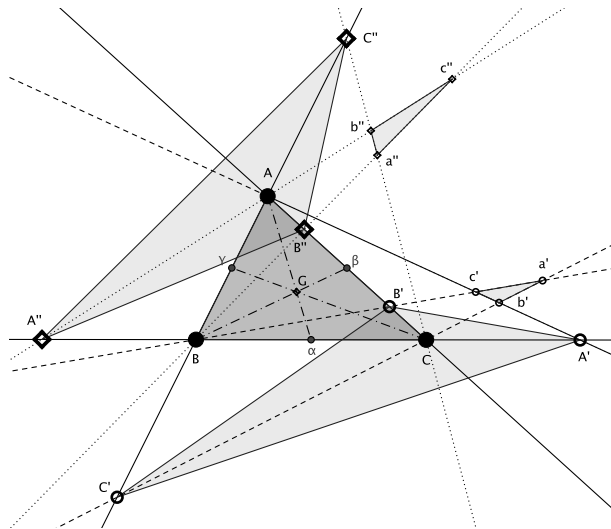


FIGURE 10 – Réciproques et associés : configuration de Longchamps

Dans l'*Essai* de 1890, Longchamps examine en fait la configuration générale qu'il ne dessine pas, et que nous proposons dans la figure 10, d'un triangle  $ABC$  avec un triangle inscrit  $A'B'C'$ , son réciproque  $A''B''C''$ , et les associés  $a'b'c'$  et  $a''b''c''$ . Il démontre alors le théorème suivant, dont la preuve passe l'interprétation des coordonnées barycentriques  $u, v, w$  en termes d'aires, à la manière d'Euclide (Euclide, 1994, Livre VI, prop. 1) comme, par exemple, avec  $M$  quelconque :

$$u = \frac{A'B}{A'C} = \frac{\text{aire}(MA'B)}{\text{aire}(MA'C)}.$$

THÉORÈME DE LONGCHAMPS (FIGURE 10). Soit  $A', B', C'$  trois points quelconques pris sur les côtés du triangle  $ABC$  d'aire  $S$ . L'aire  $\Sigma$  du triangle associé  $a'b'c'$  est donnée par la formule :

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{(1 + uvw)^2}{(1 - v + uw)(1 - u + vw)(1 - w + uv)}$$

avec

$$u = \frac{A'B}{A'C}, \quad v = \frac{B'C}{B'A}, \quad w = \frac{C'A}{C'B}.$$

L'aire  $\sigma$  du triangle  $A'B'C'$ , égale à celle du triangle réciproque  $A''B''C''$ , est donnée par la formule :

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{(1 - uvw)}{(1 - u)(1 - v)(1 - w)}.$$

Il serait intéressant, au plan théorique, d'unifier le théorème de Carnot et le théorème de Longchamps, qui tous deux généralisent celui de Menelaüs, dans des directions différentes. En tous cas, Longchamps, unifiant et approfondissant donc les théorèmes de Ceva et de Menelaüs, fournit bien ainsi un outil puissant pour « téléporter » les propriétés des figures lointaines inaccessibles de sorte à les toucher et mesurer. Notre dernier exemple dans cet article reposera sur les figure 11 et figure 12 pour la détermination de l'aire d'un triangle inaccessible.

**L'aire d'un triangle inaccessible**

Dans l'*Essai* (Longchamps, 1890, p. 268-270) Longchamps examine le problème suivant : « Un triangle inaccessible, de dimensions quelconques, dont les sommets supposés visibles peuvent être très éloignés, étant considéré ; trouver l'aire de ce triangle, si restreint que soit le terrain accessible ».

On peut traiter le problème par inversion (figure 11).

On a  $OA.OA' = h^2$  et

$$\frac{\text{aire}(OAB)}{\text{aire}(OA'B')} = \frac{OA.OB}{OA'.OB'} = \frac{h^4}{OA'^2.OB'^2}$$

et avec  $\text{aire}(ABC) = \text{aire}(OAB) + \text{aire}(OBC) - \text{aire}(OAC)$ , on a :

$$\text{aire}(ABC) = \frac{h^4}{OA'^2.OB'^2.OC'^2} (OC'^2.OA'B' + OA'^2.OB'C' - OB'^2.OA'C').$$

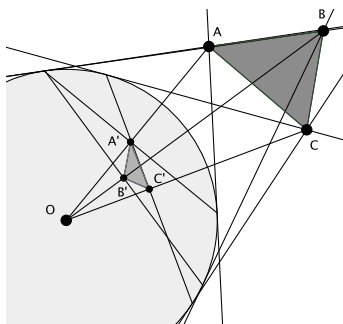


FIGURE 11 – Aire d'un triangle inaccessible, I

On peut aussi (figure 12) traiter le problème par le théorème de Longchamps vu plus haut, avec sa formule des aires  $\Sigma/S$ . La figure 12, partie droite, est la figure Fig. 260 de Longchamps, où  $A$  et  $A'$  sont conjugués harmoniques vis-à-vis de  $\gamma\beta$ , etc. ; à noter dans la partie gauche de cette figure 12, une manière de construire le conjugué harmonique  $A'$  d'un point lointain  $A$ , en visant  $A$  depuis  $O$ , prenant une parallèle  $mm''$  à cette visée, le milieu  $m'$  de  $mm''$ , d'où  $A'$ , aligné avec  $O$  et  $m''$ .

On a  $u = \frac{A'\gamma}{A'\beta} = \frac{A\gamma}{A\beta}$ , etc. d'où :

$$\text{aire}(ABC) = \text{aire}(\alpha\beta\gamma) \frac{1 - uvw}{(1 - u)(1 - v)(1 - w)}.$$

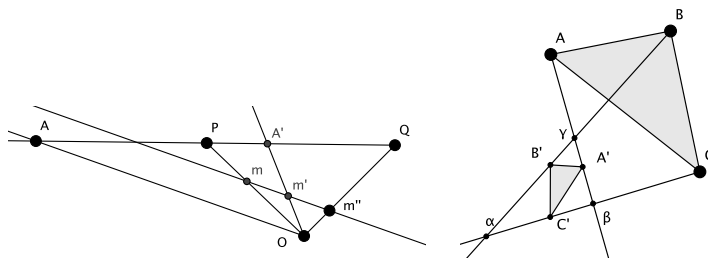


FIGURE 12 – Aire d'un triangle inaccessible, II

## Conclusion

Ainsi l'*Essai* de Longchamps nous fournit la matière pour répondre aux trois questions de l'introduction : cette matière indique comment peuvent s'examiner et se résoudre de nombreux problèmes d'inaccessibles, dont nous n'avons pu donner qu'un faible échantillon ; ce qui, dans ces solutions, est mis en œuvre comme théorie géométrique, et surtout comme gestes de transformations, éventuellement nouveaux ; et donc comment, par là, on peut comprendre et enseigner la théorie géométrique qui rend accessible l'inaccessible, exhibant donc l'utilité de cette théorie. En empruntant au livre de Longchamps, on aura un matériau pédagogique neuf, avec lequel on pourra construire l'articulation entre théorie et pratique, la meilleure manière d'instruire.

## Références bibliographiques

- AEBISCHER Anne-Marie, LANGUEREAU, Hombeline, 2010, *Servois ou la géométrie à l'école de l'artillerie*, Besançon, P.U. de Franche-Comté.
- AYMÉ Jean-Louis, 2010, Gohierre de Longchamps dans les journaux scientifiques, en ligne à [jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Transversale reciproque.pdf](http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Transversale%20reciproque.pdf), le 1/10/2010.
- BACHELARD Gaston, 1968, *Le nouvel esprit scientifique*, Paris, PUF, coll. Quadrige, 1<sup>re</sup> éd. 1934.
- BARBIN Évelyne, 2018<sub>a</sub>, « La dioptré d'Héron d'Alexandrie : des investigations pratiques et théoriques », in BARBIN, Évelyne et al., éd., 2018, *Les mathématiques et le réel*, Rennes, PUR, p. 33-48.
- BARBIN Évelyne, 2018<sub>b</sub>, « L'instrument mathématique comme invention et comme connaissance-en-action », *Repères IREM*, 110, p. 59-77.
- BARBIN Évelyne, 2019, « Using ancient instruments in the teaching of geometry with Bachelard's phenomeno-technology », in É.Barbin et al., eds., *Proceedings of the Eighth Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*, Skriftserie 2019 nr 11, Oslo Metropolitan University, p. 69-80.
- BARBIN Évelyne, BÉNARD, Dominique, MOUSSARD, Guillaume, éd., 2018, *Les mathématiques et le réel*, Rennes, PUR.

- BÉNARD Dominique, 2014, « Agrandir, réduire, cartographier, mesurer l'inaccessible (Pantographe) », in BARBIN Évelyne, *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses.
- BERGERY Claude-Lucien, 1835, *Géométrie appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers*, 3<sup>e</sup> éd., Metz, Mme Thiel, et Paris, Bachelier.
- BKOUCHE Rudolf, 1998, « La règle, un instrument de géométrie projective », *Bulletin APMEP n° 415*, p. 163-171.
- BRASSEUR Roland, 2011, Quelques scientifiques ayant enseigné en classe préparatoire aux grandes écoles. Saison 7 : Gaston Gohierre de Longchamps, Boleslas Niewenglowski, *Bulletin de l'Union des professeurs de spéciales*, 84<sup>ème</sup> année, n° 235, juillet, p. 15-22 et p. 22-28.
- BRIANCHON Charles Julien, 1818, *Applications de la théorie des transversales*, Paris, Bachelier.
- CARNOT Lazare, 1801, *Corrélation des Figures*, Paris, Duprats.
- CARNOT Lazare, 1803, *Géométrie de position*, Paris, Duprats.
- CARNOT Lazare Nicholas Marguerite, 1806, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace ; suivi d'un essai sur la théorie des transversales*, Paris, Courcier.
- CAZAMIAN André, 1895, « Sur le théorème de Carnot », *Nouvelles annales de mathématiques*, 3<sup>e</sup> série, tome 14, p. 30-40.
- CHASLES Michel, 1837, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, Hayez.
- CHASLES Michel, 1860, *Les trois livres des porismes d'Euclide*, Paris, Mallet-Bachelier.
- CHEVALARIAS Nathalie, 2018, « Instruments et méthodes de dessin : de la géométrie pratique vers l'enseignement secondaire au début du XX<sup>e</sup> siècle », in BARBIN, Évelyne, et al., (éd.), 2018, *Les mathématiques et le réel*, Rennes, PUR, p. 79-94.
- CLAIRAUT Alexis, 1741, *Éléments de géométrie*, Paris, Lambert & Durand.
- CEVA Jean de, 1678, *De Lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*, Milan, Ludovicus Montia.
- CREMONA Luigi, 1875, *Éléments de géométrie projective*, Paris, Gauthiers-Villars.
- EUCLIDE, 1994, *Les éléments*, Volume 2. Livres V à IX, trad. B. Vitrac, Paris, PUF.
- HÉRON D'ALEXANDRIE, 1858, *De la dioptré*, trad. Vincent, A. J. H., in « Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs », Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale, Paris, Imprimerie impériale, tome XIX, p. 157-337.
- KLEIN Felix, 1872, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Andreas Deichert, Erlangen. Trad. Henri Padé, 1974, (Préface de Jean Dieudonné, postface de François Russo), *Le programme d'Erlangen : considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Paris, Gauthier-Villars.
- LAMBERT Jean-Henri, 1987, Notes et additions à la perspective affranchie du plan géométral, in Roger LAURENT et Jean PEIFFER, *La place de J.H. Lambert dans l'histoire de la perspective*, Paris, Cedic-Nathan, p. 266.

- LEGOUX Alphonse, 1907, « Nécrologie de Gohierre de Longchamps », dans l'*Annuaire de l'Association amicale des anciens élèves de l'ENS*.
- LONGCHAMPS Gaston Albert Gohierre de, 1866, Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation en Géométrie, *Annales scientifiques de l'ÉNS*, 1<sup>re</sup> série, tome 3, p. 321-341.
- LONGCHAMPS Gaston Albert Gohierre de, 1886<sub>a</sub>, Sur un nouveau cercle remarquable du plan d'un triangle, *Journal de mathématiques spéciales*, p. 57, 85, 100, 126.
- LONGCHAMPS Gaston Albert Gohierre de, 1886<sub>b</sub>, Généralités sur la géométrie du triangle, *Journal de mathématiques spéciales*, pp. 109, 127, 154, 177, 198, 229, 243, 270.
- LONGCHAMPS Gaston Albert Gohierre de, 1890, *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre*, Paris, Delagrave.
- LONGCHAMPS Gaston Albert Gohierre de, 1894, Notice sur les travaux scientifiques de M. G. de Longchamps, Paris, Chaix.
- MAGNUS Ludwig Immanuel, 1831, Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes en géométrie, *Journal für die reine und angewandt Mathematik*, VIII, p. 51-63.
- MASCHERONI Lorenzo, 1793, *Géométrie de la règle (Problèmes pour les arpenteurs avec différentes solutions)*, Pavie, trad. française 1803, Paris, Courcier.
- MASCHERONI Lorenzo, 1798, *Géométrie du compas par L. Mascheroni*, trad. A. M. Carrette, Paris, Duprat.
- MATHIEU Jean Joseph Auguste, 1865, Étude de géométrie comparée avec applications aux sections coniques, *Nouvelles Annales de mathématiques*, p. 393-407.
- MENELAÏS D'ALEXANDRIE, vers 80 après J.-C., *Sphaerica*, t. III, in BJÖRNBO, Axel Anton, 1902, *Studien über Menelaos Sphärik*.
- MOYON Marc, 2012, Diviser un triangle au moyen-Âge : l'exemple des géométries pratiques latines, in BARBIN Évelyne, éd., *Des mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*, Paris, Vuibert, p. 73-90.
- ROUCHÉ Émile, 1890, compte-rendu de « Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre », par M. G. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, in *Nouvelles annales de mathématiques*, 3<sup>e</sup> série, tome 9, p. 228-233.
- SERVOIS François-Joseph, 1804, *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique*, Metz, Devilly.
- VAN SCHOOTEN Frans, 1657, Livre II des *Exercitationes geometricæ*.
- STEINER Jakob, 1833, *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises*, Berlin, republié en 1895 par Arthur von Oettingen.



## Planimètres, intégraphes, tractoriographes : les instruments de la géométrie transcendante

Dominique TOURNÈS, Claude VOILLEQUIN, Isabelle VOILLEQUIN

### Introduction

Après la naissance du calcul infinitésimal, les mathématiciens et les ingénieurs ont cherché à concevoir des instruments mécaniques pour effectuer concrètement les opérations du nouveau calcul et construire d'un mouvement continu les courbes transcendantes désormais admises en géométrie<sup>1</sup>. En 1693, Leibniz lui-même a donné le schéma d'une sorte d'intégraphe universel permettant de réaliser les quadratures et de résoudre le problème inverse des tangentes (Leibniz, 1693). En fait, c'est surtout au XIX<sup>e</sup> siècle qu'ont été inventés, fabriqués et diffusés des instruments mécaniques de précision au service de la géométrie transcendante (Jacob, 1911 ; Morin, 1913). Jusque dans les années 1970, ils ont été utiles aux scientifiques et aux ingénieurs pour calculer les aires des surfaces planes et tracer les courbes intégrales des équations différentielles. L'objectif de notre atelier était de faire découvrir aux participants quelques-uns de ces instruments. Nous leur avons d'abord présenté le fonctionnement d'un planimètre à cône à l'aide de simulations numériques, puis nous leur avons fait manipuler de vrais planimètres polaires pour calculer des aires. Dans une seconde partie, ils ont pu se livrer à des expérimentations à l'aide d'un intégraphe et d'un tractoriographe construits pour l'occasion par Claude Voillequin, et ils se sont servi d'une tractoire de cercle, tracée par le tractoriographe, pour réaliser une construction exacte de l'heptagone régulier. Ne pouvant rendre compte en totalité de l'aspect vivant et interactif de l'atelier, cet article se propose principalement de décrire les quatre instruments étudiés, de les replacer dans leur contexte historique et de fournir une justification mathématique de leur fonctionnement.

1. Du point de vue épistémologique, la conception d'instruments apparaissait essentielle pour légitimer l'emploi de ces nouvelles courbes (Bos, 1988 ; Tournès, 2009).

## Planimètre à cône

Historiquement, le planimètre à cône est le premier instrument exact de mesure des surfaces. L'idée d'utiliser comme mécanisme intégrateur une roulette qui peut être déplacée le long d'une génératrice d'un cône est due à un ingénieur bavarois, Johann Martin Hermann (1785-1841). Inventé vers 1814, le planimètre de Hermann est toutefois resté à l'état de prototype (Fischer, 2017, p. 3502-3504). Ce n'est que dans les années 1830 que le principe de l'appareil a été repris par plusieurs fabricants pour des productions en petites séries. À partir des années 1850, le planimètre à cône a été remplacé par le planimètre à disque, dont la théorie est la même si l'on considère un disque comme un cône d'angle au sommet plat. Cependant, ces instruments n'ont eu qu'un succès limité en raison de leur coût élevé. Ils ont été rapidement éclipsés par le planimètre polaire (voir section suivante), beaucoup moins cher et plus simple d'utilisation.

### Description du planimètre à cône

Les divers éléments d'un planimètre à cône sont schématisés sur la figure 1. Le support est l'élément de référence, immobile par rapport à la table. La feuille avec le tracé de la courbe  $\mathcal{C}$  est fixée au support. L'extrémité  $M$  du stylet lié au porte-stylet décrit la courbe  $\mathcal{C}$ . Le chariot se déplace, par rapport au support, en translation parallèlement à  $Ox$ .

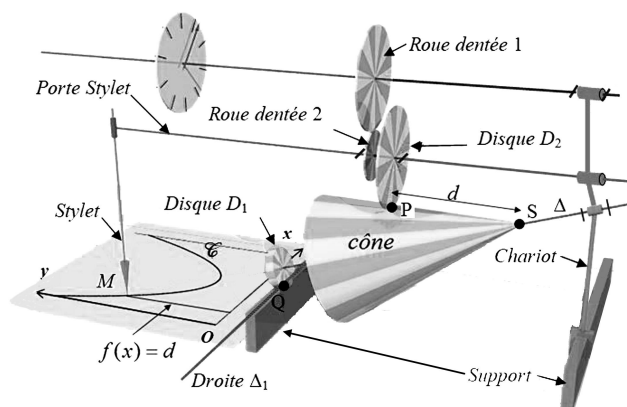


FIGURE 1 – Schéma d'ensemble d'un planimètre à cône (figure reprise et modifiée du site Images des mathématiques : <https://images.math.cnrs.fr/Un-planimetre-a-cone.html>)

Le cône de sommet  $S$ , muni d'un disque  $D_1$ , tourne par rapport au chariot autour de l'axe  $\Delta$ . L'inclinaison de l'axe est choisie de façon que la génératrice supérieure du cône soit horizontale. Le disque  $D_1$ , en contact en  $Q$  avec le support, roule sans glisser sur celui-ci. Le point  $Q$  décrit la droite  $\Delta_1$ .

Le porte-stylet se déplace, par rapport au chariot, en translation parallèlement à  $Oy$  (figure 2). Le disque  $D_2$ , en contact en  $P$  avec la génératrice supérieure du

cône, roule sans glisser sur le cône et glisse le long de cette génératrice. La roue dentée 2 est solidaire de  $D_2$ . L'ensemble du disque  $D_2$  et de la roue 2 tourne autour du porte-stylet sans translation : quand le stylet est à la distance  $d$  de l'axe  $Ox$ , le point  $P$  est à la distance  $d$  du sommet  $S$  du cône. En particulier, quand le stylet se trouve sur l'axe  $Ox$  (cas  $d = 0$ ), le point  $P$  est confondu avec le sommet du cône, donc il n'y a pas de rotation du disque  $D_2$ .

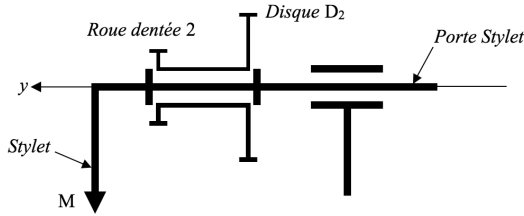


FIGURE 2 – Configuration du porte-stylet

La roue dentée 1 tourne autour d'un axe parallèle à  $Oy$  et lié à l'aiguille. L'ensemble des roues 1 et 2 constitue un réducteur de vitesse. Le cadran, quant à lui, est lié au support.

### Fonctionnement du planimètre à cône

Supposons que le stylet passe du point  $M_1$  au point  $M_2$  en suivant le parcours  $M_1K_1M_2$  (figure 3).

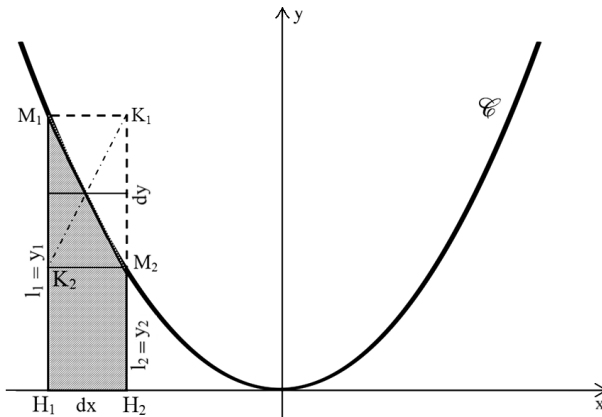


FIGURE 3 – Mouvement élémentaire du stylet le long de la courbe  $\mathcal{C}$

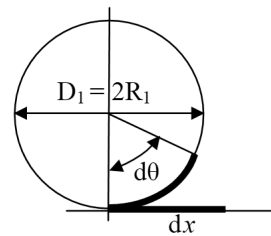


FIGURE 4 – Rotation élémentaire du disque  $D_1$

Pour le segment  $M_1K_1$ , le porte-stylet se déplace de  $dx$  dans la direction  $Ox$ , entraînant un déplacement identique du chariot par rapport au support. L'axe du cône, entraîné en translation par le chariot, se déplace aussi de  $dx$ . Il y a roulement

sans glissement en  $Q$  au contact entre le disque  $D_1$  de rayon  $R_1$  et la droite  $\Delta_1$ , donc il y a proportionnalité entre l'angle de rotation  $d\theta$  du cône par rapport au chariot et le déplacement  $dx$  du porte-styilet par rapport au support :  $dx = R_1 d\theta$  (figure 4).

Pour le segment  $K_1M_2$ , le porte-styilet se déplace dans la direction  $Oy$  de  $-dy$  par rapport au chariot, entraînant ainsi une translation de l'ensemble du disque  $D_2$  et de la roue 2 de  $-dy$  par rapport au cône. Le point  $P$ , point de contact entre le disque 2 et le cône, se déplace le long de la génératrice supérieure du cône, modifiant ainsi le rayon du cercle de roulement sans glissement entre le disque 2 et le cône.

Pour un parcours entre  $M_1$  et  $M_2$  en suivant la courbe  $\mathcal{C}$ , il y aura un déplacement du point  $P$  le long de la génératrice supérieure de  $P_1$  à  $P_2$  (figure 5) et, par suite, une variation du diamètre de la section droite du cône sur laquelle roule le disque  $D_2$ , qui passera de  $d_1$  à  $d_2$ . Comme  $dx$  est infiniment petit, la rotation du disque  $D_2$  est la même que s'il avait roulé constamment sur un cercle de diamètre  $d_{moy}$ , moyenne de  $d_1$  et  $d_2$ , ce qui revient à confondre la corde et la courbe. Simultanément, le chariot se déplace de  $dx$ , donc le cône tourne de  $d\theta = \frac{2dx}{D_1}$  (pour ne pas multiplier les notations, on note  $D_1$  le diamètre du disque  $D_1$  et  $D_2$  celui du disque  $D_2$ ).

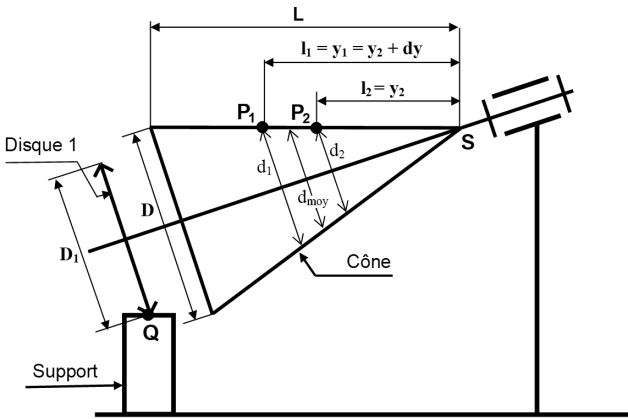


FIGURE 5 – Mouvement élémentaire du disque  $D_2$  le long de la génératrice du cône

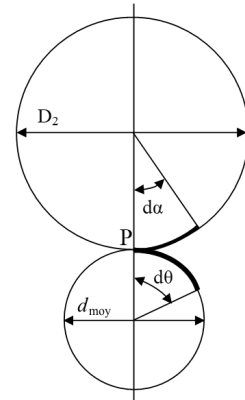


FIGURE 6 – Rotation élémentaire du disque  $D_2$  au contact du cône

Comme  $\frac{d_1}{D} = \frac{l_1}{L}$ , on a  $d_1 = \frac{D}{L} l_1$  et, de même,  $d_2 = \frac{D}{L} l_2$ , d'où  $d_{moy} = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{D}{L} \frac{y_1 + y_2}{2}$ . Par ailleurs, le disque  $D_2$  roule sans glissement sur le cône en  $P$  (figure 6), donc il y a égalité des arcs :  $\frac{d_{moy}}{2} d\theta = \frac{D_2}{2} d\alpha$ . On obtient

finalement :

$$d\alpha = \frac{d_{\text{moy}}}{D_2} d\theta = \frac{D}{LD_2} \frac{y_1 + y_2}{2} d\theta = \frac{D}{LD_2} \frac{y_1 + y_2}{2} \frac{2dx}{D_1} = \frac{2D}{LD_1D_2} \frac{y_1 + y_2}{2} dx.$$

Supposons maintenant que le stylet parcourt le contour  $M_1M_2H_2H_1M_1$  en suivant la courbe  $\mathcal{C}$  entre  $M_1$  et  $M_2$  (figure 3). De  $M_1$  à  $M_2$ , le disque  $D_2$  tourne de l'angle  $d\alpha$  calculé précédemment. De  $M_2$  à  $H_2$ , le point  $P$  passe de  $P_2$  à  $S$  en glissant sur la génératrice du cône (figure 5), donc il n'y a pas de rotation du disque  $D_2$ . De  $H_2$  à  $H_1$ , le chariot se déplace de  $-dx$ , le cône tourne de  $d\theta = \frac{-2dx}{D_1}$ , mais le disque  $D_2$  ne tourne pas, car  $P$  est en  $S$ . Enfin, de  $H_1$  à  $M_1$ , le point  $P$  passe de  $S$  à  $P_1$  en glissant sur la génératrice du cône, donc le disque  $D_2$  ne tourne pas non plus. Au total, le disque  $D_2$  aura tourné de  $d\alpha$ . Soit  $k$  le rapport de réduction du réducteur de vitesse constitué des roues dentées 1 et 2, et soit  $d\beta$  l'angle de rotation de l'aiguille pendant le parcours du contour  $M_1M_2H_2H_1M_1$ . Cet angle vaut

$$d\beta = \frac{d\alpha}{k} = \frac{2D}{kLD_1D_2} \frac{y_1 + y_2}{2} dx.$$

Le coefficient  $\frac{2D}{kLD_1D_2} = C$  est une constante de construction de l'appareil et  $\frac{y_1 + y_2}{2} dx$  est l'aire  $\mathcal{A}$  de la zone hachurée sur la figure 3. Au final, on a  $d\beta = C \times \mathcal{A}$ , c'est-à-dire que l'angle de rotation de l'aiguille est proportionnel à l'aire de la surface dont le contour est décrit par l'extrémité du stylet<sup>2</sup>.

## Planimètre polaire

En 1854, l'ingénieur suisse Jakob Amsler (1823-1912) est parvenu à innover par rapport aux planimètres à cône et à disque dont nous avons parlé précédemment, en inventant un nouvel instrument qu'il a baptisé lui-même « planimètre polaire ». Très simple, l'appareil se réduit à deux bras articulés entre eux et à une roulette de mesure fixée sur l'un des bras. Une extrémité de l'un des bras, le « pôle », reste fixe pendant que l'extrémité de l'autre bras, celui qui porte la roulette, parcourt le contour de la surface à mesurer. Léger, fiable et peu coûteux, le planimètre polaire a immédiatement connu un succès triomphal. Dès 1854, Amsler a ouvert une entreprise personnelle à Schaffhausen, en Suisse, pour le produire en grande série, puis d'autres fabricants lui ont emboîté le pas. On estime qu'environ 1,5 million de planimètres polaires ont été commercialisés entre 1854 et la fin du XX<sup>e</sup> siècle (Fischer, 2017, p. 3506).

2. La description détaillée que nous avons faite du planimètre à cône peut être comprise par un élève de terminale ayant choisi la spécialité Sciences de l'ingénieur, pour qui les notions de liaison mécanique, d'engrènement et de roulement sans glissement font partie des acquis. Dans le cas d'autres élèves, une présentation préalable succincte de ces notions leur permettra de suivre pas à pas la démonstration. Accompagnée de schémas, cette description pourrait donner lieu à la construction, avec une imprimante 3D, d'un tel appareil dans quelques lycées en vue d'expérimentations.

## Description et fonctionnement du planimètre polaire

L'un des planimètres polaires utilisés pour l'atelier a été fabriqué par la maison Coradi de Zurich (figure 7). Sur la figure 8, qui illustre son fonctionnement, on voit un pôle fixe  $O$  (dont la fixité est assurée par une masse), un pointeur  $M$  qui suit le contour  $\mathcal{C}$  de la surface dont on veut calculer l'aire, deux bras articulés en  $A$ , le bras polaire  $OA$  de longueur  $a$  et le bras traceur  $AM$  de longueur  $b$ , et une roulette intégrante de rayon  $r$  perpendiculaire au bras  $AM$ .



FIGURE 7 – Planimètre polaire de marque Coradi

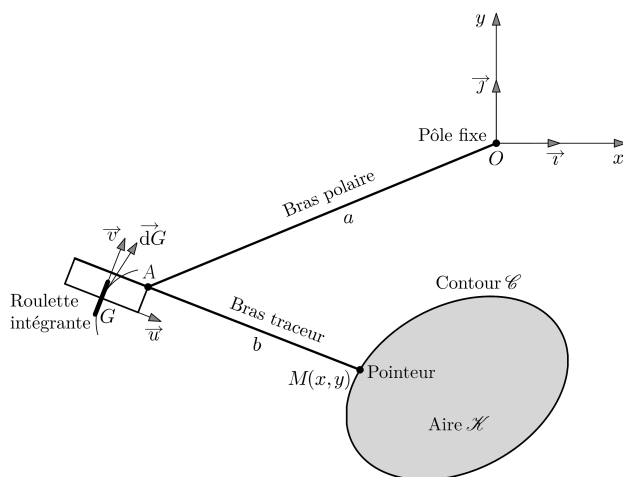


FIGURE 8 – Fonctionnement d'un planimètre polaire

Lorsque le pointeur se déplace le long du contour  $\mathcal{C}$ , la roulette tourne. Le nombre de tours est proportionnel à la composante perpendiculaire à  $AM$  du déplacement du pointeur. Une fois la courbe parcourue en entier, le nombre de tours de la roulette est proportionnel à la longueur de la courbe. Enfin, par un calcul au cours duquel on utilise le théorème de Green qui permet de transformer une intégrale curviligne en une intégrale double (voir section suivante), on montre que le nombre de tours de la roulette est proportionnel à l'aire du domaine délimité par  $\mathcal{C}$ .

## Justification mathématique et mécanique du planimètre po- laire

Un petit déplacement  $\overrightarrow{dM}$  du pointeur le long de  $\mathcal{C}$  génère un petit déplacement  $\overrightarrow{dG}$  du point de contact de la roulette, qui est la somme d'une composante sur  $\vec{u}$  qui n'induit aucune rotation de la roulette et d'une composante sur  $\vec{v}$  qui vaut  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{dG}$  et qui induit une rotation de  $d\alpha$  telle que  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{dG} = r d\alpha$ , selon la propriété du roulement sans glissement. Par conséquent, le déplacement total de  $M$  est

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dG} = \int_{\mathcal{C}} r d\alpha = 2\pi r n,$$

où  $n$  est le nombre de tours de la roulette.

En posant  $\vec{u} = \frac{1}{b}(x - x_A, y - y_A)$  et  $\vec{v} = \frac{1}{b}(-(y - y_A), x - x_A)$ , le déplacement de  $M$  s'écrit

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{1}{b} \int_{\mathcal{C}} -(y - y_A) dx + (x - x_A) dy.$$

Le théorème de Green permet de transformer une intégrale curviligne le long de  $\mathcal{C}$  en une intégrale double sur le domaine  $\mathcal{D}$  délimité par  $\mathcal{C}$ . Dans le cas général, il s'écrit

$$\int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Pour la situation qui nous intéresse, le déplacement de  $M$  devient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} &= \frac{1}{b} \iint_{\mathcal{D}} \left( \left( 1 - \frac{\partial x_A}{\partial x} \right) - \left( -1 + \frac{\partial y_A}{\partial y} \right) \right) dx dy \\ &= \frac{1}{b} \iint_{\mathcal{D}} \left( 2 - \frac{\partial x_A}{\partial x} - \frac{\partial y_A}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant les relations  $x_A^2 + y_A^2 = a^2$  et  $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = b^2$ . En les dérivant par rapport à  $x$ , puis par rapport à  $y$ , on obtient les systèmes

$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial x} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial x} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = x - x_A \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial y} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial y} = 0 \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial y} = y - y_A \end{cases}$$

La résolution de ces deux systèmes donne :

$$\frac{\partial x_A}{\partial x} = \frac{x_A y_A - x y_A}{x_A y - x y_A} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y_A}{\partial y} = \frac{x_A y - x_A y_A}{x_A y - x y_A}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial x_A}{\partial x} + \frac{\partial y_A}{\partial y} = 1 \quad \text{et}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{1}{b} \iint_{\mathcal{D}} dx dy.$$

En fin de compte, l'aire  $\mathcal{K}$  du domaine  $\mathcal{D}$  est égale à

$$\mathcal{K} = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = b \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = 2\pi r b n.$$

Ainsi, à un coefficient de proportionnalité près dépendant du planimètre, l'aire du domaine délimité par  $\mathcal{C}$  est mesurée par le nombre de tours de la roulette.

## Utilisation d'un planimètre polaire

Pendant l'atelier, les participants disposaient d'un planimètre pour deux. Leur premier travail a consisté à apprendre à lire un résultat donné par le planimètre sous la forme d'un nombre à quatre chiffres (figure 9) : un disque plat comptabilise le nombre de tours complets; la roulette proprement dite comporte cent graduations, ce qui permet d'accéder aux chiffres des dixièmes et des centièmes de tour; enfin un vernier permet d'obtenir le chiffre des millièmes de tour. Sur l'exemple de la figure 10, la lecture fournit le nombre 0653 qui signifie que la roulette a tourné de 653 millièmes de tour.

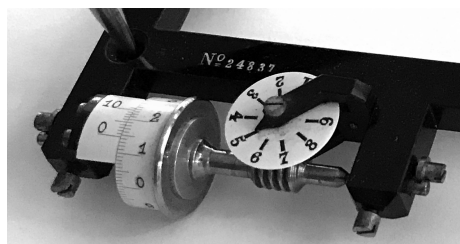


FIGURE 9 – Disque plat, roulette et vernier

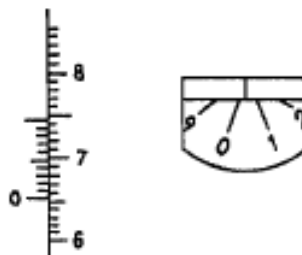


FIGURE 10 – Exemple de lecture : 0653

Pour procéder à un calcul d'aire, on choisit un point sur le contour du domaine à mesurer, on y place le pointeur, et on lit le planimètre. Cette lecture est notée dans un tableau sur une ligne « Première lecture ». On parcourt ensuite tout le contour dans le sens des aiguilles d'une montre, régulièrement et sans s'arrêter. À la fin du déplacement, on doit se retrouver exactement sur le point de départ. On relit le planimètre et on porte le résultat dans le tableau sur une ligne « Deuxième lecture ». La différence des deux lectures est portée sur une ligne « Différence » : c'est le résultat de la mesure. Il serait bien sûr possible de régler le planimètre au départ sur 0000 et de ne faire qu'une lecture, mais la pratique montre qu'il est plus rapide de ne pas faire de remise à zéro.

Après cette première manipulation, on déplace légèrement la masse pour que la roulette suive un autre itinéraire dans de bonnes conditions et on recommence le planimétrage de la même surface, puis on déplace une deuxième fois la masse et on fait une troisième fois la mesure. Si l'un des résultats est très différent des deux autres, on peut soupçonner qu'il est dû à une mauvaise manipulation ou une mauvaise lecture; dans ce cas, on le supprime et on recommence. Une fois qu'on a obtenu trois mesures cohérentes, leur moyenne, considérée comme le résultat final, est conservée dans la ligne « Moyenne ».

À titre d'exemple, les tableaux ci-dessous donnent les résultats obtenus par un participant pour un carré de côté 3 cm (à gauche), pris comme surface de référence, et pour un cercle de rayon 3 cm (à droite).



Première lecture	0983	1491	1577
Deuxième lecture	0893	1400	1487
Différence	90	91	90
Moyenne	90,33		

Première lecture	1572	2096	2637
Deuxième lecture	1288	1813	2355
Différence	284	283	282
Moyenne	283		

Sachant que l'aire du carré est  $9 \text{ cm}^2$ , on en déduit que l'aire du cercle vaut  $\frac{283}{90,33} \times 9 \text{ cm}^2 \approx 28,20 \text{ cm}^2$ . La valeur exacte étant  $\pi \times 9 \text{ cm}^2 \approx 28,27 \text{ cm}^2$ , cela donne une première idée de la précision du planimètre. Il est probable que dans le passé, des utilisateurs expérimentés se servant de planimètres neufs et bien réglés – ce qui n'était pas le cas dans l'atelier – pouvaient faire mieux.

## Intégraphe

Un intégraphe est un instrument qui, à partir d'une courbe  $y = f(x)$  donnée graphiquement et d'un point  $(x_0, y_0)$  pris comme point de départ, trace d'un trait continu la courbe intégrale  $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$ . Les premiers modèles d'intégraphes ont été conçus dans les années 1878-1879 par le mathématicien et ingénieur polonais Bruno Abdank-Abakanowicz (1852-1900). Ce dernier s'est installé à Paris en 1881 après que son pays, partagé entre la Prusse, la Russie et l'Autriche, eut perdu son indépendance. C'est là qu'il a poursuivi ses recherches, qui ont fait l'objet, quelques années plus tard, d'un livre de synthèse intitulé *Les intégraphes. La courbe intégrale et ses applications* (Abdank-Abakanowicz, 1886). Ses instruments les plus aboutis ont été fabriqués et commercialisés par la maison Coradi de Zurich. Par ailleurs, il convient de mentionner qu'un ingénieur anglais, Charles Vernon Boys (1855-1944), a lui aussi trouvé le principe de l'intégraphe en 1881, de manière indépendante, mais son invention est restée à l'état de prototype.

## Principe de l'intégraphe

La figure 11 illustre le principe de fonctionnement d'un intégraphe. Le chariot  $SmT$ , de largeur fixe, se déplace en translation le long de l'axe des abscisses. Prenons  $Sm$  comme unité de longueur, soit  $Sm = 1$ . Avec un pointeur  $M$ , astreint à rester à l'intersection des tiges  $mT$  et  $SM$ , on suit une courbe donnée  $\mathcal{C}$ , d'équation  $y = f(x)$ , préalablement construite sur la feuille de papier. À chaque instant, la pente de la tige  $SM$  est égale à  $\frac{mM}{Sm} = \frac{f(x)}{1} = f(x)$ .

Un parallélogramme articulé  $ABB_1A_1$  coulisse en  $I$  sur la tige  $Sm$ , de sorte que son côté  $AB$  reste perpendiculaire à  $Sm$  et que le milieu  $M_1$  du côté opposé  $A_1B_1$  reste sur la tige  $mT$ . En  $M_1$  est fixée une roulette coupante  $R$  d'axe  $A_1B_1$ . Cette roulette est donc constamment parallèle à  $SM$  et a pour pente  $f(x)$ . La roulette mordant dans le papier sans glissement latéral, son point de contact  $M_1$  trace au cours du mouvement une courbe  $\mathcal{C}_1$  dont la pente est  $f(x)$ , c'est-à-dire une courbe intégrale de la courbe initiale  $\mathcal{C}$ . En d'autres termes, c'est la courbe représentative d'une primitive de la fonction donnée  $f$ .

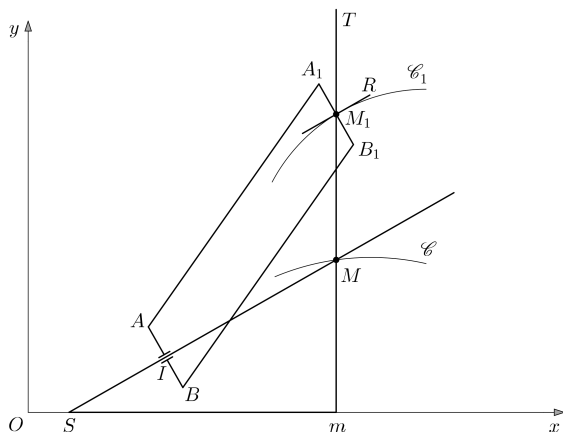


FIGURE 11 – Principe de l'intégraphe

## Exploration d'un intégraphe

Les participants de l'atelier ont pu manipuler un intégraphe construit par Claude Voillequin en s'inspirant de l'un des modèles d'Abdank-Abakanowicz (figure 12). Afin d'éviter les blocages qui pourraient se produire lors du croisement du pointeur et de la roulette sur la tige  $mT$  (figure 11), ces deux pièces ont été placées de part et d'autre du chariot, ce qui revient simplement à traduire la courbe intégrale parallèlement à l'axe des abscisses.

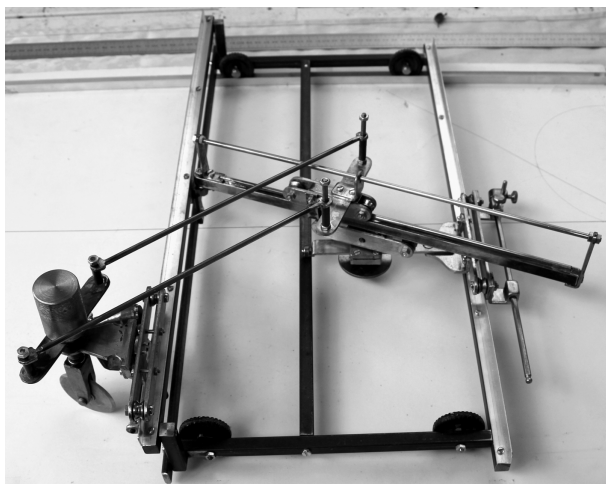


FIGURE 12 – L'intégraphe de Claude Voillequin

Durant l'atelier, des expérimentations ont été conduites à partir de courbes simples, comme  $y = 1$ ,  $y = x$  et  $y = x^2$ , pour comprendre et vérifier le bon fonctionnement de l'intégraphe. Nous avons également construit une courbe intégrale

de la courbe  $y = \sqrt{1-x^2}$  définie sur  $[-1, 1]$ , à savoir

$$y = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x \right) + \frac{\pi}{4}.$$

L'un des intérêts de cette construction provient du fait que  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ , et donc que l'intégraphe permet de construire exactement le nombre  $\pi/2$ , autrement dit réaliser la quadrature du demi-cercle (figure 13). Il ne resterait plus qu'à doubler le segment obtenu pour obtenir celle du cercle.

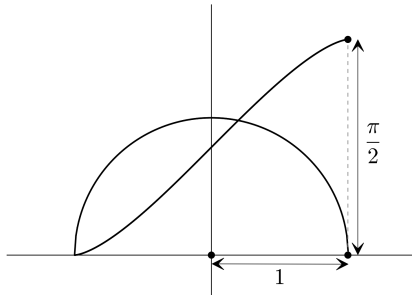


FIGURE 13 – Quadrature du demi-cercle avec l'intégraphe

Felix Klein a commenté ainsi ce résultat remarquable :

« Il est impossible de construire  $\pi$  avec la règle et le compas ; il n'existe même pas de courbe d'ordre supérieur, définie par une équation algébrique, pour laquelle  $\pi$  soit l'ordonnée correspondant à une valeur rationnelle de l'abscisse.

Une véritable construction géométrique de  $\pi$  ne peut donc être effectuée qu'à l'aide d'une courbe transcendante. Comme d'ailleurs il s'agit d'une véritable construction, il faut posséder un appareil transcendant permettant de tracer la courbe en question d'un trait continu.

Cet appareil, c'est l'*intégraphe* [...]. Voilà donc une construction géométrique qui permet la quadrature du cercle. On voit de plus qu'elle la réalise dans l'ordre d'idées où s'étaient engagés les géomètres anciens ; notre courbe intégrale n'est qu'une modification des quadratrices considérées par eux » (Klein, 1896, p. 94-96).

## Tractoriographe

Vers la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, dans le même esprit que ce que nous venons de voir avec l'intégraphe d'Abdank-Abakanowicz et la quadrature du cercle, l'introduction de nouveaux instruments géométriques a permis de résoudre tous les problèmes transcendants classiques dont on avait prouvé auparavant l'impossibilité à l'aide de la règle, du compas et des systèmes articulés. Ce courant de recherche est bien illustré par un article de l'ingénieur serbe Ljubomir Kleritj publié en 1897 dans

le *Dinglers polytechnisches Journal* (Kleritj, 1897). Dans cet article, Kleritj décrit un nouvel instrument, appelé « tractoriographe », qu'il a inventé et fait fabriquer par l'Institut de mécanique d'Oskar Leuner à Dresde. À l'aide de cet instrument, Kleritj montre, comme nous allons le voir, qu'il devient possible de construire exactement les nombres  $\pi$  et  $e$ , ainsi que tous les polygones réguliers (Tournès, 2017).

## Présentation du tractoriographe

Le tractoriographe (figure 14) comporte essentiellement un pointeur  $\mathcal{H}$  que l'on peut guider à l'aide d'une double poignée pour suivre une courbe donnée, et une roulette coupante  $\mathcal{T}$ , située à une distance fixe du pointeur et surmontée d'un ruban encreur, dont le point de contact  $t$  avec le papier trace une nouvelle courbe appelée « tractoire » de la courbe donnée. La roulette et la tige  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  qui la relie au pointeur restent constamment tangente à cette tractoire.



FIGURE 14 – Le tractoriographe de Kleritj (1897, p. 234)

La tractoire la plus simple est celle d'une droite, appelée « tractrice » (figure 15). Cela revient, sur une surface plane, à tirer une extrémité  $A$  d'une tige  $AB$  de longueur donnée  $a$  le long d'une droite à partir d'une position initiale  $A_0B_0$ ; la tractoire est alors la courbe décrite par l'autre extrémité  $B$  de la tige. Au cours du mouvement, la tige  $AB$  reste constamment tangente à la courbe tracée par  $B$ .

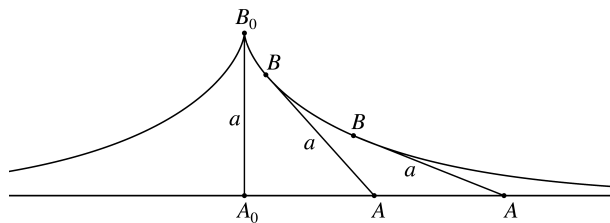


FIGURE 15 – Tractoire d'une droite, ou tractrice

On peut ensuite s'intéresser aux tractoires d'un cercle en tirant de la même manière une extrémité d'une tige de longueur  $a$  le long d'un cercle de rayon  $r$  (figure 16). On obtient trois formes de tractoires : si  $a > r$ , il y a des points de rebroussement et une suite de branches isométriques ; si  $a = r$ , la courbe s'enroule

autour d'un point asymptotique ; si  $a < r$ , la courbe s'enroule autour d'un cercle asymptotique.

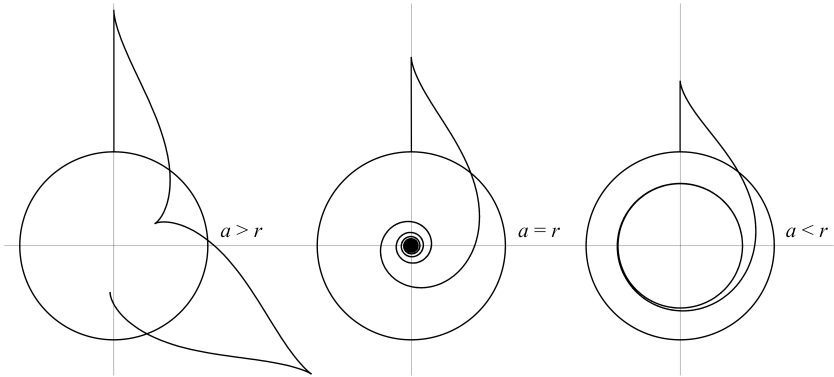


FIGURE 16 – Tractoires d'un cercle

En connectant le pointeur d'un tractoriographe à l'extrémité d'un compas qui l'entraîne dans un mouvement circulaire, on peut tracer de manière exacte les tractoires d'un cercle. Un tel dispositif a été construit par Claude Voillequin et a servi pendant l'atelier à explorer ces courbes (figure 17).

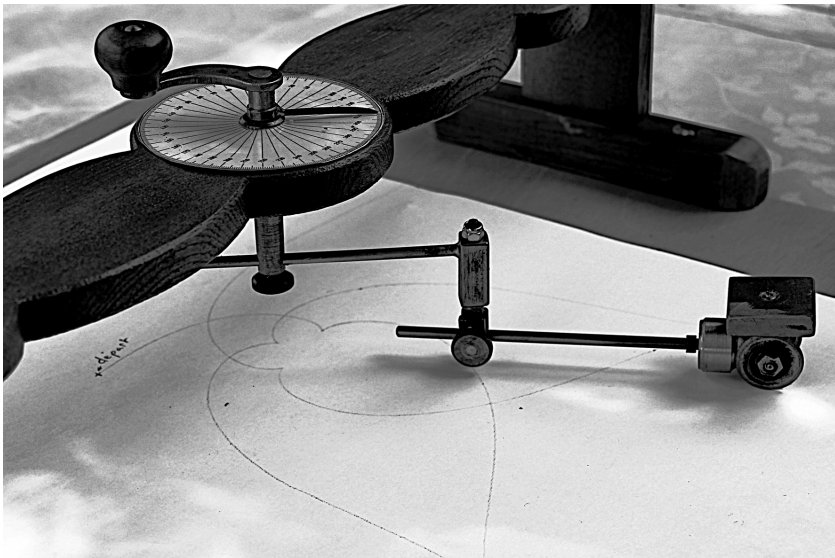


FIGURE 17 – Le tractoriographe circulaire de Claude Voillequin

## Quadrature du cercle et construction des polygones réguliers

Considérons maintenant un cercle de centre  $O$  et de rayon 1, et la tractoire de ce cercle tracée avec la tige  $AB$  de longueur 1 à partir de la position initiale  $A_0B_0$  (figure 18). Une fois que cette tractoire est présente sur la feuille de papier, on n'a plus besoin du tractoriographe. Toutes les constructions classiques peuvent se terminer à la règle et au compas. Nous allons le montrer pour la construction du nombre  $\pi$  et pour celle de tous les polygones réguliers.

Notons  $\varphi$  l'angle  $A_0OA$ , qui est aussi la longueur de l'arc de cercle parcouru par le point  $A$  depuis sa position initiale  $A_0$ , et  $\alpha$  l'angle  $BOA$ . Kleritj prouve que l'intégration de l'équation différentielle définissant la courbe décrite par l'extrémité libre  $B$  de la tige, dont les détails dépassent le niveau de cet article, conduit à la propriété fondamentale  $\tan \alpha = \varphi$ . Si l'on note  $C$  le point d'intersection de la droite  $OB$  et de la perpendiculaire à  $OA$  passant par  $A$ , on a donc  $AC = \tan \alpha = \varphi$ . Ainsi, on a construit un segment dont la longueur est égale à celle de l'arc  $A_0A$ . Autrement dit, la tractoire permet la rectification d'un arc quelconque du cercle.

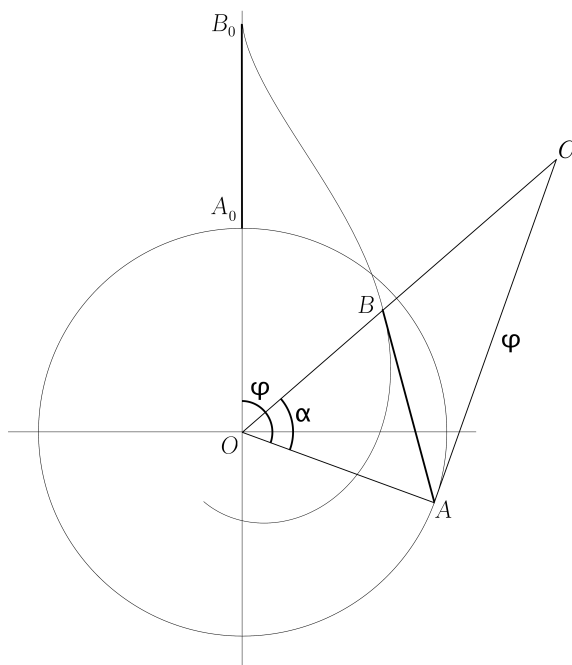


FIGURE 18 – Propriété fondamentale de la tractoire circulaire

En particulier, si l'on fait tourner le point  $A$  d'un angle droit, on construit un segment de longueur  $\pi/2$ , et, de même, avec un angle plat, on obtient un segment de longueur  $\pi$  (figure 19). Avec une règle, un compas et un tractoriographe, on peut donc réaliser exactement la quadrature du cercle.

Par ailleurs, on comprend, au vu de la figure 18, qu'il est possible de partager un angle  $\varphi$  en  $n$  parties égales. Il suffit en effet de partager le segment  $AC$  en

$n$  parties égales, ce qui fournit l'angle  $\alpha'$  dont la tangente est égale à  $\varphi/n$ , puis de retrouver la position de la tige correspondant à cet angle  $\alpha'$ . Expliquons la construction en détail dans le cas de la trisection d'un angle (figure 20).

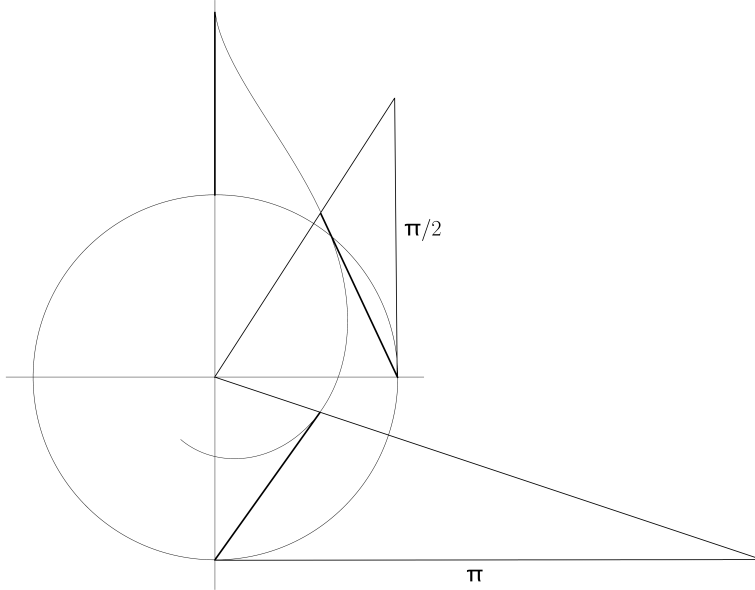


FIGURE 19 – Construction des nombres  $\pi/2$  et  $\pi$

On part de la position de  $AB$  correspondant à l'angle donné  $\varphi$ . Pour cette position, comme on l'a vu plus haut,  $AC = \varphi$ . Grâce au théorème de Thalès, on partage alors le segment  $AC$  en trois parties égales, de sorte que  $AD = \varphi/3$ , et on note  $\alpha'$  l'angle  $AOD$ . On trace le cercle de centre  $A$  et de rayon 1, qui coupe la demi-droite  $OD$  au point  $E$ , puis le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OE$ , qui coupe la tractoire au point  $B'$ , et enfin le cercle de centre  $B'$  et de rayon 1, qui coupe le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 au point  $A'$ . Par construction, les triangles  $OAE$  et  $OA'B'$  ont leurs trois côtés égaux, donc ils sont égaux. Il en résulte que l'angle  $A'OB'$  est égal à  $\alpha'$ . De plus, si l'on note  $D'$  le point d'intersection de  $OB'$  et de la perpendiculaire en  $A'$  à  $OA'$ , on a  $A'D' = AD = \varphi/3$ . On a ainsi retrouvé la position  $A'B'$  de la tige correspondant à l'angle  $\varphi/3$ .

La même méthode permet de partager un angle quelconque en  $n$  parties égales, et donc de construire un polygone régulier à un nombre quelconque de côtés. À titre d'exemple, les participants de l'atelier ont été invités à construire un heptagone régulier. La figure 21 présente deux des réalisations obtenues.

Enfin, de même que la tractoire d'un cercle nous a conduit à une construction exacte du nombre  $\pi$ , Kleritj a mis en évidence dans son article que la tractoire d'une droite permettrait de construire le nombre  $e$ , mais ce point n'a pas pu être abordé dans l'atelier faute de temps. Il est toutefois facile de s'en convaincre si

l'on examine l'équation de la tractrice obtenue avec une tige de longueur 1 :

$$x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} - \sqrt{1 - y^2}.$$

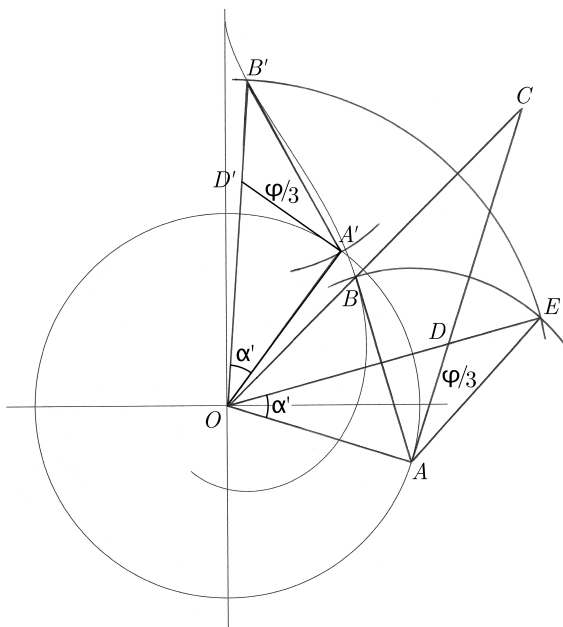


FIGURE 20 – Trisection d'un angle

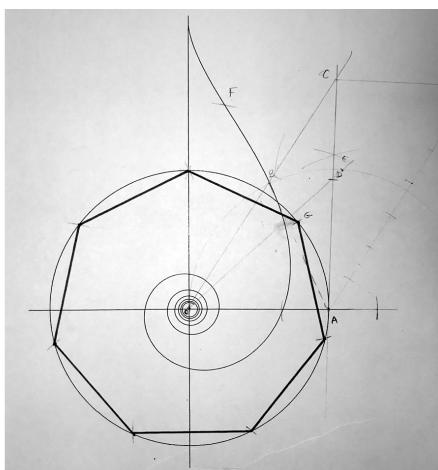
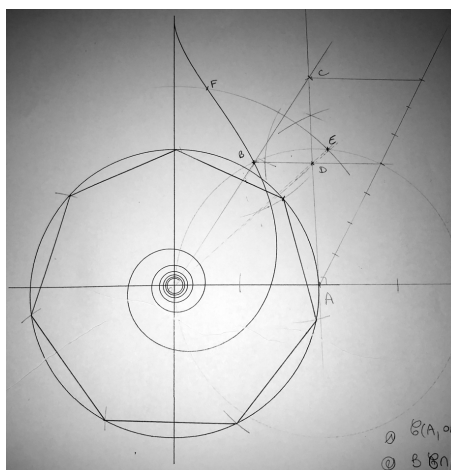


FIGURE 21 – Deux constructions de l'heptagone régulier



La tractrice et la courbe logarithmique étant liées par des opérations algébriques réalisables à la règle et au compas, il est clair que si l'une des courbes est donnée au départ sur le papier, on peut accéder à l'autre. Une fois que la tractrice a été tracée avec le tractoriographe, il devient donc possible de construire à la règle et au compas le nombre  $e$ .

## Conclusion

Au sein du groupe histoire des mathématiques de l'IREM des Pays de la Loire, a germé l'idée que les instruments graphomécaniques d'intégration pourraient être utilisés pour introduire historiquement la notion d'aire à plusieurs niveaux des classes de lycée. En 2018-2019, le groupe a animé un stage intitulé « Calculer des aires sans formules », au cours duquel étaient présentées différentes méthodes historiques en commençant par Archimède et Euclide, puis Cavalieri et Roberval, pour terminer par les machines à intégrer du XIX<sup>e</sup> siècle (Guillet, Moureau et Voillequin, 2019). L'explication mathématique de l'intégraphe étant assez simple, il a paru intéressant de proposer cet instrument comme support d'un travail interdisciplinaire mathématiques-sciences industrielles et comme moyen d'illustrer le problème inverse des tangentes en classe de première ou terminale. L'aspect concret de ces machines devrait donner aux lycéens ou aux étudiants un autre point de vue sur l'intégration, très éloigné du tout numérique, et favoriser par là une meilleure compréhension de cette notion difficile.

## Références bibliographiques

- ABDANK-ABAKANOWICZ Bruno, 1886, *Les intégraphes. La courbe intégrale et ses applications*, Paris, Gauthier-Villars.
- BOS Henk, 1988, « Tractional motion and the legitimation of transcendental curves », *Centaurus*, 31, p. 9-62.
- FISCHER Joachim, 2017, « The early history of mechanical integration : The first five decades, 1814-1864 », *Oberwolfach Reports*, 14, p. 3502-3506.
- GUILLET, Carène, MOUREAU, Marie-Line, VOILLEQUIN, Isabelle, 2019, « Mathematics and experiment : How to calculate areas without formulas », *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*, Oslo, Oslo Metropolitan University, p. 227-243.
- JACOB Louis-Frédéric, 1911, *Le calcul mécanique*, Paris, Doin.
- KLEIN Felix, 1896, *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire*, Paris, Novy.
- KLERITJ, Ljubomir, 1897, « Tractoriograph und Construction der transcendenten Zahlen "π" and "e", sowie Construction der n-seitigen, dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Polygone », *Dinglers polytechnisches Journal*, 305, p. 234-237, 260-263.
- LEIBNIZ Gottfried Wilhelm, 1693, « Supplementum geometriæ dimensoriæ seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum : similiterque multi-

plex constructio lineæ ex data tangentium conditione », *Acta eruditorum*, 12, p. 385-392.

MORIN Henri de, 1913, *Les instruments d'intégration*, Paris, Gauthier-Villars.

TOURNÈS Dominique, 2009, *La construction tractionnelle des équations différentielles*, Paris, Blanchard.

TOURNÈS Dominique, 2017, « Instruments for impossible problems : Around the work of Ljubomir Klerić (1844-1910) », *Oberwolfach Reports*, 14, p. 3517-3520.

Troisième partie

Géométrie et algorithmique



## La géométrie pour justifier ou inventer des algorithmes : Autour des *Métriques* de Héron d'Alexandrie

Alain BERNARD

### Introduction

Les récents programmes de collège ont donné une place remarquée à l'algorithmique et la programmation, suivant le vœu déjà exprimé depuis plusieurs années dans le rapport Kahane sur l'enseignement des mathématiques (Kahane, 2002). D'autre part l'enseignement de la géométrie a retrouvé quelques couleurs, par l'introduction de thèmes très porteurs pour une activité de démonstration : les cas d'égalités de triangles ou les triangles semblables par exemple<sup>1</sup>. Cependant, les liens entre les activités de preuve, et plus particulièrement celle de démonstration, réputées pourtant centrales en mathématiques et souvent associées à l'apprentissage de la géométrie, et l'apprentissage de l'algorithmique, sont plutôt ténus et ils ne sont signalés au mieux qu'au sujet des constructions géométriques<sup>2</sup>. Ce problème est précisément souligné dans les recherches récentes sur la place de l'algorithme comme objet mathématique à part entière, susceptible de différents types

---

\*. Ce texte n'aurait pu voir le jour sans plusieurs discussions intensives au sein du groupe « histoire et épistémologie » de l'IREM de Paris Nord. Un grand merci à Catherine Darley, Stéphane Herrero, Katalin Gosztanyi, Emmanuelle Rocher, pour leurs nombreuses remarques.

1. Voir la récente réécriture des programmes de collège (BO, 2018), sur le thème de la géométrie. Plus généralement, ces nouveaux programmes mettent en exergue l'importance de la démonstration.

2. Ces constructions sont envisagées à juste titre, à la fois comme moyen d'explorer les propriétés fondamentales de figures géométriques, et de procédures à étudier et mettre en œuvre. La contribution de Sylviane Schwer dans ce volume, qui renvoie aux travaux de géométrie de Lemoine, se rapporte à cet aspect, ainsi que l'ouvrage inter-IREM *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes* (Barbin & alii, 2014) et nous y renvoyons le lecteur ou la lectrice.

de preuve<sup>3</sup>. Toutefois, ces mêmes recherches tendent à se focaliser sur un niveau élevé d'études et à marginaliser les algorithmes réputés simples et répondant au genre des « formules », comme les formules de calcul d'aire par exemple. Au sujet de ces dernières, on insiste souvent, à juste titre, sur la nécessité de construire des images mentales, de nature figurative ou géométrique, pour les retenir et les assimiler, mais l'aspect démonstratif est alors laissé de côté.

Dans cette contribution, nous proposons un point de vue un peu différent, permettant d'interroger la place d'une argumentation géométrique dans des phénomènes de justification ou d'invention d'algorithmes de calcul d'aires usuelles. Ce point de vue s'inspire directement des travaux de l'érudite polymathe alexandrine Héron d'Alexandrie et plus particulièrement des *Métriques*, un des ses traités qui a été récemment ré-édité, traduit en français et analysé par B. Vitrac et F. Acerbi (2014). Ce texte comprend pour l'essentiel une série de problèmes de mesure allant des figures les plus simples, comme le rectangle ou le triangle, jusqu'aux solides les plus complexes (des racines ou des pierres, par exemple), complété par des problèmes de division de figures ou de solides. Sa particularité est de comporter, dans un grand nombre de cas, des preuves de validation des « solutions » des problèmes de mesure en question. Ces dernières sont elles-mêmes données sous une forme algorithmique, c'est-à-dire comme un enchaînement d'étapes de calcul valable quelles que soient les données numériques.

Notre argument est que l'étude minutieuse des particularités stylistiques et logiques des preuves héroniennes, est susceptible de développer des pistes pédagogiques nouvelles pour l'introduction et surtout l'étude des « formules d'aires » du collège. Nous pensons en outre que cette nouvelle approche devient possible si ces « formules » sont d'abord comprises comme des algorithmes de calcul décrits sous une forme qui en permette l'étude géométrique. Nous montrerons ainsi que la lecture de Héron est susceptible de nourrir une réflexion stratégique sur un enseignement conjoint de la géométrie et de l'algorithmique, où l'enjeu de preuve devient central.

Nous résumons tout d'abord, en nous fondant sur les recherches évoquées plus haut, ce qu'on sait de Héron et du texte des *Métriques*, et détaillons le choix du corpus de problèmes qui nous servira ici de référence. Nous détaillons ensuite, à partir de deux exemples révélateurs, ce que sont les particularités de l'approche héronienne des problèmes de mesure. Nous reviendrons alors en conclusion sur notre argument pédagogique et didactique.

---

3. Voir (Modeste, Gravier, & Ouvrier-Buffet, 2010). L'exemple paradigmatique pris dans cette étude, la démonstration de la validité de l'algorithme d'Euclide, a un pendant historique évident dans le livre VII des *Éléments* d'Euclide. Cet exemple bien étudié expose une justification géométrique de l'algorithme de recherche d'une plus grande mesure entre deux nombres par soustractions successives et alternées. Voir (Chabert, 2010, Chapitre 4).

## Éléments de contexte sur Héron d’Alexandrie et le textes des *Métriques*

### Héron d’Alexandrie, aux multiples facettes

On sait peu de choses de la biographie Héron d’Alexandrie, et c’est une infortune qu’il partage avec la plupart des auteurs de textes à contenu mathématique (géométrie, arithmétique, astronomie, mécanique, musique ...) venus de l’Antiquité grecque, en raison de l’état lacunaire de nos sources, des particularités stylistiques des textes mathématiques anciens et du fait que les maigres indications biographiques que nous ayons sont le fruit de légendes ou de portraits « philosophiquement très orientés »<sup>4</sup>. Les arguments de datation les plus solides conduisent à situer sa période d’activité vers le I<sup>er</sup> ou le II<sup>e</sup> siècle de notre ère, sans qu’on puisse préciser davantage (Acerbi & Vitrac, 2014, p. 15-22). Il existe un nombre important d’œuvres qui lui sont attribuées, mais plusieurs de ces attributions sont fausses ou au mieux très douteuses. C’est le cas, en particulier, pour un certain nombre de textes métrologiques dont l’objet se rapproche beaucoup du sujet des *Métriques*, mais dont le format diffère de ces dernières sur un point essentiel. En effet, ils ne comportent pas d’arguments démonstratifs validant les calculs de mesure proposés (*ibid.* p. 22-26).

Les œuvres qui lui sont attribuables, même à titre fragmentaire et dérivé, dessinent néanmoins un portrait nuancé et intéressant de l’auteur. On trouve divers traités de mécanique, allant de descriptions de machines de types variés, comme des machines pneumatiques (actionnées par l’eau ou l’air, ou permettant au contraire de les aspirer), des automates démontrant les capacités de la mécanique à imiter des mouvements naturels ou à faire illusion, des machines de guerre, des dispositifs de réflexion optique (catoptrique) jusqu’à des traités plus théoriques comme ses *Mécaniques*. On trouve encore un commentaire d’un texte savant comme les dix premiers livres des *Éléments* d’Euclide : on ne connaît que des fragments repris par des auteurs ultérieurs, mais son étendue indique qu’il s’agissait d’un travail conséquent et approfondi. On y trouve encore des textes de métrologie comme les *Métriques*, dont le niveau théorique dépasse très nettement les problèmes métrologiques qu’on trouve habituellement en grec. Ils attestent d’une connaissance approfondie de la géométrie théorique : Euclide, Archimède principalement. Enfin, un de ses traités combine un peu tous ces aspects : dans la *Dioptré*, Héron explicite l’usage d’une sorte de théodolite ancien dont il décrit en introduction la construction, pour la résolution de problèmes de distance ou d’aires inaccessibles. Le traité, outre que son architecture révèle à elle seule une pensée originale et en partie déductive (Barbin, 2018), est ponctuée de développements savants, comme celui qui permet de calculer l’aire d’un triangle à partir de la simple donnée des côtés ou de fines allusions érudites (Vitrac, 2003)<sup>5</sup>. Le contenu de ses œuvres évoque donc l’activité d’une sorte d’ingénieur savant et érudit, intéressé à

4. Voir à ce sujet (Vitrac, 2013).

5. Cet esprit polymathe et érudit est bien illustré par plusieurs passages des *Métriques* qui viennent conclure les développements étendus et assez complets sur les mesures de figures, surfaces ou solides se rangeant à une définition géométrique identifiée. Voir *Métriques* I.39 ou II.20.

repenser à neuf la hiérarchie et la dignité des savoirs théoriques et pratiques. Dans l'Antiquité, on peut comparer l'ambition érudite de Héron à celle de Vitruve dans le monde Romain (*De Architectura*). S'appuyant sur des figures déjà classiques à son époque, notamment Philon d'Alexandrie et bien sûr d'Archimède, Héron défend une hiérarchie originale des savoirs qui subordonne les mathématiques à la mécanique<sup>6</sup>. Cette ambition rappelle celle d'ingénieurs savants de la Renaissance comme Jean Errard de Bar le Duc ou Simon Stevin, dont l'œuvre protéiforme reflète des préoccupations techniques, savantes et encyclopédiques.

Le seul fait qu'on lui ait attribué à tort bien d'autres ouvrages que ceux qu'il a rédigés, indique assez le prestige dont Héron jouissait déjà dans l'Antiquité<sup>7</sup>. L'érudition moderne, notamment au XIX<sup>e</sup> siècle, a plutôt contribué à déformer son œuvre qu'à la mettre en valeur, et c'est bien plus récemment que l'on s'est intéressé à l'originalité et la complexité de son œuvre<sup>8</sup>. L'effet bienvenu de cette réhabilitation est de rappeler que la géométrie ancienne ne se limitait certainement pas au seul corpus savant de mathématiciens hellénistiques comme Euclide, Archimède ou Apollonius.

## **Le texte des *Métriques* : ce que nous savons, ce que nous pouvons en lire**

Le texte des *Metrica* de Héron nous est connu par un unique manuscrit datant du X<sup>e</sup> siècle, conservé aujourd'hui à Istanbul et édité très tardivement. Il contient d'autres œuvres de nature métrologique (Acerbi & Vitrac, 2014, p. 88-90). Bruins, un des érudits qui s'est intéressé de près à ce manuscrit en a publié un fac-similé accompagné d'une transcription et d'une traduction anglaise (1964). Ce qui l'intéressait principalement était de restituer le travail des scholiastes<sup>9</sup>, très visible et intéressant dans ce manuscrit, et témoignant parfois d'un travail de relecture et de compréhension qui est le plus souvent masqué au lecteur moderne. L'édition commentée de Vitrac et Acerbi rend quant à elle accessible au lecteur français l'intégralité du texte (sans les scholies toutefois) et se concentre davantage à la fois sur les particularités stylistiques du texte, et sur la question de ce qui est « authentiquement héronien » dans ce traité.

Comme la plupart des textes mathématiques grecs anciens, le manuscrit est rédigé en écriture continue (*scripto continua*), sans distinction nette entre les mots ou les phrases ni indentation, et sans « formule écrite » pour les calculs comme celles que nous utilisons, comme on le verra plus bas sur un ou deux exemples.

---

6. Pour des points de comparaison plus détaillés dans l'Antiquité, voir l'article de B. Vitrac précité (2013), et surtout son article sur les statuts respectifs de la mécanique et des mathématiques dans l'Antiquité (2009).

7. Pour la question complexe de ce qui est attribuable ou non à Héron, voir (Acerbi & Vitrac, 2014, p. 22-26). Ce prestige était très considérable à la Renaissance, les *Pneumatiques* étant sans doute un de ses ouvrages alors les plus lus et admirés (Boas, 1949). Pour une traduction française du texte datant de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, voir le site de Philippe Remacle <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/heron/pneumatiques.htm> (consulté 6.11.2019).

8. (Acerbi & Vitrac, 2014, p. 26-39)

9. Les scholiastes sont les auteurs (le plus souvent anonymes) d'annotations érudites (ou scholies) dans les manuscrits anciens. Ces annotations sont une des formes du commentaire dans l'Antiquité.



Ce mode d’écriture convient bien à un mode d’intellection des textes qui passe par une activité de lecture à haute voix, généralement faite collectivement, et par un processus de mentalisation progressive non seulement des concepts, mais aussi des opérations, procédures ou théorèmes dans le cas des mathématiques. Le lecteur moderne s’irrite facilement de ne trouver dans les textes anciens que des phrases répétitives et « imbuables », par contraste avec les formules symboliques et condensées qui résument aujourd’hui sa pensée mathématique par écrit. Le lecteur ancien ne verrait pourtant dans ces artifices d’écriture que des aides mémoires tout juste bonnes à figurer dans des brouillons transitoires, alors que ce sont les formules oralisées et mentalisées qui lui servent, par excellence de support de travail<sup>10</sup>. Les extraits donnés plus loin permettront de mesurer cette différence essentielle, sur laquelle nous reviendrons en conclusion.

Un texte géométrique comme les *Métriqes* s’appuie également sur ces auxiliaires visuels essentiels que sont les figures, nombreuses dans les *Métriqes*. Elles s’ordonnent autour d’objets de plus en plus complexes, auxquelles s’ajoutent des variantes dues aux scholiastes. L’illustration ci-dessous (figure 1), reproduite du fac-similé du manuscrit, indique le double lettrage : les majuscules A, B, Γ, Δ pour dénoter les points associés aux figures, et les lettres précédées d’un *mu* surmonté d’un *omikron* pour *monas*, l’unité, ont une valeur numérique. Car les nombres ont en grec ancien une représentation figurée sous la forme d’un des systèmes de numération utilisés dans les textes savants, le système alphanumérique décimal mais non positionnel, qui associe des valeurs numériques aux lettres de l’alphabet grec étendu<sup>11</sup>. Ainsi Γ correspond à la valeur 3 et Δ à 4 pour les côtés, ζ (6) et Ε (5) pour l’aire et l’hypoténuse respectivement. Les figures ne sont généralement pas proportionnées aux mesures indiquées, leur fonction est plutôt de restituer schématiquement la disposition de la figure et les données sous-jacentes à la proposition que de donner une image proportionnée de la figure discutée.

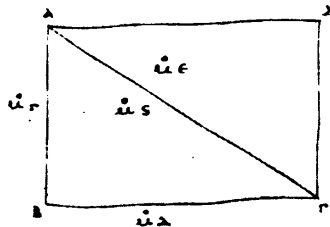


FIGURE 1 – Figure de *Métriqes* I.2

Dans tous les cas, ce manuscrit ancien riche de figures diverses et d’annotations, donne une idée du temps long de la vie de ces manuscrits mathématiques anciens,

10. Pour comprendre ce rapport bien particulier au texte verbalisé, on ne peut rien recommander de mieux que la lecture des premières et dernières lignes des *Arithmétiques* de Diophante, un texte également écrit par problèmes, comme les *Métriqes*, et dont l’ambition est explicitement de favoriser un apprentissage long et progressif, qui tient plus de la familiarisation progressive, que d’un simple apprentissage élémentaire. Pour un commentaire sur les connotations rhétoriques de cette ambition, voir (Bernard, 2015).

11. Pour les systèmes numéraux en Grèce ancienne voir (Verdan, 2015).

qui ne sont jamais des autographes mais des copies de copies, avec des déplacements et des ajouts, notamment explicatifs, qui en font le texte composite dont ont hérité les savants byzantins, latins puis Renaissants. Un manuscrit est toujours le porteur d'une histoire longue dont les étapes ne sont pas toujours faciles à reconstituer.

## Remarques sur le style, le vocabulaire et la structure des *Métriques*

### Un exemple pour découvrir : *Métriques* I.2

L'extrême majorité des propositions qui composent les trois livres des *Métriques* sont des problèmes, et la plupart de ces problèmes portent sur la mesure de figures ou de solides. C'est ce que propose le second problème du 1<sup>er</sup> livre, au sujet d'un exemple très simple, le triangle rectangle (voir figure 2) :

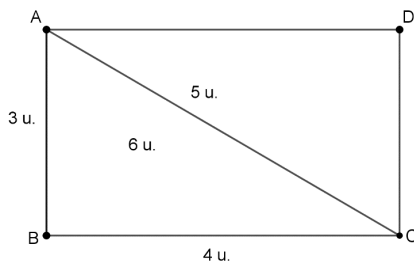


FIGURE 2 – *Métriques* I.2, en transcription moderne

« Soit un triangle rectangle  $ABC$  ayant l'angle en  $B$  droit et soit d'une part la <droite><sup>12</sup>  $AB$  de 3 unités, d'autre part la <droite>  $BC$  de 4 unités. Trouver l'aire du triangle et l'hypoténuse<sup>13</sup>. »

La réponse complète à ce problème, que nous appelons ici sa « solution », revient pour nous à calculer la mesure de l'aire et de l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés connus ( $L = 4$ ,  $l = 3$ ). Héron synthétise ce développement en énonçant finalement la « méthode » suivante :

« Et la méthode est celle-ci. En faisant les 3 par les 4, prendre la moitié de ceux-ci ; il en résulte 6. D'autant [d'unités] est l'aire du triangle. Et l'hypoténuse : en faisant les 3 par eux-mêmes et, semblablement, en

12. La traduction proposée, comme toutes celles qui suivent, est une version un peu adaptée de celle de Vitrac et Acerbi (2014, p.153). Les crochets, dans cette traduction, indiquent des mots sous-entendus dans le texte grec, qui dit donc simplement « la  $AB$  », le lecteur ou l'auditeur ancien devant suppléer le mot « droite », sous-entendu.

13. La figure 2 n'est bien sûr pas celle du manuscrit, mais une reproduction assez fidèle de cette dernière. Comme dans les textes anciens, elle n'est pas à l'échelle. Par contre, les lettres dénotatives ont été romanisées ( $C$  pour  $\Gamma$  par exemple) et les nombres sont écrits à notre manière (3u. = 3 unités pour  $\text{Mo}\Gamma$  par exemple).

faisant les 4 par eux-mêmes, composer : et en résultent 25 ; et, en prenant un côté de ceux-ci, avoir l'hypoténuse du triangle. »

Autrement dit l'auteur expose ce que les historiens comme Vitrac ou Acerbi appellent d'un point de vue stylistique deux algorithmes successifs, c'est-à-dire deux enchaînements verbaux exprimés en opérations<sup>14</sup>. Ces derniers partent des données déterminées du problème (le nombre des unités de chaque côté ici) et aboutissent à des valeurs déterminées (ici 6 pour l'aire, 5 pour l'hypoténuse) qui sont identifiées dans les termes du problème initial. Ils sont décrits enfin dans les termes d'opérations explicitées (multiplier, prendre la moitié, multiplier par soi-même, additionner, prendre un côté) et des résultats partiels. Cet enchaînement d'opérations ne changerait pas, si les données variaient : de ce point de vue et bien que particulières, elles ont un sens générique comme l'indiquent la désignation des nombres<sup>15</sup>. Il ne s'agit donc pas d'une « formule » au sens d'une expression littérale (l'aire  $A$  vaut  $\frac{1}{2} L \times l$ , l'hypoténuse  $h$  vaut  $\sqrt{L^2 + l^2}$ ) ni même d'un calcul déjà symbolisé à sa manière en formule, comme  $\frac{3 \times 4}{2}$ , mais bien d'une séquence d'opérations toutes explicitées puis enchaînées entre elles<sup>16</sup>. Quant à la démonstration, elle forme dans les *Métriqes* le cœur de la solution. Précédant la « méthode », on trouve en effet l'argument suivant :

« Que le parallélogramme rectangle  $ABCD$  soit complété. En effet, puisque l'aire du parallélogramme rectangle  $ABCD$  - comme cela a été démontré ci-dessus - est 12, et que le triangle  $AC$  est la moitié du parallélogramme  $ABCD$ , l'aire du triangle  $ABC$  sera alors six. Et puisque l'angle  $ABC$  est droit, les carrés sur les <droites>  $AB$ ,  $BC$  sont aussi égaux au carré sur la <droite>  $AC$  ; et les carrés sur les <droites>  $AB$ ,  $BC$  sont de 25 unités : le carré sur la <droite>  $AC$  sera donc aussi de 25 unités ; la <droite>  $AC$  elle-même sera donc de 5 unités. »

La démonstration précédente renvoie d'une part au premier problème, le plus fondamental, qui introduit la manière de calculer l'aire d'un rectangle. Elle implique d'autre part un théorème classique de géométrie, comme l'indique, en toute généralité, la référence au *parallélogramme*  $ABCD$ , que la diagonale  $AC$  divise en deux triangles *égaux*, c'est-à-dire « égaux en aire » suivant la terminologie euclidienne. Quant à la démonstration correspondant à l'hypoténuse, elle renvoie elle aussi au théorème classique, dit « de Pythagore », qui correspond à la 47<sup>e</sup> proposition du 1<sup>er</sup> livre des *Éléments* d'Euclide.

Ce premier exemple nous révèle donc d'emblée tout un environnement conceptuel qui nous est à la fois familier et étrange : celui de la métrologie savante grecque, qui s'appuie lui-même sur deux branches classiques du savoir savant antique : la

14. Pour les détails de cette approche, voir (Acerbi et Vitrac 2014, p. 411-427).

15. Dans l'exemple, il s'agit bien *des* 3 (sous-entendu : les trois unités dont il était question dans l'énoncé) et non *de* 3 (du nombre 3). La référence aux données de l'énoncé, est explicite même si elle est discrète et « cachée » dans la syntaxe.

16. Ces distinctions entre notre façon « moderne » de penser et d'écrire les « formules d'aires », et ce qu'on trouve dans ce type de texte non seulement dans l'Antiquité, mais aussi au Moyen-Age, fait l'objet des études détaillées de Marc Moyon sur la « géométrie de la mesure » (Moyon 2015, 2017).

géométrie d'un côté, l'arithmétique de l'autre. Arrêtons-nous sur cette distinction fondamentale, avant de revenir sur les caractères stylistiques qui permettent à Héron de « mélanger » les deux.

## La géométrie et l'arithmétique anciennes, et le mélange des genres <sup>17</sup>

### Géométrie et style démonstratif

Une partie du registre convoqué dans le problème ci-dessus est celui de la géométrie classique. Cette dernière renvoie d'une part à un univers d'objets spécifiques, comme les droites, ou les différentes sortes de figures, et un ensemble de postulats, de notions communes et de propositions fondamentales (comme les cas d'égalité de triangles) qui permettent de fonder une notion d'égalité entre objets différemment placés ou de formes distinctes : égalité de droites, égalités de figures par exemple. C'est un tel « théorème d'égalité en aire » qu'on invoque en disant que la diagonale d'un parallélogramme, partage ce dernier en deux triangles égaux (proposition 34 du 1<sup>er</sup> livre des *Éléments*). C'est ce qui explique le fait pour nous étrange, que cette géométrie ne soit associée à aucune notion (moderne) de mesure, au sens où il n'y a aucun nombre associé qui soit la « longueur » ou « l'aire » des objets, ni de calcul qui prouverait leur équivalence. Mais la comparaison de ces derniers est fondée, dans cette géométrie abstraite, par un enchaînement démonstratif reposant notamment sur les notions communes. Elle n'est donc pas dissociable du style et de la structure démonstratifs caractéristiques de cette géométrie « classique ». C'est surtout dans la partie de l'énoncé dédiée à la désignation des objets, et dans la partie démonstrative des propositions des *Métriques*, qu'on reconnaît ce style.

Les résultats de la géométrie classique jouent aussi dans les *Métriques* le rôle d'un répertoire de résultats connus et qu'on peut convoquer à souhait. À titre d'exemple, le terme « parallélogramme », employé dans la démonstration au lieu du rectangle évoqué dans l'énoncé, est probablement une sorte d'aide-mémoire, de mot clé ou de « formule toute faite » pour renvoyer à un théorème connu <sup>18</sup>.

### Art du calcul et style algorithmique

Les séquences intitulées « méthodes » (ou parfois « synthèses ») convoquent quant à elle un répertoire d'objets et un registre stylistique tout différents. Les objets en question sont des nombres, le plus souvent entiers dans les exemples les plus élémentaires, mais assez souvent fractionnaires. Il s'agit en tout cas de quantités discrètes qui s'opposent donc fondamentalement aux grandeurs continues qui sont l'objet de la géométrie classique, comme un genre à un autre.

---

17. Voir (Acerbi & Vitrac, 2014, p. 57-59 et 411-427).

18. Ces références sont toujours implicites dans le texte ancien. Dans l'édition de Vitrac et Acerbi, elles sont systématiquement explicitées en note de la traduction.

Cela n'empêche pas que les opérations sur les nombres sont le plus souvent nommées par des termes qui suggèrent une analogie avec des opérations géométriques : additionner se dit « composer » (comme si on ajoutait géométriquement des droites), prendre une racine se dit « prendre le côté » par opposition à l'opération géométrique de construire un carré sur une droite donnée ; quant à multiplier deux nombres, c'est le plus souvent l'analogie soit de construire un rectangle sur deux droites, soit de prendre une quatrième proportionnelle. Mais cette homologie du vocabulaire ne doit pas masquer la différence, très marquée dans les textes classiques, entre traitement géométrique des grandeurs et traitement arithmétique des nombres. Qu'on ne puisse assimiler l'un à l'autre est justifiée en profondeur par la théorie des grandeurs incommensurables, exposée par Euclide dans le livre X de ses *Éléments*, l'un des plus difficiles de ce texte classique.

Stylistiquement, cette différence se voit aussi à l'emploi d'un « style algorithmique », qui enchaîne des opérations explicitement nommées, ainsi que leurs résultats partiels, sur la base de nombres donnés et arrivant à un ou plusieurs nombres déterminés. Ce style, également employé dans l'ensemble du corpus métrologique ancien, est propre à l'exposé général de procédures sans justification, donc à l'établissement de formulaires. La « logique » de cet enchaînement s'apparente de près à l'écriture d'algorithmes modernes, ce pourquoi il n'est guère difficile de convertir ces passages en petits programmes exécutables. L'originalité des *Métriques* est d'ajouter à ce type de problèmes, un intermédiaire démonstratif sur lequel nous allons maintenant insister.

### Le mélange des genres

En raison de la différence soulignée ci-dessus, on comprend que le passage d'un registre démonstratif, portant sur les objets géométriques désignés dans l'énoncé, au registre calculatoire et algorithmique qui fournit la solution, soit une étape cruciale. Ce passage est assuré, dans l'exemple ci-dessous, par l'emploi d'une sorte de langage double, où un *calcul* est évoqué sans être totalement explicité, et où la « clé » démonstrative qui légitime géométriquement ce calcul, est rappelé aussi : « *puisque l'aire du parallélogramme rectangle ABCD [...] est 12, et que le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCD, l'aire du triangle ABC sera alors six* ». Ici on conjugue les deux aspects, en sous-entendant une analogie fonctionnelle, entre la *division en deux* (figures égales) d'une figure parallélogramme, et la *division par deux* du nombre qui lui est associé : la première opération est mentionnée, la seconde est sous-entendue, à l'inverse de ce qui se passe dans la phase de « méthode » ou « synthèse ».

Plus loin dans les *Métriques*, à partir de la proposition 10, ce rôle de traducteur est assigné à un corpus spécifique de propositions, d'habitude réservée dans la géométrie classique aux raisonnements par *analyse*, à savoir le langage des données. Dans l'exemple ci-dessus, on pourrait dire qu'une grandeur étant *donnée*, sa moitié est aussi *donnée*. L'opération correspondante, est la division par deux.

## La mesure du triangle, comme élément d'une série cohérente de problèmes

Un dernier élément de structure doit être apprécié, pour comprendre la nature du raisonnement héronien. Il est signalé, dans notre exemple, par le renvoi quasi déductif au problème précédent, qui traitait de la mesure des figures rectangles et qui est considéré ici comme acquis. De manière plus générale, notre exemple s'insère dans un dense réseau de problèmes analogues qui occupent toute la première partie du livre I et qu'on peut résumer par le schéma ci-dessous (figure 3). Sans entrer dans les détails, on y voit deux choses : (a) que le problème I.2 s'insère dans un réseau cohérent d'une douzaine de problèmes, caractérisé par l'homologie très nette des méthodes et une certaine dépendance soit logique, soit analogique ; (b) qu'un certain nombre de propositions ou de problèmes se sont ajoutés, probablement au cours de l'histoire du texte, comme par exemple la spectaculaire et célébrissime démonstration, exposée en I.9, permettant de calculer l'aire d'un triangle en ne connaissant que la mesure de ses côtés. Cette proposition est également présente dans la *Dioptra* et est connue aujourd'hui sous le nom de « formule de Héron ». Ce qui justifie clairement sa présence ici, est le fait qu'elle ne passe pas, comme le font tous les autres problèmes, par le calcul intermédiaire d'une hauteur. Mais c'est l'arbre qui cache la forêt et c'est cette dernière qui nous intéresse ici, d'autant qu'il existe déjà une littérature abondante sur l'arbre en question.

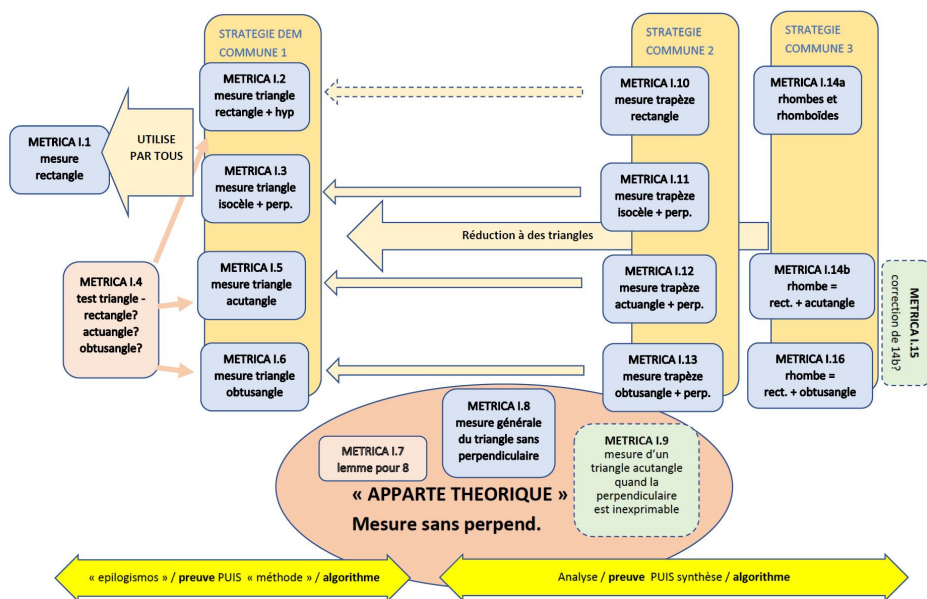


FIGURE 3 – Organisation des quinze premiers problèmes des *Métriques*

Ce qui nous importe ici en effet, est que la démonstration ci-dessus, justifiant un algorithme, n'en est qu'une parmi une série d'autres, qui comporte un fort lien

d'analogie et même de rédaction avec celle-ci : on a affaire à un système de petites variations autour de deux ou trois grands modèles communs au plus. Cet aspect répétitif et varié, est bien sûr très important dans la définition d'une stratégie d'apprentissage : nous reviendrons sur ses fondements plus loin.

## Pour découvrir et inventer d'autres procédures : variations autour de l'aire du trapèze droit

### Un autre problème pour s'exercer et aller plus loin : mesurer l'aire d'un trapèze droit

L'algorithme proposé en *Métriques* I.10 répond à l'énoncé suivant (voir figure 4) : « Soit un trapèze rectangle  $ABCD$  ayant les angles en  $A, B$  droits et soit d'une part la <droite>  $AD$  de 6 unités, d'autre part la <droite>  $BC$  de 11, et la <droite>  $AB$  de 12 unités. Trouver son aire ainsi que la <droite>  $CD$ . »

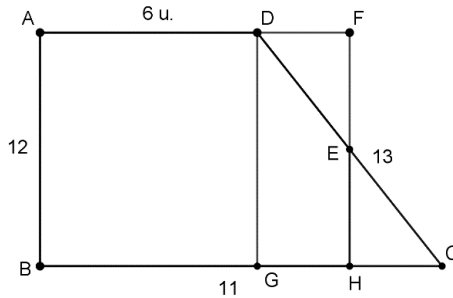


FIGURE 4 – Figure de *Métriques* I.10

La démonstration procède, en résumé, par la construction préliminaire de la droite  $FH$  parallèle à  $AB$ , passant par le point  $E$  milieu de  $DC$ , de sorte que  $H$  soit sur  $BC$  et qu'on puisse prolonger  $AD$  jusqu'en  $F$ . Un premier argument utilisant un cas d'égalité de triangles appliqué à  $DEF$  et  $EHC$ , permet de montrer que  $HC$  et  $DF$  sont égales. Il en résulte que les droites  $AD$  et  $BC$  sont, ensemble, égales à  $AF$  et  $BH$ , soit au double de  $AF$ . Si  $AD$  et  $BC$  sont données il est donc possible de déterminer  $AF$  puis l'aire du rectangle  $ABHF$ , la hauteur  $AB$  étant aussi donnée. Mais un second argument montre que ce rectangle est égal (en aire) au trapèze considéré, cela revient donc à déterminer l'aire du trapèze. Cette démonstration se conclut par une analyse en termes de « données », à laquelle nous avons fait allusion plus haut. La méthode est alors donnée à titre de synthèse, en ces termes : « Et, en conséquence de l'analyse, cela sera synthétisé ainsi. Compose les 6 et les 11 : il en résulte 17 ; de ceux-ci, la moitié : il en résulte  $8 \frac{1}{2}$  ; ceux-ci, par les 12 : il en résulte 102. Autant que cela vaut donc l'aire. »

En correspondance avec l'analyse, on pourrait, dans un langage algorithmique moderne « gloser » la procédure de la façon suivante :

Additionne 6 et 11	Cela correspond à la longueur des droites $AD$ et $BC$ ensemble
Il vient 17	C'est encore la longueur du double de $AF$ d'après le 1 <sup>er</sup> argument
Diviser par deux	On calcule ici la moitié, soit la longueur de $AF$
Il vient $8 \frac{1}{2}$	Qui est la longueur de $AF$ , côté du rectangle $ABHF$
Ceux-ci, multiplié par 12	On calcule ici l'aire du rectangle de côté $AF$ et $AB$ (donné)
Il en résulte 12	C'est donc la valeur de l'aire, puisque trapèze et rectangle ont même aire

L'introduction de ce type de glose (sous cette forme ou sous une autre) est un aspect potentiellement important du travail pédagogique sur ce genre de textes, ou qui s'en inspire. L'enjeu est d'étudier de nouveaux registres de démonstration en lien à l'explicitation de procédures, qu'à l'IREM de Paris Nord nous avons intitulés des « algorimonstres ». L'enjeu est de permettre d'aborder la démonstration sous un nouveau jour, non dissocié d'un apprentissage de l'algorithmique comme nous l'avons suggéré en introduction.<sup>19</sup>

## Variations inventives sur l'aire du trapèze

L'approche qu'on a résumée ci-dessus d'après le texte de Héron, peut être résumée par le schéma ci-dessous et sa légende (figure 5)<sup>20</sup>.

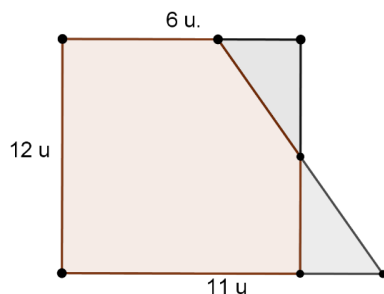


FIGURE 5 – Aj.  $6,11 \rightarrow 17$ ; div  $/2 \rightarrow 8 \frac{1}{2}$ ;  $\times 12 \rightarrow 102$

Elle appelle naturellement à d'autres manières d'obtenir la même mesure. Voici les différentes méthodes issues d'un remue-méninges au sein de l'IREM de Paris-Nord :

— En inventant le symétrique du trapèze par rapport au milieu du bord oblique, puis en prouvant que la figure et son symétrique forment ensemble un rectangle

19. Nous y reviendrons brièvement en conclusion et ce point sera développé prochainement dans des études dédiées, appuyées sur des expérimentations concrètes de cette idée.

20. La codification symbolique de l'algorithme est adaptée au phrasé grec et est la suivante : [nom abrégé de l'opération] + données numériques  $\rightarrow$  résultat.



de dimensions connues (figure 6). L'algorithme obtenu est très proche de celui de Héron, et d'une simplicité comparable, mais la division par deux intervient en dernière étape et non en seconde.

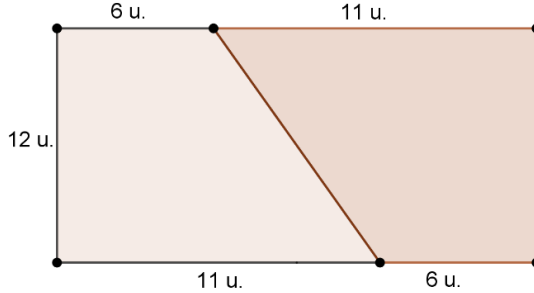


FIGURE 6 – Aj. 6,11  $\rightarrow$  17;  $\times$  12  $\rightarrow$  204; div /2  $\rightarrow$  102

— En partant de la même construction que celle de Héron, mais en remarquant que le rectangle équivalent au trapèze, est construit sur un côté qui peut se décomposer selon les moitiés des deux bases du trapèze (figure 7).

On obtient alors deux différents algorithmes possibles (au moins) suivant la manière dont on décompose les droites en question, et l'ordre dans lequel on les ajoute.

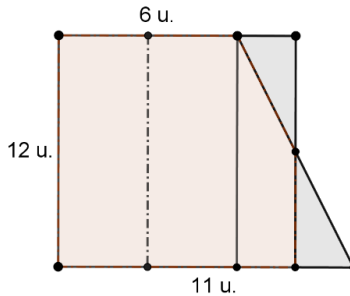


FIGURE 7 – 6 div /2  $\rightarrow$  3; 11 div /2  $\rightarrow$  5 1/2; aj. 3  $\rightarrow$  8 1/2;  $\times$  12  $\rightarrow$  102  
 11,6 retr.  $\rightarrow$  5; div /2  $\rightarrow$  2 1/2; aj. 6  $\rightarrow$  8 1/2;  $\times$  12  $\rightarrow$  102

— Enfin on peut remarquer qu'un trapèze droit est simplement la différence de deux triangles, et raisonner sur la « figure de Thalès » obtenue, donc à l'aide de proportions (géométriques) et, pour ce qui est des calculs correspondants, à l'aide de la recherche de quatrièmes proportionnelles (figure 8). Si la décomposition géométrique est très simple, l'algorithme obtenu est nettement plus complexe :

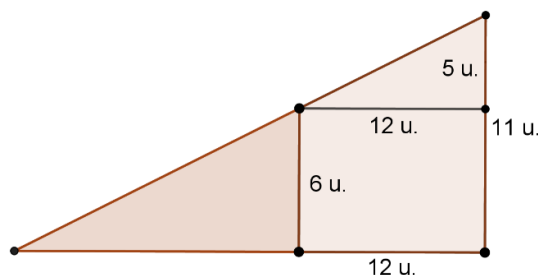


FIGURE 8 – 4<sup>e</sup> pr.  $5,12,6 \rightarrow 14 \frac{2}{5}$ ;  $\times 6 \rightarrow 86 \frac{2}{5}$ ;  $\text{div } /2 \rightarrow 43 \frac{1}{5}$ ;  
 4<sup>e</sup> pr.  $5,12,11 \rightarrow 26 \frac{2}{5}$ ;  $\times 11 \rightarrow 290 \frac{2}{5}$ ;  $\text{div } /2 \rightarrow 143 \frac{1}{5}$ ;  $\text{ret. les } 43 \frac{1}{5} \rightarrow 102$

On peut remarquer, qu’aucun des algorithmes obtenus n’est écrit autrement que comme un algorithme qui, partant des données initiales, donne le même résultat. S’expliquer cette différence dans la forme et l’enchaînement des opérations, et la congruence des résultats constitue donc un nouveau problème. Une traduction littérale de chacun des cinq algorithmes obtenus, permet de l’aborder, donnant ainsi à l’algèbre non le rôle d’exprimer une « formule », mais surtout de rendre possible la comparaison, et d’établir la preuve qu’ils sont cohérents entre eux.

## Conclusions : le moyen de justifier et d’inventer des procédures de calcul d’aire

À titre de synthèse, nous pouvons maintenant revenir sur les questions de départ, concernant le rapport entre algorithme et démonstration. Dans le sens défini par Vitrac et Acerbi, sur les travaux desquels nous nous sommes appuyés ici, l’adjectif *algorithmique* qualifie un style, un mode d’expression d’une série de calculs portant sur des nombres. Ce que ce registre permet de décrire, à savoir une série de « formules » pour des longueurs, des aires ou des volumes, est-il bien un *algorithme* au sens moderne ? Et si oui, à quelles conditions cette homologie est-elle valide et féconde ?

### Les « formules d’aires » sont-elles des algorithmes au sens moderne du terme ? Et si oui, sont-ils intéressants mathématiquement ?

Selon la caractérisation moderne rappelée par S. Modeste, S. Gravier et C. Ouvrier Buffet (2010), un algorithme au sens plein, est *une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (...) en un nombre fini d’étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données*. Chacune des « formules » dont nous avons donné des exemples plus haut, répond bien à ce critère. Pourtant, les trois collègues les rejettent du champ des algorithmes « intéressants » pour le raisonnement mathématique, parce

qu'ils ne permettent pas de questionner l'objet « algorithmes », autrement dit l'enchaînement des opérations lui-même, ainsi que son rapport au problème ou à la classe de problèmes qu'il est censé résoudre<sup>21</sup>.

Ce que nous avons résumé de la démarche héronienne nous indique que cette position est discutable, et qu'à la lecture d'un traité métrologique ancien comme les *Métriqes*, il faudrait selon nous plutôt retourner la proposition et poser la question : pourquoi les « formules d'aires » sont devenues dans l'enseignement des formules au sens trivial « qu'on peut appliquer systématiquement », et non des objets de réflexion intéressants pour les élèves ?

Car envisagées tout d'abord comme enchaînement d'opération et exprimée comme telle, ces formules posent bien, tout d'abord, des problèmes de *construction*. Or ces constructions ne sont pas uniques mais donnent lieu à de multiples variations. Le nœud de ces variations repose sur le constat fondamental, que les « formules » de mesure d'aire (par exemple) ne sont pas univoquement reliées aux *figures* auxquelles elles s'appliquent, mais seulement à *différentes façons d'examiner* ces figures. En outre, la détermination des algorithmes donne lieu à des discussions de cas ou à des variations en fonction de figures voisines, c'est-à-dire proches mais légèrement différentes. Enfin les cas les plus délicats, à savoir l'aire ou le volume de figures curvilignes, donnent lieu à des discussions d'existence aussi classiques qu'intéressantes.

On a vu en outre que ces formules posent des problèmes de *preuve*, et cela nous renvoie à la grande originalité des *Métriqes* : le fait d'associer une preuve aux algorithmes finalement donnés comme « méthode ». Plus précisément, l'examen des textes montre que la possibilité de la preuve est ici liée à la possibilité de parler « en double » de grandeurs (droites ou aire) elles-même *données* en double : une fois comme grandeur géométrique, l'autre comme « mesure » au sens d'un nombre entier ou fractionnaire d'unités. Nous reviendrons plus bas sur cette condition de possibilité<sup>22</sup>.

Enfin on peut remarquer, sur l'exemple que nous avons proposé, que ces formules donnent aussi lieu à d'intéressants arguments de complexité. Bien entendu, la complexité d'un algorithme renvoie à l'estimation d'un coût en opération *pour une machine* et s'applique donc à des classes de problèmes qui ont un nombre indéfini d'éléments. Ici la question se pose, au sens qu'on pourrait imaginer prendre pour les mesures données de très grands nombres, chaque opération ayant donc un coût important. Mais au-delà de ce problème, un élève de collège peut se poser les questions suivantes : entre tous les algorithmes qui lui permettent par exemple de calculer l'aire d'un trapèze, quel est le plus économique en termes de nombres d'opérations à mémoriser ou à codifier ? Et quels sont ceux qui possèdent des qualités de symétrie qui évitent de tester la taille comparée des côtés, de ceux qui

21. (art. cit., p. 58) Les collègues prennent pour exemple de telle formule « stérile mathématiquement » les algorithmes de détermination de solution des équations du second degré. Ces derniers, exposés classiquement dans les traités médiévaux comme le traité d'algèbre d'al-Khwarizmi ou ceux qui s'en inspirent, demanderaient une discussion plus approfondie, d'autant plus intéressante que les procédés de preuve utilisés se rapprochent beaucoup de raisonnements « héroniens ». Voir à ce sujet (Moyon, 2006).

22. On a noté en outre, que le fait de multiplier les formules, fait naturellement apparaître l'intéressant problème de leur cohérence, qui peut donner lieu à des preuves de type algébrique.

obligent à faire ce test ? Ce sont à leur manière des raisonnements de complexité, mais envisagés à un niveau élémentaire.

## Quelles sont les conditions de possibilité d'un tel travail mathématique ?

Ce qui rend potentiellement intéressant de telles formules, est donc la possibilité de les diffracter, d'opérer des variations qui font naître à leur tour de nouvelles questions. Cela suppose donc, en premier lieu, d'instaurer une description de ces formules qui, à l'imitation du « style algorithmique » ancien, soit bien une description *algorithmique* (enchaînement d'opérations) et non un formulaire algébrique (imagé ou symbolisé) qui autorise tous les glissements d'écriture et « aplanissent » les différences entre algorithmes. Qu'on en fasse des phrases, comme chez Héron, ou une représentation tabulaire ou schématique, comme celui proposé ci-dessus pour notre « résumé » de *Métriques* I.10, un langage de description est nécessaire. Explorer de tels langages intermédiaires, revient à définir ce que nous avons appelés plus haut des « algorimonstres », et cette idée générale permet d'envisager des déclinaisons pédagogiques qui seront décrites ailleurs.

Pour qu'une classe de problèmes, auquel ces algorithmes répondent, soit en outre disponible, il est nécessaire d'avoir un catalogue de figures fondamentales, un outil de classification comme celui qui gouverne les « géométries pratiques » médiévales (Moyon 2015, 2017). Pour qu'elles soient intéressantes, les figures simples doivent redevenir un objet d'exploration pour les élèves. Un moyen de le faire, comme chez Héron, est de se servir de ces « dérivés » des triangles que sont les trapèzes, ou bien ultérieurement des rhombes ou des quadrilatères quelconques.

La condition suivante est de disposer d'un style démonstratif, qui soit en bonne partie indépendant de toute procédure de calcul. Autrement dit, quelque chose qui ressemble pour nous, ce qu'est la géométrie déductive classique, celle d'Euclide ou d'Archimède, et non à une géométrie réduite à un calcul qui vaut preuve. C'est là bien sûr un point délicat, qui revient à dire que la géométrie comme *langage de démonstration* garde une utilité entière dans l'optique proposée ici, et que l'algèbre lui est difficilement substituable.

Enfin il importe de disposer d'un langage ou d'une forme de schématisation, qui puisse permettre des lectures « en double » (du côté de la géométrie d'un côté, du calcul de l'autre) des procédures qu'il s'agit de justifier ou d'inventer. Le rôle de ces registres « frontières » ne doit pas être sous-estimé et c'est ce que nous appelons plus haut des algorimonstres. A cet égard, l'algèbre, qui se prête aux doubles lectures, peut être considéré comme un langage adapté et comme « bon intermédiaire », à condition d'en préserver l'ambiguïté.

## Références bibliographiques

ACERBI, Fabio & VITRAC, Bernard (éd.), 2014, Héron d'Alexandrie : *Metrica*, Rome, Fabrizio Serra.

- BARBIN, Évelyne & alii, 2014, *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses.
- BARBIN, Évelyne, 2018, « La dioptré d'Héron d'Alexandrie : Des investigations pratiques et théoriques » in BARBIN et al. (dir.) *Les mathématiques et le réel : Expériences, instruments, investigations*, Rennes, PUR.
- BERNARD, Alain, 2015, « Interpréter la sériation des problèmes des Arithmétiques de Diophante : Une forme de modélisation ? », *SHS Web of Conferences*, 22, 00003. <https://doi.org/10.1051/shsconf/20152200003>
- BO n° 30 du 26 juillet 2018, Paris, Ministère de l'Éducation Nationale.
- BOAS, Marie, 1949, « Hero's Pneumatica : A Study of Its Transmission and Influence », *Isis*, 40(1), p. 38-48.
- BRUINS, Evert Marie, 1964, *Hero of Alexandria. Codex Constantinopolitanus Palatii veteris no. 1* (3 vol.), Leiden, Brill.
- CHABERT, Jean-Louis (éd.), 2010, *Histoire d'algorithmes : Du caillou à la puce*, Paris, Belin.
- KAHANE, Jean-Pierre (éd.), 2002, *L'enseignement des sciences mathématiques*, Paris, O. Jacob.
- MODESTE, Simon, GRAVIER, Sylvain, & OUVRIER-BUFFET, Cécile, 2010, « Algorithmique et apprentissage de la preuve », *Repères IREM*, (79), p. 51-72.
- MOYON, Marc, 2007, « La tradition algébrique arabe d'al-Khwārizmī au Moyen Âge latin et la place de la géométrie », in *Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements*, édité par Barbin Évelyne et Bénard Dominique, 289-318, INRP, IREM de Clermont-Ferrand. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520812>
- MOYON, Marc, 2015, « Comprendre les géométries de la mesure par les 'séries de problèmes'. L'exemple des pays d'Islam et de l'Occident latin du IX<sup>e</sup> au XIV<sup>e</sup> s. » *SHS Web of Conferences*, 22, 00007. <https://doi.org/10.1051/shsconf/20152200007>
- MOYON, Marc, 2017, *La géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines médiévales*. De Diversis Artibus (DDA), Turnhout, Brepols.
- VERDAN, Samuel, 2015, « Systèmes numéraux en Grèce ancienne : Description et mise en perspective historique », en ligne sur *CultureMATH* (consulté le 6.11.2019). [https://culturemath.ens.fr/sites/default/files/Verdan\\_2007\\_revised.pdf](https://culturemath.ens.fr/sites/default/files/Verdan_2007_revised.pdf)
- VITRAC, Bernard, 2009, « Mécanique et mathématiques à Alexandrie : Le cas de Héron », *Oriens-Occidens* 7, p. 155-199 (en ligne sur hal-SHS).
- VITRAC, Bernard, 2013, « Figures du mathématicien et représentations des mathématiques en Grèce ancienne (VI<sup>e</sup>-IV<sup>e</sup> s. avant notre ère) » In Arnaud MACÉ (éd.), *Le savoir public : La vocation politique du savoir en Grèce ancienne*, Besançon, PUFC.



## La géométrographie : vers un langage de programmation des algorithmes de tracés des figures géométriques

Sylviane R. SCHWER

### Introduction

Un algorithme est une séquence *finie* d'instructions pour traiter sans aucune ambiguïté et en un temps *fini* une classe de problèmes. Ce concept d'algorithme – à défaut de sa dénomination<sup>1</sup> – existe depuis l'Antiquité. On pensera, dans le domaine de l'arithmétique, au crible d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers jusqu'à un nombre donné  $n$  quelconque ou à la méthode euclidienne du calcul du plus petit commun diviseur de deux entiers  $a$  et  $b$  quelconques, apprise sous le terme d'*algorithme* d'Euclide. En géométrie, le problème de la construction des figures géométriques est l'un<sup>2</sup> des grands domaines des mathématiques qui a

1. Le terme est issu de la latinisation du nom du mathématicien Perse du IX<sup>e</sup> siècle Al-Khwārizmī. Il écrivit en arabe un ouvrage sur le système de numération de position à l'aide des chiffres indiens, traduit au XII<sup>e</sup> siècle en latin sous le titre *Algoritmi de numero Indorum*. L'Encyclopédie méthodique (EMM, 1784) présente ce terme comme employé par quelques auteurs, surtout espagnols, signifiant principalement la pratique de l'Algèbre, ainsi que le calcul arithmétique à l'aide des chiffres arabes. Une analyse du terme conduit à la définition suivante : « l'art de supputer [calculer] avec justesse et facilité », qui s'élargit pour signifier « la méthode et la notation de toute espèce de calcul. En ce sens, on dit l'*algorithme du calcul intégral*, l'*algorithme du calcul exponentiel*, l'*algorithme du calcul des sinus*, etc ». Cette signification très actuelle de méthode effective ou calculabilité effective me semble être une innovation des encyclopédistes – et certainement celle de d'Alembert – guère utilisée jusqu'au XIX<sup>e</sup> siècle. Une entrée *Algorithme* apparaît dans la quatrième édition du dictionnaire de l'Académie française (1762), il est décrit comme « un terme didactique » signifiant l'art de calculer. Il disparaît ensuite pour ne réapparaître que dans la dernière édition (la 9<sup>e</sup> édition, débutée en 1992).

2. Citons aussi le calcul des grandeurs géométriques (périmètre du cercle), des aires et des volumes, le calcul des racines et la résolution d'équations (Boucard & al, 2017, §4).

occupé les Anciens, en particulier, les constructions à la règle (non graduée) et au compas et qui constitue un champ algorithmique remarquable.

Dès la maternelle, l'élève commence à « Identifier le principe d'organisation d'un algorithme et poursuivre son application » et à « Reproduire, dessiner des formes planes. » (MEN, 2015a). Dès le cycle 2, la construction des figures géométriques est un atout majeur pour s'approprier les notions géométriques.

« Les notions de géométrie plane et les connaissances sur les figures usuelles s'acquièrent à partir de résolution de problèmes (reproduction de figures, activités de tri et de classement, description de figures, reconnaissance de figures à partir de leur description, tracés en suivant un programme de construction simple). La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles. Les concepts généraux de géométrie [...] sont présentés à partir de tels problèmes. » (MEN, 2015b).

L'élève doit pouvoir « utiliser la règle, le compas ou l'équerre comme instrument de tracé » (*ibidem*, p.85).

L'un des principaux sujets de recherche actuelle en logique – en relation avec l'informatique – est la complexité algorithmique, qui repose par exemple, sur le nombre d'étapes nécessaires pour prouver ou résoudre un problème. C'est un sujet théorique intéressant en soi, mais qui a aussi une grande importance pratique puisqu'il permet de savoir si la résolution d'un problème peut se faire en un temps raisonnable en fonction des moyens dont on dispose. Certains des algorithmes de cryptographie les plus utilisés, comme par exemple la décomposition des grands nombres en facteurs premiers, reposent sur le fait que le temps de résolution actuel par les ordinateurs est plus long que le temps d'utilisation effective de la clé utilisée.

L'analyse quantitative des algorithmes, liée aux nombres d'opérations particulières à exécuter n'est pas une préoccupation usuelle des mathématiciens. C'est essentiellement dans un contexte d'enseignement supérieur que l'analyse quantitative des algorithmes a émergé, enseignement qui s'adresse principalement aux candidats et aux élèves des grandes écoles. C'est dans un contexte similaire d'enseignement pour des (futurs) ingénieurs de grandes écoles et des architectes qu'Émile Lemoine va s'intéresser à la fin des années 1880 à l'analyse quantitative d'une catégorie d'algorithmes : celle des constructions à la règle et au compas. Son ambition première était même l'analyse des raisonnements mathématiques en général.

La suite du texte est divisée en cinq parties. Après une présentation brève d'Émile Lemoine afin de comprendre ses motivations, nous montrons qu'il est le premier à proposer une analyse quantitative des algorithmes. Puis nous présentons les principes de la géométrographie. Nous traitons de son actualité dans les deux dernières sections. La section cinq présente les liens de la géométrographie avec le mouvement « Logo » des années 1980 et sa célèbre tortue, et sa mise en œuvre à travers le logiciel GeoTortue.



## Émile Lemoine (1840-1912)

Émile Michel Hyacinthe Lemoine est né à Quimper d'un père capitaine à la retraite, l'un des fondateurs du Prytanée national militaire, où Émile prépare le concours de l'École polytechnique qu'il intègre en 1860. Dès cette époque il publie dans les *Nouvelles annales de mathématiques*<sup>3</sup> sur les propriétés du triangle dont il initia l'étude et en fut l'un des plus importants chercheurs de la seconde partie du XIX<sup>e</sup> siècle. À sa sortie du corps des Mines, en 1866, il suit sa propre voie comme chercheur et enseignant. Il enseigne les mathématiques à l'X. Il continue d'étudier les sciences, notamment l'astronomie, la chimie, la médecine, l'architecture ; il fait une préparation aux Beaux-Arts, entame des études de droit qu'il doit abandonner rapidement à cause des principes républicains qu'il défend (Smith, 1896).

Finalement, Émile Lemoine devient ingénieur civil des Travaux Publics à Paris, pour l'approvisionnement en gaz. Il devient, comme Charles-Ange Laisant (1841-1920), Charles-Adolphe Wurtz (1817-1884), militant de la reconstruction nationale par l'enseignement et la recherche scientifique, puisque, pour beaucoup de scientifiques, il apparaît que ce n'est pas le *militaire* mais l'*instituteur* prussien qui aurait gagné la guerre. Il participe à la création de plusieurs sociétés savantes, comme la SMF (Société mathématique de France), la Société de physique. Il est membre de l'AFAS (Association française pour l'avancement des sciences) dès sa première année. Cette société, créée en 1872 par l'action conjointe de savants – citons le médecin Claude Bernard (1813-1878), le chimiste Charles-Adolphe Wurtz (1817-1884), Paul Broca (1824-1880) –, banquiers, industriels, organise des congrès annuels dans des villes de province qui rassemblent sous sa bannière comme intervenants les chercheurs français et étrangers et les amateurs de sciences, comme public toutes les classes de la société, oisives ou laborieuses. C'est à l'AFAS qu'il présente pour la première fois les principes de la *géométrie* (Lemoine, 1889).

De 1891 à 1894, il participe avec Laisant et Henri-Auguste Delannoy (1833-1915) aux publications posthumes des récréations mathématiques d'Édouard Lucas (Autebert & al., 2003). Avec Laisant, il fonde en 1894 l'*Intermédiaire des Mathématiciens* dont il sera le premier éditeur et le restera longtemps. Ce journal sera publié sans interruption jusqu'en 1920, une seconde série paraîtra entre 1922 et 1925. Il publie aussi avec lui en 1896 un traité d'arithmétique. Ils avaient également publié ensemble une note concernant les sciences et les mathématiques (Laisant & Lemoine, 1893).

Ainsi Émile Lemoine, à la fois enseignant et ingénieur, ayant fréquenté différentes écoles *pratiques*, dont l'école d'Architecture, a pu travailler le « dessin industriel » et étudier la construction des figures géométriques à la règle et au compas dans un cadre applicatif, en particulier pour l'étude des différents tracés des *épures*.

---

3. C'est le journal des candidats aux écoles polytechnique et normale. En 1860, il envoie à ce journal avec un camarade du Prytanée une solution à un problème posé qui sera publiée (Kessler & Lemoine, 1860).

## Analyse quantitative des algorithmes

Jeffrey Shallit signale quelques traces d'analyse au XIII<sup>e</sup> siècle chez Fibonacci qui observe que pour trouver le nombre de facteurs premiers d'un nombre  $n$ , il suffit de diviser par au plus  $\sqrt{n}$  premiers entiers (Shallit, 1994)<sup>4</sup>. C'est au XIX<sup>e</sup> siècle que l'analyse quantitative des algorithmes émerge, en particulier autour de l'algorithme d'Euclide. C'est Antoine-André-Louis Reynaud (1771-1844), polytechnicien, et enseignant et examinateur à l'École polytechnique qui s'intéresse à l'efficacité des algorithmes, certainement motivé par sa proximité avec Gaspard de Prony (1735-1839), responsable d'un grand projet de calcul de tables numériques. C'est dans son traité d'arithmétique destiné aux candidats à l'X (Reynaud, 1811) que figure la première analyse explicite de l'algorithme d'Euclide par évaluation du nombre de divisions à effectuer en fonction de la valeur du diviseur. C'est encore un autre polytechnicien, Pierre-Joseph-Étienne Finck (1797-1870), également dans un traité d'arithmétique à l'usage des candidats aux grandes écoles, qui prouva en 1841 que l'algorithme d'Euclide est de l'ordre du logarithme du diviseur. Reynaud et Finck publieront également des arithmétiques pour des ingénieurs civils et militaires. Son résultat est légèrement moins bon que celui de Gabriel Lamé (1795-1870), publié en 1844, sans référence à son camarade d'École, et qui restera comme le premier à avoir étudié la complexité de l'algorithme d'Euclide. Seul Édouard Lucas (1842-1891), dans son traité de théorie des nombres, fera référence à ce travail.

Le 2 avril 1888, Lemoine présente au 17<sup>e</sup> congrès de l'AFAS, un concept original pour les mathématiques, celui de la mesure de la simplicité d'une proposition, d'une procédure, ... fondée sur les considérations suivantes.

« Une vérité mathématique, une proposition prise en soi, n'est ni simple ni compliquée ; elle est. Ce qui nous la fait paraître simple ou compliquée, c'est le chemin que notre esprit a dû parcourir pour arriver à sa connaissance. Si le chemin est court, nous disons que la proposition est simple ; s'il est long, qu'elle est compliquée.

Celui qui cherche de nouvelles propositions, c'est-à-dire qui cherche à énoncer des vérités mathématiques non encore mises en lumière, ne s'occupe guère, pendant la recherche, de la nature ni de la longueur du chemin qu'il parcourt, pourvu qu'il arrive ; plus tard, lui ou d'autres sauront aplanir la route et trouveront les raccourcis.

Dans l'*exposition didactique de la science*, au contraire, la nature et la brièveté des routes suivies prennent une importance primordiale,

[...]

Toute science mathématique s'appuie sur un petit nombre de *vérités expérimentales* irréductibles entre elles, admises sans démonstration, et emploie, en outre, dès les premiers pas, des *notions élémentaires* qui s'imposent à l'esprit[...]. Soit A, B, C, etc., [ces] les vérités expérimentales et les notions élémentaires à la base d'une science déterminée.

Tous les théorèmes qui constituent cette science se déduiront de A, B,

4. Tout ce paragraphe est dû à cette publication.

C par voie syllogistique. [...] Les théorèmes qui ne dépendent que de A, B, C, etc., sont dits du premier ordre, ceux qui ne dépendent que de A, B, C, etc., et de ceux du premier ordre ; sont dits du deuxième ordre, etc. ; ceux qui ne dépendent que de A, B, C, etc., et de ceux des n premiers ordres, sont dits du n+1<sup>e</sup> ordre.

[...]

Dans l'exposition de l'ensemble d'une science, nous dirons que la simplicité *absolue* d'une proposition ne dépend que de son ordre, du nombre d'éléments syllogistiques qu'il a fallu pour l'établir, en comptant alors, comme on le ferait d'une notion élémentaire ou d'un fait expérimental, tout théorème précédemment démontré. Il est évident que l'on peut déduire de là un moyen d'apprécier la valeur didactique des méthodes employées pour l'exposition d'une science mathématique et, jusqu'à un certain point, une sorte d'échelle d'avancement de cette science.

La valeur didactique peut même se juger à un double point de vue, soit qu'il s'agisse de comparer deux ouvrages exposant une même partie de la science en employant la même méthode fondamentale, soit qu'il s'agisse de comparer les méthodes elles-mêmes. »(Lemoine, 1889).

C'est donc un calcul de complexité que propose Lemoine, pour lequel il définit un véritable langage de programmation dans lequel il exprime les algorithmes.

## La géométrographie

Le 16 juillet 1888, Julien Haton de la Goupillière (1833-1927) présente un résumé de deux pages (Lemoine, 1888a) de « cette idée nouvelle quoique fort naturelle, sans aucune racine dans le passé ni aucune idée s'y rapportant même d'une façon lointaine » devant les membres de l'Académie des sciences. Deux jours plus tard, Lemoine présente devant la SMF une première suite d'une dizaine de pages (Lemoine, 1888b) de sa communication à Oran qui en comportait 21. Enfin, dans *Mathesis*<sup>5</sup>, il publie en deux parties une dizaine de pages (Lemoine, 1888c). Ainsi, tous les publics potentiellement intéressés sont atteints dès le début de l'aventure.

Le but de la géométrographie est de traduire les raisonnements et constructions scientifiques à l'aide d'un langage formel, proche d'un langage de programmation, afin d'en calculer leur complexité – qu'il nomme *simplicité* – en termes d'opérations élémentaires, de les comparer, d'en améliorer l'efficacité. Lemoine termine son texte par la phrase :

« L'exposé de la méthode pour mesurer la simplicité est si simple qu'il y aurait, à notre avis, avantage à y employer quelques instants

---

5. Ce journal, destiné aux premières années de l'enseignement supérieur, est un médium de vulgarisation « de la connaissance des parties les moins abstraites de la géométrie supérieure et de l'algèbre moderne ». Sont publiés dans chaque numéro des articles originaux, des solutions de questions choisies et des comptes rendus d'ouvrages scientifiques. »(Mansion et Neuberg, 1881, p. 1-2.)

dans une des leçons du cours de géométrie élémentaire » (Lemoine, 1889).

## Formalisation des constructions des figures géométriques

### Le principe

Partant du fait que « toute construction graphique est la répétition un certain nombre de fois de quelques opérations élémentaires », il s'agit, à partir d'un ensemble restreint d'opérations élémentaires  $\{Op_1, Op_2, \dots, Op_n\}$ , d'attribuer, à toute construction exécutable uniquement à l'aide de cet ensemble d'opérations :

- un symbole  $Op : k_1Op_1 + k_2Op_2 + \dots + k_nOp_n$ , dans laquelle  $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $k_i$  est le nombre fois que l'opération  $Op_i$  a été utilisée.  
Ce symbole résume le résultat d'une construction géométrique.
- une mesure de coût  $k_1c_1 + k_2c_2 + \dots + k_nc_n$ , dans laquelle *a priori*  $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $k_i$  est le nombre fois que l'opération  $Op_i$  a été utilisée dans la réalisation,  $c_i$  est un coefficient de coût de réalisation de l'opération  $Op_i$ .  
Le coût étant une valeur dépendant de l'appréciation qu'on en fait, et hautement variable, Lemoine attribue dans tous ses travaux la valeur 1 à toutes les opérations de base, les considérant comme équivalentes, cette mesure devient alors
- la simplicité :  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ , « qui est le nombre total d'opérations élémentaires nécessaires à son exécution. »

### Un exemple élémentaire : description des déplacements dans un quadrillage

En cycle 2, une activité classique est de représenter les déplacements sur un quadrillage par une séquence de flèches, qui sont les déplacements élémentaires. En général, on a les quatre opérations élémentaires

$Op_1$	$Op_2$	$Op_3$	$Op_4$
←	→	↑	↓

Ce qui intéresserait Lemoine, ce serait l'étude comparative des déplacements valides proposés qui permettent de passer d'une case du quadrillage à une autre en fonction des quatre opérations fournies. Par exemple, les trois déplacements  $D_1 : \rightarrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \downarrow$ ,  $D_2 : \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow$ ,  $D_3 : \downarrow \rightarrow \rightarrow$  et  $D_4 : \rightarrow \downarrow \rightarrow$  conduisent à partir de la même case au même endroit.  $D_3$  et  $D_4$  ont même symbole :  $2 \rightarrow +1 \downarrow$ ;  $D_1$  a comme symbole  $3 \rightarrow +1 \leftarrow +1 \uparrow +2 \downarrow$  et  $D_2$  a comme symbole  $2 \rightarrow +1 \uparrow +2 \downarrow$ . Pour la mesure de complexité, il y a le choix. Par exemple, un coût identique pour chacune des opérations, permet de privilégier les chemins minimaux : il y en a trois parmi lesquels  $D_3$  et  $D_4$  de simplicité +3,  $D_1$  et  $D_2$  étant de simplicité 7 et 5 respectivement.

### Constructions à la règle et au compas

Son passage à l'École d'architecture a rendu Lemoine familier avec les constructions des épures, qui « se construisent ordinairement au moyen de la règle et du

compas ». Il va s'intéresser essentiellement aux constructions à la règle et au compas, avec parfois l'équerre.

— Avec la règle on ne peut faire que deux opérations élémentaires :

**R1** Placer le bord d'une règle par *un* point placé

**R2** Tracer une ligne en suivant les bords de la règle (ou d'un côté de l'équerre) ;

— avec le compas, il y a trois opérations élémentaires :

**C1** Mettre *une* pointe du compas sur un point placé

**C2** Mettre une pointe du compas en un point *indéterminé* d'une ligne tracée

**C3** Tracer le cercle.

— Si l'on ajoute l'équerre, il faut ajouter à R1 et R2 les deux opérations élémentaires :

**E1** Placer un côté de l'équerre le long d'une règle ou une règle le long d'un côté de l'équerre.

**E2** Faire glisser l'équerre sur la règle.

Faire passer le bord d'une règle par *deux* points nécessite deux opérations (R1). Le symbole du traçage d'une droite passant par deux points donnés est  $2R1 + R2$ , sa simplicité est 3, alors que le symbole du traçage d'une droite passant par un seul point donné est  $R1 + R2$ , de simplicité 2, et le symbole du traçage d'une droite quelconque est  $R2$ , de simplicité 1. Prendre une distance de deux points placés avec le compas nécessite deux opérations (C1), sa simplicité est 2.

Le tracé d'un cercle quelconque<sup>6</sup> a pour symbole  $C2 + C3$ , de simplicité 2.

Lemoine (1888b) examine une trentaine de constructions<sup>7</sup> à la règle et au compas du *Traité de Géométrie* de Rouché et Comberousse, qui s'adresse aux candidats aux « écoles spéciales », c'est-à-dire les grandes écoles scientifiques. On trouve dans la liste, bien évidemment, plusieurs constructions de triangles (Rouché & Comberousse, 1883) :

— Construire un triangle connaissant un côté et ses deux angles adjacents, de symbole  $4R1 + 3R2 + 12C1 + C2 + 7C3$  et de simplicité 27.

— Construire un triangle ABC connaissant deux côtés et l'angle qu'ils définissent, de symbole  $5R1 + 2R2 + 8C1 + 4C3$  et de simplicité 19.

— Construire un triangle ABC connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, de symbole  $4R1 + 3R2 + 10C1 + C2 + 5C3$  et de simplicité 23.

— Construire un triangle connaissant les trois côtés, de symbole  $4R1 + 3R2 + 8C1 + C2 + 3C3$  et de simplicité 19.

La construction suivante illustre la démarche. Il s'agit de la construction IX détaillée dans (Lemoine, 1889) : *par un point A, pris hors d'une droite BC, mener une parallèle à cette droite.*

---

6. Le compas est supposé avoir toujours un certain écart entre ses deux pointes.

7. Lemoine suppose toujours les données posées à part, l'espace de construction est complètement vide au départ (Lemoine, 1889).

« Du point A comme centre, avec une ouverture arbitraire, je décris l'arc DC (op. C1+C3) ; de C comme centre, avec la même ouverture, je décris l'arc AB (op. C1+C3) ; je prends la longueur AB (op. 2C1) et de C comme centre, avec cette longueur AB comme rayon, je décris une circonférence (op. C1+C3), qui coupe en D l'arc DC, puis je trace AD (op. 2R1+R2).

Résultat [symbole] :  $2R1+R2+5C1+3C3$

Simplicité : 11 »

Il introduit la notion de *construction géométrographique*, qui est la/les solution(s) connue(s) les plus simples. En fait, Lemoine est bien conscient que le symbole est ce qui caractérise le mieux la complexité de la construction, ce qui fait que la relation de complexité devient un simple ordre partiel.

À la fin de la contribution, il reprend le problème en ajoutant l'équerre :

« Je mets l'hypoténuse de l'équerre en contact avec BD (op. 2R1) ; je place la règle le long d'un côté de l'équerre (op. E1) ; je fais glisser l'équerre jusqu'à ce que l'hypothénuse passe en A (op. E2+R1) ; je trace une ligne le long de l'hypothénuse (op. R2)

Résultat [symbole] :  $3R1+R2+E1+E2$

Simplicité : 6 »

Le résultat confirme donc l'utilité de l'équerre. L'utilisation de l'équerre permet à Lemoine de montrer l'« universalité » de sa méthode, en proposant ici une extension du système règle compas. Mais, comme géomètre, il écrira (Lemoine, 1902, p. 17) :

« Nous allons donner ici les symboles de l'équerre, car sauf lorsqu'on exige une haute précision, l'équerre est admise généralement pour les constructions des figures de Géométrie, surtout pour les tracés de la géométrie descriptive. »

Lemoine termine la série des constructions à la règle et au compas par la construction d'un point donné par ses coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$ , relatives à deux axes donnés, soit rectangulaires soit obliques. Dans le premier cas, la simplicité est 16 ( $4R_1+2R_2+7C_1+3C_3$ ), dans le second 19 ( $2R_1+R_2+11C_1+5C_3$ ). Cette comparaison des deux systèmes de coordonnées est l'objet d'un article (Lemoine, 1888b).

15 constructions sont reprises dans la première partie d'un troisième article sur les 23 exemples proposés (Lemoine, 1888c). La seconde partie traite, sans le nommer, du fameux problème des trois cercles d'Apollonius concernant la construction à la règle et au compas d'un cercle tangent à trois cercles donnés. Il y compare les solutions d'Étienne Bobillier (1798-1940) et Joseph Diez Gergonne (1771-1859) d'une part et de François Viète (1540-1603) d'autre part. Il conclut : « Les résultats des deux méthodes n'ont pas été sans me laisser une vive surprise et elle a été partagée par tous ceux auxquels je les ai montrés<sup>8</sup> ». Lemoine reprendra ce problème dans un nouvel article (Lemoine, 1892b), dans lequel il compare selon les mesures de la géométrographie quatre solutions que nous résumons Table 12.1.

8. En gras dans le texte.

## Exactitude et construction géométrique (1892)

En 1892, Lemoine présente au congrès de Pau un mémoire de 65 pages contenant 65 constructions parmi lesquelles des « simplifications » de la plupart des constructions présentées précédemment et une nouvelle mesure : l'*exactitude* (Lemoine, 1892b).

En effet il y a deux catégories d'opérations élémentaires : les opérations de tracés (de dessin) proprement dites comme  $R2$  et  $C3$  et les opérations préparatoires (de positionnement des instruments), comme  $R1$ ,  $C1$ ,  $C2$ ,  $E1$  et  $E2$  dont dépend l'exactitude du tracé. Ainsi, la mesure d'exactitude ne va retenir que les opérations préparatoires. Plus elle sera élevée, moins la construction risque d'être exacte. Lemoine a bien conscience que les termes logiques auraient été coefficient de complication et coefficient d'inexactitude, mais il justifie ses choix par la recherche visée (note de la page 37). Pour décrire une construction, Lemoine donne son symbole, la simplicité, l'exactitude, le nombre de cercles et de droites tracés. À chacun de choisir la construction qui lui convient le mieux d'après ces paramètres. Ainsi la construction IX, *tracer un angle droit ou tracer deux droites perpendiculaires entre elles*, possède-t-elle :

- trois constructions géométriques pour la règle et le compas, de simplicité 8, d'exactitude 4, dont deux produisant 3 droites et 1 cercle et une 2 droites et deux cercles,
- une construction géométrique avec règle compas et équerre de simplicité 4, d'exactitude 2, produisant 2 droites.

Quant au problème des trois cercles d'Apollonius, le tableau 12.1 résume les quatre solutions étudiées dans (Lemoine, 1892a).

TABLE 12.1 – Le problème des 3 cercles d'Apollonius

solution	expression algébrique	simplicité	exactitude	droites	cercles
Viète	$52R1+26R2+98C1+C2+58C3$	235	151	26	58
Bobillier & Gergonne	$120R1+60R2+104C1+72C3$	356	224	60	72
Fouché	$112R1+56R2+53C1+26C3$	247	165	56	26
Mannheim	$108R1+54R2+20C1+10C3$	192	128	54	10

La conclusion de son étude sur le problème d'Apollonius, reste la même que précédemment :

« La moins bonne construction est donc la célèbre et didactiquement élégante solution de Bobillier et Gergonne ; son coefficient de simplicité, c'est-à-dire le nombre d'opérations élémentaires qu'elle exige est 356. Cela surprendra certainement au premier moment beaucoup de géomètres ; j'ai été bien surpris moi-même. »

Cette remarque qui oppose *élégance didactique* d'une part, et *efficacité* d'autre part est un des points importants concernant la réception immédiate de la géométrie. Gaston Gohierre de Longchamps (1842-1906), dans son *Journal de*

*Mathématiques élémentaires* qui accueille plusieurs interventions de Lemoine sur le sujet, développe cette opposition (Longchamps, 1896, p.13) :

« La simplicité géométrographique, telle que l'a conçue M. Lemoine, ou telle qu'on pourra la concevoir en modifiant peut-être certains points, et la simplicité géométrique, sont deux choses très différentes – souvent opposées –. Il importe de signaler encore la distinction qu'il convient de faire entre ces deux ordres de simplicité. Pour éviter toute ambiguïté, on pourrait peut-être les distinguer en les dénommant *simplicité théorique* et *simplicité graphique*. »

## La réception de la géométrographie

Lemoine publie ses travaux sur la géométrographie de 1888 à 1902 dans plus d'une trentaine de publications<sup>9</sup>, dont une dizaine aux congrès de l'AFAS, dans des journaux destinés à l'enseignement supérieur (*Mathésis*, les *Nouvelles annales*, les *Journaux de mathématiques élémentaires et spéciales*), dans le bulletin de la SMF (2), les comptes rendus de l'académie (2) ) et dans plusieurs congrès et revues étrangers (*Chicago Congress Papers*, *Mémoires de la société physico-mathématique de Kasan*, les *comptes rendus de la société mathématique d'Edinbourg*, le *bulletin de la société mathématiques américaine*, le *Journal de Ciencias Mathematicas e Astronomicas*<sup>10</sup>, *El Progreso Matemático*<sup>11</sup>, *Archiv der Mathematik und Physik*).

Dès ses premières conférences et publications en 1888, il est rejoint par un enseignant de mathématiques et un administrateur financier. Évariste Bernès (1831-1903), professeur de mathématiques à Louis le Grand, lit *Mathésis* et le *journal de mathématiques élémentaires*. Gaston Tarry (1843-1913) est contrôleur des contributions à Alger et possède aussi son point du triangle<sup>12</sup>. Ce dernier est un habitué des congrès de l'AFAS et un grand amateur de problèmes combinatoires, de récréations mathématiques et carrés magiques, (voir par exemple (Barbin & al., 2017)), rechercher les solutions géométrographiques des constructions est un jeu qui ne peut que le séduire. Émile Lemoine publie en 1902 une synthèse « pédagogique » (Lemoine, 1902) dans laquelle il donne les réalisations géométrographiques de quelques 70 constructions. Dans son avant-propos, il écrit :

« Toutes les solutions classiques ont alors été étudiées par nous trois, les constructions qu'on en déduisait mesurées par mon étalon ; je notais au fur et à mesure chaque perfectionnement trouvé, chaque solution nouvelle proposée et que je reconnaissais préférable aux précédentes ; chacun de nous simplifiait encore s'il le pouvait ce que l'autre avait fait, et je classais dans un dossier le dernier résultat qui restait, jusqu'à nouveau progrès, la *construction géométrographique* de la question. »

---

9. Nous nous sommes fondé sur les données fournies par l'Electronic Research Archive for Mathematics Jahrbuch Database.

10. Revue internationale portugaise fondée en 1877 par le mathématicien Francisco Gomes Teixeira (1851-1933).

11. Première revue de mathématiques pures et appliquées espagnole, publiée par l'université de Saragosse à partir de 1895.

12. Voir par exemple, <https://mathworld.wolfram.com/TarryPoint.html>.



La notion de simplicité est une notion subjective que la géométrie essaie de quantifier selon un certain point de vue. Ce qu'écrit de Longchamps témoigne de la différence fondamentale entre théoriciens et praticiens. Les premiers préfèrent une solution simple et élégante, les seconds une solution efficace. Des enseignants comme Rouché l'ont introduite dans leurs cours.

L'efficacité est également dépendante du médium utilisé. Un dessinateur industriel ou un architecte n'est pas la tortue de Python ou de géoTortue. Un dessinateur cherchera un compromis entre efficacité en nombres d'opérations à exécuter et efficacité à mémoriser la suite des instructions, cela explique ce qu'en dit en 1949 André Sainte-Laguë (1882-1950) et Henri Masson, cités dans (Tournès, 2000).

« Pendant quelques années, la géométrie a passionné les géomètres, avant de tomber rapidement dans l'oubli. Elle semblait de nature à faire économiser beaucoup de temps aux dessinateurs, mais les espoirs placés en elle s'évanouirent. En effet, les calculateurs graphiques ont préféré conserver les constructions classiques, relativement longues mais faciles à retenir, car se déroulant selon un ordre logique, plutôt que d'adopter les constructions optimisées artificielles de la géométrie. » (Sainte-Laguë & Masson, 1949, p. 219)

L'oubli n'a cependant pas été total, la géométrie a subsisté au niveau international. Howard Eves (1911-2004) en décrit la méthode (Eves, 1976), que Duane DeTemple utilise pour l'étude des cercles de Carlyle (DeTemple, 1991) cité dans un bulletin de l'APMEP concernant les constructions géométriques (Arnaudies & Delezoide, 2003). La géométrie est également étudiée dans un article didactique sur l'enseignement de la géométrie au collège par Yves Chevillard et Michel Jullien (Chevillard & Jullien, 1991). Quant à nous, nous utilisons depuis une dizaine d'années régulièrement la géométrie (Lemoine, 1902) pour la formation des professeurs de la maternelle à l'université, tant la démarche, aussi bien dans ses aspects positifs que négatifs, est actuelle, étant donné l'aspect de plus en plus procédural, y compris dans les raisonnements, des mathématiques.

## L'actualité de la géométrie

L'informatique, l'automatisme permettent de repositionner Lemoine comme précurseur. Michel Chein mentionne la géométrie comme exemple d'analyse de la complexité des algorithmes (Chein, 1982), ce qui n'est pas le cas de Donald Ervin Knuth. Les opérations élémentaires données par Lemoine sont sans arguments car ses mesures ne tiennent pas compte des longueurs des tracés ni de la situation des points. Chaque construction décrite à l'aide de ces opérations peut être réutilisée ensuite au sein d'une construction plus complexe, comme un module de programmation. On peut donc dans la géométrie trouver les prémices d'un système de programmation débranchée.

## Du point de vue algorithmique

Lemoine clairement présente le tracé géométrique comme l'exécution d'un algorithme avec deux types d'opérations, les manipulations d'instruments et les tracés successifs à la règle et au compas, associée à deux mesures de complexité : une mesure quantitative de coût ou simplicité du programme qui compte de façon pondérée ou non le nombre de traitements élémentaires, et une mesure qualitative d'exactitude, concernant la qualité du tracé, qui dépend du nombre de manipulations des instruments. Plus il y a de manipulations, plus des erreurs peuvent apparaître dans la précision du tracé. L'usage de robots ou d'ordinateurs permet de palier cette seconde mesure.

Lemoine donne une définition de la complexité des algorithmes par la mesure de coût

$$k_1c_1 + k_2c_2 + \dots + k_nc_n$$

dans laquelle *a priori*  $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $k_i$  est le nombre fois que l'opération  $Op_i$  a été utilisée dans la réalisation,  $c_i$  son coût. Dans la terminologie actuelle, ce coût est très exactement la complexité en temps de l'algorithme. Mettre tous les coefficients de coût égaux à un est une pratique courante en complexité.

Du point de vue de la construction des algorithmes, le langage des instructions élémentaires est parfaitement défini, et propose une unique structure de contrôle : la séquence. Ce système permet déjà d'introduire les questions usuelles de la théorie de la calculabilité (Autebert, 1992) : déterminer ce qui est calculable dans ce système ; trouver les mesures de complexité appropriées et comparer les algorithmes selon ces mesures de complexité.

## Du point de vue abstrait

L'ensemble des instructions élémentaires forment un alphabet. Pour les constructions à la règle et au compas, cet alphabet est l'ensemble  $A = \{R1, R2, C1, C2, C3\}$ . La construction s'exprime par un mot écrit avec cet alphabet. Par exemple, la construction qui résout le problème 2 est représentée par le mot  $C1C3C1C3C1C1C1C3R1R1R2$ . Le résultat associé,  $2R1+R2+5C1+3C3$ , est une façon de représenter le vecteur de Parikh<sup>13</sup> du mot. La simplicité est la somme des coefficients.

Cette approche permet d'utiliser le calcul sur les vecteurs pour agencer les différentes parties d'une construction complexe qui utilisent des constructions plus simples.

Du point de vue pratique, les critiques concernant la pertinence d'utiliser le programme le plus performant selon une mesure est présent dans le développement des programmes que l'on souhaite durable, réutilisable, donc facilement modifiable. On préférera parfois quelque chose de moins performant mais bien structuré et comportant des redondances pour résister aux pannes. Les amis de la géométrie étaient pour certains assimilables à des geeks.

---

13. Vecteur de dimension cardinal de A, obtenu en attribuant au  $k^e$  rang le coefficient associé à  $Op_k$ . Pour les constructions à la règle et au compas, le vecteur de Parikh est de dimension 5. Il vaut (2,1,5,0,3) pour l'exemple.

## Du point de vue de la formalisation du raisonnement

L'application de la méthodologie développée dans la géométrie en utilisant la règle et le compas – papier-crayon ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique comme GeoGebra –, ou d'autres instruments comme la règle équerre – cf. les fiches de Doriane Lautier<sup>15</sup> –, l'on peut dès les débuts de l'enseignement prendre appui sur la méthode pour développer l'esprit critique concernant la notion même de simplicité/complexité, de mesure et dériver vers d'autres enjeux fondamentaux comme la distinction entre *processus* et *produit*, *objets* et *représentations*.

## Des pistes d'activités dans l'esprit de la géométrie

Au-delà de l'application directe de la géométrie en utilisant la règle et le compas – papier-crayon ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique comme GeoGebra –, ou d'autres instruments comme la règle équerre – cf. les fiches de Doriane Lautier<sup>15</sup> –, l'on peut dès les débuts de l'enseignement prendre appui sur la méthode pour développer l'esprit critique concernant la notion même de simplicité/complexité, de mesure et dériver vers d'autres enjeux fondamentaux comme la distinction entre *processus* et *produit*, *objets* et *représentations*.

On peut travailler sur deux axes : faire varier les coûts des mesures ou faire varier l'ensemble des actions élémentaires autorisées. En proposant et en donnant aux élèves l'initiative des propositions, puis en débattant de l'intérêt des résultats, on développe l'esprit critique envers le choix des mesures : quelles sont les données prises en compte ? Que veut-on mettre en évidence ?

Le fait de varier la liste des opérations autorisées met en évidence les deux sens du terme *construction* : le processus de production – l'algorithme – et le produit – son résultat, ce que la langue française ne fait pas. Cet état de fait contribue à la confusion ultérieure entre objets mathématiques, comme les nombres et leurs représentations. Le processus de construction s'appuie sur des objets de base ou précédemment construits et des actions permises sur ces objets, la difficulté de construction de l'objet dépend des moyens mis à disposition. La mesure de simplicité d'une construction décrit le processus bien plus que l'objet, comme le met en évidence la construction d'un cercle soit avec le compas soit uniquement par des segments. Changer de système, c'est aussi apprendre à travailler dans des langages et donc des systèmes de représentation différents. Nous esquissons pour terminer deux exemples de mise en œuvre. Le premier reprend l'exemple des déplacements dans un quadrillage, le second propose une activité de programmation pour faire « dessiner » à une tortue un cercle.

---

14. Coq est un assistant de preuve, il fournit un langage et un environnement pour écrire des définitions et des preuves mathématiques, fondés sur le Calcul des Constructions Inductives.

15. Accessible sur le site <https://www.aleph-maths.fr/content/19-fiches-d-usage>, consulté le 24 octobre 2019.

## Déplacements sur un quadrillage

En reprenant l'exemple des déplacements sur un quadrillage, on peut choisir un coût +1 (pour un gain) pour  $\uparrow$  et  $\rightarrow$  et -1 (pour une perte) pour  $\downarrow$  et  $\leftarrow$ <sup>16</sup>, ce qui donne la même simplicité de 3 pour tous les chemins possibles. Un élève de cycle 3 a fait remarquer que si l'on ne trouvait pas 3, soit on s'était trompé dans le calcul soit le chemin n'était pas le bon. Nous avons cette fois là embrayé sur la notion de condition nécessaire (il faut que)/suffisante (il suffit que) – tous les chemins de simplicité 3 étaient-ils des chemins valides ? – et comment faire valider des opérations d'addition et de soustraction de nombres et mettre en évidence les propriétés de ces opérations en ne considérant qu'une seule dimension. On peut ensuite généraliser en transformant le quadrillage pour permettre les déplacements en diagonale en ajoutant des flèches obliques  $\swarrow, \nearrow, \searrow, \swarrow$ . Il y a alors 5 parcours possibles, dont deux parcours géométrographiques :  $\rightarrow\searrow$  et  $\searrow\rightarrow$  de simplicité 2. En autorisant un pas de cavalier du jeu d'échec, la simplicité géométrographique devient 1. On peut également généraliser à un espace de dimension quelconque.

Nous avons proposé plusieurs modalités sur un quadrillage au sol avec un enfant – niveau grande section de maternelle – qui exécute les déplacements selon les indications d'un camarade (possibilité de faire un quart de tour ou de rester toujours dans la même direction, de reculer ou de faire demi-tour, ...). Pour la modalité : pas de changement d'orientation, le coût choisi après plusieurs parcours réalisés sous ma dictée a été : un pas avant ou un pas arrière +1, un pas à droite ou à gauche +3 après rude négociation pour traduire *beaucoup* et pouvoir faire les calculs – compte-tenu du problème de latéralisation de certains enfants.

## De la géométrie à GeoTortue

GeoTortue a été développé en 2008 par Salvatore Tummarello au sein du groupe collège de l'IREM Paris Nord, qui a développé de nombreuses activités de géométrie<sup>17</sup>. Ce langage est fondé sur le langage LOGO, conçu et développé au M.I.T. par l'équipe de Seymour Papert (1928-2016) dans un but pédagogique<sup>18</sup> dans les années 1970 (Papert, 1981).

« Dans ma vision des choses, l'enfant programme l'ordinateur et, ce faisant, acquiert la maîtrise de l'un des éléments de la technologie la plus moderne et la plus puissante, tout en établissant un contact intime avec certaines notions les plus profondes de la science, des mathématiques, et de l'art de bâtir des modèles intellectuels. »

Papert situe résolument son projet dans une perspective piagétienne en arguant du fait – que nous partageons – que ce qu'un individu peut apprendre, et la façon de l'apprendre dépendent des différents modèles dont il dispose.

GeoTortue est un véritable langage de programmation, très proche de la Turtle de Python, qui offre une interface conçue pour éviter la dispersion et pour que la

16. Pour des élèves de cycle 4 et plus, on peut proposer +1 pour  $\uparrow$ ,  $+\pi$  pour  $\rightarrow$ , -1 pour  $\downarrow$  et  $-\pi$  pour  $\leftarrow$  pour marquer les deux directions possibles.

17. Consultable sur le site : [www-irem.univ-paris13.fr/site\\_spip/spip.php?article32](http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?article32).

18. Contrairement à Scratch, développé aussi au M.I.T. mais dans un but ludique, pour les clubs. Voir par exemple <https://scratch.mit.edu>

programmation soit le seul moyen d'action de l'élève et dont la qualité de rendu du dessin est un facteur de motivation et de satisfaction du travail bien fait<sup>19</sup>. Ce langage de programmation repose sur l'utilisation d'un langage de communication *performatif* spécial « tortue », qui possède au départ un langage très réduit – avance/recule de  $n$  pas :  $av\ n$ ,  $re\ n$ ; tourne vers la droite/gauche de  $n$  degrés :  $td\ n$ ,  $tg\ n$  – que l'élève peut enrichir. L'élève devient le maître qui dicte, en utilisant les termes justes pour se faire comprendre, la conduite de la tortue, de plus en plus sophistiquée.

La géométrie de la tortue – algorithmique – est une géométrie intuitive, liée aux déplacements dans le plan (ou dans l'espace), au côté de la géométrie axiomatique (logique) d'Euclide et Descartes. Elle développe, tout comme la géométrographie, une pensée algorithmique : une construction, sa complexité, recherche d'un minimum de complexité. Pour GeoTortue, une nouvelle mesure de complexité apparaît naturellement au côté du nombre d'opérations que doit faire la tortue pour réaliser le programme : le nombre d'instructions. Cette mesure est orientée programmeur et prend toute son importance dès l'introduction de structures de contrôle comme la répétition, puis plus tard les différentes boucles et surtout les procédures, qui correspondent aux nouveaux mots appris par la tortue. On pourra aussi vouloir mesurer le temps d'exécution du programme par la machine – la tortue – et constater que certaines instructions prennent plus de temps que d'autres ...

Pour faire un carré de 100 pas de tortue avec retour de la tortue en position initiale, on commencera par écrire : «  $av\ 100 ; td\ 90 ; av\ 100 ; td\ 90 ; v\ 100 ; td\ 90 ; av\ 100 ; td\ 90$  » de simplicité en nombre d'instructions 8 ; puis on écrira « *Repeat* 4[ $av\ 100 ; td\ 90$ ] » de simplicité en nombre d'instructions 3 ; et si on lui a appris la notion de carré de longueur  $L$ , *carré* 100 est de simplicité en nombre d'instructions 1 alors que la tortue exécute à chaque fois exactement le même nombre de déplacements, en revanche elle doit mémoriser plus de choses dans les deux derniers programmes. Ces considérations rejoignent celles de Lemoine introduisant la mesure d'exactitude de la géométrographie.

La construction d'un carré ne figure pas dans les constructions examinées par Lemoine, contrairement à la construction d'un cercle quelconque, quatrième construction donnée dans (Lemoine, 1902, p. 19). Demander à la tortue de dessiner un cercle permet de travailler sur la différence entre *construction* et *perception* d'une figure, et donc de travailler sur la notion d'approximation. En effet, la tortue ne trace que des figures composées de segments. L'approche du cercle par des polygones réguliers est une démarche d'autant plus naturelle que l'axiome de base de la tortue, qui est aussi celui de tout individu « orienté », issue de l'expérience est que *Pour décrire une ligne simple fermée, et revenir à sa position initiale, la tortue doit faire un tour complet*. En travaillant sur des programmes de polygones comme « *rep* 4 ( $av\ 120 ; td\ 90$ ) », « *rep* 8 ( $av\ 60 ; td\ 45$ ) », « *rep* 12 ( $av\ 40 ; td\ 30$ ) », « *rep* 24 ( $av\ 20 ; td\ 15$ ) », « *rep* 48 ( $av\ 10 ; td\ 7.5$ ) » la figure tracée ressemble de plus en plus à un cercle. On voit un cercle pour le dernier tracé, alors que le programme décrit un polygone de 48 côtés, que l'on peut faire apparaître en utilisant

19. Nos étudiants stagiaires professeurs des écoles et certifiés constatent régulièrement qu'après avoir travaillé avec GeoTortue, les élèves s'appliquent mieux dans leurs constructions avec les instruments sur papier.

la fonction zoom de l'interface<sup>20</sup>. Le calcul de la simplicité de ces constructions du point de vue des déplacements de la tortue montre que celle-ci est proportionnelle au nombre de côtés du polygone tracé.

## Conclusion

Nous espérons avoir convaincu le lecteur de l'intérêt de l'approche de Lemoine développée dans la géométrie non seulement comme modèle intéressant pour une première initiation à l'algorithmique et l'étude du concept de complexité des algorithmes, mais également comme champ d'investigation de notions fondamentales des mathématiques, notamment celles d'objets et de représentations.

## Références bibliographiques

- ARNAUDIES Jean-Marie & DELEZOÏDE Pierre, 2003, « Constructions géométriques par intersections de coniques (II) », *Bulletin de l'APMEP*, n° 447, p. 505-516.
- AUTEBERT Jean-Michel, 1992, *Calculabilité et décidabilité. Une introduction*, Paris, Masson.
- AUTEBERT Jean-Michel, DÉCAILLOT Anne-Marie & SCHWER Sylviane, 2003, « Henri-Auguste Delannoy et la publication des œuvres posthumes d'Édouard Lucas », *Gazette des Mathématiciens*, Société Mathématiques de France, 95, p. 51-62.
- BARBIN Évelyne, GOLDSTEIN Catherine, MOYON Marc, SCHWER Sylviane & VINATIER Stéphane (dir.), 2017, *Les travaux combinatoires en France (1870-1914) et leur actualité. Un hommage à Henri Delannoy*, Limoges, Presses universitaires de Limoges.
- BOLDO Sylvie, CLÉMENT François, FAISOLE Florian, MARTIN Vincent, MAYERO Micaela, 2017, « A coq formal proof of the laxmilgram theorem » in *Proceedings of the 6th ACM SIGPLAN Conference on Certified Programs and Proofs, collocated with POPL 2017, CPP 2017*, Paris, p.79–89.
- BOUCARD Romain, CHEVALARIAS Thierry, COILLOT Jérôme, DEBERTONNE-DASSULE Florence, DE LIGHT Frédéric, GAUD Matthieu, GUICHARD Jean-Paul, MERCIER Jean-Paul, REDONDO Cyril 2017, *Algorithmique et programmation au cycle 4 à partir des grandeurs*, brochure du Groupe Collège, IREM de Poitiers.
- CHEIN Michel, 1982, « Analyse de la complexité des programmes, des algorithmes et des problèmes », *Quelques thèmes de la théorie des algorithmes*, Publications du Département de Mathématiques de Lyon, fascicule 1B, p. 1-13.
- CHEVALLARD Yves & JULLIEN Michel, 1991, « Autour de l'enseignement de la géométrie au collège », *Petit x* n° 27, p. 41-76.

---

20. Les fiches d'activités Logo proposées par le groupe collège de l'IREM Paris Nord disponible sur [http://www-irem.univ-paris13.fr/site\\_spip/spip.php?article530#ancree\\_Des%20cercles%20et%20des%20variables](http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?article530#ancree_Des%20cercles%20et%20des%20variables) permettent de construire une séquence à partir du cycle 3, en utilisant la tortue de Python dès la seconde.

- DETEMPLE Duane W., 1991, « Carlyle circles and the Lemoine simplicity of polygon constructions », *The American Mathematical Monthly*, 98, 2, p. 97-108.
- EVES Howard, 1976, *An Introduction to the History of Mathematics*, 4<sup>th</sup> edition, New York, Holt, Rinehart and Winston.
- GENEVÈS Bernard, 2004, *Vers des spécifications formelles : Fondements Mathématiques et Informatiques pour la Géométrie Dynamique*, thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- KESSLER Charles et LEMOINE Émile, 1860, « Solution de la question 492 », *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechniques et normale*, Série 1, Tome 19, p. 91-93.
- LAISANT Charles-Ange et LEMOINE Émile, 1893, « L'orientation actuelle de la science et de l'enseignement mathématiques », extrait de *Revue générale des sciences pures et appliquées*, .22, Paris, G. Carré.
- LEMOINE Émile, 1888a, « De la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 107, p. 69-71.
- LEMOINE Émile, 1888b, « Des systèmes de coordonnées qui déterminent le plus simplement un point par une construction », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 16, p. 162-172.
- LEMOINE Émile, 1888c, « De la mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques », *Mathesis*, 8, p. 217-222, 24-24.
- LEMOINE Émile, 1889, « De la mesure de la simplicité dans les sciences mathématiques », AFAS, *Comptes rendus des congrès*, Oran, 17<sup>e</sup> session, 2, p. 75-95.
- LEMOINE Émile, 1892a, « Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions du problème d'Apollonius », *Nouvelles annales de mathématiques*, Série 3, 11, p. 453-474.
- LEMOINE Émile, 1892b, « La géométrie où l'art des constructions géométriques », AFAS, *Comptes rendus des congrès*, Pau, 21<sup>e</sup> session, 2, p. 36-100.
- LEMOINE Émile, 1902, *Géométrie, ou art des constructions géométriques*, Paris, C. Naud.
- LONGCHAMPS Gaston (de) , 1896, « Correspondance », *Journal de mathématiques élémentaires*, Paris, Delagrave, p. 13-15.
- MANSION Paul & NEUBERG Joseph , 1881, *Mathesis*, Gand, Hoste, Paris, Gauthier-Villars.
- MAYERO Micaela, 2001, *Formalisation et automatisation de preuves en analyses réelle et numérique*. thèse de doctorat, Université Paris VI.
- MEN, 2015a, Bulletin Officiel Spécial 2, 2015-03-26, Programme d'enseignement de l'école maternelle, p. 18.
- MEN, 2015b, Bulletin Officiel Spécial 11, 2015-11-26, Cycle 2, Mathématiques, p. 83.
- PAPERT Seymour, 1981, *Jaillissement de l'esprit*, Paris, Flammarion.
- REYNAUD Antoine, 1811, *Traité d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique*, 6<sup>e</sup> édition, Paris, Courcier.
- ROUCHÉ Eugène & COMBEROUSSE Charles (de), 1866 *Traité de géométrie élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars, 5<sup>e</sup> éd. 1883, 7<sup>e</sup> éd. 1900.

- SAINTE-LAGÛE André & MASSON Henri, 1949, *L'utilisation pratique des mathématiques. Calcul numériques et graphiques*, Paris, Eyrolles.
- SHALLIT Jeffrey, 1994, « Origins of the analysis of the Euclidean algorithm », *Historia Mathematica*, 21, p. 401-419
- SMITH David, 1896, « Émile-Michel-Hyacinthe Lemoine », *The Amer. Monthly*, 3, p. 29-33.
- TOURNÈS Dominique, 2000, « Pour une histoire du calcul graphique », *Revue d'histoire des mathématiques*, 6, p. 127-161.

## Remerciements

Je voudrais ici remercier l'ensemble des relecteurs en particulier Jean-Paul Guichard, pour le travail important qu'ils ont accompli et sur la forme et sur le fond – tant historique que pédagogique – de ce chapitre.



Quatrième partie

Géométrie et art



## À la recherche des modèles géométriques des mosaïques antiques

Bernard PARZYSZ

### Introduction

Les pavements de mosaïque en *opus sectile* (constitués de plaques de pierre juxtaposées) ou en *opus tessellatum* (constitués de petits cubes appelés tesselles) de l'Antiquité romaine peuvent présenter des décors figuratifs (personnages, animaux, objets, végétaux...) ou abstraits (de loin les plus nombreux). Dans ce dernier cas, les décors sont qualifiés de « géométriques », pour la raison qu'on y voit apparaître essentiellement des cercles et des polygones divers. Se poser la question de leur fabrication conduit à envisager les techniques ayant abouti à produire les œuvres qui nous sont parvenues, et en particulier les éléments ayant abouti à la mise en place des tesselles. Les spécialistes qui ont écrit sur ce type de décors ont adopté un langage géométrique<sup>1</sup>, sans aucun doute le plus adapté pour la description des formes. Dans cet esprit, et en se référant au langage et aux pratiques traditionnelles des corps de métiers, on peut faire l'hypothèse de l'existence, chez les maîtres d'œuvre ayant conçu et/ou dirigé l'exécution de ces pavements, d'une géométrie pratique, transmise de maître à élève sur le modèle du compagnonnage, faisant usage de configurations modèles assorties d'une procédure de construction à l'aide des instruments en usage à l'époque, à savoir essentiellement le cordeau, éventuellement complété par la règle et l'équerre. Comme aucun document textuel ou graphique ne nous est parvenu sur ces modèles, nous ne pouvons nous appuyer que sur les mosaïques elles-mêmes pour tenter de les retrouver, ainsi que sur les tracés préparatoires qu'on retrouve parfois, lorsqu'on a de la chance, au revers

---

1. Comme l'indiquent les auteurs de l'ouvrage de référence : « On a bien entendu puisé dans le vocabulaire des formes géométriques simples. » (Balmelle *et al.*, 1985, p. 9).

d'un pavement lors de sa dépose<sup>2</sup>. Cependant,

« De tels tracés préparatoires étant très rarement observés au regard du grand nombre de mosaïques examinées, on doit supposer que cette pratique n'était pas la règle, et que d'autres procédés étaient mis en œuvre pour guider la mise en place des décors de sols : on admet aujourd'hui que l'usage du cordeau était d'un emploi très répandu. » (Balmelle, Darmon, 2017, p. 47)

Effectivement, pour tracer l'intersection d'un cercle et d'une droite, par exemple, il n'est pas utile de tracer le cercle : marquer la position du point suffit. Et pour déterminer un réseau, on peut se contenter de tendre des ficelles au-dessus du lit de pose, ce qui ne laisse pas de trace non plus.

## Le *pictor* et sa géométrie

Les mosaïques en *opus tessellatum* étaient réalisées par de petites équipes itinérantes spécialisées, qui se déplaçaient de chantier en chantier au gré des commandes. Elles comprenaient sans doute des représentants des corps de métiers suivants :

- maçon, pour préparer le soubassement et la surface du sol destinée à recevoir la mosaïque ;
- tailleur de tesselles, pour découper la matière première en tesselles de la taille adéquate ;
- poseur de tesselles, pour disposer et fixer les tesselles ;
- dessinateur-projeteur (*pictor*), pour définir avec le commanditaire les motifs décoratifs des pavements, concevoir une procédure de construction et superviser le travail des poseurs.

Le seul texte dont nous disposons sur le travail des mosaïstes romains se trouve au livre VII de *De Architectura*, ouvrage composé au 1<sup>er</sup> siècle avant notre ère, dans lequel Vitruve décrit la composition des diverses couches constituant le support de la mosaïque :

« On posera alors un premier lit fait avec des cailloux qui seront au moins gros à remplir la paume de la main. Ce lit une fois achevé, on s'occupera de la rudération qui sera composée d'une partie de chaux et de trois de cailloux [. . .]. Là-dessus on fera le noyau composé de tuileaux avec lesquels on mêlera une partie de chaux contre trois de ciment ; son épaisseur sera au moins de six doigts. Sur ce noyau parfaitement dressé avec la règle et le niveau, on appliquera le pavé, qu'il doive être fait en mosaïque ou avec des carreaux. » (Vitruve, 1847, tome 2, p. 121)

Sur ce support, le *pictor* pouvait exécuter les tracés directeurs du décor qui devaient servir de guide aux poseurs de tesselles. Celles-ci étaient taillées sur place, à partir de matériaux divers ; « les mosaïstes apportaient avec eux certains matériaux

---

2. À Besançon, par exemple, on a trouvé à la fois des tracés incisés et des tracés peints (Chantriaux *et al.*, 2017).

semi-finis et les débitaient sur place au moment de la réalisation du pavement » (Balmelle, Darmon, 2017, p. 46)

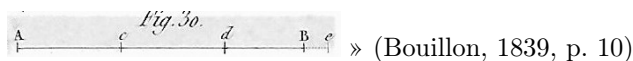
Le plus souvent il s'agissait de roches extraites des carrières du voisinage, mais d'autres pouvaient provenir de fort loin ; il existe également des tesselles en verre et en céramique, et certaines pouvaient même être recouvertes d'une feuille d'or. Une fois la mosaïque posée, il était nécessaire de la polir afin d'éliminer les irrégularités de surface<sup>3</sup>.

La réalisation d'un décor géométrique, pour laquelle l'instrument de base était, comme on l'a dit, le cordeau, reposait sur des procédures de tracé de lignes droites et de cercles. En effet, cet instrument peu coûteux et facile à transporter peut servir tour à tour à :

- tracer un segment de droite (en le tendant entre deux points),
- reporter une longueur (sous la forme d'un segment),
- tracer un cercle (en prenant comme centre de rotation une extrémité du segment).

Ces trois opérations se réfèrent à une pratique dans laquelle les objets et les constructions se présentent sous la forme de tracés et de procédures. Ce bagage technique ne comportait pas d'unité de longueur prédéfinie, ne serait-ce qu'en raison de la difficulté des calculs dans les systèmes de mesure et de numération romains et de la facilité de s'en dispenser (voir ci-après). La formation du *pictor* ne comportait donc sans doute pas d'arithmétique, mais plus sûrement, en revanche, une partie consacrée à la manipulation du cordeau, éventuellement complété par la règle non graduée et l'équerre<sup>4</sup>, pour effectuer les tâches précédentes et celles qui en dérivent. Parmi les techniques les plus courantes, on peut citer la subdivision du cercle en  $n$  arcs égaux et le partage d'une longueur en  $n$  longueurs égales, que nous pouvons imaginer en nous référant aux pratiques encore en usage de nos jours. Ainsi, pour réaliser cette dernière tâche, lorsque  $n$  était de la forme  $2^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) on pouvait, tout comme aujourd'hui, replier  $k$  fois sur elle-même la longueur de corde à subdiviser ; dans les autres cas, la technique utilisée était sans doute celle dite par « balancement », telle qu'elle est par exemple dénommée et décrite comme traditionnelle dans un ancien ouvrage de dessin linéaire :

« Qu'il soit proposé, par exemple, de diviser la ligne AB en trois parties égales, fig. 30. Prenez une ouverture de compas qui vous semblera être le tiers de AB, et portez-la trois fois aux points  $c$ ,  $d$ ,  $e$ . Le point  $e$  ou la troisième division tombant au-delà du point B, il est évident que l'ouverture de compas est trop grande. Fermez alors les branches du compas, d'une quantité qui vous paraîtra être le tiers de la différence Be, et recommencez la division ; opérez ainsi jusqu'à ce que la troisième division tombe au point B. Si on eût pris une ouverture de compas trop petite, le point  $e$  serait tombé en deçà du point B, et il eût fallu, dans ce cas, donner au compas une ouverture plus grande.



3. Pour plus de détails on pourra par exemple consulter (Balmelle, Darmon, 2017).

4. « [Le compas] modifie les stratégies, puisqu'il économise le coût de la construction d'un angle droit. » (Bessot, 2009, p. 627)

En substituant au compas une réglette sur laquelle la longueur estimée de la subdivision est marquée, on obtient exactement la méthode qui a été observée de nos jours chez les Toradja d'Indonésie (Alberti, 2013, p. 116).

De telles techniques, commodes et rapides, se révèlent de première nécessité lorsque l'on considère le grand nombre de décors de mosaïques qui sont de toute évidence construits sur un réseau. En effet, pour un décor géométrique il ne s'agit pas d'une simple « mise au carreau » comme pouvaient le faire les Égyptiens : ici, tous les points permettant d'obtenir l'ensemble du dessin (sommets de polygones, centre de cercles, etc.) sont des points d'intersection (« nœuds ») des lignes du réseau.

J'ai naguère émis l'hypothèse qu'au cours de sa formation, et aussi tout au long de sa carrière, le *pictor* qui se spécialisait dans les décors géométriques se constituait une « bibliothèque » de motifs élémentaires sous la forme d'images mentales, les schémas-clés (Parzysz, 2009) qui à la fois représentaient le motif et faisaient apparaître la procédure permettant de l'obtenir<sup>5</sup>. Il pouvait ensuite combiner plusieurs schémas pour élaborer des motifs plus complexes. Cette hypothèse s'est renforcée depuis, notamment lors de l'étude d'une famille de plus de 500 décors à réseau construits sur une même configuration élémentaire (Parzysz, 2012).

## Comment retrouver un modèle

Dans certains rares cas, lors de la dépose d'une mosaïque, les archéologues retrouvent des vestiges de tracés préparatoires, mais la plupart du temps on ne possède que la mosaïque elle-même. Partant du postulat de l'existence, sous une forme quelconque, d'un prototype auquel le mosaïste s'était référé pour mettre en place le décor, on peut tenter de le retrouver à travers l'objet fini. Dans le cas où un réseau apparaît clairement, ce modèle est généralement facile à identifier, puisque les points importants sont des « nœuds » du réseau. Le fait qu'on retrouve souvent plusieurs pavements présentant des décors voisins permet également de les comparer et d'identifier ceux qui – aux imprécisions de la réalisation matérielle près – ressortissent apparemment à la même configuration, et à écarter les autres.

Si l'on dispose d'un document photographique orthogonal suffisamment précis<sup>6</sup> et fiable, on peut alors s'aider d'un logiciel de géométrie dynamique pour lui superposer des traits de construction et ainsi, d'abord comparer le prototype supposé et sa réalisation, ensuite proposer une procédure de mise en place. Notons que, puisque le *pictor* doit en règle générale implanter le panneau de mosaïque dans un espace prédéfini, on recherchera plutôt des procédures centripètes – c'est-à-dire réalisées à partir du cadre extérieur – plutôt que centrifuges.

Prenons par exemple cette mosaïque de la Maison de Ménandre, à Antioche (Turquie), datée du III<sup>e</sup> siècle (figure 1 A), et commençons par tester l'impression première, fondée sur les symétries apparentes, que son cadre est carré et que l'octogone extérieur est régulier ; la construction réalisée à l'aide du logiciel montre

---

5. C'est par exemple le cas des figures 2 A, 2 B, 2 C, 6 A et 14 ci-après.

6. Une vue sous un angle quelconque peut également être utile, en utilisant les propriétés conservées par la perspective linéaire (voir figure 4 A et figure 7 ci-après).

que cette hypothèse est très probable (figure 1 B). En l'adoptant et en traçant ensuite l'octogone étoilé de mêmes sommets et en faisant la même chose pour l'octogone central, on voit qu'on obtient des tracés correspondant bien au décor (figure 1 C). Du point de vue géométrique apparaît d'abord l'enchaînement carré  $\rightarrow$  octogone régulier convexe inscrit  $\rightarrow$  octogone étoilé de mêmes sommets, qui fournit une partie des lignes de tesselles noires du décor ; on remarque ensuite que certains côtés des carrés prolongent ceux de l'octogone étoilé de mêmes sommets que l'octogone central.

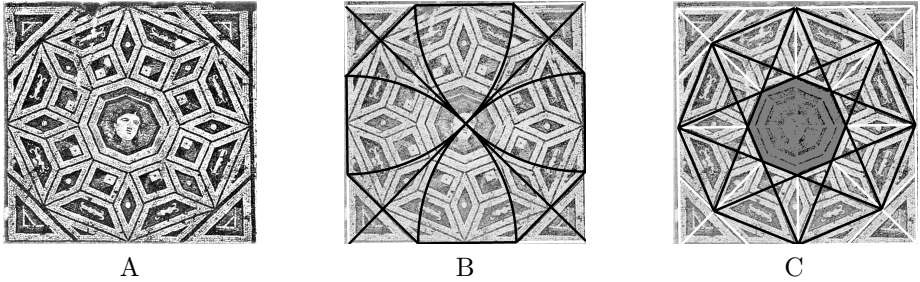


FIGURE 1 – Mosaïque d'Antioche (Levi, 1947, pl. CIV)

Sur la base de ces hypothèses on peut alors proposer une procédure de mise en place des tracés directeurs du décor, à l'intérieur d'un carré prédéterminé, qui a pu être suivie par le *pictor* :

1. Construction (cordeau + règle) des diagonales du carré et de l'octogone régulier inscrit, par exemple par les cercles centrés aux sommets et passant par le centre du carré (figure 2 A).
2. Construction (règle) de l'octogone ayant pour sommets les milieux des côtés du précédent (figure 2 B).
3. Tracé (règle) de l'octogone étoilé de mêmes sommets que le précédent (figure 2 C).
4. Tracé et prolongement des côtés de l'octogone étoilé de mêmes sommets que l'octogone central (figure 2 D) ; leurs points d'intersection avec le premier octogone étoilé sont les derniers sommets des carrés entourant l'octogone central.

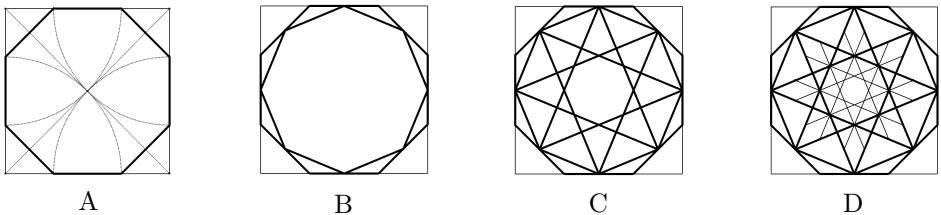


FIGURE 2 – Antioche : proposition de mise en place

Notons que, tout au long de cette procédure, des contrôles destinés à éviter les dérives (alignements, cocyclicité, symétries, etc.) étaient possibles... et même souhaitables.

Il ne restait plus ensuite qu'à effacer les traits devenus inutiles (figure 3), puis à remplir les divers polygones.

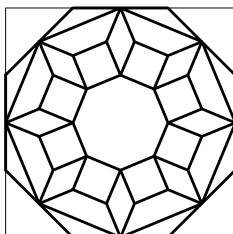


FIGURE 3 – Antioche : schéma théorique

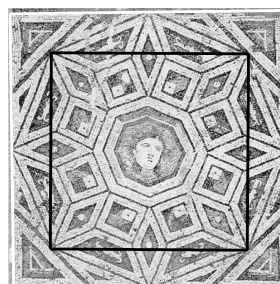
N.B. Dans un travail en classe se proposant de découvrir cette procédure de construction, on voit surgir des questions qui peuvent conduire à des démonstrations. Par exemple :

- L'octogone obtenu au 1. est-il régulier ? Et celui du 2. ?
- La construction du 4. produit-elle bien des carrés ?
- Dans quels rapports de taille sont les trois octogones qu'on obtient ?
- Les quadrilatères situés entre ces carrés sont-ils des losanges ?

Dans le cas que nous venons de voir le modèle s'impose en quelque sorte de lui-même, mais il est des cas où il est moins facile à déterminer. Considérons maintenant (figure 4 A) ce panneau carré du vestibule de la Maison d'Eustolios que j'ai photographié en 2011 à Kourion (Chypre) et dont l'octogone central m'avait paru banal. Il est daté du début du V<sup>e</sup> siècle, et le texte central, en grec, souhaite la bienvenue au visiteur. Son décor (un octogone entouré de carrés et de losanges) ressemble assez à celui d'Antioche, et plus précisément à sa partie centrale (figure 4 B).



A

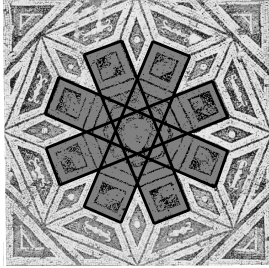


B

FIGURE 4 – Mosaïque de Kourion (cl. B.P.) et comparaison avec Antioche



Comme nous l'avons vu, à Antioche l'octogone initial est régulier, d'où il résulte que le second l'est également, avec pour conséquence que les carrés opposés sont théoriquement dans le prolongement les uns des autres (figure 5 A). Par contre, à Kourion ces carrés semblent décalés (figure 5 B).



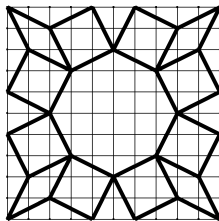
Antioche



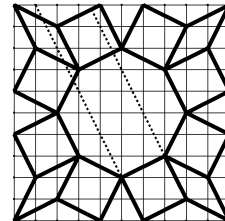
Kourion

FIGURE 5 – Alignement des carrés opposés

Est-ce le résultat des imprécisions inhérentes à la réalisation matérielle? La présence de ce même décalage sur la plupart des panneaux de mosaïque connus présentant ce motif (plus d'une trentaine) ne va pas dans ce sens. On peut alors se mettre en quête d'un modèle alternatif, et l'étude montre (Parzys, 2012) que le motif de Kourion est en fait très vraisemblablement construit sur un réseau carré de  $10 \times 10$  (figure 6 A); le décalage observé est donc bien attribuable au modèle (figure 6 B), et non à un quelconque manque de soin dans la réalisation.



Antioche



Kourion

FIGURE 6 – Kourion : modèle alternatif, à réseau

## Application à une mosaïque de Brescello (Italie)

Cette mosaïque, datée du 1<sup>er</sup> siècle de notre ère, comporte un champ rectangulaire traité en tesselles noires et blanches (figure 7). Elle se compose d'un panneau central à motif rayonnant, encadré par deux panneaux au décor plus sévère et plus simple. J'ai proposé aux participants à mon atelier du colloque de l'étudier parce qu'elle me semblait permettre de progresser de l'ensemble vers le détail, et du simple au complexe. Nous avons commencé par faire les deux hypothèses suivantes :

- la partie centrale est *carrée* ;
- les deux parties latérales, identiques, comportent chacune 16 petits *carrés* (munis de leurs diagonales).

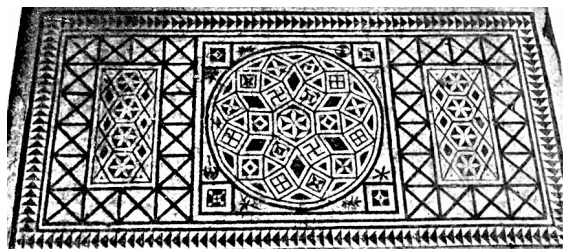


FIGURE 7 – Mosaïque de Brescello (d'après BLAKE, 1930, pl.41, Figure 4)

Prenant comme module le côté de ces carrés, la largeur du champ est alors de 6 unités et sa longueur de 14 unités (soit un rapport longueur/largeur égal à  $7/3$ ). Pour mettre en place le décor le *pictor* a sans doute commencé par installer un réseau carré de  $7 \times 3$  (peut-être sous forme de fils tendus ?) puis indiqué les subdivisions « utiles » (figure 8 A). En posant une bordure à l'intérieur des vides il a ensuite été à même de délimiter les trois zones contenant des décors particuliers (figure 8 B).

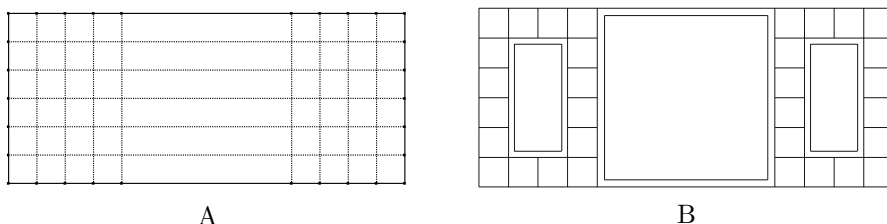


FIGURE 8 – Mise en place des différentes zones

Le remplissage des petits carrés avec leurs diagonales ne présentant aucune difficulté, nous nous sommes attachés à celui des trois autres zones.

Les deux zones latérales sont apparemment construites sur un réseau rectangulaire de  $4 \times 3$  (figure 9 A). On n'a plus ensuite qu'à relier des nœuds du réseau pour obtenir les polygones du décor (figure 9 B), qui pourront être décorés intérieurement.



FIGURE 9 – Mise en place du décor des zones latérales

Question : les hexagones de la ligne médiane peuvent-ils être réguliers ?

Réponse du géomètre : Ça dépend de la largeur de la bordure.

Précisons un peu. Nous avons au départ un rectangle dont la largeur (notée  $L$ ) est moitié de la longueur, à l'intérieur duquel a été insérée une bordure de largeur  $a$ . Les dimensions du rectangle intérieur sont donc  $L - 2a$  et  $2L - 2a$ . Le diamètre  $d$  des hexagones est égal aux deux tiers de la largeur de ce rectangle, soit  $2(L - 2a)/3$ , et leur hauteur  $h$  est égale au quart de sa longueur, soit  $(2L - 2a)/4$ . En posant  $x = a/L$ , on est alors conduit à étudier la variation de  $f : x \rightarrow (3/4)(1 - x)/(1 - 2x)$  pour  $x$  compris entre 0 et 0,5, et à comparer  $f(x)$  et  $\sqrt{3}/2$  (valeur correspondant à l'hexagone régulier).

Le graphique (figure 10) montre que les hexagones sont réguliers pour  $x \approx 0,12$ , et le calcul fournit la valeur  $\alpha = (5 - 2\sqrt{3})/13$ , soit environ 0,118.

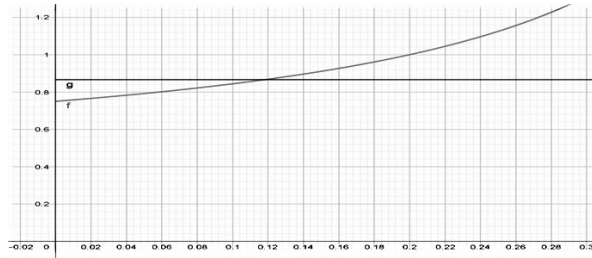


FIGURE 10 – Les hexagones sont-ils réguliers ?

C'est, à vue d'œil, sensiblement plus que ce qu'on observe, et on peut donc conclure que les hexagones ne sont pas « tout à fait » réguliers, et même préciser qu'ils sont un peu aplatis (puisque, pour  $x < \alpha$ , on a  $f(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ). Ce qui n'a pas empêché le *pictor* d'y inscrire des rosaces en « six-feuilles » ! Il a fallu pour cela qu'il triche un peu, par exemple en déplaçant légèrement les centres des cercles par rapport aux sommets de l'hexagone (figure 11).

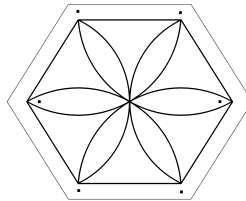


FIGURE 11 – Adaptation de la rosace à un hexagone aplati

Le décor du carré central apparaît moins simple que celui des rectangles latéraux. Un auteur l'a d'ailleurs qualifié de « rather complicated pattern » (Blake, 1930, p. 113). Le tracé des diagonales du carré permet de tracer un cercle qui lui

est « presque » tangent intérieurement <sup>7</sup>, ainsi que les petits carrés des angles, et une petite bordure blanche intérieure au cercle vient délimiter le champ central (figure 12 A).

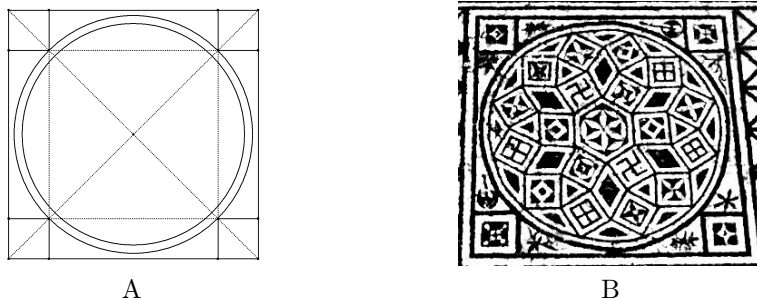


FIGURE 12 – La zone centrale

Un agrandissement du disque (figure 12 B) nous conduit ensuite à dégager de nouvelles hypothèses :

- au centre, on a un hexagone régulier entouré de 6 carrés et de 6 losanges ;
- les carrés sont surmontés d'un triangle équilatéral entouré de deux autres carrés, dont un sommet est situé sur le cercle extérieur.

À l'aide du logiciel de géométrie, nous commençons par réaliser une construction centrifuge de cette configuration, plus simple à mettre en œuvre (figure 13), qui va nous permettre de l'étudier avant d'en envisager une construction centripète.

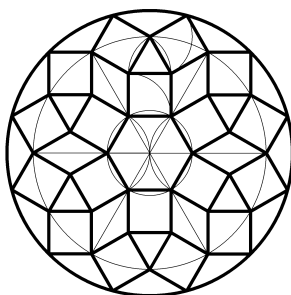


FIGURE 13 – Modèle (construction centrifuge) du décor

Maintenant que nous sommes passés dans la géométrie, analysons les propriétés de cette configuration qui pourraient nous servir à élaborer une construction centripète.

Les sommets des carrés situés sur le cercle extérieur sont les sommets d'un dodécagone régulier (figure 14 A), et en les joignant de 3 en 3 on obtient trois

7. Pour éviter que deux lignes ne se touchent, l'usage courant était d'insérer entre elles une tesselle de séparation de la couleur du fond.

carrés (figure 14 B). Sur cette configuration, les points d'intersection les plus éloignés du centre de ces carrés pris 2 à 2 sont les sommets d'un autre dodécagone régulier, et en joignant ses sommets de 4 en 4 obtient 4 triangles équilatéraux, qui nous déterminent les 12 carrés du pourtour (figure 14 C). Les sommets des carrés les plus proches du centre déterminent un troisième dodécagone (figure 14 D), et le dodécagone étoilé de mêmes sommets permet d'obtenir les losanges et les triangles (figure 14 E), ainsi que l'hexagone central (figure 14 F), ce qui achève la configuration.

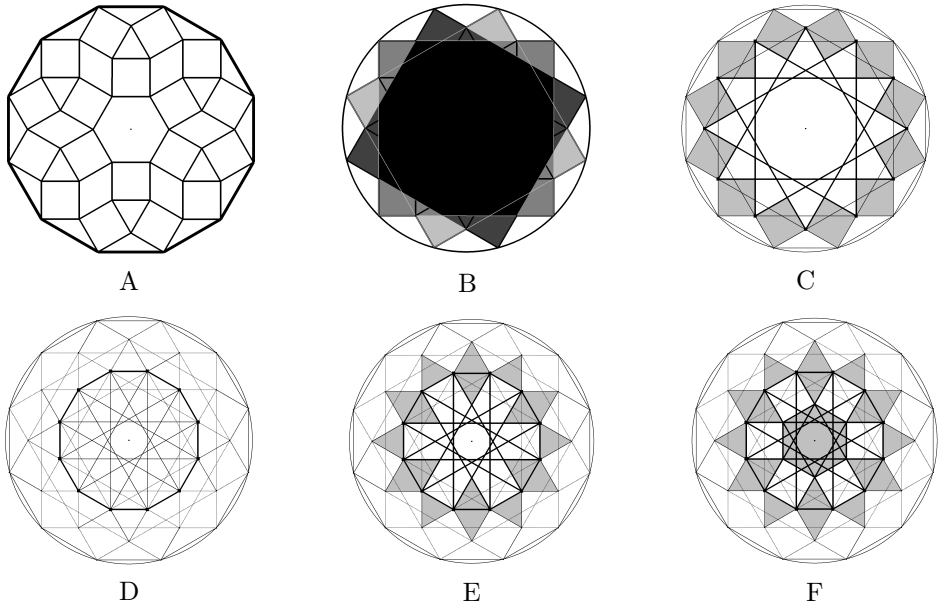


FIGURE 14 – Analyse de la configuration

Retour au concret (et au cordeau) : nous sommes maintenant en mesure de proposer une procédure centripète de mise en place du décor (figure 15) :

1. Construction des sommets d'un dodécagone régulier inscrit dans le cercle (rosace et bisections).
2. Tracé des trois carrés ayant pour sommets des sommets de ce dodécagone.
3. Tracé des quatre triangles équilatéraux ayant pour sommets des sommets du dodécagone régulier déterminé par les points d'intersection 2 à 2 de ces carrés les plus proches de la circonférence.  
(Ceci fournit les 12 carrés du pourtour.)
4. Tracé du dodécagone étoilé ayant pour sommets les sommets des carrés les plus proches du centre.  
(Ceci fournit l'hexagone central, ainsi que les losanges et les carrés qui l'entourent.)

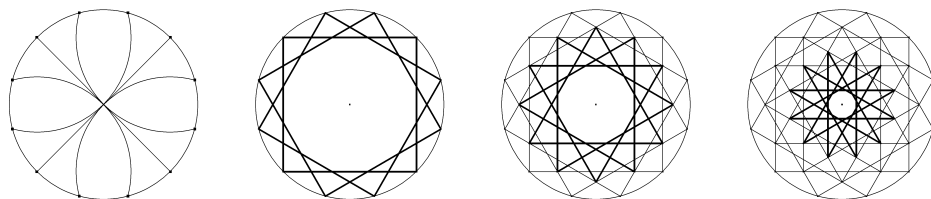


FIGURE 15 – Construction centripète du décor (proposition)

On peut voir dans cette configuration une (belle) variation sur le thème du dodécagone, sans doute issue d'une « exploration », par un *pictor*, des polygones qu'on obtient en reliant de façon périodique les sommets d'un dodécagone régulier (figure 16) : de 1 en 1 (dodécagone convexe), de 5 en 5 (dodécagone étoilé), de 2 en 2 (hexagone convexe), de 3 en 3 (carré) et de 4 en 4 (triangle équilatéral).

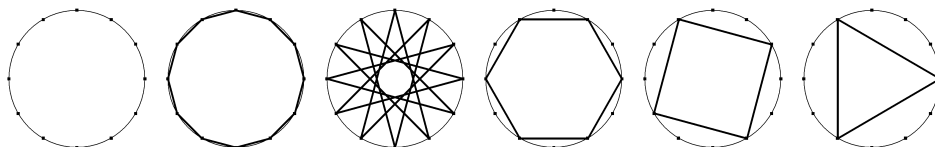


FIGURE 16 – Variations sur le dodécagone

On aboutit finalement à un schéma d'ensemble que l'on peut réaliser avec le logiciel et comparer à l'original (figure 17).

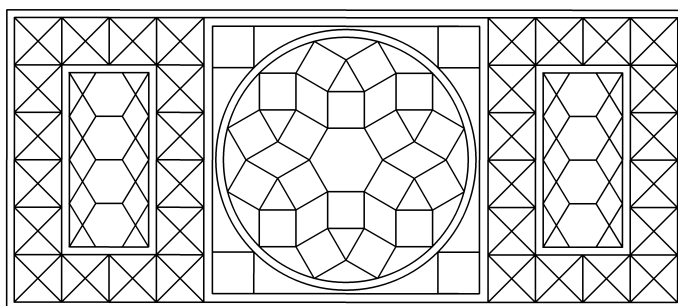


FIGURE 17 – Brescello : schéma d'ensemble

## Conclusion

Contrairement aux décors figurés, les décors géométriques de l'Antiquité romaine constituent un point aveugle de l'histoire des sciences, pour la raison que la transmission des connaissances, de maître à élève, se faisait essentiellement par le geste et la parole. Pour ce qui nous concerne ici, il pouvait s'agir de ce que j'appelle *prototype*<sup>8</sup>, c'est-à-dire un dessin (décor) commenté au fur et à mesure de son exécution (procédure). On a ainsi retrouvé des graffitis antiques ayant probablement eu pour but de communiquer une procédure de construction d'un motif géométrique (Fuchs, 2012 ; Parzysz, 2020).

La détermination des prototypes utilisés par les maîtres d'œuvre pour produire les décors, menée en référence aux instruments en usage à l'époque, permet tout d'abord un accès aux connaissances de ces artisans, c'est-à-dire à des décors et des procédures ; parfois même, déceler une erreur ou un repentir nous renseigne sur l'organisation du travail sur le chantier. Elle permet ensuite de dégager des familles de décors basées sur les mêmes assemblages de formes et les mêmes procédures, et *a contrario* de débusquer les « faux amis » constitués par des décors apparemment semblables mais relevant de constructions différentes et incompatibles (comme nous l'avons vu avec les exemples d'Antioche et Kourion). Rêvons un peu : on peut dans ce cas – qui est loin d'être unique – imaginer qu'un *pictor* a, un jour, trouvé un moyen d'obtenir beaucoup plus aisément un décor presque identique à un décor classique. Ce qui, compte tenu de l'effet de perspective inhérent à la station debout sur le pavement, passe totalement inaperçu *in situ*. Les décors à réseau constituent une réponse très répandue à ce type de questionnement (*cf.* Kourion), d'une part parce que la mise en place du décor se réduit en définitive à la construction du réseau – c'est-à-dire à la subdivision d'une longueur en longueurs égales –, et d'autre part parce que ces constructions sont très robustes, eu égard aux écarts qui peuvent se produire sur le réseau.

Dans cette démarche – qui peut bien sûr être adaptée à d'autres domaines et à d'autres époques – on postule qu'à l'origine d'une mosaïque le *pictor* antique avait en tête un *prototype* (décor + procédure) lui permettant de mettre en place le décor et de superviser le travail des poseurs de tesselles. Il s'agit pour nous de tenter d'identifier ce prototype en transitant par la géométrie élémentaire. Pour cela, on choisit, sur la mosaïque elle-même ou sur un document la représentant, les lignes et surfaces dont on estime qu'elles ont été utilisées par le *pictor* pour bâtir le décor. Puis, dans le logiciel de géométrie, on cherche à superposer à un document fiable une figure dont on pense qu'elle s'adapte bien à l'image. Bien sûr, si on estime qu'elle ne convient pas, on en change. Lorsqu'on pense avoir trouvé une figure adéquate, on en cherche une construction avec le logiciel, en commençant si possible par le cadre extérieur. Enfin, on décline cette construction en une procédure de mise en place au sol, en vraie grandeur, qu'on pense réalisable avec pour seuls instruments le cordeau, la règle non graduée et l'équerre (figure 18).

---

8. Ce serait aujourd'hui un *tuto*.

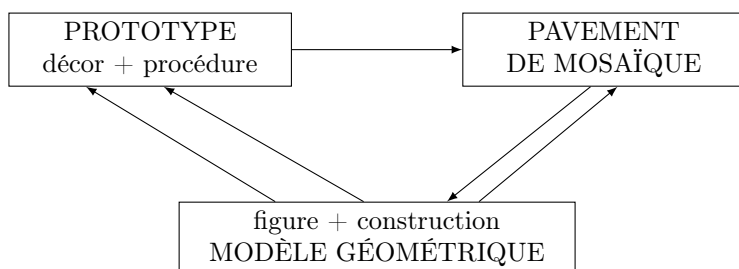


FIGURE 18 – Schéma de la démarche

Comme on le voit, des connaissances et un logiciel de géométrie sont d'une grande aide dans cette démarche, mais seulement en tant que truchement, car il reste ensuite à imaginer une procédure pratique compatible avec les instruments et les contraintes qui étaient celles du mosaïste. Il y a bien sûr une certaine part de subjectivité dans cette démarche : choix des éléments pertinents, de la construction géométrique, de la procédure, attribution des écarts observés (manque de soin ? modèle inadéquat ?). En fait, c'est seulement par la confrontation d'exemples apparemment similaires, permettant l'observation d'invariants, de variantes et de différences, qu'on pourra se forger une conviction quant au « bon » prototype, et passer du « possible » au « probable », voire au « presque sûr ».

Mais cette démarche présente également une dimension pédagogique, car elle peut être appliquée à des activités de classe, notamment au niveau du collège<sup>9</sup>. On peut en effet proposer aux élèves de repérer, sur un document photographique<sup>10</sup>, des figures géométriques et des relations entre ces figures<sup>11</sup>. Puis, afin de voir si ces éléments sont cohérents, de demander la recherche d'une construction, à la règle et au compas ou à l'aide d'un logiciel de géométrie. On peut ensuite poser la question de la recherche d'une procédure « à la romaine » utilisant le cordeau, la règle (non graduée) et l'équerre et, dans les cas favorables, mettre à l'épreuve cette construction en la réalisant en vraie grandeur sur un sol ou un mur (Parzysz, 2019). On peut en outre, le cas échéant, faire intervenir les professeurs d'arts plastiques et d'histoire dans le cadre des EPI. Enfin, on peut utiliser cette démarche en formation de professeurs des écoles, car elle permet de toucher du doigt la distinction entre deux paradigmes de la géométrie enseignée : « instrumentée » d'un côté (avec ses approximations et ses adaptations) et « théorique » de l'autre (avec ses objets idéaux et sa logique binaire vrai-faux).

9. Dans l'esprit de ce que fait par exemple Marc Troudet dans l'atelier mathématique du collège de l'Isle à Vienne (Isère). <https://college-de-lisle-villefranche.web.ac-grenoble.fr/article/latelier-mathematiques>

10. De préférence, à ce niveau de classe, une vue orthogonale.

11. En particulier, les mosaïques dites « à décors multiples », constituées de panneaux présentant des décors différents, peuvent permettre un travail par groupes et un regroupement final sur l'ensemble du panneau.



## Références bibliographiques

- ALBERTI Miquel, 2013, *La créativité en mathématiques. Fonctionnement d'un esprit d'exception*, Collection Le monde est mathématique, Paris, RBA France.
- BALMELLE Catherine, *et al.*, 1985, *Le décor géométrique de la mosaïque romaine* (2 volumes), 2<sup>e</sup> éd. 2002, Paris, Picard.
- BALMELLE Catherine, DARMON Jean-Pierre, 2017, *La mosaïque dans les Gaules romaines*, Paris, Picard.
- BESSOT Annie, 2009, Géométrie et métiers du bâtiment, *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2009*, p. 624-637, Dakar, Université Cheikh Anta Diop.
- BLAKE Marion Elizabeth, 1930, *The pavements of the Roman buildings of the Republic and early Empire*, *Memoirs of the American Academy in Rome*, vol. VIII.
- BOUILLON Auguste, 1839, *Principes du dessin linéaire*, Paris, Hachette.
- CHANTRIAUX Évelyne, *et al.*, 2017, Dispositifs techniques et gestation de l'œuvre, *Le quartier antique du Palatium et ses domus. Archéologie au collège Lumière à Besançon*, MUNIER Claudine, dir., p. 284-289 Besançon, Presses universitaires de Franche-Comté.
- FUCHS Michel, 2012, Figures géométriques à la Maison d'Auguste sur le Palatin, *Actes du Premier Colloque Ductus « Inscriptions mineures : nouveautés et réflexions*, FUCHS Michel, SYLVESTRE Richard, SCHMIDT HEIDENREICH Christophe (éd.), 229-240., Berne, Peter Lang.
- LEVI Doro, 1947, *Antioch mosaic pavements*, Princeton University Press.
- PARZYSZ Bernard, 2009, Key diagrams to design and construct Roman geometric mosaics? *Nexus Network Journal*, 11/2, p. 273-288, Basel, Birkhäuser.
- PARZYSZ Bernard, 2012, Une grande famille de décors géométriques, *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Colloquium on ancient mosaics*, ŠAHIN Mustapha (ed.), Istanbul, Zero Books.
- PARZYSZ Bernard, 2019, (Re)modélisation de décors géométriques. L'exemple de la mosaïque antique, *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2018 : « Mathématiques en scène. Des points entre les disciplines »*, ABOUD M. (éd.), p. 114-450, Université de Paris.
- PARZYSZ Bernard, 2020, Des rosaces sur un mur. Que peuvent-elles nous apprendre sur leurs auteurs? Une étude de cas, *Actes du 3<sup>e</sup> colloque Ductus – Graffites antiques*, CORBIER Mireille, FUCHS Michel, LAMBERT Pierre-Yves (éd.), 143-154, 31280 Dremil-Lafage, Mergoïl
- VITRUVÉ, 1847, *De Architectura*, traduit par MAUFRAS Charles-Louis, Paris, Panckoucke, <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/Vitruve/index.htm>



## Deux enquêtes sur la « géométrie pratique » romaine

Bernard PARZYSZ

### Introduction

La géométrie « savante » de l'Antiquité classique nous est assez bien connue, même si un certain nombre d'ouvrages ont malheureusement disparu. Du côté de la géométrie « pratique », nous disposons aussi de quelques textes, notamment d'arpenteurs romains<sup>1</sup>, qui nous renseignent sur leurs techniques et leurs instruments, mais sur d'autres corps de métiers nous ne disposons d'aucun document, écrit ou graphique, et nous en sommes réduits à interroger les artefacts eux-mêmes. Depuis plusieurs années je m'intéresse aux décors dits « géométriques » de l'époque impériale romaine réalisés par les mosaïstes, les fresquistes et les stucateurs, dans le but de retrouver leurs connaissances et leurs savoir-faire géométriques, de la conception du décor à sa mise en place *in situ*. Dans ce qui suit sont exposés les résultats de deux « enquêtes » menées dans ce domaine, conjointement avec deux archéologues spécialistes du décor, sur des objets du musée archéologique de Naples : la première sur une lame d'ivoire gravée trouvée à Pompéi et la seconde sur un ensemble de caissons de stuc provenant de Portici.

### Une lame d'ivoire énigmatique

H. Eristov, spécialiste de la peinture romaine, avait vivement réagi à la lecture d'un article récent (Tuffreau-Libre et *al.*, 2013) dont une conclusion lui paraissait peu vraisemblable, et elle me proposa de m'intéresser à un objet tout à fait particulier.

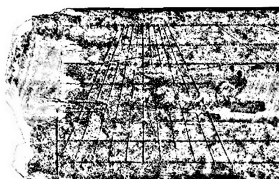
---

1. Comme par exemple Hygin le Gromatique et Frontin (Guillaumin, 2005).

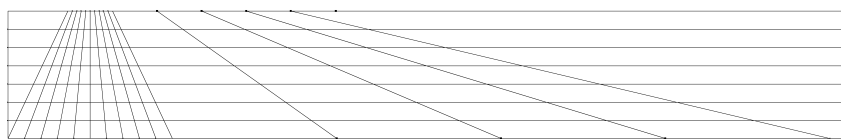
Il s'agit d'une lame rectangulaire en ivoire trouvée dans une maison de Pompéi (maison 3 de l'îlot 16) ensevelie par l'éruption du Vésuve, en l'an 79 de notre ère. Longue de 227 mm, large de 30 mm et épaisse de 3 mm (figure 1), elle comporte sur l'une de ses faces 23 traits rectilignes finement incisés : 8 traits longitudinaux parallèles et équidistants limités par deux perpendiculaires, et 15 traits convergents dont les extrémités libres sont situées sur les deux parallèles extrêmes (figure 1).



A - Vue d'ensemble



B - Gros plan de la partie gauche

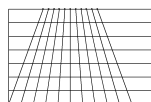


C - Dessin des tracés gravés

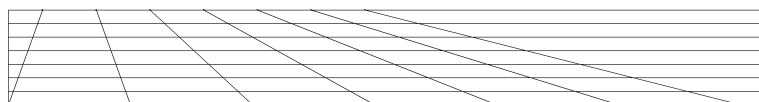
FIGURE 1 – La lame d'ivoire de Pompéi (A et B d'après Tuffreau-Libre et *al.*, 2013, fig. 21)

Les traits obliques se regroupent de toute évidence selon deux séries non disjointes (figure 2) :

- la série 1, constituée de 5 obliques situées de part et d'autre d'une verticale, ces 11 segments réalisant un découpage régulier sur les deux horizontales extrêmes ;
- la série 2, constituée de 6 obliques réalisant elles aussi un découpage régulier sur les deux horizontales extrêmes.



Série 1



Série 2

FIGURE 2 – Les deux séries de traits

On démontre que, sous ces hypothèses, les droites portant les traits des deux séries concourent en un même point O (figure 3)

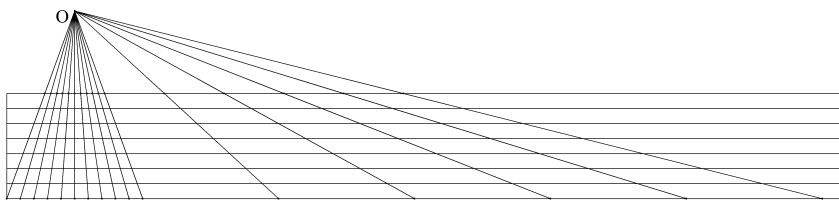


FIGURE 3 – Le point de concours unique

Les auteurs de l'article indiquent que le « tracé en faisceau évoque immédiatement une grille de perspective, telle qu'on la représente à partir de la Renaissance », dans lequel « le point central se trouverait immédiatement au-dessus de la règle, au sommet invisible de la pyramide » (*op. cit.*, p. 61). Ils concluent que ladite grille « pouvait être utilisée pour tracer des dessins de petite taille [...], le dessin ayant aussi vocation d'aide-mémoire des principes de perspective déjà connus de l'artiste » (*op. cit.* p. 64). Autrement dit : les Romains auraient déjà connu la perspective linéaire (théorisée par Leonbattista Alberti vers 1435).

Plusieurs constatations vont cependant à l'encontre de cette conclusion.

Tout d'abord, l'équidistance des horizontales ne correspond, ni à la représentation – classique à la Renaissance – des sols dallés (figure 4), ni à ce qu'on observe dans la peinture romaine, qui connaissait et utilisait pourtant la diminution de taille correspondant au plus grand éloignement des objets représentés, ainsi qu'on peut l'observer sur des peintures très abouties comme cette fresque de Boscoreale, près de Pompéi (figure 5).

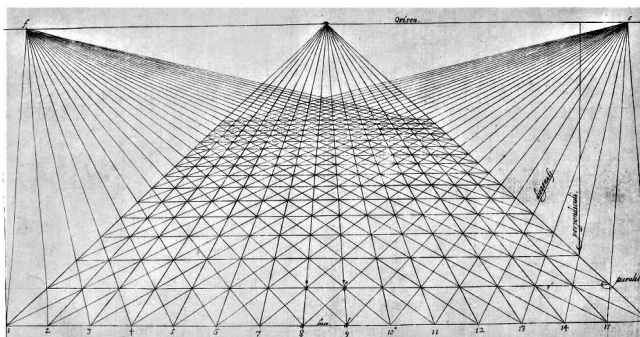


FIGURE 4 – Perspective albertienne (Vredeman, 1599, pl. 2)

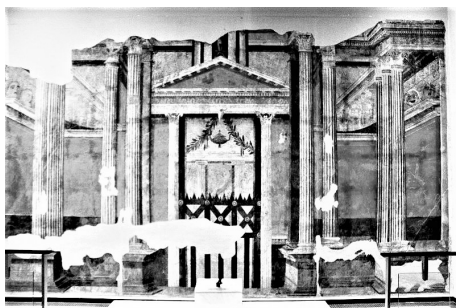


FIGURE 5 – Effet de l'éloignement sur la taille (cliché © Michel Wal, Wikimedia Commons)

Ensuite, le fait qu'aucune peinture romaine ne fait apparaître l'usage de la perspective à point de fuite principal ; la représentation de l'espace à cette époque recourt en fait à une « perspective en arête de poisson » (Panofsky, 1976), dans laquelle les images de droites parallèles convergent, non pas vers un unique point de fuite, mais vers des points différents, alignés sur l'axe vertical de la composition, (figure 6).

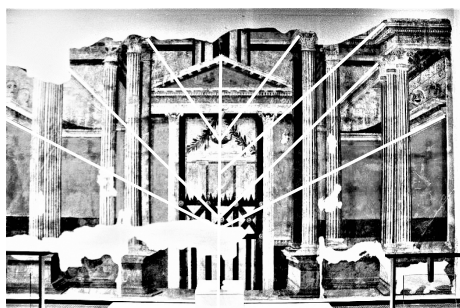


FIGURE 6 – Perspective « en arête de poisson »

Enfin, la réalisation des tracés sur la lame a demandé à l'évidence beaucoup de temps, de précision et de soin, comme en témoignent leur finesse et leur régularité. Un compas a très certainement été utilisé, comme le remarquent les auteurs de l'article cité à propos des obliques de la série 1 : « l'extrémité supérieure de ces lignes se marque par un point dans deux cas, indiquant l'emploi du compas dans la réalisation de ce tracé. » (*op. cit.*, p. 61).

Un tel investissement semble excessivement coûteux si l'on ne cherche qu'à produire un simple aide-mémoire relatif au concours des fuyantes vers un point de fuite unique.

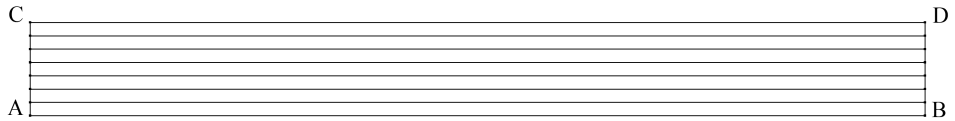
Pour mettre en évidence le travail nécessité par la réalisation de la gravure, Voici – bien sûr sous réserve – deux propositions de procédures de construction pour l'ensemble des tracés.

Première construction (figure 7) :

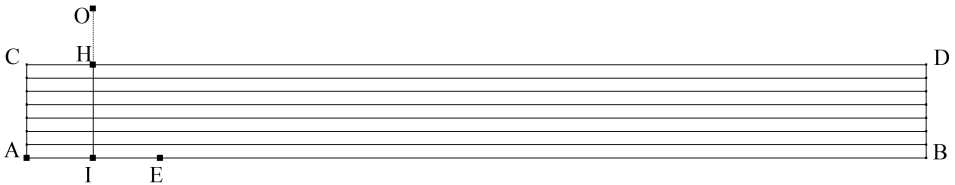
On part d'une lame plus large que l'actuelle (environ 40 mm).

1. *Mise en place des horizontales.* Pour cela, on commence par tracer l'horizontale inférieure  $[AB]$ , ainsi que ses perpendiculaires en  $A$  et  $B$ . Puis on mesure une même petite distance (3 mm environ) que l'on reporte 7 fois à partir du bas sur chacune de ces perpendiculaires (contrôle possible par les hauteurs totales :  $AC = BD$ ), et on trace les 7 autres horizontales (figure 7 A).
2. *Mise en place du point  $O$ .* Sur  $[AB]$  on porte une distance horizontale  $AE$  d'un  $1/10^e$  de pied, on prend le milieu  $I$  de  $[AE]$  et on trace la perpendiculaire  $[IH]$  à  $[AB]$ , qu'on prolonge virtuellement jusqu'en un point  $O$  (figure 7 B).
3. *Mise en place des obliques.* On partage  $[AI]$  en cinq<sup>2</sup> et on fait de même pour  $[EI]$ . Puis on reporte 4 fois la longueur  $AE$  sur  $[AB]$ . Enfin, on joint les points de subdivision au point  $O$ , en arrêtant les traits à l'horizontale supérieure (figure 7 C).

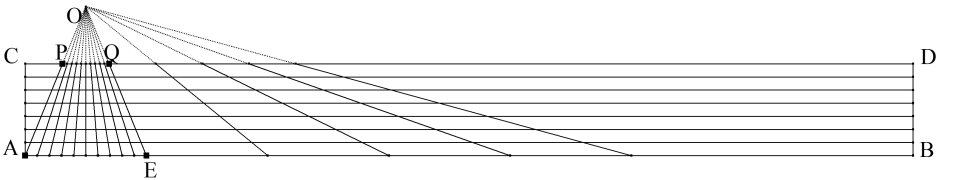
Il reste alors à rétrécir la lame, ce qui fait disparaître le point  $O$ .



A - Mise en place des horizontales



B - Mise en place du point  $O$



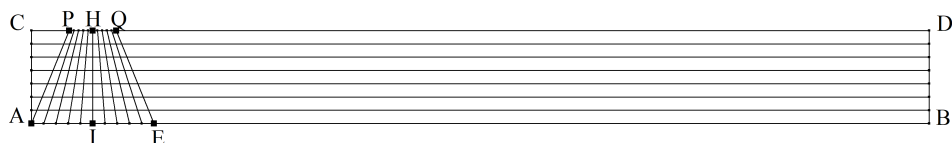
C - Mise en place des obliques

FIGURE 7 – Première construction de la gravure (proposition)

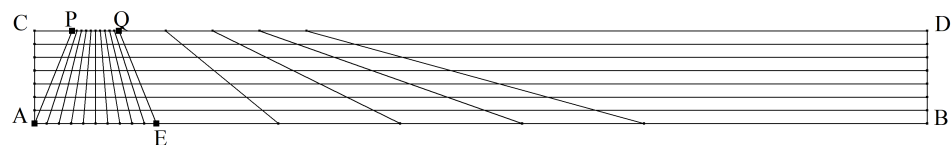
2. Vraisemblablement à l'estime.

On peut aussi envisager une autre construction, un peu plus délicate mais ne nécessitant pas l'étrécissement de la lame.

1. *Mise en place des horizontales.* On procède comme dans la première construction (figure 7 A).
2. *Mise en place de la série 1.* Sur  $[AB]$  on porte une distance horizontale  $AE$  d'un  $1/10^e$  de pied, on prend le milieu  $I$  de  $[AE]$  et on trace la perpendiculaire  $[IH]$ . Puis on partage  $[AI]$  en cinq<sup>3</sup>, on fait de même pour  $[EI]$ . On prend ensuite, sur l'horizontale supérieure, de part et d'autre de  $H$ , des longueurs  $HP$  et  $HQ$  inférieures à  $AI$  (5 mm environ) qu'on partage elles aussi en 5. On joint les points homologues sur  $[AB]$  et  $[CD]$  (figure 8 A).
3. *Mise en place de la série 2.* On reporte 4 fois les longueurs  $AE$  et  $PQ$  sur les horizontales extrêmes et on joint les points homologues, ce qui achève la construction (figure 8 B).



A - Mise en place de la série 1



B - Mise en place de la série 2

FIGURE 8 – Seconde construction de la gravure (proposition)

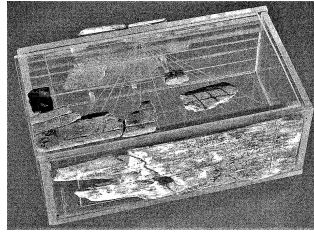
Comme on le voit, dans cette seconde construction il n'est pas nécessaire d'avoir recours à un centre d'homothétie extérieur à la lame pour tracer les obliques : il suffit de mettre en correspondance deux graduations égales (et de modules différents) sur deux parallèles.

Quoi qu'il en soit, ayant récusé la référence à la perspective albertienne et le simple rôle d'aide-mémoire de la lame, il nous fallait lui trouver un autre usage, si possible moins anecdotique.

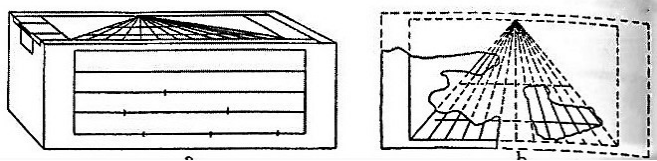
C'est alors qu'on nous signale un autre objet du musée de Naples, qui présente de fortes analogies avec la lame de Pompéi : il s'agit d'une boîte en ivoire – malheureusement incomplète – de 106 mm de long, dont le couvercle, présenté comme un cadran solaire, porte une série de traits gravés parallèles et une autre série de traits convergents (figure 9).

3. Vraisemblablement à l'estime.





A - Vue d'ensemble



B - Schémas

FIGURE 9 – Cadran solaire de Pompéi (d'après Ciarallo & De Carolis 2001, fig. 8)

Mais le réseau de lignes (analemme) d'un cadran solaire plan, indiquant la position de l'extrémité du gnomon en fonction de l'heure et de la date, ne présente pas cette forme : on y trouve certes des droites concourantes, mais en lieu et place des droites parallèles on a des coniques (figure 10). Il nous fallait donc encore chercher autre chose...

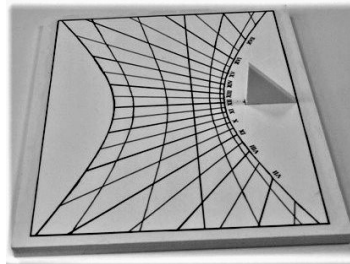


FIGURE 10 – Cadran solaire plan<sup>4</sup>

La face non gravée de la lame présente un décrochement longitudinal en creux de 4 mm de large et 1 mm de profondeur. Comme il rappelle celui qui se retrouve de nos jours sur les règles plates de dessinateur et qui a pour fonction d'éviter les taches d'encre, nous avons alors émis l'hypothèse que l'objet pouvait être en rapport avec le dessin technique. Nous avons pensé qu'il pouvait s'agir plus particulièrement d'une règle de réduction permettant de dessiner à différentes échelles<sup>5</sup>,

4. Réalisé par des élèves du collège Henri Dunant de Royan <http://etab.ac-poitiers.fr/coll-hdunant-royan/spip.php?article95>

5. Règle plus connue sous le nom de « kutsch » dans les agences d'architectes.

sans avoir à effectuer aucun calcul<sup>6</sup>, les distances réduites étant obtenues sur l'une des graduations en s'aidant d'un compas. Chaque ligne horizontale comporte ainsi 10 petites graduations égales sur sa partie gauche, et (au moins) 5 graduations dix fois plus grandes sur toute sa longueur.

Cette présence de graduations par 5 et 10 nous a conduits à chercher dans le système de mesures romain des unités dans le rapport de 1 à 10 et, en rapport avec l'utilisation d'une règle de réduction, nous avons trouvé deux couples : *palmus/gradus* (71,4 mm/714 mm) et *pes/decempeda* (29,6 cm/ 296,4 cm). L'utilisation de la règle permet d'obtenir 8 rapports de réduction s'échelonnant de façon régulière (Tableau 1) :

- entre 1/25 et 1/88 avec le *palmus* ;
- entre 1/10 et 1/350 avec le *pes*.

Ce sont les ordres de grandeur des échelles utilisées pour représenter l'espace dans les divers métiers du bâtiment : arpenteur, architecte, décorateur...

<i>palmus</i>		<i>pes</i>	
(haut)	1/88	(haut)	1/350
	1/65		1/260
	1/51		1/205
	1/42		1/170
	1/36		1/145
	1/31		1/125
	1/28		1/110
(bas)	1/25	(bas)	1/100

TABLEAU 1 - Les rapports de réduction

La règle peut s'utiliser dans les deux sens :

- soit à partir des mesures réelles, pour obtenir une représentation à l'échelle ;
- soit à partir d'un dessin, pour trouver les dimensions réelles d'un objet à réaliser (fresque, objet, bâtiment...).

### Exemple d'utilisation de la règle pour réaliser un dessin

1. on détermine l'échelle, c'est-à-dire la ligne graduée adéquate par rapport à la taille du dessin projeté ;
2. sur cette ligne, on prend au compas les distances réduites nécessaires à la réalisation du dessin

La figure 11 indique la façon d'obtenir la longueur représentant 32 pieds sur la troisième graduation de la règle à partir du bas.

6. Avantage appréciable, quand on pense à la complexité du système de numération romain, non positionnel.

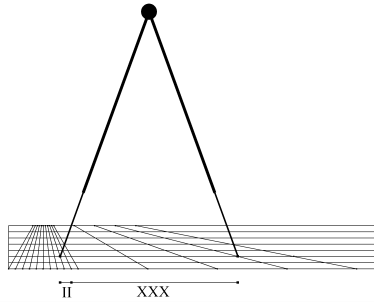


FIGURE 11 – Utilisation de la règle de réduction

L'étude de cet « objet mystère » peut servir de base à divers travaux de classe, notamment au niveau du lycée sur la représentation en perspective et sur l'homothétie, avec des activités comme par exemple (figure 12) se donner deux graduations égales parallèles et de modules différents dont les points sont numérotés, tracer une droite passant par l'origine (point 0) des deux graduations et continuer en progressant dans l'ordre des numéros. Qu'observe-t-on ? Et en commençant par joindre le point 0 de l'une des droites au point 3 de l'autre ? Et en progressant dans l'ordre inverse sur l'une des droites ? Et que se passe-t-il sur une troisième droite, parallèle aux deux premières ? Etc.

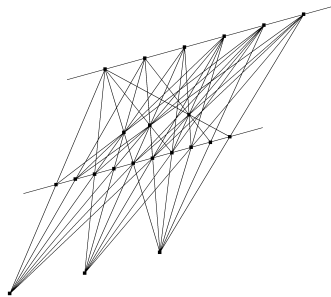
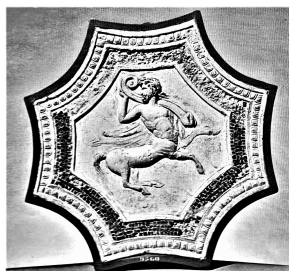


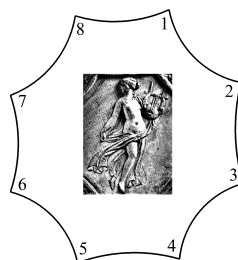
FIGURE 12 – Correspondances entre deux graduations parallèles

## Des caissons de stuc oubliés

25 caissons de stuc octogonaux dormaient paisiblement dans les réserves du musée archéologique de Naples. Ils avaient été exhumés en 1754 près de Pompéi et, dès leur découverte, sertis dans des encadrements de bois à fond plat. Malgré l'accès aux carnets du fouilleur au service du roi Bourbon de Naples, Roque Joaquin de Alcubierre (1702-1780), on ignorait tout de la salle qu'ils décoraient et de leur disposition, et une archéologue spécialiste des stucs, N. Blanc, me proposa de chercher à le savoir (Parzys, Blanc, 2013).



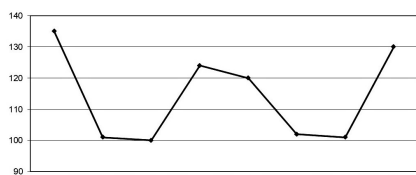
A - caisson 9860



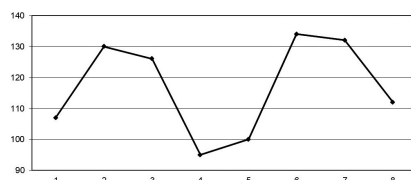
B - caisson 9737

FIGURE 13 – L'un des caissons (cliché Panmuti 1979)

Les caissons s'inscrivent dans un carré d'environ 65 cm de côté (figure 13 A) ; en leur centre est sculpté, soit un centaure (14 caissons), soit une bacchante (11 caissons). Ils présentent une courbure montrant qu'ils ornaient, non pas un plafond, mais une voûte (supposée semi-cylindrique, comme il était de règle à l'époque). Dans le but de préciser cette courbure, nous avons numéroté les sommets de l'octogone par rapport à l'orientation du personnage (figure 13 B) et nous<sup>7</sup> avons effectué différentes mesures, notamment les épaisseurs du caisson en ces points. Nous avons alors obtenu 25 graphiques présentant en abscisses les numéros des sommets et en ordonnées les épaisseurs correspondantes (en mm). Nous nous sommes alors aperçus que ces graphiques étaient nettement de deux types (figure 14) : « en W » (20 caissons) et « en M » (5 caissons).



A - diagramme en W (caisson 9691)



B - diagramme en M (caisson 9713)

FIGURE 14 – Deux diagrammes d'épaisseur

Or, un graphique W correspond à un caisson pour lequel le personnage est orienté perpendiculairement à l'axe de la voûte, et un graphique M à un caisson orienté parallèlement à cet axe (figure 15).

7. Le « nous » est abusif, car ce sont en réalité N. Blanc et H. Eristov (UMR 8546 CNRS/ENS) qui sont descendues dans les réserves du musée pour pouvoir effectuer les mesures.

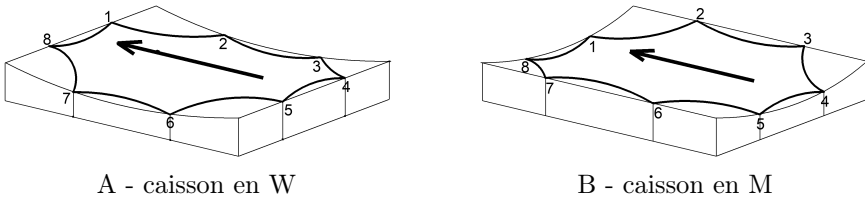


FIGURE 15 – Orientation des caissons

Nous avons en conséquence fait l'hypothèse que les caissons de type M se trouvaient sur la ligne sommitale de la voûte (personnage selon l'axe), et les caissons de type W de part et d'autre de cette ligne (tête du personnage vers le haut), d'autant plus que cette disposition est attestée dans d'autres bâtiments du monde romain, comme par exemple le tombeau des Valerii à Rome.

Nous avons déterminé un caisson moyen, ainsi que la différence d'épaisseur moyenne entre les 4 sommets « hauts » et les 4 sommets « bas ». La projection sur le plan médian du caisson nous a fourni son profil ; sur la figure 16, les points  $A$  et  $B$  représentent les sommets hauts et  $C$  et  $D$  les sommets bas,  $CP = DQ$  est la différence d'épaisseur et  $O$  le centre du cercle support du profil.



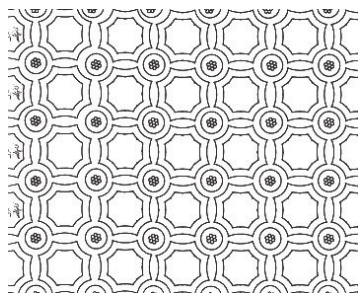
FIGURE 16 – Profil du caisson moyen

L'objectif étant de déterminer le rayon  $OM$  de la voûte à partir de nos données, nous avons estimé la flèche moyenne  $MH = 30$  mm, ce qui, avec  $AB = 635$  mm, nous a permis de calculer  $OM$ .

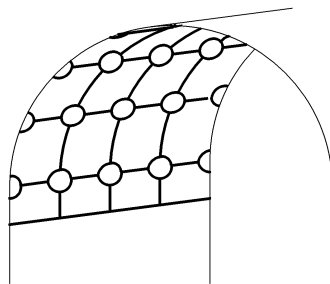
En posant  $OM = R$ ,  $AH = l$  et  $MH = a$ , on a  $\sin(\widehat{AOM}) = l/R$  et  $\cos(\widehat{AOM}) = (R - a)/R$ . D'où  $\frac{l^2 + (R - a)^2}{R^2} = 1$ . On en déduit  $R = \frac{a^2 + l^2}{2a}$ , d'où, avec nos données numériques,  $R \approx 1695$  mm.

La largeur de la voûte peut donc être estimée à 3,4 m environ et, puisque cinq caissons axiaux de la voûte ont été préservés, sa longueur était d'au moins 3,5 m. En tenant compte du fait que Joaquin Alcubierre fait état de l'existence de demi-caissons (non conservés) et en faisant l'hypothèse – confortée par l'existence de tracés directeurs sur d'autres voûtes romaines – que les caissons étaient mis

en place à partir d'une grille carrée de 70 cm de côté environ (figure 17 A), on peut alors proposer une voûte sur laquelle étaient disposés, de part et d'autre de la rangée axiale, trois rangées et demie de caissons de part et d'autre (figure 17 B).



A - Arrangement des caissons



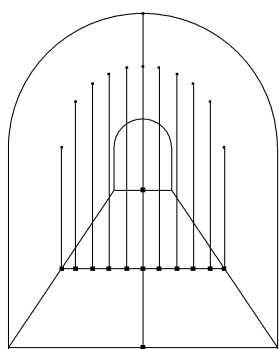
B - Disposition sur la voûte

FIGURE 17 – Proposition de restitution

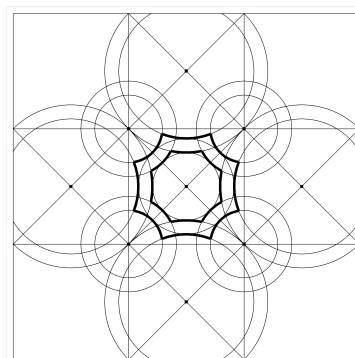
Nous nous sommes aussi posé la question de la mise en place du décor (qui fut sculpté *in situ*).

La première opération consistait à tracer le quadrillage délimitant les caissons. L'axe de la voûte et les traits perpendiculaires à l'axe de la voûte pouvaient être réalisés par relèvement (au fil à plomb) de tracés au sol (figure 18 A), et les traits parallèles à l'axe obtenus par équidistance par rapport à l'axe, avec des contrôles possibles – et souhaitables – au cours de la mise en place.

N.B. À l'occasion de ce travail, nous nous sommes aperçus que l'écart entre la mesure d'une longueur de 70 cm selon une génératrice de la voûte et la mesure en ligne droite n'atteignait pas 5 mm, ce qui reste très raisonnable<sup>8</sup>.



A - Tracé du réseau carré



B - Tracé des moulures

FIGURE 18 – Mise en place des caissons (proposition)

8. Les calculs correspondants ne dépassent pas le niveau du lycée et peuvent donner lieu à des activités de classe.

Une fois la grille installée, on pouvait passer à la réalisation des moulures. D'après ce qui précède, les tracés géométriques pouvaient sans inconvénient être réalisés sur la voûte comme ils l'auraient été sur une surface plane, et c'est bien ce qui semble avoir été le cas. Notre étude nous a conduits à conclure que les tracés circulaires permettant d'obtenir les filets (figure 18 B) sont successivement :

- pour le filet extérieur :
  - l'octogone régulier inscrit dans le carré ;
  - les cercles centrés aux sommets du carré, passant par les sommets de l'octogone ;
  - le cercle centré au centre du carré, tangent à ces 4 cercles ;
  - les cercles centrés aux centres des carrés adjacents, tangents au cercle précédent ;
- pour le filet intérieur :
  - les cercles centrés aux centres des carrés adjacents, passant par les sommets du carré initial ;
  - le cercle centré au centre du carré, tangent aux cercles précédents ;
  - les cercles centrés aux sommets du carré, tangents au cercle précédent.

Comme on peut le constater, beaucoup de ces cercles servaient pour les moulures de plusieurs caissons, ce qui facilitait la tâche des stucateurs et leur permettait également de contrôler d'éventuelles dérives.

Enfin, une fois les moulures réalisées, le sculpteur de figures pouvait commencer à œuvrer dans la partie centrale des caissons. Mais ceci est une autre histoire. . .

## Conclusion

Ces deux enquêtes, menées conjointement avec des spécialistes du décor antique, nous ont montré qu'elles pouvaient être utiles à plusieurs titres. Tout d'abord en permettant à l'archéologue d'accéder à des informations qu'il n'aurait pu obtenir seul, ensuite en offrant au mathématicien l'occasion de s'attaquer à des problèmes qui ne sont peut-être pas toujours transcendants mais qui sont inhabituels et l'obligent à chercher un angle d'attaque qui n'est pas donné *a priori*. Le problème majeur est que ces spécialistes de deux domaines différents ne fréquentent en général pas les mêmes endroits et n'ont guère l'occasion de se rencontrer. Le domaine de l'archéologie est particulièrement riche sous ce rapport, et on peut y trouver abondamment matière à collaboration.

De telles enquêtes peuvent aussi – et ce n'est pas le moindre intérêt – fournir à l'enseignant de mathématiques de collège ou de lycée, ainsi qu'au formateur, des thèmes d'activités « réelles »<sup>9</sup>. Avec la lame d'ivoire de Pompéi, par exemple, nous avons rencontré les homothéties, le dessin à l'échelle, la perspective et le cadran solaire, avec les caissons de Portici ce sont la géométrie (du plan et de l'espace), et la statistique descriptive, et dans les deux cas une nous avons été amenés à réaliser une « vraie » modélisation, celle d'un objet matériel.

---

9. Au cycle 3, par exemple, on peut faire fabriquer un « kutsch » s'inspirant de la lame de Pompéi, qui permettra de reproduire des dessins à différentes échelles.

Nous avons également, à ces deux occasions, abordé l'histoire, les arts décoratifs, la mesure du temps, obtenu des aperçus sur des métiers antiques qui ne sont finalement pas si différents des nôtres. Une telle démarche s'inscrit d'ailleurs tout à fait dans le cadre des enseignements pratiques interdisciplinaires du cycle 4 : « Mobilisant au moins deux disciplines, ils permettent de construire et d'approfondir des connaissances et des compétences inscrites dans les programmes d'enseignement. Ils s'appuient sur une démarche de projet et conduisent à une réalisation concrète, individuelle ou collective. »<sup>10</sup>

Raison de plus pour jeter de temps en temps un coup d'œil au-delà de notre discipline...

## Références bibliographiques

- CIARALLO Annamaria, DE CAROLIS Ernesto, 2001, *Pompéi - Nature, sciences et techniques*, Paris, Picard.
- GUILLAUMIN Jean-Yves, 2005, *Les arpenteurs romains. Tome 1 : Hygin le Gromatique. Frontin*, Paris, Les Belles Lettres.
- PANNUTI Ulrico, 1979, « Un complesso di stucchi romani provenienti di Portici », *Monumenti Antichi XLIX*, Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, p. 259-272.
- PANOFSKY Erwin, 1927, 1976, *La perspective comme forme symbolique et autres essais*, Traduit de l'anglais par Guy Ballangé, Paris, Éditions de Minuit.
- PARZYSZ Bernard, BLANC, Nicole, 2013, « A puzzling set of stucco coffers from Portici. Archaeology and mathematics working together », *Nexus Network Journal* 15/2, Basel, Birkhäuser, p. 209-225.
- PARZYSZ Bernard, ERISTOV Hélène, 2018, « Une intrigante lame d'ivoire pompéienne », *Rivista di Studi Pompeiani XXIX*, Roma, L'Erma di Bretschneider, p. 21-29.
- TUFFREAU-LIBRE Marie, BRUNIE Isabelle, DARÉ Sébastien, 2013, « Peinture et perspective à Pompéi, un ensemble d'objets liés au travail pictural (I 16, 2.3.4.) », *Rivista di Studi Pompeiani XIV*, Roma, L'Erma di Bretschneider, p. 53-69.
- VREDEMAN FRISON Ioan, 1599, *Perspective*, Leyde.

---

10. <http://eduscol.education.fr/cid108061/epi-mise-en-oeuvre.html>



## Apports de la perspective à la géométrie – Illustrations dans l’histoire et l’enseignement

Rosane TOSSUT<sup>1</sup>

### Introduction

Nous tenterons d’illustrer au travers de deux exemples comment la perspective a permis de porter un regard neuf sur certains chapitres de la géométrie. Nous évoquerons la construction d’un discours unique pour des figures étudiées séparément dans les traités grecs et la mise en avant des propriétés d’incidence. Nous mentionnerons en particulier Girard Desargues et Brook Taylor.

Nous présenterons ensuite une séquence d’enseignement utilisée dans des classes pour l’étude de la géométrie d’incidence figurant au programme des élèves de 4<sup>e</sup> année dans l’enseignement secondaire supérieur en Belgique.

### La « seule et même énonciation » de Desargues

Au début du XVII<sup>e</sup> siècle, la perspective a déjà un passé de deux cents ans. Dans *De Pictura* datant de 1435, Alberti définit le tableau du peintre comme une intersection plane de la pyramide visuelle formée des rayons lumineux joignant les points de l’objet à l’œil. Il écrit :

« Mais comme c’est sur la seule surface d’un panneau ou d’un mur que le peintre s’applique à feindre plusieurs surfaces comprises dans une seule pyramide, il faudra nécessairement qu’il coupe en un lieu quelconque cette pyramide visuelle afin de représenter par des lignes et de la peinture les contours et les couleurs tels que les donnera cette coupe.

1. avec la collaboration de Ginette CUISINIER et Danièle LEGRAND

S'il en est bien ainsi, ceux qui regardent une surface peinte croient voir une certaine section de la pyramide. » (Alberti, 1435, p. 103).

Plusieurs traités voient le jour au fil des ans et l'on peut suivre à travers eux l'évolution des méthodes de représentation des objets de l'espace et l'élaboration théorique de la perspective<sup>2</sup>. Le développement de la perspective a permis une nouvelle approche de certains domaines de la géométrie, en particulier l'étude des coniques.

À l'époque de Desargues (1591-1661), la référence sur les coniques est le traité d'Apollonius, *Les Coniques*, du III<sup>e</sup> siècle avant notre ère. Les coniques sont obtenues en coupant par un plan un cône à base circulaire. Apollonius établit pour chaque conique une relation caractéristique qui peut être relue aujourd'hui comme l'équation de la conique dans un repère particulier (Heath, 1981, vol. II, p. 133). Les coniques sont ensuite étudiées séparément le plus souvent, sans référence au cône.

Dans son traité de 1639, *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (Desargues, 1639), Desargues reprend la théorie des coniques en la mettant en relation avec la perspective<sup>3</sup>. Cela le conduit à considérer les coniques comme des projections de la base circulaire à partir du sommet du cône. Il construit un discours neuf unifiant des figures qui peuvent s'échanger par perspective. C'est ainsi que droites sécantes et droites parallèles sont des « droites de même ordonnance » dont le « but » est à distance finie ou infinie. Les cônes et cylindres sont des « rouleaux » et les différentes coniques sont des « coupes de rouleau ». Pour Desargues, les coniques sont des variétés d'une même courbe que l'on peut étudier « par une seule et mesme enonciation, construction et preparation ou pour dire mieux par un seul et mesme discours et sous de mesmes paroles »<sup>4</sup>.

Pour réaliser son étude des coniques, Desargues introduit l'*involution*. Il s'agit d'une relation métrique entre couples de points alignés qui est conservée par projection.

Avant de définir l'involution, Desargues introduit des notions qui permettent de mettre un ordre sur une droite : un point est soit « engagé », soit « dégagé » par rapport à deux autres points de la droite, et deux couples de points alignés sont soit « mêlés », soit « démêlés ». Ces notions sont illustrées en figure 1 : dans la figure *Fig. 3* de Desargues, le point  $A$  est engagé entre les points  $B$  et  $H$  par exemple et les couples de points  $BH$  et  $DF$  sont mêlés ; dans la figure *Fig. 4*, le point  $A$  est dégagé d'entre les points  $B$  et  $H$  et les couples de points  $BH$  et  $DF$  sont démêlés.

Dans un langage actuel, trois couples de points alignés  $BH$ ,  $CG$  et  $DF$  sont en involution s'il existe un point  $A$  qui est soit engagé entre les points de chaque

---

2. Jean-Pierre Le Goff a publié de nombreux articles consacrés à l'histoire de la perspective, entre autres une étude du traité de Piero della Francesca (Le Goff, 1991). Plusieurs de ses articles sont publiés dans *Les Cahiers de la Perspective, Points de vue*, IREM de Basse-Normandie.

3. Notons que Desargues publie quelques années auparavant, en 1636, *Exemple de l'une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*, traité dans lequel il décrit une manière de construire la représentation d'un objet (Desargues, 1636).

4. Extrait de la lettre de Desargues à Mersenne du 4 avril 1638 (Taton, 1981, p. 83).

couple, soit dégagé, et qui est tel que :

$$AB.AH = AC.AB = AD.AF.$$

Le point  $A$  est appelé « souche » de l'involution par Desargues. La figure 1 présente des exemples d'involution de six points.

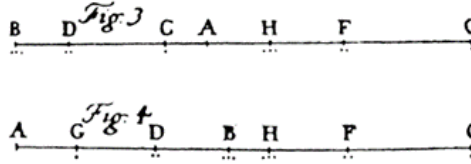


FIGURE 1 – Figures 3 et 4 du traité de Desargues de 1639 (Taton, 1981, p. 106-109)<sup>5</sup>

Une définition indépendante de la souche  $A$  est présentée ensuite : les trois couples de points  $BH$ ,  $CG$  et  $FG$  sont en involution s'ils sont soit mêlés, soit dé mêlés, et si on a

$$\frac{GB.GH}{CB.CH} = \frac{GD.GF}{CD.CF}$$

ou une des deux relations obtenues par permutation des couples.

Notons bien que, dans cette relation, un des points peut être à distance infinie et aussi que les points peuvent coïncider pour un ou deux couples (figure 2). On retrouve le cas particulier de quatre points alignés formant une division harmonique lorsque les points coïncident pour deux couples et celui d'un segment divisé en son milieu lorsqu'en plus, un point du troisième couple est à distance infinie.

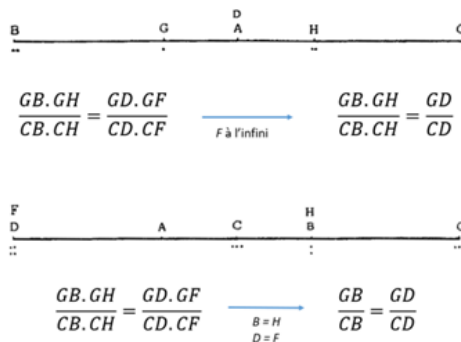


FIGURE 2 – Cas particuliers d'involution (Tossut, 1995, p. 25)

5. Les figures sont extraites de la copie manuscrite du traité de Desargues effectuée par Philippe de La Hire en 1679 (Taton, 1981, p. 88).

L'involution de Desargues permet de tenir un discours unique pour des propriétés traitées indépendamment les unes des autres dans les traités grecs. On peut s'en rendre compte en considérant le livre VII de *La Collection Mathématique* de Pappus. Le texte de Pappus, écrit au début du IV<sup>e</sup> siècle de notre ère, était destiné à accompagner la lecture de différents traités (Heath, 1981, vol. II, p. 357). À propos des propositions de Pappus se rapportant à la *Section déterminée* d'Apollonius, Michel Chasles relève dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie* :

« On n'aperçoit pas, au premier abord, la vraie signification de ces nombreuses propositions, ni les rapports qui peuvent les rattacher ensemble à une même question ; et la lecture dans cet état en est pénible. Mais avec quelque attention, on reconnaît qu'elles sont toutes relatives à la théorie de l'*involution* de six points, créée par Desargues, [...] ce sont des propriétés de plusieurs relations que l'on peut aujourd'hui considérer comme des cas particuliers de cette relation générale. » (Chasles, 1837, p. 39)

Par ailleurs, dans la note X de son livre, Chasles indique que « la plus ancienne propriété géométrique de l'involution de six points se trouve dans Pappus (proposition 130 du septième livre) » (Chasles, 1837, p. 315). Cette proposition se trouve dans la partie du livre VII consacrée aux *Porismes* d'Euclide. Elle est illustrée par la figure 3 et a pour énoncé :

« Proposition 130 – Soit la figure  $AB\Gamma\Delta EZH\Theta K\Lambda$ , et que le rectangle compris sous les droites  $AZ$ ,  $\Delta E$  soit au rectangle compris sous les droites  $A\Delta$ ,  $EZ$  comme le rectangle compris sous les droites  $AZ$ ,  $B\Gamma$  est au rectangle compris sous les droites  $AB$ ,  $\Gamma Z$  ; je dis que la ligne qui passe par les points  $\Theta$ ,  $H$ ,  $Z$  est droite. » (Pappus, p. 675)

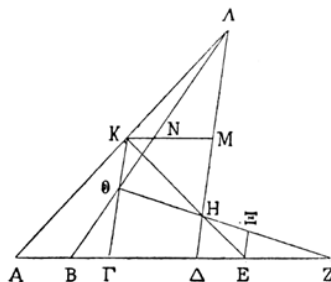
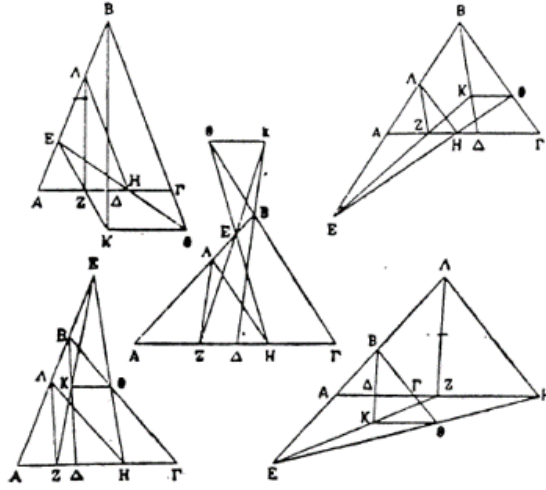


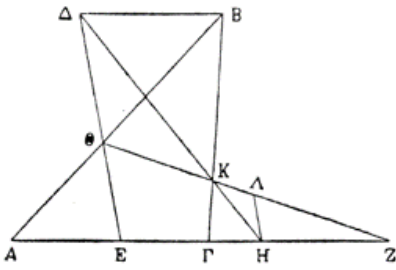
FIGURE 3 – Proposition 130 du livre VII de Pappus (Pappus, p. 675)

Chasles observe que cette proposition de Pappus peut être relue de la manière suivante : les couples de côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère déterminent sur toute sécante des couples de points en involution<sup>6</sup> (Chasles, 1837, p. 315).

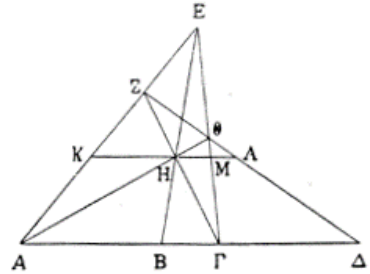
6. On considère le quadrilatère de sommets  $AH\Theta K$  et la sécante  $A\Gamma$ .



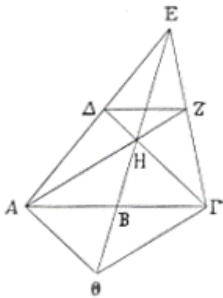
Proposition 127



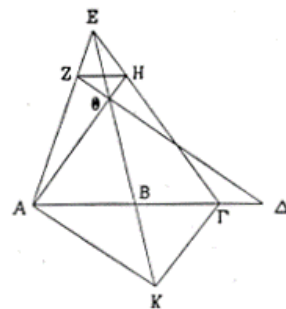
Proposition 128



Proposition 131



Proposition 132



Proposition 133

FIGURE 4 – Figures du livre VII de Pappus (Pappus, p. 669-679).



## Les axiomes de Taylor

Dans la géométrie grecque, les propriétés métriques occupent une place prépondérante par rapport aux propriétés d'incidence. Parlant de la géométrie grecque, Rudolf Bkouche note qu'elle « est d'abord une géométrie de la mesure des grandeurs et c'est en rapport avec des problèmes de mesure que les premières théorisations des constructions perspectivistes vont se mettre en place [...]. Il s'agit alors de justifier les constructions d'échelles et les tracés géométriques qui les accompagnent, et les critères de justification vont se traduire dans le mode de démonstration de la géométrie grecque, savoir, la théorie des proportions. » (Bkouche, 1991, p. 12)

Le développement de la perspective va contribuer à mettre en avant les propriétés d'incidence. Illustrons cela en évoquant les arguments utilisés par trois auteurs, Guidobaldo del Monte en 1600, Simon Stevin en 1605 et Brook Taylor en 1719, pour démontrer que la représentation en perspective d'une droite est une droite et que des droites parallèles rencontrant le tableau du peintre ont pour représentations des droites concourantes<sup>11</sup>.

### Guidobaldo del Monte (1545-1607)

Guidobaldo del Monte publie *Perspectivae Libri Sex* à Pesaro en 1600. Le livre I du traité contient la théorie des points de concours<sup>12</sup>. Dans l'introduction de ce livre, Guidobaldo démontre : « Si l'objet est une ligne droite, ce qui apparaîtra dans la section sera aussi une ligne droite. »<sup>13</sup> (Guipaud, 1991, p. 167)

La proposition 32 énonce la propriété concernant les apparences de droites parallèles rencontrant la section (figure 6)<sup>14</sup> : « Si l'œil observe des lignes parallèles, qui, prolongées, coupent la section, les lignes apparaissant dans la section se rencontreront en un seul et même point, situé à la même hauteur que l'œil au-dessus d'un plan parallèle aux lignes parallèles. » (Guipaud, 1991, p. 206)

11. Il semble que ces propriétés n'aient pas été démontrées avant 1600. Citons Christian Guipaud qui note, dans son étude du traité de Guidobaldo del Monte, que « personne n'a encore eu, semble-t-il, le souci de démontrer que l'image (l'apparence) d'une droite est une droite » et, concernant la propriété générale d'existence des points de fuite, il écrit : « c'est la première fois dans l'histoire qu'une telle propriété est démontrée » (Guipaud, 1991, p. 167 et p. 198). Concernant l'état des connaissances en ce début de XVII<sup>e</sup> siècle, nous renvoyons aux travaux de Christian Guipaud et de Jean-Pierre Le Goff.

12. Le texte est découpé en propositions, problèmes, théorèmes, corollaires, avec de très nombreuses références aux *Éléments* d'Euclide dans les démonstrations. Dans sa thèse, Christian Guipaud relève que la forme du texte situe d'emblée l'ouvrage sur le terrain mathématique, contrairement à la plupart des ouvrages précédents (Guipaud, 1991, p. 63).

13. La « section » désigne le tableau.

14. L'œil est en  $A$ ;  $BC DE FG NP QR$  sont les droites parallèles données et  $BXF$  est la section.

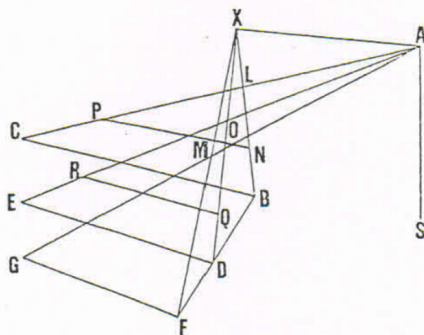


FIGURE 6 – Proposition 32 du traité de Guidobaldo (Guipaud, 1991, p. 206)

Guidobaldo démontre ces deux propriétés en s'appuyant uniquement sur des propriétés d'incidence et il fait référence aux propositions 2, 3 et 7 du livre XI des *Éléments* d'Euclide :

« Proposition 2. Si deux droites se coupent, elles sont dans un seul plan ; tout triangle est aussi placé dans un seul plan.

Proposition 3. Si deux plans se coupent mutuellement, leur commune section est une ligne droite.

Proposition 7. Si deux droites sont parallèles, et si l'on prend dans chacune de ces droites des points quelconques, la droite qui joindra ces points sera dans le même plan que les parallèles. » (Euclide, p. 398-403)

Guidobaldo renvoie aux propositions 2 et 3 pour démontrer la propriété concernant l'apparence d'une droite : l'œil et la droite déterminent un plan ; l'apparence étant dans ce plan et dans la section, elle est l'intersection de ces deux plans et est donc une droite. Il fait référence à la proposition 7 pour démontrer la proposition 32 (figure 6). Voici un extrait de cette démonstration :

« Menons du point A la ligne AX, parallèle aux lignes BC DE FG, et soit X le point situé dans la section ; joignons BX DX FX, et AC AE AG. Puisque AX BC sont parallèles, les lignes XB AC qui les relient appartiennent au même plan qui contient AX BC<sup>15</sup> ; par conséquent, le rayon visuel CA coupe la ligne BX ; il la coupe en L. De la même façon, on montrera que EA coupe DX en O et que GA coupe FX en M. Mais alors, puisque les points BX appartiennent à la section, la ligne BX appartiendra à la section ; donc BC apparaîtra en BL dans la section, et pour la même raison, DE apparaîtra en DO et GF en FM ; et puisque BL DO FM font partie de BX DX FX, les lignes BL DO FM appartiendront à des lignes qui concourent en un point unique. » (Guipaud, 1991, p. 206)

15. Guidobaldo fait référence ici à la proposition 7 du livre XI des *Éléments* d'Euclide.



En ce début de XVII<sup>e</sup> siècle, les démonstrations basées uniquement sur des arguments d'incidence ne semblent pas aller de soi. C'est ce qu'évoque la démarche de Guidobaldo : avant la proposition 32, il s'appuie sur la théorie des proportions pour démontrer quatre propositions traitant la propriété d'existence du point de fuite dans différents cas<sup>16</sup>. Dans sa traduction du traité, Christian Guipaüd note que la version manuscrite donne l'impression que la démonstration « a été l'occasion d'une recherche intense et laborieuse » et que « les renvois aux Éléments d'Euclide enregistrent une densité record dans l'ouvrage, ce qui nous conduit à penser que l'auteur a souhaité une démonstration incontestable, s'appuyant le plus possible sur les sources autorisées » (Guipaüd, 1991, p. 198). Après seulement, Guidobaldo annonce : « En utilisant un procédé différent, nous allons maintenant, dans le théorème qui suit, réduire tout ce qui a été démontré dans ces quatre derniers théorèmes à une seule démonstration. » (Guipaüd, 1991, p. 205)

Et ce théorème est la proposition 32 démontrée à partir des propriétés d'incidence.

### Simon Stevin (1548-1620)

En 1605, Stevin publie à Leiden *Van de Deursichtighe*, traduit la même année en latin sous le titre *De sciagraphia*<sup>17</sup>. Une traduction française est publiée par Albert Girard en 1634 sous le titre *De la Scénographie, dite vulgairement Perspective*.

Le théorème I concerne la représentation en perspective d'une droite et est illustrée par la figure 7. Stevin explique qu'il s'agit d'une droite mais, contrairement à Guidobaldo, il ne démontre pas la propriété. Il indique que les points  $D$  et  $E$  ayant pour représentations les points  $F$  et  $G$ , les points entre  $D$  et  $E$  auront pour représentations des points entre  $F$  et  $G$ .

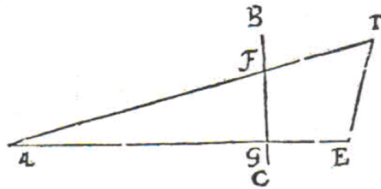


FIGURE 7 – Théorème I du traité de Stevin (Stevin, 1605, trad. Girard 1634, p. 526))

Au théorème III, Stevin démontre que des droites parallèles rencontrant le tableau ont pour représentations des droites concourantes (figure 8). L'œil est en  $E$ ,  $AB$  et  $CD$  sont les deux droites parallèles à représenter,  $EG$  est la parallèle à

16. Section perpendiculaire au plan support dans lequel sont les droites parallèles, section quelconque par rapport au plan support, etc.

17. Tome 3 des œuvres complètes de Stevin traduites en latin par Snellius, *Hypomnemata mathematica [...] a Simone Stevino conscripta et e Belgico in Latinum a Wil. Sn. Conversa*, Lugduni Batavorum, ex officina Ioannis Patii, 1605-1608.

ces droites menée par l'œil et  $K$  est l'intersection de  $EG$  avec le tableau  $ACK$ <sup>18</sup>. Il s'agit de montrer que les prolongements des représentations  $AM$  et  $CN$  se coupent en  $K$ .

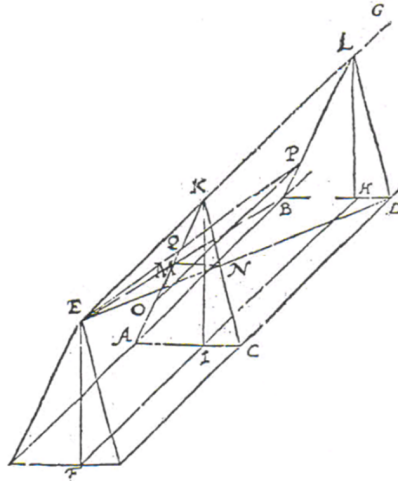


FIGURE 8 – Théorème III de Stevin (Stevin, 1605, loc. cit.)<sup>19</sup>

La démonstration est basée sur des arguments d'incidence mais l'exposé n'est pas aussi direct que celui de la proposition 32 de Guidobaldo. Par exemple, pour montrer que le prolongement de  $CN$  passe par  $K$ , Stevin montre que le point de rencontre entre ce prolongement et la droite  $EG$  ne peut être ni plus haut, ni plus bas, ni en deçà, ni au-delà du point  $K$  (Tossut, 1996, p. 22).

### Brook Taylor (1685-1731)

L'importance des propriétés d'incidence pour la théorie de la perspective s'est précisée au fil du temps. Elle devient explicite avec Taylor.

Taylor publie un premier traité de perspective en 1715 (Taylor, 1715). Ce traité est l'objet de critiques : on lui reproche d'être trop concis, de ne pas être suffisamment accessible pour les praticiens. En réponse, Taylor publie en 1719 un nouveau traité (Taylor, 1719). Dans la préface, il motive ses choix pour l'exposé et écrit :

« On m'objectera peut-être que j'ai traité ce sujet d'une manière un peu trop géométrique [. . .]. On conviendra pourtant que j'ai tâché de rendre les choses assez intelligibles, pour que ceux qui ont quelques legers commencements dans cette Science, puissent aisément les comprendre sans le secours d'autrui. » (Taylor, 1719, trad. Rivoire, 1759, p. xlv-xlv)

18. Chez Stevin, le tableau est appelé « le vitre », les droites à représenter sont les « ombra-geables » et les représentations les « ombres ».

19. La lettre  $C$  n'est pas imprimée dans l'édition de 1634 ; elle a été ajoutée.



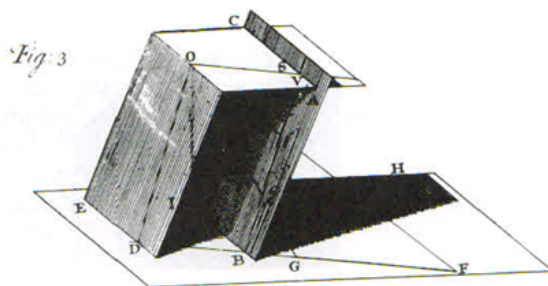


FIGURE 10 – Figure 3, planche 2 du traité de Taylor de 1719.

## La géométrie d'incidence dans nos classes

De nos jours, la géométrie de l'incidence et du parallélisme constitue un « îlot déductif » qui figure au programme des élèves de 4<sup>e</sup> année dans l'enseignement secondaire supérieur en Belgique.

La perspective a contribué à mettre en avant cette partie de la géométrie. Elle constitue un bon contexte pour l'aborder dans les classes. Elle permet de travailler la vision dans l'espace et les représentations ; elle permet également de construire une ébauche d'axiomatique.

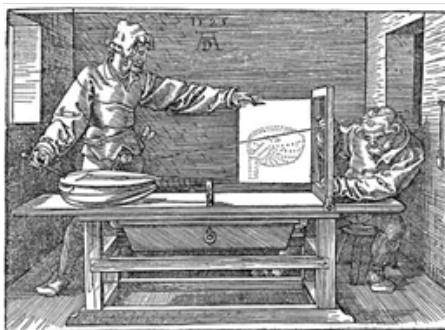


FIGURE 11 – Gravure de Dürer présentant un portillon (1525).

Des gravures de Dürer nous montrent la construction de tableaux respectant la perspective centrale (figure 11). Le dispositif ingénieux du portillon semble difficile à utiliser en classe. Cependant, on peut imaginer, en s'en inspirant, utiliser :

- une vitre verticale (une plaque de plexiglas transparent maintenue par des tés et des pinces convient),
- des transparents sur lesquels sont dessinés différents types de quadrilatères,
- une lampe ponctuelle (comme une lampe de smartphone).

Ce dispositif permet de faire travailler ensemble un groupe de 6 ou 7 élèves (figure 12).

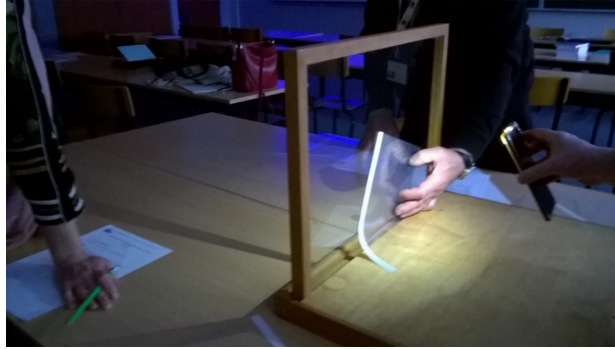


FIGURE 12 – Dispositif expérimental utilisé pour les ombres à la lampe.

Une question aussi simple que « Quels quadrilatères dessinés sur la vitre ont comme ombre sur la table un parallélogramme ? » demande un bon moment de manipulations, la découverte et une compréhension de certaines propriétés et un raisonnement structuré pour arriver à la solution.

La représentation du dispositif avec la solution sous différents angles amène quelques caractéristiques des projections parallèles.

Des considérations établies lors du travail donnent des énoncés mathématiques une fois « débarrassées » du langage concret. Par exemple :

- « la lampe et une droite forment un plan de lumière » devient « un point et une droite ne le contenant pas déterminent un plan » ;
- « l'ombre est l'intersection du plan de lumière et de la table » devient « l'intersection de deux plans non parallèles est une droite ».

On peut ainsi construire une ébauche d'axiomatique au départ des énoncés rencontrés.

Une séquence complète de cours sur ce sujet a été élaborée par un groupe du GEM. Ce travail a débouché sur une brochure qui peut être commandée via le site <https://wp.gem-math.be/2021/02/23/geometrie-de-lespace-par-le-biais-de-lombre-a-la-lampe> (Cuisinier, et alii, 1995). Un exemple d'activités en classe est proposé en annexe.

## Références bibliographiques

- ALBERTI Leon Battista, 1435, *De Pictura*, traduction par Jean Louis SCHEFER, 1993, *De la peinture*, Paris, Macula, Dédale.
- APOLLONIUS de Perge, *Les Coniques*, traduit par Paul VER EECKE, 1923, Bruges, Desclée-De Brouwer.

- BKOUCHE Rudolf, 1990, *La naissance du projectif. De la perspective à la géométrie projective*, IREM de Lille.
- CHASLES Michel, 1837, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, Bruxelles, M. Hayez.
- CUISINIER Ginette, LEGRAND Dany, VANHAMME Jacqueline, 1995, *Géométrie de l'espace par le biais de l'ombre à la lampe*, Louvain-la-Neuve, Academia-Erasme.
- DESARGUES Girard, 1636, *Exemple de l'une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*, in FIELD Judith V. and GRAY Jeremy, 1987, *The Geometrical Work of Girard Desargues*, New York, Springer-Verlag.
- DESARGUES Girard, 1639, *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*, in TATON René, 1981, *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Paris, Vrin.
- EUCLIDE, *Les Eléments*, in *Les œuvres d'Euclide* traduites par F. PEYRARD, 1966, Paris, Blanchard.
- GUIPAUD Christian, 1991, *La place de Guidobaldo del Monte dans l'histoire de la perspective, de la géométrie et de la géométrie projective, considérée à partir de la traduction et de l'analyse de son ouvrage « Perspectivae Libri Sex »*, Paris, thèse de doctorat sous la direction de Ernest COUMET.
- HEATH Thomas, 1981, *A History of Greek Mathematics*, deux volumes, New York, Dover Publications.
- LE GOFF Jean-Pierre, 1987, « Une œuvre aux confins de l'Art et de la Science : De prospectiva Pingendi de Piero della Francesca », *Les Cahiers de la Perspective, Points de vue*, n°4, p. 3-72, IREM de Basse-Normandie.
- PAPPUS d'Alexandrie, *La Collection Mathématique*, deux volumes, traduit par Paul VER EECKE, 1982, Paris, Blanchard.
- STEVIN Simon, 1605, *De Sciagraphia* in *Hypomnemata mathematica*, traduction française de Albert GIRARD, 1634, *De la Scénographie, dite vulgairement Perspective* in *Les Œuvres Mathématiques de Simon Stevin*, Leyde, Bonaventure et Abraham Elsevier.
- TATON René, 1988, *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Paris, Vrin.
- TAYLOR Brook, 1715, *Linear perspective : or, a New Method of Representing justly all manner of Objects as they appear to the Eye in all situations*, London, R. Knaplock.
- TAYLOR Brook, 1719, *New Principles of Linear Perspective : or the Art of Designing on a Plane the Representations of all sorts of Objects, in a more General and Simple Method than has been done before*, London, R. Knaplock. Traduction française du Père RIVOIRE, 1759, *Nouveaux Principes de la Perspective Linéaire*, Amsterdam, s.n.
- TOSSUT Rosane, 1995, « Desargues et Pappus », *Mnémosyne*, n°9, p. 19-44, IREM de Paris.
- TOSSUT Rosane, 1996, *La naissance de la démonstration projective ( XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles)*, Lille, thèse de doctorat sous la direction de Rudolph BKOUCHE.

## Annexe – Un exemple d’activités en classe

### 1. Ombre d’un parallélogramme.

Placez la vitre parallèlement au mur. Posez un parallélogramme sur la vitre et observez son ombre à la lampe sur le mur.

a) Quelle est la forme de l’ombre du parallélogramme? Envisagez toutes les positions de la lampe.

b) Elaborez les propriétés des points, droites et plans de l’espace qui permettraient de confirmer votre réponse.

Les élèves sont invités à compléter un tableau avec leurs observations et les énoncés de géométrie formulés. On obtient par exemple :

Expérience	Géométrie
La lampe et un côté du parallélogramme déterminent un <i>plan de lumière</i> .	Un point et une droite déterminent un plan. (L’énoncé peut être laissé ainsi dans un premier temps si aucun élève ne pense à préciser que le point ne peut être sur la droite.)
Le plan de lumière coupe le plan de l’ombre suivant une droite.	Si deux plans se coupent, ils se coupent selon une droite.
Un côté du parallélogramme et son ombre sont parallèles.	Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les deux droites d’intersection sont parallèles.
Les ombres des côtés opposés sont parallèles.	Transitivité du parallélisme.

### 2. L’ombre est un parallélogramme

Placez un quadrilatère sur la vitre verticale et observez son ombre à la lampe sur la table horizontale.

Quels quadrilatères peuvent avoir comme ombre un parallélogramme?

Suggestion pour aider – Résolvez d’abord la question suivante : quelles droites peuvent avoir comme ombres des droites parallèles? Servez-vous des transparents représentant respectivement deux droites sécantes et deux droites parallèles.

Relevez les observations faites durant la recherche expérimentale et exprimez-les sous la forme d’énoncés de géométrie.

Matériel mis à disposition des élèves :

- des transparents sur lesquels sont dessinés différents quadrilatères : carré, rectangle, parallélogramme, trapèze, quadrilatère quelconque ;
- des transparents sur lesquels sont dessinés deux droites parallèles ou deux droites sécantes ;
- des piques à brochette pour matérialiser les rayons lumineux ;
- des marqueurs effaçables.

Une présentation de l'activité « L'ombre est un parallélogramme » se trouve sur la chaîne *YouTube* du GEM : [https://www.youtube.com/playlist?list=PLpS1FnzsgJTZ0xMx244C0G3XkQZE\\_nRuQ](https://www.youtube.com/playlist?list=PLpS1FnzsgJTZ0xMx244C0G3XkQZE_nRuQ).

En cours de travail, la liste des énoncés de géométrie est complétée. On ajoute par exemple :

Expérience	Géométrie
Une droite parallèle à la table a pour ombre une droite qui lui est parallèle.	Si un plan contient une droite parallèle à un plan qu'il coupe, alors l'intersection des deux plans est parallèle à cette droite.

La résolution des deux problèmes a permis le passage d'observations dans le contexte expérimental à des énoncés de géométrie. On procède ensuite à une remise en ordre de ces énoncés, en construisant un « îlot déductif ». Le travail de théorisation consiste alors en différentes tâches :

- corriger les énoncés si nécessaire (par exemple compléter l'énoncé 1) ;
- ranger les énoncés dans un ordre cohérent et ajouter les énoncés manquants (par exemple, définir droites parallèles et plans parallèles avant l'énoncé 3) ;
- classer les énoncés en définitions, axiomes et théorèmes, et démontrer ces derniers (par exemple, les énoncés 1 et 2 sont des axiomes, l'énoncé 3 est un théorème).



Cinquième partie

Enseignement de la géométrie



## Importance et diversité des méthodes dans l'enseignement secondaire de la géométrie en France au XIX<sup>e</sup> siècle

Guillaume MOUSSARD

### Introduction

Pour résoudre les problèmes, qui prennent de plus en plus d'importance dans l'enseignement secondaire de la géométrie au XIX<sup>e</sup> siècle, notamment dans les examens et concours (Belhoste, 2001), se pose la question de la, ou des, méthode(s) à suivre. Ce texte donne à voir une grande diversité de méthodes rencontrées au fil des ouvrages d'enseignement. Mais au-delà de cette riche et stimulante variété, il s'agit de comprendre comment les auteurs conçoivent la notion de méthode, les raisons de leur choix d'exposer telle ou telle méthode, ce qui motive leur intérêt pour la notion de méthode, et les qualités, enfin, qu'ils attendent d'une méthode.

Nous privilégions largement dans ce texte les exemples sous forme de construction géométrique. En effet, depuis l'Antiquité le terme de problème est employé en géométrie pour désigner une proposition qui demande de réaliser, le plus souvent avec des droites et des cercles — c'est-à-dire à la règle et au compas — la construction d'une figure possédant certaines propriétés données. Toutefois, nous expliquons à la fin du texte comment la notion de problème est profondément modifiée au long de la période considérée ici.

### Les méthodes générales

La notion de méthode que nous allons rencontrer dans ce texte est entendue au sens prescriptif de chemin à suivre pour résoudre les problèmes de géométrie. En cela elle porte nécessairement en elle une idée de généralité. Toutefois la notion

de généralité peut varier d'un auteur à l'autre, d'une époque à l'autre, d'un ouvrage à l'autre (Chemla et al., 2016). Nous exposons ici dans une première partie des méthodes générales au sens où leurs auteurs décrivent une méthode susceptible de s'appliquer à tout problème, et nous regroupons dans la deuxième partie des méthodes dites particulières, qui, elles, sont d'emblée pensées comme appartenant à une pluralité de méthodes possibles, dont les champs d'application sont distincts sans être disjoints. Ces dernières sont véritablement un apport propre à l'enseignement secondaire de la géométrie au XIX<sup>e</sup> siècle (Moussard, 2012).

## La méthode synthétique

Une façon largement répandue au début du siècle de démontrer la solution des problèmes est de procéder par déduction du connu, les hypothèses, à l'inconnu, les propriétés de la figure construite exigées par l'énoncé. Cette forme d'exposition est appelée parfois « méthode synthétique », une association de termes surprenante pour qui associe les notions de méthode et d'invention. C'est la forme qu'utilise par exemple Adrien-Marie Legendre dans ses célèbres *Éléments de géométrie* de 1794 (figure 1).

### PROBLÈME XIV.

*Par un point donné mener une tangente à un cercle donné.*

Si le point donné A est sur la circonférence, tirez le rayon CA, et menez AD perpendiculaire à CA; AD sera la tangente demandée.

Si le point A est hors du cercle, joignez le point A et le centre par la ligne droite CA; divisez CA en deux également au point O; du point O comme centre et du rayon OC, décrivez une circonférence qui coupera la circonférence donnée au point B; tirez AB, et AB sera la tangente demandée.

Car, en menant CB, l'angle CBA inscrit dans le demi-cercle est un angle droit\*; donc AB est perpendiculaire à l'extrémité du rayon CB; donc elle est tangente.

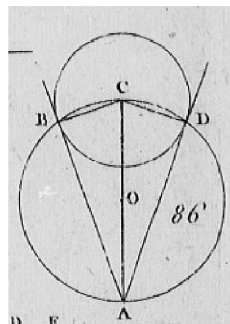


FIGURE 1 – La construction d'une tangente à un cercle (Legendre, 1794, p. 52)

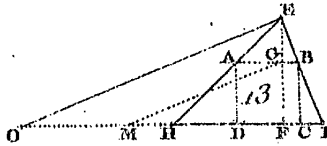
Remarquons que dans l'ouvrage de Legendre, les problèmes sont isolés à la fin de chacun des livres successifs, ce qui signifie qu'ils ne sont pas considérés comme des propositions nécessaires à la structure déductive de l'ouvrage, au contraire de ce que l'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide (Moussard, 2014), pourtant cités comme une référence de rigueur par Legendre lui-même. Dès lors, on peut se demander quel est le rôle de ces propositions? Nous tâcherons de répondre à la fin de ce texte.

Traditionnellement opposée à la forme de raisonnement par synthèse, l'analyse fournit une autre méthode de résolution des problèmes.

## L'application de l'algèbre à l'analyse de la figure

Étienne Bézout expose, dans son *Cours de mathématiques* de 1766, une analyse qui recourt à l'application de l'Algèbre à la Géométrie. Cette méthode consiste à « mettre les questions en équation », et pour cela à « représenter ce que l'on cherche, par un signe particulier, & raisonner ensuite à l'aide de ce signe & de ceux qui représentent les autres quantités, comme si tout était connu ».

**251. Propofons-nous donc pour première question, de décrire un quarré ABCD ( fig. 13 ) dans un triangle donné EHL.**



**Nommons donc  $a$  la hauteur connue  $EF$  ;  $b$  la base connue  $HI$ , &  $x$  la ligne inconnue  $GF$  ; alors  $EG$  vaudra  $a - x$ .**

$$\text{on tire } x = \frac{ab}{a+b}.$$

FIGURE 2 – L'analyse d'Étienne Bézout (Bézout, 1766, p. 305)

Cette méthode (figure 2) procède à rebours de la synthèse, à savoir qu'elle remonte de l'inconnu — la figure solution du problème — au connu — la construction d'une quatrième proportionnelle aux lignes  $a$ ,  $b$ , et  $a + b$ . L'immense efficacité de cette démarche algébrique a fait que le terme d'analyse, à la fin du XVIII<sup>e</sup>, est fréquemment synonyme de recours à l'algèbre. Pourtant, ce raisonnement par analyse fut employé longtemps avant l'invention de l'algèbre.

## L'analyse des Anciens ou analyse géométrique

Sylvestre-François Lacroix, auteur de nombreux manuels à succès, rappelle dans son *Essai sur l'enseignement* de 1805 la définition que donne Pappus de l'analyse au IV<sup>e</sup> siècle :

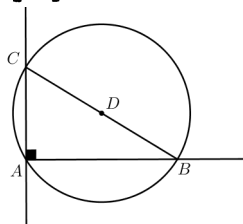
« Supposant dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui entre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution » (Lacroix, 1805, p. 235).

Cette analyse des Anciens va connaître un regain d'intérêt au XIX<sup>e</sup> siècle chez les géomètres et, bien sûr, les enseignants. Ainsi, le géomètre Charles Brianchon en défend-il les qualités : sa simplicité et la sagacité qu'exige son emploi. Pour la distinguer clairement du recours à l'algèbre, il la qualifie d'« analyse géométrique » :

« L'analyse géométrique dont nous parlons, présente en elle-même de grands avantages ; elle mène presque toujours à des solutions plus simples que celles qu'on obtient par le calcul, en faisant usage de la méthode artificielle des coordonnées ; elle exige aussi plus de pénétration d'esprit, et n'emploie d'autres éléments que les véritables données de la question : toutefois, ce procédé [...] est trop arbitraire, et devient trop restreint lorsqu'il s'agit de problèmes d'un ordre supérieur ; c'est alors que la méthode générale d'Euler et de Monge brille de tout son éclat, et laisse bien loin derrière elle la simple géométrie des anciens » (Brianchon, 1810).

Dans son *Cours de géométrie élémentaire* de 1826, Joseph Hydulphe Vincent, normalien et professeur de mathématiques à Paris, décide de présenter successivement l'analyse, qui permet de trouver la solution, puis la synthèse, qui respecte les exigences de la rigueur démonstrative (figure 3).

**311. Par l'extrémité A d'une droite AB qui ne peut être prolongée, élever une perpendiculaire à cette droite.**



**1<sup>re</sup> CONSTRUCTION. — Analyse. —** Soit AC la perpendiculaire cherchée. — En joignant, par une droite, un point quelconque B de AB avec un point quelconque C de AC, on formera un triangle rectangle CAB dans lequel le milieu D de l'hypoténuse sera également distant des trois sommets A, B, C (n°127) ;

**Synthèse. — 1<sup>o</sup>** D'un point quelconque D pris hors de la droite AB, comme centre, et du rayon DA, décrivons un arc de cercle qui coupe la droite AB en un second point B. — **2<sup>o</sup>** Menons la droite BD, et prenons, sur son prolongement,  $DC = DB = DA$ . — **3<sup>o</sup>** Menons la droite AC. — Cette droite est la perpendiculaire cherchée.

FIGURE 3 – Perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne (Vincent, 1826, p. 260)

Dix ans plus tard, Georges Ritt, inspecteur départemental et normalien, publie un recueil de problèmes en deux volumes (1836, 1837) d'une ampleur inédite. La première partie de l'ouvrage consiste en un discours, et cela est tout à fait original, sur la question de la méthode à suivre pour résoudre les problèmes. L'auteur porte un regard critique sur les pratiques pédagogiques contemporaines :

« Dans la plupart des ouvrages élémentaires, on trouve l'énoncé du problème, qui indique les opérations à effectuer, les constructions à faire

sur les données ; la solution, qui fait connaître le procédé à employer pour résoudre la question ; et enfin la démonstration, qui achève de prouver l'exactitude du procédé et lève toute incertitude [...] Mais rien n'indique la marche qu'a suivie l'esprit pour arriver à la solution, et il est bien peu probable que cette indication pure et simple du procédé de solution puisse mettre sur la voie de la solution d'un second, d'un troisième problème » (Ritt, 1836, p. 3).

Nous lisons que pour Ritt, plus que la solution des problèmes, c'est la méthode suivie pour trouver cette solution qu'il est essentiel d'enseigner. Et l'analyse « est bien la seule méthode qui ait pu conduire à la solution », c'est elle qui montre « la marche qu'a suivie l'esprit ». Ritt s'essaie à formaliser cette méthode par analyse en étapes successives :

- hypothèse et constructions préparatoires ;
- examen des relations entre les données et les inconnues du problème ;
- solution et construction finale ;
- démonstration.

Ritt illustre et commente la mise en œuvre de ces étapes sur des exemples de problèmes particuliers, comme celui-ci (figure 4) :

« PROBLÈME 17. Inscire dans un triangle donné un rectangle d'espèce donnée, c'est-à-dire semblable à un rectangle donné,  $m : n$  étant le rapport des côtés » (Ritt, p. 6).

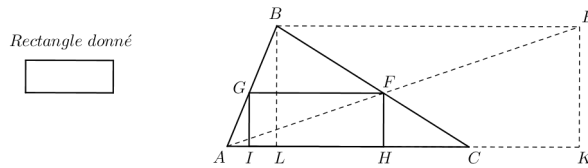


FIGURE 4 – Inscricion d'un rectangle de forme donnée dans un triangle donné

Ritt a procédé par analyse, il est parti de la solution du problème, à savoir la figure d'un rectangle  $FGIH$  inscrit dans un triangle  $ABC$ . Puis il a tracé le rectangle  $LBEK$ . Il a établi que ce rectangle est semblable au rectangle  $FGIH$  et donc aussi au rectangle donné. Dès lors, on sait construire le rectangle  $LBEK$  sur la hauteur donnée  $BL$ , et, en traçant la ligne  $AE$ , on trouve le point  $F$ , et enfin les points  $G$ ,  $I$  et  $H$ .

## La géométrie analytique

Nous avons vu comment Bézout emploie l'algèbre pour résoudre un problème particulier par analyse. Jean-Baptiste Biot, professeur dans les écoles centrales créées par la Révolution, expose une méthode plus générale à ses yeux dans son *Essai de géométrie analytique*. Il s'agit du premier ouvrage à porter dans son titre l'expression de *géométrie analytique*, qui avait déjà été formulée par Lacroix dans

son *Essai sur l'enseignement* de 1805 :

« Je me suis proposé d'y présenter les Éléments de la *Géométrie analytique*.

J'entends, par cette dénomination, la manière d'appliquer l'algèbre à la géométrie, non pas à l'aide de constructions particulières, qu'il faut varier pour tous les cas, mais en employant les méthodes générales que MM. Lagrange et Monge ont les premiers fait connaître dans leurs ouvrages ; méthodes enseignées depuis par M. Monge à l'École Polytechnique, et si heureusement introduites par M. Lacroix dans ses traités élémentaires ; ce qui est un des plus importants services que l'on ait jamais rendus à l'enseignement » (Biot, 1805, p. v).

Biot considère qu'une méthode telle qu'exposée plus haut par Bézout est par trop attachée au problème particulier qu'il s'agit de résoudre. « La première chose à faire, écrit-il, c'est de chercher un procédé direct pour énoncer les problèmes de géométrie dans le langage de l'algèbre » (Biot, 1805, p. 13). Cela est rendu possible par l'emploi d'un repère fixe de coordonnées. Dès lors, la position d'un point est exprimée par les équations  $x = a$  et  $y = b$ , la distance entre deux points de coordonnées respectives  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$  par l'expression :

$$D = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$$

l'équation de la droite qui les relie par :

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

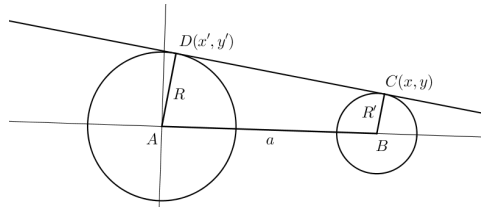
etc. De cette manière, tout énoncé de géométrie peut être directement traduit dans le langage de l'algèbre. Il est ensuite résolu par le calcul, et la solution traduite enfin dans le langage de la géométrie. En réalité, cette dernière étape est rarement présente dans les ouvrages de géométrie analytique, les auteurs s'arrêtant à des solutions sous forme d'équations ou d'expressions algébriques sans se préoccuper de fournir un tracé effectif à la règle et au compas.

## La géométrie analytique pour des problèmes de construction

Deux ouvrages cependant exposent la géométrie analytique dans le but de résoudre par le tracé les questions de géométrie (Jacob, 1842 ; Ritt, 1836-1837). Le polytechnicien Christophe Charles Jacob donne par exemple la solution du tracé d'une tangente commune à deux cercles (figure 5). D'abord, les deux cercles sont placés judicieusement dans un repère. Leurs équations respectives sont établies (1 & 2) puis celles des droites  $AD$  et  $BC$  (3 & 4). En combinant les équations (2) et (4), on détermine les coordonnées du point  $C$ , et à partir de là l'équation de la droite  $DC$ . Celle-ci étant perpendiculaire à la droite  $AD$ , on aboutit à l'expression de  $x'$  puis de  $y'$ . Ces expressions donnent lieu à une construction effective, ici  $x'$  est la quatrième proportionnelle aux trois lignes connues  $R \mp R'$ ,  $R$  et  $a$ .

Nous pouvons imaginer que pour des problèmes plus difficiles, la complexité des équations à résoudre pose rapidement problème.



**117. Mener une tangente commune à deux cercles.**


$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= R^2 \quad (1), & (x - a)^2 + y^2 &= R'^2 \quad (2), \\
 (3) \quad y &= \frac{y'}{x'} x \quad (\text{AD.}) & (4) \quad y &= \frac{y'}{x'} (x - a). \\
 x &= a \pm \frac{R' x'}{R}, & \text{donc } y &= \pm \frac{R' y'}{R}. \\
 y - y' &= \frac{\left(y' \mp \frac{R' y'}{R}\right)}{\left(x' - \left(a \pm \frac{R' x'}{R}\right)\right)} (x - x') & &= \frac{(R \mp R') y'}{(R \mp R') x' - a R} (x - x'). \\
 \text{d'où } x' &= \frac{(R \mp R') R}{a}, & y' &= \sqrt{R^2 - \frac{(R \mp R')^2 R^2}{a^2}} = \frac{R}{a} \sqrt{a^2 - (R \mp R')^2},
 \end{aligned}$$

FIGURE 5 – Tangente commune à deux cercles par la géométrie analytique (Jacob, 1842, p. 111)

## Les méthodes de la géométrie moderne

L'exemple que nous venons de voir du tracé d'une tangente commune à deux cercles peut tout à fait être résolu sans recourir à l'algèbre. Plusieurs géomètres du début du XIX<sup>e</sup> siècle, Monge, Carnot, Brianchon, Poncelet, entre autres, ont développé des méthodes progressivement regroupées sous la dénomination de « géométrie moderne ». Ces méthodes pénétrèrent peu dans les ouvrages de l'enseignement secondaire classique avant la fin des années 1860, en particulier parce qu'elles restent absentes des programmes officiels. En revanche, on les trouve dans deux ouvrages destinés à une formation à caractère davantage professionnel.

Lucien Bergery, polytechnicien et professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de Metz, ajoute dans la deuxième édition de son ouvrage *Géométrie appliquée à l'industrie* les premiers résultats de la théorie des transversales, en l'occurrence ici le théorème dit aujourd'hui de Ménélaüs, dont il donne l'application à des problèmes de distances inaccessibles (figure 6).

Toutes les longueurs apparaissant dans cette relation sont connues à l'exception de  $BD$  et  $DC$ , mais étant donné que leur différence  $BC$  est connue, on peut déterminer la longueur  $CD$  et la reporter dans la direction de  $BC$ .

Autre exemple de l'introduction des méthodes de la géométrie moderne dans l'enseignement secondaire, la résolution du fameux problème des trois cercles (Boyé, 1998) par Étienne Bobillier, polytechnicien et professeur à l'école des arts et métiers de Châlons. Bobillier procède par analyse géométrique, en employant les notions de la géométrie moderne : axe radical et centres de similitude de deux cercles, pôle et polaire (figure 7).

**100.** On en déduit un moyen de *prolonger une ligne droite EF, au-delà d'un obstacle qui ne permet pas de s'aligner sur les points E, F* (P. III, Fig. 24).

Plantez un jalon en un point A quelconque, un autre B dans l'alignement AE, un autre C dans l'alignement AF. Alors, EF sera par rapport aux trois droites AB, BC, AC que marqueront les jalons, une transversale qui rencontrera quelque part le prolongement de BC. Appelez D le point inconnu où se fait cette intersection; il faudra que

$$AE \times BD \times CF = EB \times DC \times FA,$$

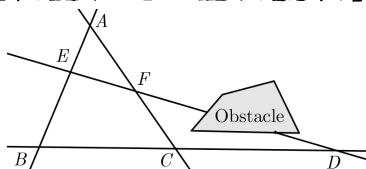


FIGURE 6 – (Bergery, 1828, p. 106)

## Méthodes particulières

Jusqu'ici les méthodes que nous avons présentées ont un caractère affirmé de généralité au sens où elles sont décrites indépendamment d'une forme particulière des énoncés auxquels elles sont appliquées, comme l'analyse des anciens décrite par Lacroix, l'analyse géométrique décrite par Brianchon, ou la géométrie analytique décrite par Biot ; même lorsque la méthode est décrite en appui sur des exemples, comme l'analyse algébrique des figures chez Bézout, ou l'analyse détaillée de Ritt, la volonté de ne pas restreindre le champ d'application de la méthode est manifeste.

Toutefois, il est particulièrement intéressant de remarquer que, dans le contexte de l'enseignement, certains auteurs proposent également des méthodes particulières, c'est-à-dire applicables dans un nombre d'emblée restreint de situations, dans certains cas bien identifiées.

## Des méthodes particulières en géométrie élémentaire

Gabriel Lamé, professeur particulier de mathématiques dans les premières années de sa longue carrière scientifique (Barbin et al., 2009), propose dans son *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* de 1818 de renverser la démarche habituelle en procédant des solutions vers les méthodes. C'est-à-dire qu'il cherche à déduire, de l'observation d'une pluralité de solutions, des traits communs qui permettent de dégager une méthode :

« Il faudrait principalement s'attacher à donner quelques méthodes générales pour la solution d'un problème, suivant la manière de l'aborder, de la conduire au résultat, et de traduire cette dernière partie dans le langage de l'énoncé. C'est sans doute ce qu'il y aurait de plus difficile ; la multiplicité des moyens dont la Géométrie, dont l'Algèbre même peuvent se servir pour arriver au but proposé, la variété des questions,

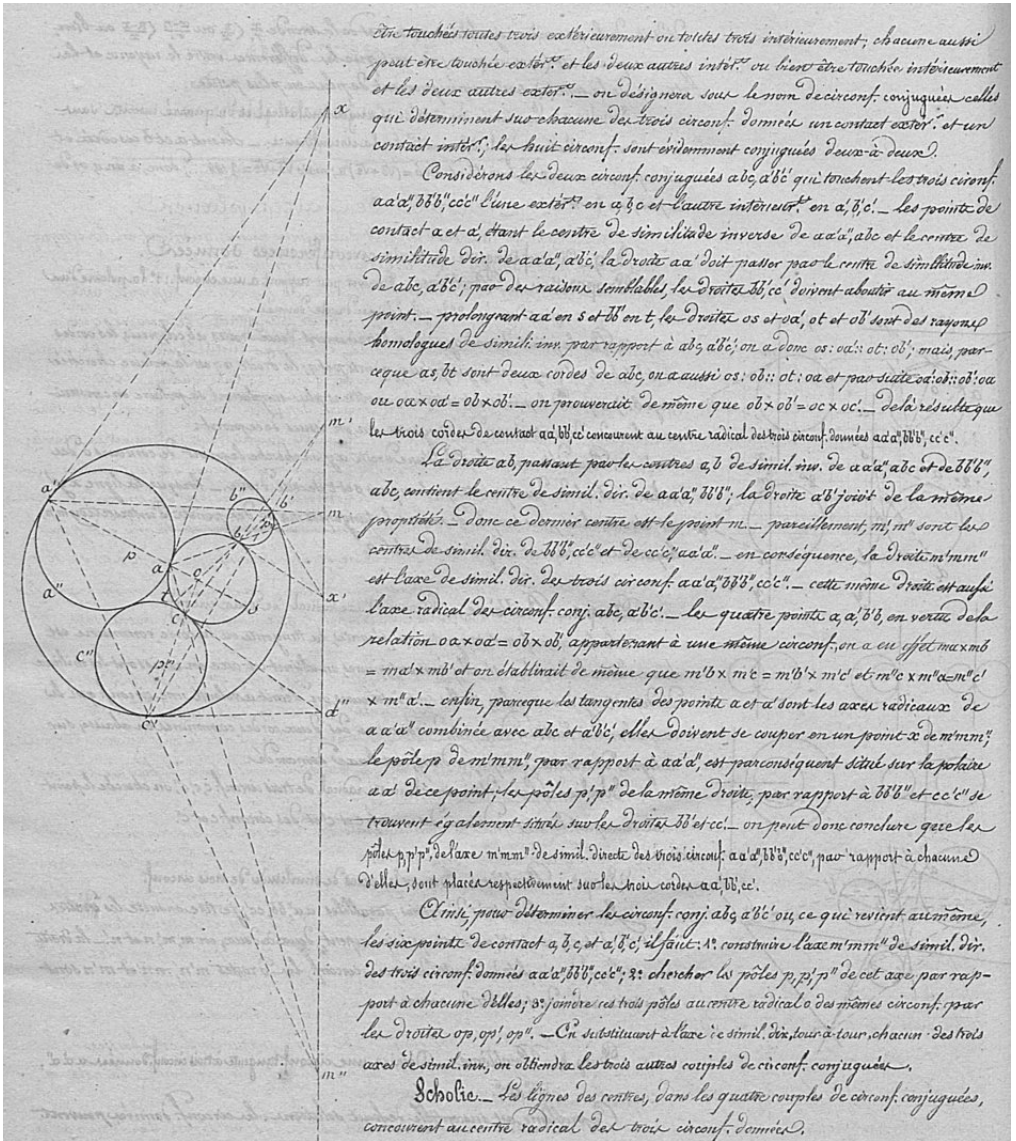


FIGURE 7 – Une solution au problème des trois cercles (Bobillier, 1837, p. 121)

tout contribuerait à éloigner les méthodes générales; mais on pourrait, il me semble, classer les problèmes suivant les ressemblances plus ou moins grandes de leurs moyens de solution, et l'on parviendrait peut-être, sinon à une méthode unique, du moins à un composé de moyens différents, que l'on pourrait regarder comme généraux vu leurs nombreuses applications » (Lamé, 1818, p. 6).

Il ne s'agit donc plus ici de décrire une unique méthode d'invention pour résoudre tous les problèmes, mais de repérer une diversité de moyens dont la généralité est en quelque sorte partielle, au sens où la méthode n'est pas attachée à la résolution d'un seul problème, mais n'a pas non plus vocation à s'appliquer à *tout* problème. Une telle conception de « méthode particulière », introduite ici par Lamé, est absolument novatrice.

Un exemple de méthode obtenue est celui de la méthode des figures semblables. Elle consiste à commencer par obtenir une figure semblable à la figure cherchée, pour déduire ensuite la solution définitive par agrandissement ou réduction. Elle est illustrée sur le problème de la construction d'un triangle lorsqu'on connaît ses trois hauteurs (Lamé, 1818, p. 15). Les hauteurs d'un triangle étant inversement proportionnelles à ses côtés, Lamé commence par construire un triangle dont les côtés sont en proportion inverse des trois hauteurs données. Le rapport entre les hauteurs du triangle obtenu et les hauteurs données donne le rapport de l'agrandissement nécessaire pour construire la solution (figure 8).

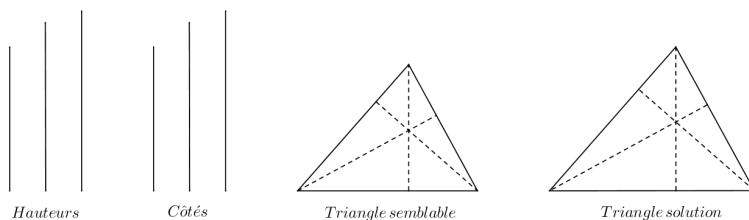


FIGURE 8 – construction d'un triangle connaissant ses trois hauteurs

L'ouvrage de Lamé connaît un certain succès et l'idée de décrire de telles méthodes particulières est reprise dans plusieurs ouvrages d'enseignement au long du siècle (Moussard, 2015). Par exemple, les professeurs Amiot et Desvignes exposent dans leurs *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans les éléments de géométrie* de 1858 la méthode dite des lieux géométriques et l'appliquent au problème de l'inscription d'un triangle équilatéral dans trois circonférences concentriques (figure 9) :

« PROBLÈME IV. Inscrire un triangle équilatéral dans trois circonférences concentriques » (Amiot et Desvignes, 1858, p. 7).

Ils commencent par placer le point  $A$  sur le premier des cercles, pour ensuite construire le lieu des sommets  $B$  des triangles  $ABC$  dont le sommet  $C$  est situé sur le troisième cercle. Ce lieu est la réunion de deux cercles (nous n'en avons représenté qu'un sur la figure), dont les intersections avec le deuxième cercle fournissent les sommets  $B$  des triangles solutions.

Cette méthode des lieux géométriques va progressivement s'imposer comme l'une des plus efficaces de ces méthodes particulières. À la fin du siècle, un ouvrage s'emploie à recenser et structurer l'ensemble des méthodes particulières mises à jour jusque-là, en les illustrant sur plus de 2000 questions, réalisant par conséquent

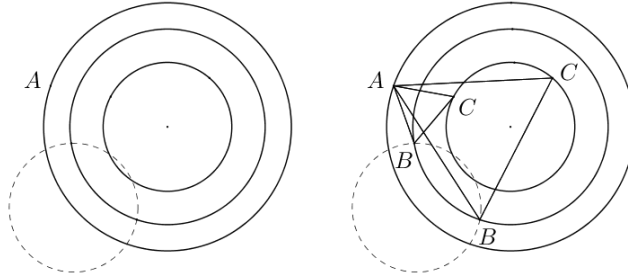


FIGURE 9 – Inscription d'un triangle équilatéral dans trois circonférences concentriques

le projet formulé par Lamé. Il s'agit des *Exercices de géométrie* du Frère des Écoles Chrétiennes Gabriel Marie (1896), qui feront référence pendant plusieurs décennies. Parmi les nombreuses méthodes présentées, on trouve la méthode par « transformation des figures », qui peut surprendre le lecteur contemporain habitué à une notion de transformation indépendante de la figure. Elle est illustrée sur le problème suivant (figure 10) :

« **190. Problème.** Dans un triangle donné  $ABC$ , inscrire un rectangle dont le périmètre égale une longueur donnée  $2l$  » (Frère Gabriel Marie, 1896, p. 85).

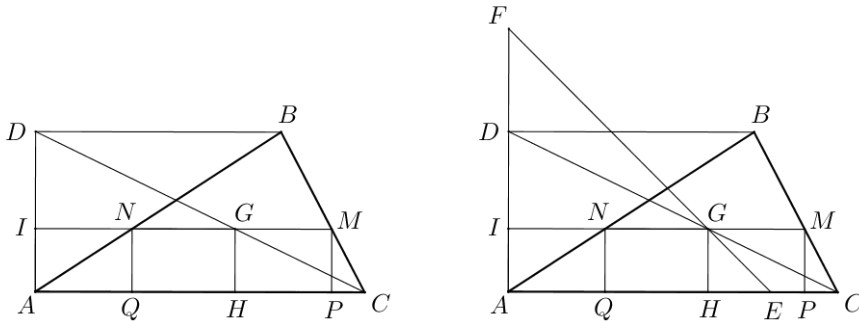


FIGURE 10 – Inscription dans un triangle d'un rectangle de périmètre donné

Le triangle  $ABC$  est *transformé* en un triangle  $ADC$  rectangle en  $A$ . Les rectangles  $IGHA$  inscrits dans ce nouveau triangle et de périmètre  $2l$  sont tels que le point  $G$  appartient à la ligne  $EF$  où  $AE = AF = l$ .  $G$  étant ainsi déterminé à l'intersection des lignes  $EF$  et  $DC$ , on en déduit les positions de  $M$  et de  $N$ . La méthode a consisté à « remplacer une figure donnée par une figure plus simple ».

Nous allons voir que dans certains ouvrages de géométrie analytique, également, sont présentées des méthodes pensées comme étant particulières.

## Les méthodes particulières en géométrie analytique

Les normaliens Charles Briot et Claude Bouquet, dans leurs *Leçons nouvelles de géométrie analytique* de 1851, font remarquer que l'emploi d'un procédé uniforme pour transcrire les problèmes de géométrie dans le langage de l'algèbre n'aboutit pas toujours aux équations les plus simples :

« Avant l'invention de Descartes, chaque problème de géométrie se résolvait par un procédé spécial; la représentation des figures par des équations donne une méthode uniforme applicable à toutes les questions géométriques [...] Si, au fur et à mesure, on cherche les équations de toutes [les] lignes, la vérification du théorème ou la détermination des inconnues du problème sera évidemment ramenée à une simple question algébrique [...] Mais cette méthode n'est pas toujours la plus simple, et dans beaucoup de cas il vaut mieux recourir à des procédés particuliers » (Briot et Bouquet, 1851, p. 213).

Les auteurs prennent l'exemple de la détermination d'un triangle rectangle dont l'aire et le périmètre sont donnés. Ils nomment les longueurs des trois côtés du triangle et aboutissent à des équations qui peuvent facilement être résolues (figure 11). Il s'agit de la méthode d'analyse algébrique de la figure exposée par

**En représentant par  $a$  le périmètre, par  $S$  la surface, par  $x$  et  $y$  les deux côtés de l'angle droit, et par  $z$  l'hypothénuse, on a de suite, au moyen de deux théorèmes simples, les trois équations**

$$(1) \begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2=z^2, \\ xy=2S, \end{cases}$$

**suffisantes pour la détermination numérique des inconnues.**

FIGURE 11 – Détermination d'un triangle rectangle connaissant l'aire et le périmètre

Bézout au début de ce texte, et considérée ici par Briot et Bouquet comme étant une méthode particulière. Ils l'exposent tout de même car ils recherchent avant tout la simplicité et l'efficacité. Ainsi, ils présentent plus loin des méthodes qui ne font intervenir aucun calcul, ce qui doit nous surprendre dans un ouvrage de géométrie analytique (figure 12).

## Élargissement de la notion de problème

Jusqu'ici nous avons illustré la diversité des méthodes exposées dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en choisissant uniquement des problèmes de constructions géométriques. Nous devons terminer néanmoins en expliquant que la notion de problème dépasse largement ce cadre au XIX<sup>e</sup> siècle (Moussard, 2017).

**330—MÉTHODE DE PROJECTION.**—On peut déduire les propriétés les plus simples de l'ellipse de celles du cercle, en considérant l'ellipse comme la projection orthogonale d'un cercle sur un plan. [...]

Le carré construit sur deux diamètres rectangulaires du cercle se projette suivant le parallélogramme construit sur les deux diamètres conjugués de l'ellipse. Or, on sait que la projection d'une aire plane est égale à l'aire projetée, multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans; donc l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques de l'ellipse est constante (n° 66).

FIGURE 12 – La méthode de projection (Briot et Bouquet, 1851, p. 389)

## Les problèmes en géométrie élémentaire

En géométrie élémentaire, d'abord, certains auteurs proposent des problèmes de différentes natures. En témoignent ces quelques énoncés tirés des *Éléments de géométrie* (1855) d'Amiot (figure 13).

PROBLÈMES.
1. Calculer, à moins d'un centimètre carré, l'aire du rectangle dont la base est égale à $40^m$ , $75^m$ et la diagonale à $15^m$ , $23^m$ .
4. Diviser un triangle en deux parties équivalentes par une perpendiculaire à l'un de ses côtés.
7. La position et la longueur de deux droites étant données, trouver le lieu des points, tels qu'en les joignant aux extrémités de ces droites, on forme deux triangles dont les aires soient proportionnelles à deux lignes données M et N. Examiner le cas d'égalité de M et N.
9. Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit de la hauteur, perpendiculaire au troisième côté, par le diamètre du cercle circonscrit. — Dédurre de ce théorème que l'aire d'un triangle est égale au produit de ses trois côtés divisé par le double du diamètre du cercle circonscrit.

FIGURE 13 – Énoncés de problèmes (Amiot, 1855)

Nous trouvons des constructions géométriques, biens sûr, mais aussi des calculs numériques de grandeurs, et des problèmes qui demandent une initiative de la part du lecteur, discussion de cas ou élaboration d'un corollaire. Tout au long du siècle, la notion de problème se dégage d'une conception attachée à une forme de proposition particulière, en l'occurrence la construction d'une figure, en faveur d'un énoncé à visée didactique. Le but est de stimuler le lecteur, de l'amener à mettre en application les propositions préalablement exposées, et bien sûr de le préparer aux épreuves des examens et concours.

## Les problèmes en géométrie analytique

Nous l'avons déjà évoqué rapidement, les ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique entendue comme discipline à part entière se soucient peu, pour la plupart, de la question de la construction graphique des figures. Dès le premier ouvrage d'enseignement de cette nouvelle discipline, Biot affirme en effet :

« Au reste, les constructions géométriques ne doivent être regardées que comme un moyen quelquefois élégant de représenter les solutions des problèmes, et non pas comme un procédé rigoureux pour trouver leurs valeurs numériques. Relativement à ce dernier objet, le calcul est infiniment préférable, parce que son exactitude est indéfinie » (Biot, 1805, p. 11).

Dès lors, les solutions des problèmes ne sont plus des constructions mais des équations ou des expressions algébriques. C'est le cas dans les *Leçons nouvelles de géométrie analytique* de Briot et Bouquet (1863, p. 52), dont nous reproduisons quelques énoncés.

PROBLÈME II : Par un point donné mener une parallèle à une droite donnée.

Solution :  $y - y' = a(x - x')$ , où l'équation de la droite donnée est  $y = ax + b$ .

PROBLÈME V : Trouver l'équation de la droite qui passe par un point donné et par le point d'intersection de deux droites données.

Solution :  $\frac{Ax+By+C}{Ax'+By'+C} = \frac{A'x+B'y+C'}{A'x'+B'y'+C'}$ , où  $Ax+By+C = 0$  et  $A'x+B'y+C' = 0$  sont les équations des deux droites données, et  $(x', y')$  les coordonnées du point donné.

PROBLÈME VI : Reconnaître si trois points sont en ligne droite.

Solution :  $\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{y'''-y''}{x'''-x''}$ , où  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$ ,  $(x''', y''')$  sont les coordonnées des trois points donnés.

Nous le voyons, la solution des problèmes est algébrique et non graphique. En fait, dans la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, les ouvrages d'enseignement de la géométrie analytique contiennent peu de problèmes, le plus souvent quelques problèmes de construction en début d'ouvrage visant à convaincre le lecteur de la puissance de l'application de l'algèbre à la géométrie. Les choses changent lorsqu'à partir des années 1860 les examens d'entrée aux grandes écoles portent sur des problèmes difficiles de géométrie. Les ouvrages d'enseignement intègrent alors rapidement un grand nombre de problèmes, désormais appelés dans certains d'entre eux « exercices » (figure 14).



**EXERCICES.**

**4° Trouver le lieu des sommets des parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués d'une ellipse.**

**6° De toutes les ellipses inscrites à un même parallélogramme, quelle est la plus grande?**

**9° Inscire dans l'ellipse une corde telle que la somme de sa longueur et la distance de son point milieu au centre soient maximum.**

FIGURE 14 – Exemples d'exercices de géométrie analytique (Briot, 1863)

## L'importance prise par les problèmes

Nous avons esquissé la diversité des types d'énoncés qui se trouvent dans les ouvrages d'enseignement de géométrie sous la dénomination de problèmes. Ceci dans un contexte où le nombre de problèmes dans les ouvrages devient très important, comme nous en convainquent les quelques données suivantes :

- Les *Éléments* de Legendre (1794) : environ 30 problèmes de construction,
- Le *Cours de géométrie* de Vincent (1826) : environ 150 problèmes,
- Les *Problèmes de géométrie* de Ritt (1836) : 675 problèmes,
- Le *Traité de géométrie élémentaire* de Rouché et Comberousse (1866) : 1157 exercices,
- Les *Leçons de géométrie analytique* (1865) de Briot et Bouquet : 160 exercices,
- Les *Exercices de géométrie* de FGM (1882) : plus de 2 000 énoncés.

## Conclusion

La consultation d'un grand nombre d'ouvrages d'enseignement de la géométrie au XIX<sup>e</sup> siècle en France a permis de montrer qu'un nombre significatif d'entre eux abordent la question de la méthode à suivre pour résoudre des problèmes. Nous avons passé en revue un grand nombre des méthodes que les auteurs exposent dans leurs manuels, certaines récentes, voire « modernes », d'autres plus anciennes et remises à l'honneur. Non seulement les enseignants présentent des méthodes, mais encore certains élaborent des discours à leur sujet, visant selon les cas à défendre les qualités d'une méthode, à comparer les mérites relatifs de différentes méthodes, ou à convaincre de l'importance d'un enseignement des méthodes plutôt que des seules solutions. En particulier, et notamment pour préparer les élèves à résoudre les problèmes des examens et concours, certains enseignants exposent, en suivant une idée originale de Lamé, des méthodes particulières, prisées pour leur simplicité et leur efficacité.

Concevoir aujourd'hui l'enseignement de la géométrie par le biais de la question de la méthode, face à un contexte d'appauvrissement et de morcellement de la discipline, permettrait sans doute d'ouvrir la voie à des activités pédagogiquement riches. Nous avons vu que ce point de vue amène à établir des liens entre différents problèmes, comme pouvant être résolus par une même méthode, à dissocier clai-

rement l'énoncé du problème de la méthode employée à sa résolution, à stimuler, enfin, la curiosité et l'intérêt de l'élève en lui donnant la liberté du choix de la méthode à suivre.

## Références bibliographiques

- AMIOT Antoine, 1855, *Éléments de géométrie*, Paris, Dézobry, Magdeleine et Cie.
- AMIOT Antoine, DESVIGNES A., 1858, *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans les éléments de géométrie*, Paris, Dézobry, Magdeleine et Cie.
- BARBIN Évelyne (dir.), 2009, *Gabriel Lamé (1795-1870) : Les pérégrinations d'un ingénieur au XIX<sup>e</sup> siècle*, Bulletin de la SABIX, 44.
- BELHOSTE Bruno, 2001, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIX<sup>e</sup> siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, 90, p. 101-130.
- BERGERY Claude Lucien, 1828, *Géométrie appliquée à l'industrie à l'usage des artistes et des ouvriers*, 2<sup>e</sup> éd., Metz, Thiel.
- BÉZOUT Étienne, 1766, *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine. Troisième partie. Contenant l'algèbre & l'application de cette science à l'arithmétique & à la géométrie*, Paris, Musier.
- BIOT Jean-Baptiste, 1805, *Essai de géométrie analytique, appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre*, Paris, Bernard.
- BOBILLIER Étienne, 1837, *Géométrie*, 3<sup>e</sup> éd., Châlons-sur-Marne, Barbat.
- BOYÉ Anne, 1998, *L'apollonius gallus et le problème des trois cercles comme défense et illustration de la géométrie synthétique*, thèse de doctorat, Université de Nantes.
- BRIANCHON Charles, 1810, « Solution de plusieurs problèmes de géométrie », *Journal de l'École polytechnique*, 10<sup>e</sup> cahier, tome IV, Paris.
- BRIOT Charles et BOUQUET Claude, 1851, *Leçons nouvelles de géométrie analytique*, 2<sup>e</sup> éd., Paris, Dézobry et Magdeleine.
- BRIOT Charles et BOUQUET Claude, 1863, *Leçons nouvelles de géométrie analytique*, 3<sup>e</sup> éd., Paris, Dézobry et Magdeleine.
- CHEMLA Karine, CHORLAY Renaud et RABOUIN David, 2016, *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, Oxford, Oxford University Press.
- JACOB Christophe Charles, 1842, *Application de l'algèbre à la géométrie*, Paris, Hachette, et Metz, Thiel.
- LACROIX Sylvestre-François, 1805, *Essai sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier*, Paris, Courcier.
- LAMÉ Gabriel, 1818, *Examen des différentes méthodes employées pour la résolution des problèmes de géométrie*, Paris, Vve Courcier.
- LEGENDRE Adrien-Marie, 1794, *Éléments de géométrie*, Paris, Firmin-Didot.
- MARIE Frère Gabriel, 1896, *Exercices de géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*, 3<sup>e</sup> éd., Tours, Mame & fils, et Paris, Poussiègue.

- MOUSSARD Guillaume, 2012, « The notion of method in 19<sup>th</sup> century French geometry teaching : three textbooks » in BJARNADOTTIR, FURINGHETTI, MATOS et SCHUBRING, *Dig where you stand 2. Proceedings of the 2<sup>nd</sup> international conference on the history of mathematics education*, Caparica, UIED, p. 333-350.
- MOUSSARD Guillaume, 2014, « Les constructions à la règle et au compas : les *Éléments* d'Euclide » in BARBIN Évelyne (dir.), *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses, p. 1-26.
- MOUSSARD Guillaume, 2015, *Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794-1891)*, Thèse de doctorat, Université de Nantes.
- MOUSSARD Guillaume, 2017, « The standardisation of the place of problems in French geometry textbooks during the 19<sup>th</sup> century » in BJARNADÓTTIR Kristín, FURINGHETTI Fulvia, MENGHINI Marta, PRYTZ Johan et SCHUBRING Gert, *Dig where you stand 4. Proceedings of the Fourth International Conference on the History of Mathematics Education*, Roma, Edizioni nuova cultura.
- RITT Georges, 1836, *Problèmes de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique*, Paris, Hachette.
- RITT Georges, 1836-1837, *Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie, avec les solutions développées*, 2 vol., Paris, Hachette.
- VINCENT Alexandre Joseph Hydulphe, 1826, *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des élèves qui se destinent à l'École polytechnique ou aux Écoles militaires*, Reims, Delaunoy, et Paris, Bachelier.



## La conception houëllienne de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire dans les années 1860-1880 : une approche « expérimentale » basée sur une version revisitée des *Éléments* d'Euclide

François PLANTADE

### Introduction

Le terme « houëllien » se réfère au mathématicien français méconnu Jules Houël (1823-1886). Ce dernier est en général associé à la diffusion des géométries non euclidiennes dans les années 1860-1870. Or, l'intérêt de Houël pour les géométries non euclidiennes provient de la question des fondements de la géométrie élémentaire et notamment de celle de l'indépendance du postulat des parallèles vis-à-vis des autres axiomes<sup>1</sup>. Ses travaux sur les fondements de la géométrie eurent eux-mêmes pour source des questions pédagogiques lors d'enseignement en lycée. Comment enseigner la géométrie en lycée (le lycée du milieu du XIX<sup>e</sup> siècle) ? Quelle place doit-on apporter à la rigueur des raisonnements ? Quelle place doit-on donner à l'expérimentation ? Quelle place doit-on accorder à la géométrie élémentaire par rapport à l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse ?

Ces questionnements de Houël sont au cœur des réformes sur l'enseignement des mathématiques en lycée et il nous a semblé intéressant, suite au rapport Villani-Torossian<sup>2</sup>, d'en présenter les conceptions, même si les conditions d'enseignement au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle ne sont pas transposables telles quelles de nos jours.

---

1. Et non le contraire, comme on peut parfois le lire.

2. Le rapport « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » est consultable à l'adresse <https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242>.

Il nous semble également cohérent de nous interroger sur le positionnement des conceptions houëlliennes relativement aux réformes de 1902 et des mathématiques modernes.

Afin de répondre à ces questions, nous commencerons par donner quelques éléments biographiques et contextuels sur Jules Houël et montrerons que la pédagogie de la géométrie élémentaire l'intéressait au plus haut point (au travers de l'« affaire Wilson » au carrefour de l'Italie et de l'Angleterre en 1868-1869). Ensuite, nous analyserons assez en détail son premier texte sur les fondements de la géométrie élémentaire, à savoir l'« Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire », (Houël 1863). Ce texte renferme des considérations à la fois théoriques et pédagogiques et donne un rôle central aux *Éléments* d'Euclide. Ainsi, Houël y prônait une utilisation éclairée des *Éléments* revisités tout en promouvant une vision expérimentale des axiomes et de l'enseignement pour les plus jeunes élèves.

## Jules Houël (1823-1886), un mathématicien polyglotte et pédagogue, engagé sur la question de l'enseignement de la géométrie au lycée

### Présentation de Jules Houël

Jules Houël (1823-1886)<sup>3</sup>, issu d'une ancienne famille normande protestante, étudia les mathématiques à l'École Normale de 1843 à 1846 ; ayant échoué à l'agrégation en 1846 – qu'il obtint l'année suivante, Houël commença à enseigner en lycée. Il travailla notamment dans les lycées de Bourges (1847), de Pau (1848 et 49), de Bordeaux (1850) et d'Alençon (1851-55). Dès 1852, il envisagea de quitter l'enseignement secondaire et poursuivit des recherches mathématiques et astronomiques, qui aboutirent en 1855, à la soutenance en Sorbonne de deux thèses, l'une en mécanique (Houël 1855a) et l'autre en astronomie (Houël 1855b). Cauchy, qui fit partie du jury des thèses de Houël, montra un réel enthousiasme à leur sujet. Cependant, ce dernier, qui ambitionnait de travailler en astronomie, ne put entrer à l'Observatoire de Paris, et prit la succession de Victor Amédée Le Besgue à la chaire de mathématiques pures de la Faculté des Sciences de Bordeaux en 1859. Houël y enseigna jusqu'en 1884, année à laquelle il prit sa retraite en raison de problèmes de santé.

Il enseigna invariablement l'analyse réelle – à une et plusieurs variables – à Bordeaux. Le nombre d'étudiants en licence de mathématiques était faible, mais à peu près constant : probablement environ deux ou trois chaque année. Pour Houël, le nombre d'étudiants n'avait rien à voir avec la qualité de son cours : il se devait d'être le plus complet possible. De plus, au lieu de faire deux leçons par semaine comme c'était la règle, il en faisait cinq. Houël, avant de professer un cours, en étudiait toutes les facettes afin d'en choisir la manière la plus adaptée à ses étudiants et cependant rigoureuse<sup>4</sup>.

---

3. Pour des précisions, consulter (Plantade 2018).

4. Les cours de Houël furent, à l'origine, publiés à Bordeaux sous forme autographiée puis sous

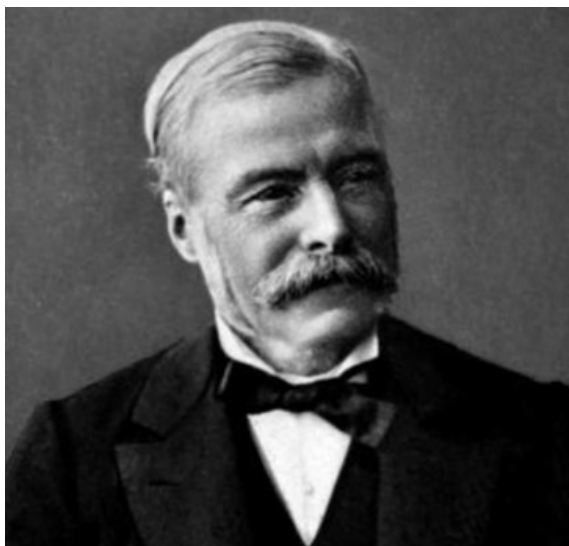


FIGURE 1 – Jules Houël vers 1880, détail d'une photographie des années 1880, Archives départementales de la Gironde.

Houël anima activement la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, dès 1863. Il en fit la promotion, de sorte qu'en 1867<sup>5</sup>, « presque tous les mathématiciens de Bordeaux y étaient inscrits ». Il publia de nombreux articles mathématiques, historiques ou traductions dans les *Mémoires* de ladite Société, notamment à propos de géométries non euclidiennes. De 1864 à 1872, Houël fut archiviste de la Société et en développa considérablement l'activité et les contacts. En 1872, la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux comptait plus d'une centaine de contacts parmi des sociétés savantes du monde entier. Il fut aussi, de 1870 à 1883, co-éditeur avec Darboux du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, un journal fondé sous l'impulsion de la Commission des hautes études – présidée par Chasles – avec le soutien du Ministère de l'instruc-

---

forme modifiée et typographiée chez Gauthiers-Villars à Paris, en quatre volumes, sous le titre de *Cours de calcul infinitésimal*. Pour ce faire, Houël reprit, en plus du contenu de ses propres cours de l'époque, le contenu de la *Théorie élémentaire des quantités complexes*, traité en quatre volumes assez complet, d'analyse complexe. Ces deux traités eurent un très bon écho en France et en Europe. Les qualités de ces traités sont, selon Darboux et Rubini : la rigueur, l'exhaustivité, la clarté et la concision. En effet, la *Théorie élémentaire des quantités complexes* traite des fondements des « quantités complexes », de toutes les propriétés nécessaires pour travailler sur les fonctions d'une variable complexe ; les fonctions d'une variable complexe sont également étudiées en définissant les propriétés les plus élémentaires – continuité, dérivabilité, points singuliers, intégrales curvilignes – pour en arriver aux résidus et aux « surfaces de Riemann » ; la partie sur les quaternions généralise la notion de « quantités complexes » dans l'espace, dont les applications sont multiples. Tous les résultats énoncés sont démontrés ; des exemples fondamentaux et pédagogiques sont régulièrement donnés.

5. Lettre du 12 janvier 1867 de Houël à son cousin Berger (Bibliothèque de Caen-la-mer).

tion publique dans le but de diffuser<sup>6</sup> les nouvelles idées mathématiques venues d'Allemagne notamment, en France.

Il était polyglotte : d'après le mathématicien Paul Barbarin, il connaissait à la fin de sa vie « toutes les langues de l'Europe », bien qu'il n'eût pas voyagé en dehors de la France<sup>7</sup>. Il traduisit, de l'allemand (Riemann, Lipschitz), du suédois (Mittag-Leffler), du russe (Lobatchevski) , ...

Houël fut en contact épistolaire avec de nombreux mathématiciens européens : Darboux, Hermite, Bellavitis, Beltrami, Cremona, Forti, Klein, ...

Pour conclure cette brève présentation, nous nous attardons sur l'intérêt de Houël pour la géométrie – qui sera complété dans la suite de cet article. Houël enseigna la géométrie uniquement durant sa carrière assez courte d'enseignant de lycée. Cette expérience l'amena à réfléchir sur les méthodes d'enseignement utilisées et sur les fondements de la géométrie élémentaire dès 1863, dans (Houël 1863). Cela l'incita à traduire les textes fondateurs des géométries non euclidiennes dès 1866 (Houël 1866), (Houël 1868), d'une part, et d'autre part, à clore les débats sur l'indépendance de l'axiome des parallèles dans (Houël 1870a). Il publia également un texte épistémologique sur la géométrie élémentaire, (Houël 1875). Son intérêt pour les questions géométriques fut ainsi constant tout au long de sa carrière à la Faculté de Bordeaux.<sup>8</sup>

## L'engagement de Houël sur la question des méthodes d'enseignement de la géométrie élémentaire : exemple de l'« affaire Wilson »

### L'enseignement de la géométrie en Italie et en Angleterre dans les années 1860-1870

En Italie<sup>9</sup> (hormis à Rome), l'enseignement secondaire de 1861 à 1867 était régi par la loi Casati, qui créa les gymnasiums classiques, afin de différencier l'enseignement technique de l'enseignement classique. Ce dernier était de type encyclopédique et les cours de mathématiques représentaient notamment un nombre d'heures important. Dans les cours de mathématiques de gymnasium classique, les manuels utilisés étaient essentiellement des traductions de traités français<sup>10</sup> et les cours portaient sur des sujets « actuels » tels la géométrie projective, les quantités complexes et non la géométrie élémentaire dans une version euclidienne.

En 1867, une nouvelle loi, conduite par Coppino, imposa des changements de programmes importants dans les gymnasiums ; le but de Coppino était d'« italianiser » cet enseignement, c'est-à-dire de revenir à une culture classique. En géométrie, cela signifia revenir aux *Éléments* d'Euclide, dont le Livre I servait désormais de manuel pour les élèves de quinze ans, les Livres II et III pour ceux de seize ans

---

6. Après la guerre franco-prussienne de 1870 et les succès de l'école analytique française du début du XIX<sup>e</sup> siècle, les mathématiciens français avaient tendance à dédaigner les sciences allemandes pourtant florissantes dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle.

7. Voir l'introduction de (Barbarin 1926).

8. Pour des précisions, consulter (Voelke 2005).

9. Voir (Barbin, Menghini, Moktefi 2013).

10. Les traités de Clairaut, Legendre par exemple.



et les suivants pour ceux de dix-sept ans. Le mathématicien Luigi Cremona fit partie de la commission qui décida d'introduire dans l'enseignement secondaire l'étude d'Euclide, qui lui semblait le système d'exposition le plus logique et le plus rigoureux. Suite à ces changements radicaux de programmes de mathématiques, nombreuses furent les protestations dans la communauté mathématique italienne, dont le *Giornale de Battaglini* se fit une tribune. En 1869, année de l'« affaire Wilson », seul Euclide en italien servait de manuel aux élèves de 15-17 ans de gymnasiums classiques.

En Angleterre<sup>11</sup>, Euclide était utilisé « exclusivement », ce jusqu'en 1860 dans les études secondaires et supérieures, dont le but était de former l'esprit sur une théorie déjà aboutie. À la fin des années 1860, de nombreux maîtres d'école déplochèrent la difficulté des *Éléments* d'Euclide pour les débutants, qui pour beaucoup apprenaient sans comprendre. En avril 1868, James M. Wilson, enseignant à Rugby School, publia un manuel de géométrie (Wilson 1868a), qu'il proposa de substituer à Euclide dans les écoles. Dans sa préface, Wilson avançait quatre raisons pour abandonner Euclide : son côté artificiel, sa forme « syllogistique », la longueur des démonstrations qui incitait les élèves à les apprendre plutôt qu'à les comprendre et le manque de visibilité des propositions vis-à-vis des autres. Le mouvement anti-Euclide prit une certaine ampleur en Angleterre et une association, l'AIGT, fut créée en 1869, afin d'adapter l'enseignement de la géométrie aux élèves.

### **Enseigner avec Euclide ou non, en Italie : échange entre Houël et Cremona en lien avec l'« affaire Wilson »**

Wilson publia à la fin de l'année 1868 au *Giornale de Battaglini* un article en italien, intitulé « Euclide come testo di geometria elementare » (Wilson, 1868b, p. 361-368) critiquant l'utilisation des *Éléments* d'Euclide dans l'enseignement de la géométrie élémentaire. Ce fut dans le contexte de changements importants de l'enseignement des mathématiques en Italie et en Angleterre, mais de manière contraire l'une par rapport à l'autre à propos d'Euclide, puisque l'utilisation d'Euclide était désormais obligatoire en Italie, et qu'en Angleterre, un mouvement de contestation anti-Euclide se faisait jour.

Nous ne transcrivons pas le discours de Wilson ni la réponse officielle qu'en firent Cremona et Brioschi au début 1869, mais nous transcrivons le début de l'extrait de la lettre de Houël à Battaglini, du 23 janvier 1869, publiée au *Giornale* en réponse à l'article de Wilson :

« ... J'aurais beaucoup de choses à relever dans les preuves que donne M. Wilson de ce qu'Euclide est antiquato, artificioso, illogico (!!!) e inadatto come libro d'instituzione. Antiquato, soit : je l'ai dit moi-même à l'occasion. Artificioso : pas plus que les trois quarts des ouvrages modernes. Mais illogico, je le nie, et je prétends qu'il ne le paraît qu'à ceux qui ne l'ont pas entièrement compris. [...] Quant à inadatto come libro d'instituzione, oui et non. Oui, s'il est mis entre les mains des élèves comme code de géométrie [...] mais pourvu qu'il soit accompagné de

11. Voir (Barbin Menghini Moktefi 2013).

X 50 X

## ESTRATTO DI UNA LETTERA DEL PROF. HOÛËL AL REDATTORE.

( Vedi Vol. VI. pag. 361 )

... J'aurais beaucoup de choses à relever dans les preuves que donne M. Wilson de ce qu'Euclide est *antiquato, artificioso, illogico (!!!) e inadatto come libro d'istituzione*. *Antiquato*, soit: je l'ai dit moi-même à l'occasion. *Artificioso*, pas plus que les trois quarts des ouvrages modernes. Mais *illogico*, je le nie, et je prétends qu'il ne le paraît qu'à ceux qui ne l'ont pas compris entièrement. Je crois avoir établi suffisamment la raison de beaucoup de particularités, qui devaient sembler inexplicables à ceux qui ont pris pour guide le système bâtarde de la Géométrie de Legendre, qui n'a ni le rigueur du passé ni la largeur de vue du présent. — Quant à être *inadatto come libro d'istituzione*, oui et non. Oui, s'il est mis entre les mains d'un élève comme code de géométrie, comme texte de renvoi, où l'on trouve les propositions fondamentales dont on a besoin à chaque instant, *mais pourvu qu'il soit accompagné de commentaires, d'éclaircissements, d'additions, quelquefois de rectifications, faites par un professeur bien pénétré de l'esprit du texte*, et que les explications du professeur soient la partie *principale* de l'enseignement. Non, si l'on suit le système anglais consistant à faire apprendre Euclide par cœur sans l'expliquer. On ne fait pas un cours de jurisprudence en se contentant de réciter le code par cœur.

Mais je m'attacherai à un seul point, sur lequel les deux auteurs ont des idées très-inexactes. C'est sur la prétendue notion de longueur antérieure à la notion de ligne droite. Guidé par les leçons et les ouvrages de M. Duhamel, j'ai établi d'une manière irréfutable, dans mon *Essai critique*, etc., que le mot *longueur d'une ligne courbe* est complètement *vide de sens*, au point de vue de la rigueur mathématique, tant qu'on n'a pas établi une suite de théorèmes, dont le dernier est une application élémentaire du calcul intégral. J'ai fait observer qu'il était puéril de fausser la rigueur géométrique et d'introduire des paroles insignifiantes en place d'idées solides, pour le seul plaisir d'économiser une démonstration de dix à douze lignes, comme celle de la 20<sup>e</sup> proposition d'Euclide, et je répète avec l'auteur (M. Wilson), mais dans un tout autre sens: *Credo che sappiamo appena quanto siamo assurdi e violiamo l'ordinamento scientifico*. En effet, je n'apprends pas ici la moindre absurdité ni la moindre violation de l'ordre scientifique.....

Bordeaux, le 23 janvier 1869.

FIGURE 2 – Extrait de la lettre de Houël à Battaglini, de réaction à l'article de Wilson.

commentaires, d'éclaircissements, d'additions, quelques fois de rectifications, faites par un professeur bien pénétré du texte, non. » (Houël 1863)

Cette citation synthétise les idées de Houël, sur les *Éléments* d'Euclide et leur utilisation dans l'enseignement secondaire.

Le contexte de l'« affaire Wilson » fut source d'échanges entre Houël et Luigi Cremona (1830-1903), professeur à l'Institut polytechnique de Milan et membre de l'Institut lombard. Ils écrivirent notamment à propos de *Gli Elementi*, première version italienne des *Éléments* d'Euclide connue sous le nom d'édition de Florence, conçue pour les besoins de l'enseignement secondaire. Cette affaire, qui eut d'importants retentissements en Europe, montre tout d'abord la proximité de Houël avec le milieu mathématique italien (ainsi que son polyglottisme), sa connaissance des programmes de l'enseignement anglais, en somme son ancrage européen. Enfin, l'action de Houël dans cette « affaire » montre bien que la question de l'enseignement avec Euclide le concerne profondément, comme nous allons le préciser ci-après.

## La conception de l'enseignement de la géométrie élémentaire chez Houël

### L'« Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire »

L'« Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire » (Houël 1863). est la première publication de Houël à propos de géométrie et la seule où il est explicitement exprimé sa vision pédagogique : c'est un texte de 41 pages publié en 1863 dans le journal allemand *Archiv der Mathematik und Physik*, appelé également *Archiv de Grunert*. Il est composé de trois parties distinctes : l'introduction d'un peu moins de sept pages, le développement, de 17 pages et demie et formé de 29 paragraphes, qui expose les grandes lignes de la géométrie élémentaire, et un appendice de 17 pages rassemblant six notes assez diverses. Nous remarquons que cet article a une forme atypique puisque l'introduction fait presque la moitié de la taille du développement et que l'appendice est aussi long que le développement ; c'est donc que l'exposé central nécessite des explications, des commentaires et une contextualisation importantes.

### L'introduction

La première partie de l'introduction, d'une page et demie, traite de la notion d'axiome géométrique et du rôle de l'expérience dans l'élaboration des axiomes géométriques. L'auteur commence par faire remarquer que la question des fondements de la géométrie ne se cantonne pas à celle de l'indépendance du postulat des parallèles, comme le laisse penser la récurrence des tentatives de démonstrations : celle du mathématicien allemand Ferdinand Carl Schweikart en 1807 (Schweikart, 1807), de Joseph Diaz Gergonne en 1812-1813 (Gergonne, 1812-1813), de Legendre

en 1833 (Legendre, 1833), du mathématicien italien Camillo Minarelli en 1849 (Minarelli, 1849), du mathématicien belge Ernest Lemarle en 1857 (Lemarle, 1857) et du mathématicien français César Lambert en 1859 (Lambert, 1859). Houël y affirme d'ailleurs son point de vue : que le postulat des parallèles est indépendant des autres axiomes.

Ensuite, l'auteur compare les *Éléments* d'Euclide avec les *Éléments de géométrie* de Legendre (Legendre, 1794), best-seller des manuels de géométrie de l'enseignement secondaire de la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle en France. Pour lui, la version d'Euclide est supérieure<sup>12</sup> à celle de Legendre, car celle d'Euclide est « purement » géométrique, alors que celle de Legendre utilise l'algèbre. Dans la dernière partie de l'introduction, il inscrit son « Essai » (Houël, 1863) dans un programme d'écriture d'un nouveau traité de géométrie élémentaire, ayant pour base les *Éléments* d'Euclide, et dont la forme serait plus légère et les axiomes modifiés.

## Le développement

Dans le développement, Houël expose le contenu du Livre I des *Éléments* d'Euclide, sans les démonstrations, en énonçant de nouveaux axiomes qui lui semblent plus adéquats. Son but est de montrer où l'« expérience » permet d'appréhender les objets et aussi les axiomes, qui sont les fondements de la géométrie élémentaire. Il esquisse ainsi une manière de présenter les premières propriétés géométriques : sur les angles et les triangles notamment. Remarquons que le texte ne contient pas de figure. Houël explique tout d'abord que :

« La Géométrie est fondée sur la notion indéfinissable et expérimentale de la solidité ou de l'invariabilité des figures. Elle emprunte, en outre, à l'expérience un certain nombre de données que l'on appelle axiomes – nous verrons que les axiomes de la géométrie peuvent se réduire à quatre. » (Houël, 1863, p. 174)

Cette notion d'invariabilité des figures, que Houël explicite dès le début de son texte, sans être neuve, n'apparaît que peu dans les textes du XIX<sup>e</sup> siècle<sup>13</sup>. Cela montre en outre l'importance pour lui d'une vision cinématique de la géométrie. De plus, il insiste bien sur l'approche expérimentale de cette invariabilité.

Dans la suite, nous reprenons succinctement l'exposé afin d'y montrer l'ordre logique, les axiomes retenus, les définitions énoncées et comment l'expérience intervient.

Remarquons que Houël commence par définir la notion de surface. Il ne donne pas la définition de points, lignes, surfaces *a priori* mais montre comment on peut les introduire successivement :

« On appelle surface la limite de deux portions de l'espace. Nous nous élevons à l'idée abstraite de surface par la considération d'une enve-

---

12. Comme dans la tradition aristotélicienne de la poétique, le mélange des genres n'est pas envisageable.

13. Elle n'apparaît pas par exemple dans les *Éléments* de géométrie de Legendre (toutes éditions et rééditions confondues), ni dans les *Éléments* de géométrie de M.-E. Bède, publié en 1862, ni dans le *Traité de géométrie élémentaire* d'Eugène Rouché et de Charles de Comberousse de 1866.

loppe ou cloison matérielle, dont nous réduisons indéfiniment l'épaisseur. » (Houël, 1863, p. 174)

Via les surfaces, il définit la ligne :

« La limite de deux portions de surface s'appelle ligne. [...] On s'est élevé à l'idée abstraite de surface soit par la considération d'une tige très-mince, soit par celle de la rencontre de deux cloisons, ou de la trace laissée sur la superficie d'un corps par le contact d'une autre surface. » (Houël, 1863, p. 175)

En utilisant les lignes, il définit le point : « L'idée de point est venue de la considération d'un corps dont les dimensions étaient indéfiniment réduites. » (Houël, 1863, p. 175) Cette manière (dans cet ordre et en faisant appel à l'expérience) de présenter les premiers objets de la géométrie élémentaire se rencontre dans *L'Essai sur l'origine des connaissances humaines*<sup>14</sup> de 1746 d'Étienne Bonnot de Condillac (Condillac (De), 1746, chapitre 3).

Après avoir défini les objets de la géométrie, l'auteur remarque qu'il est possible d'inverser l'exposition, en définissant les points, puis les lignes et les surfaces, grâce à la notion de mouvement (géométrique) :

« On peut suivre l'ordre inverse, en introduisant plus explicitement l'idée de mouvement. On dira alors, en partant de l'idée de point, comme idée primitive, qu'une ligne est l'ensemble des positions occupées successivement dans l'espace par un point qui se meut. De même, on peut considérer une surface comme l'ensemble des positions occupées par une ligne qui se déplace, et qui en même temps peut changer de forme. » (Houël, 1863, p. 176)

Cette idée de mouvement géométrique fut déjà utilisée par Clairaut, en faisant tourner une droite autour d'un point. Le fait de considérer un point qui se meut pour engendrer une ligne apparaît chez le médecin parisien Adolphe Kircher en 1803, qui s'est inspiré des travaux de Legendre dans *La nouvelle théorie des parallèles* (Kircher, 1803, p. X). La même idée se trouve chez Hermann Günther Grassmann pour définir les vecteurs<sup>15</sup> dans *Ausdehnungslehre* de 1844.

Après avoir défini les points, lignes et plans, Houël propose son premier axiome :

« Axiôme I. Trois points suffisent, en général pour fixer dans l'espace la position d'une figure. » (Houël, 1863, p. 176). Là encore, l'auteur se réfère à une vision dynamique de la géométrie ; il justifie en outre cet axiome de manière expérimentale. Cet axiome va lui permettre de définir la notion de « ligne droite » c'est-à-dire de droite, à partir de l'image expérimentale des rayons lumineux. En effet :

« L'expérience nous apprend cependant que, lorsqu'une figure se meut, en tournant autour de deux points, supposés fixes, il y a un ensemble de points, situés sur une certaine ligne qui restent immobiles pendant que les autres se déplacent.

---

14. Il se positionne d'ailleurs contre Descartes, qui a pour méthode de décomposer les choses complexes en choses simples, tandis que Condillac s'attache aux idées.

15. Début du chapitre 1 de (Grassmann 1844).

Ces points sont disposés sur la route que suivrait un rayon lumineux pour passer de l'un des trois points fixes à l'autre (en supposant ces deux points situés dans un même milieu homogène). La ligne qui contient tous ces points, et qui nous apparaît comme la trajectoire habituelle des rayons lumineux, s'appelle la ligne droite. » (Houël, 1863, p. 177)

Houël en tire le deuxième axiome, sur l'existence de la droite et sa détermination par deux points quelconques :

« Axiôme II ; Il existe une ligne, appelée ligne droite, dont la position dans l'espace est complètement fixée par les positions de deux quelconques de ses points, et qui est telle que toute portion de cette ligne peut s'appliquer exactement sur une autre portion quelconque, dès que ces deux portions ont deux points communs. » (Houël, 1863, p. 177)

Pour l'existence du plan, il procède de manière analogue, à partir de l'expérience des eaux tranquilles et en tire son troisième axiome :

« L'expérience nous montre certaines surfaces, comme celle des eaux tranquilles, qui ne sont concaves d'aucun côté, et sur lesquelles une ligne droite, menée entre deux de leurs points, s'applique dans toute son étendue. Une telle surface s'appelle une surface plane. » (Houël, 1863, p. 177)

Il définit ensuite les angles, de manière dynamique :

« On peut se représenter un angle comme la quantité plus ou moins grande dont il faut faire tourner une droite autour d'un de ses points pour la faire passer d'une position à une autre, en supposant que le mouvement s'accomplisse dans le plan mené par deux positions. » (Houël, 1863, p. 177)

La notion d'angle conduit à la notion de direction des droites et à celle de parallélisme de deux droites. Il définit ensuite la notion de cercle et donne les principales définitions et les premières propriétés sur les angles. Après cela, Houël remarque que :

« La parallèle étant menée, si on la fait tourner tant soit peu autour de l'un de ses points, elle finira par atteindre la première ligne, lorsqu'on les prolongera suffisamment l'une et l'autre ; de sorte que la position de parallélisme est unique. C'est là un nouveau principe, qui n'est pas renfermé dans les axiômes précédents, et que nous énoncerons ainsi :

Axiôme IV. Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée. » (Houël, 1863, p. 178)

Houël parvient à l'idée du quatrième et dernier axiome, qui est le postulat d'Euclide ou postulat des parallèles, de nouveau par une vision dynamique. Nous notons qu'il indique sans commentaire ici que cet axiome « n'est pas renfermé dans les axiômes précédents » (Houël, 1863, p. 178). Il affiche clairement sa position quant à l'indépendance du postulat d'Euclide et des autres axiomes. Nous

rappelons qu'au début des années 1860, Houël n'a pas connaissance des travaux de Lobatchevski ni de Bolyai.

Ensuite, Houël étudie les triangles (quelconques et particuliers) sous le rapport des angles et des longueurs, tel Euclide dans son Livre I; il y utilise les notations modernes d'addition, soustraction, égalité des angles et indique constamment les références du texte d'Euclide.

## L'appendice

L'appendice contient sept notes très diverses dont les titres sont les suivants : Note 1. Sur l'invariabilité des figures (0,5 page) – Note 2. Sur le mouvement géométrique (0,5 page) – Note 3. Sur la ligne droite (3,5 pages) – Note 4. Sur l'unité angulaire (presque 4 pages) – Note 5. Sur la théorie des parallèles (une page environ) – Note 6. Sur la longueur des courbes (presque trois pages) – Note 7. Réflexions sur l'enseignement de la géométrie élémentaire (4 pages).

Les notes 1 et 2 reprennent et précisent des notions importantes utilisées dans le développement. Ainsi, dans la note 1, l'auteur définit au moyen de l'expérience la notion de figure géométrique (en lien avec l'invariabilité des figures dont il est question au début du développement). Dans la note 2, il précise ce qu'est le mouvement géométrique et insiste sur son importance pédagogique :

« L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire, l'idée du mouvement géométrique [...] Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. » (Houël, 1863, p. 179)

Dans la note 3, l'auteur explique dans un long paragraphe pourquoi prendre comme définition de la ligne droite le plus court chemin entre deux points est une mauvaise chose et pourquoi de nombreux traités depuis Archimède utilisent cette définition.

Dans la note 4, il établit le lien entre mesures d'angles et logarithmes et disserte sur les différentes unités habituelles, en faisant appel aux différentes tables numériques existantes.

Dans la note 5, il indique une autre manière de traiter la théorie des parallèles, sur la base de la direction, intéressante pédagogiquement. Ainsi, il propose :

« Deux droites de même direction ne peuvent se rencontrer, et sont parallèles. Cette proposition pourrait être prise pour axiôme, en considérant l'idée de direction comme une donnée fondamentale de l'expérience. [...] Cette manière de présenter la théorie des parallèles est plus simple et plus symétrique que la méthode ordinaire, et nous semble avantageuse pour un premier enseignement de la géométrie. » (Houël, 1863, p. 181)

Cette citation montre que Houël ne se limite pas à une seule exposition de la géométrie élémentaire mais qu'il montre toutes les possibilités d'exposition. Il indique notamment qu'il est possible de moduler l'ordre du discours, d'inverser des notions. En effet, la notion de droites parallèles est un cas particulier de la direction

de deux droites ; il n'est donc pas nécessaire de définir deux droites parallèles avant cela, comme on le fait en général.

Dans la note 6, il montre comment définir de manière élémentaire, c'est-à-dire seulement sur la géométrie et le principe de Duhamel du calcul infinitésimal, la notion de longueur de courbe.

La note 7 contient la conception houëllienne de la géométrie dans l'enseignement secondaire ; nous la détaillons ci-après.

## La conception houëllienne de l'enseignement de la géométrie élémentaire au lycée

Dans la note 7, il propose une manière d'enseigner la géométrie et également comment, à partir de cet enseignement, on peut introduire le reste des mathématiques. Pour cela, l'auteur commence par constater que :

« Tout le monde s'accorde à répéter que l'un des buts de l'enseignement des mathématiques doit être de donner plus de rectitude à l'esprit, en lui offrant un modèle de logique inflexible, appliquée à des principes certains. Pour que ce but soit atteint, il faut évidemment que l'enseignement ne se déparde jamais de cette rigueur qui distingue les mathématiques de toutes les autres sciences, et c'est là une condition essentielle pour que cette étude soit fructueuse, aussi bien comme gymnastique intellectuelle que comme source d'applications pratiques. Mais la rigueur, telle que nous la concevons, n'est nullement compromise par omission volontaire de la démonstration d'une proposition, tandis qu'elle l'est par l'introduction d'une démonstration fautive ou incomplète. La logique n'a rien à souffrir d'une lacune laissée provisoirement dans la suite des raisonnements, pourvu que cette lacune soit clairement indiquée, et qu'on ne cherche pas à la dissimuler. » (Houël, 1863, p. 182)

Dans cette citation, Houël s'inscrit dans une vision globale de l'enseignement des mathématiques et insiste sur l'importance de recourir à une logique « implacable » mais qui autorise, pour des raisons pédagogiques, à admettre provisoirement des résultats.

Fort de cette remarque sur la rigueur de l'enseignement mathématique, Houël propose un enseignement gradué de la géométrie élémentaire, de la manière suivante :

« Pour les commençants, il s'agit avant tout de se familiariser avec les figures et leurs dénominations, d'apprendre des faits, d'entrevoir leurs applications les plus simples et les plus immédiates, celles surtout qui se rapportent aux usages de la vie ordinaire. On devra donc, au début, multiplier les axiômes, employer au lieu des démonstrations, les vérifications expérimentales, l'analogie, l'induction, en ne laissant jamais oublier que ce mode d'exposition est essentiellement provisoire. On exercera l'élève aux tracés graphiques, au maniement des instruments, à la solution de divers problèmes de levé des plans et d'arpentage, à la



construction des figures en relief au moyen de fils ou d'argile plastique, à la représentation de ces figures à l'aide de leurs projections, etc., etc. Le maître saura proportionner au degré de développement intellectuel, la part plus ou moins grande qu'il pourra faire au raisonnement dans cette première ébauche des études géométriques ; et la grande variété d'applications qu'offrent la géographie, l'astronomie, l'arpentage, la stéréotomie, etc., suffira pour donner à cet enseignement un intérêt soutenu. » (Houël, 1863, p. 183)

Il propose que les débutants se familiarisent avec les notions géométriques, uniquement par l'expérimentation, c'est-à-dire essentiellement les tracés de figure et les manipulations concrètes. Ensuite, il explique comment ce premier degré d'enseignement de la géométrie permet d'introduire la notion de nombres entiers puis rationnels :

« On pourra mêler à la géométrie pure et appliquée l'étude des propriétés les plus simples des nombres entiers, que l'on représentera par des points régulièrement distribués sur des droites ou sur des plans, ou encore par des longueurs de droites, des aires de rectangles ou des volumes de parallélépipèdes. [. . .] On ne doit pas craindre de se répéter, dans un enseignement scientifique, et les élèves devront suivre successivement plusieurs cours gradués, dont chacun comprendra les matières du cours précédent, plus les nouveaux développements qu'on y ajoutera, en faisant au raisonnement une plus large part. Mais les programmes de ces cours successifs ne devront pas être tracés au hasard, indépendamment les uns des autres. Il faudra se garder, avant tout, d'altérer l'ordre des propositions pour substituer à une démonstration difficile un raisonnement plus simple en apparence et moins rigoureux. » (Houël, 1863, p. 190)

Dans ce paragraphe, Houël prolonge son programme de l'enseignement de la géométrie pour en faire un fondement du reste des mathématiques. Il propose un enseignement gradué dont « les cours élémentaires ne diffèrent des cours les plus élevés que par des suppressions », afin de préserver la logique des démonstrations. Il insiste également sur l'importance des applications aux autres disciplines.

Dans un second temps, il détaille le second degré de l'enseignement de la géométrie et du reste :

« Le second degré d'enseignement se rapprocherait, d'après nos idées, du système actuellement suivi dans les classes de science des lycées français. En géométrie, on adopterait la méthode euclidienne dans toute sa rigueur, et le cadre des études embrasserait à peu près les *Éléments* d'Euclide et les premières notions sur les sections coniques. On joindrait à cette étude celle des premières notions d'algèbre, en rattachant les règles de calcul algébrique aux propriétés des figures par des raisonnements analogues à ceux du second livre d'Euclide. [. . .] L'étude rigoureuse de la géométrie conduisant tout naturellement au principe des limites et à la considération de l'incommensurabilité, on serait alors amené à introduire les symboles appelés nombres incommensurables, et

à revenir sur la théorie des proportions, en l'étendant à des grandeurs continues, généralement incommensurables. On pourrait passer de là à l'étude des logarithmes et de la trigonométrie. » (Houël, 1863, p. 210)

Dans ce paragraphe, Houël argumente sur l'importance de la « méthode euclidienne » en géométrie et comment elle mène au calcul infinitésimal de manière naturelle. Il résume et il conclut cette note par :

« En un mot, la géométrie d'Euclide peut servir de texte à une exposition de tous les principes fondamentaux de l'analyse moderne, et l'on conçoit quel fruit un esprit intelligent pourrait retirer d'une telle préparation à l'étude de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal. » (Houël, 1863, p. 210)

## Conclusion

Cette dernière note de l'« Essai » (Houël, 1863) constitue à la fois un manifeste d'enseignement de la géométrie et du reste des mathématiques, par l'entremise de l'étude adaptée des *Éléments* d'Euclide. Cette note nous éclaire sur le profond sens pédagogique de Houël et sur les motivations qui le poussent à écrire son texte, qui se trouve au centre de ses préoccupations pédagogiques et fondamentales. Le point de vue de Houël allait à contre-courant des *Éléments* de Legendre (Legendre, 1794) et donc de l'enseignement dispensé dans les lycées dans les années 1860 ; Houël prônait donc un retour à Euclide, mais à un Euclide reformulé (Barbin, Menghini, Moktefi, 2013, p. 58-63).

On peut voir également en Houël un précurseur de la réforme des mathématiques de l'enseignement secondaire de 1902. En effet, comme on peut le lire dans un texte officiel de ladite réforme :

« L'enseignement de la géométrie (dans le premier cycle) doit être essentiellement concret... Au point de vue de l'explication des faits, le professeur devra faire appel à l'expérience et admettre résolument comme vérité expérimentale tout ce qui semble évident aux enfants... on peut, et cela est désirable, faire sentir dans certains cas, la nécessité d'une démonstration ; mais il ne faut donner cette dernière que si l'élève est convaincu qu'elle est indispensable. On aura ainsi l'occasion de montrer qu'il y a deux certitudes d'ordres différents ; l'une expérimentale, qui appartient aux sciences physiques ; l'autre logique qui est celle des vérités mathématiques ; mais il y aurait un grave inconvénient à donner à cette dernière une importance qu'elle n'a pas dans la réalité et à jeter le discrédit sur la première qui, il faut bien l'avouer, est la seule que nous possédions, puisque les principes mathématiques n'ont pas d'autres fondements, tout au moins pour les élèves<sup>16</sup>. »

L'utilisation du mouvement géométrique, cher à Houël, y fit alors également son entrée officielle dans les programmes officiels.

---

16. Cité dans (Belhoste 1990).

Enfin, les conceptions de Houël sont opposées aux préconisations de la réforme des mathématiques modernes de 1969 et c'est à cette occasion que le texte (Houël 1863) fut exhumé par Rudolph Bkouche et aussi Évelyne Barbin, dans un IREM... En effet, la création des IREM apparut par opposition au point de vue des mathématiques modernes : le point de vue de l'abstraction, du structuralisme dans lequel les mathématiques sembleraient ne pas avoir d'histoire. Dès 1982, Rudolph Bkouche publia des articles notamment en lien avec l'histoire des géométries non euclidiennes, en utilisant les textes (notamment) de Houël. Il semblerait que la réforme actuelle reprenne (en partie) les idées de celle de 1902, dans le sens d'un retour à l'expérimentation et à l'histoire des mathématiques.

## Références bibliographiques

- BARBARIN Paul, 1926, « La correspondance entre Houël et De Tilly », *Bulletin des sciences mathématiques*, t.I, p. 50-64.
- BARBIN Évelyne, MENGHINI Marta et MOKTEFI Amirouche, 2013, « Les dernières batailles d'Euclide : Sur l'usage des Éléments pour l'enseignement de la géométrie au XIX<sup>e</sup> siècle », in BARBIN Évelyne MOYON Marc, (éd.), *Les Ouvrages de Mathématiques dans l'Histoire*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, p. 58-63.
- BELHOSTE Bruno, 1990, « L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XX<sup>e</sup> siècle. La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes », *Revue d'histoire des sciences*, 43, n°4, p. 371-400.
- CONDILLAC (DE), Étienne Bonnot, 1746, *L'Essai sur l'origine des connaissances humaines*, Paris, Libraires associés.
- GERGONNE Joseph Diaz, 1812-1813, « Essai sur la théorie des parallèles », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t.III, p. 353-356.
- GRASSMANN Hermann Günther, 1844, *Die lineale Ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die ubrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erlautert*, Leipzig, O. Wigand.
- HOÜEL Jules, 1855, *Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique*, Première thèse pour le doctorat, Paris, Mallet-Bachelier.
- HOÜEL Jules, 1855, *Application de la méthode d'Hamilton au calcul des perturbations de Jupiter*, Seconde thèse pour le doctorat, Paris, Mallet-Bachelier.
- HOÜEL Jules, 1863, « Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie », *Archiv der Mathematik und Physik*, t.XL, p. 171-211.
- HOÜEL Jules, 1866, « Études géométriques sur la théorie des parallèles » par N.I. Lobatchewsky, suivie d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher, Traduction, *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t.IV, 1<sup>er</sup> cahier, p. 83-128.
- HOÜEL Jules, 1868, « La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir *a priori*) ; suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'axiome XI. Par Jean Bolyai, capitaine au corps du génie dans

- l'armée autrichienne ; précédé d'une notice sur la vie et les travaux de W. et J. Bolyai, par M. Fr. Schmidt, architecte à Temesvár », Traduction, *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t.V, p. 189-248.
- HOÜEL Jules, 1869, « L'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t.VIII, 1869, p. 278-283.
- HOÜEL Jules, 1869, « Estratto di una lettera del Prof. Houël al redattore », *Giornale di matematiche*, t.VII, p. 50.
- HOÜEL Jules, 1870, « Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulatum d'Euclide », *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles*, t.VIII, Procès-verbaux, p. XI-XVIII.
- HOÜEL Jules, 1875, « Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes », *Archiv matematiky a fysiky*, Prague, p. 81-91.
- KIRCHER Adolphe, 1803, *La nouvelle théorie des parallèles*, Paris, Courcier.
- LAMBERT César, 1859, *Théorie des parallèles*, Tours.
- LEGENDRE Adrien-Marie, 1794, *Éléments de géométrie*, Paris, Firmin Didot.
- LEGENDRE Adrien-Marie, 1833, « Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle », *Mémoires de l'Académie royale de l'Institut de France*, t.XII, p. 367-410.
- LEMARLE Ernest, 1857, *Démonstration du postulatum d'Euclide*, Bruxelles, Librairie polytechnique.
- MINARELLI Camillo, 1849, « Théorie des parallèles », *Nouvelles annales de mathématiques*, t.VIII, p. 312-314.
- PLANTADE François, 2018, Thèse de doctorat de 3<sup>e</sup> cycle de l'université de Nantes sous la direction d'Évelyne Barbin, *Jules Houël et la circulation des mathématiques dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle : les réseaux français et européens d'un universitaire de province*.
- SCHWEIKART Ferdinand Carl, 1807, *Die Theorie des Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Goemetrie*, Iéna et Leipzig, Christian Ernst Gabler.
- VOELKE Jean-Daniel, 2005, *La renaissance des géométries non euclidiennes entre 1860 et 1900*, Bern, Peter Lang.
- WILSON James Maurice, 1868, *Elementary geometry*, part I, Cambridge, Macmillan.
- WILSON James Maurice, 1868, « Euclide come testo di geometria elementare », *Giornale di matematiche*, t.VI.

## Tours et détours de l'enseignement de la géométrie au XX<sup>e</sup> siècle

Anne BOYÉ

### Introduction

L'enseignement de la géométrie a connu de nombreux soubresauts au cours du XX<sup>e</sup> siècle, en France et ailleurs, posant des questions récurrentes : pourquoi enseigner la géométrie ? Quelle géométrie ? Comment l'enseigner ? Géométrie pour tous – et toutes ?

En ce début de XXI<sup>e</sup> siècle, ces questions restent pertinentes. Les débats d'hier éclairent-ils ceux d'aujourd'hui ?

Pour apporter quelques réponses, nous proposons une promenade à travers les programmes de l'enseignement secondaire<sup>1</sup>, un certain nombre de manuels, les échanges relatés par exemple dans la revue *L'enseignement mathématique*, ou des extraits significatifs de la revue de l'APMEP.

### Premier moment : la réforme de 1902-1905-1907

#### Le contexte international

Le passage du XIX<sup>e</sup> siècle au XX<sup>e</sup> siècle constitue un moment de crise pour l'enseignement des mathématiques dans le monde entier, dans un contexte d'internationalisation des sciences. L'année 1908 voit la création, à Rome, de la CIEM (Commission internationale de l'enseignement des mathématiques), à la demande du CIM (Congrès International des Mathématiciens), né lui en 1897, à Zurich. En

1. Le lecteur ou la lectrice souhaitant élargir le sujet aux autres domaines des mathématiques, aux sciences en général pourra consulter avec profit des ouvrages spécifiques sur les programmes et l'enseignement comme (Belhoste, 1995), (D'Enfert, 2003), (Gispert, Hulin, Belhoste, 1996), (Gispert, Hulin, Robic, 2007) ou (Hulin, 2007).

1899 Charles Ange Laisant et Henri Fehr ont fondé la revue *L'enseignement mathématique*, lieu de réflexion et d'échange à l'échelle internationale. Les fondateurs émettent aussitôt le projet d'une grande enquête sur l'enseignement des mathématiques, aux différents niveaux, tant sur le plan des contenus, des méthodes, que de l'organisation de cet enseignement.

Très rapidement se font jour trois lignes argumentatives pour justifier les évolutions des curricula de géométrie dans les enseignements de niveau secondaire<sup>2</sup> :

- tenir compte des domaines de la vie pratique, et développer en particulier l'intérêt pour les questions techniques et économiques ;
- développer les conceptions spatiales en présentant la géométrie de façon plus intuitive (ou expérimentale) et en centrant l'étude de la géométrie sur celle de transformation géométrique ;
- introduire la pratique des représentations graphiques.

Nous notons aussi de nombreux échanges sur les « méthodes actives », sur l'importance à accorder à la rigueur, . . . , selon les différents niveaux d'enseignement, et face à l'accroissement des élèves dans l'enseignement moyen.

## Le contexte national

À cette même époque, en France, autour des années 1900, s'engage un débat national sur l'avenir de l'enseignement secondaire, sur sa mission, sur son fonctionnement, au point qu'une enquête est confiée à une commission parlementaire. Il en résulte une réforme d'ensemble, en 1902, qui donnera à l'enseignement secondaire un visage qu'il conservera jusqu'à la fin des années 1950.

L'idée centrale qui préside aux débats est celle de l'adaptation de l'enseignement secondaire au monde moderne. Carlo Bourlet le souligne particulièrement dans sa conférence à la CIEM de 1908 sur *La pénétration réciproque des mathématiques pures et appliquées dans l'enseignement secondaire* :

« L'enseignement des mathématiques, dans nos lycées, collèges, gymnases de tous pays, passe actuellement par ce que d'aucuns nomment une crise et qui n'est en somme qu'une fièvre de croissance, un malaise né de la rapidité même de l'évolution du savoir humain. [...] L'industrie, fille de la science du XIX<sup>e</sup> siècle règne en maîtresse dans le monde. Notre devoir impérieux est donc de préparer nos jeunes gens, à connaître, à pratiquer et à faire progresser les sciences expérimentales. » (Bourlet, 1910)

Et, de façon durable, les sciences se voient placées au même rang que les disciplines littéraires. Il s'agit donc de fonder des « humanités scientifiques » aussi formatrices que les humanités littéraires. Cet enseignement doit tenir compte du progrès des sciences, tout en restant accessible aux élèves quel que soit leur niveau. Ceci implique une réforme importante des méthodes et des programmes, en réaction contre des contenus considérés comme routiniers, dogmatiques et abstraits.

---

2. Pour une étude détaillée des contenus des articles de *L'Enseignement mathématique* sur la géométrie, on pourra consulter (Bkouche, 2003).

L'enseignement dit secondaire (de la sixième à la première, puis classe de philosophie ou de mathématiques) se donne dans les collèges<sup>3</sup> et les lycées et s'adresse au demeurant à une très petite minorité d'élèves : environ 5% d'une classe d'âge et uniquement des garçons. C'est un enseignement payant, qui est sanctionné par le baccalauréat. La majorité des enfants s'arrêtent à la fin de l'école primaire, à 12 ans. L'élite des classes populaires va dans les écoles primaires supérieures ou dans des cours complémentaires. Ils et elles peuvent alors obtenir, au bout de 4 ans, le brevet simple ou le brevet d'enseignement primaire supérieur. Il existe aussi un enseignement technique, de 11 à 15 ans, à la fois manuel et théorique. Depuis 1880 les filles ont leurs lycées publics, d'une durée de 5 ans, avec des programmes spécifiques, en particulier en mathématiques, qui ne leur permettent pas de passer le baccalauréat. Il faudra attendre 1924, pour que les filles aient accès au même enseignement que les garçons.

Depuis 1902, dans les collèges et lycées de garçons, se succèdent un premier cycle, de la sixième à la troisième, puis un second cycle, deux ans, sanctionné par le premier bac, suivi de la classe de philosophie ou de mathématiques, et le second bac. Dans chaque cycle existent plusieurs filières, plus littéraires, ou plus scientifiques. Les mathématiques y sont toujours présentes, avec des programmes plus ou moins développés et des méthodes en conséquences<sup>4</sup>.

## Les programmes, les contenus, les méthodes

La réforme de 1902 subira des ajustements en 1905 puis en 1907. Nous en retraçons les grands principes.

Voici ce que l'on peut lire, en ce qui concerne la géométrie dans les instructions relatives à l'enseignement des mathématiques (31 mai 1902), pour les premiers cycles A et B (plus littéraires) :

« Les exercices pratiques devront être multipliés et porter sur des données réelles et non factices. La théorie sera réduite à des explications faites sur des exemples concrets, tout au moins au début ; ce n'est que peu à peu que l'on pourra avec de grandes précautions habituer les élèves aux notions abstraites les plus simples, en montrant sur des exemples la nécessité d'une définition précise, d'un raisonnement purement logique, en insistant à l'occasion sur les erreurs que l'on peut commettre si l'on raisonne sur des objets mal définis, sur des figures dont on n'a pas déterminé exactement les éléments et leur position. »  
(Cité dans Belhoste, 1995, p. 672)

Et un peu plus loin :

« Le peu de temps dont dispose le professeur ne lui permettant pas de développer longuement son cours, il devra surtout s'attacher à donner en géométrie une idée de la forme des corps et pourra laisser de côté s'il le juge à propos, toute théorie un peu abstraite. [...] L'important est

---

3. Les collèges (municipaux jusqu'en 1960) et les lycées (d'État), comportent, jusqu'en 1975, des classes de la sixième à la terminale.

4. Sur les différents cycles, voir (Belhoste, 1990), (Belhoste, 1995) et (D'Enfert, 2003).

qu'il forme des élèves pouvant comprendre les mathématiques ; qu'ils en sachent beaucoup n'est pas nécessaire, ce qui est indispensable c'est qu'ils aient compris les principes et qu'ils soient habitués au raisonnement logique. » (Cité dans Belhoste, 1995, p. 675)

A contrario pour le second cycle C et D (scientifique) :

« Les programmes ont été conçus pour permettre aux élèves de posséder à fond les éléments de géométrie, d'algèbre et de trigonométrie. Les études faites dans le premier cycle ayant préparé les élèves à recevoir un enseignement logique, on ne perdra pas de vue que c'est en faisant de nombreux exercices que l'on habitue les élèves à manier avec sûreté les éléments dont ils disposent. » (Cité dans Belhoste, 1995, p. 675)

Et dans la classe de mathématique (terminale) :

« Une heure au moins par semaine doit être consacrée exclusivement aux problèmes, aux épreuves pratiques de calcul, de géométrie descriptive, de mécanique et aux exercices sur le cours. » (cité dans Belhoste, 1995, p. 676).

Le programme de géométrie est de fait complètement transformé, par rapport à ce qui précédait. Il sera influencé, particulièrement dans la refonte de 1905, par les idées de Charles Méray, professeur à la faculté des sciences de Dijon, qui sont expérimentées et plébiscitées à l'étranger ainsi qu'en France, dans quelques établissements, Écoles normales, Écoles primaires supérieures, quelques écoles dites « nouvelles », telle l'École des Roches<sup>5</sup>.

La « méthode de M. Méray pour l'enseignement de la géométrie » est exposée dans un article de *L'enseignement mathématique* par Élie Perrin, en 1903 :

« 1° l'enseignement simultané de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace fait gagner un temps très sensible sur la durée totale de l'enseignement géométrique ;  
2° la nouvelle méthode rétablit la concordance en bien des points, entre les diverses matières du programme de mathématiques et celles des enseignements théoriques et pratiques qui s'y rattachent ;  
3° elle fait appel à l'intelligence des élèves plutôt qu'à leur mémoire ;  
4° elle les habitue à penser par eux-mêmes et non plus seulement par leur professeur ou par un livre. » (Perrin, 1903)

Carlo Bourlet insistera sur la nécessité d'instituer un mode d'exposition plus concret et plus accessible, sans abandonner la rigueur. « Classons l'antique édifice d'Euclide, admirable d'harmonie et de perfection, au rang des monuments historiques, et bâtissons, suivant un plan nouveau, une œuvre homogène conforme aux nécessités du jour. » (Bourlet, 1910, p. 384) La notion de déplacement occupera une place centrale.

---

5. École privée fondée en 1899, qui est basée sur l'autonomie des élèves, et la pédagogie dite active.



« La possibilité du déplacement étant la condition primordiale de l'existence même de la géométrie, n'est-il pas naturel de faire de ce déplacement le moyen de recherche et de démonstration dans notre nouvelle méthode ? [...] Et alliant sans cesse l'exercice graphique à la démonstration théorique, nous les [les déplacements] réaliserons sous les yeux des élèves avec les instruments du dessin. La théorie et l'application marcheront ainsi de front. » (Bourlet, 1910, p. 385)

Cette géométrie débouche de fait sur la théorie des groupes de transformations. Et, à l'instar d'Émile Borel, ou de quelques autres mathématiciens de haut rang, il met en pratique ses idées dans des manuels à l'usage du secondaire, et nous lisons dans l'avertissement de son *Cours abrégé de géométrie* de 1907 :

« La réforme de méthode consiste dans l'abandon de la Géométrie classique d'Euclide pour lui substituer une Géométrie plus moderne où les déplacements jouent un rôle prépondérant. Cette nouvelle méthode consiste essentiellement à rattacher la notion de parallélisme à celle de translation. Elle présente le double avantage d'être beaucoup plus intuitive, et, par suite, plus facilement accessible aux jeunes cerveaux dans un ordre de complication graphique croissante. » (Bourlet, 1907)

Émile Borel, dans *L'enseignement mathématique*, en 1905 avait déjà précisé :

« Il s'agit de la réforme de l'enseignement de la géométrie élémentaire. Je crois que presque tout le monde est d'accord pour reconnaître que les méthodes purement euclidiennes ne sont plus en rapport avec les progrès des mathématiques modernes. "La géométrie est l'étude du groupe des mouvements" cette vérité fondamentale doit de plus en plus pénétrer l'enseignement. » (Borel, 1905, p. 326)

Très étrangement nous retrouverons presque les mêmes mots dans la période dite des « maths modernes » que nous aborderons un peu plus loin, en dépit cependant de points de vue très différents. Les transformations ici sont liées de façon explicite au mouvement, qui marque une conception dynamique de la géométrie, contrairement au point de vue statique de la géométrie d'Euclide. La géométrie est considérée comme une science expérimentale. Et il s'agit bien de géométrie élémentaire. Soulignons que les exercices graphiques ont une très grande place et que le dessin géométrique occupe la majeure partie de l'enseignement en classe de 6<sup>e</sup>. En revanche, même si la géométrie « plane » est plongée dans l'espace, les ajustements de 1905 et 1907 dissocieront les deux enseignements.

Ce siècle verra la naissance des recherches en psychologie de l'enfant, qui influenceront largement les idées sur l'enseignement. En ce début du XX<sup>e</sup> siècle, deux personnages accompagnent ces réflexions : John Dewey (1859-1952) et Edouard Claparède (1873-1940). John Dewey, psychologue et philosophe américain, est inventeur du « Hands-on learning », apprentissage par l'action. Avec le neurologue et psychologue suisse Edouard Claparède, ils sont souvent considérés comme les inspirateurs de « l'éducation nouvelle »<sup>6</sup>.

---

6. Pour en savoir plus sur ces deux auteurs et ce mouvement du début du siècle qui aura de larges prolongations, vous pouvez consulter (Dewey, 1900) ; (Dewey, 1916) ; (Claparède, 1905).

## Quelques exemples marquants au fil des manuels

Dans les programmes officiels du 27 juillet 1905, on peut lire :

« Un appel constant à la notion de mouvement semble devoir faciliter l'enseignement de la géométrie ; c'est ainsi que le parallélisme sera lié à la notion expérimentale de translation, que l'étude des droites et plans perpendiculaires résultera de la rotation ; l'idée d'égalité sera liée à celle du transport des figures, que l'on précisera en introduisant la notion simple d'orientation. »

Prenons par exemple, le manuel de Carlo Bourlet, cité plus haut. Du chapitre II destiné aux élèves de cinquième B et de quatrième A <sup>7</sup>, nous extrayons la partie translation parallèle qui est particulièrement évocatrice.

« Définition – Le plus simple des déplacements est la translation rectiligne dont le glissement du T le long de la planche, ou le glissement d'une équerre le long d'une règle nous fournissent une idée très exacte. Précisons.

Soit  $P$  un plan fixe et  $D$  une droite fixe tracée dans ce plan. Imaginons un second plan  $p$  et une droite  $d$  tracée dans ce plan  $p$ . Plaçons le plan  $p$  sur le plan fixe  $P$  de façon que la droite  $d$  coïncide avec la droite  $D$ . Nous pourrons alors faire glisser le plan mobile  $p$  sur le plan fixe  $P$  de façon que la droite  $d$ , appelée glissière mobile, glisse sur la droite  $D$ , appelée glissière fixe ; nous réalisons ainsi un mouvement de translation rectiligne. » (Bourlet, 1907, p. 65-67)

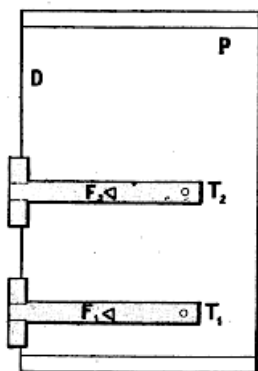


FIGURE 1 – Translation rectiligne le long de la planche

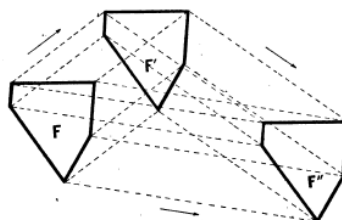


Fig. 57. — Composition de deux translations.

FIGURE 2 – Composition de deux translations

Nous trouvons à la fois le côté expérimental, la géométrie plane plongée dans l'espace, et bien sûr la notion de mouvement.

<sup>7</sup>. Le premier cycle des lycées est alors partagé entre les sections A avec latin et les sections B sans latin.

Un peu plus loin nous lirons :

« 86 – Principe<sup>8</sup> – Dans toute translation rectiligne, un point du plan mobile (ou de la figure mobile) décrit une droite et cette droite est une glissière.

Pour mettre ce principe en évidence expérimentalement, plaçons sur une planche une règle  $R$  que nous maintiendrons fixe ; puis à côté d'elle, une seconde règle  $R'$  identique. Traçons au crayon la droite  $D$  suivant le côté libre  $G'$  de la règle  $R'$ . Faisons glisser la règle  $R'$  le long de la règle  $R$  dans le sens de la flèche  $f$ . Nous constatons : 1° qu'un point quelconque  $M$  du bord  $G'$  de la règle  $R$  décrit la droite  $D$  ; 2° que la droite  $G'$  coïncide toujours avec  $D$  sur laquelle elle glisse.  $D$  est donc une glissière. » (Bourlet, 1907, p. 69-70)

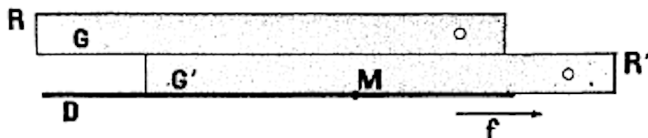


FIGURE 3 – Une droite est une glissière

« 88 – Droites parallèles – définition – deux droites, situées dans un même plan sont dites parallèles lorsque l'une se déduit de l'autre par une translation. » (Bourlet, 1907, p. 70)

Nous sommes dans un monde étrange, d'autant plus que le vocabulaire est en gestation. Chaque manuel a le sien. Carlo Bourlet, par exemple, fait précéder son cours par une « note sur la terminologie » :

« Quelques-uns des termes employés dans cet ouvrage [...] méritent quelques explications justificatives. Au lieu des mots demi-droite et demi-plan, j'emploie les mots semi-droite et semi-plan, pour éviter toute confusion dans l'esprit des élèves qui sont trop facilement portés à croire qu'une demi-droite est une moitié de droite. Une droite indéfinie n'a pas de moitié. » (Bourlet, 1907, p. VII – VIII)

Il continuera sur l'opportunité de trouver des mots pour cercle ligne et cercle surface, etc. toute chose qui ne déparerait pas dans les rubriques « mots » de l'APMEP<sup>9</sup> quelques soixante-dix ans plus tard, lors de la réforme dite des maths modernes.

Dès les chapitre IV et suivants, destinés aux élèves de quatrième B et de troisième A, nous retrouvons du « classique ». La présentation des similitudes ou des

8. Carlo Bourlet a précisé qu'il nommerait principe un théorème dont la démonstration serait peu accessible aux élèves de ce niveau, mais dont ils doivent savoir que cela peut se démontrer.

9. La collection « mots » comporte 9 tomes, publiés par l'APMEP, de 1974 à 1992. Il s'agissait au départ de définir les mots mathématiques, dont beaucoup étaient nouveaux pour les enseignantes et enseignants. Ils sont accessibles sur *Publimath*.

homothéties, pourrait presque se trouver dans nos livres actuels, sans grands changements.

Le petit dessin est la réduction à l'échelle  $1/2$  du grand dessin; et inversement le grand dessin est l'agrandissement à l'échelle double du petit dessin.

Ce sont là des figures semblables. L'un des procédés les plus simples pour obtenir une figure semblable à une figure donnée est l'homothétie qui est un procédé de transformation analogue à celui de la projection, qu'on emploie pour effectuer les agrandissements en photographie.

315. — **Définition de l'homothétie.** — Étant donnée une figure (F) (fig. 199), un point O dit centre d'homothétie

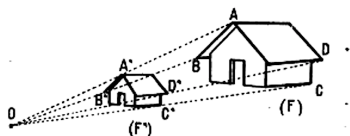


Fig. 199. — Figures homothétiques.

et un nombre fixe  $k$  appelé rapport d'homothétie, si à

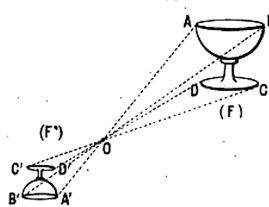


Fig. 200. — Figures homothétiques.

chaque point A de la figure (F) on fait correspondre un point A' situé sur la droite OA tel que

$$\frac{OA'}{OA} = k;$$

si, en outre, les segments OA' et OA sont de même sens, on

obtient une figure (F') dite homothétique directe de la figure (F); si, au contraire (fig. 200), les segments OA' et

OA sont de sens contraires, on obtient une figure (F') dite homothétique inverse de la figure (F).

En d'autres termes :

Deux figures (F) et (F') sont dites homothétiques, si à tout point A de (F) correspond un point A' de (F') tel que :

1° La droite AA' passe par le centre O d'homothétie;

2° Le rapport  $\frac{OA'}{OA}$  soit égal au rapport  $k$  d'homothétie;

3° Les segments OA' et OA soient de même sens si l'homothétie est directe, ou de sens contraires si l'homothétie est inverse.

Les points A et A' qui se correspondent dans la transformation sont dits homologues.

## FIGURE 4 – Homothéties

La notion de similitude est une idée fondamentale de la géométrie, à tel point que le rapporteur de l'ouvrage d'Émile Borel dans *L'enseignement mathématique* a été marqué par une remarque<sup>10</sup> qui suggère de la prendre comme postulat :

« La troisième partie commence par la théorie de la similitude, présentée comme nous l'avons déjà vu dans l'introduction, en temps qu'idée intuitive toute naturelle. Deux figures semblables sont la même forme, non les mêmes dimensions et M. Borel remarque très justement qu'admettre l'existence de telles figures revient à admettre le postulat d'Euclide. N'y aurait-il pas par suite avantage, au moins au point de vue de la simplicité, à postuler l'idée de similitude ? » (Buhl, 1906)

Pour terminer ce tour d'horizon de cette première période, nous nous devons de dire un mot de l'enseignement des jeunes filles, en laissant la plume à Melle Amieux<sup>11</sup>, auteure de *L'enseignement des jeunes filles*, citée et commentée dans *L'enseignement mathématique*, en 1912 :

10. Cette remarque apparaît en note de bas de page de (Borel, 1905b page 232.)

11. Anne Amieux (1871-1961), fut directrice de l'ENSJF de Sèvres de 1919 à 1936. Elle s'est beaucoup préoccupée des méthodes d'enseignement, en particulier de celui des jeunes filles. *L'enseignement des jeunes filles est un rapport* élaboré pour la sous-commission française de la commission internationale de l'enseignement mathématique, au congrès de 1911.

« Mlle Amieux expose ensuite l'organisation générale des 2 cycles [...] Le programme de chaque année d'étude est accompagné de considérations sur le but de l'enseignement et la manière dont le programme est interprété.

En géométrie, pendant les deux premières années l'enseignement doit "initier les élèves aux constructions et à la connaissance des formes géométriques et leur permettre de mieux appliquer le système métrique". La troisième année a pour but "d'initier les élèves à la culture logique de l'intelligence, exercer leur faculté de raisonnement, les habituer à la rigueur de la pensée, à la précision et à la clarté de l'expression". La question de la valeur respective des trois méthodes d'Euclide, de Méray et de la méthode mixte est encore très controversée, aussi toute liberté est laissée au corps enseignant. » (Masson, 1912, p. 65)

Jusqu'à l'unification des deux enseignements secondaires féminin et masculin, en 1924, les lycées de jeunes filles sont souvent, parce que soumis à moins d'exigences, des terrains d'expérimentation, pas seulement en géométrie. Nous pourrions faire la même remarque sur les établissements d'enseignement professionnels, plus axés sur les exercices pratiques, ou les écoles primaires supérieures.

Nous devrions bien sûr évoquer aussi les programmes des classes du second cycle, celui de la classe terminale de mathématiques en particulier, où tout ce qui a été appris en premier cycle est réétudié de façon cette fois théorique, et assez classique, et où nous trouvons aussi une introduction poussée à ce que l'on nomme couramment la géométrie supérieure : puissance d'un point par rapport à un cercle ou une sphère, axes et plans radicaux, inversion, projections centrales, perspective, ... Et bien sûr les coniques, sans oublier la géométrie descriptive.

Nous devrions aussi évoquer les classes littéraires, y compris la classe de philosophie, dont le programme de mathématiques n'a rien de négligeable.

Cette réforme des programmes, particulièrement ceux du premier cycle, ne va pas tarder à avoir ses détracteurs. En 1923, Pierre Chenevier exprime par exemple dans l'introduction de son *Cours de géométrie* ses réticences sur l'utilisation des transformations :

« [...] j'ai dû choisir entre l'édifice euclidien et celui de Méray. De ce que la géométrie est le groupe des déplacements d'aucuns ont conclu qu'il fallait introduire ces notions dès le début. C'est en effet parfait, harmonieux et simple ; mais cela ne rend pas en matière d'enseignement élémentaire. Cette méthode est parfaite pour coordonner des connaissances acquises, pour classer des choses déjà apprises lors d'un de ces arrêts que l'on utilise pour faire un retour en arrière et dresser un bilan de ses connaissances en épurant son acquis, mais l'expérience a montré que, pour des enfants qui débutent, elle dépasse leurs moyens. [...] Quant à la translation, je n'ai pas voulu en faire un point de départ, parce que c'est le déplacement le plus mystérieux pour l'enfant. [...] Si l'enseignement doit reposer sur un mystère, s'il faut avoir la foi pour continuer, supprimons la géométrie de nos programmes. Je suis donc redevenu euclidien pour les parallèles. » (Chenevier, 1923)

Nous pourrions presque arrêter là nos tours et détours de l'enseignement de la géométrie au XX<sup>e</sup> siècle. Cette période de 1900 à 1925 résume presque les réformes successives qui secoueront les années suivantes, particulièrement pour la géométrie.

## Deuxième moment : 1925-1960

### L'égalité scientifique

Hormis la remise en question des programmes de 1905, des événements extérieurs, et non des moindres, vont, au moins provisoirement, bouleverser l'organisation de l'enseignement secondaire. La Grande Guerre a laissé des traces, économiquement, et politiquement. Un souci de défendre la Culture Française, exacerbé par un certain nationalisme, fait naître la nécessité de « relever les humanités agonisantes ». En 1919, avec le succès électoral du « Bloc national », le ministre de l'instruction publique Léon Bérard, propose d'abandonner la réforme de 1902 et de rétablir l'obligation de la culture classique. La nécessité cependant de fournir à toutes<sup>12</sup> et tous un bagage scientifique va donner jour, en 1925, à la réforme de « l'égalité scientifique ». Jusqu'en classe de première inclusivement, toutes les sections reçoivent les mêmes horaires et les mêmes programmes scientifiques.

« Mais, du moment que les programmes scientifiques sont les mêmes pour tous, il faut bien qu'ils soient réduits à ce qu'ils comportent d'essentiel pour la formation de l'esprit, et dégagés de toutes les connaissances qui ne sont que des connaissances, qui n'ont qu'une importance technique ou n'intéressent que des spécialistes. [...] Aussi la méthode de "redécouverte" est-elle de plus en plus en faveur dans les classes où les horaires et les programmes permettent son application : les tâtonnements, les recherches souvent infructueuses des élèves sur une question déterminée donnent une image, évidemment sommaire, mais cependant réelle, des difficultés de la recherche scientifique ; les communications entre maîtres et élèves, plus directes et plus étroites que dans l'enseignement dogmatique, fournissent au professeur des occasions fréquentes de faire comprendre que la science, loin d'être une œuvre morte, est au contraire un corps vivant, aux aspects et aux transformations multiples. La construction logique, que réalise la mise au point des résultats acquis un peu au hasard des découvertes est rendue ici nécessaire non seulement pour la satisfaction de l'esprit, mais aussi pour étayer de nouvelles recherches, pour permettre un progrès nouveau. » (Iliovici, Desforge, 1933, p. 234-235)

Cette longue citation résume la situation et permet de comprendre les vives réactions qui surgiront en particulier du côté des enseignants et enseignantes de mathématiques. La classe terminale de mathématiques sera aussi en conséquence soumise à un programme extrêmement chargé, puisqu'il faudra rattraper tout ce qui n'aura pas été vu précédemment. L'enseignement technique, et l'enseignement

---

12. Rappelons qu'à partir de 1924, les lycées de jeunes filles ont les mêmes programmes que les lycées de garçons.

dans les écoles primaires supérieures ont subi, eux, très peu de changement, et les méthodes de l'enseignement secondaire se rapprochent de celles pratiquées dans ces autres établissements.

Le dogme de l'égalité scientifique sera abandonné en 1941. Et dès la fin de la guerre, la réforme de 1945 établit le nouveau visage de l'enseignement secondaire et de nouveaux programmes.

## L'après-guerre

Une des nouveautés de 1945 sera la création de la classe de sciences expérimentales. En géométrie, dans cette classe, les vecteurs trouvent une place importante, ainsi que la trigonométrie et la cosmographie.

Pour le reste, le premier cycle est divisé entre enseignement moderne court<sup>13</sup>, qui permet d'arrêter à la classe de troisième et enseignement classique. Le programme de géométrie est assez classique, basé sur les « cas d'égalité des triangles », et les « cas de similitudes ». On y trouve en particulier une initiation aux vecteurs, de la géométrie analytique, et une introduction aux divisions harmoniques.

Dans les classes scientifiques du second cycle, le programme de géométrie est très conséquent même si l'on peut lire, dans les instructions ministérielles :

« Les professeurs ne sortiront pas des limites fixées par les programmes ; ce qui ne peut être enseigné en Mathématiques le sera en Mathématiques supérieures : il en est ainsi de la transformation par polaires réciproques, du produit de deux rotations dans l'espace, du déplacement hélicoïdal, de l'étude des figures égales ou symétriques de l'espace. »

Mais :

« Le programme de géométrie de la classe de Mathématiques est un programme de complément, réduit à des lignes essentielles : l'enseignement comporte l'exposé magistral des théories nouvelles, de leurs principales applications, la révision et la mise au point des connaissances acquises dans les classes antérieures par l'exécution d'exercices nombreux et gradués. Il demeure comme par le passé l'enseignement fondamental de la classe de Mathématiques, celui qui requiert plus de soins et le plus de temps ».

Ajoutons qu'il y a toujours un enseignement conséquent de géométrie descriptive.

## Troisième moment : la réforme des « maths modernes » 1960-1980

### Les mathématiques partout, les mathématiques pour tous

Comme au début du siècle, le contexte international va intervenir de façon prégnante. En particulier, le colloque de Royaumont, en Belgique, en 1959, qui réunit

---

13. Les écoles primaires supérieures ont été supprimées, subsistent les Cours complémentaires.

de grands mathématiciens dont Jean Dieudonné, Howard Fehr ou Gustave Choquet, veut promouvoir une réforme du contenu et des méthodes de l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire (12-19 ans). Il faut rendre plus efficace l'enseignement des sciences.

Un peu plus tard, en 1967, André Lichnérowicz écrira :

« La mathématique joue là un rôle privilégié pour l'intelligence de ce que nous nommons le réel, réel physique comme réel social. Notre mathématique secrète, par nature, l'économie de pensée et, par-là, permet seule de classer, de dominer, de synthétiser parfois en quelques brèves formules un savoir qui sans elle, finirait par ressembler à quelque fâcheux dictionnaire encyclopédique infiniment lourd. [...] Elle est devenue désormais, au même titre, discipline auxiliaire, aussi bien d'une grande partie des sciences biologiques et médicales que de l'économie et des sciences humaines. » (Lichnérowicz, 1967, p. 249)

En France, mais aussi sur le plan international, on retiendra bien sûr l'influence du Bourbakisme en mathématiques, celle du structuralisme de Claude Levi-Strauss en sciences humaines et celle de la psychologie génétique de Jean Piaget <sup>14</sup>.

Dans un nouveau contexte institutionnel la scolarité obligatoire est allongée jusqu'à 16 ans et l'enseignement primaire se prolonge pour tous les élèves dans un « enseignement moyen », collège d'enseignement général (CEG), collège d'enseignement technique (CET), premiers cycles des collèges et lycées.

La commission ministérielle présidée par André Lichnerowicz, pour réformer profondément et vite l'enseignement des mathématiques, est mise en place en 1966. On y trouve André Revuz, Henri Cartan ou Laurent Schwartz. Comme au début du siècle, de « grands mathématiciens » <sup>15</sup> se préoccupent de la réforme de l'enseignement.

## Les années 1960

Dès les années 1960 sont introduits des éléments de logique, une initiation à la théorie des ensembles, au moins dans les classes scientifiques A', C, M, M', a fortiori dans la classe de math élem., où l'on abordera la notion de groupe, et de structures...

---

14. Jean Piaget (1896-1980) a été formé par Edouard Claparède. On pourra en savoir plus avec (Piaget, 2004) et pour approcher l'œuvre de Claude Levi-Strauss (1908-2009), on peut consulter (Clément, 2010).

15. Des mathématiciennes de premier plan comme Lucienne Félix ou Jacqueline Ferrand joueront aussi un certain rôle. Mais comme souvent, elles restent dans l'ombre.



Voici par exemple un extrait d'un manuel de la classe terminale de mathématiques :

**Théorème.** *Le produit de plusieurs transformations est associatif.*

#### 6. Groupes de transformations.

Un ensemble de transformations muni de l'opération produit est un groupe si :

1<sup>o</sup> Le produit de deux transformations de l'ensemble appartient à l'ensemble (opération interne).

2<sup>o</sup> La transformation identique appartient à l'ensemble (élément neutre).

3<sup>o</sup> Toute transformation de l'ensemble admet une transformation réciproque qui appartient à l'ensemble (existence de l'élément symétrique).

**N. B.** — Il est entendu que le produit de plusieurs transformations est associatif (n<sup>o</sup> 5).

En résumé : *Toute transformation ponctuelle qui fait correspondre à une figure (F) une figure égale (F') est un déplacement.* En géométrie plane, (F) et (F') doivent être directement égales.

#### 4. Groupe des déplacements.

*L'ensemble des déplacements est un groupe.*

En effet :

1<sup>o</sup> Le produit de deux déplacements est un déplacement car si (F<sub>1</sub>) est la transformée de (F) dans un déplacement (d<sub>1</sub>) et (F<sub>2</sub>) la transformée de (F<sub>1</sub>) dans un déplacement (d<sub>2</sub>), (F) et (F<sub>2</sub>) égales à (F<sub>1</sub>) sont elles-mêmes égales et se correspondent dans un déplacement.

2<sup>o</sup> La transformation identique qui laisse invariante point par point toute figure (F) est un déplacement.

3<sup>o</sup> Tout déplacement admet un déplacement réciproque dans lequel le vecteur  $\vec{AB}$  sera l'homologue du vecteur  $\vec{A'B'}$  en géométrie plane, et le triangle ABC l'homologue du triangle A'B'C' en géométrie dans l'espace.

#### 11. Groupe des translations.

Considérons l'ensemble des translations. Une translation quelconque sera notée  $t_i$  et son vecteur-directeur  $\vec{V}_i$ .

Cet ensemble est muni d'une opération : le produit de translations.

##### Propriétés du produit.

1<sup>o</sup> C'est une opération interne, car le produit  $t_1 \times t_2$  est une translation de vecteur-directeur  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ .

2<sup>o</sup> La transformation identique I (translation de vecteur nul) est l'élément neutre pour cette opération, car :

$$I \times t_i = t_i \times I = t_i.$$

3<sup>o</sup> A toute translation  $t$  de vecteur directeur  $\vec{V}$ , correspond une translation réciproque (ou inverse) : la translation  $t^{-1}$  de vecteur-directeur  $-\vec{V}$  :

$$t \times t^{-1} = t^{-1} \times t = I.$$

**L'ensemble des translations muni de l'opération produit a la structure de groupe.**

C'est un **groupe commutatif** car le produit de deux translations est commutatif.

FIGURE 5 – Extrait de manuel (Géométrie, 1964, p. 229, 234, 237)

La géométrie occupe toujours la majeure partie des programmes, très conséquents, et comprend toujours un enseignement de géométrie descriptive. La notion de vecteurs occupe une place centrale, avec une lourde partie de « géométrie orientée », une part importante sur les transformations ponctuelles, du plan et de l'espace, une étude approfondie des coniques, tout en conservant ce que nous avons déjà signalé comme « géométrie supérieure ».

### Le grand chambardement annoncé ne va cependant pas tarder

De nouveaux programmes paraissent, de juillet 1968 à juin 1971.

En voici les grandes lignes :

- Au collège : disparition des cas d'égalité des triangles et de l'initiation à la démonstration en 6<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> ; introduction d'un langage ensembliste et rationnel en 6<sup>e</sup>-5<sup>e</sup> ; construction des corps.

En 4<sup>e</sup> la géométrie affine est tournée vers l'algèbre linéaire.

- Au lycée : lien entre le vocabulaire ensembliste et la logique.  
La géométrie affine et euclidienne est fondée sur l'algèbre linéaire.  
En analyse, continuité, limites, dérivation de fonctions numériques d'une variable réelle.  
Calcul intégral en terminale.  
Probabilités sur un ensemble fini.

Ce programme reste mesuré dans ses contenus écrits, mais « c'est compter sans l'air du temps et le zèle des néophytes qui vont, dans maints manuels, accentuer les nouveautés du programme, théoriser là où il n'est prévu que des exemples, se gargariser de cas concrets aux complications parasites » (Bareil, 1992). Notons aussi au passage que la géométrie a perdu la place qu'elle avait jusqu'ici occupée, et qu'elle est noyée dans l'algèbre linéaire.

Avec l'application des programmes de quatrième et troisième les désillusions vont commencer. On distingue le « plan physique » et le « plan mathématique ». Les objets de la géométrie sont définis au sein d'une rigoureuse théorie axiomatique tournée vers l'algèbre linéaire. La classe de quatrième ne connaît que la géométrie affine : pas de métrique du plan, donc pas de distance, pas de cercle, pas d'orthogonalité, ... très peu d'exercices et d'activités possibles pour les élèves. Et dans la pratique on ignore la recommandation du programme sur le caractère absolument indispensable de nombreuses manipulations.

Au lycée la géométrie affine et euclidienne est fondée sur l'algèbre linéaire. Le calcul matriciel et le calcul vectoriel occupent une grande place. Les difficultés y sont probablement moins grandes, pour les classes scientifiques, mais tout le monde ne va pas en C, loin de là.

Feuilletons quelques manuels :

Nous y trouvons bien sûr la désormais devenue célèbre définition<sup>16</sup>, d'une droite, en classe de quatrième :

*« Définition d'une droite réelle »*

Un ensemble  $D$  d'éléments appelés points est une droite réelle, s'il existe une famille de bijections de  $D$  sur l'ensemble des nombres réels, appelés graduations de  $D$ , vérifiant l'axiome suivant : pour deux graduations quelconques  $g$  et  $g'$  de la même droite réelle  $D$ , il existe deux nombres réels  $a$  et  $b$ , tels que pour tout point  $M$  de  $D$  on a  $g(M) = a.g'(M) + b$ . Le nombre réel  $g(M)$  est appelé abscisse dans la graduation  $g$  du point  $M$ . » (Biancamara, 1972, p. 243)

Il s'agit de définir la « droite réelle », qui est différente de la droite physique.

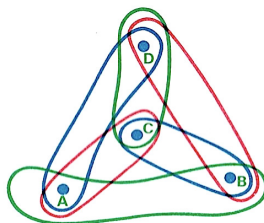
---

16. Cette définition symbolisera les excès de cette période dans les medias et pour tous les détracteurs des « maths modernes ».

Ceci est explicite dans cet extrait de l'édition de 1973 :

Le plan contient donc au moins quatre points A, B, C et D.  
 Ces quatre points déterminent les six droites (AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD); ces droites sont distinctes deux à deux, si non, l'un des points C ou D appartiendrait à (AB).  
 Les trois droites (AB), (AC) et (AD) sont de directions différentes, sinon deux d'entre elles seraient confondues.  
 Rien toutefois ne nous permet d'affirmer que les trois autres ont des directions distinctes de ces trois directions.  
 Il existe donc dans le plan au moins trois directions différentes.

fig. 15



Considérons même (fig. 15) l'ensemble  $\Pi'$  dont les seuls éléments sont ces quatre points.  $\Pi' = \{A, B, C, D\}$ ; on sait qu'il n'y a pas trois points alignés dans  $\Pi'$ .  
 Appelons droites les six parties :  $\{A, B\}$ ,  $\{A, C\}$ ,  $\{A, D\}$ ,  $\{B, C\}$ ,  $\{B, D\}$ ,  $\{C, D\}$ .

Cet ensemble  $\Pi'$  vérifie-t-il les trois axiomes d'incidence?  
 Pour chacune de ces droites combien y a-t-il de droites disjointes de cette droite?

Ce modèle peut donc être considéré comme un plan, puisqu'il vérifie les axiomes d'incidence définissant un plan; cependant il ne répond pas à notre intuition, car l'expérience montre que notre plan physique a plus de quatre points distincts.  
 Ceci nous fait comprendre que de nouveaux axiomes devront être ajoutés à nos axiomes d'incidence pour que notre plan mathématique soit un meilleur modèle du plan physique.

FIGURE 6 – Un « modèle » du plan (Biancamara 1973, p. 163)

Les auteurs avaient auparavant précisé : « Le jeu mathématique consistera à se placer dans la situation d'une personne intelligente, mais qui n'aurait aucune expérience physique, à qui on demanderait de tirer les conséquences de ces lois que nous appellerons "axiomes". » (Biancamara 1973, p. 158)

Un autre exemple en seconde dans la non moins célèbre collection Aleph :

### 6.1.3 Plan pointé.

On appelle *plan pointé* tout couple  $(P, O)$ , où  $P$  est un plan et  $O$  un point appartenant à  $P$  appelé *origine* du plan pointé  $(P, O)$ .  
 $\tilde{P}$  étant le plan vectoriel associé au plan  $P$ , désignons par  $f$  l'application de  $P$  dans  $\tilde{P}$  définie par :

$$\forall M \in P \quad f(M) = \overrightarrow{OM}.$$

On sait que, pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\tilde{P}$ , il existe un point  $M$  de  $P$ , et un seul, tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ , donc tel que  $f(M) = \vec{u}$ .  
 Il en résulte que l'application  $f$  est *bijective*.  
 Par suite :

**$P$  et  $\tilde{P}$  étant un plan et un plan vectoriel associés, et  $O$  un point du plan  $P$ , l'application :**

$$M \mapsto \overrightarrow{OM}$$

**est une bijection de  $P$  sur  $\tilde{P}$ .**

Pour un vecteur  $\vec{u}$  de  $\tilde{P}$ , l'unique point  $M$  de  $P$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  est appelé *image* de  $\vec{u}$  dans le plan pointé  $(P, O)$ .  
 Un point  $M$  du plan  $\tilde{P}$  est évidemment l'image du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans le plan pointé  $(P, O)$ .  
 Le point  $O$  est l'image du vecteur nul (car  $\overrightarrow{OO} = \vec{0}$ ).

FIGURE 7 – Extrait de manuel (Gautier, Girard, Lentin, 1969, p. 147)

Puis en terminale :

C. — *ENDOMORPHISMES. MATRICES CARRÉES*

254 *Anneau des endomorphismes de E*

**Définition.**

On appelle endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans lui-même.

L'ensemble des endomorphismes de  $E$  est donc l'ensemble  $\mathcal{L}(E, E)$ , d'après la notation déjà adoptée. On le désigne, plus simplement, par  $\mathcal{L}(E)$ .

$\mathcal{L}(E)$  n'étant qu'un cas particulier d'un ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$ , il possède une structure d'espace vectoriel lorsqu'on le munit de l'addition et de la multiplication par un réel que nous avons définies et étudiées.

De plus, la composition des applications est une loi interne pour  $\mathcal{L}(E)$ , puisque l'application composée de deux endomorphismes de  $E$  est encore un endomorphisme de  $E$ .

Des propriétés de cette loi de composition (associativité et double distributivité par rapport à l'addition), il découle la propriété suivante.

FIGURE 8 – Extrait de manuel (Pair, Baille, Boursin, 1971, p. 630)

## Remise en cause globale

Dès les premières mises en œuvre de la réforme dans les classes du secondaire, les « pères » de cette réforme commencent à protester. À l'instar d'Henri Bareil, ils s'effraient eux-mêmes des dérives de nombreux manuels. Gustave Choquet écrit en 1973 dans l'École libératrice :

« On a dit aux enseignants qu'ils étaient des minables s'ils étudiaient les triangles, que l'algèbre linéaire remplaçait l'ancienne géométrie [...] le résultat est tel que sans une saine réaction de la base, la génération actuelle ne sera préparée ni à la recherche mathématique, ni à l'utilisation des mathématiques dans la technique ou les sciences expérimentales... » (cité dans (Charlot, 1984))

Et Dieudonné en 1974 s'affole d'une « nouvelle scolastique, forme encore plus agressive et stupide, placée sous la bannière du modernisme ».

Les enseignantes et les enseignants ressentent rapidement la distorsion entre la réalité et les espoirs antérieurs à 1970. À la différence de la réforme du début du siècle, celle-ci s'adressait à tous les élèves et toutes les élèves d'une classe d'âge. Les enseignantes et enseignants attentifs aux modes d'appropriation d'un savoir minimum sont perturbés par les difficultés persistantes, les physiciens, les medias, les parents s'affolent. Les mathématiques sont devenues l'instrument de la sélection.

D'un autre côté, cette mise en place s'est aussi probablement heurtée au nombre insuffisant de professeurs formés, en dépit de l'immense effort fourni par les IREM qui voient le jour à partir de 1969.

André Lichnérowicz démissionne et la commission se dissout en 1975. L'on va s'acheminer, lentement, vers de nouveaux programmes.

## Quatrième moment : la contre-réforme des mathématiques, 1981-1982, remaniée en 1985

Cette époque sera aussi celle du collège unique (suite à la loi Haby de 1975) puis de la seconde indifférenciée (1981).

### Les grandes idées

« Le présent programme est celui d'une classe de Seconde pour tous ; il convenait de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures et par conséquent de ne pas l'alourdir d'une algébrisation prématurée. Il va de soi que le professeur doit avoir une vue approfondie de la matière qu'il enseigne, et qu'il doit s'exprimer clairement : mais son idéal ne saurait être de tenir aux élèves un discours si parfait soit-il ; sa tâche essentielle est d'entraîner ses élèves, devant des situations saisies dans leur complexité naturelle, à la réflexion et à l'initiative personnelle. » (Instructions pour le programme de seconde, 1981)

Il s'agit de mettre en œuvre un enseignement voulu comme activité mathématique qui, dans le cadre d'une planification minimale, s'efforce de susciter les initiatives et de les laisser se développer et veut placer l'élève en situation de chercheur. Il faut s'intéresser prioritairement au développement des diverses capacités des élèves (manipuler, expérimenter, observer, conjecturer, faire surgir des questions, douter et s'auto-contrôler, fabriquer et utiliser une documentation, rédiger et s'exprimer, démontrer, chercher, imaginer, inventer...). C'est l'époque de la mise en place de la « pédagogie différenciée ».

Jérôme Bruner<sup>17</sup>, fondateur de la psychologie cognitive en est un des inspirateurs.

Jusqu'à la fin du siècle, les réformes vont se succéder. Voici un exemple de ce que l'on y trouve en 1981 dans un manuel de seconde « indifférenciée ».

### 2. Propriétés

#### 2.1. Image d'un bipoint par une rotation

Considérons une rotation  $r_{(\Omega, \alpha)}$  et un bipoint  $(A, B)$ .

$$r_{(\Omega, \alpha)} : \begin{array}{l} A \mapsto A' \\ B \mapsto B' \end{array}$$

Montrons que  $AB = A'B'$  et  $m(\widehat{AB}, \widehat{A'B'}) \equiv \alpha [2\pi]$ .

Pour cela, considérons les triangles  $(\Omega, A, B)$  et  $(\Omega, A', B')$ .

$$\text{On a } \begin{cases} \Omega A = \Omega A' \\ \Omega B = \Omega B' \end{cases}$$

D'autre part,  $(\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B}) = (\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B})$  (fig. 4).

En effet, en utilisant la relation de Chasles pour les déterminations des angles, on

obtient  $m(\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B'}) \equiv m(\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega A}) + m(\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B}) + m(\widehat{\Omega B}, \widehat{\Omega B'}) [2\pi]$ . Or

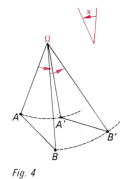
$$m(\widehat{\Omega B}, \widehat{\Omega B'}) \equiv \alpha [2\pi] \quad \text{et} \quad m(\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega A}) \equiv -\alpha [2\pi], \quad \text{donc}$$

$$m(\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B'}) \equiv m(\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B}) [2\pi].$$

Les angles  $(\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B})$  et  $(\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B'})$  sont égaux.

Par suite, les triangles  $(\Omega, A, B)$  et  $(\Omega, A', B')$  sont superposables par glissement: ils sont donc isométriques et les éléments homologues sont égaux.

$$\text{Donc } AB = A'B' \quad \text{et} \quad (\widehat{\Omega A}, \widehat{AB}) = (\widehat{\Omega A}, \widehat{A'B'}).$$



17. Jérôme Bruner (1915-2016). Pour en savoir plus on peut consulter l'article (Barth, 1985).

Évaluons l'angle  $\widehat{(AB, A'B')}$ . Pour cela, utilisons encore la relation de Chasles pour les déterminations des angles :

$$m(\widehat{AB, A'B'}) \equiv m(\widehat{AB, \Omega A}) + m(\widehat{\Omega A, \Omega A'}) + m(\widehat{\Omega A', A'B'}) [2\pi], \text{ d'où}$$

$$m(\widehat{AB, A'B'}) \equiv m(\widehat{\Omega A, \Omega A'}) [2\pi]:$$

$$m(\widehat{AB, A'B'}) \equiv \alpha [2\pi].$$

**Théorème :**

Si  $(A', B')$  est l'image du bipoint  $(A, B)$  par la rotation  $r_{(\Omega, \alpha)}$ , alors :

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ m(\widehat{AB, A'B'}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$$

Il résulte de ce théorème que la distance de deux points  $A$  et  $B$  est égale à la distance de leurs images par une rotation.

On dit que la **rotation plane « conserve les distances »**.  
C'est une **isométrie**.

**Remarque :**

Si  $\alpha \equiv \pi [2\pi]$ , les points  $M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport au point  $\Omega$  milieu de  $(A, A')$ .

$r_{(\Omega, \pi)}$  est aussi la symétrie de centre  $\Omega$  (fig. 5).

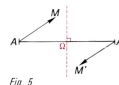


FIGURE 9 – Extrait de manuel (Proteau, Spérando, et al., 1981, p.142)

Le formalisme des années précédentes et la précision du vocabulaire, à un niveau relativement élémentaire, a laissé des traces. Mais il y a des dessins à l'appui, qui permettent de voir les objets mathématiques. Une rotation « ça fait tourner ». Ce n'était pas évident dans les programmes qui venaient d'être abandonnés.

Un peu plus tard, les rotations dans un manuel de 1990 :

6.2.2 Rotations.

**Définition :** Soit  $O$  un point du plan et  $\alpha$  un nombre réel.

On appellera **rotation** de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$  l'application du plan dans lui-même qui à tout point  $M$  du plan associe le point  $M'$  défini par :

1.  $OM = OM'$ .
2. Si  $M \neq O$  alors  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$ .

**Exercice résolu :** Construire l'image d'un point  $M$  distinct de  $O$  dans la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  (fig. 11).

Solution :

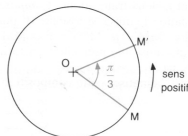


FIG. 11

On a  $OM = OM'$ ,  $M'$  appartient donc au cercle de centre  $O$  et de rayon  $OM$ . Le triangle  $OMM'$ , isocèle ayant un angle de  $\frac{\pi}{3}$  est équilatéral. Le point  $M'$  s'obtiendra donc en construisant une corde égale au rayon sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OM$  et en respectant le sens de rotation.

**Cas particuliers :**

- Si  $\alpha = 0$ , la rotation est d'angle nul, c'est l'application identique du plan ( $Id_{\mathbb{P}}$ ).
- Si  $\alpha = \pi$  alors la rotation est appelée *demi-tour* ou *symétrie de centre*  $O$ . Si une configuration est invariante par un demi-tour de centre  $O$ , on dit que  $O$  est un *centre de symétrie* de cette configuration.

**Exemple :** Le cercle admet un centre de symétrie : son centre.

- Si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ou  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  alors les rotations correspondantes sont appelées *quart de tour direct* ou *quart de tour indirect*.

**Propriétés :**

- 1) Une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$  est une transformation du plan; sa transformation réciproque est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\alpha$ .
- 2) On peut toujours choisir  $\alpha$  sur l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  (détermination principale de l'angle § 4.3.1).

FIGURE 10 – Extrait de manuel (Corrieu, Lion, et al., 1990, p. 184)

Cette fois la page est tournée. Peut-être le sera-t-elle trop aux yeux de certains. Le temps des réformes aura un bel avenir.

En 1999, est réunie une commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (dite commission Kahane). Dans le rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement, Jean-Pierre Kahane donne son jugement sur les années de cette fin du XX<sup>e</sup> siècle.

« • *Le collège* :

Les programmes sont accompagnés de commentaires généraux [...] auxquels nous souscrivons volontiers : ... *identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler des résultats* [...]

Il nous semble cependant que par rapport à ces excellents principes, l'accent n'est pas assez mis sur les activités qui peuvent mener à des situations de recherche authentiques : constructions, recherche de lieux. En conclusion, même si on peut avoir quelques réserves [...], on ne peut pas dire que l'on ne fasse plus de géométrie au collège, même si on en fait nettement moins qu'il y a quarante ans.

• *Le lycée* :

Les programmes nous ont paru assez pauvres. :

- il y manque les points essentiels qui feront défaut, notamment en physique, dès le début de l'enseignement supérieur : transformations de l'espace, coniques ;
- il n'y a plus nulle part de « géométrie riche » ;
- si on parcourt les livres, on trouve beaucoup d'exercices très standardisés (en particulier ce qui tourne autour des barycentres et des lignes de niveau) ;
- la géométrie est trop peu connectée aux autres domaines des mathématiques et des autres sciences.

En dépit de ces critiques, il est clair qu'il est possible de faire de la géométrie une véritable activité mathématique avec ces programmes, à la fois dans la géométrie dans l'espace et en géométrie plane. De plus l'introduction de la géométrie analytique, des vecteurs, des produits scalaire et vectoriel est un premier pas important vers un apprentissage ultérieur de l'algèbre linéaire. » (Commission Kahane, 1999, p. 17)

## Conclusion

Il s'agissait d'un parcours sur un siècle, trop bref et superficiel bien sûr. Cela mériterait un livre entier, voire plus. Et cela le mériterait à coup sûr, car l'histoire de l'enseignement des mathématiques, comme celle des mathématiques, éclaire le présent et devrait permettre de mieux construire l'avenir. Les débats d'hier sont finalement très proches de ceux d'aujourd'hui, en dépit des contextes différents, tant du côté des élèves, de la situation sociale et économique, que du contexte in-

ternational : la question des méthodes, la question de « l'égalité scientifique », les relations avec les autres disciplines, les définitions de mots et de concepts, la formation des enseignants, et même l'utilisation de matériels divers, que nous avons peu abordée, ... Nous notons cependant un changement notoire. La réflexion sur l'enseignement, sur les contenus, sur les méthodes a été alimentée pendant une grande partie du siècle passé, par les mathématiciens de grand renom. Plusieurs d'entre eux étaient même les auteurs de manuels, comme Borel en 1905, Cartan en 1925. Ce n'est plus autant le cas, même si certains comme Cédric Villani participent à la réflexion actuelle. Doit-on le regretter ?

Nous espérons avoir ouvert la voie à quelques réflexions, et surtout donné envie de se plonger dans cette histoire.

## Références bibliographiques

- BAREIL Henri, 1992, « La réforme des mathématiques modernes vue par un enseignant du terrain », *La gazette des mathématiciens*, n° 54, publié dans le supplément au Bulletin Vert de l'APMEP, n° 485.
- BELHOSTE Bruno, 1990, « Histoire de l'enseignement des mathématiques : la réforme de 1902 », *bulletin de la commission inter-irem épistémologie*, n° 7.
- BELHOSTE Bruno, 1995, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français : textes officiels, tome 1 : 1789-1914*, Paris, INRP, édition economica.
- BIANCAMARA Paul, 1972, *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, Collection Queysanne Revuz, Paris, Nathan.
- BIANCAMARA Paul, 1973, *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, Collection Queysanne Revuz, Paris, Nathan.
- BKOUCHE Rudolph, 1991, « Variations autour de la réforme de 1902-1905 », *Cahiers d'histoire et d'épistémologie des sciences, SMF*, n° 34, p. 181-213.
- BKOUCHE Rudolph, 2003, « La géométrie dans les premières années de la revue *L'Enseignement Mathématique* » dans CORAY Daniel, FURINGHETTI Fulvia, GISPERT Hélène, HODGSON Bernard R., SCHUBRING Gert, *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique, Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century, Proceedings of the EM-ICMI Symposium Geneva, 20-22 October 2000*, GENEVE, L'enseignement mathématique, p. 95-112.
- BOREL Émile, 1905, « Opinion de M. Émile Borel professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris », *L'enseignement mathématique*, vol. 7.
- BOREL Émile, 1905, *Géométrie, premier et second cycle*, Paris, librairie Armand Colin.
- BOURLET Carlo, 1907, *Cours abrégé de géométrie, tome 1, géométrie plane*, deuxième tirage, Paris, Hachette.
- BOURLET Carlo, 1910, « Pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire », *L'enseignement mathématique*, vol. 12, p 372-387.
- BARTH Britt-Mari, 1985, « Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique », *Communication & Langage*, n°66, p. 46-58.



- BUHL Adolphe, « Bibliographie » de *Géométrie, premier et second cycle* de Borel, *L'enseignement mathématique*, t. 8, 1906, p. 166-167.
- CHARLOT Bernard, 1984 « Histoire de la réforme des « maths modernes » ; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique », *Actes de l'Université d'été sur l'histoire des mathématiques*, Le Mans, Université du Maine Reproduit dans Bulletin de l'A.P.M.E.P., n° 352, février 1986.
- CHATELET Albert, 1929, « L'organisation de l'enseignement en France », *L'enseignement mathématique*, vol. 28.
- CHENEVIER Pierre, 1923, *Cours de géométrie, tome I, Géométrie plane, à l'usage de l'Enseignement secondaire, Garçons : 5<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> B, 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> A ; jeunes filles : 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> année*, Paris, Hachette.
- CLAPARÈDE Édouard, 1905, *Psychologie de l'enfant et pédagogie expérimentale*, édition scientifique Andrea Capitanescu Benetti et Maulini, avec Danielle Bonneton, Dominique Ottavi et Françoise Ruchat), Paris, L'Harmattan, 2017.
- CLÉMENT Catherine, 2010, *Claude Levi-Strauss*, PUF, collection Que sais-je ?
- COMMISSION KAHANE, 1999, Rapport d'étape sur l'enseignement de la géométrie, accessible sur [https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/jcms/c\\_75043/fr/commission-kahane](https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/jcms/c_75043/fr/commission-kahane) (dernier accès le 11/02/2021).
- CORRIEU Louis, LION Georges, PENSIVY Michel, ROUMILHAC Jean-Paul, VILATTE Jean-François, 1990, *Math 2<sup>e</sup>*, Paris, Delagrave.
- D'ENFERT Renaud, 2003, *L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Révolution à nos jours : Textes officiels, tome 1 : 1791-1914*, Lyon, INRP.
- DEWEY John, 1900, « L'école et la société » (« The school and Society, »), traduction partielle dans *L'éducation*, juin 1909 et décembre 1912.
- DEWEY John, 1916, *Démocratie et éducation (Democracy and education)*, traduction Gérard Deledalle, Paris, Armand Colin.
- GAUTIER Christian, GIRARD Georges, LENTIN André, 1969, *Algèbre et géométrie, 2<sup>e</sup> ACT, Aleph 0*, Paris, Hachette.
- Géométrie*, 1964, classe de mathématiques, Paris, Ligel.
- GISPERT Hélène, HULIN Nicole, BELHOSTE Bruno, 1996, *Les sciences au lycée : un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Paris, Vuibert-INRP.
- GISPERT Hélène, HULIN Nicole, ROBIC Marie-Claire, 2007, *Science et enseignement : l'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XX<sup>e</sup> siècle*, Paris, Vuibert, Lyon, INRP.
- HULIN Nicole, 2007, *L'enseignement secondaire scientifique en France d'un siècle à l'autre 1802-1980 : évolution, permanences et décalages*, Lyon, INRP.
- ILOVICI Guy, DESFORGE Julien, 1933, « Rapport sur la préparation théorique et pratique des professeurs de Mathématiques de l'enseignement secondaire », *L'enseignement mathématiques*, vol. 32, p. 208-236.
- LICHNÉROWICZ André, 1967, « Rapport préliminaire de la commission ministérielle », *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public*, n° 258.
- MASSON Renée, 1912, « France, enseignement des jeunes filles », *L'enseignement mathématique*, vol. 14, p. 65 - 68.

- PAIR Claude, BAILLE Alain, BOURSIN Jean-Louis, 1971, *Mathématiques terminale C et E*, Collection Cossart et Théron, tome 3, Paris, Bordas.
- PERRIN Élie, 1903, « La méthode de M. Méray pour l'enseignement de la géométrie », *L'enseignement mathématique*, vol. 5, p. 441-446.
- PIAGET Jean, 2004, *La psychologie de l'enfant*, Paris, Quadriga, PUF, 1<sup>re</sup> édition : 1966, Que sais-je ?, PUF.
- PROTEAU Roger, SPÉRANDO Danièle, WIGDOROWICZ Bernard, JEULIN Chantal, 1981, *Mathématiques 2<sup>e</sup>*, Paris, Bordas.

## Approche des fondements épistémologiques de la géométrie du cycle 3

Alex ESBELIN, Anne-Cécile MATHÉ, Aurélie ROUX

### Introduction

Une théorie épistémologique due à Thomas Kuhn (Kuhn 1962) décrit les sciences comme des pratiques sociales normées. L'auteur appelle l'ensemble des normes à un instant donné un « paradigme ». Dans cette théorie, une science évolue dans un paradigme stable qu'elle adapte pour prendre en compte des phénomènes nouveaux, jusqu'à rencontrer des phénomènes qui ne lui sont pas réductibles appelés « anomalies ». La nécessité d'expliquer ces anomalies conduit à des changements de paradigmes. Un paradigme suppose une cohérence (concernant la nature des problèmes, des objets, des pratiques).

Une étude de l'histoire des sciences du réel permet de se convaincre de l'intérêt de cette théorie. Sa pertinence pour la description des mathématiques est moins immédiate. Dans (Houdement et Kuzniak 2006), Catherine Houdement et Alain Kuzniak, cherchant à mettre au jour des difficultés, des malentendus et des enjeux d'enseignement et d'apprentissage, notamment à la transition entre l'école et le collège, définissent trois paradigmes pour la géométrie :

★ La « Géométrie naturelle » (GI) s'emploie à résoudre des problèmes portant sur des objets matériels, traces graphiques sur le papier, traces virtuelles sur l'écran d'ordinateur ou encore maquettes d'objets de l'environnement. Cette Géométrie I exerce un effort d'abstraction en sélectionnant certains aspects de ces objets matériels et en les traduisant parfois par des schémas comme les figures simples (cercles, carrés...). Ses techniques licites sont empiriques et s'appuient sur l'utilisation des instruments. Le corpus de savoirs de cette géométrie est constitué d'affirmations étayées par l'intuition et le raisonnement à partir de la perception ou de l'expérience (instrumentée). La Géométrie I a pour source de validation la réalité sensible.

★ La « Géométrie axiomatique naturelle » (GII) prend pour objets d'étude des objets idéels. Se posent alors la question de la définition de ces objets et celle de la nécessité d'axiomes, comme chez Euclide. « Les axiomes proposés dans la Géométrie euclidienne, prototype de la Géométrie II, sont fortement appuyés sur les objets de la Géométrie I conservant ainsi un lien fort avec l'espace sensible, d'où le qualificatif d'Axiomatique Naturelle. » (Houdement, 2007, p.74). Le mode de production des connaissances est le raisonnement hypothético-déductif. Sa source de validation est ainsi un système hypothético-déductif où la syntaxe est associée à une sémantique fondée sur la réalité et l'axiomatisation sur l'observation de cette réalité.

★ Dans la « Géométrie axiomatique formaliste » (GIII), la syntaxe et les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la correction du raisonnement logique l'emporte sur la vérité.

Cette construction est un grand pas pour l'analyse des faits pédagogiques relevant de l'enseignement de la géométrie. Elle apporte, en fixant des limites, une cohérence à l'étude historique, à l'analyse épistémologique et à la réflexion pédagogique. Mais l'adaptation aux mathématiques de la théorie de Kuhn n'a pas été encore conduite, tout au plus trouve-t-on parfois utilisés des mots qui font écho (crise des irrationnels, crise des fondements, ...). De plus, si il est bien reconnu que les pratiques géométriques évoluent au cours de la scolarité, cette évolution n'est pas très bien décrite par les théories, donc ne peut qu'être difficilement construite par les enseignants. Elle met aussi en évidence les difficultés dues à la cohabitation de paradigmes différents au même moment de la scolarité. GI et GII ne forment pas une échelle complète. Dans (Tanguay et Geeraets 2012), Denis Tanguay et Loïc Geeraets proposent un « paradigme » du physicien-géomètre : la pratique géométrique est expérimentale, le mesurage a, comme dans les sciences de la nature, une fonction d'exploration et une fonction de vérification.

Notre projet est de confronter ces conceptions à quelques pratiques historiques. Dans les sections suivantes, nous en présentons deux :

★ la géométrie védique est connue par quelques textes concordants. Avec elle, on abordera la question de la description d'un paradigme. En particulier, on verra que, dans un ensemble de pratiques homogènes, certaines connaissances peuvent rompre cette homogénéité.

★ La géométrie grecque archaïque est connue par des textes lacunaires et des commentaires tardifs. À son sujet, on abordera la question de la construction d'un paradigme, ainsi que celle de la transition d'un paradigme à un autre.

## Géométrie védique

### Une pratique stable

L'antiquité indienne a livré des textes religieux dont certaines parties réfèrent à des pratiques que nous qualifions de mathématiques. Les débuts des quatre Śulvasūtras disponibles, datés du sixième siècle avant notre ère (à deux siècles près), font référence au problème suivant : *construire des autels au cordeau et aux*

*piquets suivant des spécifications d'aire.* Ces textes sont constitués de versets que le Śulbavid, le savant aux cordeaux, savait par cœur. Comme les autres textes sacrés, ils ont fait l'objet d'une élaboration et d'une transmission orale multiséculaire avant que la concurrence d'autres religions ne pousse à leur rédaction pour faciliter le prosélytisme. Un exemple, le verset 58 du livre I des Śulvasūtras de Baudhāyana, se trouve dans la figure 1.a en sanscrit et translitéré en figure 1.b.

<p>चतुरस्रं मण्डलं चिकीर्षन्नक्षयार्धं  मध्यात्प्राचीमभ्यापातयेद्यदतिश्रियते तस्य च  दत्तौघेन मण्डलं परिच्छेत् ।</p>	<p><i>caturaśraṃ maṇḍalaṃ cikīrṣannakṣayārdhaṃ  madhyātpṛācīm- abhyāpātayet  yadatiśīyate tasya saha tṛṭiyena maṇḍalaṃ parilikhet</i></p>
<p>Figure 1.a d'après (Thibaut, 1875)</p>	<p>Figure 1.b d'après (Sun &amp; Bag, 1983)</p>

FIGURE 1 – Verset 58 du livre I des Śulvasūtras de Baudhāyana

La finalité exclusive de construction d'autels est affirmée dès le début, par exemple dans les versets 1 et 2 du premier livre de Baudhāyana (abrégé BŚI) <sup>1</sup>.

**BŚI 1-1.** : « Maintenant, voici les constructions des foyers sacrificiels. »

**BŚI 1-2.** : « Nous expliquerons les dimensions et la confection de la surface de ceux-ci. »

Les Śulbavids utilisent des piquets et des cordes sur lesquelles des marques sont indiquées <sup>2</sup>. Nous nous concentrons dans ce texte sur quelques problèmes parmi d'autres. L'une des deux constructions utilisées d'un autel carré de côté donné est ainsi décrite dans les Śulbasūtras de Baudhāyana au verset 4 du livre I :

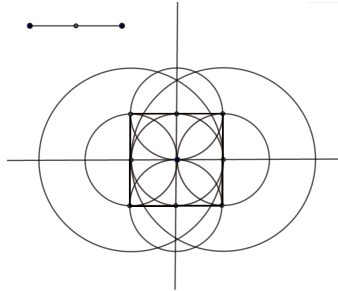


FIGURE 2 – Construction de l'autel carré d'après le verset 4 du livre I des Śulbasūtras de Baudhāyana

**BŚI 1-4.** : « Si l'on désire construire un carré, après avoir muni de nœuds aux deux bouts d'une corde aussi grande que ce [carré] que l'on voudrait construire, on fait une marque au milieu [de la corde]. Après avoir tracé une ligne [d'ouest en est],

1. Toutes les traductions des Śulvasūtras de Baudhāyana sont issues de (Delire 2016).

2. Lorsque les longueurs en jeu sont plus grandes que la taille humaine, ces cordes peuvent être remplacées par des tiges de bambou.

que l'on enfonce un piquet au milieu de celle-ci. Après avoir fixé les deux boucles [de la corde] à cet endroit, que l'on trace en rond un cercle. Que l'on enfonce deux piquets aux deux extrémités [ouest et est] du diamètre.

Après avoir fixé une boucle [au piquet de l'est], que l'on trace un cercle à l'aide de l'autre boucle.

De même à l'ouest. Que l'on étende au deuxième diamètre par ces [deux points] où ces deux [cercles] se rencontrent.

Que l'on enfonce deux piquets aux deux extrémités du diamètre.

Après avoir fixé les deux boucles au [piquet] de l'est, que l'on trace un cercle à l'aide de la marque.

[Après avoir fixé les deux boucles] également au piquet sud, ouest, nord, [que l'on trace trois autres cercles], le carré s'inscrit [entre les points] qui sont les rencontres extrêmes de ces [quatre cercles]. »

La méthode suivante construit un disque de même aire qu'un carré donné.

**BŚI I-58.** : « Si l'on désire transformer un carré en cercle, que l'on fasse tomber la moitié de la diagonale [du carré, prise] à partir du centre sur la *prācī*<sup>3</sup>. Que l'on trace un cercle avec le tiers de ce qui reste [en dehors du carré] ensemble [avec le demi côté du carré]. »

Une expression algébrique de la formule donnant le rayon du cercle serait aujourd'hui

$r \approx \frac{\frac{d}{2} - \frac{c}{2}}{3} + \frac{c}{2}$ , où  $c$  désigne la longueur du côté du carré,  $d$  celle de la diagonale et  $r$  le rayon du cercle. La méthode de découverte suivante est suggérée par la fin du verset 2 du livre 3 des Śulbasūtras d'Āpastamba :

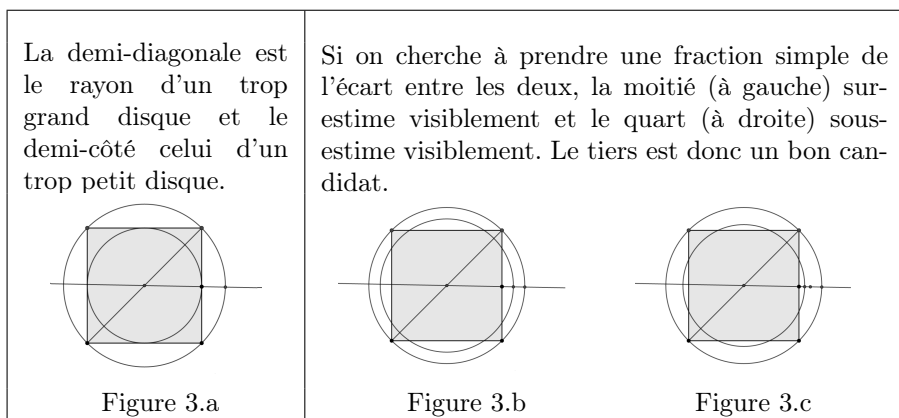


FIGURE 3 – Comparaison de la longueur du côté du carré et celle du diamètre du disque de même aire par « essais-erreur »

Pour résoudre le problème *tracer un angle droit à la corde et aux piquets*, **BŚI I-5.** propose de faire des nœuds sur une corde de longueur deux unités comme

3. La ligne ouest-est.

le dessin ci-dessous le montre, puis de tendre la corde. On utilise donc le triplet pythagoricien  $\left(1; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ .

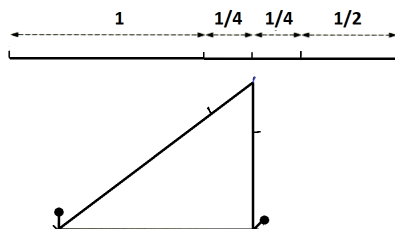


FIGURE 4 – Tracé de l'angle droit au cordeau

Le problème de la construction d'un carré d'aire égale à la somme des aires de deux carrés donnés est bien sûr résolu en utilisant la propriété suivante des diagonales des rectangles :

**BŚI I-50.** : « Si l'on rassemble deux carrés [de tailles] différentes, que l'on trace à l'aide du côté le plus petit une bande du plus grand, la corde diagonale de cette bande est le côté [du carré constitué des deux carrés] rassemblés. »

Une méthode de soustraction des carrés est aussi présentée. Elle correspond à la construction suivante :

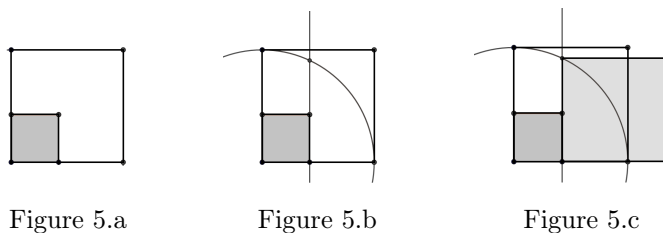


FIGURE 5 – Soustraction des aires dans l'ensemble des carrés

## Comment qualifier une telle pratique ?

La justification de la construction du disque d'aire égale à celle d'un carré n'est pas hypothéico-déductive. Il est peu probable qu'elle soit de nature expérimentale (fondée sur des mesures comme celle de la production de champs de céréales de formes différentes, de la contenance de récipients de bases différentes, ...). Elle est probablement fondée sur une perception visuelle, qui n'exclut pas toute forme de raisonnement. La justification de la propriété de la diagonale du triangle rectangle est plus difficile à deviner. Un texte plus tardif de Bhāskara fait référence à une figure traditionnellement représentée comme ci-dessous :

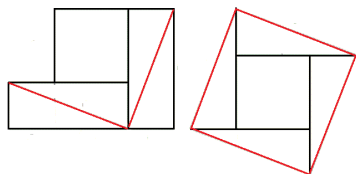


Figure 6.a

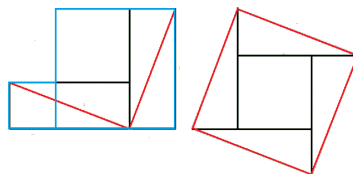


Figure 6.b

FIGURE 6 – Une « preuve dessinée » de la propriété de « Pythagore »

Remarquez comme l'observation de la figure 6a laisse perplexe, et celle de la figure 6.b crée une impression visuelle durable. Quelques triplets pythagoriciens sont proposés, à partir de 3 et 4, 12 et 5, 15 et 8, etc... On peut envisager que le problème de l'addition de deux carrés sous forme d'un carré ait pu être celui qui conduit à la mise en évidence de la propriété de la diagonale utilisée comme outil de résolution. La démarche de découverte peut être empirique : on essaie par pavage par des carrés unité dans des cas simples et après avoir essayé des couples de type (1,3), (2,3), ..., on arrive assez vite à (3,4) pour lequel un pavage montre que « ça marche ». Mais pour une pratique sacrée peut-on se contenter d'une vérification sur quelques cas ?

Les problèmes des Śulbavids sont des constructions de surface de formes et d'aires données ; la construction à la corde marquée et aux piquets revient à notre construction à la règle graduée et au compas. Les constructions sont réalisées suivant des protocoles non explicitement justifiés mais qui articulent des certitudes géométriques appuyées sur le visible. L'élaboration de ces procédés nécessite des raisonnements qui n'ont pas été conservés. Assez clairement, il ne s'agit pas du paradigme du mathématicien physicien, car il n'y a pas collections de mesures. Il ne s'agit pas du paradigme GII car aucune trace de raisonnement textuel n'est présente, et le but n'est pas l'élaboration de vérités, mais la construction de plans d'autels. Il ne s'agit pas non plus d'un paradigme de géométrie empirique dans le sens où les vérités seraient issues d'essais-erreurs et validées perceptivement. Une affirmation est assurée : les Śulbavids ne connaissent pas le théorème de Pythagore. Le mot *théorème* renvoie à une pratique démonstrative qui n'y est pas en jeu. On doit en revanche les créditer de la connaissance de la propriété de la diagonale des rectangles (notre propriété de l'hypoténuse des triangles rectangles) et de son utilisation dans la résolution de problèmes variés de construction de figures.

## Un problème d'histoire des mathématiques

Voyons les versets 59 à 61 du livre I des Śulbasūtras de Baudhāyana à propos du problème : « étant donné un disque, construire un carré de même aire. ». Dans toute la suite de cette section, on note  $c$  la longueur du côté d'un carré,  $d$  celle de sa diagonale et  $r$  la rayon du disque de même aire.

On cherche donc  $c$  tel que  $\pi r^2 = c^2$ . En inversant l'expression proposée dans **BŚI I-58**, nous obtenons (avec nos méthodes de calcul)  $c = r \times 3(2 - \sqrt{2})$ , dont nous



pouvons donner la construction ci-contre. La possibilité d'un tel calcul n'apparaît nulle part dans les pratiques des Śulbasūtras.

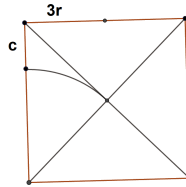


FIGURE 7 – Construction (non avérée dans les Śulbasūtras) du côté  $c$  d'un carré d'aire « proche » de celle d'un disque de rayon  $r$  donné

On y trouve en revanche deux constructions. Celle donnée par **BŚI I-59** revient à la formule  $c \approx (2r) - \frac{1}{8 \times 29} \left( 28 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} \right) (2r)$ . L'autre donnée par **BŚI I-60** revient à  $c \approx (2r) - \frac{2}{15} (2r)$ . Ces deux constructions précèdent immédiatement celle de la diagonale d'un carré donnée dans **BŚI I-61** traduite par la formule algébrique  $d \approx \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{34} \times \left( \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \right) \right) c$ . Ce coefficient correspond à notre fraction  $577/408 \approx 1,414215$ . Cet ensemble de versets introduit une hétérogénéité : d'abord, la diagonale d'un carré peut-être obtenue directement sur le carré ; ensuite la précision des derniers termes des approximations dans **BŚI I-59**, et **BŚI I-61** dépasse le perceptible ; enfin aucune méthode pratique de pliage de corde ne saurait produire de telles fractions.

Avec l'approximation  $d \approx \left( 1 + \frac{1}{2} \right) c$ , des calculs élémentaires donneraient  $c \approx \left( 1 - \frac{1}{7} \right) (2r)$ . L'approximation donnée par **BŚI I-60**, s'obtient à partir de  $d \approx \left( 1 + \frac{2}{5} \right) c$  qui n'apparaît pas à notre connaissance dans les Śulbasūtras.

L'approximation  $d \approx \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} \right) c$  donnée dans les Śulbasūtras de Mānava au verset 1 du livre 12 sous la forme  $d \approx \left( 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{2 \times 6} \right) c$  conduit à inverser une fraction que nous pouvons écrire  $41/36$ . Depuis plus d'un siècle, les historiens cherchent à inclure cette quadrature du disque en imaginant une procédure relevant de l'ensemble des pratiques védiques : une référence récente (Kichenassamy, 2006) dresse un inventaire et fait une proposition qui ne nous semble pas totalement convaincante. L'alternative de l'appel à une origine externe qui, sans aller jusqu'à faire intervenir des extra-terrestres, envisage une tradition mathématique autre, échoue actuellement par l'absence de traces d'une telle théorie, qui n'aurait pas bénéficié de la portée religieuse des mathématiques védiques.

## Géométrie milésienne

### Mathématiques dans la société savante de la Grèce archaïque

À partir du III<sup>e</sup> siècle avant J.C., les pratiques des mathématiciens grecs sont régies par les *Éléments* d'Euclide. Le refus de l'évidence intuitive, déjà présent chez Platon, prédomine. Une genèse mal connue y a conduit, sur laquelle les sources sont trop rares pour ne pas laisser place à l'interprétation. Toutes attribuent une activité intellectuelle particulière aux cités de la côte ionnienne au VI<sup>e</sup> siècle avant J.C. : les Grecs de cette époque de colonisation<sup>4</sup> n'ont pu méconnaître les civilisations mésopotamiennes et égyptiennes ; la ville de Milet, des plus dynamiques, a vu naître Thalès, modèle de la figure du Sage mathématicien construite au cours des dix siècles suivants, comme sera construite la figure du sage politicien à partir de l'athénien Solon. Il est très crédible qu'une classe sociale de propriétaires terriens, aristocrates ou non, de marchands, de gros artisans participant à la gestion de la cité se réunissent dans des symposii et débattent. Tous s'intéressent probablement aux affaires et à la politique, certains aussi à l'astronomie ou à la métaphysique, cherchant par exemple les principes premiers explicatifs du cosmos ou même de l'univers (l'eau pour Thalès, l'apeiron pour Anaximandre, ...), d'autres racontent simplement leurs voyages.

Thalès est crédité par des auteurs antiques (Proclus, Diogène Laërce, ...) d'une mesure de la hauteur des pyramides à partir de celle de leurs ombres, mais aussi des résultats suivants :

- ★ un cercle est partagé en deux parties égales par tout diamètre ;
- ★ les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux ;
- ★ lorsque deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux ;
- ★ deux triangles sont égaux s'ils ont deux angles et un côté égaux.

Dans quel ensemble de pratiques mathématiques des affirmations comme celles-ci ont une telle importance qu'elles sont citées de nombreux siècles après (un millénaire environ pour Proclus) ? Elles ne peuvent être que très différentes de celles de l'époque d'Euclide et même d'Aristote. Elles pourraient relever aussi bien de l'intuition que de la démonstration logique. L'objet de cette section est de proposer un paradigme hypothétique les décrivant.

Jusqu'au XIX<sup>e</sup> siècle, les historiens des sciences considèrent qu'une étape empirique est indispensable avant toute forme d'abstraction. Ayant peu d'informations sur les mathématiques des antiquités mésopotamiennes et égyptiennes, ils assignent cette étape aux mathématiques grecques de la période archaïque. Au XX<sup>e</sup> siècle, c'est à celles-ci que Van der Waerden attribue un statut empirique. Il suggère aussi qu'à la recherche de méthodes de calcul, Thalès aurait ajouté celle de preuves de leur correction et constitué un corpus logiquement articulé de théorèmes. Tannery organise les connaissances attribuées à Thalès autour d'un problème pratique de distances inaccessibles<sup>5</sup> ou de problèmes plus généraux comme l'inscription d'un triangle rectangle dans un demi-cercle.

L'attribution de la propriété de Thalès à Thalès a fait l'objet de nombreuses

---

4. Au sens de la Grèce archaïque du terme, bien sûr !

5. La distance du bateau à la côte.

analyses critiques. Si, comme le rapporte Pline, la mesure de la hauteur de la pyramide, qui est le plus connu des apports de Thalès aux mathématiques, a été faite quand la hauteur du bâton était égale à la longueur de son ombre, il n'est pas question de rapport de longueurs, mais de propriétés des triangles rectangles isocèles.

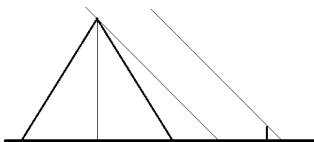


FIGURE 8 – Thalès et l'ombre de la pyramide

Le problème 56 du papyrus Rhind demande, à propos d'une pyramide [à base carrée] de côté 360 coudées et de hauteur 250 coudées, de calculer le déplacement horizontal mesuré en palmes (une coudée égale sept palmes) correspondant à une hauteur verticale de une coudée [sur l'axe de symétrie d'une face]. Le « corrigé » propose la méthode suivante : trouve le nombre qui multiplié par 250 donne la moitié de 360 et multiplie-le par 7. Les trois problèmes qui suivent dans le même document reprennent la situation avec de nouvelles valeurs numériques.

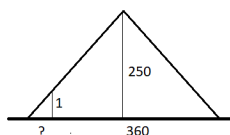


FIGURE 9 – La pente en Égypte pharaonique

Cet exemple montre la résolution d'un problème de quatrième proportionnelle avant le  $xv^e$  siècle avant J.C. La première conclusion est donc que les mathématiciens ioniens n'ont pas ajouté de connaissances aux mathématiques égyptiennes sur la proportionnalité des longueurs correspondantes dans les figures semblables. La seconde que ces mathématiciens ioniens ont pu apporter une technique de mesure originale, fondée sur la connaissance des triangles et économique en calcul, au prix de l'attente d'un instant favorable à sa mise en œuvre. Ils ont pu peut-être aussi apporter l'idée d'utiliser l'ombre, un outil courant de leurs pratiques astronomiques que nous allons évoquer dans la section suivante.

## À la recherche d'une cohérence

Dans cette section, nous proposons une description hypothétique du paradigme des mathématiques grecques archaïques en cohérence avec les faits rendus disponibles par les historiens.

• On retiendra d’abord qu’il s’agit de pratiques de cette élite intellectuelle mentionnée plus haut. Ses membres sont des physiologues<sup>6</sup> qui ne sont pas exactement les savants, dans le sens de ce mot qui fait écrire par les éditeurs de (Bisson et al., 2012) dans leur avant-propos « ... en Grèce archaïque, les charpentiers sont des savants ». Ces pratiques sont associées à des problèmes d’astronomie liés à la navigation et à une interrogation sur le cosmos. Ces deux sources de questions conduisent à l’étude de la voûte céleste, dont l’existence ne fait pas l’objet d’un questionnement pour sa partie visible (mais dont la conception va évoluer dès cette période). Les activités des agrimenseurs ont certainement eu une importance, mais n’ont pas laissé de traces, sans doute à cause de la structure sociale, très différente de celle des empires de l’Antiquité.

L’outil fondamental de l’astronomie est l’ombre du gnomon. Les problèmes astronomiques se traitent debout à côté de celui-ci. L’ombre dessine une figuration de la voûte céleste. Si le gnomon s’insère dans un hémisphère<sup>7</sup>, cette ombre en crée une image semblable. Des observations élémentaires donnent alors accès aux notions de l’astronomie : les solstices correspondent aux inclinaisons extrêmes du soleil, les tropiques sont les lignes de la voûte céleste entre lesquelles la course du soleil est assujettie à rester... Le **principe premier** de ces observations est **l’égalité des angles opposés par le sommet** : c’est lui qui rend l’image de la voûte céleste conforme à celle-ci.



FIGURE 10 – Reproduction de la voûte céleste dans le *scaphe*

Les relations entre les propriétés des figures peuvent être analysées suivant une pensée intuitive. Une telle pensée est un outil de découverte que vient après coup confirmer une activité rationnelle. Considérez par exemple le problème suivant : *étant donné un triangle rectangle, l’inscrire dans un cercle*.

Si vous pensez le triangle rectangle comme un demi rectangle, vous n’aurez pas de difficulté à réaliser cette tâche qui laisse en revanche perplexes ceux qui le pensent comme un triangle ayant un angle droit<sup>8</sup>.

---

6. Ceux qui utilisent la raison (logos) pour étudier ce qui est (physis).

7. On ne connaît pas d’exemple de tel outil appelé ultérieurement *scaphe* dans la période archaïque grecque. Des historiens des sciences créditent les babyloniens de son invention.

8. Pas les professeurs de mathématiques, bien sûr !



FIGURE 11 – Deux visions du triangle rectangle

Ce concept de « pensée intuitive » est utilisé par Maurice Caveing. Il l'illustre dans le problème de la recherche du principe qui fonde la similitude des formes : le point de départ serait la perception de la similitude des polygones réguliers. Un triangle équilatéral ne serait donc pas un triangle à côtés isométriques, mais un polygone régulier à trois côtés. Des polygones réguliers ayant même nombre de côtés sont semblables comme les cercles le sont entre eux. Deux principes premiers de similitude peuvent être envisagés : l'égalité des angles correspondants ou la proportionnalité des longueurs de côtés correspondants. Les milésiens auraient choisi le premier, les pythagoriciens le second. On peut donc attribuer aux mathématiciens milésiens la création du concept d'angle et des propriétés (élémentaires) qui le définissent. Cette attribution est confortée par sa place centrale dans les deux problèmes évoqués plus haut.

- Les trois affirmations suivantes ne sont pas indépendantes (intuitivement).

(1) un cercle est partagé en deux parties égales par tout diamètre, dans le sens : les cordes sont bissectées par les diamètres qui leur sont perpendiculaires, ou aussi bien les diamètres sont des axes de symétrie<sup>9</sup> ;

(2) les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux ;

(3) deux triangles sont égaux s'ils ont deux angles et un côté égaux.

La figure ci-dessous illustre l'articulation de ces propositions. Il est équivalent de dire :

★ les triangles OIA et OIB sont isométriques (ou égaux, dans le sens où ils ont des côtés deux à deux de même longueur).

★  $IA = IB$ .

★ Les angles à la base du triangle isocèle sont égaux.

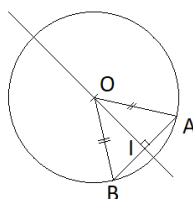


FIGURE 12 – Voir les propriétés des triangles isocèles

9. L'autre interprétation possible « un cercle est partagé en deux parties d'aires égales par tout diamètre » apporte de l'incohérence.

Dans notre paradigme, il est possible de démontrer que (1) et (3) impliquent (2) et que (2) et (3) impliquent (1). Ces démonstrations ne sont pas éloignées de l'intuition. Avant la production d'un corpus structuré comme celui des *Éléments*, autant ou plus encore qu'une étape *empirique*, est nécessaire une réflexion sur l'articulation logique entre les propriétés (plus généralement entre les affirmations) devant déboucher sur un choix de principes premiers, nos axiomes. Nous pensons que les mathématiciens ioniens peuvent en être crédités.

Les physiologues milésiens recherchent ainsi des articulations logiques entre les certitudes géométriques appuyées sur le visible. Ils travaillent sur des figures et utilisent un raisonnement textuel avec un objectif que nous pourrions formuler comme la recherche d'axiomes. Ce paradigme n'est pas le paradigme GII qui suppose déjà construit le cadre axiomatique, il n'est pas non plus le paradigme GI par la nature de ses problèmes et objets. Bien sûr, il n'est pas exclu qu'un ensemble de pratiques que nous associons à la géométrie ait pu vivre dans le milieu des arpenteurs, mais de manière totalement indépendante de celui que nous avons décrit.

## Pourquoi changer les pratiques ?

Les mathématiques grecques antiques évoquent généralement Euclide, Archimède ou Ptolémée. Elles se distinguent des mathématiques milésiennes par de nombreux aspects que nous ne pouvons bien sûr pas détailler. L'un d'entre eux concerne la pratique des preuves. Les démonstrations directes déduisent la conclusion de propositions considérées vraies qui peuvent être issues d'observations ou d'expérimentations. Au contraire, les preuves par réduction à l'absurde, comme la preuve de la proposition 2 du livre III des *Éléments*, portent sur des objets qui ne relèvent pas de la réalité. Nous donnons ci-dessous une adaptation du texte en langage moderne pour le rendre plus compréhensible en conservant le fil du raisonnement.

« **Théorème.** Le segment qui joint deux points quelconques d'un cercle est contenu dans le disque.

Soit le cercle ABC ; qu'on prenne deux points quelconques A, B, sur ce cercle ...

Si la corde [AB] n'est pas contenue dans le disque, supposons, s'il est possible, qu'elle passe par un point extérieur E ; soit D soit le centre du cercle ; menez les rayons [AD], [DB], et prolongez [DF] jusqu'en E.

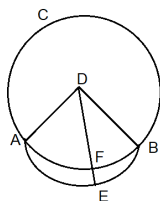


FIGURE 13 – Une corde qui ne serait pas à l'intérieur du disque !

Puisque DA est égal à DB, l'angle  $\widehat{DAE}$  sera égal à l'angle  $\widehat{DBE}$ <sup>10</sup>.  
 Et puisque l'on a prolongé un côté AEB du triangle DAE, l'angle  $\widehat{DEB}$  sera plus grand que l'angle  $\widehat{DAE}$ <sup>11</sup>.  
 Mais l'angle  $\widehat{DAE}$  est égal à l'angle  $\widehat{DBE}$  : donc l'angle  $\widehat{DEB}$  est plus grand que l'angle  $\widehat{DBE}$ <sup>12</sup> ; mais le plus grand côté est opposé à un plus grand angle : donc la droite DB est plus grande que la droite DE ; »

La fin du passage contient la partie rhétorique du raisonnement par l'absurde :

« ... mais DF est égal à DB : donc DF est plus grand que DE ; c'est-à-dire que la plus petite surpasse la plus grande, ce qui est impossible : donc le segment [AB] ne passe pas hors du cercle.

Nous démontrerons de la même manière qu'elle ne tombe pas dans la circonférence : donc elle tombe en-dedans du cercle. Donc si l'on prend deux points quelconques de la circonférence, le segment qui joint ces deux points tombe en-dedans du cercle ; ce qu'il fallait démontrer. »

Il est difficile de suivre les arguments de la preuve d'Euclide, puisque la représentation de la corde extérieure au cercle ne montre plus les propriétés. Durant le raisonnement, on utilise un concept formel de corde passant à l'extérieur d'un disque qui satisfait les propriétés d'une « droite »<sup>13</sup> sans en avoir la réalité. La présence d'une telle preuve est d'autant plus étonnante que la même démarche permet d'organiser une preuve sans la réduction à l'absurde : sans faire l'hypothèse que la corde passe par un point extérieur au cercle, on considère ici simplement E sur la corde et on utilise le même fil de raisonnement :

... menez les rayons [AD], [DB], et prolongez [DF] jusqu'en E. Puisque DA est égale à DB, l'angle  $\widehat{DAE}$  sera égal à l'angle  $\widehat{DBE}$ . Et puisque l'on a prolongé un côté AEB du triangle DAE, l'angle  $\widehat{DEB}$  sera plus grand que l'angle  $\widehat{DAE}$ . Mais l'angle  $\widehat{DAE}$  est égal à l'angle  $\widehat{DBE}$  : donc l'angle  $\widehat{DEB}$  est plus grand que l'angle  $\widehat{DBE}$  ; mais le plus grand côté est opposé à un plus grand angle : donc la droite DB est plus grande que la droite DE.

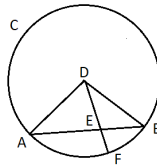


FIGURE 14 – Une corde qui est bien à l'intérieur du disque

10. Par égalité des angles à la base d'un triangle isocèle (prop. 5. I).

11. Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés (prop. 16. I).

12. Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle (prop. 18. I).

13. La notion de droite dans les *Éléments* n'est pas exactement la nôtre : il s'agit d'une famille de segments prolongeables sans limite. Nous conservons cet usage traditionnel pour traduire le mot *γραμμα*.

Ainsi ce n'est pas l'étude de l'espace qui a transformé la pratique de la géométrie de l'Antiquité et la nature de ses objets, mais l'apparition d'une nouvelle méthode de preuve, celle de la réduction à l'absurde. Mais il reste à s'interroger sur la nécessité de son apparition : comme dans le théorème ci-dessus, elle peut souvent être remplacée par une preuve directe.

## Conclusion

Quelles pistes de réflexion didactique dégager de ces déambulations en géométrie antique ? Notre souci premier était d'interroger les possibles fondements épistémologiques des géométries enseignées. Or la géométrie védique peut sembler présenter quelques similitudes avec la géométrie de l'école, telle que la géométrie I de Houdement et Kuzniak ou la géométrie des tracés de Marie-Jeanne Perrin. Les problèmes posés portent sur des figures matérielles, les techniques licites sont instrumentales et la validation largement empirique. Bien évidemment, les finalités de la géométrie védique et de la géométrie enseignée sont bien différentes. Il s'agit pour l'une d'ériger un corpus de techniques et de savoirs permettant la communication de protocoles de construction d'autels à la corde et aux piquets, pour l'autre d'accompagner les élèves dans un premier niveau de conceptualisation des objets de la géométrie. Toutefois, ce détour par les pratiques et textes hérités des Śulbavids n'est pas sans intérêt pour interroger les enjeux et potentialités didactiques de la géométrie de l'école. En premier lieu, il permet de mettre au jour la richesse des connaissances et savoirs géométriques qu'il est possible de tisser à partir de la résolution de problèmes de construction (ou de reproduction) instrumentée de figures matérielles. Le travail autour des instruments à l'école ne vise pas la production de tracés précis mais de tracés justes (Petitfour, 2015), régis par un usage géométrique des instruments qui réfère implicitement à des axiomes, définitions et théorèmes de la géométrie. Étudier les pratiques védiques amène également à prendre conscience de la possibilité de faire de la géométrie des tracés un lieu possible de raisonnement. Si la validation reste empirique, la justification d'un tracé ou la question de la validité d'une construction engagent dans des démarches de preuves intellectuelles. Quelles informations nécessaires et suffisantes doit-on par exemple communiquer à un tiers pour lui faire construire un rectangle (sans nommer la figure) ? Pourquoi la donnée de la longueur de 3 côtés consécutifs et de deux angles droits suffit ? Dans ce cas, pourquoi le troisième côté est nécessairement de même longueur que le côté qui lui est opposé ? Comment justifier que les deux autres angles sont obligatoirement droits ? D'autres programmes de construction sont possibles, pourquoi sont-ils équivalents ? Cette réflexion livre alors des pistes pour penser de possibles continuités entre géométries physique et théorique, bien que les objets d'étude soient de natures bien différentes.

La notion de paradigme, importée des théories de Kuhn, peut enrichir la réflexion des enseignants de mathématiques et des historiens, en attirant l'attention sur la nécessité de penser des pratiques relevant d'une cohérence globale et d'une forme de clôture à un instant donné. Il n'est pas sûr que l'on puisse faire l'hypothèse d'une telle cohérence du côté enseignement : la validité d'une pratique



mathématique scolaire est le plus souvent évaluée par les enseignants à l'aune de ce qu'ils considèrent comme des mathématiques savantes. Les tentatives pour en instituer qui auraient une cohérence indépendante des pratiques ultérieures (et souvent éventuelles) plus savantes sont rares<sup>14</sup>, timides et vouées à l'échec. De nombreuses recherches en didactique de la géométrie (Houdement et Kuzniak, Tanguay et Geeraets, Chesnais et al. et d'autres) ont mis en évidence les malentendus et difficultés ainsi générés par les confrontations entre les élèves (qui bien sûr les ignorent) et les enseignants (qui bien sûr les connaissent). Par exemple :

- un dessin au cycle 3 et cycle 4 peut être :
  - a) une schématisation d'objets, de relations et de propriétés géométriques ;
  - b) un objet matériel pris pour lui-même ;
  - c) un exemple générique d'une classe d'objets.

Les enseignants voient le dessin suivant a) et les élèves suivant b) ou c).

- Les conceptions de la droite ou du point des élèves de sixième sont plus proches de celles des mathématiciens grecs que de celles des mathématiciens du vingtième siècle, sous-jacentes aux conceptions des enseignants (mais rarement explicitement).

Une origine empirique est parfois attribuée à la connaissance de l'une ou l'autre des versions du théorème de Thalès.<sup>15</sup> Il est possible de lui opposer un **raisonnement intuitif** du type :

*Deux bâtons posés l'un sur l'autre produisent une ombre dont la longueur est la somme des longueurs des ombres de chacun. On passe ensuite aux multiples entiers par addition itérée, puis aux multiples fractionnaires par changement d'unité.*

Un tel raisonnement est implicite dans les exercices proposés sur ce sujet au cycle 3 ou au début du cycle 4. Il ne relève ni d'une démarche hypothético-déductive, ni de l'empirisme des sciences expérimentales. Il n'est cependant pas dénué de validité et montre qu'entre une *démarche empirique* et une *démarche hypothético-déductive*, il y a place pour un *raisonnement intuitif* qui ne relève pas de la pratique du physicien. Une étape dans laquelle les connaissances mathématiques seraient traitées comme une loi physique, à travers la mesure de grandeurs liées, n'est pas nécessaire : la propriété de Thalès est plus facile à construire suivant un raisonnement intuitif que suivant une démarche expérimentale.

Il faut aussi envisager la question du changement de paradigme à des fins pédagogiques : si l'enseignement de la géométrie se veut un passage d'un paradigme à un autre, quelles forces peuvent conduire les élèves à l'emprunter ? Une adhésion à une *démarche hypothético-déductive* en géométrie nécessite d'une part la prise de conscience de l'existence de liens rationnels entre connaissances géométriques,

14. Par exemple, les programmes de 2009 de bac professionnel ont tenté d'instituer une pratique des mathématiques fondées sur l'expérimentation.

15. Par exemple Sir Thomas Heath écrit dans *A History of Greek Mathematics* vol. 1 page 129-130 : « Thales could not have failed to observe that, at the time when the shadow of a particular object is equal to its height, the same relation holds for all other objects casting a shadow ; this he would probably infer by induction, after making actual measurements in a considerable number of cases at a time when he found the length of the shadow of one object to be equal to its height. »

d'autre part un besoin d'axiomes. Dans (Caveing, 1998, p. 499), on lit : « ... la connaissance du Cosmos est pour un Grec celle de l'Être même : en tant que telle, elle ne saurait souffrir d'être approchée ; il lui faut être "science", ce que précisément dit le mot "mathema". » On imagine bien que la connaissance de l'être même risque de ne pas être une force suffisante pour motiver un changement de paradigme au collège ! Le moteur de la recherche de principes premiers ne peut fonctionner dans l'enseignement. Si l'on y tient, il faut en trouver d'autres.

## Références bibliographiques

- BISSON Luc, MACÉ Arnaud & THERME Anne-Laure, 2012, *Lire les présocratiques*, (édition 2018), Paris, Presses Universitaires de France.
- CAVEING Maurice, 1997, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque, La figure et le nombre - Recherches sur les premières mathématiques des Grecs*, vol. 2, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion.
- CAVEING Maurice, 1998, *L'histoire des mathématiques de l'Antiquité*, Revue de Synthèse 119 (4), p.485-510.
- DELIRE Jean-Michel, 2016, *Les mathématiques de l'autel védique. Le Baudhāyana Śulbasūtra et son commentaire Śulbadīpikā*, Geneve, Droz.
- EUCLIDE, 1994, *Les Éléments*, vol. 1 à 4, notes et commentaires par Bernard Vitrac, Paris, PUF.
- HOUEMENT Catherine, 2007, « Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie », *Repères IREM*, 67, p. 69-84.
- HOUEMENT Catherine & KUZNIAK Alain, 2006, « Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, p. 175-193.
- KELLER Olivier, 2000, « La géométrie des sulbasutras. Exemple de géométrie rituelle de l'Inde védique : l'agrandissement de l'autel en forme de faucon », *Repères IREM*, 40, p. 115-124.
- KUHN Thomas S., 1962, *La Structure des révolutions scientifiques*, Paris, Flammarion, coll. « Champs », édition 1983.
- KICHENASSAMY Satyanad, 2006, « Baudhāyana's rule for the quadrature of the circle », *Historia Mathematica*, 33, p. 149-183.
- PETITFOUR Édith, 2015, *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème* Thèse de doctorat, Paris, Université Paris Diderot.
- SEN S.N., BAG A.K., 1983, *The Śulbasūtras of Baudhāyana, Āpastamba, Kātyāyana and Mānava*, New Dehli, Indian National Science Academy.
- TANGUAY Denis & GEERAERTS Loïc, 2012, « D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant », *Petit x*, 88, p. 5-24.
- THIBAUT George, 1875, *On the Śulbasūtras*, Calcutta, Baptist Mission Press.

## Comment structurer l'étude des expressions géométriques de la proportionnalité au cycle 4 ?

Frédéric LAURENT

### Introduction

Cet article est le fruit de travaux menés au sein du groupe AHMES (« Apports de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques aux enseignants du secondaire ») de l'IREM de Clermont-Ferrand. Ce groupe, constitué de neuf membres (deux professeurs en collège, cinq professeurs en lycée, un enseignant chercheur à l'Inspé de Clermont et un professeur en poste partagé entre un lycée et l'Inspé), s'est fixé comme objectif d'éclairer, grâce à l'histoire et l'épistémologie, un certain nombre des notions contenues dans les programmes officiels de mathématiques du secondaire. Dans ce cadre, le groupe se trouve être force de proposition pour la formation initiale et continue des enseignants au niveau de la région Auvergne en participant à une unité d'enseignement d'histoire et d'épistémologie des mathématiques auprès des étudiants professeurs stagiaires en Master 2 MEEF (et pour cela en produisant des documents de formation à leur intention) mais aussi dans le cadre du plan académique de formation, en concevant des stages pour les professeurs titulaires.

L'idée directrice du groupe est de montrer comment l'enseignant peut enrichir sa compréhension des concepts contenus dans les programmes d'enseignement et se familiariser avec des aspects didactiques de sa discipline en s'appuyant sur un éclairage historique et épistémologique. Ainsi, nous nous intéressons à des notions qui posent question, voire qui nous donnent des difficultés lors de notre travail de conception de séquences. Nous cherchons à mieux comprendre d'où viennent ces éventuelles difficultés dans le but de parvenir à les surmonter pour que, *in fine*, les élèves en soient les bénéficiaires lors de notre enseignement. Le recours à l'histoire n'est donc pas nécessairement visible par l'élève, mais fait partie de ce qu'il est coutume d'appeler le travail invisible de l'enseignant.

Dans le cadre de ces recherches, nous nous sommes plus particulièrement intéressés au théorème de Thalès au cycle 4 et, de façon plus globale, aux expressions géométriques de la proportionnalité au cours de ce même cycle. En effet, avec les programmes de collège de 2016, les triangles semblables ont fait leur réapparition, ce qui nous a conduits à nous interroger sur l'intégration de cette nouvelle notion à l'enseignement existant. Quelles stratégies pour les enseigner en lien avec le théorème de Thalès, les homothéties, les agrandissements-réductions ? Car, il nous semble que toutes ces notions sont proches et difficiles à organiser au sein d'une progression au cycle 4.

Si, d'après les recommandations officielles contenues dans les repères annuels de progression parus en 2018-2019<sup>1</sup>, le théorème de Thalès doit être enseigné aux niveaux 4<sup>e</sup> (configuration « des triangles emboîtés ») et 3<sup>e</sup> (configuration « papillon »), ce dernier a-t-il encore une quelconque utilité ? Sa présence ne constitue-t-elle pas un obstacle supplémentaire pour le professeur lors de la conception d'une progression ? Comment et pourquoi introduire ce fameux théorème ?

Nous tenterons de mettre en évidence les difficultés et les enjeux liés à l'enseignement de la proportionnalité en géométrie au cycle 4 grâce à des analyses de textes historiques mais également de productions d'élèves. Nous commencerons par mettre en évidence la cohabitation compliquée entre théorème de Thalès et proportionnalité en géométrie, puis chercherons, dans un corpus de textes historiques, à éclairer ces relations. Nous terminerons cette étude en soulignant la complexité et la multiplicité des expressions de la proportionnalité en géométrie et en proposant une réorganisation possible de son étude au cours du cycle 4.

## Analyse didactique

### La configuration type et la terminologie associée

Pour commencer, il nous semble important de faire une mise au point sur le vocabulaire que nous allons employer dans ce texte en rapport avec la configuration type que nous avons considérée (figure 1).

---

1. Dans le programme du cycle 4 paru au BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, on pouvait lire dans les repères de progressivité préconisés : « le théorème de Thalès est introduit en 3<sup>e</sup>, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions. [...] Les homothéties sont amenées en 3<sup>e</sup>, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques ». Ce texte officiel laissait les enseignants libres d'organiser leur progression sur l'ensemble du cycle 4 et, en particulier, n'imposait pas de niveau de classe pour l'introduction des triangles semblables. Ces repères ont été supprimés et remplacés par des repères de progression parus au BO n° 22 du 29 mai 2019. Selon ces nouvelles directives, l'introduction du théorème de Thalès dans la configuration « triangles emboîtés » et de sa réciproque doit avoir lieu en 4<sup>e</sup> tandis que la configuration « papillon » doit être abordée en 3<sup>e</sup> ainsi qu'une définition et une caractérisation des triangles semblables. C'est également en 3<sup>e</sup> que les homothéties sont traitées et que le lien avec le théorème de Thalès est établi.

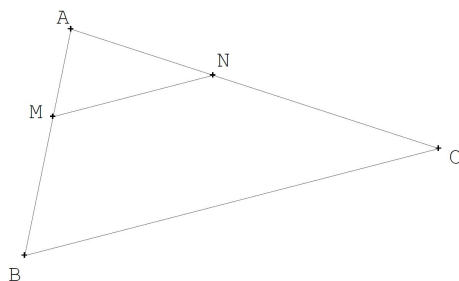


FIGURE 1 – « Configuration de Thalès »

Bien qu'il soit presque certain que le théorème qui fait l'objet de notre enseignement n'ait pas été formulé par Thalès lui-même (Herreman, IREM de Rennes<sup>2</sup>), du moins sous la forme ci-dessous que nous lui connaissons, nous parlerons du « théorème de Thalès » pour désigner l'énoncé : « si  $M$  et  $N$  sont deux points appartenant respectivement aux côtés  $(AB)$  et  $(AC)$  d'un triangle  $ABC$  et tels que les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  soient parallèles, alors  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$  ». Nous qualifierons parfois de « canoniques » ces égalités de rapports.

Nous évoquerons la « similitude des triangles » pour indiquer que, dans les conditions du théorème de Thalès précédemment décrit, les triangles  $AMN$  et  $ABC$  sont semblables. Rappelons que deux triangles sont semblables si l'un est l'image de l'autre par une similitude et que la similitude de deux triangles peut se caractériser de trois façons équivalentes (les « cas de similitude ») : par la proportionnalité des longueurs de deux côtés et l'égalité de l'angle adjacent à ces côtés, par l'égalité des trois angles (en réalité l'égalité de deux suffit), on parle alors de triangles équiangles, et enfin par la proportionnalité des longueurs des côtés. En classe, il est d'usage de donner l'une des deux dernières caractérisations comme définition de deux triangles semblables et de considérer l'autre comme une propriété.

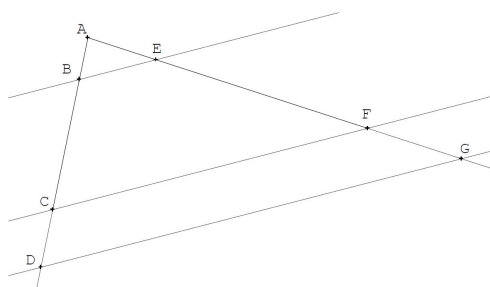


FIGURE 2 – « Configuration des lignes proportionnelles »

2. HERREMAN Alain, « Aux sources du théorème de Thalès », <http://thamous.univ-rennes1.fr/forums/forums/42/exportIrem/> (consulté le 02/11/2019)

Nous ferons parfois référence à la « configuration de Thalès » pour désigner la configuration géométrique obtenue avec les conditions du théorème de Thalès énoncé plus haut, à savoir la configuration des triangles emboîtés ou en position « papillon ». Enfin, nous parlerons du « théorème des lignes proportionnelles » pour désigner le théorème qui affirme que deux droites sécantes sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles (figure 2).

Nous dégageons ainsi trois façons principales d'exprimer la proportionnalité géométrique sous-jacente dans une configuration de Thalès : le théorème de Thalès, la similitude des triangles et le théorème des lignes proportionnelles.

Pour mettre en évidence les difficultés soulevées par le théorème de Thalès, tel qu'il se trouve enseigné aujourd'hui en France, nous avons soumis le problème suivant à des élèves de 3<sup>e</sup> et de 2<sup>nd</sup>e au début de l'année scolaire 2018-2019.

**Problème :**

$M$  et  $N$  sont deux points appartenant aux côtés  $[AB]$  et  $[AC]$  du triangle  $ABC$ . La droite  $(MN)$  est parallèle à la droite  $(BC)$ .

On donne :  $AM = 3$ ,  $MB = 6$ ,  $AN = 5$  et  $BC = 12$ . Calculer les longueurs  $NC$  et  $MN$ .

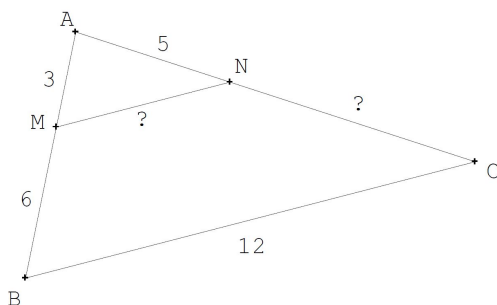


FIGURE 3 – Problème soumis aux élèves de 3<sup>e</sup> et de 2<sup>nd</sup>e

En choisissant cette configuration, nous souhaitons faire cohabiter des situations de proportionnalité différentes selon qu'on y voit la configuration de Thalès pour appliquer le théorème de Thalès (ou reconnaître deux triangles semblables) ou qu'on y voit une configuration des lignes proportionnelles. Parmi nos autres choix didactiques, il faut souligner celui qui concerne la façon d'indiquer les données numériques sur la configuration ; nous verrons, lors des analyses des productions d'élèves, que ces indications ont une conséquence dans les procédures suivies ou les erreurs éventuellement commises. Il en va de même pour le choix des valeurs numériques elles-mêmes. Notons au passage que nous avons commis l'abus de langage consistant à identifier grandeur et mesure de grandeur dans notre énoncé et que cet abus sera poursuivi dans la suite de cet article.

Mais plutôt que d'expliciter, de façon fastidieuse, l'ensemble de nos choix didactiques, nous proposons maintenant de passer à l'analyse des productions d'élèves. Ces analyses justifieront *a posteriori* certains des choix qui furent les nôtres pour mettre en évidence les problèmes liés à la proportionnalité contenue dans la figure.

## Analyse des productions des élèves de 3<sup>e</sup>

Nous présentons ici trois productions, les plus intéressantes et caractéristiques à nos yeux, parmi celles des élèves de la classe de 3<sup>e</sup> (figures 4, 5 et 6). Précisons que l'ensemble des élèves de la classe à qui le problème a été soumis n'avait pas encore étudié le théorème de Thalès. Ils n'avaient donc à leur disposition éventuelle, que la similitude des triangles, notion que leur professeur avait étudiée l'année précédente (en classe de 4<sup>e</sup>)<sup>3</sup>.

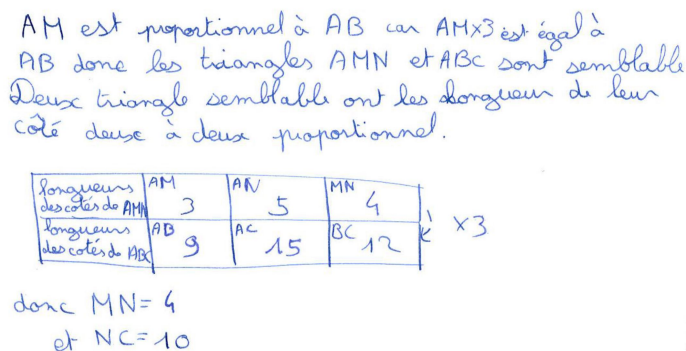


FIGURE 4 – Production d'un élève de 3<sup>e</sup>, désigné par « élève A »

L'élève A utilise la similitude des triangles  $AMN$  et  $ABC$ . Il ne justifie pas correctement la similitude de ces deux triangles : en effet, il semble justifier leur similitude par la présence d'une certaine « proportionnalité dans la configuration ». Puis il cite le théorème évoquant la proportionnalité des longueurs des côtés de deux triangles semblables pour déterminer les longueurs manquantes. Pour ce faire, il a recours au registre des tableaux dans lequel il indique de façon précise « longueurs des côtés du triangle  $AMN$  » et « longueurs des côtés du triangle  $ABC$  ». Sur ce tableau de proportionnalité, il met en évidence le coefficient de proportionnalité 3. Ses calculs de  $MN$  et  $NC$  sont corrects (mais il ne détaille pas le passage de  $AC$  à  $NC$ ).

3. Précisions à nouveau que les programmes du cycle 4 de l'époque laissaient les enseignants libres d'organiser l'apprentissage des triangles semblables au cours du cycle 4, voire encourageaient leur étude en classe de 4<sup>e</sup> (dans les accompagnements de programmes il était écrit que les triangles semblables fournissent un vocabulaire commode dans les différents énoncés du théorème de Thalès). De plus, en classe de 5<sup>e</sup>, les élèves étaient amenés (et le sont toujours) à travailler sur les cas d'égalité des triangles. Une telle étude conduit naturellement à se poser la question de savoir si la donnée des trois angles d'un triangle suffit à déterminer un triangle de façon unique ; en d'autres termes, savoir si deux triangles équiangles sont égaux ou non. Dans cette logique, les triangles semblables sont définis par l'enseignant comme des triangles équiangles (ce que l'on trouve dans nombre de ressources pour la classe). Indiquons que cette définition n'interdit pas de s'intéresser aux agrandissements ou réductions de polygones de façon plus générale. Dans tous les cas, les triangles semblables sont ensuite caractérisés par la proportionnalité des longueurs de leurs côtés. L'objet de cet article est précisément de questionner l'agencement de ces différentes notions.

On sait que  $M$  coupe  $[AB]$  en  $\frac{2}{3}$  tiers,  $\frac{1}{3}$  tiers, et que  $[MN]$  est parallèle à  $[BC]$  ce qui veut dire qu'elle coupe  $[AC]$  en  $\frac{2}{3}$  tiers,  $\frac{1}{3}$  tiers également.  
 Et que d'ailleurs  $B \times B \times B = 15$   
 Alors  $[NC] = 10$

$[MN]$  :  
 car les triangles  $ABC$  et  $AMN$  sont semblables  
 $3 \times 2 = 6$   
 $5 \times 2 = 10$   
 Alors  $6 \times 2 = 12$  Alors  $[MN] = 6$

FIGURE 5 – Production d'un élève de 3<sup>e</sup>, désigné par « élève B »

L'élève B quant à lui utilise deux procédures différentes : les lignes proportionnelles et la similitude. Pour le calcul de  $NC$ , il évoque la proportionnalité induite par le tracé de la parallèle : il fait donc référence, sans le savoir, au théorème des lignes proportionnelles. Il obtient le rapport 2 en expliquant clairement que la droite parallèle coupe un côté du triangle en « deux tiers – un tiers » donc qu'elle doit couper l'autre côté dans la même proportion. Il calcule  $AC$  (en écrivant d'ailleurs  $5 \times 5 \times 5$  au lieu de  $5 + 5 + 5$  ou de  $3 \times 5$ ) puis en déduit la bonne longueur pour  $NC$ . Cet élève a le contrôle de son résultat grâce la proportion « deux tiers – un tiers » traduite par le coefficient de proportionnalité 2. Pour le calcul de  $MN$ , cet élève évoque la similitude des triangles  $AMN$  et  $ABC$ . Il doit changer de procédure car la proportionnalité cachée entre  $MN$  et  $BC$  ne semble plus évidente. Il exprime donc  $BC$  en fonction de  $MN$ , mais en utilisant le même rapport que précédemment. Il obtient donc 6 à la place de 4. Cet élève n'a pas conscience que le rapport de similitude n'est pas égal au rapport utilisé précédemment avec les lignes proportionnelles. On observe ainsi que l'évidente proportionnalité générée par les lignes proportionnelles (i.e. le partage deux tiers – un tiers) perturbe l'application du théorème sur les triangles semblables.

c'est de la proportionnalité

$6 : 3 = 2$   
 $[BC] : 2 =$   
 $12 : 2 = 6$  donc  $MN = 6$

$[AN] \times 2 = 5 \times 2 = 10$  donc  $NC = 10$

3	5	12
6	10	6

↙ 2      ↘ 2

FIGURE 6 – Production d'un élève de 3<sup>e</sup>, désigné par « élève C »

L'élève C fait uniquement référence à de la « proportionnalité » sans citer



la similitude de deux triangles. Il met en évidence, comme l'élève B, mais sans l'expliquer en français, le rapport 2 des lignes proportionnelles. Il utilise ensuite ce rapport pour trouver  $MN = 6$  et  $NC = 10$ . Pour déterminer ces valeurs, l'élève semble avoir eu recours au registre des tableaux (tableau de proportionnalité) mais cette représentation ne paraît pas pleinement maîtrisée : le dernier couple de valeurs étant inversé, deux rapports différents sont en jeu (2 et  $1/2$ ) dans le même tableau de proportionnalité.

Pour conclure, on constate que certains élèves évoquent de façon naturelle la proportionnalité. Et n'ont-ils pas raison de le faire ? Car, en effet, si dans le domaine du numérique, on leur avait posé le problème suivant : « On a payé 5 € pour l'achat de 3 pâtisseries. Combien doit-on payer pour acheter 6 pâtisseries ? », nous aurions trouvé assez naturel qu'ils répondent 10 € sans autre justification. Ils ont donc conscience que cette configuration de Thalès contient de façon intrinsèque des grandeurs proportionnelles. Si cette perception peut être purement intuitive pour certains, elle peut aussi s'expliquer par le souvenir de connaissances scolaires qu'ils ne parviennent pas à restituer (car ils ont étudié ce type de configuration en classe l'année précédente et peuvent se rappeler que la figure contenait « de la proportionnalité »), mais aussi par des pratiques antérieures (utilisation d'un guide-âne ou des lignes du cahier pour partager des segments) ou encore par le fait que le modèle de proportionnalité est celui vers lequel ils se tournent naturellement car il est simple et familier. Dans tous les cas, ils n'ont pas de difficulté à expliciter la proportionnalité générée par le tracé de la parallèle : cette droite permet de reporter le découpage proportionnel d'un côté du triangle sur un autre côté. C'est un peu le pendant géométrique du problème numérique précédent : notre choix d'indiquer les valeurs numériques sur la configuration conduit donc les élèves à interpréter la figure comme une représentation de la proportionnalité (un peu à la façon d'un tableau de proportionnalité dans le domaine du numérique). En revanche, ils ne réalisent pas que la figure contient d'autres grandeurs proportionnelles, notamment la proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles déterminés par la parallèle. Il faut également signaler que, pour ce faire, les élèves doivent mettre en relation des segments inclus les uns dans les autres ( $[AM] \subset [AB]$  et  $[AN] \subset [AC]$ ), ce qui est moins évident que de mettre en relation des segments juxtaposés, tels que  $[AM]$  et  $[MB]$  ; mise en relation facilitée par le choix des indications numériques sur la figure.

Dans la suite de notre étude, nous avons donc décidé de distinguer deux procédures parmi celles qui ont été observées au collège : nous avons désigné par S les procédures relevant de la similitude des triangles avec deux sous-catégories S1 et S2, sans tenir compte des justifications préalables mais en se focalisant uniquement sur la mise en œuvre de la proportionnalité. Plus précisément, la dénomination S1 caractérise les procédures relevant d'une utilisation tout à fait correcte de la proportionnalité dans le cadre de la similitude des triangles, tandis que la dénomination S2 caractérise celles qui témoignent d'une difficulté dans la compréhension de la proportionnalité sur la globalité de la figure à cause de la perturbation engendrée par le théorème des lignes proportionnelles. Enfin, par la lettre P, nous évoquerons les procédures qui s'apparentent à celles de l'élève C qui dit simplement : « c'est de la proportionnalité » !

## Analyse des productions des élèves de 2<sup>nde</sup>

Les élèves de 2<sup>nde</sup> ayant tous étudié le théorème de Thalès au collège, on distingue de nouvelles solutions au problème, d'ailleurs les plus nombreuses. Nous avons désigné par T les procédures relevant du théorème de Thalès avec une distinction, comme précédemment, entre les procédures type T1 qui montrent une utilisation convenable des rapports de proportionnalité lors de l'application du théorème (nous n'avons donc pas pris en compte les justifications préalables expliquant pourquoi le théorème s'applique dans cette configuration) et les procédures de type T2 dans lesquelles une erreur relevant de la compréhension de la proportionnalité sous-jacente à la figure est constatée.

type T1	type T2
<p>Réponse (laisser apparentes toutes vos traces de recherche, tous vos calculs) :</p> <p>Dans le triangle ABC les points AMB sont alignés de même que les points ANC sont alignés. N ∈ AC et M ∈ AB, MN // BC d'après le théorème de Thalès donc :</p> $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ $\frac{5}{12} = \frac{3}{9} = \frac{MN}{12}$ $5 \times 9 = 15$ $15 - 5 = 10 \text{ cm}$ <p>NC est égale à 10 cm.</p>	<p>Réponse (laisser apparentes toutes vos traces de recherche, tous vos calculs) :</p> <p>Je sais que [AB] et [AC] sont 2 droites sécantes en A et je sais (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :</p> $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad k = \frac{3}{6} = 2$ $\frac{3}{6} = \frac{5}{AC} = \frac{MN}{12}$ <p>On connaît le rapport k = 2.</p> $AC = 2 \times 3 \quad MN = 12 : 2 = 10$ <p>la longueur (MN) est de 6. j'élève AN a AC pour trouver NC. 10 - 5 = 5.</p> <p>la longueur (NC) est de 5.</p>
<p>Réponse (laisser apparentes toutes vos traces de recherche, tous vos calculs) :</p> <p>On sait que (MN) et (BC) sont parallèles et que :</p> <p>AM = 3 ; MB = 6 ; AN = 5 et BC = 12</p> <p>On d'après le théorème de Thalès</p> $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{5}{12} = \frac{MN}{12}$ <p>Donc NC = 15 et MN = 4</p>	<p>Réponse (laisser apparentes toutes vos traces de recherche, tous vos calculs) :</p> <p>D'après le théorème de Thalès :</p> $\frac{BC}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC} \quad \text{soit } \frac{12}{MN} = \frac{3}{6} = \frac{5}{NC}$ $MN = \frac{12 \times 6}{5} = 24 \quad \text{et} \quad NC = \frac{6 \times 5}{5} = 10$ <p>La longueur NC mesure 10 et la longueur MN mesure 24.</p>

FIGURE 7 – Productions d'élèves de 2<sup>nde</sup>

Les procédures S1 et S2, évoquées lors de l'analyse des productions des collégiens, sont elles aussi observées dans les méthodes choisies par les lycéens, mais elles apparaissent moins fréquemment que le recours au fameux théorème.

Le recours simple à de la proportionnalité, c'est-à-dire une résolution ne s'appuyant ni sur le théorème de Thalès ni sur la similitude des triangles et désignée plus haut par la lettre P, est également observé. Toutes les autres procédures erronées (utilisation du théorème de Pythagore par exemple et dans la plupart des cas) seront regroupées sous la lettre A.

Avec cette terminologie désormais complète, voici les données statistiques, per-

mettant de dresser le bilan de nos observations en classe de 2<sup>nde</sup>, que nous avons recueillies :

- procédures utilisées par les élèves de 2<sup>nde</sup> selon notre classification :

procédure	T1	T2	S1	S2	P	A	∅	total
effectif	96	69	11	4	12	23	8	223
fréquence	43 %	31 %	5 %	2 %	5 %	10 %	4 %	100 %

- résumé des différentes valeurs trouvées pour les longueurs MN et NC pour tous les élèves ayant utilisé une procédure autre que A (192 élèves au total) :

procédures	valeurs					
	$MN = 4$	$MN = 6$	autre valeur de $MN$	$NC = 10$	$NC = 5$	autre valeur de $NC$
T1	85	0	3	71	0	6
T2	0	60	3	25	21	3
S1	9	0	0	5	1	0
S2	0	4	0	3	0	0
P	2	2	4	11	0	0
<b>eff. total</b>	<b>96*</b>	<b>66</b>	<b>10</b>	<b>115**</b>	<b>22</b>	<b>9</b>

\* soit environ 43 % de réussite

\*\* soit environ 52 % de réussite

Dans ce dernier tableau, nous constatons que la longueur  $NC$  est plus souvent correctement calculée que la longueur  $MN$ . Nous voyons deux raisons à cela.

D'abord les élèves ayant commis une erreur dans l'application du théorème de Thalès ou des triangles semblables (procédures T2 et S2) parviennent, malgré cette erreur, pour plus d'un tiers d'entre eux à calculer correctement  $NC$ . En effet, en utilisant (de façon consciente ou non) le rapport 2 des lignes proportionnelles, ils peuvent déterminer  $NC$  de façon correcte même si  $MN$  est erroné.

Ensuite, un certain nombre d'élèves (env. 5 %) n'ont pas utilisé les connaissances enseignées (théorème de Thalès ou triangles semblables) pour calculer la longueur  $NC$  mais ont simplement évoqué une proportionnalité « sous-jacente » à la figure (principalement les rapports des lignes proportionnelles, beaucoup plus rarement les rapports de projection). Cette compréhension intuitive de la configuration leur permet de déterminer correctement la longueur  $NC$  même s'ils ne parviennent pas à calculer la longueur  $MN$ . Il peut même arriver qu'un élève donne une bonne réponse pour  $NC$  sans laisser de trace de justification car il « voit » la proportionnalité et n'éprouve pas le besoin de le dire !

Sur ces données, nous observons également un autre phénomène très intéressant : les élèves ayant utilisé convenablement leurs outils (procédures T1 ou S1) parviennent en majorité à calculer correctement  $MN$  (env. 88 %) plutôt que  $NC$  (seulement 71 %). Cela peut sembler paradoxal car la longueur la plus accessible, compte tenu du choix de nos variables didactiques pour la situation, est  $NC = 10$ . Ce phénomène s'explique par le fait que ces deux outils font intervenir directement  $MN$  dans la traduction géométrique de la proportionnalité, mais pas  $NC$ . La longueur  $NC$  doit être calculée après avoir déterminé  $AC$ , longueur qui apparaît explicitement dans les rapports au même titre que  $MN$ . Ainsi, plusieurs élèves

calculent  $AC$  et pensent avoir trouvé la longueur  $NC$ . D'autres oublient tout simplement de calculer la longueur  $NC$  et ne traitent que le calcul de  $MN$ . On note donc que le théorème de Thalès, ou sa version triangles semblables, brouille la perception d'une proportionnalité plus évidente liée à la configuration. Il est clair que les élèves appliquent une procédure de façon mécanique (voire automatique) sans garder le contrôle du résultat.

Quant aux élèves relevant des procédures T2 ou S2, ils trouvent, aux erreurs de calcul près, que  $MN = 6$  (env. 93 % d'entre eux trouvent cette valeur). Ceux qui relèvent de T2 peuvent être classés en deux sous-catégories :

- ceux qui écrivent une égalité de rapports correcte, comme  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ , mais remplacent  $AB$  par 6 au lieu de 9 ;
- ceux qui écrivent une égalité de rapports incorrecte, par exemple :  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$ .

Avec un premier niveau de lecture, on peut penser que les élèves ayant remplacé  $AB$  par 6 au lieu de 9, ont commis une étourderie. Mais la fréquence de cette erreur interroge : s'agit-il simplement d'une étourderie ?

Pour une partie d'entre eux, nous pouvons le supposer, mais l'origine de cette erreur est sans doute plus profonde. Elle est vraisemblablement liée à la situation soumise aux élèves dans laquelle nous avons choisi d'indiquer les longueurs sur la figure. Les élèves perçoivent de façon intuitive la proportionnalité contenue dans le partage du segment  $[AB]$  par la parallèle ( $MN$ ) (ils « voient » écrit le rapport  $3/6$ ). D'ailleurs, certains font explicitement référence à un rapport :

**Réponse** (laisser apparentes toutes vos traces de recherche, tous vos calculs) :

Je sais que  $[AB]$  et  $[AC]$  sont 2 droites sécantes en  $A$  et  
 je sais que  $(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles.  
 D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad k = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{AC} = \frac{MN}{12}$$

On connaît le rapport  $k = \frac{1}{2}$ .

$$AC = 2 \times 5 = 10 \quad MN = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

La longueur  $(MN)$  est de 6.  
 J'enlève  $AN$  à  $AC$  pour trouver  $NC$ .  
 $10 - 5 = 5$ .

La longueur  $(NC)$  est de 5.

FIGURE 8 – Production d'un élève de 2<sup>nde</sup>

Cela témoigne non pas d'une simple étourderie mais du repérage d'un rapport de proportionnalité évident sur la figure qui génère une confusion. Le problème est que ce rapport de 2 (ou  $1/2$  selon l'interprétation) n'est pas celui qui est en jeu dans

l'application du théorème de Thalès (3 ou  $\frac{1}{3}$ ). Les élèves n'ont pas conscience que deux traductions de la proportionnalité contenue dans la figure sont en conflit.

Enfin, s'il s'agissait d'une simple étourderie, nous ne devrions pas constater que des élèves ayant convenablement écrit les égalités de rapports du théorème de Thalès parviennent à déterminer la réponse correcte  $NC = 10$ . Comment y parviennent-ils ? Tout simplement en substituant  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  à l'égalité  $\frac{3}{6} = \frac{5}{NC}$ , autrement dit, en basculant en cours de route vers l'exploitation des rapports fournis par le théorème des lignes proportionnelles.

Pour conclure, il nous semble que le théorème de Thalès a tendance à enfermer quelques élèves dans une procédure mécanique dont ils perdent le sens. Nombreux sont ceux qui parviennent au résultat  $NC = 5$  mais ne remettent pas en cause leur réponse. La réponse est celle produite par le théorème et le calcul d'une quatrième proportionnelle. Si la configuration trouble leur application du théorème de Thalès, elle ne leur permet pas, *a posteriori*, de vérifier la cohérence de leur réponse.

D'autre part, une partie des élèves aimerait se dégager du carcan du théorème de Thalès pour calculer  $NC = 10$ , qui leur paraît comme une évidence graphique, en exploitant d'autres rapports. Mais comme ils n'ont pas conscience que ces rapports ne sont pas les mêmes que ceux du fameux théorème, cela les conduit à une valeur erronée de  $MN$ . Cela montre que tous les élèves n'identifient pas des côtés de deux triangles lorsqu'ils écrivent les rapports de longueurs fournis par le théorème de Thalès : ils dissocient donc ce théorème de celui des triangles semblables alors qu'il n'en est qu'un cas particulier. Pour ces raisons, il nous semble que l'égalité  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$  n'est pas perçue comme une représentation de la proportionnalité chez de nombreux élèves, alors que l'utilisation des triangles semblables conduit à une représentation plus stable (parfois aidée d'un tableau de proportionnalité). Notons que ce sentiment est renforcé par le fait qu'une infime partie des élèves s'autorise à écrire l'égalité des rapports inverses, comme s'ils avaient reçu la consigne de diviser systématiquement la plus petite longueur par la plus grande.

Au niveau global, une large majorité des élèves de seconde fait référence au théorème de Thalès (env. 74 %) et très peu utilisent la similitude des triangles (moins de 7%). Il est à noter que certains élèves n'écrivent qu'une suite d'égalités de rapports sans évoquer le nom de Thalès, mais l'écriture « canonique » de ces rapports semble privilégier le théorème de Thalès aux triangles semblables. D'autres, plus rares encore, évoquent à la fois le théorème de Thalès et la similitude des triangles, mais utilisent l'écriture « canonique » des rapports pour calculer les longueurs manquantes (pas de recours à des tableaux de proportionnalité par exemple). Cette utilisation massive du théorème de Thalès peut avoir plusieurs explications.

La première raison peut provenir d'un effet de « culture collective » : au collège, tout individu a étudié les célèbres théorèmes de Thalès et de Pythagore. Parfois les élèves connaissent les noms de ces deux mathématiciens grecs avant même d'avoir étudié les théorèmes en classe. La seconde est que le théorème de Thalès permet une justification plus courte : les élèves font juste le recensement des hypothèses (les points alignés et la parallèle) alors que l'emploi de la similitude oblige à prouver dans un premier temps que les deux triangles sont équiangles. La troisième

raison est que le théorème de Thalès est associé à la configuration de Thalès : les élèves sont conditionnés à reconnaître une « figure clé » lorsque deux triangles sont emboîtés ou en position « papillon ». Cette configuration a peut-être tendance à masquer la similitude des deux triangles, comme s'il s'agissait de deux énoncés indépendants (un théorème chasse l'autre). La quatrième raison est que le théorème de Thalès permet une traduction de la proportionnalité plus calculatoire, ce qui peut être perçu comme un avantage : l'égalité des trois rapports évite par exemple l'énoncé en français de la proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles, mais aussi le registre des tableaux pour exprimer la proportionnalité. De plus, suite à ces égalités, les élèves calculent de façon automatisée les quatrième proportionnelles manquantes en laissant une trace de leurs calculs : cette méthode a peut-être la préférence des professeurs pour des raisons pédagogiques. Les élèves produisent tous le même raisonnement alors que l'utilisation de la proportionnalité des longueurs des côtés peut donner lieu à toutes les procédures connues pour traiter de proportionnalité : retour à l'unité, homogénéité, coefficients de proportionnalité, produits en croix, etc. Enfin, la cinquième et dernière raison que nous avançons, est que, selon les repères de progressivité des programmes (du moins jusqu'en 2018)<sup>4</sup>, le théorème de Thalès constitue un outil plus récent dans le cursus des élèves que la similitude des triangles.

## Bilan de l'analyse didactique

Pour résumer toute cette étude, nous pouvons dire que, sur la configuration de Thalès, le théorème des lignes proportionnelles semble être, conformément à nos hypothèses, une expression plus naturelle, voire intuitive, d'une proportionnalité de longueurs sous-jacente à la figure. Mais cette expression entre clairement en conflit avec le théorème de Thalès de plusieurs façons. Certains élèves s'appuient sur l'évidence des lignes proportionnelles et mélangent, tôt ou tard, les rapports du partage proportionnel avec le rapport d'agrandissement-réduction contenu dans le théorème de Thalès. À l'inverse, d'autres s'appuient sur l'évidence du théorème de Thalès liée à la figure clé mais perdent le contrôle de l'évidente proportionnalité du partage.

Enfin, le théorème de Thalès n'est pas perçu comme un cas particulier de la similitude des triangles et la méthode générale de la similitude est délaissée au profit de cet outil entraînant une perte de sens concernant la représentation et l'expression de la proportionnalité. En appliquant ce théorème, certains élèves n'ont plus pleinement conscience d'un problème de proportionnalité et la détermination des longueurs manquantes est réalisée par une procédure automatisée utilisant l'égalité des produits en croix, qu'il serait peut-être bon de nommer, comme par le passé, recherche de la quatrième proportionnelle.

Ainsi, il nous semble que vu son caractère intuitif et sa faculté à représenter géométriquement la proportionnalité, le théorème des lignes proportionnelles constitue un noyau primitif qu'il serait bon d'explicitier aux élèves, plutôt que de le cacher. Ensuite, la procédure de la similitude des triangles devrait être privilégiée à celle plus mécanique du théorème de Thalès, dans la mesure où elle permet une

---

4. Voir note précédente.

meilleure identification de grandeurs proportionnelles tout en étant aussi efficace et plus générale.

Nous allons montrer à présent, par le biais de lectures de textes fondateurs, de quelle façon la proportionnalité contenue dans la configuration de Thalès a été exprimée et comment s'est articulée autour d'elle l'étude de la similitude des triangles. Nous verrons très rapidement que cette expression de la proportionnalité n'a pas pris la forme du théorème de Thalès tel que nous l'enseignons.

## Analyse historique

### Les textes du corpus

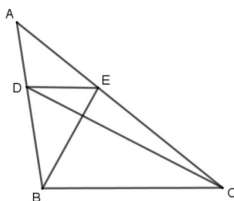
Pour mettre en évidence les expressions de la proportionnalité en géométrie au cours de l'histoire, nous avons constitué un corpus de textes incluant des extraits du livre VI des *Éléments* d'Euclide (vers 300 av. J.-C.), de *La Géométrie* de Descartes (1637), des *Éléments de géométrie* de Clairaut (1753) ainsi que des *Éléments de géométrie* de Lacroix (1799).

Malheureusement, le temps contraint en formation (qu'elle soit initiale ou continue) ne nous autorise pas à tous les étudier. Nous avons décidé de nous limiter à l'étude et à la comparaison de deux textes parmi les précédents car la lecture d'un texte, même accompagnée d'un formateur, est une activité qui nécessite du temps. Nous allons donc, dans cet article également, nous limiter à ces deux textes, en l'occurrence ceux d'Euclide et de Clairaut, et inviter le lecteur à découvrir (ou à redécouvrir) par lui-même les deux autres à titre de complément.

**Texte n°1** : propositions 2 et 4 extraites du livre VI des *Éléments* d'Euclide dans la traduction de François Peyrard (Euclide, 1804).

#### « Proposition 2

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle [...].



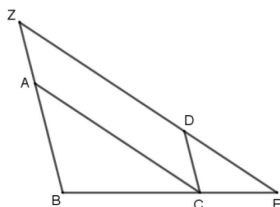
Menons  $DE$  parallèle à un des côtés  $BC$  du triangle  $ABC$  ; je dis que  $BD$  est à  $DA$  comme  $CE$  est à  $EA$ . [...]

Le triangle  $BDE$  sera égal au triangle  $CDE$ , parce qu'ils ont la même base, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles  $DE$ ,  $BC$ . Mais  $ADE$  est un autre triangle ; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur ; donc le triangle  $BDE$  est au triangle  $ADE$  comme le triangle  $CDE$  est au triangle  $ADE$ . Mais le triangle  $BDE$  est au triangle  $ADE$  comme  $BD$  est à  $DA$  ; car ces deux triangles, qui

ont même hauteur, à savoir la perpendiculaire menée du point  $E$  sur la droite  $AB$ , sont entre eux comme leurs bases. Par la même raison le triangle  $CDE$  est au triangle  $ADE$  comme  $CE$  est à  $EA$ ; donc  $BD$  est à  $DA$  comme  $CE$  est à  $EA$ . [...]

#### Proposition 4

Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels; et les côtés qui sous-tendent les angles égaux sont homologues.



Soient les triangles équiangles  $ABC$ ,  $DCE$ , ayant l'angle  $BAC$  égal à l'angle  $CDE$ , l'angle  $ACB$  égal à l'angle  $DEC$  et, l'angle  $ABC$  égal à l'angle  $DCE$ ; je dis que dans les triangles  $ABC$ ,  $DCE$ , les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et que les côtés qui sous-tendent les angles égaux sont homologues.

Plaçons la droite  $BC$  dans la direction de  $CE$ . Et puisque les angles  $ABC$ ,  $ACB$  sont plus petits que deux droits, et que l'angle  $ACB$  est égal à l'angle  $DEC$ , les angles  $ABC$ ,  $DEC$  sont plus petits que deux droits; donc les droites  $BA$ ,  $ED$ , étant prolongées, se rencontreront<sup>5</sup>; qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent en  $Z$ . Et puisque l'angle  $DCE$  est égal à l'angle  $ABC$ , la droite  $BZ$  est parallèle à la droite  $CD$ . De plus, puisque l'angle  $ACB$  est égal à l'angle  $DEC$ , la droite  $AC$  est parallèle à  $ZE$ ; donc la figure  $ZACD$  est un parallélogramme; donc  $ZA$  est égal à  $DC$ , et  $AC$  est égal à  $ZD$ . Et puisqu'un des côtés  $AC$  du triangle  $BCA$ , est parallèle au côté  $ZE$ ,  $BA$  est à  $AZ$  comme  $BC$  est à  $CE$ , mais  $AZ$  est égal à  $CD$ ; donc  $BA$  est à  $CD$  comme  $BC$  est à  $CE$ , et, par permutation,  $AB$  est à  $BC$  comme  $DC$  est à  $CE$ . De plus, puisque  $CD$  est parallèle à  $BZ$ ,  $BC$  est à  $CE$  comme  $ZD$  est à  $DE$ . Mais  $ZD$  est égal à  $AC$ ; donc  $BC$  est à  $CE$  comme  $AC$  est à  $ED$ , et, par permutation,  $BC$  est à  $CA$  comme  $CE$  est à  $ED$ . Et puisqu'on a démontré que  $AB$  est à  $BC$  comme  $DC$  est à  $CE$ , et que  $BC$  est à  $CA$  comme  $CE$  est à  $ED$ ,  $BA$  sera à  $AC$  comme  $CD$  est à  $DE$ . Donc, etc. »

**Texte n°2 :** chapitres 33, 34, 35 et 39 extraits des *Éléments de géométrie* de Clairaut, dans l'édition de 1853 mise en accord avec le système métrique.

5. Le fait que les droites  $BA$  et  $ED$  se rencontrent résulte de la cinquième demande d'Euclide que l'on nomme souvent « postulat des parallèles ». Dans l'édition des *Éléments* choisie, datant de 1804, Peyrard renvoie à la 11<sup>e</sup> notion commune à titre de justification, mais dans son édition ultérieure de 1819, les notions communes sont au nombre de neuf et la 11<sup>e</sup> est devenue 5<sup>e</sup> demande.



**33.**

*Utilité de savoir construire des figures semblables à des figures données.*

La méthode qu'on vient de donner pour mesurer les terrains dans lesquels on ne saurait tirer des lignes fait souvent naître de grandes difficultés dans la pratique. On trouve rarement un espace uni et libre assez grand pour faire des triangles égaux à ceux du terrain dont on cherche la mesure; et même quand on en trouverait, la grande longueur des côtés des triangles pourrait rendre les opérations très-difficiles. Abaisser une perpendiculaire sur une ligne, d'un point qui en est éloigné seulement de 1 000 mètres, serait un ouvrage extrêmement pénible et peut-être impraticable. Il importe donc d'avoir un moyen qui supplée à ces grandes opérations.

Ce moyen s'offre comme de lui-même. Il vient bientôt dans l'esprit de représenter la figure à mesurer ABCDE (fig. 34 et 35) par une figure semblable *abcde*, mais

Fig. 34.

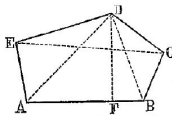
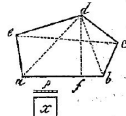


Fig. 35.



plus petite, dans laquelle, par exemple, le côté *ab* soit de 100 décimètres, si le côté AB est de 100 mètres, le côté *bc* de 45 décimètres, si BC est de 45 mètres; et da conclure ensuite que si l'étendue de la figure réduite *abcde* est de 60 000 décimètres carrés, celle de la figure ABCDE doit être de 60 000 mètres carrés.

Mais, avant toutes choses, il faut savoir en quoi consiste la ressemblance ou similitude de deux figures.

**34.**

*En quoi consiste la similitude de deux figures.*

Pour peu qu'on y réfléchisse, on reconnaîtra bientôt que les deux figures ABCDE, *abcde* (fig. 34 et 35), pour être semblables, doivent être telles, que les angles A, B, C, D, E, de la grande soient égaux aux angles *a, b, c, d, e*, de la petite, et que, de plus, les côtés *ab, bc, cd, etc.*, de la petite contiennent autant de parties *p* que les côtés AB, BC, CD, etc., de la grande contiennent de parties P.

**35.**

*Les figures semblables ont les côtés homologues proportionnels.*

Pour que deux figures soient semblables, les géomètres disent qu'il faut que les côtés AB, BC, CD (fig. 34, 35), etc., soient proportionnels aux côtés *ab, bc, cd, etc.*; ou que le côté AB contienne *ab* de la même manière que BC contient *bc, etc.*; ou que le côté AB soit aussi grand, par rapport à *ab*, que BC l'est par rapport à *bc, etc.*; ou encore, qu'il y ait même raison ou même rapport entre AB et *ab* qu'entre BC et *bc*; ou enfin, que AB soit à *ab* comme BC à *bc, etc.* Toutes ces expressions sont synonymes.

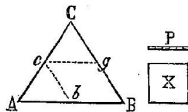
[...]

Cependant, pour écarter tout soupçon, démontrons que toutes les conditions que demande la similitude de deux figures sont nécessairement dépendantes les unes des autres; ce qu'il nous sera facile de faire en examinant d'abord les triangles, qui sont les figures les plus simples, et qui entrent nécessairement dans la composition de toutes les autres; examen qui nous conduira à toutes les propriétés et à tous les usages des figures semblables.

Fig. 36.



Fig. 37.



**39.**

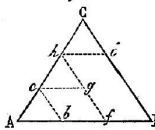
*Deux triangles dont les angles sont respectivement égaux ont leurs côtés homologues proportionnels.*

Maintenant démontrons que les côtés homologues, c'est-à-dire qui se répondent dans deux triangles *acb* et ACB (fig. 36 et 37), qui ont les mêmes angles, sont proportionnels.

Pour fixer nos idées, supposons d'abord que *ab* soit la moitié de AB; il faudra que nous prouvions que *ac* sera aussi la moitié de AC, et *bc* la moitié de BC. Que *acb*, ainsi que dans le numéro précédent, ait encore la position *Acb*: si l'on mène *cg* parallèle à AB, il est clair que cette ligne égalera *bB* ou *Ab*, et que *gB* égalera de même *cb*. Or, comme les angles *Cgc* et *Ccg* seront manifestement égaux aux angles *cBA* et *cAb*, la triangle *Cog* égalera le triangle *cAb* (30). Donc on aura *Cc* égal à *Ac*, et *Cg* égal à *cb* ou à *gB*; donc *Ac* ou *ac* sera moitié de AC, et *cb* moitié de CB.

Si *ab* (fig. 36 et 38) était contenu trois, quatre, ou tel autre nombre de fois qu'on voudrait, dans AB, il

Fig. 38.



serait également facile de démontrer que *ac* serait contenu le même nombre de fois dans AC, et *cb* dans CB. Car des points de division *b, f* de la base AB, menant *bc, fh, etc.*, parallèles à BC, on pourrait placer le long de AC, trois,

quatre, etc., triangles *Acb, chg, hCi, etc.*, égaux aux triangles *acb, Acb*.

Mais que *ab* (fig. 36 et 39), au lieu d'être contenu exactement un certain nombre de fois dans AB, n'y fût contenu qu'avec quelque fraction, deux fois et demie par exemple, on prouverait que *ac* serait aussi contenu deux fois et demie dans AC, et *bc* deux fois et demie dans BC.

Car, lorsque par le moyen des parallèles *bc, fh*, on aurait placé le long de AC les deux triangles *Acb, chg*, égaux à *acb*, il resterait entre les deux parallèles *hf* et CB de quoi placer un triangle *Chi*, dont les côtés seraient moitié des côtés de *cAb*; ce qui est évident, puisque, par la supposition, *fB* serait la moitié de *Ab* et que la base *hi* du triangle *Chi* égalerait *fB*, à cause des parallèles *hf, CB*. Donc, en général, lorsque deux triangles ABC, *abc*, ont les mêmes angles, ces triangles, nommés *triangles semblables*, ont leurs côtés proportionnels, ou, ce qui revient absolument au même, les côtés AB, BC, AC, de l'un de ces triangles ABC contiennent le même nombre de parties P que les côtés *ab, bc, ac*, de l'autre triangle *abc* contiennent de parties *p*, P étant le décimètre, le mètre, etc., ou, en général, l'échelle avec laquelle ABC a été construit, et *p* celle dont on s'est servi en construisant *abc*.

**40.**

*Diviser une ligne en autant de parties égales qu'on voudra.*

De la proposition que nous venons de démontrer, se tire naturellement la solution d'un problème souvent utile dans la pratique.

[...]

## Analyse et comparaison des deux textes

Nous allons désormais indiquer la façon dont nous exploitons ces textes avec les stagiiaires. Il s'agit dans un premier temps d'expliciter la structure axiomatico-déductive des *Éléments* d'Euclide. Comme chacun des treize livres constituant l'ouvrage, le livre VI commence par une série de définitions. La première nous intéresse particulièrement puisqu'elle explicite ce que sont des figures rectilignes semblables (on dirait aujourd'hui polygones semblables), figures qui font précisément l'objet de ce livre : « les figures rectilignes semblables sont celles dont les angles sont égaux chacun à chacun et dont les côtés placés autour des angles égaux sont proportionnels ». Cette définition associée à quatre autres, mais également aux notions communes (ou axiomes) et aux demandes (ou postulats) ainsi qu'à toutes les propositions prouvées précédemment dans l'ouvrage, permet à Euclide de tirer de nouvelles propriétés.

Ainsi pour démontrer la proposition 2 du livre VI, dans laquelle nous reconnaissons le théorème des lignes proportionnelles, Euclide utilise la proposition 37 du livre I qui affirme que des triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux. Mais il a également recours à la propriété suivante : « si deux triangles ont même hauteur, alors ils sont entre eux comme leurs bases » (proposition 1 du livre VI). Autrement dit, si deux triangles ont la même hauteur, le rapport de leurs aires est égal au rapport de leurs bases. On pourrait donc dire, qu'à hauteur constante, l'aire d'un triangle est proportionnelle à la longueur de sa base. Évidemment, il n'est en aucun cas question chez Euclide de formule d'aire du triangle (du type moitié du produit de la base par la hauteur). Le fait que le rapport des aires des triangles  $BDE$  et  $ADE$  est égal au rapport des longueurs  $BD$  et  $DA$ , s'exprime en disant que « le triangle  $BDE$  est au triangle  $ADE$  comme  $BD$  est à  $DA$  ». Pour Euclide, un rapport de grandeurs ne se conçoit que si les grandeurs sont homogènes (deux longueurs, deux aires...) mais la comparaison de tels rapports est possible. Il va de soi que, pour le lecteur moderne, prouver une propriété de proportionnalité de longueurs en se ramenant à une comparaison d'aires peut paraître un peu déroutant, mais il s'agit là d'une pratique assez courante. Un livre des *Éléments* est d'ailleurs entièrement consacré à la méthode des aires qui consiste à transformer une figure en une figure d'aire égale. Le recours à des aires permet une utilisation efficace de cette méthode et notamment d'écrire, au cours de la preuve de la proposition 2, que « le triangle  $BDE$  sera égal au triangle  $CDE$  ». Notons enfin qu'Euclide énonce et démontre la réciproque de la propriété étudiée précédemment, à savoir : « si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle ». Ainsi, la proposition 2 dans son ensemble « permet de traduire par une égalité de rapports une situation géométrique, le parallélisme » comme le fait remarquer Évelyne Barbin (Barbin, 2012, p. 25) dans un article consacré à la proportionnalité.

Cette proposition revêt un caractère fondamental puisqu'elle permet la démonstration de la proposition 4 dans laquelle Euclide prouve un cas de similitude de deux triangles. Rappelons qu'il s'agit d'étudier les figures rectilignes<sup>6</sup> semblables,

---

6. Chez Euclide, le terme « figure rectiligne » correspond à la notion actuelle de « polygone ».

mais que, selon la définition euclidienne, deux critères sont requis : l'égalité des angles et la proportionnalité des longueurs des côtés. La proposition 4 permet donc de réduire à une seule condition la similitude dans le cas des triangles : s'ils sont équiangles (autrement dit si leurs angles sont deux à deux de même mesure) alors les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. Voilà qui est très intéressant dans la mesure où une figure rectiligne peut toujours être découpée en triangles.

Mais ce qui nous paraît remarquable dans ce texte, c'est la double façon dont Euclide exprime la proportionnalité contenue dans la figure qu'il a créée : d'une part, « BA est à DC comme BC est à CE et comme AC est à DE » (autrement dit, c'est la proportionnalité des longueurs des trois côtés qui est exprimée comme un agrandissement-réduction) et d'autre part « BC est à BA comme CE est à CD, BA est à AC comme DC est à DE. . . ». Dans cette deuxième traduction de la similitude, c'est l'homogénéité qui est en jeu. Si on utilise le registre des tableaux de proportionnalité, la première traduction exprime le passage d'une ligne à l'autre, tandis que la deuxième traduction exprime le passage d'une colonne à une autre.

triangle $ABC$	$AB$	$BC$	$CA$
triangle $DCE$	$DC$	$CE$	$ED$

Il est également très intéressant de souligner qu'Euclide n'emboîte pas les deux triangles (configuration de Thalès) pour prouver la proportionnalité des côtés des deux triangles. Le théorème de Thalès, qui n'est rien d'autre que l'expression de la similitude des triangles, cache un triangle dans l'autre. Au niveau didactique, la configuration euclidienne est plus parlante puisqu'on a une vision très nette des côtés homologues.

Si dans les *Éléments* d'Euclide, les figures rectilignes semblables sont définies avant toute proposition ou problème comme le demande la structure axiomatico-déductive de l'ouvrage, dans ceux de Clairaut, le recours aux figures semblables est justifié pour des raisons pratiques. Il s'agit de tirer des plans de terrains à l'échelle. La figure semblable à une figure donnée est vue comme une représentation de la réalité et c'est pour des raisons évidentes que Clairaut impose l'égalité des angles et la proportionnalité des longueurs des côtés. La définition euclidienne est ainsi contextualisée et motivée.

Comme Euclide, Clairaut s'intéresse au cas des triangles. En effet, pour les deux mathématiciens, le cas des triangles est fondamental car toute figure rectiligne peut être décomposée en triangles. Pour démontrer le critère de similitude, Clairaut s'appuie également sur le théorème des lignes proportionnelles, sans toutefois l'énoncer et le démontrer au préalable. C'est au cours de la preuve de la proposition énoncée dans le chapitre 39 que l'on reconnaît ce théorème, sous une forme moins globale que la proposition 2 d'Euclide. D'ailleurs, Clairaut comme d'autres (Arnauld, Descartes), rétablit l'antériorité de la ligne par rapport à la surface. Sa preuve ne s'appuie pas sur des rapports d'aires de triangles mais sur la considération de différents cas particuliers : du plus simple au plus complexe. Le premier cas est le cas où la longueur d'un côté d'un triangle est multiple de la longueur du côté homologue : la preuve procède en un découpage de la figure en des triangles égaux, grâce à un réseau de parallèles. Le second cas est le cas où la

---

vue en tant que surface.

longueur d'un côté est une fraction de la longueur du côté homologue : le principe est analogue. Mais Clairaut conclut sur la généralité du théorème sans considérer le cas où les deux côtés homologues sont incommensurables. Son raisonnement s'appuie sur l'évidence de la situation (en réalité il traite la question plus loin dans son traité, à la fin du livre II, en utilisant une méthode d'approximation).

Alors qu'Euclide traite de la question de façon globale grâce à une proposition intermédiaire utilisant la proportionnalité des aires de deux triangles à leur base lorsque leur hauteur est commune (cette propriété lui évitant de considérer les cas commensurables et incommensurables), Clairaut prend en considération la nature du rapport des deux longueurs. Ce faisant, il établit un lien entre le théorème des lignes proportionnelles et le numérique.

## Bilan de l'analyse historique

Les textes que nous avons étudiés mettent en évidence le rôle fondamental du théorème des lignes proportionnelles dans un système axiomatico-déductif dont la finalité est la preuve du 3<sup>e</sup> cas de similitude des triangles. Il se place comme un maillon permettant l'étude des figures semblables.

La similitude des figures rectilignes étant définie (égalité des angles et proportionnalité des longueurs), le théorème des lignes proportionnelles permet de montrer que, dans le cas particulier des triangles, seul un des critères suffit (égalité des angles ou proportionnalité des longueurs des côtés). Ce théorème jouit donc d'une antériorité par rapport à la similitude des triangles qu'il serait sans doute bon de lui redonner également dans notre enseignement. Car hélas, à la lecture des programmes officiels du collège, il s'avère qu'il ne constitue pas en lui-même un objet d'étude.

Par ailleurs, le théorème des lignes proportionnelles assure un lien entre la problématique de la similitude en géométrie et la problématique de la mesure des grandeurs géométriques. Il permet en effet de traduire dans le domaine des grandeurs (voire des nombres, via la mesure), la caractérisation des formes des objets géométriques (du moins rectilignes). À ce propos, Rudolf Bkouche écrit (Commission inter-IREM collège, 1995, p. 11) :

« Ainsi le théorème de Thalès <sup>7</sup> assure la liaison entre la problématique de la similitude et la problématique de la mesure [...]. Cela explique le rôle joué par ce théorème dans le développement de la géométrie élémentaire ; celle-ci étant essentiellement une théorie de la mesure des grandeurs géométriques, le théorème de Thalès permet de ramener l'étude de la forme des objets géométriques à des considérations de grandeur. »

Enfin, ce théorème n'a pas seulement un intérêt théorique. Il a également un intérêt pratique. C'est le tracé des parallèles qui permet de transposer la proportionnalité des longueurs d'une ligne sur une autre. Il permet donc, dans des situations non numérisées, de reproduire le partage d'un segment donné sur un

---

7. Le théorème de Thalès dont Rudolf Bkouche parle dans son article est le théorème des lignes proportionnelles tel que nous l'avons défini dans cet article.

autre segment (à la règle et au compas) : il s'agit là du découpage d'un segment dans une proportion donnée comme le montre le chapitre 40 des *Éléments* de Clairaut. D'autre part, il permet la construction d'un segment dont la longueur est le produit ou le quotient de deux longueurs données, ainsi que la quatrième proportionnelle, comme nous le voyons dans *La Géométrie* de Descartes.

## Conclusions

Comme nous l'avons montré, la configuration de Thalès (cf. figure 1) est porteuse de difficultés car de très nombreuses égalités de rapports peuvent être déduites. Chacune de ces égalités renvoyant à une certaine traduction de la proportionnalité contenue dans la figure :

- aspect « lignes proportionnelles » ou division d'un segment :  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$  et sa conséquence  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  ;
- aspect agrandissement-réduction (coefficient de proportionnalité) :  
 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$  ;
- aspect homogénéité de la proportionnalité :  $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$ ,  $\frac{AN}{MN} = \frac{AC}{BC}$  et  $\frac{MN}{AM} = \frac{BC}{AB}$
- aspect projection :  $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$ .

Cette configuration fait une synthèse entre, au moins, deux aspects de la proportionnalité : d'une part, la proportionnalité des sections formées par le tracé de la parallèle (théorème des lignes proportionnelles) et d'autre part, la proportionnalité des côtés dans les deux triangles (valeur absolue du rapport d'homothétie ou rapport d'agrandissement-réduction). En France, seul le deuxième aspect est mis en évidence par la façon dont on énonce le théorème de Thalès dans notre enseignement. Ce théorème ne paraît pas apporter de plus-value par rapport à l'utilisation du cas de similitude des triangles, d'autant qu'il est réducteur à une situation bien particulière des deux triangles. Il paraît même, au vu des productions des élèves, apporter plus de difficultés que de bénéfices.

Or la configuration de Thalès possède un aspect agrandissement-réduction utile pour comprendre l'homothétie (et en premier lieu l'homothétie d'un segment). Le théorème de Thalès peut être vu comme une transition entre le théorème des lignes proportionnelles et l'homothétie. Sa présence dans les programmes de collège se trouve, selon nous, confortée par le fait que l'homothétie est elle-même abordée en fin de cycle 4.

À l'issue de cette étude, nous proposons de repenser la structuration des notions tout au long du cycle 4 autour de celle de figures semblables, un peu à la façon de Clairaut. Les figures rectilignes semblables (ou polygones semblables) étant définies et motivées par la problématique de la réduction à l'échelle, une première question se pose : la réduction des deux conditions (angles et proportionnalité des longueurs) à une seule. On constate rapidement que cette réduction à une condition n'est pas possible pour les quadrilatères puisque, par exemple, tous les

rectangles sont équiangles sans être pour autant tous semblables (en particulier, ils ne sont pas tous carrés!). En revanche, ceci est possible dans le cas des triangles, et uniquement dans ce cas, via le théorème des lignes proportionnelles (en admettant ce théorème dans sa généralité). Dans cette optique, il faudrait bannir le théorème de Thalès tel que nous le connaissons dans un premier temps. Ce théorème n'est pas utile pour résoudre des problèmes de calcul de longueur, puisqu'on peut toujours se ramener à la similitude des triangles plus générale. En résumé, il pourrait être plus pertinent d'introduire la configuration de Thalès plutôt que le théorème lui-même. En revanche, dans cette configuration un théorème pourrait être énoncé à l'aide des triangles semblables : « dans un triangle, si on trace une droite parallèle à l'un des côtés alors on détermine un deuxième triangle semblable au premier ». Une telle version aurait l'avantage d'éviter la justification systématique du fait que, dans une configuration de Thalès, les triangles sont équiangles.

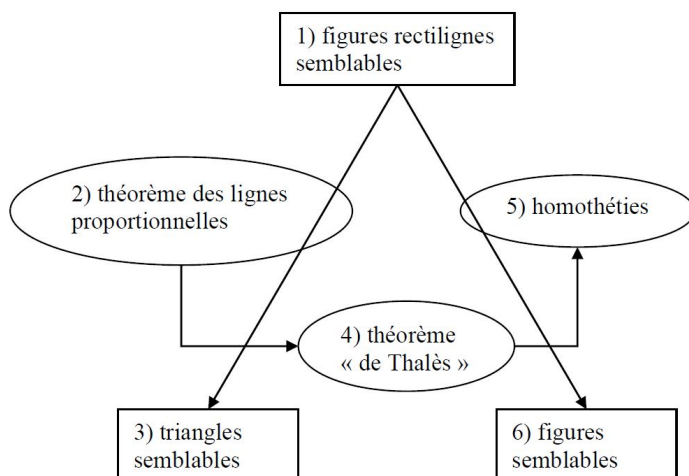


FIGURE 9 – Schéma de la réorganisation proposée pour le cycle 4.

La deuxième question qui se pose alors est d'étendre la similitude des figures à des figures non rectilignes (notamment les cercles). Cette extension est possible grâce à l'homothétie, comme le rappelle Dominique Bénard (Barbin, 2014, p. 53-54) en évoquant la question de l'agrandissement et de la réduction des figures dans l'histoire :

« Quels critères théoriques permettent de décider si deux figures planes sont semblables ou non, et que veut dire alors ce terme “semblable” ? Une des premières réponses à cette question est formulée par Michel Chasles dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, paru en 1837. [...] Évoquant et listant ce qu'il appelle les “méthodes qui constituent la Géométrie récente”, notamment concernant “la transformation des figures en d'autres fi-

gures”, il cite d’abord la perspective, puis “la méthode qui consiste à faire croître, dans un rapport constant, les rayons visuels menés aux différents points d’une figure, pour former une figure semblable et semblablement placée”. C’est lui qui proposera d’appeler homothétiques les deux figures semblables ; ainsi obtenues par cette transformation, appellation qui sera reprise par ses contemporains et s’imposera dans les manuels de mathématiques de l’enseignement secondaire français dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. »

Mais pour construire la notion de segments homothétiques, il peut être intéressant de passer par la configuration de Thalès (c’est à cette occasion que le théorème peut être évoqué). Nous pouvons résumer tout cela par un schéma dans lequel le théorème de Thalès réalise la synthèse entre l’aspect lignes proportionnelles et l’aspect homothétie (figure 9).

Comme nous l’avons souligné, nous estimons que l’accent doit être mis sur l’utilisation de la similitude des triangles, mais en laissant l’élève traduire la proportionnalité de différentes façons, comme le fait Euclide. Il ne nous paraît pas intellectuellement acceptable que les élèves soient encouragés à utiliser des procédures variées lorsqu’il s’agit de résoudre un problème de proportionnalité dans le domaine du numérique (retour à l’unité, coefficient de proportionnalité, homogénéité, égalité des produits en croix...) et qu’ils soient enfermés dans un carcan, notamment celui du théorème de Thalès, dans le domaine de la géométrie. Pour cela, le registre des tableaux de proportionnalité peut s’avérer particulièrement utile. Plutôt que de contraindre ses élèves à écrire et utiliser une égalité de rapports « canonique », le professeur gagnerait à expliciter les principales façons d’exprimer la proportionnalité contenue dans une configuration de Thalès et à montrer que des rapports de proportionnalité différents sont en jeu.

Enfin, nous estimons que, au niveau didactique, il serait intéressant de commencer par faire une large place au théorème des lignes proportionnelles par le biais d’exercices progressifs soulignant son intérêt évident, à la fois en termes pratique et théorique. C’est ce théorème qui permet le mieux de visualiser l’idée de la proportionnalité en géométrie et de construire progressivement des égalités de rapports. L’un des exercices les plus fondamentaux est de placer, sans instrument et sur papier quadrillé, un point sur un segment donné (dont les extrémités sont des nœuds du quadrillage) et partageant ce segment dans une proportion donnée : ce point peut être le milieu du segment ou situé à un tiers d’une extrémité, etc. On passe alors au partage d’un segment donné en un nombre donné de divisions : sans instrument si le segment donné est tracé sur papier quadrillé avec ses extrémités placées en des nœuds, avec la règle et le compas si le segment donné est tracé sur papier blanc. Ensuite, on peut demander de reporter à la règle et au compas une division sur un segment donné sur un autre segment.

Nous pensons formateur de proposer des problèmes de construction variés dans lesquels aucune mesure de longueur n’est donnée. En s’exerçant de la sorte, l’élève se construira une image mentale de la proportionnalité en géométrie basée sur un geste : le tracé de parallèles. Comme l’écrit Évelyne Barbin, « quand le savoir se construit à partir de l’activité de l’élève qui résout des problèmes, le sentiment d’évidence doit être pris en compte et la rigueur doit prendre sens à partir de

cette activité » (Barbin, 1991, p. 130). Car si l'enjeu essentiel de l'enseignement de la géométrie au collège est bien de faire passer l'élève d'une géométrie instrumentée à une géométrie déductive, nous considérons que cet enseignement ne peut se construire sans prendre en compte l'évidence et l'intuition. Dans une situation donnée, l'élève ne sait peut être pas reconnaître deux triangles semblables ou le théorème de Thalès, ni le formaliser, mais il sait que « c'est de la proportionnalité » !

## Références bibliographiques

### Sources primaires

- CLAIRAUT Alexis, 1753, *Éléments de géométrie*, Paris, David.
- CLAIRAUT Alexis, 1853, *Éléments de géométrie, Nouvelle édition mise en accord avec le système décimal*, Paris, Jules Delalain.
- DESCARTES René, 1664, *La Géométrie*, Paris, Charles Angot.
- EUCLIDE, 1804, *Les Éléments*, trad. François Peyrard, Paris, Albert Blanchard.
- EUCLIDE, 1990, *Les Éléments*, trad. par Bernard Vitrac et introduction générale par Maurice Caveing, Paris, PUF.
- LACROIX Sylvestre F, 1799, *Éléments de géométrie*, Paris, Imprimerie de Crapelet.
- LACROIX Sylvestre F, 1855, *Éléments de géométrie*, Paris, Mallet-Bachelier.

### Sources secondaires

- BARBIN Évelyne (dir.), 2012, *Des mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*, Paris, Vuibert Adapt-Snes.
- BARBIN Évelyne (dir.), 2014, *Les constructions géométriques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses.
- BARBIN Évelyne, 1991, « Les *Éléments de géométrie* de Clairaut : une géométrie problématisée », *Repères IREM*, n°4, p. 119-133.
- BARBIN Évelyne, 2011 « Pourquoi les contemporains de Descartes n'ont-ils pas compris sa *Géométrie* de 1637 ? ». *Circulation, transmission, héritage, Actes du 18<sup>me</sup> colloque inter-IREM histoire et épistémologie des mathématiques*, Université & IREM de Basse-Normandie, p. 449-464.
- BOYER Carl Benjamin, 1968, *A History of Mathematics*, New-York, Wiley and Sons.
- CHEVALARIAS Nathalie, 2018, « Instruments et méthodes de dessin : de la géométrie pratique vers l'enseignement secondaire au début du XX<sup>e</sup> siècle ». *Les mathématiques et le réel : expériences, instruments, investigations*, Rennes, PUR, p. 79-94.
- COMMISSION INTER-IREM collège, 1995, « Autour de Thalès », IREM de Lyon.
- COMMISSION INTER-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques & IREM de Basse-Normandie, 2015, *Si le nombre m'était conté...*, Paris, Ellipses.
- DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne, 1986, *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Paris, Seuil.
- ESCOFIER Jean-Pierre, 2008, *Histoire des mathématiques*, Paris, Dunod.



HERREMAN Alain, « Aux sources du théorème de Thalès », <http://thamous.univ-rennes1.fr/forums/forums/42/exportIrem/> (consulté le 02/11/2019).

LEBOSSÉ Camille et HÉMERY Corentin, *Alègre et géométrie*, 1951, Classe de troisième des cours complémentaires, Paris, Fernand Nathan.

ROUCHE Nicolas, 1992, *Le sens de la mesure*, Bruxelles, Didier-Hatier.



## Des recherches en histoire pour comprendre le contenu des manuels d'aujourd'hui ? La révolution de l'ère Meiji et les manuels de géométrie actuels dans les collèges japonais

Marion COUSIN

Ces recherches sur les preuves dans les manuels de mathématiques sont le résultat d'une collaboration avec Takeshi Miyakawa, didacticien à l'Université de Jōetsu au Japon. Elles ont pour but de réfléchir à la forme de nos cours actuels de mathématiques en France et au Japon.

Lors de recherches antérieures, Miyakawa a comparé les contenus, les formes et les fonctions des démonstrations dans les manuels de mathématiques japonais et français actuels. J'ai pour ma part étudié les manuels de géométrie durant l'époque d'Edo (*Wasan*, mathématiques développées au Japon, en se basant sur les travaux chinois) et l'ère Meiji (introduction des mathématiques occidentales).

En France et au Japon, les démonstrations telles qu'elles sont enseignées aujourd'hui posent de nombreuses difficultés aux élèves. Nous avons croisé nos travaux sur l'histoire de l'enseignement et sur la didactique des mathématiques pour mieux comprendre leurs caractéristiques.

Les premiers résultats obtenus, que nous présentons dans cet article, montrent que certaines particularités de la langue japonaise ont eu un impact sur l'utilisation des démonstrations : elles sont devenues au Japon un moyen de justifier par écrit mais pas à l'oral.

### Introduction

Depuis l'antiquité grecque, les démonstrations constituent un élément fondamental des textes mathématiques occidentaux. Or dans le *Wasan*, c'est-à-dire

les mathématiques japonaises qui se développent principalement durant l'époque d'Edo (1603-1868), on ne trouve aucune trace de démonstrations avant la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. Dans la continuité des travaux des mathématiciens chinois, les mathématiciens japonais élaborent des procédures pour résoudre des problèmes mais ils ne prouvent pas leurs affirmations. Néanmoins, suite aux réformes de l'éducation menées durant l'ère Meiji (1868-1912), la géométrie axiomatique d'Euclide et ses démonstrations sont intégrées dans les programmes de mathématiques des écoles secondaires japonaises.

Dans les études que j'ai menées jusqu'à présent, je m'intéresse à l'évolution des textes mathématiques dans les manuels des écoles secondaires rédigés et utilisés durant cette période (voir (Cousin, 2013), (Cousin, 2017-1) et (Cousin, 2017-2)).

Aujourd'hui, au Japon, les élèves apprennent à démontrer en mathématiques au collège et ils rencontrent souvent des difficultés lors de cet apprentissage ((MEXT, 2009) et (Kunimune et al., 2009)), comme dans plusieurs autres pays (voir (Mariotti, 2006) et (Hanna & De Villiers, 2012)).

Miyakawa a montré que les difficultés des élèves varient selon le pays, principalement pour deux raisons liées aux contextes social et culturel de l'enseignement. La première concerne ce qui est enseigné : Miyakawa a souligné dans un article de 2017 que le contenu et la fonction de la démonstration à enseigner sont par exemple différents en France et au Japon ((Miyakawa, 2017)). La seconde raison vient de l'emploi et de la compréhension qu'ont les étudiants de la justification dans leur vie quotidienne, qui ont un impact sur leur approche de la démonstration mathématique en classe. En effet, celles-ci diffèrent également d'une culture à l'autre (voir (Sekiguchi & Miyazaki, 2000)).

Dans cet article, je présenterai les études que nous avons engagées avec Miyakawa pour comprendre la forme des démonstrations dans les manuels actuels japonais en étudiant leur évolution dans l'histoire. Ces travaux permettent de mieux comprendre la forme, les caractéristiques et la fonction des démonstrations dans les manuels japonais. Nous espérons qu'engager de tels travaux sur les démonstrations enseignées au Japon et en France permettra de mieux comprendre les différences entre ces deux pays et les difficultés auxquelles font face les élèves pour comprendre cet aspect de l'étude des mathématiques. Le but étant à long terme de donner des outils aux professeurs pour faciliter la tâche des élèves dans ces deux pays.

## Corpus et méthodologie d'analyse des manuels

Nous nous sommes demandé quelles sont les conditions et les contraintes sociales et culturelles qui ont déterminé la nature et la forme des démonstrations mathématiques à enseigner dans les collèges japonais actuels. Pour déterminer ces conditions et ces contraintes, nous nous sommes intéressés à l'évolution des démonstrations dans les manuels des collèges japonais, depuis leur apparition durant l'ère Meiji jusqu'à aujourd'hui.

Mes études sur l'ère Meiji et celles que nous avons effectuées avec Miyakawa montrent que la forme des démonstrations au Japon a été déterminée par de nom-

breux facteurs linguistiques, éditoriaux, humains, culturels et qu'elle est également liée à la fonction que les auteurs de manuels associent aux démonstrations dans l'enseignement de la géométrie. Dans cet article, nous nous concentrons sur les facteurs linguistiques et culturels et nous montrons que la forme des démonstrations a aussi une influence sur la vision que les élèves ont de celles-ci.

Concernant le corpus, il a fallu sélectionner un ensemble de manuels pertinent pour répondre à nos questions parmi la multitude de manuels publiés entre le début de l'ère Meiji et aujourd'hui.

Les manuels des ères Meiji (1868-1912) et Taishō (1912-1923) ont une place particulière puisque c'est durant cette période que les premières démonstrations japonaises sont écrites et que la façon dont les démonstrations sont présentées et enseignées évolue le plus.

Pour l'ère Meiji, nous avons sélectionné les manuels les plus utilisés dans les écoles secondaires en nous basant sur des recherches antérieures (études utilisées : (Neoi, 1997) et (Tanaka & Uegaki, 2015)).

Mais entre l'ère Taishō et la Seconde Guerre mondiale, nous n'avons pas trouvé de statistiques précises sur l'utilisation des manuels dans les classes. Nous avons donc sélectionné des manuels qui sont restés connus aujourd'hui, notamment parce qu'ils ont été le sujet d'étude de plusieurs travaux historiques.

Concernant les périodes après la Seconde guerre mondiale, nous avons sélectionné un ou deux manuels publiés et utilisés à la suite de chaque réforme importante sur les programmes nationaux.

Le système actuel de sélection des manuels a été établi en 1965 et après cette date, nous avons accès aux pourcentages des ventes des ouvrages scolaires et ce sont les parutions de *Keirinkan* et *Tōkyō Shoseki* qui sont les plus importantes. Ce sont donc ces manuels que nous avons considérés.

L'analyse de ces manuels se fait en trois étapes.

Premièrement, nous déterminons la place de la démonstration dans l'enseignement de la géométrie présenté dans les manuels : Est-ce que les manuels reflètent une stratégie générale concernant l'enseignement des démonstrations ? Si c'est le cas quelle est cette approche ? Et les démonstrations ont-elles une place importante dans l'enseignement de la géométrie ?

Deuxièmement, pour chaque manuel, nous avons analysé la forme de certaines démonstrations spécifiques liées aux parallélogrammes puisque que nous avons trouvé ces démonstrations dans la plupart des manuels : nous nous sommes intéressés à la mise en forme, à l'organisation générale, à l'utilisation des symboles et aux formulations employées dans les propositions (théorèmes, axiomes, définitions, etc.) et dans les assertions des démonstrations.

Troisièmement, nous nous intéressons aux commentaires des auteurs sur les démonstrations et leur enseignement.

## Les démonstrations dans les manuels actuels

Aujourd'hui, au Japon, le terme « démonstration » (*shōmei*) est introduit pour la première fois dans les cours de géométrie de 4<sup>e</sup>. Nous donnons ci-dessous un

exemple de démonstration extrait d'un manuel de 4<sup>e</sup> édité par *Keirinkan* où l'on prouve que les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur. Nous proposons également une traduction littérale de la démonstration pour analyser de manière précise le langage et pour que les traductions des différentes démonstrations soient uniformes.

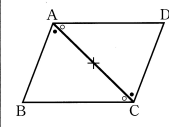
	<p>対角線 AC をひく。  <math>\triangle ABC</math> と <math>\triangle CDA</math> で、          平行線の錯角は等しいので、  <math>AB \parallel DC</math> から、  <math>\angle BAC = \angle DCA</math> .....①  <math>AD \parallel BC</math> から、  <math>\angle BCA = \angle DAC</math> .....②          また、AC は共通だから、  <math>AC = CA</math> .....③</p>	<p>Tracer la diagonale AC.          Dans <math>\triangle ABC</math> et <math>\triangle CDA</math>,          Etant donné que les angles alternes-internes de          droites parallèles sont égaux,          Comme <math>AB \parallel DC</math>,  <math>\angle BAC = \angle DCA \dots (1)</math>          Comme <math>AD \parallel BC</math>,  <math>\angle BCA = \angle DAC \dots (2)</math>          Et, comme AC est commune [aux deux angles],  <math>AC = CA \dots (3)</math>          Comme (1), (2), et (3), étant donné qu'une          paire de côtés et les angles de leurs deux extrémités          sont égaux,  <math>\triangle ABC \equiv \triangle CDA</math>          Etant donné que les côtés correspondants de          figures congruentes sont respectivement égaux,  <math>AB = CD, BC = DA</math></p>
<p>①, ②, ③から、1組の辺とその両端の角が、それぞれ等しいので、  <math>\triangle ABC \equiv \triangle CDA</math>          合同な図形では、対応する辺は、それぞれ等しいので、  <math>AB = CD, BC = DA</math></p>		

FIGURE 1 – Exemple d'une démonstration actuelle issue du manuel de *Keirinkan* (Okamoto et al., 2016, p. 133)

On constate que des symboles mathématiques sont employés pour exprimer les égalités, le parallélisme, les triangles, les angles et la congruence (des figures). Des expressions mathématiques composées uniquement de symboles sont également mobilisées pour les assertions des hypothèses ou pour les assertions déduites dans les différentes étapes de la démonstration (ex :  $\angle BAC = \angle DCA$ ). Les assertions déduites sont par ailleurs données séparément et parfois numérotées pour être utilisées ensuite.

En revanche, les propriétés générales utilisées dans la démonstration sont exprimées grâce à des phrases en japonais, sans symboles mathématiques. Notons que, contrairement à ce qui est fait dans les manuels français, les auteurs n'utilisent pas systématiquement la forme Si-Alors pour citer ces propriétés (voir (Miyakawa 2017)).

Ainsi, cette démonstration est un mélange de phrases japonaises et de phrases mathématiques écrites grâce à des symboles<sup>1</sup>. Nos travaux s'intéressent à l'origine et à l'histoire de ce type de démonstrations.

## Les textes mathématiques dans les manuels de géométrie avant l'ère Meiji

Durant l'époque d'Edo (1603-1868), les savants japonais s'inspirent des travaux chinois pour écrire des ouvrages mathématiques adaptés à une société japonaise en plein essor économique et culturel. À la veille de la Restauration Meiji (1868),

1. Dans la continuité des travaux de Miyakawa, nous appelons ce type de démonstrations des « semi-paragraph proof ».

les pratiques associées au *wasan* continuent d'être enseignées dès le primaire et d'évoluer dans les établissements privés d'enseignement supérieur. L'éducation se développe également considérablement durant cette période et, à la fin de l'époque d'Edo, il existe un patchwork d'écoles de divers niveaux sur l'ensemble du territoire, au sein desquelles des pratiques pédagogiques communes sont transmises par l'usage et la tradition. Si aucune politique nationale n'est établie, ce patchwork d'écoles et leurs enseignants serviront de base à la mise en place d'un système éducatif moderne durant l'ère Meiji.

Dans la grande majorité des textes du *wasan* (et dans les mathématiques chinoises), un énoncé de mathématique est un problème mathématique présenté à l'aide d'un problème souvent concret (1), de sa solution (2) et de la procédure (3) qui permet d'obtenir cette solution, souvent exécutée à l'aide d'un instrument de calcul tel que les baguettes à calculer (*sangi* 算木) ou le boulier (*soroban* 算盤). L'enseignement de la géométrie métrique du *wasan* est ainsi centré sur la résolution de problèmes : des questions sur les mesures des figures géométriques sont posées et les tâches des élèves consistent à mobiliser ou à imaginer des procédures (qui emploient parfois des outils algébriques et analytiques) pour obtenir la réponse.

Nous donnons ci-dessous un exemple de texte mathématique enseigné à la veille de la Restauration Meiji : un texte d'Hasegawa Hiroshi 長谷川寛 (1782-1839) publié dans le manuel *Kika shinron* 幾何新論 (*Nouvelles théories sur la géométrie*, 1830).

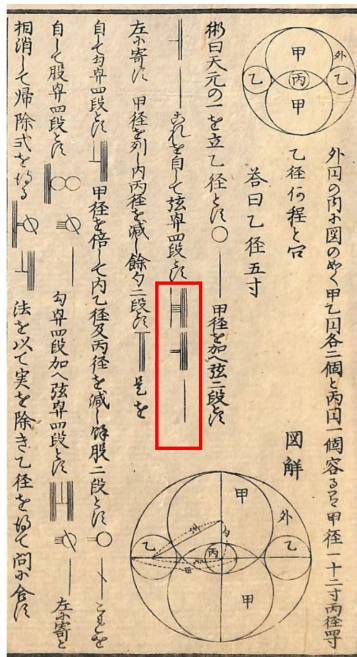


FIGURE 2 – Exemple d'un texte mathématique de la fin de l'ère Meiji issu du manuel d'Hasegawa (Hasegawa, 1830, feuillet 82). Le cadre rouge a été ajouté par nos soins.

On insère à l'intérieur du cercle externe deux cercles *kō* 甲 et deux cercles *otsu* 乙 ainsi qu'un cercle *hei* 丙 de la manière indiquée sur la figure. Le diamètre de *kō* 甲 vaut 12 *sun* et le diamètre de *hei* 丙 , 4 *sun*.

On demande combien vaut le diamètre de *otsu* 乙 .

On dit pour la réponse : Le diamètre de *otsu* 乙 est 5 *sun*.

On dit pour la procédure : On pose le diamètre de *otsu* 乙 comme unité du *tengen* 天元 (inconnue)  $[x]$ . On y ajoute le diamètre de *kō* 甲  $[12+x]$ , ce qui donne 2 fois l'hypoténuse (*gen* 弦). On le multiplie par lui-même, ce qui donne 4 fois l'hypoténuse au carré  $[144 + 24x + x^2]$ . Le placer à gauche. Disposer le diamètre de *kō* 甲 . On lui retranche le diamètre de *hei* 丙 . Le reste donne 2 fois la hauteur (*kō* 甲)  $[8]$ . On le multiplie par lui-même. Cela donne 4 fois la hauteur au carré  $[64]$ . On double le diamètre de *kō* 甲 et on lui retranche le diamètre de *otsu* 乙 et le diamètre de *hei* 丙 . Le reste donne 2 fois la base (*kō* 甲)  $[20 - x]$ . On le multiplie par lui-même, ce qui donne 4 fois la base au carré  $[400 - 40x + x^2]$ . On ajoute 4 fois la hauteur au carré. Cela donne 4 fois l'hypoténuse au carré  $[464 - 40x + x^2]$ . Annuler avec ce qui est placé à gauche. On obtient la configuration pour la division  $[-320 + 64x]$ . On divise et l'on obtient le diamètre de *otsu* 乙 , ce qui correspond à la question.

Vers la fin de l'époque d'Edo, les problèmes du *wasan* sont de moins en moins proches de la vie quotidienne. Il s'agit souvent de figures imbriquées et de figures dont l'aspect esthétique a de plus en plus d'importance. Cet aspect des manuels a amené certains historiens à décrire le *wasan* comme un art éloigné des autres domaines que l'on qualifierait aujourd'hui de scientifiques. Mais les travaux d'Horiuchi montrent au contraire que certains mathématiciens du *wasan* ont travaillé aux côtés de « scientifiques », comme les spécialistes du calendrier (voir (Horiuchi, 1994)).

On voit que le texte d'Hasegawa est structuré comme la plupart des textes mathématiques chinois ou japonais avant l'intégration des mathématiques occidentales : un problème est énoncé (« on demande... »), la solution est donnée (« on dit pour la réponse... ») puis la procédure qui a permis d'obtenir cette solution est proposée (« on dit pour la procédure... »). Le verbe « poser » fait référence à l'outil de calcul (une surface de calcul et des baguettes) même si, à la fin de l'ère Meiji, il est probable que ce ne soit pas l'outil lui-même qui soit mobilisé mais des représentations de celui-ci. Dans cette procédure, l'outil de calcul est utilisé pour représenter les coefficients de ce que nous appellerions aujourd'hui des polynômes : le coefficient constant est placé en haut puis les coefficients de degrés supérieurs sont placés au-dessous. Par exemple, les représentations de baguettes encadrées dans la figure 2 se traduiraient aujourd'hui grâce au polynôme  $144 + 24x + x^2$ .

On remarque par ailleurs que cet extrait ne contient aucun texte permettant de prouver la validité du résultat. En effet, bien que certains mathématiciens chinois et japonais discutent de la validité des résultats, les démonstrations telles qu'on les connaît aujourd'hui ne font pas partie des textes mathématiques avant l'introduction des mathématiques occidentales durant l'ère Meiji (Voir (Chemla, 2012)).

L'étude des textes du *wasan* révèle enfin que les mathématiciens japonais de l'époque d'Edo accordaient moins d'importance au langage mathématique que leurs homologues européens. Si certains mathématiciens tels que Takebe Katahiro (1664-1739) insistent sur l'importance d'un langage précis dans ce domaine, il existe beaucoup moins de conventions à respecter pour écrire les mathématiques au Japon que dans les pays occidentaux.

## Évolution des démonstrations dans les manuels de géométrie de l'ère Meiji : l'ère Meiji (1868-1912)

Avec le Décret de l'éducation (*Gakusei*, 1872), le gouvernement japonais impose l'abandon de l'enseignement du *wasan* et l'apprentissage exclusif des connaissances occidentales en suivant des méthodes d'enseignement occidentales. Par exemple, l'enseignement individualisé fait place à l'enseignement magistral. De nombreux manuels occidentaux sont alors traduits pour qu'ils soient utilisés dans les nouvelles écoles et c'est dans ce contexte qu'apparaissent les premières démonstrations japonaises. Comme les démonstrations sont nouvelles dans le paysage mathématique japonais, il n'existe aucune convention pour les écrire ou les mettre en forme. Et, dans les manuels occidentaux ou dans les manuels japonais, leur forme varie



beaucoup : l'analyse des différents manuels révèle une grande disparité, notamment du point de vue du langage utilisé dans les démonstrations.

Par exemple, comme nous pouvons le voir sur la figure 3, dans une traduction japonaise de la version américaine d'un manuel de Legendre, *Shōgaku kikayōhō*, Nakamura écrit les démonstrations uniquement grâce à des phrases japonaises et le symbolisme est peu mobilisé<sup>2</sup>.

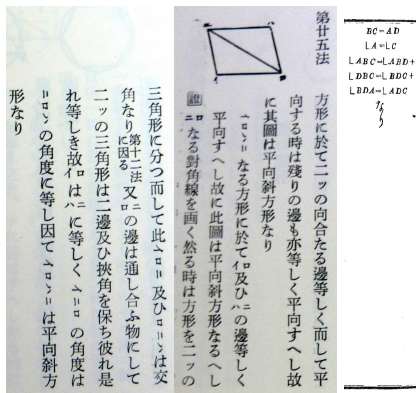


FIGURE 3 – Extrait de *Shōgaku kikayōhō* (Nakamura, 1873).

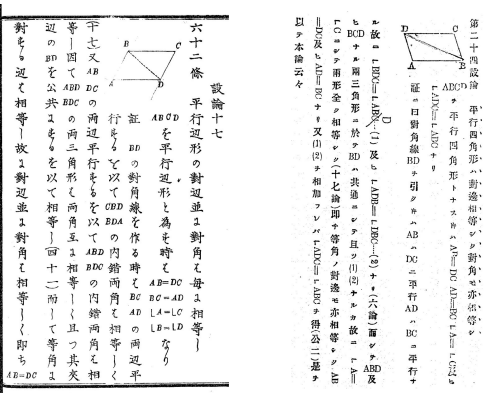


FIGURE 4 – Extraits de *Kika shinron* (Miyagawa, 1876) et de *Kikagaku* (Shibata, 1879).

Alors que, dans d'autres traductions de manuels américains comme *Kika shinron* et *Kikagaku*, les expressions symboliques sont souvent mobilisées (voir figure 4).

En analysant les manuels de cette période, on constate également que les auteurs-traducteurs japonais ne font aucune remarque sur les démonstrations et sur les raisonnements en géométrie. Ils suppriment même parfois des remarques données dans les ouvrages originaux sur la nature des énoncés mathématiques.

Ces constats et les disparités que nous avons relevées dans l'écriture des démonstrations nous amènent à penser que les savants de l'ère Meiji accordent peu d'importance à l'enseignement des démonstrations. Cette situation est probablement due au besoin rapide de traductions des ouvrages occidentaux afin de mener les réformes du gouvernement. Ainsi, il est probable que les traducteurs cherchent tout d'abord à développer un vocabulaire basique pour pouvoir traduire rapidement des manuels utilisables dans les écoles et qu'ils négligent certains aspects des mathématiques occidentales, peu importants à leurs yeux.

Pour finir sur les premières démonstrations japonaises, j'ai rencontré lors de mes recherches de doctorat des manuels où certaines fonctions des démonstrations étaient moins visibles que dans la source originale. Par exemple, alors que Davies respecte l'aspect systématique de l'argumentation en géométrie en démontrant chaque énoncé et en justifiant chaque assertion des démonstrations dans son ouvrage, la version traduite abrégée de Nakamura (voir figure 3) ne préserve pas

2. Ces démonstrations sont appelées *paragraph proves* dans nos travaux, pour reprendre le terme utilisé par Miyakawa dans ses recherches en didactique.

cette mise en valeur. Dans cet ouvrage, les chaînes déductives étant brisées ou floues, la démonstration ne sert ainsi plus à justifier de manière rigoureuse chaque propriété, fonction qu'elle a dans l'ouvrage de Davies (Davies, 1870).

Durant les années 1880, Tanaka Naonori (1853-?) réalise une série de manuels utilisée dans la plupart des écoles secondaires japonaises en s'inspirant d'ouvrages anglais, américains, français mais aussi de traductions réalisées par les savants chinois et jésuites dès le début du XVII<sup>e</sup> siècle en Chine (voir (Cousin, 2013, p. 277-282)). Tanaka a une meilleure formation en mathématiques occidentales que les auteurs des années 1870 et il a déjà enseigné le sujet avant d'écrire ses manuels, ce qui lui permet d'avoir un regard critique sur les sources qu'il utilise et sur la langue mathématique employée par ses prédécesseurs.

Comme on peut le voir sur la figure 5, il utilise peu de formules dans ses démonstrations mais, pour clarifier les hypothèses et les conclusions à établir grâce à la démonstration, il exprime l'exposition et la détermination<sup>3</sup> uniquement grâce à des expressions symboliques. De plus, dans ses démonstrations, contrairement aux auteurs précédents, à chaque fois qu'il justifie une assertion grâce à une proposition prouvée précédemment, il cite le numéro de cette proposition. Il souligne ainsi l'importance de justifier systématiquement chaque assertion dans une démonstration. De plus, c'est le premier auteur des différents corpus que j'ai utilisé pour mes travaux sur l'ère Meiji et probablement le premier auteur de l'ère Meiji qui donne des explications sur la nature des démonstrations, sur leur rôle en géométrie et qui insiste sur le fait que « les propositions doivent être démontrées grâce aux axiomes, aux postulats et aux propositions qui ont déjà été démontrées. » (Tanaka, 1882, p. 15).

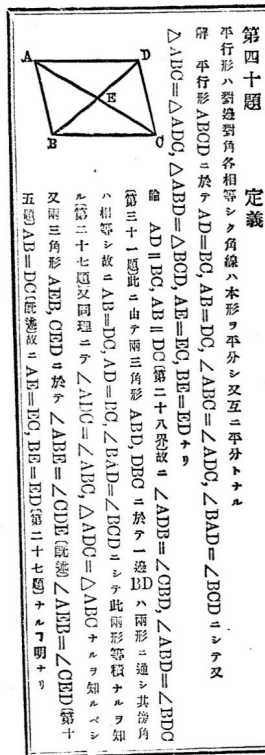


FIGURE 5 – Extrait de *Shōgaku kikayōhō* (Nakamura, 1873).

Les analyses des premières démonstrations japonaises que j'ai effectuées m'ont permis de montrer que l'utilisation des symboles mathématiques est surtout un moyen pour exprimer des phrases qui sont difficiles à écrire dans une langue mathématique japonaise encore mal appropriée et pour simplifier cette langue qui pose encore problème au lecteur.

3. Nous rappelons que l'exposition et la détermination sont les parties de la démonstration où les hypothèses et les conclusions de la proposition sont explicitées en donnant des noms aux éléments de la figure considérée. Dans les ouvrages occidentaux importés au Japon, la détermination et l'exposition d'une proposition sont, contrairement à son énoncé général, exprimées grâce à des structures de langage fixes pour mettre en relief l'hypothèse et la conclusion.

À la fin des années 1880, la publication des manuels de Kikuchi Dairoku (1855-1917) marque un tournant dans la production des manuels de géométrie. Kikuchi fixe dans ces ouvrages une nouvelle langue mathématique et une nouvelle forme des démonstrations qui seront utilisées durant des dizaines d'années : ses manuels seront massivement utilisés jusqu'au début de l'ère Taishō.

ABCD は 平行四邊形, AC  
 は 其ノ 對角線 ト セヨ :  
 然ルニハ, (甲) AC ハ 之ヲ 全ク  
 相等シキ ニツノ 三角形ニ 分ツ  
 可シ ;  
 (乙) AB ハ DC = 等シク, BC ハ AD = 等シカル 可シ  
 (丙) 角 ABC ハ 角 CDA = 等  
 シク, 角 BCD ハ 角 DAB =  
 等シカル 可シ .

直線 AC ガ 平行線 AB,  
 CD = 出會フヲ 以テ,  
 錯角 BAC, ACD ハ 相等シ : I, 7.  
 又 直線 AC ガ 平行線 BC, AD = 出會フヲ 以テ,  
 錯角 BCA, CAD ハ 相等シ : I, 7.  
 然レハ ニツノ 三角形 ABC, CDA = 於テ, ニツノ 角ハ 夫々  
 相等シク ; 其ノ 間ニ 在ル 邊 AC ハ 兩形ニ 通ス :  
 故ニ (甲) ニツノ 三角形ハ 全ク 相等シク ; I, 10.  
 (乙) AB ハ DC =, BC ハ DA = 等シ ;  
 (丙) 角 ABC ハ 角 CDA = 等シ ;  
 又 角 BCD ハ 角 BCA, ACD ノ 和 ナルヲ 以テ,  
 角 CAD, BAC ノ 和 = 等シ,  
 即 角 DAB = 等シ .

Soit ABCD le parallélogramme et AC sa diagonale ;  
 Alors (1) AC le divise en deux triangles complètement égaux ;  
 (2) AB est égal à DC, BC est égal à AD ;  
 (3) L'angle ABC est égal à l'angle CDA, l'angle BCD est égal à l'angle DAB.  
 Étant donné que la droite AC coupe les droites parallèles AB et CD, les angles alternes-internes BAC et ACD sont égaux ; I, 7.  
 Et étant donné que la droite AC coupe les droites parallèles BC et AD, les angles alternes-internes BCA et CAD sont égaux ; I, 7.  
 Maintenant, dans les triangles ABC et CDA, deux paires d'angles sont respectivement égales, et le côté AC entre eux est commun aux deux figures.  
 Donc (1) les deux triangles sont complètement égaux ; I, 10.  
 (2) AB est égal à CD, et BC est égal à DA ;  
 (3) L'angle ABC est égal à l'angle CDA : et étant donné que l'angle BCD est la somme des angles BCA et ACD, il est égal à la somme des angles CAD et BAD, qui est l'angle DAB.

FIGURE 6 – Exemple de démonstration dans le manuel de Kikuchi (Kikuchi, 1889, p. 53-54)

Selon ce mathématicien formé à Cambridge, il est nécessaire de créer une langue mathématique qui unifie les langues orales et écrites japonaises afin d'écrire les démonstrations uniquement avec des phrases japonaises, sans s'appuyer sur des symboles mathématiques. Comme ses professeurs à Cambridge, il pense que l'argumentation enseignée en mathématiques permet aux élèves d'apprendre à argumenter leurs points de vue et, de manière plus générale, à raisonner. Dans *Of liberal education* publié en 1845, Whewell dit : « Wherever Mathematics has formed a part of a Liberal Education, as a discipline of the Reason, Geometry has been the branch of mathematics principally employed for this purpose. [...] For Geometry really consists entirely of manifest examples of perfect reasoning : the reasoning being expressed in words which convince the mind, in virtue of the special forms and relations to which they directly refer » (Whewell, 1845, p. 29). Nous voyons ici que, selon les éducateurs anglais qui ont inspiré Kikuchi, le langage employé pour démontrer, argumenter en mathématiques a un rôle fondamental pour former les élèves à raisonner.

Par conséquent, selon Kikuchi, il est nécessaire que la tâche de démontrer soit réalisée par les élèves dans leur propre langue et non grâce à des symboles purement mathématiques afin que les compétences acquises puissent être réexploitées dans d'autres matières ou dans leur vie professionnelle. Il est donc important pour cet auteur d'élaborer une langue mathématique japonaise fonctionnelle et précise qui puisse être utilisée aussi bien à l'oral qu'à l'écrit<sup>4</sup>.

De plus, comme Tanaka, il souligne l'aspect systématique de l'argumentation et des justifications dans les démonstrations en indiquant, à droite, le numéro de la proposition mobilisée à chaque étape du raisonnement déductif, en réorganisant de manière minutieuse les propositions des manuels dont il s'inspire et en portant une attention particulière au langage qu'il emploie.

Pour finir, dans un guide du professeur, Kikuchi donne des explications détaillées sur les raisonnements logiques en géométrie, sur les différentes étapes essentielles d'une démonstration, sur l'importance de la précision de la langue mathématique et sur les différents types de démonstrations, tel que le raisonnement par contraposée ou le raisonnement par l'absurde.

Il est clair que nous avons affaire à un auteur bien différent des auteurs précédents qui, grâce à une formation poussée en mathématiques, a une idée précise des buts à atteindre pour que la géométrie occidentale et ses démonstrations soient introduites dans l'enseignement japonais. Notons que, influencé par son éducation en Angleterre, il pense que la principale fonction des démonstrations dans l'enseignement de la géométrie voire des mathématiques est de former les élèves à raisonner, à argumenter leurs propos de manière rigoureuse. Et que c'est pour cette raison que les démonstrations doivent être écrites uniquement en japonais.

Néanmoins, la forme des démonstrations de Kikuchi a rapidement été critiquée par ses contemporains car elle était difficile à enseigner, notamment à cause du langage employé. Nagasawa Kamenosuke (1861-1927), dans son propre manuel, critique sévèrement le fait que Kikuchi n'utilise que des phrases en japonais et refuse l'utilisation des symboles : « Écrire les démonstrations des théorèmes avec des phrases complètes et parfaites est le vice de ceux qui sont d'accord avec le mouvement d'Euclide en Angleterre<sup>5</sup> » (Nagasawa, 1896, p. 3-4).

---

4. Durant Meiji, les expressions orales et écrites sont encore très différentes en japonais. Ainsi, quand un enseignant dit un énoncé mathématique à l'oral, il est impossible pour l'élève de noter exactement ce qu'il dit à l'écrit et inversement. Selon Kikuchi, le passage de l'oral à l'écrit et l'inverse amènent des imprécisions et donc des possibilités d'erreurs dans le raisonnement.

5. En Angleterre, et notamment à Cambridge où l'enseignement de la géométrie reste très traditionnel, il existe des conflits entre les « partisans d'Euclide » et les partisans d'une modernisation de l'enseignement de la géométrie. Mais Kikuchi a assisté à ces débats et il utilise, pour rédiger ses manuels, les manuels rédigés par l'Association for the Improvement of Geometrical Teaching, qui est l'association qui mène ce combat contre Euclide. Cette confusion dans le propos de Nagasawa est probablement due au fait que, d'un point de vue plus général, si on regarde ce qui est fait à la même époque ailleurs en Europe, les manuels rédigés par cette association restent encore très proches de l'écrit antique, même s'ils souhaitent s'en détacher.

Contrairement à Kikuchi, Nagasawa propose des démonstrations où les symboles mathématiques sont beaucoup mobilisés (voir figure 7). La forme des démonstrations ainsi que leur usage dans l’enseignement changent ainsi complètement.

**定理 28.** 平行四邊形ノ兩對邊ハ互ニ相等シク且其對角線ハ本形ヲ二等分ス、

[特述]  $\square ABCD = \text{於テ}$ ,  
 $AB = DC, AD = BC,$   
 及ビ  $\triangle ABC = \triangle CDA.$

[證]  $AC$ ヲ結ビ付ケテ、

然ルトキハ  $AB \parallel DC$  [假設]  
 ニシテ  $AC$ ハ此ニ平行線ニ交ルガ故ニ、  
 錯 $\angle$   $BAC = \text{錯} \angle ACD.$  [定理 22]  
 面シテ  $AD \parallel BC$  [假設]  
 ナルガ故ニ 錯 $\angle$   $BCA = \text{錯} \angle DAC,$  [定理 22]  
 故ニ  $\triangle ABC, \triangle CDA = \text{於テ}$   
 $\left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle DCA, \\ \angle BCA = \angle DAC, \end{array} \right\}$   
 夾邊  $AC$ ハ共通、  
 $\therefore \triangle ABC = \triangle CDA,$  [定理 7]  
 即チ  $AB = DC,$   
 $AD = BC,$   
 $\triangle ABC = \triangle CDA.$

**Théorème 28.** Les deux paires de côtés opposés d’un parallélogramme sont égales entre elles, et leur diagonale le divise en deux parts égales.

[Exposition] Dans  $\square ABCD$ ,  $AB = DC$ ,  $AD = BC$ , et  $\triangle ABC = \triangle CDA.$

[Démonstration] Relier  $A$  et  $C$ ,  
 Dans ce cas,  $AB \parallel DC$  [Hypothèse]  
 Et étant donné que  $AC$  coupe ces deux droites parallèles,  
 alt. int.  $\angle BAC = \text{alt. int.}$  [Théorème 22]  
 $\angle ACD.$

Et étant donné que  $AD \parallel BC$  [Hypothèse]  
 alt. int.  $\angle BCA = \text{alt. int.}$  [Théorème 22]  
 $\angle DAC,$

Donc dans  $\triangle ABC, \triangle CDA,$   
 $\angle BAC = \angle DCA,$   
 $\angle BCA = \angle DAC,$   
 Le côté  $AC$  est commun,  
 $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle CDA,$  [Théorème 7]  
 Donc,  $AB = DC,$   
 $AD = BC,$   
 $\triangle ABC = \triangle CDA.$

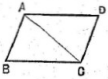


FIGURE 7 – Exemple de démonstration dans le manuel de Nagasawa (Nagasawa, 1896, p. 53)

En particulier, pour Nagasawa, les démonstrations sont avant tout des objets mathématiques écrits et la langue mathématique qui y est employée ne peut être utilisée pour la justification orale étant donné certaines caractéristiques de la langue japonaise et la structure des expressions symboliques. Par exemple, en japonais l’assertion ‘ $AB \parallel DC$ ’ est normalement lue à l’oral ‘ $AB$  hēkō  $DC$ ’ (‘ $AB$  parallèle  $DC$ ’ où hēkō pourrait être assimilé, en français, à un adjectif qualificatif dérivé d’un nom). Mais il s’agit uniquement ici de prononcer chaque symbole l’un à la suite de l’autre puisque cette phrase mathématique n’a aucune ressemblance avec une phrase japonaise grammaticalement correcte. Pour qu’elle soit grammaticalement correcte, il faudrait dire ‘ $AB$  wa  $DC$  ni hēkō’ (‘ $AB$  est parallèle à  $DC$ ’), ce qui serait abrégé en ‘ $AB DC \parallel$ ’. Cela est dû au fait que les adjectifs sont, en japonais, toujours placés à la fin de la phrase lorsque leur fonction est attribut du sujet<sup>6</sup>.

À partir de la fin de l’ère Meiji, ce type de démonstration incluant de nombreuses expressions symboliques apparaît dans de nombreux manuels de géométrie (voir par exemple (Nagasawa, 1896) et (Kuroda, 1917)) et même dans ceux de Kikuchi (voir (Kikuchi, 1916)). Ainsi, l’objectif de Kikuchi de créer une langue mathématique japonaise qui permettrait d’énoncer les propositions et les démonstrations géométriques sans utiliser des expressions symboliques et qui unifierait les expressions orales et écrites est abandonné.

6. Je simplifie ici en utilisant les termes grammaticaux français pour que le lecteur comprenne nos propos.

## Évolution des démonstrations dans les manuels de géométrie de l'ère Meiji : après l'ère Meiji

Jusqu'à la fin de l'ère Meiji, les auteurs de manuels écrivent leurs démonstrations de diverses manières mais ils suivent tous un modèle classique d'enseignement de la géométrie : les théorèmes et les problèmes sont énoncés les uns après les autres et, à partir des années 1880, chaque assertion des démonstrations est justifiée en citant la proposition utilisée. Mais, à partir de l'ère Taishō, une approche « pratique » de la géométrie apparaît dans les manuels : sous l'influence des travaux de Peter Treutlein (1845-1912) (voir (Treutlein, 1911)), les auteurs japonais prennent leurs distances avec les modèles classiques issus de la tradition euclidienne pour proposer un enseignement de la géométrie plus proche de la vie quotidienne.

Par exemple, dans la première partie du manuel de Kuroda Minoru 黒田稔, *Kikagaku kyōkasho* (*Manuel de géométrie*, 1917), les instruments de mesure sont présentés et des résultats de géométrie sont introduits sans théorème ni démonstration. Puis, dans la deuxième partie, des questions pratiques sont posées.

Cette évolution de l'enseignement de la géométrie a également une influence sur la forme des démonstrations : alors que dans le manuel de Kikuchi de 1889, toutes les démonstrations sont exprimées sans utiliser de symboles mathématiques et que les justifications sont données en citant précisément le numéro de la proposition utilisée, dans un ouvrage de Yamamoto Sansei 山本三生 rédigé en 1943 (Yamamoto, 1943), les nouvelles assertions sont exprimées grâce à des symboles mathématiques et les justifications de ces assertions sont données en japonais, sans symboles et sans donner le numéro de la proposition utilisée. Avec cette approche plus pratique, l'aspect systématique de la justification en géométrie est moins souligné que dans les manuels précédents.

Avec la réforme des programmes de 1942, les programmes nationaux incluent explicitement cette approche pratique de la géométrie. La méthode axiomatique qui consiste à déduire des axiomes, des postulats et des propositions précédentes les nouvelles propositions est de moins en moins visible dans les manuels et de plus en plus de problèmes liés à la vie quotidienne y apparaissent. En particulier, dans *Chūtō sūgaku* (Mathématiques pour le secondaire), manuel publié par le Ministère de l'éducation en 1947, on ne trouve pas du tout de démonstration.

Entre 1949 et 1955, les démonstrations réapparaissent néanmoins petit à petit dans les manuels. Puis, dans les années 60, les démonstrations commencent à être enseignées en début de 4<sup>e</sup>. On peut remarquer que, alors que les concepts enseignés en géométrie n'ont que très peu changé depuis cette période, la forme des démonstrations continue d'évoluer légèrement. Par exemple, durant la période des mathématiques modernes, les auteurs utilisent très peu de phrases japonaises dans leurs démonstrations.

Comme on peut le voir dans la démonstration de la figure 8, les symboles mathématiques sont plus utilisés que jamais. Plus tard, les auteurs (qui sont parfois les mêmes que ceux de la période des maths modernes) reviendront vers la stratégie que nous avons observée dans les manuels des années 40 mais qui est aussi la stratégie employée de nos jours : les symboles mathématiques sont utilisés

pour exprimer les assertions des démonstrations mais des phrases en japonais sont mobilisées pour citer les propriétés qui justifient ces assertions.

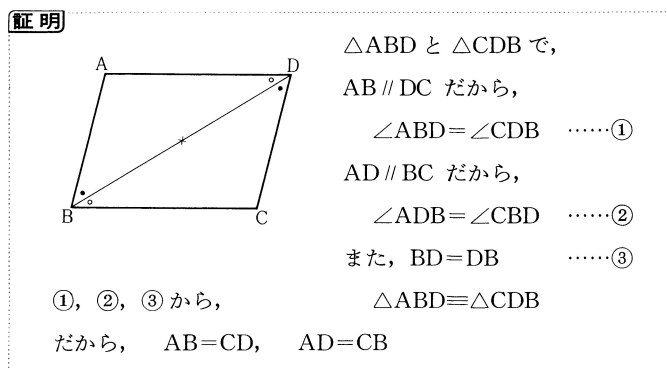


FIGURE 8 – Exemple de démonstration dans les manuels publiés durant la période des mathématiques modernes (Shoda et al., 1979, p. 123)

## Conclusions et prolongements

Les études que nous avons faites avec Miyakawa sur l'évolution des démonstrations dans l'enseignement de la géométrie au Japon nous ont permis de montrer à quel point la nature des démonstrations enseignées aujourd'hui peut être déterminée par des facteurs culturels et historiques. Par exemple, nous avons vu que, dans le cas japonais, les caractéristiques de la langue japonaise ont significativement influencé l'évolution de la forme des démonstrations dans les manuels.

Kikuchi essaye, durant l'ère Meiji, de développer une langue mathématique japonaise qui unifie pour la première fois les langues orale et écrite afin de former les étudiants à penser et argumenter de manière rigoureuse. Pour réaliser ce projet, il est selon lui nécessaire d'écrire les démonstrations (et l'ensemble de son manuel) grâce à des phrases japonaises qui ne contiennent pas de symboles mathématiques.

Néanmoins, les démonstrations écrites uniquement grâce à des phrases japonaises proposées par Kikuchi disparaissent car elles sont considérées comme trop difficiles à enseigner. Elles sont alors remplacées par des démonstrations où phrases japonaises et expressions symboliques mathématiques sont mêlées, démonstrations qui sont toujours utilisées au Japon aujourd'hui.

Une des conséquences de cela est que les écarts entre la forme de la démonstration écrite et celle de la justification orale sont encore aujourd'hui beaucoup plus importants dans l'enseignement japonais que dans l'enseignement français ou anglais par exemple. Une autre conséquence est que les assertions écrites grâce à des symboles dans les démonstrations japonaises ne peuvent être utilisées directement à l'oral pour justifier.

Cela nous a amené à penser que les élèves japonais voient les démonstrations comme des objets mathématiques écrits particuliers, similaires par exemple aux

équations algébriques. Selon nous, les élèves japonais considèrent ces objets mathématiques comme des objets formels, qui ont peu de rapport avec les justifications orales « réelles », l'argumentation ou le débat.

J'aimerais ici soumettre quelques réflexions et hypothèses qui nécessiteraient de mener de nouvelles recherches. Je m'interroge sur les raisons qui font que, depuis la fin de l'ère Meiji et l'abandon des écrits de Kikuchi pour l'enseignement, toutes les démonstrations des manuels japonais sont un mélange de phrases en japonais et de phrases mathématiques rédigées à l'aide de symboles qui ne peuvent être dites à l'oral avec des phrases grammaticalement correctes. Je rappelle que cela implique que ces démonstrations ne sont pas rédigées de façon à ce que leur enseignement forme les élèves à argumenter/défendre un point de vue de manière rigoureuse. Nous avons vu que la langue japonaise telle qu'elle était durant l'ère Meiji était mal adaptée pour écrire des démonstrations utilisables dans l'enseignement, mais mes études historiques ont révélé que Kikuchi est l'un des seuls auteurs japonais depuis la fin de l'ère Meiji qui ont essayé d'utiliser une langue mathématique qui emploie le moins possible les symboles mathématiques pour rédiger ses démonstrations.

On peut se demander pourquoi aucun auteur n'a décidé, plus tard, de suivre la démarche de Kikuchi? D'après ce que nous avons vu plus haut, les débats (notamment entre Kikuchi et Nagasawa) durant l'ère Meiji reviendraient à adopter le point de vue de tel ou tel courant de pensée occidentale (le point de vue anglais étant, selon Nagasawa, dépassé), mais je pense que cela touche à des raisons plus profondes, liées aux caractéristiques de la culture japonaise.

En effet, dans la culture japonaise, le débat a une place largement moins importante que dans les cultures européennes (et notamment la culture française) où, depuis leur plus jeune âge, on apprend aux enfants à débattre : le débat prend une place importante dans les programmes français dès le primaire. Ainsi, en France, une des fonctions principales des démonstrations dans l'enseignement est d'apprendre aux élèves à argumenter et, par conséquent, elles sont écrites grâce à une langue similaire à celle utilisée dans la vie quotidienne : le français.

Mais au Japon, il semblerait que le débat ait une place peu importante dans l'enseignement : dans le *wasan* par exemple, il n'est pas besoin de justifier les résultats avancés dans les manuels puisque le professeur qui a rédigé ce manuel est d'une grande renommée et que cela suffit à convaincre le lecteur. Ainsi, la fonction de la démonstration dans l'enseignement est bien différente... Cela pourrait expliquer que la forme de la démonstration a peu évolué depuis l'ère Meiji. Les auteurs de manuels n'auraient pas cherché à faire évoluer la forme des démonstrations puisque que, former les élèves au débat n'étant pas important au Japon, la forme qu'ont les démonstrations depuis le milieu du XX<sup>e</sup> siècle (voire depuis la fin de l'ère Meiji) convient aux fonctions qu'ils attribuent aux démonstrations dans l'enseignement.

Pour finir, il me semble important de mener ce type d'enquêtes plus générales sur les écarts entre les démonstrations écrites et les justifications orales dans différents pays car elles nous permettraient de mieux exploiter les recherches, en didactique, sur l'argumentation et les démonstrations mathématiques.

Le langage utilisé dans les démonstrations étant un élément déterminant pour comprendre les difficultés que les élèves rencontrent, ce type d'étude pourrait per-



mettre de mieux identifier et comprendre les difficultés rencontrées par les élèves. Par exemple, les élèves japonais ont, de par la forme de leurs démonstrations, une meilleure vision des différents arguments utilisés dans les démonstrations puisque les expressions symboliques « sautent aux yeux » dans le texte mathématique. Donc les chaînes déductives sont plus faciles à identifier pour les élèves japonais que pour les élèves français qui doivent lire précisément la démonstration pour comprendre la chaîne déductive d'une démonstration.

En outre, dans les démonstrations, les élèves français utilisent une langue qu'ils connaissent relativement bien puisqu'elle est proche de la langue qu'ils utilisent dans leur vie quotidienne. Une des difficultés des élèves français consiste donc à utiliser un vocabulaire et des structures de langage précis et régulier pour employer la langue française à bon escient dans les démonstrations. L'élève japonais doit, lui, apprendre à utiliser une nouvelle langue utilisant des symboles mathématiques et dont la « syntaxe » est tout à fait différente de celle qu'il utilise dans la vie de tous les jours. Il doit aussi comprendre dans quel cas il doit utiliser cette langue et dans quel cas il utilise le japonais. Les difficultés des élèves concernant le langage dans les démonstrations sont donc de nature différente.

## Références bibliographiques

- BABA Takuya, IWASAKI Hideki, UEDA Atsumi & DATE Fumiharu, 2012, « Values in Japanese mathematics education : Their historical development », *ZDM*, 44, n°1, p. 21-32.
- BOSCH Mariana & GASCÓN Josep, 2006, « Twenty-five years of the didactic transposition », *ICMI Bulletin*, 58, p. 51-65.
- CHEMLA Karine (dir.), 2012, *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, Cambridge, Cambridge University Press.
- COUSIN Marion, 2013, *La « révolution » de l'enseignement de la géométrie dans le Japon de l'ère Meiji (1868-1912) : Une étude de l'évolution des manuels de géométrie élémentaire*, Thèse de doctorat, Université Lyon 1.
- COUSIN Marion, 2017-1, « Les manuels de géométrie dans le Japon de l'ère Meiji (1868-1912) : Des témoins des révolutions du livre et de l'enseignement des mathématiques », *Revue d'histoire des sciences*, 70, n°1, p. 109-145.
- COUSIN Marion, 2017-2, « Sur la création d'une nouvelle langue mathématique japonaise pour l'enseignement de la géométrie élémentaire durant l'ère Meiji (1868-1912) », *Revue d'histoire des mathématiques*, 23, n°1, p. 5-70.
- DAVIES Charles (1870). *Elements of geometry and trigonometry, with applications in mensuration*, New York-Chicago, A.S. Barnes.
- HANNA Gila & DE VILLIERS Michael (dir.), 2012, *Proof and proving in mathematics education : The 19th ICMI study*, Dordrecht, Springer.
- HORIUCHI Annick, 1994, *Les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo*, Paris, Vrin.
- KIKUCHI Dairoku, 1889, *Shotō kikagaku kyōkasho* [Manuel de géométrie élémentaire], Tokyo, Monbushō henshūkyoku.

- KIKUCHI Dairoku, 1916, *Kikagaku shinkyōkasho* [New geometry textbook], Tokyo, Dainihon honzu kabushiki kaisha.
- KUNIMUNE Susumu, FUJITA Taro & JONES Keith, 2009, « Why do we have to prove this? Fostering students' understanding of proof in geometry in lower secondary school » in LIN Fou-Lai *et al.* (dir.) *Proceedings of the ICMI study 19 conference*, Vol. 1, p. 256-261.
- KURODA Minoru, 1917, *Kikagaku kyōkasho* [Manuel de géométrie], Tokyo, Baifūkan.
- MARIOTTI Maria Alessandra, 2006, « Proof and proving in mathematics education » in GUTIÉRREZ Angel & BOERO Paolo (dir.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, p. 173-204.
- MEXT, 2009, *Zenkoku gakuryoku gakusyū jōkyō chōsa chūgakkō hōkokusyo* [Rapport sur les résultats au test national de réussite : collèves], Tokyo, NIER.
- MIYAKAWA Takeshi, 2017, « Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry : The cases of French and Japanese lower secondary schools », *Educational Studies in Mathematics*, 94, n°1, p. 37-54.
- MIYAGAWA Honzen, 1876, *Kika shinron* [Nouvelles théories en géométrie], Tokyo, Ōmura chōei.
- NAGASAWA Kamenosuke, 1896, *Chūtō kyōiku kikagaku kyōkasho* [Manuels de géométrie pour l'enseignement secondaire], Osaka, Miki shōten.
- NAKAMURA Rokusaburō, 1873, *Shōgaku kikayōhō* [Règles d'utilisation de la géométrie dans les écoles élémentaires], Tokyo, Chūgai dōbotsuda.
- NEOI Makoto, 1997, « Meiji ki chūtō gakkō no sūgaku kyōkasho ni tsuite » [Sur les manuels de mathématiques utilisés dans les écoles secondaires de l'ère Meiji], *Journal of History of Mathematics*, 152, p. 26-48.
- OKAMOTO Kazuo *et al.*, 2016, *Mirai he hirōgaru sūgaku 2* [Passerelle vers les futures mathématiques 2]. Osaka, Keirinkan.
- SEKIGUCHI Yasuhiro & MIYAZAKI Mikio, 2000, « Argumentation and mathematical proof in Japan », *The Proof Newsletter*, janvier/février 2000.
- SHIBATA Kiyosuke, 1879, *Kikagaku* [Géométrie]. Tokyo, Chugaido.
- SHODA Kenjiro *et al.*, 1979, *Shintei sūgaku 2* [Mathématiques nouvellement révisées 2], Osaka, Keirinkan.
- TANAKA Naonori, 1882). *Kika kyōkasho* [Manuel de géométrie]. Tokyo : Shirai renichi.
- TANAKA Nobuaki & UEGAKI Wataru, 2015, « On the aspects of mathematics textbooks for secondary schools in the late Meiji era », *Bulletin of the Faculty of Education, Mie University*, 66, p. 309-324 (en japonais).
- TREUTLEIN Peter, 1911, *Der geometrische Anschauungsunterricht*, Leipzig-Berlin, B. G. Teubner.
- WHEWELL William, 1845, *Of liberal education*, London, J. W. Parker.
- YAMAMOTO Koichi, 1943, *Sūgaku (chūgakkō yō) 2 dai ni rui* [Mathématiques pour le premier cycle des écoles secondaires, catégorie 2], Tokyo, Chūtō gakkō kyōkasho kabushiki kaisha.

Sixième partie

Géométrie et géométries



## De quelques notables tentatives de démonstrations du cinquième postulat d'Euclide : de l'Antiquité au XVII<sup>e</sup> siècle

Didier BESSOT

### Introduction

Plusieurs problèmes ont hanté l'histoire des mathématiques et l'esprit des savants pendant des siècles, voire des millénaires, avant d'être ou de ne pas être résolus. Il en fut ainsi pour des problèmes de constructibilité « à la règle et au compas », comme la quadrature du disque, la duplication du cube, la trisection de l'angle ou les polygones réguliers, posés dès l'Antiquité grecque au moins et dont la résolution définitive n'est intervenue qu'au XIX<sup>e</sup> siècle grâce au développement de la théorie des nombres et des équations algébriques, pour la grande conjecture de Fermat résolue par Andrew Wiles et Richard Taylor en 1994 par la résolution de la conjecture plus générale dite STW (Shimura-Taniyama-Weil), ou pour la question de l'existence de nombres parfaits impairs qui demeure irrésolue à ce jour, même si la communauté mathématique est plutôt en faveur d'une inexistence en raison des conditions très restrictives que ces nombres devraient vérifier.

Mais un des problèmes qui a été parmi les plus débattus depuis l'Antiquité concerne la démontrabilité du cinquième postulat, dit aussi postulat des parallèles, figurant au début du premier livre des *Éléments* d'Euclide d'Alexandrie (IV<sup>e</sup>-III<sup>e</sup> siècle av. J.-C.). Ce postulat, ou demande, énonce :

« Et que, si une droite<sup>1</sup> tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits. » (Euclide, 1990, p. 175)

1. Dans tout cet article, le mot « droite » désigne ce qui est appelé aujourd'hui « segment de droite ».

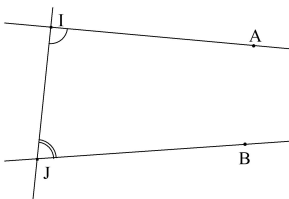


FIGURE 1 – Si angle  $AIJ + \text{angle } BJI < 2$  droits alors (IA) et (JB) prolongées se rencontrent du côté des points A et B

Si le statut de postulat de cet énoncé a été dès l'Antiquité mis en question, c'est qu'il revêt par rapport aux problèmes cités plus haut une importance particulière puisqu'il touche aux fondements de la géométrie; en effet tout le contenu des livres géométriques des *Éléments*, à partir de la proposition 29 du premier livre, à l'exception de quelques propositions des livres suivants, en dépend. En outre ce postulat présente des particularités qui ont certainement sollicité l'attention des lecteurs géomètres : d'une part son énoncé apparaît compliqué en regard de la simplicité des quatre précédents postulats, d'autre part sa réciproque est l'objet de la proposition 17 du premier livre dont la démonstration ne requiert pas l'emploi du postulat<sup>2</sup> : « Dans tout triangle, deux angles, pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus petits que deux droits. » (Euclide, 1990, p. 228)

Enfin, ce postulat n'est utilisé qu'à partir de la proposition 29 du premier livre, qui constitue la réciproque des propositions 27 et 28 qui la précèdent et dont les démonstrations ne requièrent pas l'emploi du postulat.

Quelques-unes des plus notables tentatives de démonstration du cinquième postulat seront présentées dans cette histoire abrégée de ces essais de l'Antiquité au XVII<sup>e</sup> siècle. Ces tentatives se sont appuyées dans presque tous les cas sur l'une des trois démarches suivantes : soit remplacer le cinquième postulat par un autre plus évident d'apparence, paraissant plus « naturel », soit donner une autre définition des droites parallèles, soit une combinaison des deux démarches précédentes. Ne sont présentés ici que les travaux considérés les plus notables et les plus développés sur ce sujet<sup>3</sup>.

## Antiquité

Les tentatives effectuées au cours de l'Antiquité gréco-romaine sont principalement connues par l'ouvrage de Proclus de Lycie (410-485), *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*.

Dans son commentaire de la définition des droites parallèles d'Euclide, Proclus rapporte celle qu'en aurait donné Posidonius d'Apamée ou de Rhodes (II<sup>e</sup>-I<sup>er</sup> siècle

2. Ce fait est relevé à deux reprises par Proclus de Lycie dans (Proclus, 1948, p. 169 et p. 312), texte traduit par Paul Ver Eecke.

3. Le lecteur désirant une information plus complète, même quasi exhaustive, sur cette histoire pourra consulter avec profit l'ouvrage (Pont, 1986).

av. J.-C.) : « [...] les parallèles sont celles qui ne se rapprochent ni ne s'éloignent pas dans un seul et même plan, mais ont toutes les perpendiculaires amenées de points de l'une à l'autre égales. » (Proclus, 1948, p. 153).

Cette définition contient la notion désignée par la suite par le terme « d'équidistante » qui n'est pas sans soulever d'objection : en effet, si elle assure bien le fait que deux lignes équidistantes ne peuvent se rencontrer, elle admet implicitement, dans l'emploi qui en a été fait dans diverses tentatives de démonstration du cinquième postulat, qu'une ligne équidistante à une droite est une droite. Or le fait d'admettre la rectitude d'une équidistante à une droite induit le cinquième postulat, ou inversement la preuve de cette rectitude nécessite ce postulat. Proclus ne développe pas plus les travaux éventuels de Posidonius sur les parallèles mais fait remarquer qu'il existe des lignes qui se rapprochent l'une de l'autre en deçà de toute grandeur finie sans pour autant se rencontrer, comme par exemple la conchoïde de Nicomède et sa directrice, opérant ainsi une parenté entre parallèles et asymptotes puisque, dit-il, pourquoi ce qui est vrai pour des lignes en général ne pourrait-il pas l'être pour des droites ? Cette réflexion apparaît dans son commentaire du postulat v (Proclus, 1948, p. 168-170) qui débute ainsi : « Cela [le cinquième postulat] aussi doit être absolument rayé des postulats ; car c'est un théorème qui offre de nombreuses difficultés, que Ptolémée s'est proposé d'éluider dans un certain livre [...] ».

En conséquence Proclus considère qu'il faut absolument chercher une démonstration du cinquième postulat, mais il renvoie cette tâche « à l'endroit où l'Auteur des *Éléments* sera dans l'obligation de mentionner ce théorème, en l'utilisant comme étant évident [...] », c'est-à-dire à son commentaire de la proposition 29.

Ce commentaire (Proclus, 1948, p. 311-319) présente, comme Proclus l'a annoncé, la démonstration proposée par Claude Ptolémée dans son ouvrage *Sur la rencontre de droites prolongées à partir d'angles plus petits que deux angles droits*, connu de Proclus mais aujourd'hui perdu. Selon Proclus, Ptolémée se propose de démontrer, sans avoir recours au cinquième postulat, la proposition 29 des *Éléments* énoncée en ces termes : « [...] je dis donc [...] que, si des lignes droites sont parallèles et coupées par une ligne droite, les angles internes [entre les parallèles] et situés d'un même côté [de la sécante] sont égaux à deux droits, » (Proclus, 1948, p. 312).

Ptolémée précise aussitôt la démarche qu'il va suivre : « En effet, il est nécessaire que la droite qui coupe les parallèles forme les angles internes et situés d'un même côté égaux à deux angles droits ou plus petits ou plus grands que deux angles droits. » (Proclus, 1948, p. 312-313).

Ptolémée cherche alors à montrer que les deux dernières éventualités conduisent à des contradictions, mais son raisonnement est grossièrement erroné puisqu'il considère que la disposition des angles internes (plus petits ou plus grands que deux droits) se produit de chaque côté de la sécante, ce qui est absurde. Bien évidemment, convaincu d'avoir démontré la proposition 29, Ptolémée parvient aisément à prouver le cinquième postulat.

Proclus critique négativement le travail de Ptolémée en prenant « position contre Ptolémée [...] car la faiblesse de sa démonstration est manifeste [...] » (Proclus, 1948, p. 315) et propose ensuite sa propre résolution. Il fait appel pour

cela à une proposition d'Aristote qualifiée « d'axiome » et tirée de l'ouvrage *Du Ciel* (liv. I, chap. 5, §2) : « Si deux droites formant un angle à partir d'un point sont prolongées à l'infini, l'intervalle de ces droites prolongées à l'infini dépasse toute grandeur finie. » dont Proclus déduit la proposition : « [...] lorsqu'une droite coupe l'une des [deux] parallèles, elle coupe aussi l'autre ». (Proclus, 1948, p. 318).

Cependant, « l'axiome » d'Aristote demande une démonstration (il est faux en géométrie sphérique), mais surtout la démonstration de la proposition avancée par Proclus suppose implicitement que la distance entre des parallèles demeure bornée. Or cette propriété admise induit le cinquième postulat ou, inversement, sa preuve le nécessite.

D'autres tentatives de démonstration ont eu lieu au cours de cette période mais, pas plus que celles qui viennent d'être mentionnées, elles n'ont apporté de réponse satisfaisante au problème étudié.

## Moyen Âge : aire arabo-musulmane<sup>4</sup>

Les traductions en arabe des *Éléments* d'Euclide entreprises à partir de la fin du VIII<sup>e</sup> siècle et durant le IX<sup>e</sup> siècle ont amené les savants des pays d'Islam à s'intéresser au problème déjà soulevé concernant le cinquième postulat. Les travaux les plus développés sur cette question sont, dans l'ordre chronologique, ceux de Tābit ibn Qurra (826-901), Ibn al-Hayṭam (965-1030), 'Umar al-Ḥayyām (c.1045-c.1125) et Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201-1274)<sup>5</sup>.

### Tābit ibn Qurra

Tābit ibn Qurra a écrit deux textes sur ce sujet : l'*Opuscule sur la démonstration du célèbre postulat d'Euclide* (Jaouiche, 1986, p. 145-149) et l'*Opuscule sur <le fait> que si deux droites sont menées suivant deux <angles> moindres que deux droits, elles se rencontrent* (Jaouiche, 1986, p. 151-160), rédigés dans cet ordre selon K. Jaouiche, en raison de la qualité d'exposition et de raisonnement moindre du premier texte (Jaouiche, 1986, p. 45).

Dans le premier opuscule contenant cinq propositions, Tābit ibn Qurra n'emploie ni le mot de « parallèle » ni la définition qu'en donne Euclide mais utilise la notion de « droites qui ne se rapprochent ni ne s'écartent [l'une de l'autre] d'aucun de leurs deux côtés » (Jaouiche, 1986, p. 145), définition voisine de celle proposée par Posidonius mais sans allusion à l'équidistance. La proposition 1 reprend une partie de la proposition 28 du premier livre des *Éléments* dans laquelle l'égalité des angles alternes-internes assure le « parallélisme », proposition indépendante du cinquième postulat. À la suite de cette proposition, Tābit ibn Qurra ajoute sous forme de postulat :

4. Le lecteur désirant une information plus complète sur l'histoire de cette période pourra consulter (Jaouiche, 1986). Une grande partie des considérations exposées ici sur cette période provient de cet ouvrage.

5. Dans ce chapitre et le suivant, la translittération utilisée pour ces noms est celle de (Jaouiche, 1986). Il existe d'autres translittérations souvent utilisées comme Thābit ibn Qurra, Ibn al-Haytham, 'Umar al-Khayyām et Naṣīr al-dīn al-Ṭūsī.



« Mais il est clair et l'on admet que si une ligne droite coupe deux lignes droites et que ces deux droites se rapprochent <l'une de l'autre> d'un de leurs côtés, elles s'éloignent <l'une de l'autre> de l'autre côté et que leur rapprochement du côté où elles se rapprochent ainsi que leur éloignement du côté où elles s'éloignent augmentent. » (Jaouiche, 1986, p. 146).

La proposition 2 est la réciproque de la proposition 1 et correspond donc à la première partie de la proposition 29 du premier livre des *Éléments* : « Si une droite coupe deux lignes droites qui ne se rapprochent ni ne s'écartent <l'une de l'autre> d'aucun de leurs deux côtés, alors les <angles> alternes sont égaux » (Jaouiche, 1986, p. 146).

Dans la démonstration de cette proposition, Tābit ibn Qurra fait appel à la propriété que Jaouiche formule ainsi : « il est impossible que deux droites qui se coupent ne se rapprochent ni ne s'écartent toutes les deux d'une troisième » (Jaouiche, 1986, p. 47). Cette propriété qui est une autre forme de l'axiome dit de Pasch<sup>6</sup> permet de démontrer l'unicité d'une parallèle à une droite par un point donné et induit le cinquième postulat. Tābit ibn Qurra peut alors « démontrer » ce postulat dans la proposition 5.

Dans le second opuscule *sur <le fait> que si deux droites...*, contenant sept propositions, Tābit ibn Qurra ne donne pas de définition explicite de la notion de parallèle mais en introduit une implicite dans l'énoncé des hypothèses de la proposition 1 :

« <Lorsque> deux lignes droites [AB et DG] se trouvent dans un même plan et que l'on mène entre elles deux lignes droites [AG et EW] en étant égales et en formant avec l'une de deux premières droites deux angles égaux [AGD et EWD] <situés> d'un même côté, alors deux perpendiculaires quelconques [AZ et TK] abaissées sur cette <première> droite à partir de deux points de l'autre sont égales. » (Jaouiche, 1986, p. 153) (figure 2).

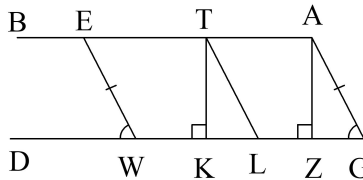


FIGURE 2 – *Opuscule sur <le fait> que si deux droites...* Proposition 1

Le fait de postuler l'existence de droites comme AB et DG vérifiant les hypothèses d'égalité de longueur et d'angle conduit à considérer les parallèles comme

6. Axiome de Pasch : Étant donné un triangle, une droite du même plan, ne passant par aucun des sommets du triangle, passant par un point intérieur à l'un des côtés, passe par un point de l'un des deux autres côtés.

équidistantes, ce qui induit la cinquième postulat et ruine donc la démonstration qu'en donne Tābit ibn Qurra à la proposition 7.

La proposition 2 mérite cependant d'être relevée en raison de la configuration qu'elle introduit et qui apparaîtra à d'autres moments de l'histoire du cinquième postulat, en particulier dans l'ouvrage de Saccheri : « <Dans> toute surface quadrilatère [ABGD] dont deux angles <situés> sur un même côté [BAD et GDA] sont égaux et dont les deux côtés [AB et DG] en contact avec ce côté sont aussi égaux, les deux angles restants [ABG et DGB] sont aussi égaux. » (Jaouiche, 1986, p. 154) (figure 3).

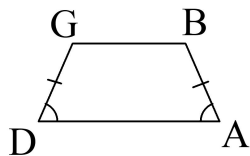


FIGURE 3 – Proposition 2

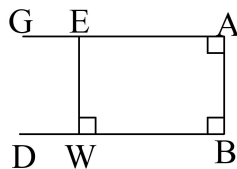


FIGURE 4 – Proposition 5

Enfin la proposition 5 introduit un quadrilatère ABWE dont les angles en A, B et W sont droits et conclut à la rectitude de l'angle en E et à l'égalité des droites EW et AB (figure 4). Cette proposition est équivalente au cinquième postulat et le quadrilatère trirectangle qui y est utilisé apparaît aussi dans les travaux d'Ibn al-Haytām.

## Ibn al-Haytām

Ibn al-Haytām s'est intéressé à deux reprises à la démonstration du cinquième postulat, successivement dans le *Livre expliquant les postulats d'Euclide dans les Éléments* (Jaouiche, 1986, p. 161-175), puis dans le *Livre sur la résolution de ce qui est douteux dans les Éléments d'Euclide* (Jaouiche, 1986, p. 177-184).

Le premier de ces ouvrages commence par une longue critique de la définition des droites parallèles d'Euclide à cause de l'intervention dans cette définition du prolongement à l'infini des droites, ce qui, selon Ibn al-Haytām, « n'est pas représentable » (Jaouiche, 1986, p. 161). Ibn al-Haytām va alors s'attacher à trouver « un moyen par lequel il peut exister deux droites ayant cette propriété » (Jaouiche, 1986, p. 162), à savoir celle de ne jamais se rencontrer même prolongées indéfiniment des deux côtés. Et ce moyen est en fait de construire, une droite étant donnée, une ligne engendrée dans « un mouvement un et simple », à savoir uniforme et non composé, par l'extrémité libre d'une droite donnée établie perpendiculairement sur la première droite. Pour Ibn al-Haytām, cette ligne ne peut être qu'une droite, et il montre que ces deux droites, la donnée et la construite, correspondent bien à la définition euclidienne des parallèles. Mais il a de cette façon conçu les droites parallèles comme des lignes équidistantes, ce qui induit le cinquième postulat.

Dans sa progression vers la démonstration de ce postulat, Ibn al-Haytām introduit dans un lemme un quadrilatère ABDG dont les angles en A, B et D sont droits et montre que les droites AB et DG sont égales, puis que l'angle en G est

aussi droit. Cette proposition, avec le quadrilatère trirectangle (voir figure 4), apparaissait déjà comme proposition 5 dans le second traité de Tābit ibn Qurra et ce quadrilatère est aujourd'hui désigné par l'expression « quadrilatère de al-Haytam – Lambert » en raison de l'emploi fondateur qu'en a fait Johann Heinrich Lambert (1728-1777) dans sa *Theorie der Parallellinien* probablement rédigée vers 1766 et publiée seulement en 1895 par P. Stäckel et F. Engel dans *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss...*

Le second ouvrage d'Ibn al-Haytam, considéré par lui comme un complément au premier, reprend, dans une première partie, le schéma de construction des parallèles décrit dans l'ouvrage précédent et remplace le postulat d'Euclide « par une autre proposition qui joue le même rôle et qui est plus claire pour le sens et plus prégnante pour l'esprit et qui est : deux lignes droites qui se coupent ne sont pas parallèles à une troisième. » (Jaouiche, 1986, p. 178). Ibn al-Haytam montre que cette proposition implique le cinquième postulat mais s'appuie alors sur la démonstration qu'il a donnée de celui-ci dans son premier ouvrage pour en déduire que le postulat d'Euclide implique le sien, ce qui constitue un cercle vicieux. Dans la seconde partie de l'ouvrage, Ibn al-Haytam propose des démonstrations des propositions 27, 28 et 29 du premier livre des *Éléments*, d'abord dans l'ordre euclidien, puis en commençant par la proposition 29, dont il a relevé le caractère de réciprocity avec les deux précédentes. Mais, comme le relève Jaouiche, dans la première démonstration de la proposition 27, Ibn al-Haytam commet à nouveau une grave erreur logique en affirmant un fait qu'il ne démontre qu'ultérieurement dans la proposition 29 où il utilise pour une unique fois son postulat remplaçant celui d'Euclide mais aussi une propriété établie dans la proposition 27, nouveau cercle vicieux (Jaouiche, 1986, p. 73).

Ce second opuscule apparaît donc plus confus et comportant plus d'incohérences et d'erreurs logiques élémentaires que le premier et n'apporte donc pas de véritable nouvel élément au sujet étudié.

## ‘Umar al-Ḥayyām

L'*Opuscule sur l'explication des postulats problématiques du Livre d'Euclide* rédigé par ‘Umar al-Ḥayyām comporte une première partie consacrée à la théorie des parallèles (Jaouiche, 1986, p. 185-199), les deux suivantes concernant la définition des proportions et de la composition des rapports, qui ne seront pas examinées ici. La première partie commence par des considérations d'ordre historique, philosophique et épistémologique. ‘Umar al-Ḥayyām y décrit en les critiquant les travaux de ces prédécesseurs, en particulier ceux d'Ibn al-Haytam à qui il reproche le recours au mouvement dans sa construction-définition des parallèles comme équidistantes. Il y énonce comme prémisses nécessaires à la géométrie deux propositions admises s'apparentant au postulat avancé par Tābit ibn Qurra et constituant le postulat de ‘Umar al-Ḥayyām :

« Deux droites qui se coupent s'écartent <l'une de l'autre> à partir de l'angle d'intersection », puis « Deux droites qui se rapprochent <l'une de l'autre> se coupent et deux droites qui se rapprochent ne peuvent s'écarter pendant qu'elles se rapprochent. » (Jaouiche, 1986, p. 190).

‘Umar al-Ḥayyām entreprend ensuite la démonstration de huit propositions qu’il veut insérer dans le premier livre des *Éléments* après la proposition 28, la septième de ces propositions correspondant à la proposition 29 d’Euclide et la huitième au cinquième postulat, alors démontré.

La proposition 1 reprend la configuration de la proposition 2 du second opuscule de Ṭābit ibn Qurra en la particularisant. En effet les angles en A et B du quadrilatère ABDG (figure 5) sont ici non seulement égaux mais droits, les côtés AG et BD étant aussi égaux. ‘Umar al-Ḥayyām montre, comme Ṭābit ibn Qurra, que les angles en D et G sont égaux. Ce quadrilatère, utilisé plus tard par Saccheri dès le début de son traité<sup>7</sup>, est aujourd’hui appelé « quadrilatère de al-Ḥayyām – Saccheri ». La démonstration de ‘Umar al-Ḥayyām n’utilise pas l’orthogonalité en A et B et fait appel à deux cas d’égalité des triangles (propositions 4 et 26 des *Éléments*) ainsi qu’aux propriétés réciproques des triangles isocèles (propositions 5 et 6 des *Éléments*) (Jaouiche, 1986, p. 191).

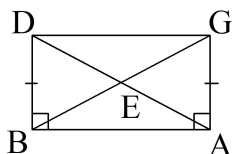


FIGURE 5 – *Opusculum sur l’explication...* Proposition 1

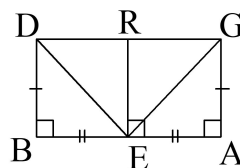


FIGURE 6 – Proposition 2

La proposition 2 reprend le même quadrilatère en considérant le milieu E de AB et la perpendiculaire à AB en E, rencontrant DG en R (figure 6). Alors R est le milieu de DG et ER est perpendiculaire à DG. La démonstration n’utilise pas non plus l’orthogonalité en A et B et fait appel aux deux mêmes cas d’égalité des triangles ainsi qu’au fait que, si une droite rencontre une autre droite en faisant des angles adjacents égaux, alors ces angles sont droits (définition 10 des *Éléments*). (Jaouiche, 1986, p. 191-192).

Les propositions 1 et 2 sont bien indépendantes du cinquième postulat, mais il n’en est pas ainsi pour la proposition 3. Reprenant la même configuration que la précédente, elle conclut que les angles en D et G sont droits. Ici l’orthogonalité en A et E est utilisée pour montrer que les droites AG et ER sont parallèles (proposition 27 ou 28 des *Éléments*), ce qui ne requiert pas l’emploi du cinquième postulat. Mais ‘Umar al-Ḥayyām ajoute aussitôt : « Or la distance entre deux parallèles quelconques ne varie pas. » (Jaouiche, 1986, p. 192-193). Il assimile donc des droites parallèles à des droites équidistantes, ce qui, comme cela a déjà été mentionné, implique le postulat euclidien. L’affirmation admise en cet endroit de l’équidistance des parallèles est d’autant plus étrange qu’elle fait l’objet de la proposition 6 de l’ouvrage. Même si cette affirmation ruine la démonstration de la proposition 3, la suite de cette démonstration demeure intéressante. ‘Umar al-Ḥayyām propose une démonstration par l’absurde divisée en trois cas : soit les

7. Ce traité de 1733, intitulé *Euclides ab omni naevo vindicatus...*, est examiné dans le chapitre suivant.

angles en D et G sont droits, ce qui achève la preuve, soit ils sont aigus, soit ils sont obtus. ‘Umar al-Ḥayyām va alors montrer que chacune des deux dernières hypothèses conduit à une contradiction, en se servant du postulat qui lui a été attribué ci-dessus. Ce procédé de trichotomie jouera plus tard un rôle fondamental dans l’organisation des travaux de Saccheri puis de Lambert sur ce sujet.

Le traité de ‘Umar al-Ḥayyām, après ceux d’Ibn al-Hayṭam, a été examiné et critiqué par Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, principalement sur la distinction entre propositions philosophiques et propositions géométriques, qui lui paraît peu pertinente.

### Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī

Le traité de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī exposant sa théorie des parallèles, rédigé vers 1250, s’intitule *Traité qui délivre du doute concernant les droites parallèles*. Un autre texte, très certainement apocryphe selon Jaouiche, sur cette question figure dans un ouvrage attribué à Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, intitulé *Rédaction des Éléments d’Euclide* et publié en arabe à Rome en 1594.

Dans le premier texte (Jaouiche, 1986, p. 201-226), après un exposé sur les raisons pour lesquelles le cinquième postulat doit être démontré, puis un examen critique des travaux de certains de ses prédécesseurs sur ce sujet, Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī développe sa théorie en deux versions ; la première comporte sept propositions, la seconde reprenant les cinq premières précédentes et substituant trois nouvelles propositions aux propositions 6 et 7.

Dans la proposition 1, Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī définit la distance d’un point à une droite et montre qu’elle est obtenue par la droite perpendiculaire à la droite donnée issue du point donné. La proposition 2 est une reprise à l’identique de la proposition 1 du texte de ‘Umar al-Ḥayyām sur le quadrilatère rectangle isocèle ABDG où la rectitude des angles en B et D et l’égalité des droites AB et GD permet de montrer l’égalité des angles en A et G. Comme la proposition 3 de ‘Umar al-Ḥayyām, la proposition 3 du présent texte conclut, sous les mêmes hypothèses à la rectitude des angles en A et G (figure 7)<sup>8</sup>.

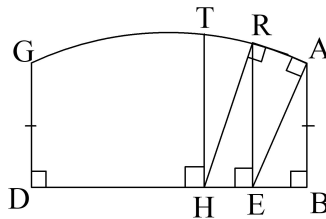


FIGURE 7 – *Traité qui délivre du doute...*  
Proposition 3 – Cas des angles obtus

8. La droite AG y est représentée courbe pour une meilleure visualisation des angles obtus en A et G et des perpendiculaires successives.

La démonstration est organisée comme dans le texte de ‘Umar al-Ḥayyām par division en trois cas. Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī examine d’abord celui où les angles en A et G sont obtus ; en construisant deux séries de perpendiculaires, les unes à la droite AG par un point de cette droite (A puis R, etc.), les autres à la droite BD par un point de cette droite (E puis H, etc.), il montre, par des considérations sur les angles des triangles ainsi formés et les côtés qu’ils sous-tendent, que les perpendiculaires élevées d’un point de BD vers AG augmentent constamment en s’éloignant de AB ( $BA < ER < HT < \dots$ ). En répétant cette construction et ce raisonnement à partir de DG, il obtient que ces mêmes perpendiculaires augmentent constamment en s’éloignant de DG, c’est-à-dire en s’approchant de BA ( $HT < ER < BA$ ), ce qui est en contradiction avec le résultat antérieur. L’argumentation de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī est superfétatoire en plus d’être erronée : superfétatoire, car il lui aurait suffi de remarquer que l’augmentation constante des perpendiculaires à BD est contradictoire avec l’égalité des droites BA et DG ; erronée, car lorsque le point de BD, duquel est élevée la perpendiculaire vers AG, est le milieu de BD, cette droite est aussi perpendiculaire à AG en son milieu, comme l’a montré ‘Umar al-Ḥayyām dans sa proposition 2. Le processus d’itération des perpendiculaires produit alors à répétition la même perpendiculaire commune à BD et AG en leurs milieux, ce qui met un terme au processus. Il faut d’ailleurs noter l’absence d’une proposition analogue à la proposition 2 de ‘Umar al-Ḥayyām mettant en évidence l’axe de symétrie du quadrilatère. Le cas de l’angle aigu est traité de la même façon, avec cette différence que les droites comme BA, ER, HT, ... diminuent en s’éloignant de AB, mais souffre de la même erreur<sup>9</sup>.

La proposition 5 correspond à la proposition 29 du premier livre des *Éléments* que Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī démontre sans recours au cinquième postulat, mais en définissant implicitement les parallèles comme des équidistantes. Enfin la proposition 7 démontre le cinquième postulat. Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī ajoute ensuite trois propositions inspirées des travaux al-Ġauharī (IX<sup>e</sup> siècle), qui ne sont connus d’ailleurs que par la relation qu’en donne Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī. Ces propositions doivent remplacer les propositions 6 et 7 précédentes : la deuxième, remplaçant la proposition 7, montre que si un point est situé entre les côtés d’un angle rectiligne, il est possible de joindre ces côtés par une droite passant par ce point, mais sa démonstration utilise implicitement l’axiome de Pasch. (Jaouiche, 1986, p. 225).

Le second texte attribué à Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī sur la théorie des parallèles (Jaouiche, 1986, p. 233-241) figure dans la *Rédaction des Éléments d’Euclide* publiée en arabe à Rome en 1594. Il comporte la démonstration du postulat précédée de trois lemmes, chacun équivalent au postulat. Le premier de ces lemmes formalise l’argument utilisé dans la démonstration de la proposition 3 du *Traité qui délivre du doute...* en construisant une succession de droites perpendiculaires à une droite donnée vers une droite aussi donnée et permettant de montrer que ces deux droites se rapprochent l’une de l’autre d’un côté puis de l’autre côté aussi, ce qui est contradictoire. Mais ce lemme est évidemment sujet à la même critique que la démonstration de la proposition 3, négligeant la possibilité d’une perpen-

9. Dans le cas de l’angle aigu, les droites « en accordéon » AB, BR, RE, ET, TH, etc. tendent, en se serrant de plus en plus les unes aux autres, vers la perpendiculaire aux milieux de AB et CD sans l’atteindre.

diculaire commune entre les deux droites. Toutefois, si ce lemme est admis, il implique le cinquième postulat. Le deuxième lemme montre la rectitude des angles aux sommets d'un quadrilatère birectangle isocèle, ainsi que l'égalité entre la base et la droite joignant ces sommets, regroupant les propositions 3 et 4 du premier traité. Le troisième lemme montre que la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits. Suit la démonstration du postulat euclidien, divisée en trois cas selon le caractère des angles intérieurs de somme inférieure à deux droits : droit et aigu, aigus tous deux, obtus et aigu.

Si les recherches des savants des pays de l'Islam médiéval n'ont pas abouti à des résultats satisfaisants sur la démontrabilité du cinquième postulat, elles ont néanmoins produit des outils (quadrilatère birectangle isocèle dit depuis de al-Ḥayyām – Saccheri, quadrilatère trirectangle dit de al-Ḥaytam – Lambert) et des processus de démonstration (la considération de trois cas : angle droit, obtus, aigu dans l'organisation de la preuve) qui ont été mis en œuvre avec profit par les géomètres ultérieurs comme Saccheri et Lambert.

## Époque moderne : XVI<sup>e</sup>-XVII<sup>e</sup> siècles

Les travaux les plus notables sur le cinquième postulat durant cette période sont le fait de deux mathématiciens, l'un allemand, Christophorus Clavius (1538-1612), l'autre anglais, John Wallis (1616-1703).

### Christophorus Clavius

Clavius publie en 1574 une traduction latine des *Éléments* d'Euclide augmentée de ses propres commentaires. Il y propose deux méthodes de démonstration du cinquième postulat qui, dans son édition, figure en tant qu'axiome 13.

La première méthode comporte cinq théorèmes : les deux premiers établissent qu'une ligne équidistante à une droite est une droite ; le troisième montre que, dans un quadrilatère birectangle isocèle ABCD, où AD est perpendiculaire à AB, BC est perpendiculaire à AB et AD est égale à BC, toute perpendiculaire élevée d'un point E de AB vers un point F de CD est égale à AD et à BC. Le quatrième théorème montre que, dans un tel quadrilatère, les angles en C et D sont droits. Enfin le dernier théorème donne une preuve du postulat euclidien. Cette démarche n'apporte rien de neuf par rapport à certaines déjà rencontrées précédemment.

La seconde méthode repose sur le théorème suivant : étant données trois droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  telles que  $d_3$  est perpendiculaire à  $d_1$  et fait avec  $d_2$ , du côté de  $d_1$ , un angle aigu, alors  $d_1$  et  $d_2$  se rapprochent l'une de l'autre du côté de l'angle aigu et s'éloignent de l'autre côté. La démonstration a recours à la construction d'une succession de droites perpendiculaires à  $d_1$  vers  $d_2$ , puis de  $d_2$  vers  $d_1$ , procédure présente auparavant dans les textes de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, et donc susceptible des mêmes critiques. Là encore aucune nouveauté.

## John Wallis

Les réflexions de John Wallis sur le cinquième postulat ont été publiées dans le deuxième volume de ses *Opera mathematica*<sup>10</sup> et avaient été préalablement diffusées sous la forme de deux conférences en latin. La première, en 1651, exposait les considérations de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī sur le cinquième postulat, et la seconde, prononcée à Oxford le soir du 11 juillet 1663<sup>11</sup> celles de Wallis lui-même. Le fondement des réflexions de Wallis consiste en l'admission du principe de similitude qui est formulé dans le lemme 8 : « *Data cuicunque Figuræ, Similem aliam cujuscunque magnitudinis possibilem esse.* » (Wallis, 1693-1699, vol. 2, p. 676). Traduction : « Étant donnée une figure quelconque, une autre semblable de grandeur quelconque est possible. »

Ce principe a été commenté par Saccheri dans l'examen qu'il a rédigé sur la tentative de Wallis en expliquant qu'il suffit de supposer l'existence de deux triangles semblables de grandeur différente pour pouvoir démontrer le cinquième postulat. Ce faisant, il a montré que le principe de similitude est équivalent au dit postulat.

## Conclusion

Si la tentative de Wallis n'a pas plus abouti que les précédentes à une conclusion satisfaisante, elle a certainement permis à Saccheri de connaître, non seulement cette tentative, mais aussi les travaux de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī et, par son intermédiaire, peut-être ceux de Ibn al-Haytam et de 'Umar al-Hayyām dont Naṣīr avait fait la critique.

Le travail de Saccheri sur le cinquième postulat d'Euclide, qui est présenté dans le chapitre suivant de cet ouvrage, va élaborer des concepts et des résultats qui ont intégré depuis le corpus de la géométrie hyperbolique.

## Références bibliographiques

### Les textes

- CLAVIUS Christophorus, 1574, *Euclidis elementorum libri XV*, Rome, apud Vincetium Accoltum.
- EUCLIDE, 1990, *Les Éléments*, traduits du grec en français par Bernard Vitrac. Vol. 1. Paris, Presses universitaires de France.
- JAOUICHE Khalil, 1986, *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, Paris, Vrin.
- PROCLUS de Lycie, 1948, *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduits du grec en français par Paul Ver Eecke, Bruges, Desclée de Brouwer et Cie.

---

10. Le texte de la conférence du 11 juillet 1663 est reproduit, traduit et commenté dans *Wallis, le Cinquième postulat et la Similitude*, (Chabert et Neuberg, 1986).

11. Datation selon le calendrier julien, l'Angleterre n'ayant pas encore adopté à cette époque le calendrier grégorien.



WALLIS John, 1693, « *Demonstratio postulati Quinti Euclidis* » (Démonstration du cinquième postulat d'Euclide), conférence prononcée en public à Oxford le soir du 11 juillet 1663 (calendrier julien) et publiée dans *Opera mathematica*, vol. 2, Oxford, p. 674-678.

## Études

- BRIN Philippe, BÜHLER Martine, 2002, « Histoire des géométries non euclidiennes : la théorie des parallèles d'Euclide à Lobatchevski » in BARBIN Évelyne (dir.), *4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée* (Actes du treizième colloque inter-IREM d'Histoire et d'Épistémologie des Mathématiques, 6-7-8 mai 2000), IREM de Rennes. p. 313-340.
- CHABERT Jean-Luc, NEUBERG Jean, 1986, *Wallis, le Cinquième Postulat et la Similitude*, IREM de Picardie, Université de Picardie.
- CHABERT Jean-Luc, 1987, *La préhistoire des géométries non euclidiennes ou l'histoire du Cinquième Postulat*, IREM de Picardie, Université de Picardie.
- CHABERT Jean-Luc, 1987, *Les géométries non euclidiennes*, IREM de Picardie, Université de Picardie.
- CHABERT Jean-Luc, 1993, « La vraie fausse démonstration du Cinquième postulat » in BARBIN Évelyne (dir.), *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Paris, éditions Ellipses, coll. « Commission Inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques », p. 277-297.
- PONT Jean-Claude, 1986, *L'aventure des parallèles, histoire de la géométrie non euclidienne : précurseurs et attardés*, Berne, Peter Lang.



## Le père Jésuite Giromalo Saccheri (1677-1733) correcteur d'Euclide et inventeur de résultats de la géométrie hyperbolique à venir

Didier BESSOT

### Introduction

Le travail du Père Girolamo Saccheri sur le cinquième postulat d'Euclide s'inscrit dans la continuité des tentatives de démonstration de ses prédécesseurs (voir le chapitre précédent). Il est l'objet du premier livre de son traité *Euclides ab omni naevo vindicatus...* (Saccheri, 1733). Ce traité, dont le titre complet est *Euclides ab omni naevo vindicatus : sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ Principia* (traduction : Euclide délivré de toute tache, ou essai géométrique par lequel sont établis les tout premiers principes de la géométrie universelle)<sup>1</sup> a été publié en 1733 à Milan. À une brève biographie de Girolamo Saccheri succéderont une description matérielle de l'ouvrage puis un exposé commenté du contenu du premier livre.

### Brève biographie de G. Saccheri

Giovanni Girolamo Saccheri est né à San Remo en 1667 et mort à Milan en 1733. Reconnu intellectuellement précoce, il entre dans la Compagnie de Jésus en 1685 où il effectue son noviciat à Gênes jusqu'en 1690. Il est envoyé ensuite à Milan au Collège de La Brera pour enseigner la grammaire et étudier la philosophie et la théologie. Il y aborde également l'étude des mathématiques par la lecture des *Éléments* d'Euclide qui lui a été recommandée par le Père jésuite Tommaso Ceva,

---

1. Toutes les citations en français apparaissant dans la suite de l'article proviennent d'une traduction en cours par l'auteur de l'article.

frère de Giovanni Ceva, auteur du théorème qui porte son nom. Il publie en 1693 des *Quæsitæ geometrica*. Ordonné prêtre en 1694, il est envoyé au Collège des Jésuites de Turin pour y enseigner la philosophie et la dispute théologique. Il publie en 1697 la *Logica demonstrativa* avant de partir la même année à l'Université de Pavie où il est chargé d'enseigner la philosophie, la théologie et les mathématiques. Il entame alors une recherche des imperfections contenues dans les *Éléments* d'Euclide. Il en relève, comme certains de ses prédécesseurs, principalement deux, la première à propos du cinquième postulat, la seconde dans la théorie des proportions. La volonté de corriger ces « taches » le conduit à la rédaction et à la publication à Milan en 1733 de l'*Euclides ab omni nævo vindicatus*. . . Entretemps, il a publié aussi à Milan en 1708 une *Neo-statica*.

## Contenu du traité *Euclides ab omni nævo vindicatus*. . .

### Description matérielle du traité

Le traité édité en 1733 se présente comme un codex de format in-4° partagé en quatre parties : des préliminaires en 16 pages paginées seulement à partir de la page IX, le livre I constitué de 101 pages, le livre II de 41 pages et 6 pages de planches.

Les préliminaires comprennent la page de titre, une lettre dédicatoire au Sénat de Milan de 3 pages, 1 page d'approbation des Supérieurs, 1 page pour l'Imprimerie, une introduction destinée au lecteur de 3 pages, une description sommaire du contenu en 4 pages et enfin 1 page d'errata.

Le livre premier est divisé en deux parties : la première, de 86 pages, contient 33 propositions entourées de 3 définitions, 5 lemmes, 17 corollaires et 12 scholies. Les quatre premières planches contenant 41 figures s'y rapportent. La seconde partie, de 15 pages, contient 6 propositions, 1 corollaire et 3 scholies auxquels s'ajoute la planche V composée de 7 figures.

Le livre second est aussi divisé en deux parties : la première, de 31 pages, la seconde, de 11 pages. Il est complété par la planche VI composée de 7 figures.

### Aperçu du contenu : examen des préliminaires

Dans l'introduction destinée au lecteur, Saccheri rappelle la place de tout premier plan reconnue aux *Éléments* d'Euclide par les mathématiciens autant anciens que contemporains. Mais cette prééminence ne les a pas empêchés de relever dans cet ouvrage des imperfections, principalement au nombre de trois. La première, dit-il, concerne la définition des droites parallèles et l'axiome figurant dans l'édition de Clavius du premier livre des *Éléments*<sup>2</sup> sous le numéro 13 (plus souvent nommé cinquième postulat) que Saccheri cite alors. Il ajoute que, bien que personne ne doute de sa vérité, certains ont reproché à Euclide de l'avoir rangé parmi

---

2. C'est très probablement par l'édition de Clavius parue à Rome en 1589 que Saccheri a eu connaissance des *Éléments* d'Euclide.

les axiomes comme si une compréhension correcte des termes de son énoncé suffisait à emporter la conviction. Plusieurs ont alors tenté de le démontrer à partir des seules propositions du premier livre précédant la proposition 29 qui est la première où ce postulat est utilisé. Devant le peu de réussite de ces tentatives, d'autres ont proposé de modifier la définition des droites parallèles en la remplaçant par celle de droites équidistantes. Mais, parmi eux, certains ont commis, selon Saccheri, « un grand péché à l'égard de la rigueur logique » en admettant l'équivalence entre le parallélisme euclidien et l'équidistance ce qui, d'après lui, nécessite une démonstration.

Annonçant que le premier livre de son traité est consacré à la recherche d'une démonstration du cinquième postulat, Saccheri ajoute qu'il veut développer plus en détail les commentaires précédents dans des scholies placés après la proposition XXI de son traité. Ayant divisé le premier livre en deux parties, il se propose dans la première de démontrer le postulat à la manière des Anciens, sans avoir recours à la notion d'équidistance, et en n'utilisant pour cela que les propositions du premier livre des *Éléments* antérieures à la proposition 29. Il ajoute même qu'il évitera de se servir des propositions 27 et 28 ainsi que des propositions 16 et 17, excepté, dit-il, dans certains cas bien spécifiques<sup>3</sup>.

La seconde partie du premier livre se veut une confirmation du résultat de la première par une autre voie de démonstration, qui consiste à prouver qu'une ligne équidistante à une droite est de même longueur que cette droite. Saccheri réintroduit donc l'équidistance dans son argumentation, mais, contrairement à ses prédécesseurs, il ne cherche pas à montrer qu'une équidistante à une droite est une droite.

Le second livre<sup>4</sup> du traité est aussi divisé en deux parties : la première porte sur l'examen de la définition 6 (numérotée 5 dans (Euclide, 1994, p. 41), elle définit l'égalité des rapports) du cinquième livre des *Éléments* d'Euclide, la seconde sur celui de la définition 5 du sixième livre des *Éléments* (Euclide, 1994, p. 150) qui définit la composition des rapports. Saccheri annonce déjà que, selon lui, Euclide a été injustement attaqué sur ces deux points.

## Exposé et examen du Livre I

### Configurations et hypothèses (Prop. I-XI)

Elle commence sans préambule par deux propositions mettant en œuvre un quadrilatère ABDC où les angles en A et B sont égaux ainsi que les longueurs AC et BD (figure 1). La proposition I montre que les angles en C et D sont égaux et la proposition II que la droite joignant les milieux M et H de AB et de CD est perpendiculaire à ces deux côtés.

3. En réalité, dans la suite du premier livre de son ouvrage, Saccheri a recours une fois à la proposition 27, quatre fois à la proposition 28, quatorze fois à la proposition 16 et vingt-quatre fois à la proposition 17. L'emploi de la proposition 16 est problématique dans le cas de l'hypothèse de l'angle obtus en particulier, car cette proposition ne ressort pas de la géométrie absolue puisqu'elle n'est pas vraie en géométrie sphérique.

4. Ce second livre n'est pas examiné dans le présent article.

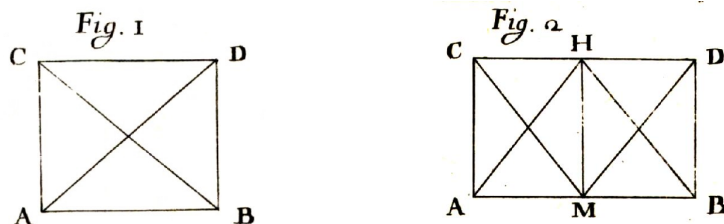


FIGURE 1 – Figures 1 et 2 de l'*Euclides ab omni nævo vindicatus*...  
 Contrairement à l'apparence, les angles en A et B ne sont pas nécessairement droits

La proposition III particularise le quadrilatère en imposant aux angles en A et B d'être droits (il est nommé ici S-quadrilatère). Elle institue une relation comparative entre le caractère des angles égaux en C et D et la longueur des droites AB et CD : la droite CD est égale (resp. inférieure, resp. supérieure) à la droite AB selon que les angles en C et D sont droits (resp. obtus, resp. aigus).

La proposition III est suivie de trois corollaires dont le premier montre que dans un quadrilatère trirectangle, tel AMHC, les côtés adjacents à l'angle en C non droit, CA et CH, sont plus petits (resp. plus grands) que les côtés opposés, MH et AM, lorsque l'angle en C est obtus (resp. aigu).

La proposition IV est réciproque de la proposition III : si la droite CD est égale (resp. inférieure, resp. supérieure) à la droite AB, les angles en C et D sont droits (resp. obtus, resp. aigus).

Suivent alors des définitions de ce que Saccheri appelle l'hypothèse de l'angle droit, de l'angle obtus, de l'angle aigu, selon que les angles aux sommets d'un S-quadrilatère, comme C et D dans les figures précédentes, sont droits, obtus ou aigus. Saccheri développe les conséquences des hypothèses de l'angle obtus et de l'angle aigu aussi loin que nécessaire pour aboutir à une contradiction, ce qui valide alors l'hypothèse de l'angle droit, et par conséquent le postulat euclidien.

À ces définitions succède un groupe de trois propositions qui peuvent être résumées en une seule qui serait : « si l'une des trois hypothèses est vraie dans un seul cas, alors elle est vraie dans tous les cas », autrement dit : « si un S-quadrilatère relève d'une des hypothèses, tous les S-quadrilatères relèvent de la même hypothèse ». Les propositions V et VI, concernant respectivement l'hypothèse de l'angle droit, puis de l'angle obtus reçoivent des démonstrations d'ordre géométrique en deux parties. Dans un premier temps, Saccheri montre que, étant un S-quadrilatère vérifiant une des deux hypothèses, tous les S-quadrilatères construits sur la même base (AB dans les figures 1 et 2 de Saccheri), obtenus en allongeant puis en raccourcissant les côtés égaux perpendiculaires à la base, vérifient la même hypothèse ; dans un second temps, il montre qu'un S-quadrilatère construit sur une base différente, à savoir un des côtés perpendiculaires à la base produit dans un des S-quadrilatères précédents, vérifie aussi la même hypothèse. La proposition VII, qui traite de l'hypothèse de l'angle aigu reçoit une démonstration purement logique, à savoir : s'il existe un S-quadrilatère relevant de l'hypothèse de l'angle aigu, le fait qu'un autre S-quadrilatère ne relève pas de cette hypothèse conduit à

ce que (d'après les deux propositions précédentes) tous les S-quadrilatères relèvent d'une autre hypothèse que de celle de l'angle aigu, ce qui est contraire à la donnée. La preuve faite du caractère universel de chaque hypothèse, à l'exclusion des deux autres, prouve que Saccheri est le premier à établir, conduit à penser qu'il aurait été plus logique de placer les définitions après la proposition VII. En outre, ce caractère universel fait de la proposition IV un critère de reconnaissance de chaque hypothèse.

Les propositions VIII et IX se rapportent aux angles aigus d'un triangle rectangle (figure 2). La première montre que, en prenant les notations de la figure dans laquelle les angles ABD et BAH sont droits et AX le prolongement de DA à partir de A, l'angle extérieur XAH est égal (resp. inférieur, resp. supérieur) à l'angle intérieur opposé ADB, selon qu'est vraie l'hypothèse de l'angle droit (resp. obtus, resp. aigu) ainsi que la réciproque qui constitue un critère supplémentaire de reconnaissance de l'hypothèse en cours de validité. La seconde montre que, dans un triangle rectangle, la somme des deux angles aigus est égale (resp. inférieure, resp. supérieure) à un angle droit selon qu'est vraie l'hypothèse de l'angle droit (resp. aigu, resp. obtus).

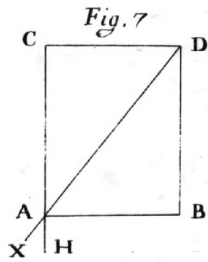


FIGURE 2 – Figure 7 de l' *Euclides ab omni nævo...* illustrant les propositions VIII et IX

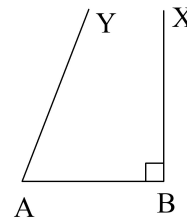


FIGURE 3 – Configuration fondamentale

Les propositions XI, XII et XIII préparent la proposition XIV dans laquelle est montrée la fausseté de l'hypothèse de l'angle obtus. Dans la proposition XI Saccheri met en place une configuration<sup>5</sup> qui aura une place fondamentale dans la suite de ses raisonnements ; elle consiste en une droite AB recevant en B une droite perpendiculaire susceptible d'être prolongée autant que nécessaire, BX, et d'une droite faisant en A avec AB un angle aigu et située du même côté que BX par rapport à AB (figure 3). Cette configuration est une particularisation de celle du cinquième postulat ; ici un des angles intérieurs est droit, l'autre alors nécessairement aigu. Saccheri montre alors que, sous l'hypothèse de l'angle droit, les droites AY et BX se rencontrent en un point à distance finie. La proposition XII parvient à la même conclusion sous l'hypothèse de l'angle obtus. La proposition XIII énonce :

5. Cette configuration est celle qu'a introduite Lobatchevski dès le début de son traité *La théorie des parallèles* (édition en allemand, Berlin, 1840, traduction française par Jules Hoüel en 1866, republication par les éditions Monom, 1980) en considérant non pas une seule droite passant par A, mais toutes ces droites. Cet ouvrage de Lobatchevski sera mentionné dans la suite par (Lobatchevski, 1980).

« Si la droite XA (d'une longueur donnée aussi grande qu'on veut), rencontrant deux droites AD, XL, fait avec elles des angles internes du même côté XAD, AXL (fig. 11) moindres que deux droits, je dis que ces deux droites (même si aucun de ces angles n'est droit) se rencontreront à terme en quelque point situé du côté de ces angles, et sûrement à une distance finie, c'est-à-dire déterminée, que l'hypothèse soit celle de l'angle droit ou de l'angle obtus. » (Saccheri, 1733, p. 16-17).

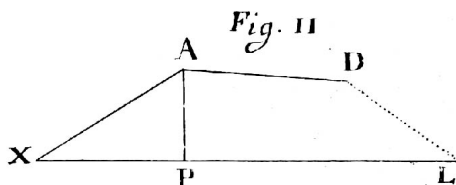


FIGURE 4 – Figure 11 de l' *Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XIII.

Les points A, D et L doivent être conçus comme alignés

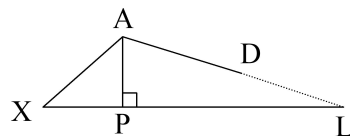


FIGURE 5 – Explication de la figure 11

Cette proposition ne fait qu'énoncer le cinquième postulat dans une formulation plus compliquée et en l'étendant à l'hypothèse de l'angle obtus. La démonstration est en substance la suivante : puisque la somme des angles XAD et AXL est inférieure à deux droits, l'un d'eux, en l'occurrence AXL, est aigu. Alors la perpendiculaire abaissée de A vers XL tombe dans XL, en P. Dans le triangle rectangle en P, APX, la somme des angles aigus PXA et PAX est supérieure ou égale à un angle droit, en vertu de la proposition IX ; la soustraction des angles PXA et PAX à la somme des angles XAD et AXL produit l'angle restant PAD qui est donc inférieur à un angle droit. Alors, d'après les propositions XI et XII, les droites AD et XL se rencontrent en un point à distance finie, sous l'hypothèse de l'angle droit comme sous celle de l'angle obtus. Suit le scholie I dans lequel Saccheri note « une différence notable à propos de l'hypothèse de l'angle aigu. En effet dans ce cas le concours de telles droites ne saurait être démontré en toute généralité... » (Saccheri, 1733, p. 17), à savoir qu'il peut parfois se produire et parfois ne pas se produire. Ainsi ne peut-il se produire si la droite AD est perpendiculaire à AP même si alors la somme des angles XAD et AXL est inférieure à deux angles droits puisque celle des angles aigus PXA et PAX est inférieure à un angle droit, en vertu de la proposition IX. Saccheri met ici en évidence un cas où le postulat euclidien ne s'applique pas dans l'hypothèse de l'angle aigu. Il ajoute que, si ce concours pouvait être démontré en toute généralité, l'hypothèse de l'angle aigu serait ruinée.

La proposition XIV affirme que : « L'hypothèse de l'angle obtus est absolument fautive, puisqu'elle se détruit elle-même. » (Saccheri, 1733, p. 18). En effet, si l'hypothèse de l'angle obtus est vraie, elle permet de valider, en vertu de la proposition XIII, le cinquième postulat, qui, lui, assure la validité de l'hypothèse de l'angle droit, à l'exclusion donc de celle de l'angle obtus. Saccheri double cette démonstration purement logique par une seconde, qualifiée de plus directe, bâtie sur des arguments géométriques appliqués à la configuration de la proposition XIII.



Les propositions XV, XVI, XVIII et XIX présentent des critères supplémentaires de reconnaissance de l'hypothèse valide. En substance elles montrent que l'hypothèse de l'angle droit (resp. obtus, resp. aigu) est établie par le fait qu'il existe un triangle dont la somme des angles est égale (resp. supérieure, resp. inférieure) à deux angles droits (proposition XV), ou un quadrilatère dont la somme des angles est égale (resp. supérieure, resp. inférieure) à quatre angles droits (proposition XVI) ou un triangle inscrit dans un demi-cercle dont l'angle opposé au diamètre est égal (resp. supérieur, resp. inférieur) à un angle droit (proposition XVIII). La proposition XIX présente un triangle ABC rectangle en B où, par le milieu D de AC, est menée la perpendiculaire à AB qu'elle rencontre en H (figure 6). L'hypothèse de l'angle droit (resp. obtus, resp. aigu) est établie si la droite HB est égale (resp. supérieure, resp. inférieure) à la droite AH.

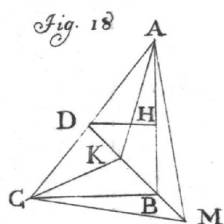


FIGURE 6 – Figure 18 de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XIX

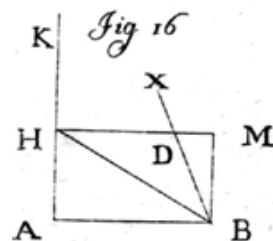
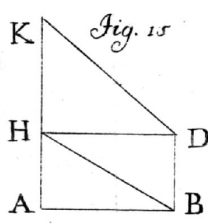


FIGURE 7 – Figures 15 et 16 de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XVII

Retour en arrière vers la proposition XVII : Saccheri y montre la remarque qu'il a faite dans le scholie I suivant la proposition XIII à propos de l'hypothèse de l'angle aigu. Il reprend une configuration analogue à celle de la figure 3, dite « fondamentale » ; elle consiste ici (figure 7) en une droite AB sur laquelle est élevée à partir de A la perpendiculaire AH et est menée à partir de B une droite BD, du même côté que AH, faisant avec AB un angle aigu. Saccheri montre alors qu'il n'est pas possible d'assurer, contrairement à ce qui est certain sous l'hypothèse de l'angle droit, que les droites AH et BD, prolongées autant que nécessaire se rencontreront en un point à distance finie. Saccheri en donne deux démonstrations. La première est illustrée par la figure 15 dans laquelle il faut comprendre que l'angle BAH est droit, l'angle ABD est aigu et l'angle BDH droit. La droite BD n'est pas donnée a priori mais construite de sorte que l'angle ABD est aigu. Saccheri suppose ensuite que les droites BD et AH prolongées se rencontrent en un point K, supposé donc aligné avec B et D, puis en déduit une absurdité concernant des angles de la configuration. Saccheri a ainsi prouvé l'existence d'une droite, menée à partir de B à angle aigu avec BA, qui prolongée n'est pas sécante à AH prolongée. La seconde démonstration est illustrée par la figure 16 où les angles BAH, ABM et AHM sont droits si bien que l'angle BMH est aigu et qu'alors la perpendiculaire BX à HM par B coupe HM en D entre H et M ; alors l'angle ABX est aigu. Puisque les angles DHK et HDX sont droits, les droites AK et BX ne peuvent se rencontrer à distance finie.

Il faut noter ici que l'apparence des figures peu conforme à la réalité des données n'empêche pas Saccheri de raisonner juste. Cette proposition est tout à fait remarquable en ce qu'elle est révélatrice de l'acuité et de la maîtrise logique de la pensée de Saccheri, et elle est la porte ouverte vers l'exploration qui va suivre des propriétés issues de l'hypothèse de l'angle aigu.

La proposition XX illustrée de la figure 19 (figure 8) montre que, dans un triangle ACM rectangle en C, la perpendiculaire abaissée du milieu B de MA sur AC en D n'est pas supérieure à la moitié de MC, sous condition de l'hypothèse de l'angle aigu. La proposition XXI montre, en reprenant les données de la précédente, que, si les droites AM et AC sont prolongées indéfiniment à l'opposé du point A, alors, sous condition de l'hypothèse de l'angle droit ou aigu, leur distance devient plus grande que toute longueur finie, cette distance étant évaluée par les perpendiculaires à AC prolongée, menées par un point de AM aussi prolongée. En effet, le point P étant pris sur le prolongement de AM en sorte que AM et MP sont égales, et N étant le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur le prolongement de AC, la droite PN est supérieure ou égale au double de MC, elle-même supérieure ou égale au double de BD, en vertu de la proposition précédente.

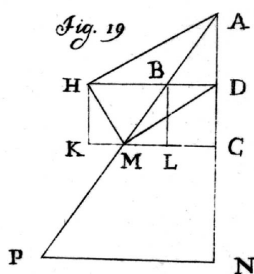


FIGURE 8 – Figure 19 de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant les propositions XX et XXI

## Scolies historico-épistémologiques

Comme il l'avait annoncé dans l'introduction, Saccheri propose quatre scholies « historico-épistémologiques » dans lesquels il examine des tentatives antérieures de démonstration du postulat euclidien. Le premier porte sur l'essai de Proclus et le deuxième sur celui de Giovanni Borelli dans l'*Euclides restitutus...*<sup>6</sup>. Le troisième est le plus intéressant sur le plan historique car il donne des indications sur l'essai de John Wallis et, par ce dernier, sur celui de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, désigné par son nom latin de Nassaradinus, et peut-être sur ceux plus anciens de Ibn al-Haytam et de 'Umar al-Hayyām dont Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī avait fait la critique (voir le chapitre précédent). C'est certainement par ce canal que Saccheri a eu connaissance des travaux des savants médiévaux arabo-islamiques, auxquels

6. Borelli, Giovanni Alfonso, *Euclides restitutus...* Pise, 1658.

il a très probablement emprunté l'outil du quadrilatère birectangle isocèle, la démarche de démonstration selon les trois hypothèses (angle droit, obtus, aigu) ainsi que le plan général du traité en trois parties (cinquième postulat, définition 6 du Livre 5, définition 5 du Livre 6), facteurs de forte ressemblance avec notamment l'*Opuscule sur l'explication des postulats problématiques...* de 'Umar al-Ḥayyām. Dans ce scholie III, Saccheri expose une critique de la démonstration de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī en tous points analogue à celle qui est présentée dans le chapitre précédent. Saccheri rappelle le procédé de construction de perpendiculaires successives, alternativement à la base et au sommet d'un quadrilatère birectangle isocèle, mais ajoute :

« Mais ici se dissimule une équivoque. En effet pourquoi [...] les angles des perpendiculaires suivantes, tous aigus du même côté, ne seraient-ils pas toujours plus grands, jusqu'à ce que l'une [des perpendiculaires] tombe selon un angle droit en telle perpendiculaire qui soit la perpendiculaire commune à chacune des deux droites précitées ? Et certes si cela se produit, la préparation obscure de Nassaradinus disparaît [...]. » (Saccheri, 1733, p. 39)

Saccheri commente ensuite la tentative de Wallis fondée sur la possibilité de figures semblables, en montrant qu'il suffit de postuler l'existence de deux triangles équiangles mais non égaux (figures 9 et 10).

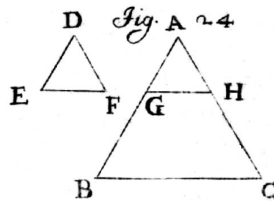


FIGURE 9 – Figure 24 de l'*Euclides ab omni nœvo...* illustrant le scholie III  
 Contrairement à l'apparence, les triangles ne sont pas équilatères, ni même isocèles

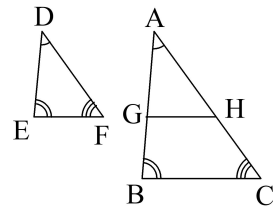


FIGURE 10 – Adaptation de la figure 24

En supposant les côtés du triangle ABC plus grands que ceux du triangle DEF, le point G est placé sur AB de sorte que  $AG = DE$ , et le point H sur AC de sorte que  $AH = DF$ ; compte tenu de l'égalité des angles GAH et EDF, les triangles AGH et DEF sont égaux en vertu de la proposition 4 du premier livre des *Éléments* d'Euclide, donc les angles AGH et DEF, ainsi que les angles AHG et DFE, sont égaux, alors les angles AGH et ABC, ainsi que les angles AHG et ACB, sont égaux. Or la somme des angles AGH et HGB, ajoutée à la somme des angles AHG et GHC, vaut quatre angles droits, donc la somme des quatre angles GBC (égal à AGH), HGB, HCB (égal à AHG) et GHC est égale à quatre angles droits. Donc en vertu de la proposition XVI sur la somme des angles d'un quadrilatère, l'hypothèse de l'angle droit est alors valide et le postulat euclidien est démontré. Le quatrième scholie examine une figure à laquelle, selon Saccheri, Euclide aurait pu penser pour démontrer son postulat.

## Hypothèse de l'angle aigu : première réfutation (Prop. XXII-XXXIII)

La suite de cette première partie du premier livre est décisive dans le développement de l'argumentation de Saccheri. Celui-ci y examine la disposition relative de deux droites sous l'hypothèse de l'angle aigu, en utilisant à répétition la configuration apparue dans les propositions XI puis XVII, consistant en une droite aux extrémités de laquelle sont menées, du même côté de cette droite, une perpendiculaire et de l'autre une droite faisant avec la première droite un angle aigu du côté de la perpendiculaire (figure 3).

Dans la proposition XXII, Saccheri met en œuvre un quadrilatère  $ABDC$  où  $AB$  et  $CD$  sont perpendiculaires à  $BD$ , en  $B$  et  $D$  respectivement, et où les angles en  $A$  et  $C$  sont aigus (figures 11 et 12). Il montre qu'alors les droites  $AC$  et  $BD$  ont une perpendiculaire commune située à l'intérieur du quadrilatère. Cette configuration généralise celle de la proposition II (voir figure 1) où les côtés  $AB$  et  $CD$ , ainsi que les angles en  $A$  et  $C$ , sont égaux et où la droite joignant les milieux de  $AB$  et de  $CD$  est perpendiculaire à ces droites.

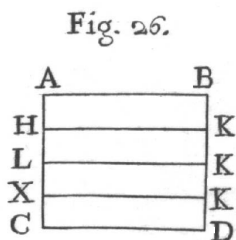


FIGURE 11 – Figure 26 de l'*Euclides ab omni nævo*. . . illustrant la proposition XXII

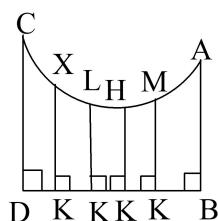


FIGURE 12 – Adaptation de la figure 26

Un point  $L$  étant pris n'importe où sur  $AC$ , de ce point est abaissée la perpendiculaire  $LK$  vers  $BD$ . Saccheri précise que le point  $K$  est bien sur la droite  $BD$  – i.e. entre  $B$  et  $D$  – ; sinon la droite  $LK$  couperait l'une des droites  $AB$  ou  $CD$ , ce qui est impossible en vertu de la proposition 17 du premier Livre des *Éléments* d'Euclide, puisque ces deux droites sont elles-mêmes perpendiculaires à  $BD$ . Si en  $L$  les angles ne sont pas droits, l'un est aigu, l'autre obtus, par exemple celui du côté de  $C$ ,  $KLC$ . Mais les angles formés par les perpendiculaires élevées d'un point de  $BD$  vers  $AC$  et  $AC$ , et du côté de  $C$  comme  $KHC$ , ne peuvent pas être tous obtus, sinon l'angle  $BAC$  serait obtus, ce qui est faux. Donc il existe un point  $M$  entre  $A$  et  $L$  où la perpendiculaire abaissée de ce point vers  $BD$  fait avec  $AC$ , du côté de  $C$ , un angle qui n'est pas obtus. S'il est droit, la proposition est acquise ; s'il est aigu, il existe un point intermédiaire entre  $L$  et  $M$ , comme  $H$ , où la perpendiculaire abaissée de  $H$  vers  $BD$  est aussi perpendiculaire à  $AC$ . Ce qui achève la démonstration qui toutefois fait appel à un principe du continu implicitement

admis<sup>7</sup>.

La proposition XXIII marque une nouvelle étape dans la progression de l'argumentation de Saccheri en montrant que, toujours sous l'hypothèse de l'angle aigu, deux droites ont, l'une vis-à-vis de l'autre, un des trois comportements suivants : ou bien elles ont une perpendiculaire commune, ou bien elles se rencontrent en un point à distance finie, ou bien elles s'approchent, d'un même côté, toujours plus l'une de l'autre. Reste à préciser comment un tel rapprochement mutuel se produit : de manière asymptotique ou en conservant un écart supérieur à une longueur donnée non nulle ?

Dans un scholie suivant cette proposition, Saccheri donne une construction de la perpendiculaire commune à deux droites pourvu que celles-ci soient coupées par une troisième droite selon des angles internes du même côté de cette droite de somme égale à deux droits (figures 13 et 14). Les droites AX et BX sont coupées par la droite PD respectivement en H et F de sorte que la somme des angles AHF et BFH vaut deux droits.

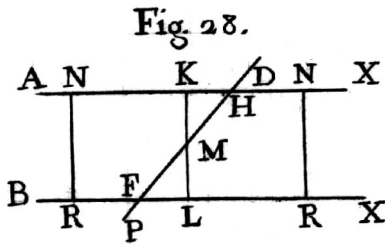


FIGURE 13 – Figure 28 de l'*Euclides ab omni nævo... illustrant le scholie de la proposition XXIII*

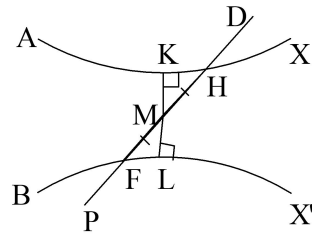


FIGURE 14 – Adaptation de la figure 28 où les deux points X sont distingués

M étant le milieu de FH, les perpendiculaires abaissées de M vers AX et BX rencontrent ces droites respectivement en K et L. Par des considérations d'angles, Saccheri montre que les points K, L et M sont alignés, ce qui achève la construction.

Dans un corollaire suivant ce scholie, Saccheri montre que, dans la configuration du scholie (figure 14), les droites AX, BX' et PD vérifient, d'une part l'égalité des angles alternes, internes AHF et X'FH ou externes DHA et PFX', ainsi que d'un angle externe comme DHX avec l'angle interne et opposé comme HFX', mais aussi pour AX et BX' l'impossibilité de se rencontrer « même dans leur prolongement à l'infini ». Les droites ayant une perpendiculaire commune ne sont donc ni sécantes ni asymptotes.

La proposition XXIV précise la configuration étudiée dans la proposition XXIII (figure 15). Des perpendiculaires étant abaissées à partir de points de AX, comme D, H et L vers la droite BX aux points K, la somme des angles des quadrilatères proches de la base AB, comme KDHK, est inférieure à celle des angles des quadri-

7. Saccheri ne se préoccupe pas de l'unicité de cette perpendiculaire commune, qui est facile à établir. En effet l'existence d'une seconde perpendiculaire commune conduit à celle d'un quadrilatère à quatre angles droits, ce qui est impossible sous l'hypothèse de l'angle aigu (proposition XVI du traité).

latère plus éloignés, comme KHLK, du moins tant que AX et BX ne se rencontrent pas ou n'ont pas de perpendiculaire commune. Il reste que, du côté des points X, ces droites AX et BX peuvent soit se rencontrer, soit, sinon, se rapprocher toujours plus l'une de l'autre ou admettre une perpendiculaire commune, auquel cas elles s'éloignent ensuite toujours plus l'une de l'autre.

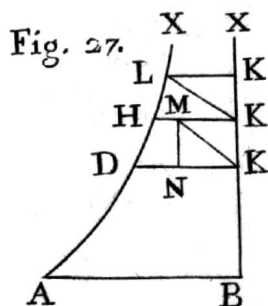


FIGURE 15 – Figure 27 de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXIV

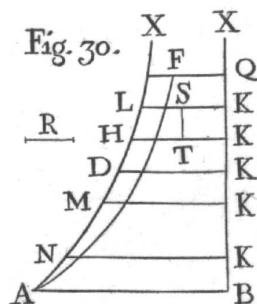


FIGURE 16 – Figure 30 de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXV

Sous les mêmes hypothèses, la proposition XXV énonce que, si les droites AX et BX se rapprochent toujours plus l'une de l'autre en gardant une distance supérieure à une longueur donnée, « l'hypothèse de l'angle aigu est ruinée ». En d'autres termes, sous l'hypothèse de l'angle aigu, si deux droites se rapprochent toujours plus l'une de l'autre – sans toutefois se rencontrer à distance finie – elles ne peuvent le faire qu'en devenant asymptotes. Saccheri a donc par cette proposition affiné le résultat de la proposition XXIII en donnant une caractérisation plus précise de la disposition relative de deux droites (figure 17) : a) ou bien elles ont une perpendiculaire commune et s'éloignent l'une de l'autre des deux côtés au-delà de toute grandeur finie, b) ou bien elles sont sécantes en un point à distance finie, c) ou bien elles s'approchent asymptotiquement l'une de l'autre d'un côté pour s'éloigner au-delà de toute grandeur finie de l'autre.

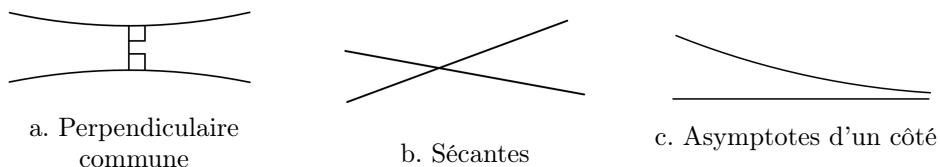


FIGURE 17 – Les trois cas de disposition relative de deux droites sous l'hypothèse de l'angle aigu

Dans le second corollaire de la proposition XXV Saccheri remarque donc que si deux droites n'admettent pas de perpendiculaire commune, elles doivent se rencontrer à distance finie ou infinie. Il lui suffirait alors de montrer que deux droites en

rencontrant une troisième en faisant avec elle des angles internes du même côté de somme inférieure à deux droits (i.e. vérifiant les conditions du postulat euclidien) n'ont pas de perpendiculaire commune, pour établir la Géométrie Euclidienne, ce qu'il se propose de faire plus loin dans le traité.

Dans les propositions et corollaires suivants, Saccheri va chercher à préciser la disposition des droites AX et BX dans le cas où elles ne se rencontrent qu'en leur prolongement à l'infini du même côté, à savoir lorsqu'elles sont asymptotes, et ce toujours sous l'hypothèse de l'angle aigu. La proposition XXVI (figure 18) énonce « qu'il n'y aura pas de point déterminable T sur AB [finie], duquel une perpendiculaire élevée du côté de AX ne rencontrera pas à distance finie [...] cette droite AX en quelque point F ». En des termes plus simples, toute perpendiculaire élevée à partir d'un point quelconque situé à l'intérieur de AB, et du côté de AX, sera sécante à AX, ou encore, il est impossible d'intercaler entre AX et BX une perpendiculaire à AB menée d'un point de AB. Le corollaire I ajoute que toute perpendiculaire élevée d'un point M de AB prolongée du côté de B ne rencontrera pas AX, même si ces droites AX et MZ sont prolongées à l'infini.

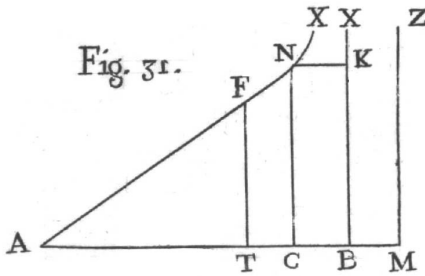


FIGURE 18 – Figure 31 de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXVI

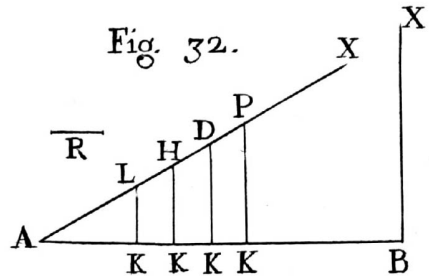


FIGURE 19 – Figure 32 de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXVII

La proposition XXVII (figure 19) veut prouver que, si deux droites comme AX et BX, menées du même côté d'une droite AB, la première selon un angle aussi petit que l'on veut, la seconde perpendiculairement à AB, se rencontrent ne serait-ce qu'à l'infini, alors l'hypothèse de l'angle aigu est invalidée. Mais cette proposition est fautive car, sous l'hypothèse de l'angle aigu, il existe des droites asymptotes. Dans la démonstration présentée par Saccheri, celui-ci partage l'espace entre AB et AX par des perpendiculaires KL, KH, KD, KP, ... à AB, régulièrement espacées d'un intervalle R, formant ainsi des quadrilatères birectangles. Par des considérations sur la somme des angles de tous ces quadrilatères, il montre que la somme des angles du premier d'entre eux, KLHK, est déficiente par rapport à quatre angles droits d'un angle moindre que le quotient d'un angle droit par le nombre de quadrilatères. En multipliant les quadrilatères à l'infini, cette portion d'angle droit tendrait vers zéro, et alors la somme des angles du quadrilatère KLHK serait égale ou supérieure à quatre droits, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de l'angle aigu. Ici Saccheri manipule l'infini et le passage à la limite d'une façon qui

pourrait être qualifiée de « sauvage ». D’ailleurs il est possible que Saccheri n’ait pas été satisfait de ce résultat car il aurait pu considérer à ce stade avoir atteint son but. Or il continue à développer les conséquences de l’hypothèse de l’angle aigu sur six propositions accompagnées de cinq lemmes avant de conclure la première partie du premier livre de son traité.

La proposition XXVIII (figure 20) montre que, dans la même configuration des droites AB, AX et BX, les deux dernières étant asymptotes du côté de X, les perpendiculaires abaissées des points L, H, D, ... de AX vers BX font avec AX du côté de A, en L, H, D, ... des angles obtus qui diminuent à mesure que les perpendiculaires s’éloignent de A, en se rapprochant toujours plus, en deçà de toute grandeur finie, de l’égalité avec l’angle droit.

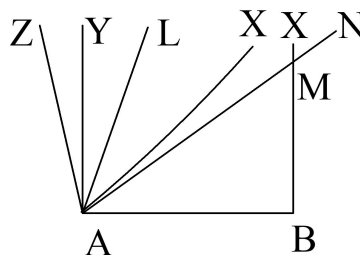
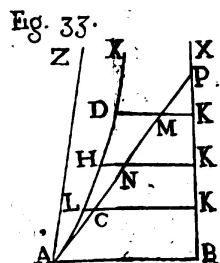


FIGURE 20 – Figure 33 de l’*Euclides ab omni nævo*... illustrant les propositions XXVIII, XXIX et XXXII

FIGURE 21 – Adaptation simplifiée de la figure 36 de l’*Euclides ab omni nævo*... illustrant la proposition XXX

Saccheri ajoute un corollaire dont la conclusion sera une pièce essentielle dans la réfutation de l’hypothèse de l’angle aigu. Il énonce en effet qu’« il s’ensuit manifestement que les droites AX, BX, prolongées à l’infini, auront à terme une perpendiculaire commune, soit en deux points distincts, soit en un même point X éloigné à l’infini. » Il rejette le fait que cette perpendiculaire commune soit établie en deux points distincts, car dans ce cas les droites AX et BX s’écarteraient de plus en plus l’une de l’autre après leur perpendiculaire commune, ce qui est contraire à leur caractère asymptotique. À nouveau Saccheri use d’un passage à la limite contestable en accordant aux droites asymptotes une propriété établie pour les non sécantes qui ont une perpendiculaire commune.

La proposition XXIX (figure 20) établit que, dans les mêmes conditions que celles de la proposition XXVIII, toute droite issue de A, située à l’intérieur de l’angle BAX et suffisamment prolongée comme AC, rencontrera la droite BX à distance finie, en P sur la figure 33. Un premier corollaire ajoute qu’aucune droite issue de A faisant avec AB un angle aigu plus grand que BAX ne sera ni sécante ni asymptote à BX. Le second corollaire énonce « qu’aucun angle aigu déterminé ne sera le plus grand de tous ceux sous lesquels une droite menée du point A rencontre BX à distance finie. » Plus clairement, toute droite menée à partir de A selon un angle avec AB compris entre l’angle nul et l’angle BAX exclu est sécante à BX. La proposition XXX (figure 21) complète la proposition XXIX et ses corollaires en montrant que dans la configuration de base – BX perpendiculaire à AB, AX asymptote à BX



– 1°) la droite AY perpendiculaire à AB du côté de AX et BX est la limite de celles qui admettent une perpendiculaire commune avec BX, à savoir qu’une droite AZ faisant avec AB un angle obtus du côté de AX ne peut avoir de perpendiculaire commune avec BX de ce côté, 2°) il n’y a pas d’angle aigu minimum sous lequel une droite menée de A, comme AL, admet une perpendiculaire commune en deux points distincts avec BX, à savoir toutes les droites menées de A faisant un angle avec AB compris entre l’angle droit et l’angle BAX exclus, et elles seules, ont une perpendiculaire commune avec BX et toutes les droites menées de A faisant un angle avec AB inférieur à l’angle BAX, comme AN, sont sécantes à BX.

La proposition XXXI qui affirme qu’« il n’est pas toujours possible de parvenir (dans l’hypothèse de l’angle aigu) à telle perpendiculaire commune en deux points distincts qui soit plus petite qu’une longueur R fixée à volonté » n’a pas de rôle décisif dans la suite de l’argumentation.

La proposition XXXII résume en les complétant les propositions XXIII à XXX, exceptée la proposition XXVII, en ces termes :

« Je dis maintenant qu’il y aura (dans l’hypothèse de l’angle aigu) un unique angle aigu déterminé BAX sous lequel la droite menée AX (fig. 33) ne rencontrera pas BX si ce n’est à distance infinie et est à cause de cela la frontière entre ce qui est vers l’intérieur et ce qui est vers l’extérieur : d’une part entre toutes les droites qui menées sous des angles aigus plus petits rencontrent la précitée BX à distance finie, et d’autre part les autres droites qui menées sous des angles aigus plus grands, jusqu’à l’angle droit inclus, ont une perpendiculaire commune en deux points distincts avec cette droite BX. » (Saccheri, 1733, p. 68)

Ainsi, sous l’hypothèse de l’angle aigu, la droite AX est l’unique asymptote à BX (figure 20), du côté des points X, et constitue la droite de partage, parmi les droites issues de A, entre les sécantes à BX, comme AC, et les non sécantes, comme AL, qui ont une et une seule perpendiculaire commune avec BX.

Après cette caractérisation finale des dispositions relatives possibles de deux droites, Saccheri en vient à ce qui devrait être la conclusion définitive de son propos, à savoir :

« Proposition XXXIII.

L’hypothèse de l’angle aigu est absolument fautive parce qu’elle va à l’encontre de la nature de la ligne droite.

Démonstration. [...] on peut établir que l’hypothèse de l’angle aigu hostile à la Géométrie Euclidienne nous conduit à devoir reconnaître que deux droites situées dans un même plan AX, BX, prolongées à l’infini du côté des points X, doivent à terme se réunir dans une seule et même ligne droite admettant assurément en un seul et même point à distance infinie une perpendiculaire commune située dans le même plan qu’elles.<sup>8</sup> »

---

8. Plusieurs traductions en français de cette proposition donnent : « L’hypothèse de l’angle aigu est absolument fautive parce qu’elle *répugne* à la nature de la ligne droite. » Le verbe « répugner » a une connotation péjorative, quasi moralisante, que ne possède pas, selon moi, le verbe latin « re-pugnare » qui signifie littéralement « combattre en retour » et n’exprime qu’un fait.

Mais à nouveau, Saccheri se garde de conclure définitivement et diffère la fin de la démonstration après s'être « intéressé aux tout premiers principes » sous la forme d'énoncés et de démonstrations longues et embarrassées de cinq lemmes tous valides sous l'hypothèse de l'angle aigu :

« Lemme I. Deux lignes droites ne comprennent pas un espace. [...] »

Lemme II. Deux lignes droites ne peuvent avoir un et même segment en commun. [...]

Lemme III. Si deux droites AB, CXD se rencontrent l'une l'autre en quelque point intermédiaire X, elles ne se touchent pas l'une l'autre en cet endroit, mais l'une coupera l'autre en ce lieu même. [...]

Lemme IV. Tout diamètre partage en deux parts égales son cercle et la circonférence de celui-ci. [...]

Lemme V. Parmi les angles rectilignes, tous les angles droits sont exactement égaux entre eux, sans aucune différence, même infiniment petite. »

Le lemme V donne lieu à un corollaire important pour la suite de l'argumentation : « Alors de là vient que la ligne droite élevée perpendiculairement dans un plan à quelque ligne droite à partir d'un point donné de cette dernière, est dans ce plan très exactement la seule et ne peut se diviser en deux. »

Saccheri reprend alors sa démonstration de la réfutation de l'hypothèse de l'angle aigu en rappelant que dans cette hypothèse, d'après le corollaire de la proposition XVIII, deux droites asymptotes admettent en leur point à l'infini une perpendiculaire commune, si bien que de ce point à l'infini deux droites distinctes pourraient être élevées perpendiculairement à cette perpendiculaire commune, en contradiction avec le corollaire du lemme V.

Saccheri termine cette première partie du premier livre par : « Et je pourrais m'en tenir là en sûreté. » mais, comme pris d'un remords ou au moins d'une incertitude, il ajoute : « Mais je ne veux laisser aucune pierre sans qu'elle soit bougée, afin que je montre que l'hypothèse, ennemie, de l'angle aigu, arrachée à partir de ses racines premières, s'oppose à elle-même. Et ce sera l'unique but des Théorèmes suivants du présent Livre » annonçant ainsi la seconde partie du premier livre, intitulée « Dans laquelle le même postulat euclidien est démontré contre l'hypothèse de l'angle aigu par la réfutation de celle-ci. »

## **Hypothèse de l'angle aigu : deuxième réfutation (Prop. XXXIV-XXXIX)**

Cette seconde partie commence par la proposition XXXIV qui décrit la construction d'une courbe et en donne des propriétés. À partir d'un S-quadrilatère ABCD, de base AB, de côtés égaux perpendiculaires à AB, AC et BD, et de droite de sommet CD (figure 22), plus grande que AB (d'après la proposition III de la première partie), les milieux respectifs de AB et CD, M et H sont joints ; la droite MH est perpendiculaire à AB et à CD et est plus petite que AC (d'après la proposition II et le corollaire I de la proposition III). Dans le prolongement de MH du côté de H, le point K est tel que MK est égale à AC. Ce point K est un point de la courbe

cherchée. Mais alors le quadrilatère AMKC est un S-quadrilatère de base AM. Il est donc possible de reprendre la même procédure : L et X milieux respectifs de AM et CK, point F dans le prolongement de LX du côté de X tel que LF est égale à AC (donc aussi à MK) de sorte que F est un point de la courbe cherchée et que ALFC et LMKF sont des S-quadrilatères à partir desquels la même procédure est appliquée, et ainsi de suite par dichotomies successives dans AB. Les points obtenus de la même manière que K et F forment un ensemble de points dont la complétude donne la courbe cherchée. Saccheri ajoute que plus généralement « la courbe CKD, émanant de l'hypothèse de l'angle aigu, est la ligne joignant les extrémités de toutes les perpendiculaires égales élevées du même côté sur la même base [...] » Ces perpendiculaires sont dites « appliquées de manière ordonnée » sur la même base vers la courbe CFKD. La courbe obtenue CFKD est bien sûr la ligne équidistante à AB passant par les points C et D. En outre cette courbe est toujours concave du côté de la base AB.

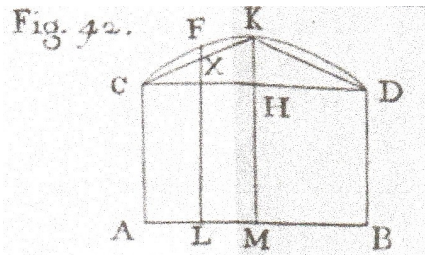


FIGURE 22 – Figure 42 de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXXIV

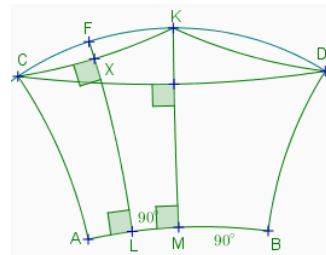


FIGURE 23 – Transcription de la figure 42 dans le modèle du disque de Poincaré

La proposition XXXV (figures 24 et 25) montre que, une perpendiculaire à AB en un de ses points L coupant la courbe CKD en F, la perpendiculaire NX à LF en F est toute entière située du côté convexe de la courbe CKD. Saccheri assure alors que NX est tangente à cette courbe en F en admettant implicitement que le point F n'est pas un point anguleux de la courbe CKD.

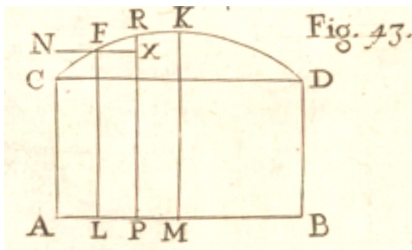


FIGURE 24 – Figure 43 de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXXV

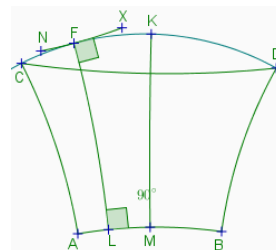


FIGURE 25 – Transcription de la figure 43 de l'*Euclides ab omni nævo...* dans le modèle du disque de Poincaré

La proposition XXXVI complète ce résultat en montrant que, si une droite  $d$  est menée du point  $F$  faisant avec  $FL$  un angle aigu du côté de  $AB$ , il existe un segment d'extrémité  $F$  de cette droite  $d$  entièrement contenu dans la concavité de la courbe  $CKD$ . Il s'en déduit un corollaire selon lequel aucune droite passant par  $F$  ne peut être intercalée entre la droite  $NX$  et la courbe  $CKD$  en étant entièrement située du côté convexe de cette courbe.  $NX$  peut être alors vraiment qualifiée de tangente à  $CKD$ .

Saccheri utilise ensuite ces propositions et le corollaire, tout à fait exacts sous l'hypothèse de l'angle aigu, pour chercher à montrer dans la proposition XXXVII que la courbe  $CKD$  a une longueur égale à la base  $AB$ . La démonstration, bien sûr fautive, est construite sur la supposée égalité entre trois infinitésimaux : une portion infinitésimale de la courbe au point  $F$ , la portion infinitésimale correspondante de la tangente  $FX$  au même point  $F$  et la portion infinitésimale correspondante de la base  $AB$  au point  $L$ . Pour tenter de convaincre le lecteur de la correction de sa démonstration, Saccheri ajoute deux scholies où il développe une argumentation par laquelle, comme le fait remarquer J.-C. Pont, il serait possible de montrer que deux cercles concentriques seraient de périmètres égaux (Pont, 1986, p. 366-367). À nouveau Saccheri révèle ici sa connaissance incertaine des infinitésimaux et de leur utilisation.

La proposition XXXVIII montre : « L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fautive parce qu'elle se détruit elle-même. » (figures 26 et 27). La longueur de la ligne polygonale  $CKD$  est supérieure, d'après la proposition 20 du premier livre des *Éléments*, à celle de la droite  $CD$ . Les perpendiculaires à  $AB$  élevées par les milieux de  $AM$  et de  $MB$  coupent la courbe  $CKD$  en  $F$  et  $G$  ; alors la longueur de la ligne polygonale  $CFKGD$  est supérieure à celle de la ligne polygonale  $CKD$ , donc à celle de la droite  $CD$ . La poursuite du processus par dichotomie des segments de  $AB$  ad infinitum produit une suite de lignes polygonales  $C...F...K...G...D$ , constituées de  $2^n$  segments, chacune plus longue que la précédente, et dont la limite est la courbe  $CKD$  qui est donc plus longue que la droite  $CD$ . Or cette droite est plus longue que la base  $AB$ , d'après la proposition III du traité, donc la courbe équidistante  $CKD$  est plus longue que la base  $AB$ , en contradiction avec la proposition XXXVII. Saccheri conclut alors à la fausseté absolue de l'hypothèse de l'angle aigu.

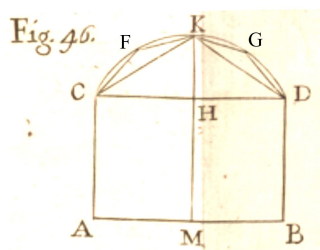


FIGURE 26 – Figure 46 de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXXVIII

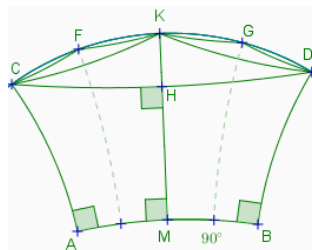


FIGURE 27 – Transcription de la figure 46 de l'*Euclides ab omni nævo...* dans le modèle du disque de Poincaré

Dans le scholie qui suit cette proposition, Saccheri remarque qu'il est tout à fait possible de construire, sous l'hypothèse de l'angle obtus, la ligne équidistante à AB passant par C et D, de montrer que sa convexité est tournée vers AB et que sa longueur est supérieure à celle de la droite CD. Mais comme la droite CD est, sous cette hypothèse, plus courte que la droite AB, aucune contradiction n'apparaît dans ce cas.

La proposition XXXIX, dernière du premier livre, énonce le cinquième postulat, dans la forme euclidienne, et donne sinon une démonstration qui est alors évidente, mais plutôt un exposé abrégé du cheminement conduisant à ce résultat.

Mais Saccheri semble être pris de scrupule à propos de sa seconde réfutation de l'hypothèse de l'angle aigu. Dans un dernier long scholie, il note qu'« il est bon de considérer ici une notable différence entre les réfutations des deux précédentes hypothèses ». Pour lui, celle de l'hypothèse de l'angle obtus est « plus claire que la lumière de midi » mais la réfutation de l'hypothèse de l'angle aigu a nécessité la preuve de l'égalité de longueur de la courbe CKD et de la droite AB, preuve qui, selon Saccheri, ne semble pas avoir été obtenue « à partir des viscères de l'hypothèse elle-même comme cela aurait dû être pour une réfutation parfaite ». Suit un rappel des précautions prises dans la proposition XXXVII et ses scholies pour justifier cette égalité. Il ajoute que qualifier des droites de parallèles<sup>9</sup> sous prétexte d'équidistance est une définition fallacieuse qui ne peut absolument pas conduire à la découverte de la vérité. Et il termine le premier livre par ces mots : « Sed hæc jam satis. » (Mais c'en est assez désormais).

## Conclusion : un échec fertile

La tentative de démonstration du cinquième postulat conduite par Saccheri est certes un échec si elle est jugée à l'aune des connaissances actuelles, mais elle doit cependant être créditée de plusieurs résultats remarquables, autant de méthode que de matière.

S'il est très probable que Saccheri a hérité, par l'intermédiaire de Wallis, des idées de 'Umar al-Ḥayyām, reprises par Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, sur l'emploi d'un quadrilatère birectangle isocèle et la division en trois cas du problème étudié, il en a fait un usage plus intense. Il a été le premier à montrer l'universalité de chacune des trois hypothèses et à développer les conséquences des hypothèses de l'angle obtus et surtout de l'angle aigu jusqu'à parvenir, avec succès dans le premier cas, à une contradiction qui le satisfasse. Il a ainsi établi, sous l'hypothèse de l'angle aigu, de nombreuses propositions qui, un siècle plus tard ont intégré le corpus de la géométrie hyperbolique élaboré par Lobatchevski entre 1835 et 1840. En particulier, il a mis en évidence la notion de perpendiculaire commune à deux droites non sécantes, sans en montrer l'unicité (voir note 7), ce qui lui a permis de donner une catégorisation de la disposition des paires de droites en trois cas : sécantes, non sécantes admettant une perpendiculaire commune et non sécantes asymptotes. Il a en outre dégagé des propriétés de la courbe équidistante à une

---

9. Le terme « parallèle » est rarement utilisé par Saccheri, peut-être en raison de l'imprécision de sa signification dans le contexte de sa recherche.

droite, dont il se garde, à juste titre, de montrer qu'elle est une droite. Le traité n'est cependant pas exempt de défaillances dans les raisonnements, comme l'emploi de la proposition 16 du premier Livre des *Éléments* (voir note 3), l'extension, sans véritable justification, à un point à l'infini de propriétés assurées à distance finie et surtout de notions de calcul infinitésimal insuffisamment maîtrisées.

Quelle a pu être l'influence de l'ouvrage de Saccheri sur les travaux ultérieurs concernant le cinquième postulat ? Pour certains historiens des mathématiques, son traité serait vite tombé dans l'oubli ; cette opinion semble quelque peu exagérée puisque ce traité a fait partie de nombreuses bibliothèques, a été l'objet de comptes rendus dès sa publication dans le *Journal des Savants* (1734) et les *Nova Acta Eruditorum* (1736) et a été examiné dans la thèse de Georg Simon Klügel publiée en 1763 et donnant une recension des tentatives de démonstration du cinquième postulat. Cette thèse a été connue de Johann Heinrich Lambert qui y trouva peut-être l'idée d'employer un quadrilatère trirectangle, « moitié » d'un quadrilatère birectangle isocèle (voir proposition II), dans son essai sur la théorie des lignes parallèles où il n'est cependant fait nulle mention ni de Saccheri, ni de son traité. Ce traité est en revanche mentionné dans l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla parue en 1799. La parenté manifeste entre la configuration employée à répétition par Saccheri – segment de droite à une extrémité duquel est menée une perpendiculaire et à l'autre extrémité une droite à angle aigu – et celle mise en œuvre dès le début de son essai par Lobatchevski<sup>10</sup> permet d'envisager que le second ait pu être inspiré par le premier.

Après une éclipse relative au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, le traité de Saccheri fut étudié par Eugenio Beltrami qui publia en 1889 dans les *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* un article de huit pages intitulé « Un precursore italiano di Legendre et di Lobatschewski ». Une traduction en allemand de l'*Euclides ab omni naevo...* a été donnée dans *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss...* en 1895 par Paul Stäckel et Friedrich Engel (p. 50-135). Giovanni Boccardini a publié en 1904 une traduction en italien, annotée, de l'ouvrage de Saccheri sous le titre *L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri*. Après avoir examiné le traité de Saccheri dans un article intitulé « Non-euclidean geometry, historical and expository » publié dans *American mathematical monthly* en 1894, George Bruce Halsted (1853-1922) a publié en 1920 une édition bilingue du traité comportant le texte latin et une traduction en anglais sous le titre *Girolamo Saccheri's Euclides vindicatus*. L'intérêt et l'admiration qu'éprouva, semble-t-il, Halsted pour l'œuvre de Saccheri le conduisirent à émettre l'opinion selon laquelle « Saccheri construisit délibérément une géométrie non euclidienne, la déguisant juste assez pour obtenir l'autorisation d'Ignatius Videcomas, Provincial de l'ordre des Jésuites [...] ». Saccheri aurait alors camoufler ce qui était son intention première, créer une nouvelle géométrie, sous la recherche d'une démonstration du cinquième postulat, en réfutant l'hypothèse de l'angle aigu par des arguments peu convaincants, pour éviter les foudres de la censure ecclésiastique qu'avaient subi certains de ses prédécesseurs au XVII<sup>e</sup> siècle. Ce point de vue paraît peu vraisemblable parce que, d'une part la censure ecclésiastique n'était plus ce qu'elle avait été, d'autre part le contexte

10. Cette parenté a fait écrire à Jean-Luc Chabert dans (Chabert, 1987, p. 12) : « Ainsi Lobatchevski commence par ce par quoi Saccheri achève. »

intellectuel de l'époque de Saccheri ne permettait pas d'envisager la coexistence de deux géométries, conçues comme description raisonnée du monde des formes, si différentes. La tentative de Saccheri fut d'ailleurs suivie de plusieurs autres, dont celles de Lambert et d'Adrien-Marie Legendre (1752-1833) avant l'invention de la géométrie hyperbolique par Lobachevski, ce qui montre l'attachement des mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle à la géométrie euclidienne reconnue comme seule vraie<sup>11</sup>.

L'ouvrage de Saccheri continue de susciter l'intérêt au XXI<sup>e</sup> siècle, sinon des mathématiciens, à tout le moins des historiens des mathématiques comme en témoignent, outre les rééditions en 1986 puis 2014, revues et augmentées, du livre édité par G. B. Halsted en 1920, deux éditions critiques récentes en italien, l'une en 2001 aux soins de Pierangelo Frigerio, l'autre en 2011 aux soins de Vincenzo De Risi.

Que le présent écrit, aussi modeste soit-il, en soit un témoignage de plus.

Sed hæc satis hodie.

## Références bibliographiques

### Source première

SACCHERI Girolamo, 1733, *Euclides ab omni nævo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliantur prima ipsa universæ Geometricæ Principia*, Milan, Paolo Antonio Montani.

### Éditions, traductions de l'*Euclides ab omni nævo vindicatus*. . . (par ordre chronologique)

SACCHERI Girolamo, 1895, « Der von jedem Makel befreiete Euklid . . . » in ENGEL Friedrich, STÄCKEL Paul, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*. . ., Leipzig, Teubner, p. 43-136.

BOCCARDINI Giovanni, 1904, *L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri*, traduction en italien de l'*Euclides ab omni nævo vindicatus*. . . Milan, Ulrico Hoepli.

HALSTED George Bruce, 1920, *Girolamo Saccheri's Euclides vindicatus*, Édition bilingue latin – anglais, Chicago, Londres, The Open Court publishing Company. Cette édition ne comporte que le premier livre du traité, concernant le cinquième postulat.

HALSTED George Bruce, 1986, *Girolamo Saccheri's Euclides vindicatus*, 2<sup>e</sup> édition bilingue latin – anglais, complétée des notes de Paul Stäckel et Friedrich Engel traduites de l'allemand en anglais par F. Steinhardt, New-York, Chelsea publishing Company. Cette édition ne comporte que le premier livre du traité, concernant le cinquième postulat.

---

11. Seul Carl-Friedrich Gauss a envisagé la possibilité de cette autre géométrie, comme en témoigne sa correspondance avec Heinrich Christian Schumacher entre 1831 et 1846 (Lobachevski, 1980, p. 53-64).

- SACCHERI, Girolamo, 2001, *Euclide liberato da ogni macchia*, édition bilingue latin – italien par les soins de Pierangelo Frigerio, Introduction par Imre Toth et Elisabetta Cattanei, Milan, Bompani, coll. « Il pensiero occidentale ».
- SACCHERI, Girolamo, 2011, *Euclide vendicato da ogni neo*. Traduit du latin en italien par Vincenzo De Risi, Pise, éditions de la Scuola Normale Superiore.
- SACCHERI Girolamo, 2014, *Euclid Vindicated from Every Blemish*, Édition préparée et annotée par Vincenzo De Risi avec la traduction en anglais de G. B. Halsted revue par L. Allegri, Bâle, Birkäuser.

## Études, ouvrages de référence (par ordre alphabétique d'auteur)

- BRIN Philippe, BÜHLER Martine, 2002, « Histoire des géométries non euclidiennes : la théorie des parallèles d'Euclide à Lobatchevski » in BARBIN Évelyne (dir.), *4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée* (Actes du treizième colloque inter-IREM d'Histoire et d'Épistémologie des Mathématiques, 6-7-8 mai 2000), IREM de Rennes, p. 313-340.
- BONOLA Roberto, 1906, *La geometria non-euclidea*, Bologna, Zanichelli. Traduction anglaise, avec une analyse synthétique du traité de Saccheri (p. 22-44) : *Non-Euclidean Geometry*, Chicago, The Open Court Publishing Company, 1912.
- CHABERT Jean-Luc, 1987, *Les géométries non euclidiennes*, IREM de Picardie, Université de Picardie.
- CHABERT Jean-Luc, 1993, « La vraie fausse démonstration du Cinquième Postulat » in BARBIN Évelyne (dir.), *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Paris, éditions Ellipses, coll. « Commission Inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques », p. 277-297.
- LOBATCHEVSKI Nicolaï, 1980, *La théorie des parallèles*, Coubron, Monom.
- PONT Jean-Claude, 1986, *L'aventure des parallèles, histoire de la géométrie non euclidienne : précurseurs et attardés*, Berne, Peter Lang.

## Sites Internet

- <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/DSB/Saccheri.pdf>
- <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Saccheri.html>
- [http://www.treccani.it/enciclopedia/giovanni-girolamo-saccheri\\_\(Dizionario-Biografico\)](http://www.treccani.it/enciclopedia/giovanni-girolamo-saccheri_(Dizionario-Biografico))
- [http://www.treccani.it/enciclopedia/giovanni-girolamo-saccheri\\_\(Il-Contributo-italiano-alla-storia-del-Pensiero:-Scienze\)](http://www.treccani.it/enciclopedia/giovanni-girolamo-saccheri_(Il-Contributo-italiano-alla-storia-del-Pensiero:-Scienze))

## Remerciements

Je voudrais remercier les relecteurs et relectrices, en particulier Jacqueline et Jean-Paul Guichard, pour l'aide qu'ils m'ont apportée pour organiser ces deux chapitres.



## La géométrie tropicale, benjamine des géométries

André-Jean GLIÈRE

### Introduction

J'ai pour objectif dans cet article d'exposer quelques bases de la géométrie tropicale qui, dans ses prémices, reste abordable pour un lycéen<sup>1</sup> et à *fortiori* pour un jeune étudiant. Elle-même, je veux dire, la géométrie tropicale, est jeune. D'après Ilia Itenberg (Itenberg, 2008), elle a fait ses débuts « théoriques » dans les années 1970 avec G. M. Bergman à propos des ensembles limites logarithmiques<sup>2</sup> (voir le paragraphe consacré à la déquantification d'une droite du plan et aux amibes). Stéphane Gaubert<sup>3</sup> explique que, contrairement à l'habitude qu'ont les mathématiques pures de précéder les mathématiques appliquées, la géométrie et l'algèbre tropicales ont été inventées par des mathématiciens appliqués, des informaticiens et par des chercheurs opérationnels. Ce n'est que depuis une quinzaine d'années, qu'elles intéressent les chercheurs en mathématiques pures (en géométrie algébrique, en géométrie symplectique, en combinatoire, en logique, en calcul formel, en théorie des graphes par exemple). Si le qualificatif tropical a été donné à cette nouvelle géométrie en l'honneur de l'informaticien brésilien Imre Simon<sup>4</sup>,

1. Voir Internet à l'adresse : [http://www.mathenjeans.fr/sites/default/files/comptes-rendus/geometrie\\_tropicale-milan-2013.pdf](http://www.mathenjeans.fr/sites/default/files/comptes-rendus/geometrie_tropicale-milan-2013.pdf)

2. Ilia Itenberg fait référence à l'article : Bergman G.M., The logarithmic limit-set of an algebraic variety, Trans. Amer. Math. Soc. 157 (1971), p. 459 – 469.

3. Stéphane Gaubert est directeur de recherche à l'INRIA et professeur associé à l'école polytechnique; voir sa vidéo (Gaubert, 2015). Voir aussi le lien <https://www.inria.fr/centre/saclay/actualites/gestion-des-appels-d-urgence-une-geometrie-tropicale-pour-les-secours-parisiens>

4. Imre Simon (Budapest 1943-Sao Paulo 2009). En 1956, sa famille émigre au Brésil. Il y fait des études d'ingénieur en électronique, puis se consacre à l'informatique. Ses recherches portent sur la théorie des automates finis, sur les réseaux numériques et sur la géométrie tropicale

vivant sous le tropique sud à Sao Paulo, cette branche des mathématiques a été inventée conjointement en France, en Angleterre et en Russie.

La géométrie tropicale fait la part belle aux réseaux de segments et de demi-droites. Nous commencerons par définir les tripodes, réunions de trois demi-droites, appelées à juste titre comme nous l'expliquerons : **droites tropicales**. Nous poursuivrons en donnant un cadre algébrique à cette géométrie naissante, en munissant  $\mathbb{R}$  de deux opérations internes  $\oplus$  et  $\odot$  que l'on interprétera grâce à la fonction logarithme. Nous visualiserons cette interprétation en déquantifiant une droite du plan, la droite tropicale apparaissant alors comme le squelette d'une amibe. Familiarisés avec les opérations tropicales, nous pourrons tout naturellement représenter par des courbes tropicales (réseaux de segments et de demi-droites) les polynômes tropicaux qu'ils soient d'une ou deux variables, qu'ils soient de degré 2 ou de degré 3. En passant, nous donnerons du sens à la notion de racine tropicale. Encore plus fort, nous associerons à chaque courbe tropicale un polygone de Newton, qui jouera un rôle clef lorsqu'il s'agira de retrouver un polynôme tropical associé à une courbe tropicale donnée. Pour terminer ce voyage sous les tropiques (!) et pour montrer que la géométrie tropicale s'ancre dans l'histoire des mathématiques, nous exposerons tout d'abord une version tropicale simplifiée du théorème de Bézout, pas le Bézout arithmétique, mais le Bézout algébrique qui comptabilise le nombre de points d'intersection de deux courbes algébriques planes. Puis, nous irons chercher le 16<sup>e</sup> problème de Hilbert, celui qui demande de faire la liste des arrangements possibles des composantes connexes d'une courbe algébrique plane, et nous expliquerons la technique du Patchwork qui permet de recréer par un procédé de quantification une courbe algébrique à partir d'une courbe tropicale.

L'ambition est belle. J'espère que vous prendrez goût à cette nouvelle géométrie. Cet exposé n'a été possible que grâce aux nombreux articles que j'ai lus dans des journaux spécialisés et aux mémoires que j'ai trouvés sur Internet. Mes sources sont listées dans les références bibliographiques. Enfin, je remercie tout particulièrement Stéphane Gaubert et Erwan Brugallé qui ont bien voulu répondre à mes questions.

## Les droites tropicales

### Exemple 1

Partons du petit problème suivant (Gaubert, 2015) : *Un exposé est prévu à 10 heures à l'Université. L'orateur part de chez lui à l'heure  $x$  et met 30 minutes pour s'y rendre. La personne qui filme l'exposé part de chez lui à l'heure  $y$  et met 1 heure pour s'y rendre. À quelle heure  $h$  commence l'exposé ?*

La réponse est la fonction  $h$  de deux variables définie par

$$h(x, y) = \max(x + 0, 5; y + 1; 10)$$

La représentation graphique de  $h$  dans le plan  $(Oxy)$  est formée par trois régions correspondant à trois systèmes :

dont il est l'un des pionniers. Voir l'article : *Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring* dans *Mathematical Foundations of Computer Science (Carlsbad, 1988)*, Springer, 1988.

$$\begin{aligned}
 1) \quad h(x, y) = 10 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 0,5 \leq 10 \\ y + 1 \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9,5 \\ y \leq 9 \end{cases}, \\
 2) \quad h(x, y) = y + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 \geq 10 \\ y + 1 \geq x + 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 9 \\ y \geq x - 0,5 \end{cases}, \\
 3) \quad h(x, y) = x + 0,5 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 0,5 \geq 10 \\ x + 0,5 \geq y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9,5 \\ x - 0,5 \geq y \end{cases}.
 \end{aligned}$$

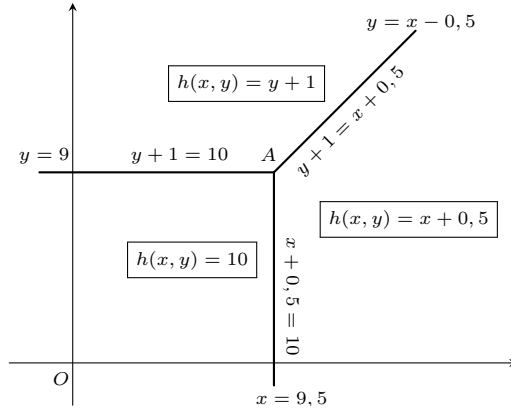


FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction  $h$

La réunion des trois demi-droites frontières des trois régions est appelée une droite tropicale. Les points de la droite tropicale sont les points du plan pour lesquels au moins deux des monômes  $10$ ,  $y + 1$  et  $x + 0.5$  sont égaux et réalisent le maximum de la fonction  $h$ .

### Cas général

On considère la fonction  $p$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$p(x, y) = \max(a + x, b + y, c)$$

Sa représentation graphique dans le plan  $(Oxy)$  est formée par trois régions correspondant à trois systèmes :

$$\begin{aligned}
 1) \quad p(x, y) = c &\Leftrightarrow \begin{cases} a + x \leq c \\ b + y \leq c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq c - a \\ y \leq c - b \end{cases}, \\
 2) \quad p(x, y) = b + y &\Leftrightarrow \begin{cases} a + x \leq b + y \\ c \leq b + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x + a - b \\ y \geq c - b \end{cases}, \\
 3) \quad p(x, y) = a + x &\Leftrightarrow \begin{cases} c \leq a + x \\ b + y \leq a + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq c - a \\ x + a - b \geq y \end{cases}.
 \end{aligned}$$

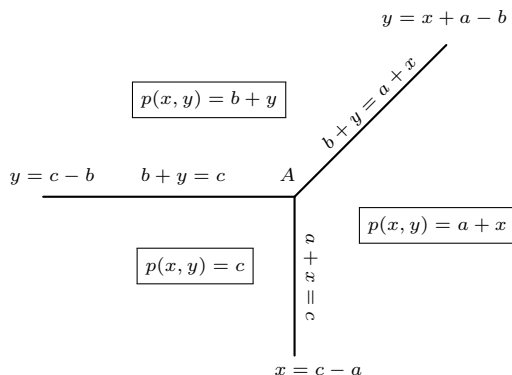


FIGURE 2 – Représentation graphique de la fonction  $p$

La droite tropicale est la réunion des trois demi-droites d’origine le même point, appelé point central, une de direction ouest  $(-1, 0)$ , une de direction sud  $(0, -1)$  et une de direction nord-est  $(1, 1)$ . C’est aussi l’ensemble des points où le maximum des trois monômes  $a + x$ ,  $b + y$ , et  $c$  est atteint au moins deux fois.

Qu’Euclide se rassure, le vocable de « droite » n’est pas usurpé. En effet, on peut vérifier que, par deux points indépendants, c’est-à-dire deux points qui ne sont pas tous les deux sur un même axe sud, ouest ou nord-est, il ne passe qu’une seule droite tropicale et que deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un point.

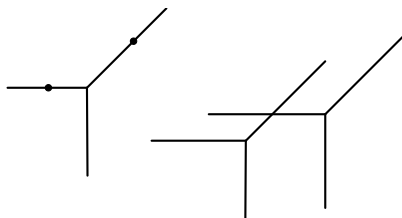


FIGURE 3 – Propriétés des droites tropicales

### Exemple 2

Par analogie avec la droite affine d’équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ , on peut caractériser la droite tropicale, lieu des « coins » de la fonction  $\max(a + x, b + y, c)$ , par le polynôme dit tropical  $P(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c = "ax + by + c"$ .

Pour cela, on doit remplacer l’addition et la multiplication usuelles des réels respectivement par le max et l’addition.

Par exemple, la droite tropicale associée au polynôme tropical :

$$P(x, y) = 2 \odot x \oplus (-5) \odot y \oplus \frac{1}{2} = "2x + (-5)y + \frac{1}{2}" = \max(2 + x, -5 + y, \frac{1}{2})$$

est la réunion des trois demi-droites frontières des trois régions définies respectivement par  $P(x, y) = 2 + x$ ,  $P(x, y) = -5 + y$  et  $P(x, y) = \frac{1}{2}$ .

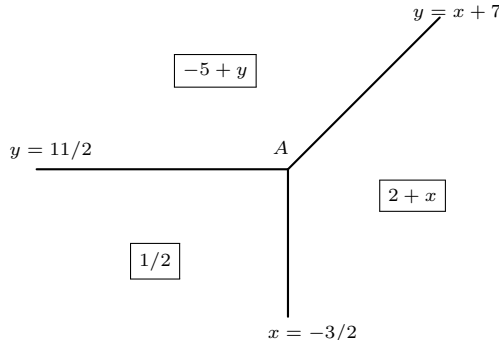


FIGURE 4 – Droite tropicale ou tripode associée au polynôme tropical :

$$P(x, y) = 2 \odot x \oplus (-5) \odot y \oplus \frac{1}{2}$$

## Algèbre tropicale

L'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  est muni des deux lois internes  $\oplus$  et  $\odot$  suivantes :

$$a \oplus b = \max(a, b) \text{ et } a \odot b = a + b$$

On vérifie que la loi  $\oplus$  est commutative, associative, qu'elle possède un élément neutre  $-\infty$  (à rajouter), qu'elle ne peut pas être symétrique (pas de soustraction) et qu'enfin elle est idempotente. La loi  $\odot$  confère à  $\mathbb{R}$  une structure de groupe abélien. Elle est de plus distributive par rapport à  $\oplus$ .

L'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  muni des deux opérations  $\oplus$  et  $\odot$  est le semi-corps  $T$  des nombres tropicaux. En remarquant que, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a^{\odot n} = na$ , on peut vérifier facilement que  $(a \oplus b)^{\odot 2} = a^{\odot 2} \oplus b^{\odot 2}$ , puis de manière générale que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(a \oplus b)^{\odot n} = a^{\odot n} \oplus b^{\odot n}$ . Par exemple, on obtient  $(3 \oplus 6)^{\odot 4} = 24$ . Étrange, non ? En tout cas, nos collégiens et lycéens font parfois de l'algèbre tropicale sans le savoir !

La multiplication devenant l'addition, il n'est pas surprenant que les opérations tropicales aient à voir avec les fonctions logarithmes. Plus précisément, la fonction  $\log_b$ , logarithme en base  $b$ , est une bijection du semi-corps  $(\mathbb{R}_+, +, \times)$  dans le semi-corps  $(T, \oplus_b, \odot_b)$ . On pose :

$$x \odot_b y = x + y \quad \text{et} \quad x \oplus_b y = \log_b(b^x + b^y)$$

Pour retrouver l'addition tropicale, on fait tendre la base  $b$  vers  $+\infty$ . Si  $\max(x, y) = x$ , alors  $b^x \gg b^y$  et  $x \oplus_b y = x$  (idem si  $\max(x, y) = y$ ). Ainsi :  $x \oplus_\infty y = \max(x, y)$ . Donc les opérations tropicales peuvent être vues comme des opérations limites et la géométrie tropicale comme l'image de la géométrie classique par la fonction logarithme de base  $\infty$ .

## Déquantification d'une droite du plan : Amibes

L'amibe de  $V$ , ensemble des racines communes d'un nombre fini de polynômes à deux indéterminées, est son image par la fonction :

$$\text{Log} : (x_1, x_2) \rightarrow (\ln |x_1|, \ln |x_2|) \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in V$$

### Exemple

Cherchons l'amibe de  $V$ , ensemble des zéros du polynôme  $P(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 1$ .

L'image de  $V$  par la fonction valeur absolue, autrement dit  $(r_1, r_2), r_1 = |x_1|, r_2 = |x_2|, |x_2| = |x_1 + 1|$ , est la réunion des trois frontières du domaine en gris ci-contre.

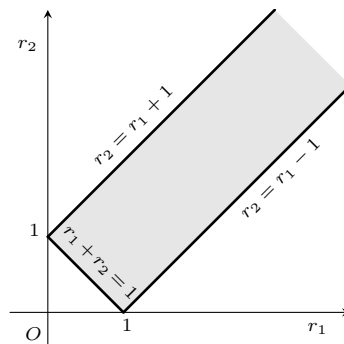


FIGURE 5 – Exemple d'amibe ...

En posant  $x = \ln r_1$  et  $y = \ln r_2$ , on peut représenter les images des trois frontières du domaine en gris (segment et demi-droites) par la fonction Log :

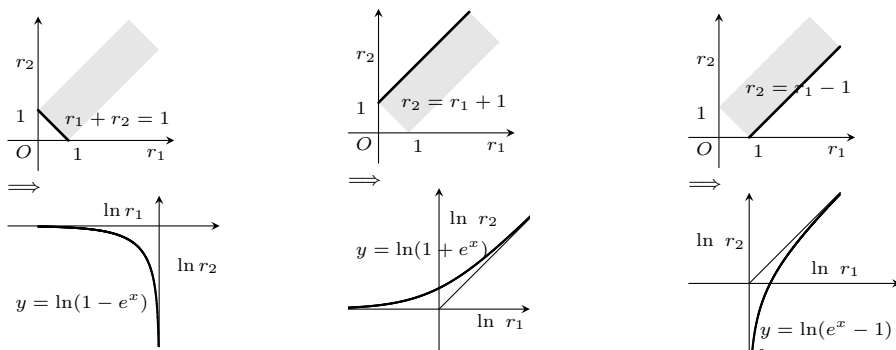


FIGURE 6 – ... et les représentations de ses frontières

En conclusion, lorsque l'on procède de même avec la fonction  $\log_b$  et que l'on fait tendre  $b$  vers l'infini, l'amibe « tend » vers les trois asymptotes, son squelette, réunion des trois demi-droites :  $\begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$  et  $\begin{cases} x = y \\ x \geq 0 \end{cases}$ .

Nous remarquons que le squelette de l'amibe est une droite tropicale de polynôme tropical :  $P(x, y) = 0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 0 = \max(x, y, 0) = "x + y + 0"$ . Voici un

résumé graphique de la déquantification tel qu'on peut le trouver dans (Brugallé, 2009, p. 11) ou dans (Arnal, Legrand, 2015, p. 18) :

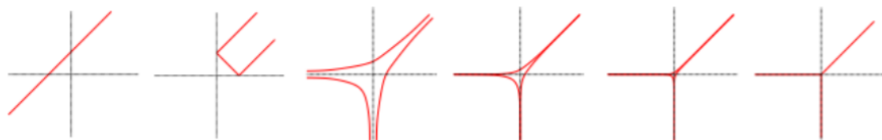


FIGURE 7 – Résumé graphique de la déquantification d'une droite

## Polynômes tropicaux

### Polynômes tropicaux du second et du troisième degré

#### Exemple 1

$y = P(x) = "2x^2 + x + 1" = (2 \odot x^{\odot 2}) \oplus (0 \odot x) \oplus 1 = \max(2 + 2x, x, 1)$ .  
 Pour le représenter graphiquement, on distingue trois cas :

$$\max(2 + 2x, x, 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 2 + 2x \\ 1 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\max(2 + 2x, x, 1) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 + 2x \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \text{impossible.}$$

$$\max(2 + 2x, x, 1) = 2 + 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2x \geq x \\ 2 + 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

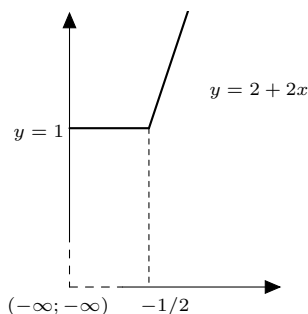


FIGURE 8 – Représentation graphique du polynôme tropical " $2x^2 + x + 1$ "

#### Exemple 2

$$y = P(x) = "(1)x^2 + 3x + 1" = (1 \odot x^{\odot 2}) \oplus (3 \odot x) \oplus 1 = \max(1 + 2x, 3 + x, 1)$$

Pour le représenter graphiquement, on distingue à nouveau trois cas :

$$\max(1 + 2x, 3 + x, 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 1 + 2x \\ 1 \geq 3 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -2$$

$$\max(1 + 2x, 3 + x, 1) = 3 + x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + x \geq 1 + 2x \\ 3 + x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\max(1 + 2x, 3 + x, 1) = 1 + 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2x \geq 3 + x \\ 1 + 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

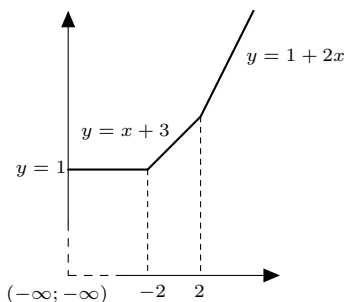


FIGURE 9 – Représentation graphique du polynôme tropical ”  $(1) x^2 + 3x + 1$  ”

### Remarque

En utilisant les règles d’algèbre tropicale, on vérifie les factorisations suivantes :  
 Pour l’exemple 1,  $(2 \odot x^{\odot 2}) \oplus (0 \odot x) \oplus 1 = 2 \odot (x \oplus (-\frac{1}{2}))^{\odot 2}$ .  
 Pour l’exemple 2,  $(1 \odot x^{\odot 2}) \oplus (3 \odot x) \oplus 1 = 1 \odot (x \oplus 2) \odot (x \oplus (-2))$ .  
 On peut donc légitimement définir les racines d’un polynôme tropical de degré 2 comme les abscisses des points anguleux de sa représentation graphique.

### Généralisation

Les racines du polynôme tropical  $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^{i\odot} = \max_{i=0, \dots, d} (a_i + ix)$  sont les nombres tropicaux  $x_0$  pour lesquels  $\exists i \neq j, P(x_0) = a_i + ix_0 = a_j + jx_0$ . Le max est donc atteint au moins deux fois en toute racine  $x_0$ . Par définition, l’ordre de  $x_0$  est le  $\max|i - j|$ .

### Exemple 3

Le polynôme tropical de degré 3 défini par  $y = P(x) = x^{\odot 3} \oplus 2x^{\odot 2} \oplus 3x \oplus (-1) = \max(3x, 2 + 2x, 3 + x, -1)$  a pour représentation graphique la courbe ci-après.  
 Il se factorise en  $(x \oplus (-4)) \odot (x \oplus 1) \odot (x \oplus 2)$ .



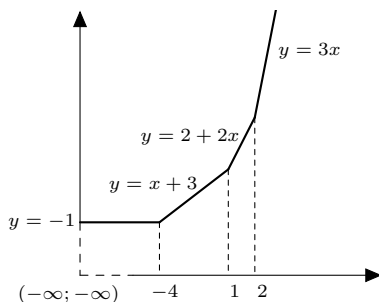


FIGURE 10 – Représentation graphique du polynôme tropical  
 "x<sup>3</sup> + 2x<sup>2</sup> + 3x + (-1)"

## Polynômes tropicaux à deux variables

### Définitions

Un polynôme tropical à deux variables  $(x, y)$  est de la forme :

$$P(x, y) = \oplus_{i,j} a_{ij} \odot x^{\odot i} \odot y^{\odot j} = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j = \max_{i,j} (a_{ij} + ix + jy), \text{ où } (i, j) \in \mathbb{N}^2$$

La courbe tropicale définie par  $P(x, y)$  est l'ensemble des points  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que :  $\exists (i, j) \neq (k, l), P(x_0, y_0) = a_{ij} + ix_0 + jy_0 = a_{kl} + kx_0 + ly_0$ , autrement dit l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  où le maximum est atteint par au moins deux monômes de la forme  $a_{ij} + ix + jy$ .

### Exemple

Représentons graphiquement la conique tropicale définie par le polynôme  
 $P(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + 4 = 4 \oplus (0 \odot x^{\odot 2}) \oplus (0 \odot y^{\odot 2}) \oplus (2 \odot x \odot y)$   
 $= \max(4, 2x, 2y, 2 + x + y)$ .

Pour l'étudier, on distingue six cas :

$$2x = 4, 2y = 4, 4 = 2 + x + y, 2y = 2x, 2x = 2 + x + y, 2y = 2 + x + y.$$

Un cas étant impossible (le quatrième dans la liste ci-dessous), on représente les quatre demi-droites et le segment composant la conique tropicale.

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} 2x = 4 \\ 4 \geq 2y \\ 4 \geq 2 + x + y \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y \leq 0 \end{cases} & 2) \begin{cases} 2y = 4 \\ 4 \geq 2x \\ 4 \geq 2 + x + y \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x \leq 0 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} 4 = 2 + x + y \\ 4 \geq 2x \\ 4 \geq 2y \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ x \leq 2 \\ y = 2 - x \end{cases} & 4) \begin{cases} 2y = 2x \\ 2x \geq 4 \\ 2x \geq 2 + x + y \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 0 \geq 2 \end{cases} \quad \emptyset \\
 5) \begin{cases} 2x = 2 + x + y \\ 2x \geq 4 \\ 2x \geq 2y \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y = x - 2 \end{cases} & 6) \begin{cases} 2y = 2 + x + y \\ 2y \geq 4 \\ 2y \geq 2x \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y = x + 2 \end{cases}
 \end{array}$$

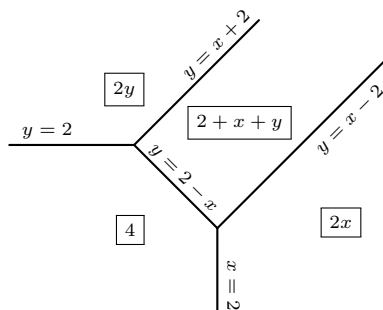


FIGURE 11 – Représentation graphique de la conique tropicale  
 $P(x, y) = \max(x^2 + y^2 + 2xy + 4)$

### Généralisation

De manière générale, le polynôme tropical d'une conique tropicale est de la forme :

$$P(x, y) = a_{00} \oplus (a_{10} \odot x) \oplus (a_{01} \odot y) \oplus (a_{20} \odot x^{\odot 2}) \oplus (a_{02} \odot y^{\odot 2}) \oplus (a_{11} \odot x \odot y)$$

Sa représentation graphique est, de manière générale, formée par le réseau des segments et demi-droites, frontières des différentes régions « max des monômes » (voir figure de gauche ci-dessous). Sur la figure de droite est représenté le polynôme

$$P(x, y) = \max(5, 5 + x, 5 + y, 2x, 1 + 2y, 4 + x + y)$$

$$P(x, y) = 5 \oplus (5 \odot x) \oplus (5 \odot y) \oplus (0 \odot x^{\odot 2}) \oplus ((1) \odot y^{\odot 2}) \oplus (4 \odot x \odot y).$$

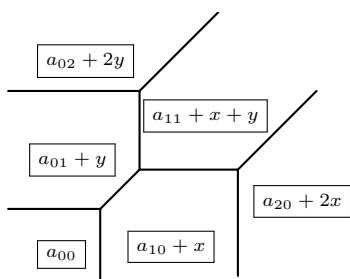


FIGURE 12 – Représentation graphique d'une conique tropicale

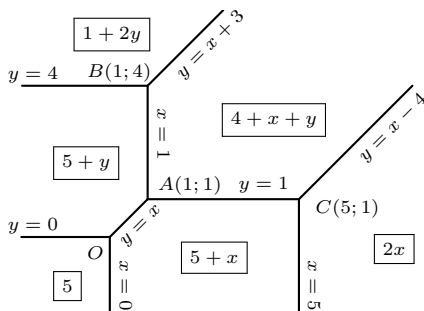


FIGURE 13 – Représentation graphique de la conique tropicale  
 $P(x, y) = \max(x^2 + 1y^2 + 5x + 5y + 4xy + 5)$

### Remarque

Certaines régions peuvent disparaître de la représentation graphique suite à l'absence des monômes correspondants dans le polynôme comme dans l'exemple

suivant :

$$P(x, y) = \max(0, x, -1 + 2x, 2y) = (0) \oplus (0 \odot x) \oplus ((-1) \odot x^{\odot 2}) \oplus (0 \odot y^{\odot 2}).$$

Ici les monômes  $a_{01} + y$  et  $a_{11} + x + y$  sont absents et les régions disparues sont repérées par le poids 2 des deux arêtes, conformément à la définition suivante : le poids d'une arête est le pgcd des nombres  $|i - k|$  et  $|j - l|$  correspondant à l'arête  $a_{ij} + ix + jy = a_{kl} + kx + ly$ .

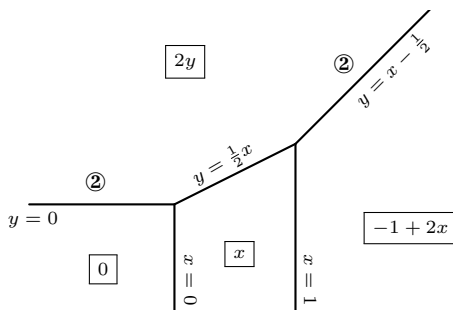


FIGURE 14 – Représentation graphique de la conique tropicale  $P(x, y) = \max(-1)x^2 + y^2 + x + 0$

Remarquons également que le degré de la courbe tropicale se lit sur le dessin. Il s'agit de la somme des poids des arêtes dans une direction « infinie », autrement dit de la somme des poids des arêtes dans une des directions  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  ou  $(1,1)$ . Dans notre exemple, le degré vaut 2.

## Polygone de Newton d'un polynôme tropical

### Exemple 1

Le polynôme tropical :

$$P(x, y) = \max(2x + (-5)y + \frac{1}{2}, \dots)$$

de représentation graphique la droite tropicale (voir exemple 2 du paragraphe *Droites tropicales*) a trois monômes tropicaux  $\frac{1}{2}$ ,  $2 \odot x$  et  $(-5) \odot y$  qui ont la même valeur  $\frac{1}{2} = 2 + x = -5 + y$  au sommet  $A(-\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$ .

Les trois couples d'exposants  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  des monômes correspondants  $\frac{1}{2}x^0y^0$ ,  $2x^1y^0$  et  $(-5)x^0y^1$  définissent un triangle  $\Delta$  dont les trois côtés sont respectivement perpendiculaires aux arêtes de la droite tropicale.  $\Delta$  est appelée la subdivision duale de la droite tropicale.

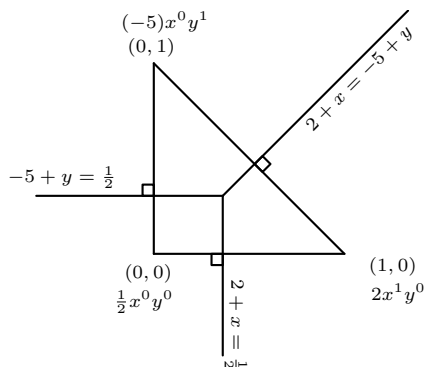


FIGURE 15 – Subdivision duale de la droite tropicale de polynôme  $P(x, y) = 2x + (-5)y + \frac{1}{2}$

### Exemple 2

La conique tropicale de polynôme tropical :

$$P(x, y) = 3 + 2x + 2y + 3xy + y^2 + x^2 = \max(3, 2 + x, 2 + y, 3 + x + y, 2x, 2y)$$

a pour représentation graphique la figure ci-dessous, conformément au réseau général des segments et demi-droites, frontières des différentes régions « max des monômes », vu précédemment.

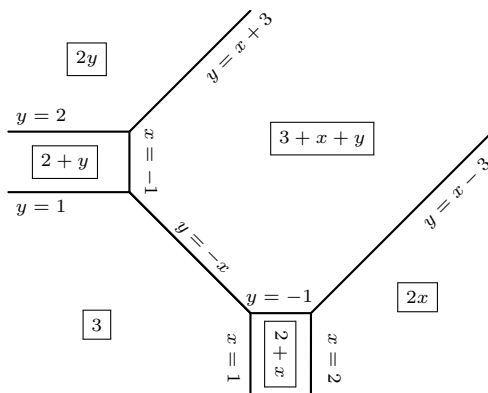


FIGURE 16 – Représentation graphique de la conique tropicale  $P(x, y) = 3 + 2x + 2y + 3xy + y^2 + x^2$

Les six couples d'exposants des monômes :  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$  et  $(0, 2)$  définissent un triangle  $\Delta$  « quadrillé » dont les côtés sont respectivement perpendiculaires aux arêtes de la conique tropicale.  $\Delta$  est la subdivision duale de la conique tropicale.

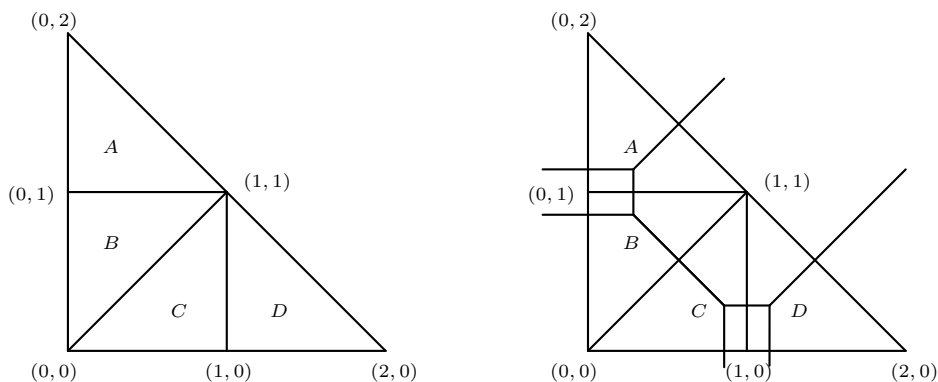


FIGURE 17 – Subdivision duale de la conique tropicale  
 $P(x, y) = 3 + 2x + 2y + 3xy + y^2 + x^2$

### Propriétés

1. À chaque sommet d'une courbe tropicale correspond un « triangle » de la subdivision duale.
2. De manière duale, à chaque sommet de la subdivision duale correspond une région délimitée par la courbe tropicale. Par exemple, le sommet  $(1, 1)$ , point de concours de cinq côtés de  $\Delta$ , correspond à la région Nord-est  $ABCD$  Nord-est délimitée par cinq segments et demi-droites.
3. Les segments ou demi-droites de la courbe tropicale sont respectivement perpendiculaires aux côtés correspondants de la subdivision duale.

### Problème tropical

Le problème posé ici est le problème inverse à savoir trouver un polynôme tropical représentant une courbe tropicale donnée.

Considérons la courbe tropicale  $C$  dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

On précise d'abord le degré du polynôme tropical  $P(x, y)$ . Il est de 3. Il est en effet, conformément à la remarque du paragraphe *Polynômes tropicaux à deux variables*, la somme des poids des arêtes dans une direction infinie.

Ensuite on écrit la subdivision duale de la courbe tropicale. Pour ce faire, on se rappelle qu'à chaque point de  $C$  correspond un triangle du polygone dual, qu'à chaque arête de  $C$  correspond une arête du polygone dual qui lui est orthogonale et qu'à chaque région délimitée par  $C$  correspond un sommet du polygone dual qui a autant de sommets voisins que la région a de régions voisines. Par exemple, on part du triangle élémentaire  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$  dont l'intérieur correspond au point  $I$  de  $C$ . Ses côtés sont deux à deux perpendiculaires aux arêtes de  $C$  issues de  $I$  et les relations duales de voisinage sont respectées. Ensuite, on continue de proche en proche avec les points  $E, F, D$  etc.

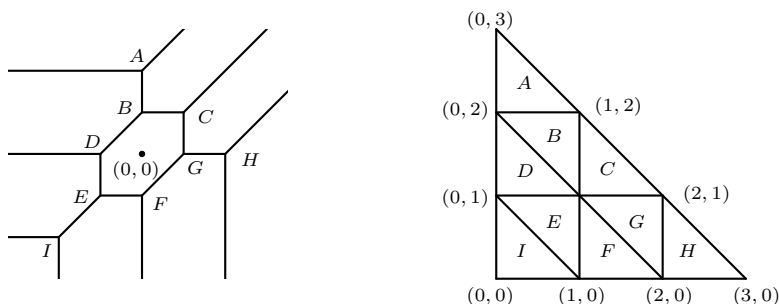


FIGURE 18 – Trouver un polynôme tropical représentant une courbe tropicale

En convenant (quitte à opérer une translation) que le point  $O(0,0)$  est au centre de la figure, on déduit alors les monômes correspondants à chaque sommet de  $C$  : Le point  $A(0, 2)$  de  $C$  correspond au triangle du polygone dual  $(0, 3)$ ,  $(0, 2)$  et  $(1, 2)$ , qui sont les trois couples d'exposants des monômes  $a_{03}x^0y^3$ ,  $a_{02}x^0y^2$  et  $a_{12}x^1y^2$ . De même pour les autres points.

$$\begin{aligned}
 B(0, 1) &: a_{02}x^0y^2, a_{12}x^1y^2 \text{ et } a_{11}x^1y^1 & C(1, 1) &: a_{12}x^1y^2, a_{11}x^1y^1 \text{ et } a_{21}x^2y^1 \\
 D(-1, 0) &: a_{02}x^0y^2, a_{11}x^1y^1 \text{ et } a_{01}x^0y^1 & G(1, 0) &: a_{20}x^2y^0, a_{11}x^1y^1 \text{ et } a_{21}x^2y^1 \\
 H(2, 0) &: a_{20}x^2y^0, a_{21}x^2y^1 \text{ et } a_{30}x^3y^0 & F(0, -1) &: a_{10}x^1y^0, a_{11}x^1y^1 \text{ et } a_{20}x^2y^0 \\
 E(-1, -1) &: a_{10}x^1y^0, a_{11}x^1y^1 \text{ et } a_{01}x^0y^1 & I(-2, -2) &: a_{10}x^1y^0, a_{00}x^0y^0 \text{ et } a_{01}x^0y^1
 \end{aligned}$$

Enfin, on utilise le fait qu'au voisinage d'un sommet de la courbe, la valeur du polynôme recherché est donnée uniquement par les monômes correspondant à ce sommet.

Soit le sommet  $A(x_0, y_0)$  où  $(x_0, y_0) = (0, 2)$  de monômes  $a_{03}x^0y^3$ ,  $a_{02}x^0y^2$  et  $a_{12}x^1y^2$ . Puisqu'en ce point les trois monômes sont égaux, il vient :  $a_{03} + 3y_0 = a_{02} + 2y_0 = a_{12} + x_0 + 2y_0$ , autrement dit :  $a_{03} + 6 = a_{02} + 4 = a_{12} + 4$ . Posons  $a_{03} = 0$ . Il découle  $a_{02} = a_{12} = 2$  et, comme nous l'avons dit, au voisinage de  $A$  le polynôme  $P(x, y) = \max(a_{03} + 3y = a_{02} + 2y = a_{12} + x + 2y)$ . Ainsi  $P(x, y) = "y^3 + 2y^2 + 2xy^2"$ .

On recommence avec le sommet  $B(x_0, y_0)$  où  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ . Il vient :  $a_{02} + 2y_0 = a_{12} + x_0 + 2y_0 = a_{11} + x_0 + y_0$  autrement dit  $2 + 2 = 2 + 0 + 2 = a_{11} + 1$  et  $a_{11} = 3$ . Au voisinage de  $B$  le polynôme  $P(x, y) = "2y^2 + 2xy^2 + 3xy"$ .

Ainsi de suite avec  $C(1, 1) : a_{21} = 2$ , avec  $D(-1, 0) : a_{01} = 2$ , avec  $G(1, 0) : a_{20} = 2$ , avec  $H(2, 0) : a_{30} = 0$ , avec  $E(-1, -1) : a_{10} = 2$ , avec  $I(-2, -2) : a_{00} = 0$  (le point  $F(0, -1)$  permet de vérifier la cohérence des calculs mais n'apporte aucun renseignement nouveau).

Conclusion, on obtient le polynôme défini par :

$$\begin{aligned}
 P(x, y) &= "x^3 + y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 2xy^2 + 2x^2y + 3xy + 2x + 2y + 0". \\
 \text{Autrement dit } &\max(3x, 3y, 2+2x, 2+2y, 2+x+2y, 2+2x+y, 3+x+y, 2+x, 2+y, 0).
 \end{aligned}$$

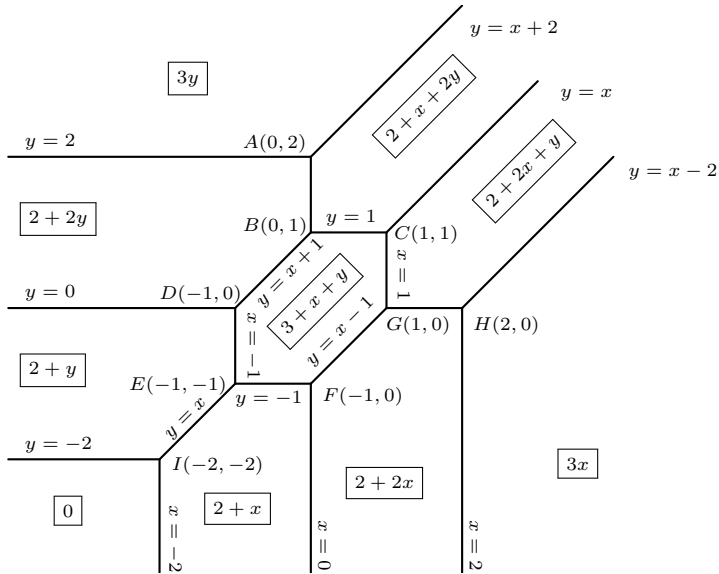


FIGURE 19 – Solution du problème posé

## Le théorème de Bézout

En 1764, Étienne Bézout écrit un mémoire d'une cinquantaine de pages *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces Equations*, publié dans *l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, dans lequel il détaille des méthodes pour résoudre des équations polynomiales. Il résulte le théorème de Bézout que ce dernier énonce en 1779 à la page XII de la préface de son livre *La théorie générale des équations algébriques* sous la forme suivante :

C'EST en appliquant ces moyens & ces idées aux équations complètes, que nous sommes parvenus à ce théorème général... Le degré de l'équation finale résultante d'un nombre quelconque d'équations complètes, renfermant un pareil nombre d'inconnues, & de degrés quelconques, est égal au produit des exposans des degrés de ces équations. Théorème dont la vérité n'étoit connue & démontrée que pour deux équations seulement.

FIGURE 20 – Théorème de Bézout (Bézout, 1779, préface p. XII) – Source : BnF

Aujourd'hui, nous pouvons énoncer dans le plan projectif complexe la version géométrie algébrique du théorème de Bézout suivante : Deux courbes algébriques projectives complexes planes, sans composante commune, respectivement de degré  $n$  et de degré  $p$ , possèdent exactement  $n \times p$  points d'intersection, comptés avec leur multiplicité.

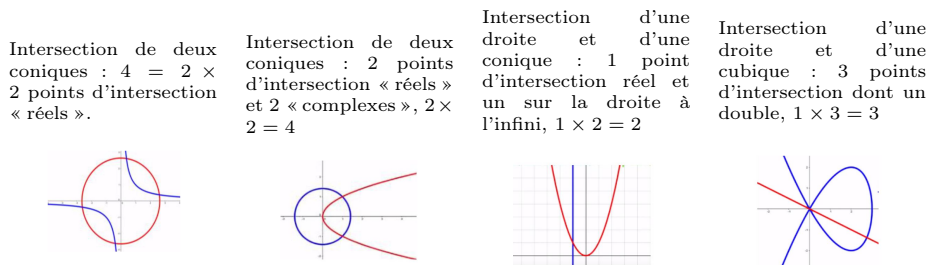


FIGURE 21 – Illustrations du théorème de Bézout<sup>5</sup>

## Version tropicale du théorème de Bézout n° 1

### Exemples de courbes tropicales dont les intersections sont simples

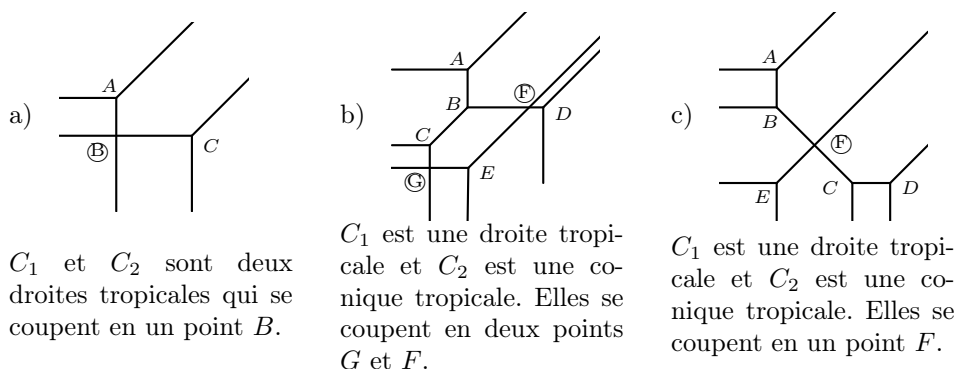


FIGURE 22 – Exemples de courbes tropicales  $C_1$  et  $C_2$  et de leur réunion  $C_1 \cup C_2$

Elles ont respectivement pour subdivisions duales :

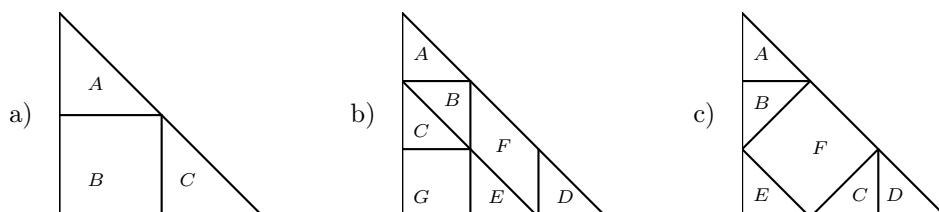


FIGURE 23 – Subdivisions duales des courbes précédentes

5. Ces exemples sont tirées de la vidéo intitulée Deux (deux?) minutes pour... le théorème de Bézout dont l'adresse internet est [https://www.youtube.com/watch?v=0\\_ZzZzvxnP0](https://www.youtube.com/watch?v=0_ZzZzvxnP0)



Pour deux courbes tropicales, on définit la multiplicité de chacun de leurs points d'intersection comme l'aire du parallélogramme dual correspondant. Dans le cas a) l'aire du « carré » vaut 1, dans le cas b) l'aire du « carré G » vaut 1 et l'aire du « parallélogramme F » vaut 1 et dans le cas c) l'aire du « carré F » vaut 2. Dans les trois cas, on remarque que la somme des multiplicités des points d'intersection est égale au produit des degrés. Ceci vaut pour des polynômes complets (aucun coefficient  $a_{kl}$  ne vaut  $-\infty$  et des intersections simples (elles ne contiennent qu'un nombre fini de points et aucun sommet). Une première version du théorème de Bézout tropical est alors :

**Théorème de Bézout tropical 1**

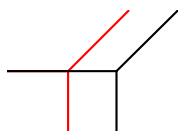
Soit  $C_1$  et  $C_2$  deux courbes tropicales correspondant à deux polynômes complets de degré  $n_1$  et  $n_2$  et d'intersection simple. Alors la somme des multiplicités des points d'intersection vaut  $n_1 \times n_2$ .

La démonstration est élémentaire : Le polygone dual  $\Delta_1$  de la courbe  $C_1$ , définie par un polynôme complet de degré  $n_1$ , est un triangle rectangle isocèle de côté  $n_1$  et d'aire  $\frac{n_1^2}{2}$ . Idem pour le polygone dual  $\Delta_2$  de la courbe  $C_2$ . Il a pour aire  $\frac{n_2^2}{2}$ . Le polygone dual  $\Delta$  de la courbe  $C_1 \cup C_2$  de degré  $n_1 + n_2$  a de la même façon pour aire  $\frac{(n_1+n_2)^2}{2}$  et est composé de  $\Delta_1$ , de  $\Delta_2$  et des parallélogrammes correspondant aux points d'intersection de  $C_1$  et de  $C_2$ . Par conséquent, la somme des multiplicités des points d'intersection de  $C_1$  et de  $C_2$  vaut :  $\frac{(n_1+n_2)^2}{2} - \frac{n_1^2}{2} - \frac{n_2^2}{2} = n_1 \times n_2$ . CQFD.

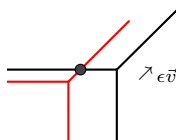
**Version tropicale du théorème de Bézout n° 2**

**Exemples de courbes tropicales  $C_1$  et  $C_2$  dont les intersections ne sont pas simples<sup>6</sup>**

a) Deux droites tropicales qui ont une infinité de points d'intersection.



b) On translate l'une des deux droites. Les droites ont un seul point d'intersection. L'intersection est simple.



c) Le polygone dual est la réunion des polygones duaux des deux droites et du parallélogramme du point d'intersection devenu simple.

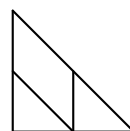
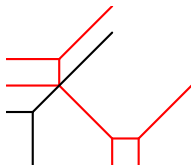


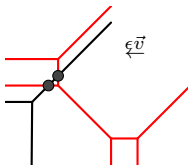
FIGURE 24 – Exemple avec une infinité de points d'intersection

6. Les exemples sont extraits de (Brugallé, oct-déc 2009) et (Arnal, Legrand, 2015, p.11-12).

a) La droite tropicale et la conique se coupent en un sommet de la conique.



b) On translate la droite. Les courbes se coupent alors en deux points distincts. L'intersection est simple.



c) Le polygone dual est la réunion des polygones duaux des deux courbes et du parallélogramme du point d'intersection simple.

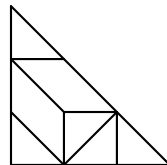


FIGURE 25 – Exemple avec un point d'intersection en un sommet de la conique

Les deux exemples précédents permettent de justifier les deux définitions suivantes :

Un point d'intersection stable de deux courbes est un point limite des points d'intersection simples de l'une des deux courbes avec la translatée de l'autre.

Sa multiplicité est égale à la somme des multiplicités des points d'intersection dont il est la limite.

On déduit l'énoncé général tropical du théorème de Bézout, nettement plus simple que sa version géométrie algébrique rappelée précédemment :

**Théorème de Bézout tropical 2 (version générale)**

Soit  $C_1$  et  $C_2$  deux courbes tropicales correspondant à deux polynômes complets de degré  $n_1$  et  $n_2$ . Alors la somme des multiplicités des points d'intersection stables vaut  $n_1 \times n_2$ .

## Le 16<sup>e</sup> problème de Hilbert

Il s'agit ici de la première partie du 16<sup>e</sup> problème parmi les 23, proposés par Hilbert en 1900 à Paris, dont l'énoncé donné par Erwan Brugallé est le suivant : « *Étant donné un entier  $d$ , établir la liste des arrangements possibles des courbes algébriques réelles planes de degré  $d$ .* » (Brugallé, oct-déc 2009, p. 12) Par arrangement d'une courbe algébrique réelle plane, il faut comprendre la position relative de ses composantes connexes dans le plan.

Voici quatre exemples (Brugallé, oct-déc 2009, p. 12) de courbes algébriques réelles de degré 4 :



FIGURE 26 – De gauche à droite, deux, quatre, deux et enfin quatre composantes connexes

Le Théorème de Axel Harnack<sup>7</sup> datant de 1876 permet de majorer le nombre de composantes connexes d'une courbe algébrique lisse projective de degré  $d$  par  $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ .

Le problème posé par Hilbert est actuellement résolu jusqu'au degré 7, où la classification est connue. Par exemple pour le degré 6, les courbes avec 11 composantes connexes  $\left(\frac{(6-1)(6-2)}{2} + 1\right)$  appelées maximales sont les trois courbes suivantes (Voir (Saint-Gervais, 2014-2022) et (Kantor, 1993)) :

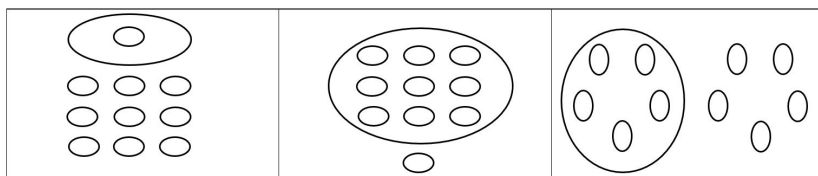


FIGURE 27 – Courbes de degré 6 à 11 composantes connexes

Dans son article de 1891 « *Über die reellen Züge algebraischer Curven* », David Hilbert pense que les deux courbes de gauche sont les seules maximales de degré 6 (celle de Axel Harnack et la sienne). En fait, en 1967, le mathématicien russe Dimitri Gudkov trouve la troisième.

À partir du degré 8, le problème est ouvert. Il est en effet difficile de construire une courbe algébrique réelle d'un degré donné réalisant un arrangement donné. La technique du Patchwork inventée par Oleg Viro dans les années 70 permet de recréer par un procédé de quantification une courbe algébrique à partir d'une courbe tropicale, présentant le même arrangement que la courbe algébrique d'avant la déquantification.

## La technique du Patchwork pour une courbe de degré $d$

1. On dessine le triangle  $\Delta : (0, 0), (d, 0)$  et  $(0, d)$ .
2. On choisit une triangulation de  $\Delta$ .
3. A chaque sommet  $(i, j)$  on lui associe un signe  $+$  ou  $-$ .
4. On fait trois copies de cette triangulation pour obtenir un carré.
5. On signe tous les autres sommets en respectant la règle suivante : Le signe de  $(-i, j)$  est celui de  $(i, j)$  si  $i$  est pair et l'opposé sinon. Idem pour  $j$ .
6. On trace alors les segments joignant les milieux des côtés dont les extrémités ont des signes différents.

7. Axel Harnack (1851, Dorpat – 1888, Dresde) est un mathématicien germano balte. élève de Felix Klein, il enseigne l'analyse à Dresde et conduit des recherches sur les séries de Fourier et la théorie des ensembles.

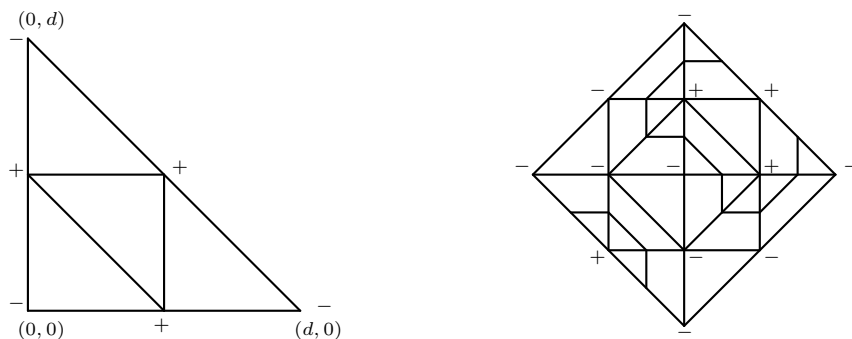
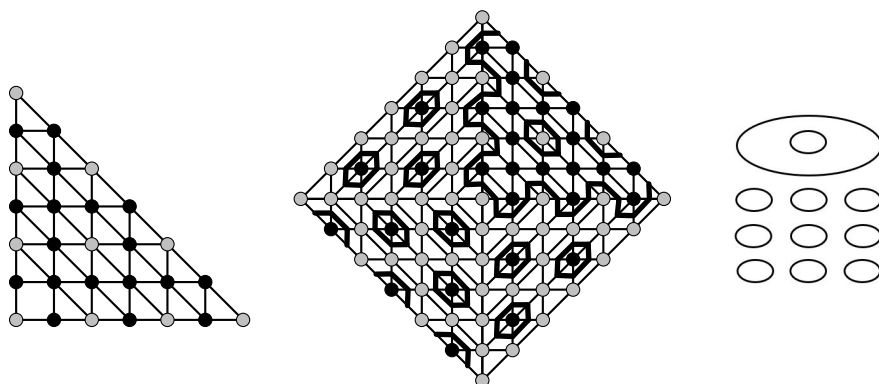


FIGURE 28 – Exemple 1 (Alexandre, Mordant, Mao, 2016, p.V.)

On construit une courbe lisse de degré 6 à partir de la subdivision duale ci-dessous (Bouis, Trannoy, 2018). On a préféré des points colorés en noir et en gris plutôt que des points signés.



La subdivision duale initiale

La courbe algébrique de degré 6 obtenue par la méthode du Patchwork

On reconnaît la courbe maximale de Harnack à 11 composantes connexes

FIGURE 29 – Exemple 2 (Bouis, Trannoy, 2018)

## Conclusion

Le voyage sous le tropique sud s’achève sur la technique du Patchwork. Pourtant, comme l’explique Antoine Chambert-Loir dans son article « Quand la géométrie devient tropicale » (Chambert-Loir, 2018), la suite de l’histoire reste à écrire. La géométrie tropicale est toute neuve et prometteuse. En effet, les courbes tro-

picales vues comme dégénérescences d'amibes de courbes algébriques, conservent certaines propriétés de ces dernières. La géométrie tropicale fournit alors des modèles combinatoires plus simples. Les applications sont variées. Stéphane Gaubert en donne une liste détaillée (Gaubert, 2015) : Problème de jeux à somme nulle, calcul de région de sécurité, optimisation d'un revenu, optimisation du référencement d'un site web, minimisation du taux de croissance de cellules tumorales, mais aussi vérification de programmes et même de preuves mathématiques !

## Références bibliographiques et sitographiques

- ALEXANDRE Raphaël, MORDANT Thomas, MAO Zhouhang, 2016, « Patchwork combinatoire de courbes algébriques », mémoire de L3 encadré par ITENBERG Ilia, École Normale Supérieure, à l'adresse Internet : [https://www.math.ens.fr/enseignement/telecharger\\_fichier.php?fichier=1946](https://www.math.ens.fr/enseignement/telecharger_fichier.php?fichier=1946) (dernier accès le 20 mai 2019)
- ARNAL Charles, 2017, « Géométrie tropicale et topologie des variétés algébriques réelles », à l'adresse Internet : <https://docplayer.fr/147667371-Geometrie-tropicale-et-topologie-des-varietes-algebriques-reelles.html> (dernier accès le 30 avril 2022)
- ARNAL Charles et LEGRAND Alexandre, 2015, « Géométrie tropicale », à l'adresse Internet : <https://docplayer.fr/150113269-Geometrie-tropicale-alexandre-legrand-charles-arnal-20-juin-2015.html> (dernier accès le 30 avril 2022)
- BÉZOUT Étienne, 1762, « Mémoire sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés, qui admettent une solution algébrique », *Histoire de l'Académie royale des sciences M. DCCLXII*, Paris, Imprimerie Royale, Table pour les mémoires p. 17-52.
- BÉZOUT Étienne, 1764, « Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations », *Histoire de l'Académie royale des sciences M. DCCLXIV*, Imprimerie Royale, Table pour les mémoires p. 288-338.
- BÉZOUT Étienne, 1779, *Théorie Générale des équations algébriques*, Imprimerie PH.- D. Pierres, rue S. Jacques Paris.
- BOUIS Vincent et TRANNOY Matthias, 2018, « Topologie des courbes algébriques réelles », à l'adresse Internet : [https://webusers.imj-prg.fr/~vincent.bouis/topologie\\_courbes\\_algébriques\\_réelles.pdf](https://webusers.imj-prg.fr/~vincent.bouis/topologie_courbes_algébriques_réelles.pdf) (dernier accès le 30 avril 2022)
- BRUGALLÉ Erwan, octobre-décembre 2009, « Un peu de géométrie tropicale », *Quadrature journal* n° 74, p. 10-22.
- BRUGALLÉ Erwan, 2009, *Un peu de géométrie tropicale, Solutions des exercices*, Online Material : <https://www.quadrature-journal.org/articles/quadrature/olm/2009/04/q09007/q09007-olm.pdf> (dernier accès le 30 avril 2022)
- BRUGALLÉ Erwan, 2008, « Géométries énumératives complexe, réelle et tropicale », Journées X-UPS Éditions de l'X (Plagne, Harinck, Sabbah), à l'adresse Internet : <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups08-02.pdf> (dernier accès le 30 avril 2022)

- CHAMBERT-LOIR Antoine, 2018, « Quand la géométrie devient tropicale », *Pour la science* n° 492, octobre 2018, p. 26-33.
- GAUBERT Stéphane, 2015, « Déterminer des stratégies optimales grâce à l'algèbre tropicale », vidéo à l'adresse Internet : [https://www.youtube.com/watch?v=yP5qajIL\\_YM](https://www.youtube.com/watch?v=yP5qajIL_YM) (dernier accès le 30 avril 2022)
- ITENBERG Ilia, 2008, « Introduction à la géométrie tropicale », Journées X-UPS, Éditions de l'X (Plagne, Harinck, Sabbah), à l'adresse Internet : <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups08-01.pdf> (dernier accès le 30 avril 2022)
- KANTOR Jean-Michel, 1993, « Les problèmes de Hilbert et leur devenir », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, Série 2, Tome 3, p. 95-112, à l'adresse Internet : [http://www.numdam.org/article/CSHM\\_1993\\_2\\_3\\_\\_95\\_0.pdf](http://www.numdam.org/article/CSHM_1993_2_3__95_0.pdf) (dernier accès le 30 avril 2022)
- LEFORT Jean, 2013, « Notions de géométrie tropicale », *Bulletin Vert APMEP* n° 502 p. 79-88. Voir aussi à l'adresse Internet : <https://www.apmep.fr/IMG/pdf/13-Lefort-C.pdf> (dernier accès le 30 avril 2022)
- NICOTERA Mickaël, 2007, « Amibes et géométrie tropicale », Mémoire encadré par Alain YGER, Université de Bordeaux I, à l'adresse Internet : <https://docplayer.fr/56791661-Amibes-et-geometrie-tropicale.html> (dernier accès le 30 avril 2022)
- SAINT-GERVAIS Henri-Paul de, 2014-2022, « Topologie des courbes algébriques planes réelles », *Analysis Situs, Topologie algébrique des variétés*, site à l'adresse Internet : <http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Topologie-des-courbes-algebriques-planes-reelles.html> (dernier accès le 30 avril 2022)

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Nathalie Chevalarias	
<b>I Géométrie et grandeurs</b>	<b>11</b>
<b>1 Les <i>Éléments</i> de géométrie, d'Euclide au début du XIX<sup>e</sup> : une source d'inspiration pour les enseignants et enseignantes</b>	<b>13</b>
Dominique Baroux, Martine Bühler	
Introduction	
Les cas d'égalité et la méthode des aires	
Théorème des lignes proportionnelles et figures semblables	
Conclusion	
<b>2 Aires sans formules</b>	<b>29</b>
Carène Guillet, Marie-Line Moureau	
Introduction	
Problème 1 : Étant donné un polygone convexe, construire un carré de même aire	
Problème 2 : Trouver un triangle égal à un cercle	
Problème 3 : Déterminer des aires de surfaces curvilignes par des méthodes d'invention	
Problème 4 : Quelle relation y a-t-il entre l'aire du cercle générateur et celle sous une arche de cycloïde ?	
Problème 5 : Comparer l'aire du segment de parabole à celle du triangle inscrit	
Conclusion	

---

<b>3</b>	<b>Rectangulation &amp; quadrature des figures</b>	<b>47</b>
	<b>Jean-Paul Guichard</b>	
	Introduction	
	L'Inde védique (1500-500 av. J.-C.) : Les <i>Sulbasutras</i> de Baudhayana	
	La Chine ancienne (II <sup>e</sup> siècle av. J.-C.) : Les <i>Neuf Chapitres</i> de Liu Hui	
	Alexandrie (III <sup>e</sup> siècle av. J.-C.) : Les <i>Éléments</i> d'Euclide	
	Nuremberg (1525) : La <i>Géométrie</i> de Dürer	
	Sussex (1902) : <i>Les puzzles de Canterbury</i> de Dudeney	
	Conclusion	
<b>4</b>	<b>Décomposer un solide : de la Chine des Han à une exploration en classe avec les outils d'aujourd'hui</b>	<b>75</b>
	<b>Philippe Martinet</b>	
	Introduction	
	L'ouvrage que nous avons utilisé	
	Éléments des <i>Neuf chapitres</i> explicitement utilisés en classe	
	Le déroulement en classe et les productions des élèves	
	Intérêt d'une telle démarche	
	Conclusion	
<b>5</b>	<b>La duplication du cube vue par deux algébristes de la Renaissance</b>	<b>91</b>
	<b>Odile Kouteynikoff</b>	
	Introduction	
	La résolution de Guillaume Gosselin	
	La résolution de Michael Stifel	
	Remarques finales	
<b>6</b>	<b>La géométrie comme science de courbes</b>	<b>111</b>
	<b>Évelyne Barbin</b>	
	Introduction	
	Constructions et inventions de courbes dans la géométrie grecque	
	La courbe comme inconnue d'un phénomène et la notion de courbe au XVII <sup>e</sup> siècle	
	Conclusion	
<b>II</b>	<b>Géométrie pratique</b>	<b>129</b>
<b>7</b>	<b>Mesurer la terre et l'univers : de l'Histoire à la pratique en classe</b>	<b>131</b>
	<b>Anne-Marie Aebischer</b>	
	Introduction	
	Le bâton de Gerbert	
	L'arbalestrille et l'astronomie	
	Le bâton de Jacob et l'arpentage	
	Le Carré géométrique	
	L'équerre articulée	



---

Réalisation des instruments	
Conclusion	
<b>8 Quelques calculs d'aires pour un quadrilatère, entre XV<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècle</b>	<b>155</b>
<b>Anne Boyé, Xavier Lefort</b>	
Introduction	
Trois calculs d'arpenteurs	
Nous avons donc trois mesures. Laquelle retenir ?	
Une construction de mathématicien	
Un calcul d'ingénieur	
Conclusion	
<b>9 Géométrie pratique d'inaccessibles, avec G. de Longchamps</b>	<b>165</b>
<b>René Guitart</b>	
Introduction	
Longchamps, après Mascheroni, Servois, Bergery	
Carrière et travaux de Longchamps	
La géométrie pratique de Longchamps : une vue d'ensemble	
Constructions de courbes point par point	
Transversales et propriétés de perspectives	
Art de la guerre, problèmes d'arpentages et mesures inaccessibles : quelques exemples	
Associé et réciproque de Longchamps	
Conclusion	
<b>10 Planimètres, intégraphes, tractoriographes : les instruments de la géométrie transcendante</b>	<b>185</b>
<b>Dominique Tournès, Claude Voillequin, Isabelle Voillequin</b>	
Introduction	
Planimètre à cône	
Planimètre polaire	
Intégraphe	
Tractoriographe	
Conclusion	
<b>III Géométrie et algorithmique</b>	<b>203</b>
<b>11 La géométrie pour justifier ou inventer des algorithmes : Autour des <i>Métriques</i> de Héron d'Alexandrie</b>	<b>205</b>
<b>Alain Bernard</b>	
Introduction	
Éléments de contexte sur Héron d'Alexandrie et le textes des <i>Métriques</i>	
Remarques sur le style, le vocabulaire et la structure des <i>Métriques</i>	
Pour découvrir et inventer d'autres procédures : variations autour de l'aire du trapèze droit	
Conclusions : le moyen de justifier et d'inventer des procédures de calcul d'aire	

---

<b>12 La géométrie : vers un langage de programmation des algorithmes de tracés des figures géométriques</b>	<b>223</b>
<b>Sylviane R. Schwer</b>	
Introduction	
Émile Lemoine (1840-1912)	
Analyse quantitative des algorithmes	
La géométrie	
L'actualité de la géométrie	
Des pistes d'activités dans l'esprit de la géométrie	
Conclusion	
<b>IV Géométrie et art</b>	<b>241</b>
<b>13 À la recherche des modèles géométriques des mosaïques antiques</b>	<b>243</b>
<b>Bernard Parzysz</b>	
Introduction	
Le <i>pictor</i> et sa géométrie	
Comment retrouver un modèle	
Application à une mosaïque de Brescello (Italie)	
Conclusion	
<b>14 Deux enquêtes sur la « géométrie pratique » romaine</b>	<b>259</b>
<b>Bernard Parzysz</b>	
Introduction	
Une lame d'ivoire énigmatique	
Des caissons de stuc oubliés	
Conclusion	
<b>15 Apports de la perspective à la géométrie – Illustrations dans l'histoire et l'enseignement</b>	<b>273</b>
<b>Rosane Tossut</b>	
Introduction	
La « seule et même énonciation » de Desargues	
Les axiomes de Taylor	
La géométrie d'incidence dans nos classes	
Annexe – Un exemple d'activités en classe	
<b>V Enseignement de la géométrie</b>	<b>289</b>
<b>16 Importance et diversité des méthodes dans l'enseignement secondaire de la géométrie en France au XIX<sup>e</sup> siècle</b>	<b>291</b>
<b>Guillaume Moussard</b>	
Introduction	
Les méthodes générales	
Méthodes particulières	

---

Élargissement de la notion de problème	
Conclusion	
<b>17 La conception houëllienne de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire dans les années 1860-1880 : une approche « expérimentale » basée sur une version revisitée des <i>Éléments</i> d'Euclide</b>	<b>309</b>
<b>François Plantade</b>	
Introduction	
Jules Houël (1823-1886), un mathématicien polyglotte et pédagogue, engagé sur la question de l'enseignement de la géométrie au lycée	
La conception de l'enseignement de la géométrie élémentaire chez Houël	
Conclusion	
<b>18 Tours et détours de l'enseignement de la géométrie au XX<sup>e</sup> siècle</b>	<b>325</b>
<b>Anne Boyé</b>	
Introduction	
Premier moment : la réforme de 1902-1905-1907	
Deuxième moment : 1925-1960	
Troisième moment : la réforme des « maths modernes » 1960-1980	
Quatrième moment : la contre-réforme des mathématiques, 1981-1982, remaniée en 1985	
Conclusion	
<b>19 Approche des fondements épistémologiques de la géométrie du cycle 3</b>	<b>347</b>
<b>Alex Esbelin, Anne-Cécile Mathé, Aurélie Roux</b>	
Introduction	
Géométrie védique	
Géométrie milésienne	
Conclusion	
<b>20 Comment structurer l'étude des expressions géométriques de la proportionnalité au cycle 4 ?</b>	<b>363</b>
<b>Frédéric Laurent</b>	
Introduction	
Analyse didactique	
Analyse historique	
Conclusions	
<b>21 Des recherches en histoire pour comprendre le contenu des manuels d'aujourd'hui ? La révolution de l'ère Meiji et les manuels de géométrie actuels dans les collèges japonais</b>	<b>387</b>
<b>Marion Cousin</b>	
Introduction	
Corpus et méthodologie d'analyse des manuels	
Les démonstrations dans les manuels actuels	
Les textes mathématiques dans les manuels de géométrie avant l'ère Meiji	

---

Évolution des démonstrations dans les manuels de géométrie de l'ère  
Meiji : l'ère Meiji (1868-1912)  
Évolution des démonstrations dans les manuels de géométrie de l'ère  
Meiji : après l'ère Meiji  
Conclusions et prolongements

<b>VI Géométrie et géométries</b>	<b>403</b>
<b>22 De quelques notables tentatives de démonstrations du cinquième postulat d'Euclide : de l'Antiquité au XVII<sup>e</sup> siècle</b>	<b>405</b>
<b>Didier Bessot</b>	
Introduction	
Antiquité	
Moyen Âge : aire arabo-musulmane	
Époque moderne : XVI <sup>e</sup> -XVII <sup>e</sup> siècles	
Conclusion	
<b>23 Le père Jésuite Giromalo Saccheri (1677-1733) correcteur d'Euclide et inventeur de résultats de la géométrie hyperbolique à venir</b>	<b>419</b>
<b>Didier Bessot</b>	
Introduction	
Brève biographie de G. Saccheri	
Contenu du traité <i>Euclides ab omni nævo vindicatus...</i>	
Exposé et examen du Livre I	
Conclusion : un échec fertile	
<b>24 La géométrie tropicale, benjamine des géométries</b>	<b>441</b>
<b>André-Jean Glière</b>	
Introduction	
Les droites tropicales	
Algèbre tropicale	
Déquantification d'une droite du plan : Amibes	
Polynômes tropicaux	
Polygone de Newton d'un polynôme tropical	
Problème tropical	
Le théorème de Bézout	
Le 16 <sup>e</sup> problème de Hilbert	
Conclusion	
<b>Table des matières</b>	<b>463</b>
<b>A propos des auteurs et des autrices</b>	<b>469</b>

## A propos des auteurs et des autrices

**Anne-Marie AEBISCHER** est retraitée, précédemment PRAG à l'UFR Sciences et techniques de l'Université de Franche-Comté, membre de l'IREM de Franche-Comté. Ses thèmes de recherche ont été liés aux usages des outils en géométrie (règle et jalons chez Servois, divers instruments de mesure de la Renaissance) et à leur utilisation dans une perspective d'apprentissage actuel des mathématiques.

**Évelyne BARBIN** est professeure émérite en histoire des sciences et des techniques au Laboratoire de Mathématiques Jean Leray de l'université de Nantes et à l'IREM des Pays de la Loire. Elle intervient en formation initiale et continue en histoire des mathématiques. Ses recherches portent sur l'histoire des mathématiques et de leur enseignement et sur les relations entre histoire et enseignement des mathématiques, en particulier sur l'histoire de la géométrie et de la démonstration.

**Dominique BAROUX** est professeure de mathématiques retraitée de l'Éducation Nationale, et membre du groupe M. : A.T.H. de l'IREM Paris-Diderot. Elle y anime, avec Martine Bühler un groupe de lecture de textes historiques destiné aux enseignants et enseignantes de mathématiques, dont les thèmes sont liés aux programmes de collège et lycée. Elle a également participé aux travaux des groupes Culture Math et « Problèmes ouverts ». Dans ce cadre elle s'est intéressée aux divers traités « élémentaires » de géométrie, avec des interrogations pédagogiques, en liaison avec la ré-introduction de certaines notions de géométrie au collège et de l'accent mis de nouveau sur la démonstration. Les programmes de lycée mis en œuvre à la rentrée 2019 ont incité le groupe de lecture de textes historiques à travailler autour de La Géométrie de Descartes et de l'histoire des logarithmes.

---

**Alain BERNARD** est formateur d'enseignants dans le second degré au sein de l'INSPE de l'académie de Créteil, qui dépend de l'UPEC (enseignements disciplinaires et historiques et direction de mémoires en master MEEF, tutorats, formation continue). Il est chercheur au centre Koyré et à l'IREM de Paris Nord et s'intéresse en particulier à l'histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité tardive, l'histoire de la géométrie au XVIII<sup>e</sup> siècle et à l'histoire des probabilités au XX<sup>e</sup> siècle.

**Didier BESSOT** est professeur de mathématiques retraité, membre honoraire de l'IREM de Caen-Normandie. Ses thèmes de recherche en histoire des mathématiques sont la perspective du xv<sup>e</sup> au xviii<sup>e</sup> siècles (Instruments de perspective – Anamorphoses), les sections coniques (Apollonius – Halley – La Hire), la géométrie hyperbolique (Cinquième Postulat – Saccheri – Lobatchevski – Modèle de Poincaré).

**Anne BOYÉ** est professeure agrégée de mathématiques, retraitée de l'éducation nationale. Elle est membre de l'IREM des Pays de La Loire et chercheuse associée au Centre François Viète d'épistémologie, d'histoire des sciences et des techniques. Elle a soutenu sa thèse en 1998, sur l'Apollonius Gallus de François Viète et la géométrie synthétique. Ses thèmes de recherche sont, entre autres, l'histoire de la géométrie, l'histoire de l'enseignement des mathématiques au XX<sup>e</sup> siècle et les femmes dans l'histoire des mathématiques. Elle étudie ainsi le rôle que peut avoir l'histoire des mathématiques et de leur enseignement dans l'éducation mathématique, ainsi que dans la lutte contre les discriminations de tous genres, en particulier les stéréotypes de sexe.

**Martine BÜHLER** est professeure de mathématiques retraitée de l'Éducation Nationale, membre du groupe M. : A.T.H. de l'IREM Paris-Diderot. Elle y anime, avec Dominique Baroux, un groupe de lecture de textes historiques destiné aux enseignants et enseignantes de mathématiques, dont les thèmes sont liés aux programmes de collège et lycée. Elle a également travaillé durant deux ans avec le groupe « géométrie » de l'IREM. Dans ce cadre, elle s'est intéressée aux divers traités « élémentaires » de géométrie, avec des interrogations pédagogiques, en liaison avec la ré-introduction de certaines notions de géométrie au collège et de l'accent mis de nouveau sur la démonstration. Les programmes de lycée mis en œuvre à la rentrée 2019 ont également incité le groupe de lecture à lire des textes autour de La Géométrie de Descartes et de l'histoire des logarithmes.

**Nathalie CHEVALARIAS** est professeure agrégée de mathématiques au lycée pilote innovant international de Jaunay-Marigny. Elle est membre de l'IREM&S de Poitiers où elle travaille notamment sur la mise en œuvre des items d'histoire des programmes de lycée de 2019. Elle intervient dans la formation en histoire des mathématiques des futurs enseignants en M1 MEEF parcours mathématiques. Elle est actuellement co-responsable de la commission inter-IREM « Épistémologie et Histoire des mathématiques ».

---

**Marion COUSIN** est professeure des écoles dans le Rhône. Elle a soutenu à Lyon en 2013 une thèse intitulée : « La "révolution" de l'enseignement de la géométrie dans le Japon de l'ère Meiji (1868-1912) : une étude de l'évolution des manuels de géométrie élémentaire ». Elle a été membre des laboratoires S2HEP et IAO à Lyon et du laboratoire SPHERE à Paris. Son travail effectué avec Takeshi Miyakawa, et sur lequel s'appuie son chapitre, a été supporté par la bourse postdoctorale de la JSPS (Japanese Society for the Promotion of Sciences).

**Alex ESBELIN** est maître de conférences à l'I.N.S.P.E. Clermont Auvergne, chercheur au L.I.M.O.S. (Université Clermont-Auvergne). Il est membre du groupe AHMES (Apports de l'histoire des mathématiques aux enseignants du secondaire) de l'IREM de Clermont-Ferrand. Ses recherches portent sur la logique, la complexité des algorithmes et l'arithmétique. Il s'intéresse à l'histoire des mathématiques depuis ses années d'études et l'utilise dans le cadre de la formation des enseignants.

**André-Jean GLIÈRE** est professeur de classes préparatoires à l'ESEO à Angers. Il est chercheur associé au laboratoire Leray Université de Nantes sous la direction d'Evelyne Barbin. Il a soutenu une thèse en 2007 sur l'histoire et l'épistémologie des quantités et nombres négatifs de d'Alembert à nos jours sous la direction de Jean Dhombres. Ses recherches portent sur l'histoire des mathématiques des XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles, en particulier, son dernier sujet de recherche est la correspondance de Legendre et de Jacobi sur les fonctions elliptiques (1827-1832).

**Jean-Paul GUICHARD** est professeur de mathématiques retraité. Il est membre de l'IREM&S de Poitiers et de la Commission inter-IREM Épistémologie et Histoire des mathématiques. Ses thèmes de recherche en histoire des mathématiques portent sur François Viète, l'histoire du calcul littéral, ainsi que sur les grandeurs, en particulier les angles et les aires.

**Carène GUILLET** est professeure agrégée de mathématiques, en poste au lycée de Saint-Nazaire (44). Elle est membre de l'IREM des Pays de la Loire et dans ce cadre, elle travaille à l'élaboration et à l'animation de stages à destination des enseignants du second degré pour les aider à introduire une perspective historique dans leur enseignement, en particulier à propos des aires, de l'irrationalité et des tangentes.

**René GUITART** est mathématicien et philosophe. Il a enseigné les mathématiques à l'Université d'Amiens puis à Paris 7 Denis Diderot. Il a collaboré à l'IREM de Paris 7, notamment à l'époque d'André Revuz puis celle de Régine Douady. Il a participé, comme directeur de programme, au Collège International de philosophie, de 1992 à 1998. En mathématique, il est spécialiste de la théorie des catégories. En philosophie, il a publié sur Nietzsche, sur Bachelard. Il s'intéresse aussi à la psychanalyse lacanienne et la théorie des nœuds. En histoire des mathématiques, il a travaillé sur la théorie de Galois, la géométrie et l'analyse, la logique et la théorie des modèles, les probabilités et la théorie du potentiel.

---

**Odile KOUTEYNIKOFF** est agrégée de mathématiques, retraitée de l'Éducation Nationale. Elle a participé pendant plusieurs années aux activités du groupe M : A.T.H. de l'IREM Paris-Diderot et a travaillé au sein du « Groupe de recherche sur l'algèbre à la Renaissance » du CESR de Tours (UMR 7323 CNRS / Université François Rabelais). Elle est aujourd'hui rattachée au laboratoire SPHERE (UMR 7219 CNRS / Université Paris-Diderot). Ses travaux portent sur les conditions de l'élaboration de l'algèbre et l'évolution des mathématiques à la Renaissance, sous l'aspect principal des relations entre algèbre et arithmétique d'une part, entre numérique et géométrie d'autre part.

**Frédéric LAURENT** est professeur agrégé de mathématiques au lycée Jeanne d'Arc de Clermont-Ferrand et à l'Inspé, Université Clermont Auvergne (avec, notamment, la charge d'enseignement dans une UE d'histoire et d'épistémologie dans le cadre du Master 2 MEEF parcours mathématiques). Il est animateur à l'IREM de Clermont-Ferrand et y est responsable du groupe de recherche AHMES (Apports de l'histoire des mathématiques aux enseignants du secondaire). Il est aussi membre de la Commission inter-IREM « Épistémologie et Histoire des mathématiques ». Ses recherches portent sur l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement par le biais de l'animation du groupe AHMES.

**Xavier LEFORT** est professeur de mathématiques, retraité de l'Université de Nantes. Il est membre de l'IREM des pays de Loire et participe aux activités de la Commission Inter-IREM « Épistémologie et Histoire des mathématiques » depuis 1976.

**Philippe MARTINET** est professeur agrégé de mathématiques au collège Maurice Clavel d'Avallon. Membre de l'IREM de Dijon depuis 2009, il a été responsable du groupe « Histoire et épistémologie » entre 2016 et 2020. Son intérêt s'est porté sur l'insertion en classe, dans un premier temps, d'éléments d'histoire de géométrie et de représentation, puis dans un second temps d'éléments d'histoire de probabilités et de statistiques. Il se tourne de plus en plus, depuis quelques années, vers l'enseignement des mathématiques et du Français Langue Seconde auprès des élèves allophones.

**Anne-Cécile MATHÉ** est maître de conférences en didactique des mathématiques à l'Université Clermont Auvergne. Elle est membre de l'IREM de Clermont Ferrand où elle anime notamment un groupe « Enseigner, apprendre la géométrie à l'école ». Ses thèmes de recherche portent sur les géométries enseignées et l'enseignement de ces géométries dans la scolarité obligatoire.

**Marie-Line MOUREAU** est professeure agrégée de mathématiques, en poste en lycée à Basse-Goulaine (44) et formatrice premier degré à l'INSPE site de Nantes. Elle est membre de l'IREM des Pays de la Loire et dans ce cadre, elle travaille à l'élaboration et à l'animation de stages à destination des enseignants du second degré pour les aider à introduire une perspective historique dans leur enseignement, en particulier à propos des aires, de l'irrationalité et des tangentes.



---

**Guillaume MOUSSARD** est professeur de mathématiques en CPGE au lycée Jean Perrin de Marseille, et membre du groupe histoire des mathématiques de l'IREM de Marseille. Il est l'auteur d'une thèse sur l'histoire des problèmes et des méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie au XIX<sup>e</sup> siècle en France.

**Bernard PARZYSZ** est professeur émérite de l'université d'Orléans. Il est membre du Laboratoire de Didactique André Revuz (université de Paris) et animateur à l'IREM de Paris-Diderot. Ses thèmes de recherche en histoire des mathématiques portent sur les savoirs et savoir-faire géométriques des artisans du passé et sur les probabilités.

**François PLANTADE** est enseignant de mathématiques dans le second degré et membre de l'IREM de Caen-Normandie. Il a soutenu une thèse d'histoire des mathématiques à l'université de Nantes (où il est collaborateur bénévole du Laboratoire de mathématiques Jean Leray) sur le mathématicien français du XIX<sup>e</sup> siècle encore méconnu Jules Houël et il s'intéresse à la circulation des mathématiques en Europe au XIX<sup>e</sup> siècle.

**Aurélié ROUX** est professeure de mathématiques à l'Inspé, Université Clermont Auvergne, formatrice pour le premier et second degré. Elle est animatrice à l'IREM de Clermont-Ferrand, et y est responsable du groupe d'étude et de recherche « situations problèmes en géométrie au collège ». Elle est aussi membre de la Commission Inter-IREM Collège.

**Sylviane R. SCHWER** est enseignante-chercheuse à l'université Sorbonne Paris Nord, membre de l'équipe logique du Laboratoire d'Informatique de Paris Nord (UMR 7030 du CNRS) et directrice de l'IREM Paris Nord. Elle a enseigné à tous les niveaux de l'enseignement du supérieur, en IUT, écoles d'ingénieurs, Master MEEF premier et second degré, en formation initiale et continue. Elle a créé en 2010 – et y participe depuis – l'option de recherche « Redécouvrir les mathématiques à travers les usages » au sein du MEEF premier degré de l'INSPE de l'académie de Créteil. Ses recherches relèvent des mathématiques discrètes appliquées à la représentation du temps et au raisonnement temporel, aux systèmes calendaires et aux systèmes de numération orales, à la combinatoire et à l'histoire des mathématiques dans l'entre-deux-guerres 1870-1914 en relation avec les concepts fondamentaux de l'informatique.

**Rosane TOSSUT** est chef de travaux retraitée de la Louvain School of Management et chargée de cours invitée à la Faculté des Sciences de l'UCLouvain (Université catholique de Louvain). Elle est membre du GEM (Groupe d'Enseignement Mathématique) à Louvain-la-Neuve et formatrice pour le CECAFOC (Centre catholique pour la formation en cours de carrière).

---

**Dominique Tournès** est professeur de mathématiques et d'histoire des mathématiques à l'université de la Réunion. Ses travaux portent sur l'analyse numérique, le calcul graphique, les équations différentielles et les mathématiques des ingénieurs dans la période 1750-1950. Il intervient également à l'IREM de la Réunion, dont il a été directeur jusqu'en 2021.

**Claude Voillequin** est professeur agrégé de mécanique en retraite mais actif pour le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM des pays de la Loire. Il a notamment fabriqué de nombreuses machines mathématiques pour le groupe et expliqué aussi le fonctionnement des planimètres.

**Isabelle Voillequin** est professeur agrégée de mathématiques, en poste en CPGE ECT (Économique et Commerciale option Technologique) au lycée Chevrollier à Angers. Elle est membre du groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM des pays de Loire.



La géométrie est présente dans les programmes d'enseignement de l'école primaire à l'université sous des formes très diverses : géométrie des figures, géométrie vectorielle, géométrie analytique, etc. On peut l'aborder sous l'aspect « construction », sous l'aspect « numérique », sous l'aspect « démonstration ». L'histoire des mathématiques peut apporter aux enseignants et enseignantes des éléments de réflexion pour prendre du recul sur les choix pédagogiques et organiser les contenus des programmes.

Pourquoi et comment les savoirs géométriques ont-ils été construits et pratiqués ? Comment peut-on extraire de sources historiques des situations géométriques pertinentes pour l'enseignement d'aujourd'hui et exploitables avec les nouveaux outils pédagogiques ? Comment la géométrie a-t-elle été enseignée en différents temps et différents lieux ? En quoi a-t-elle joué un rôle moteur dans le développement d'autres domaines des mathématiques comme l'algèbre ou l'analyse ? Les chapitres de cet ouvrage sont issus d'ateliers et d'exposés du 23<sup>e</sup> colloque de la commission inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques. Ils présentent des expériences et proposent des ressources en histoire des mathématiques qui permettent d'introduire une perspective historique dans les cours de géométrie.

De la géométrie védique à la géométrie tropicale, des constructions à la règle et au compas aux logiciels de géométrie, de l'enseignement au XIX<sup>e</sup> siècle aux manuels d'aujourd'hui, les chapitres de cet ouvrage nous entraînent dans un voyage de plus de 3000 ans dans les géométries d'hier à demain.

IREM&S de Poitiers - Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope, Boulevard Marie et Pierre Curie,  
TSA 61 125, 86 073 POITIERS Cedex 9



ISBN : 978-2-85954-107-1

EAN : 9782859541071



9 782859 541071