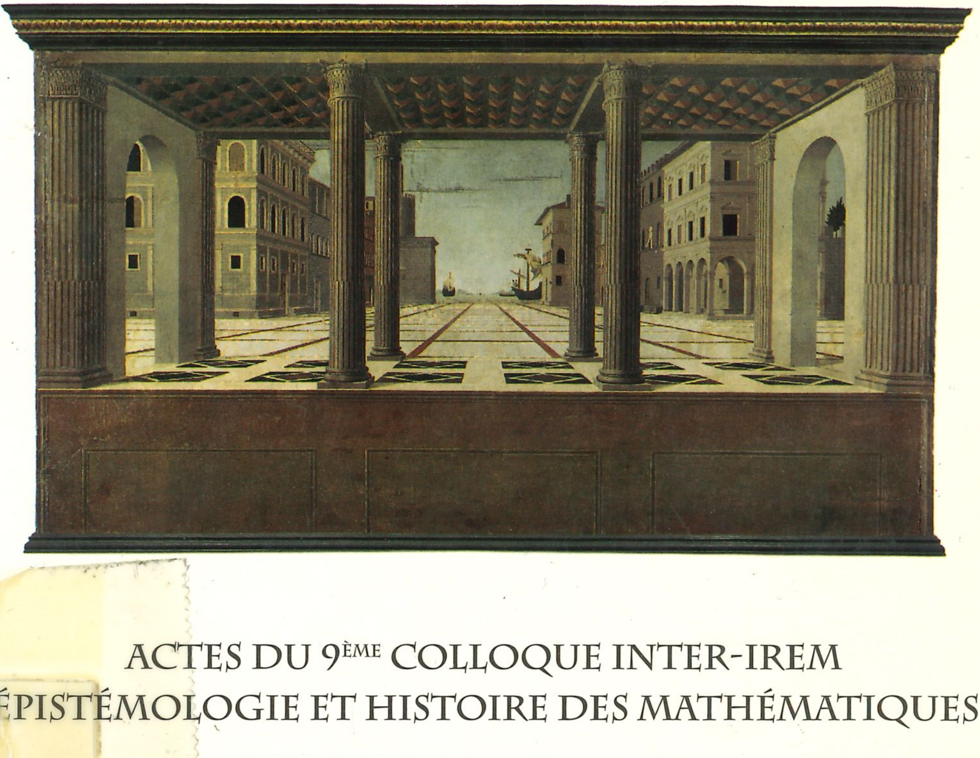
COMMISSION INTER-IREM
ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HISTOIRE D'INFINI



ACTES DU 9ÈME COLLOQUE INTER-IREM
ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Landerneau, 22-23 mai 1992

Édition et diffusion : IREM de Brest

Commission inter-IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

Publications récentes

Mathématiques au fil des âges, Gauthier-Villars, Paris, 1987.

Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, ed. IREM de Lyon, 1988.

Histoires de problèmes, histoire des mathématiques, Ellipses, Paris, 1993.

Actes des Universités d'été

Actes de la 1ère Université d'été sur l'histoire des mathématiques, pub. Université du Maine, 1984.

Actes de la 2ème Université d'été sur l'histoire des mathématiques, ed. IREM de Toulouse, 1986.

Actes de la 3ème Université d'été sur l'histoire des mathématiques, ed. IREM de Poitiers, 1988.

Actes de la 4ème Université d'été sur l'histoire des mathématiques, ed. IREM de Lille, 1990.

Actes de la 5ème Université d'été sur l'histoire des mathématiques, ed. IREM de Montpellier, a paraître.

Actes des colloques inter-IREM

Le rôle des problèmes dans l'histoire et dans l'activité mathématique, Actes du 5ème Colloque inter-IREM, ed. IREM de Montpellier, 1985.

Les mathématiques dans la culture d'une époque, Actes du 6ème Colloque inter-IREM, ed. IREM de Strasbourg, 1987.

La démonstration mathématique dans l'histoire, Actes du 7ème Colloque inter-IREM, ed. IREM de Besançon, 1989.

La figure et l'espace, Actes du 8ème Colloque inter-IREM, ed. IREM de Lyon, 1991.

COMMISSION INTER-IREM
ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HISTOIRE D'INFINI

ACTES DU 9ème COLLOQUE INTER-IREM
ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Landerneau, 22-23 mai 1992

Photographie : *Cité idéale*, Oeuvre de *Francesco di Giorgio Martini* (anciennement *Luciano Laurana*) Ecole de *Piero della Francesca*. N° cat. 1615 Gemäldegalerie im Bodemuseum, Museumsinsel, Staatliche Museen zu Berlin.

Edition et diffusion : IREM de Brest, UFR Sciences et Technique.
6 Avenue V. le Gorgeu - BP 809 - 29285 Brest Cedex

Edition et diffusion
IREM DE BREST
Dépot légal 3ème trimestre 1994
N° Publication
ISBN-2-908887-32-0

IREM DE BREST
UFR SCIENCES ET TECHNIQUES, 6 Avenue V. le Gorgeu
B.P. 809
29285 BREST CEDEX

... Si on regarde au travers d'un verre un vaisseau qui s'éloigne toujours directement, il est clair que le lieu du diaphane où l'on remarque un point tel qu'on voudra du navire haussera toujours par un flux continuel à mesure que le vaisseau fuit. Donc, si la course du vaisseau est toujours allongée et jusqu'à l'infini, ce point haussera continuellement ; et cependant il n'arrivera jamais à celui où tombera le rayon horizontal mené de l'œil au verre. De sorte qu'il en approchera toujours sans y arriver jamais, divisant sans cesse l'espace qui restera sous ce point horizontal sans y arriver jamais. D'où l'on voit la conséquence nécessaire qui se tire de l'infinité de l'étendue du cours du vaisseau à la division infinie et infiniment petite de ce petit espace restant au-dessous de ce point horizontal.

PASCAL
De l'esprit géométrique.

SOMMAIRE

PREFACE

Lorsqu'Evelyne Barbin a proposé que l'IREM de Brest reçoive le 9è Colloque d'Histoire et Epistémologie des Mathématiques, je crois bien n'avoir pas hésité une seconde avant d'accepter, malgré l'idée - quelque peu optimiste - que je me faisais de la charge que cela allait représenter pour notre petit IREM ; l'offre était en effet tellement séduisante :

- le thème de "l'infini", particulièrement riche et passionnant
- la qualité des travaux de la Commission Inter IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques
- l'intérêt pour les collègues de notre région d'accueillir un tel Colloque.

Tous ceux qui nous ont aidé l'ont bien compris ; grâce à eux, le succès de ce colloque, avec 220 participants, a dépassé largement nos espérances. Le Centre de Congrès de Mescoat et la Mairie de Landerneau nous ont merveilleusement accueilli. En prélude, M. le Conservateur de la Bibliothèque du Service Historique de la Marine nous a montré ses trésors. L'IREM de Rennes nous a fait profiter de son exposition "Sciences et Education à Rennes à l'époque révolutionnaire". Les intervenants ont fait un remarquable travail d'exposition, d'animation et de rédaction.

Nous tenons à remercier ici tous les organismes qui ont soutenu financièrement le colloque : le Conseil Général du Finistère, la Mairie de Landerneau, la Mairie de Brest, l'Association pour le Développement de la Recherche en Histoire et Épistémologie des Mathématiques, l'Université de Bretagne Occidentale.

Les actes du colloque que l'IREM de Brest s'est fait un plaisir d'éditer présentent la plupart des intervention. Ils ont été réalisé grâce à la mise au point de la maquette par Madame Laurans, secrétaire de l'IREM, que nous remercions vivement.

Nous espèrons bien que la Commission Inter-IREM Épistémologie et Histoire des Mathématiques, dans son périple à travers les différents IREM de Province, repassera un jour par notre ville.

A tous j'adresse mes remerciements.

Robert Tarrès
IREM de Brest

PRESENTATION

"L'infini a de tout temps remué le cœur des hommes plus profondément que n'importe quelle question ; l'infini a stimulé et fécondé la raison comme peu d'autres idées; mais l'infini plus que tout autre concept demande a être éclairé".
David Hilbert, *Über das Unendliche*, 1926.

La question de l'infini intervient dans l'histoire des mathématiques comme un élément à la fois perturbateur et moteur. Au cours d'une longue histoire, les mathématiciens rencontrent l'infini, essayant de l'éviter ou osant l'affronter. Depuis les géomètres grecs qui ne veulent pas faire usage de l'infini dans leurs démonstrations, parce que, comme l'écrit Proclus, "l'infini est insaisissable par la connaissance scientifique", jusqu'aux mathématiciens qui considéreront, comme H. Weyl, que " les mathématiques sont la science de l'infini", la lutte pour saisir l'infini est longue et passionnante. Les difficultés et les obstacles sont souvent mal repérés dans nos classes de collèges et de lycées, mais la question de l'infini rarement explicitée est parfois là, tapie dans nos salles de cours.

Les Actes du 9ème colloque inter-IREM proposent quelques moments de l'histoire de l'infini, ou plutôt des infinis, tant il faudra de temps pour appréhender toutes les facettes du monstre que l'on croit enfin maîtrisé. Nombre, continu, grandeur, dérivée ou intégrale, algorithme, géométrie perspective ou géométrie du hasard : comment éviter de penser l'infini ? comment ne pas vouloir l'éclairer ?

Tous les articles de ces Actes sont autant d'invitations à une réflexion sur l'infini, réflexion nécessaire à celui qui enseigne les mathématiques. Nous avons choisi de les regrouper autour de quelques grandes problématiques historiques.

Après la contribution de Tony Levy qui, avec sa perspective générale, constitue un excellent préambule pour le lecteur, les deux suivantes concernent le cosmos : celui "sans fin et sans arrêt" de Théon de Smyrne et celui infini de Giordano Bruno.

La partie suivante concerne la composition du continu. L'idée de continu est étroitement liée à celle de l'infini, qu'on considère le continu comme infiniment divisible ou composé d'indivisible. Les paradoxes de Zénon et "la découverte" de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré marquent les premières confrontations du mathématicien avec le continu géométrique. Un des enjeux historiques de l'étude du continu est le statut du nombre, depuis les livres des grandeurs d'Euclide jusqu'aux nombres réels de Cantor. Un autre enjeu est l'usage d'un infini actuel en mathématique. Cinq articles examinent les manières dont ont été pensées les relations entre point et droite, entre nombre, grandeur et continu, et établies les distinctions entre infini potentiel et infini actuel.

Les calculs d'aires et de volumes constituent l'un des problèmes qui va amener les mathématiciens à oser travailler avec l'infini. Si Eudoxe se passe de l'infini pour calculer le volume de la pyramide, les géomètres du 17ème siècle en font usage pour leurs calculs de quadratures et de cubatures. Ce sont ainsi de nouvelles pratiques auxquelles le mathématicien se risque. L'intrépidité de Grégoire de Saint Vincent, ou celle de Wallis, nous laisse toujours admiratifs. Leurs pratiques de l'infini préparent le terrain pour l'invention, à la fin du 17ème siècle, du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz.

Avec Leibniz, voici les longues démonstrations géométriques par l'absurde des Anciens remplacées par des algorithmes de calcul rapides et directs. Voici enfin une méthode générale permettant de traiter toutes les courbes et leurs problèmes. Mais pour cela il faut considérer qu'une courbe est constituée d'une infinité de droites infiniment petites. L'infini aurait-il enfin droit de cité chez les mathématiciens? La justification des infiniment petits, qui sont à la base du calcul infinitésimal, sera l'une des préoccupations des mathématiciens et des enseignants des deux siècles suivants. Trois articles retracent ici leurs explications. Les promoteurs de l'analyse non-standard ont trouvé un regain d'intérêt pour ces infinitésimaux qu'ils voient, à tort ou à raison, comme des prémisses de leur théorie.

L'analyse consacre l'usage de l'infini en mathématique, et de son bon usage dépend la rigueur car les intuitions sont parfois trompeuses. Comment cela se traduit-il dans un enseignement qui se voudrait à la fois intuitif et rigoureux ? Jean-Pierre Friedelmeyer examine cette question en faisant appel à l'histoire. Il montre que le nœud des difficultés se situe entre une intuition qui repose sur un continu géométrique et une rigueur qui gère uniquement le continu numérique. Patrick Perrin propose dans l'article suivant d'enseigner la tangente (géométrique) avant la dérivation (numérique).

Aujourd'hui, pendant le cours d'analyse, un lycéen sort volontiers la calculatrice de son cartable, et certainement pas la règle et le compas. Mais la calculatrice ne peut pas programmer l'infini et son comportement est souvent étrange. L'usage des calculatrices peut -il entraîner la mort de l'infini dans l'enseignement ?

Ces Actes abordent avec la géométrie projective et le calcul des probabilités d'autres problématiques mathématiques concernant l'infini. D'autres moments historiques auraient certainement mérité de prendre place dans des actes consacrés à l'histoire des infinis. Le but de cet ouvrage, tout comme celui du colloque, n'était pas de viser une exhaustivité, mais de faire naître un intérêt chez le lecteur ou le participant, et de faire connaître les travaux historiques des IREM. Ces Instituts organisent tous les deux ans un colloque sur un thème historique : on peut parier que dans les années à venir le thème sera de nouveau à l'honneur.

Nous remercions les intervenants nombreux qui nous ont proposé un article. Nous remercions également le directeur de l'IREM, Monsieur Robert Tarrès, et le secrétariat de l'IREM, Madame Hélène Laurans, pour le soin apporté à l'édition de ces Actes. Tout le personnel de l'IREM doit aussi être remercié pour la très bonne organisation des Journées de Landerneau. Ces journées ont laissé à tous un souvenir aussi agréable qu'enrichissant.

Evelyne BARBIN
Responsable de la Commission inter-IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

L'idée d'infini, quelle histoire ...

Tony Lévy
CNRS, Paris

Il semble bien que nous ayons de l'idée d'infini un sentiment (le terme est délibérément vague) qui précède toute mise en forme discursive, ou même simplement réfléchie: si la série des nombres entiers est bien inépuisable, "où" donc les puisons-nous ? En répétant la division en deux d'un segment de droite, épuiserons-nous ce segment jusqu'à rencontrer des "atomes" , ou bien cette division se poursuit-elle sans terme? Si l'univers est clos, qu'y a-t-il "au-delà"? S'il n'a pas de limite, que puis-je en dire ? On pourrait multiplier les registres: notre langue offre, depuis de nombreux siècles, un mot qui traverse l'ensemble de ces questionnements, l'infini.

Mais ce mot, et les commentaires qu'il appelle, s'inscrit dans la finitude du locuteur aussi bien que de la locution; il paraît donc impossible d'enserrer l'objet visé par ce mot dans les mailles d'une définition. Si l'on peut accepter d'appeler "l'idée d'infini", les formes, finies, que revêt notre interrogation, on ne peut esquiver la question: de quoi donc l'idée-d'-infini est-elle idée, quel est son *ideatum* ? Peut-être faut-il s'y résigner: de l'infini, je ne peux avoir **que** une idée[1].

[1] Mon point de vue **philosophique** doit beaucoup à la lecture d'E. Lévinas. Par exemple: "... Mais l'idée d'infini a ceci d'exceptionnel que son *ideatum* dépasse son idée, alors que pour les choses, la coïncidence totale de leurs réalités "objective" et "formelle" n'est pas exclue; de toutes les idées, autres que l'Infini, nous aurions pu, à la rigueur, rendre compte par nous-mêmes. Sans rien décider pour le moment de la véritable signification de la présence en nous des idées des choses, sans adhérer à l'argumentation cartésienne qui *prouve* l'existence séparée de l'Infini par la finitude de l'être ayant une idée de l'infini (...), il importe de souligner que la transcendance de l'Infini par rapport au moi qui en est séparé et qui le pense, mesure si l'on peut dire, son infinitude même. La distance qui sépare *ideatum* et idée, constitue ici le contenu de l'*ideatum* même. L'infini est le propre d'un être transcendant en tant que transcendant, l'infini est l'absolument autre. Le transcendant est le seul *ideatum* dont il ne peut y avoir qu'une idée en nous; il est infiniment éloigné de son idée - c'est-à-dire extérieur - parce qu'il est infini. (in *Totalité et infini* , The Hague (1984), pp. 19 - 20).

On peut évidemment refuser de souscrire à l'évidence du constat, et l'on sait combien la formulation d'un point de départ oriente l'ensemble d'une analyse. Mais mon propos, ici, n'est pas essentiellement philosophique, et j'entends souligner aussitôt la diversité des horizons spéculatifs qui ont tenté d'organiser le "sentiment" décrit plus haut en intuition fondatrice; citons en vrac les noms d'Anaximandre, Aristote, Proclus, Descartes, Leibniz, Spinoza ou Pascal. Il est clair que le déploiement de cette intuition conduit à des développements souvent très différents et à des conclusions parfois antagoniques.

Mais, tenons-nous un moment en suspens, dans ce lieu incertain et troublant, qui se dissout dès qu'on tente d'en préciser les contours, dans l'espace de cette question: comment **dire** ce qui nous déborde absolument? quel sens y-a-t-il à tenter de désigner ce qui défie la désignation, ou du moins ne peut jamais se réduire à celle-ci? Une deuxième évidence, non moins troublante, s'impose alors: quelque vaine qu'apparaisse notre tentative, nous ne pouvons nous y soustraire; la question nous taraude, nous sollicite, nous pousse à forcer le silence de l'indicible. Toutes les formes d'expression élaborées, discursives ou non (poésie), langagières ou non (peinture ou musique), se sourcent à ce silence étourdissant, au désir d'y frayer un chemin.

La mathématique n'y déroge pas: elle aussi, elle tisse sa toile en rôdant autour de l'idée d'infini; dans des formes d'expression qui lui sont propres, et qui ont évolué historiquement. Quiconque a un peu "fait des mathématiques" en conviendra: un des traits les plus forts de ce mode d'expression singulier, c'est qu'il y a de la preuve **et** il y a de l'infini. C'est peut-être même dans cette conjonction que la mathématique manifeste son rapport spécifique à l'idée d'infini, au point qu'on a pu dire que "les mathématiques sont la science de l'infini"[2]. Voire! La preuve mettant en jeu l'infini est-elle autre chose qu'une métaphore? L'infini a-t-il quoi que ce soit de compatible avec les contraintes qui régissent l'exercice de la preuve?

Longtemps habité par ces questions, j'ai tenté, pour ma part, à travers l'enquête historique, de mieux en saisir l'unité . Partant d'une réflexion sur certains aspects de l'oeuvre de G. Cantor (les rapports entre sa mathématique du transfini et ses interrogations philosophique et religieuse), j'ai été conduit à étudier des textes anciens (antiques et

---

[2] H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft , Munich (1976), p. 89.

médiévaux), relevant de diverses cultures (grecque, hellénistique, latine, arabo-musulmane, juive). J'y ai retrouvé des échos d'interrogations toujours actuelles. Mais ces textes, de plus, offraient un intérêt particulier pour le type d'investigation adopté: ils marient plusieurs registres de discours, lesquels se croisent, se répondent ou s'opposent selon les cas: mathématiques, physique (ou système du monde), philosophie, cosmologie, métaphysique ou théologie. On y discute de l'ordre du monde, de son mouvement, de ses origines, de l'existence de Dieu et de la hiérarchie des anges, **en même temps que** de la nature du nombre et de la grandeur, des rapports entre le discret et le continu, entre le tout et ses parties. Il arrive ainsi parfois que mathématique et théologie, traitant de l'infini, soient tellement imbriquées qu'on ne puisse plus repérer les frontières respectives de ces disciplines, et qu'on se dise: au fond, sur la question de l'infini, mathématique et théologie, malgré les apparences, ne sont pas vraiment étrangères l'une à l'autre.

Il m'est apparu que l'idée d'infini gagnait en intelligibilité quand on la saisissait aux croisements de ces divers discours, ou plutôt dans les tensions spéculatives suscitées par leur affrontement, ou simplement leur confrontation. Quant au discours mathématique, son horizon **historique** devient complètement opaque, si on ne le rapporte à cet entrelacs. Toutefois, il est indiscutable que c'est en s'affranchissant progressivement de toute contrainte extérieure à son champ propre que la mathématique a acquis cette assurance et cette fécondité qui en fascinent plus d'un: les développements du calcul infinitésimal aux XVII et XVIIIe siècles en témoignent. Comment dépasser cette apparente contradiction? En poursuivant l'enquête historique d'une part, et en précisant l'analyse philosophique d'autre part[3].

Je me propose d'évoquer ici trois séquences historiques relatives aux débats sur l'infini, lesquelles impliquent, à des degrés divers, le traitement mathématique de l'infini. Malgré la brièveté de l'exposé, je

---

[3] Au cours de ce colloque, on a souvent évoqué la difficulté, pour le professeur, de "traiter de l'infini" en classe: l'analyse d'une procédure mathématique (par exemple, la somme d'une série) dissout l'aspect philosophique; et le commentaire philosophique apparaît comme étranger à la technicité calculatoire. La difficulté est réelle, mais il me semble qu'on peut l'affronter: si on mène de pair l'analyse de la procédure et le commentaire philosophique (en se demandant, par exemple, à chaque étape, si on parle de la même "chose"), il arrive un moment où on peut effectivement dire "les mots nous manquent", ou bien "la technique ne nous offre qu'une métaphore"; nous avons alors là l'indice le plus sûr qu'il est bien "question" d'infini. L'expérience peut être fructeuse, si on compare la "convergence" de la série géométrique des puissances de 1/2 et la "divergence" de la série harmonique.

souhaite valider cette conclusion quelque peu provocante: le discours mathématique ne peut revendiquer aucun savoir positif qui aurait pour objet l'idée d'infini; mieux, le fonctionnement de ce discours, aujourd'hui, exclut, en droit, toute explicitation de l'idée d'infini. Pour autant, l'idée d'infini n'en est pas moins un ressort essentiel de la fécondité du travail mathématique: dans les formes qui lui sont propres, le mathématicien nous fait entendre son désir obsédant de ... finitiser l'infini.

Aristote: l'infini n'est qu'inachèvement, pure virtualité enveloppée par le fini.

Les efforts théoriques d'Aristote s'enracinaient dans un questionnement sur la structure du monde. Les thèses fondatrices de sa physique - on le sait - ont dominé, des siècles durant, le discours à vocation scientifique: c'est parce que "la nature est principe de mouvement", que le mouvement relève du continu, que le continu est divisible "à l'infini", que se pose la question de l'infini. Sans être la seule, la conception aristotélicienne de l'infini a constitué l'horizon de tous les débats jusqu'à la Renaissance. Ses principales conclusions sont les suivantes:

- l'infini ne peut être une totalité, corporelle ou incorporelle: il n'y a pas d'infini "en acte", grandeur, nombre ou substance. En particulier, le monde, comme grandeur physique est fini, clos par la "dernière" des sphères célestes.

- l'infini existe toutefois selon un autre mode d'être, inférieur et subordonné à l'être en acte: il existe "en puissance", pure virtualité, s'exprimant dans cette possibilité pour une grandeur continue (ligne, surface, corps, temps) quelconque d'être toujours divisible en grandeurs continues, sans qu'aucun terme ne vienne mettre fin à cette division.

- le nombre des divisions d'une grandeur est donc seulement infini "en puissance": quel que soit ce nombre, on peut toujours l'augmenter, puisqu'on peut poursuivre la division. Il ne saurait toutefois exister un nombre maximum, un nombre infini en acte.

Dans cette conception, l'infini est irréductiblement opposé au fini, lequel est associé à la forme, la perfection, la totalité, l'un. L'infini

sera donc perçu et défini[4] comme inachèvement, imperfection, multiplicité. Le mathématicien y trouvera son compte, pour une bonne part au moins.

Considérons par exemple un segment d'une longueur-unité, divisons-le en deux , divisons à nouveau en deux la moitié située à droite et poursuivons ainsi l'opération. On remarquera tout de suite que la somme des longueurs de ces sous-segments reste inférieure à l'unité, la différence étant ici facilement mesurable: elle est égale à la longueur du dernier sous-segment produit; cette différence diminue à mesure qu'on augmente le nombre des divisions. Jusque là, rien que de très élémentaire. Et si l'on continuait? Dans la mesure où le segment, fini, apparaît divisé à l'infini, on peut dire, avec Aristote, que les additions successives des sous-segments produits par la dichotomie tendent à recomposer le segment initial, sans toutefois jamais y arriver complètement, puisqu'il y aura toujours un reste. Le mathématicien d'aujourd'hui, grâce à la notion de limite mathématique acquise au XIXe siècle, utilise de manière réglée l'écriture suivante: $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$ etc ..... $= 1$. L égalité en tant que telle n'aurait évidemment aucun sens pour Aristote, puisqu'un reste sépare toujours le segment initial de la somme des sous-segments, aussi loin que l'on poursuive la division; ses efforts théoriques ont toutefois balisé la voie.

Soulignons la force de cette conception d'Aristote, quels qu'en soient ses points fragiles: tout en étant déchu de la dignité ontologique qui s'attache à l'être fini ou l'être en acte, l'infini est **pensé**; il est rapporté au fini qui l'enveloppe et le fonde selon le modèle même de la division du segment. On pourrait résumer ce point de vue par une formule: l'infini est une image dégradée, fragmentée, du fini, dont il autorise une approximation toujours déficiente.

Les critiques les plus vives que rencontrera le point de vue aristotélicien concernent l'éternité du monde, ou pour être plus précis, la thèse selon laquelle le mouvement des sphères célestes n'a ni commencement, ni fin. Les partisans de la création du monde par un acte divin s'ingénieront, non sans succès, à mettre en évidence les paradoxes, donc les impasses, auxquels conduirait la thèse de l'éternité du monde.

---

[4] C'est ce en dehors de quoi on peut toujours prendre quelque chose de nouveau, du point de vue de la quantité.

Le chrétien d'Alexandrie, Jean Philopon, dit le Grammairien (VIe siècle), est à l'origine de plusieurs arguments dont la fortune fut considérable dans les traditions grecque, arabe, hébraïque et latine. Si le monde était sans commencement, écrira-t-il, le nombre des hommes engendrés jusqu'à Socrate serait infini; en y ajoutant le nombre des hommes engendrés depuis Socrate jusqu'à aujourd'hui, on obtiendrait "quelque chose plus grand que l'infini", ce qui est proprement absurde. Autre argument, autre paradoxe énoncé par Philopon: quand le soleil accomplit une révolution, la lune en accomplit douze; en supposant le monde sans commencement, il faudrait conclure qu'un infini peut être douze fois plus grand qu'un autre infini!

Certains théologiens musulmans opposeront aux philosophes partisans de l'éternité un argument qui fera aussi fortune dans les débats médiévaux: supposons le monde sans commencement, alors le nombre des âmes séparées des corps après la mort, qui sont, elles, éternelles, constituerait un nombre infini en acte, contrairement à ce que postule Aristote. Il n'y a donc aucune espèce d'infini, concluront ces théologiens, et le monde n'existe que par un acte souverain de Dieu.

C'est pourtant un partisan de l'épistémologie aristotélicienne, Proclus de Lycie (Ve siècle), qui va développer une pénétrante analyse des relations entre mathématiques (géométrie euclidienne) et infini en acte!

Proclus : l'infini, même inconnaissable, est, pour le géomètre, un instrument de connaissance du fini.

C'est en commentant le Livre I des *Eléments* d'Euclide que Proclus rencontre l'unique occurrence d'une "droite infinie", et non pas simplement "prolongée à l'infini". Le contexte en est la proposition 12: "Mener une ligne droite perpendiculaire à une droite infinie donnée à partir d'un point donné qui n'est pas sur celle-ci".

Si la droite n'est pas infinie en acte, mais simplement prolongeable autant que nécessaire (propriété légitimée par le postulat 2 du Livre I), alors le cas de figure suivant pourrait se présenter: un point "hors" de la droite (en fait, du segment) mais situé dans le prolongement droit de celle-ci. Dès lors, le problème n'aurait plus de solution universelle. Voilà pourquoi, selon Proclus, Euclide a posé la ligne droite "comme infinie". Mais alors que penser de l'interdit aristotélicien de tout infini en acte ? Proclus répond en ces termes:

Que dans les choses sensibles, il n'y a aucune grandeur infiniment étendue dans quelque direction que ce soit, cela a été suffisamment établi par le divin Aristote et par ceux qui ont bâti leur philosophie à partir de lui (...). Il n'est pas plus possible qu'un infini de cette sorte existe dans les idées séparées et indivisibles; car il n'y a en elles ni étendue ni grandeur: il peut difficilement y avoir grandeur infinie.

Il demeure donc que l'infini n'existe que dans l'imagination, et seulement sans que l'imagination connaisse l'infini. Car lorsqu'elle connaît, elle assigne en même temps à l'objet de sa connaissance forme et limite; et sa connaissance met fin au mouvement à travers l'objet imaginé; elle le parcourt et le circonscrit. L'infini n'est donc pas l'objet d'une imagination cognitive mais d'une imagination qui est incertaine au regard de cet objet , qui suspend toute pensée ultérieure, et appelle infini tout ce qu'elle abandonne, comme non mesurable et non saisissable par la pensée (...).

Mais la compréhension dont procèdent nos idées et démonstrations ne fait pas usage de l'infini en vue d'une connaissance scientifique, car l'infini est entièrement insaisissable par la connaissance scientifique; elle (la compréhension) le considère à titre d'hypothèse et, pour la démonstration, elle fait usage du fini seulement. Elle n'admet donc pas l'infini pour l'infini mais en vue du fini...[5]

Pour évaluer correctement le point de vue de Proclus, il convient de rappeler que sa métaphysique, contrairement à celle d'Aristote, postule l'existence d'un certain infini positif: l'infini "de" puissance, ou l'infini "primordial". Pour Proclus, le *logos* mathématique (et les objets qu'il vise) est gouverné, sur un plan d'être plus profond, par un *logos* universel, vers lequel il faut se tourner pour comprendre le rapport entre l'imagination (mathématique) et l'infini. Le géomètre

---

5 Texte grec : *Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii* , éd. Friedlein, Leipzig (1873), p. 158. Sur les rapports entre mathématique et métaphysique chez Proclus, on consultera avec grand profit: S. Breton, *Philosophie et mathématiques* , Paris (Beauchesne), 1969; ainsi que A. Charles-Saget, *L'architecture du divin. Mathématique et philosophie chez Plotin et Proclus* , Paris (Belles Lettres), 1982.

puise dans son imagination, "à titre d'hypothèse", et en vue du fini, un infini dont la nature échappe à la connaissance scientifique. Mais si l'imagination est "incertaine" au regard de l'infini, qu'elle manifeste pourtant "par sa puissance impartageable de procéder sans fin", c'est qu'elle ne peut se hisser à la dignité ontologique de l'intellection, de l'acte contemplatif pur qui, lui, saisit l'infini comme indivision et simplicité extrême[6]. La tension existant ici entre mathématique et métaphysique n'est pas sans rappeler, dans un tout autre contexte, certains développements de Cantor.

Georg Cantor (1845-1918): une hiérarchie infinie de nombres infinis.

A la suite d'Aristote, nombreux sont ceux qui opposeront totalité et infini. A l'appui de cette opposition tenue pour irréductible, on multipliera les paradoxes destinés à disqualifier l'expression même de totalité infinie, grandeur ou nombre. Le type d'argument suivant fut développé à l'envi: si la totalité des nombres entiers pouvait être déclarée infinie, alors il faudrait aussi déclarer infinie la totalité des entiers pairs; mais ces derniers constituent une partie du tout que forment les entiers, et le tout est toujours plus grand que sa partie, on aurait donc un infini plus grand qu'un autre infini; c'est absurde!

Pour les partisans de ce point de vue, longtemps majoritaires dans le monde savant, l'infini n'est qu' un horizon de pensée, une indétermination tenue à distance par le calcul, qui ne saurait, en aucun cas, être elle-même objet d'une démarche opératoire: distinguer des infinis, les comparer, voire les multiplier numériquement, n'aurait strictement aucun sens. Le discours mathématique en serait disqualifié, pour lequel "le tout est toujours plus grand que sa partie".

On connaît toutefois quelques savants antiques ou médiévaux, arabes ou latins, dont l'audace spéculative a tenté de contourner ces obstacles. C'est ainsi qu' à partir du XIIIe siècle, les discussions sur ce thème se développent au sein des scolastiques latins. Paradoxalement, certains dogmes théologiques, destinés à faire barrage à la philosophie, relancent le débat et élargissent le champ de la spéculation: l'infinité divine est devenue un concept positif, la puissance divine est réputée avoir pour seules bornes les exigences de la logique et non celles du système d'Aristote. Quelques savants-théologiens, tels que Thomas Bradwardine ou Nicole Oresme,

[6] J'ai développé plus longuement l'analyse de ce beau texte dans mon ouvrage, *Figures de l'infini* , Paris (Seuil), 1987, pp. 73-78.

affirment la possibilité d'un espace infini, habité par l'immensité divine. D'autres, tels que Guillaume d'Ockam ou Grégoire de Rimini, tentent de transformer l'usage des notions du tout et de ses parties, afin de rendre possible la comparaison d'un tout infini et d'une partie infinie. Même si elles contribuent à éclairer certains problèmes mathématiques, ces tentatives restent surtout marquées par leur caractère philosophique et théologique.

C'est au mathématicien Georg Cantor, au XIXe siècle, qu'il reviendra de proposer le pari le plus ambitieux de l'histoire mathématique. Féru des débats philosophiques anciens, et habité par des préoccupations religieuses, Cantor pense pouvoir unifier métaphysique de l'infini et mathématique de l'infini, grâce à sa théorie des "ensembles transfinis".

Récusant l'interdit aristotélicien contre l'infini en acte, Cantor distingue l'infini absolu, divin, qui ne peut être que reconnu, et les divers degrés du transfini qui sont connaissables, parce que mathématiquement maîtrisables. Pour lui, un nombre infini, mieux un ensemble infini, peut être considéré comme un tout. Renversant l'obstacle dressé par ses devanciers, il définira l'ensemble infini comme pouvant être égal, en un sens précis, à une de ses parties. Etendant les opérations élémentaires de l'arithmétique au transfini, il construit une hiérarchie infinie de nombres transfinis.

Le succès de l'entreprise cantorienne reposait sur sa **cohérence mathématique**. La théorie du transfini suscita des polémiques passionnées au sein de la communauté mathématique: elle imposait de nouvelles idées, de nouveaux défis, et donc de nouveaux territoires théoriques.

Un siècle plus tard, quel bilan peut-on faire du pari de Cantor? Deux questions essentielles commandaient le succès de sa théorie: peut-on assigner un nombre transfini déterminé à tout ensemble? peut-on comparer l'infinité des nombres entiers et l'infinité des points de la droite? La réponse, aujourd'hui, ne laisse pas d'être déroutante: ces questions sont **mathématiquement indécidables** ! Qu'on se rassure, la situation ne trouble pas outre mesure le mathématicien, lequel continue à travailler à partir d'un système d'axiomes qui lui fournit des bonnes raisons de **croire** que l'édifice mathématique est cohérent. L'existence mathématique d'un ensemble infini est désormais "assurée" par un axiome, aussi indémontrable qu' utile!

S'il a la fibre philosophique, le mathématicien s'interrogera, philosophiquement, sur la situation ainsi créée: nous savons calculer

avec de l'infini; pour autant nous ne savons pas ce qu'est un nombre ou un ensemble infinis. Mieux, nous savons désormais que nous ne pouvons pas mathématiquement savoir.

La parole reste au poète:

> *"La terre, ses brouillons de fortune, l'infini, l'indéfini, une impropre souveraineté, l'amour inséparable de ses meurtriers, se consument ensemble et en nous. L'ombre du temps couvre ce secret."* (René Char).

Bibliographie suggérée.

Dauben J. W., *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite* , Cambridge (Mass.) / Londres, Harv. Univ. Press, 1979.

Davidson H. A., *Proofs of Eternity, Creation and the Existence of God in Medieval Islamic and Jewish Philosophy* , New-York / Oxford, Oxf. Univ. Press, 1987.

Kretzmann N. (ed), *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought* , Ithaca / Londres, Cornell Univ. Press, 1982.

Lévy T., *Figures de l'infini. Les mathématiques au miroir des cultures.* Paris (Ed. Seuil), 1987.

Maor, E., *To Infinity and Beyond . A Cultural History of the Infinite* , Boston (Birkhäuser), 1986.

Recueil d'articles édité par Monnoyeur, F. , *Infini des mathématiciens, infini des philosophes* , Paris (Ed. Belin), 1992.

Recueil d'articles intitulé: "Fini et Infini", *Le genre humain* (Ed. Seuil), n° 24-25, 1992.

COMMISSION INTER -IREM
HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

COMOS ET INFINI

Actes du 9ème colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

Quel mouvement hélicoïdal "à l'infini" pour les astres ?

De l'astronomie de Théon de Smyrne : ch. 43.

J. Delattre
IREM de Lille

Nos remerciements vont à notre éminent maître de philosophie J.-P. Dumont, Professeur à l'Université de Lille III. Il avait bien voulu accepter de diriger notre recherche sur le livre d'Astronomie de Théon de Smyrne, et nous avait permis, en particulier, de présenter une première ébauche de ce travail dans le cadre du séminaire de Philosophie Antique ("Catégories de la pensée antique") qu'il organisait depuis de nombreuses années avec la participation de L. Bescond, J. Boulogne, B. Joly, S. Solère et D. Delattre. Notre reconnaissance s'adresse aussi à nos collègues de la Commission Inter-IREM astronomie et à son président C. Dumoulin, Professeur à l'IUFM de Limoges. Avec beaucoup de patience, ils ont su guider nos recherches en astronomie de leurs très savants conseils.

L'entreprise de Théon de Smyrne, auteur grec du début du IIe siècle de notre ère, se présente elle-même comme "un exposé résumé et abrégé (*kephalaiôdè kai syntomon paradosin*) des théorèmes mathématiques nécessaires, et dont on a absolument besoin pour lire Platon, aussi bien les théorèmes arithmétiques, musicaux et géométriques que leur application à la stéréométrie et à l'astronomie".[1] Seuls ont été conservés les livres sur l'Arithmétique, la Musique et l'Astronomie; nous ne nous intéresserons ici qu'au troisième livre, et même, plus précisément, à l'avant-dernier chapitre de celui-ci. En effet, cette page est assez énigmatique, étant donné le contexte à la fois métaphorique et mécanique dans lequel s'y énonce la description du double mouvement hélicoïdal des astres "dits errants", laquelle se réfère en particulier par trois fois à l'infini [*apeiron*].

---

1 *Des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, éd. E. HILLER p. 1.

I - Intérêt historique et épistémologique du texte de Théon.

Si Ptolémée cite quelques observations astronomiques de Théon effectuées dans les années 127 à 130, et si Théon d'Alexandrie l'appelle "le vieux Théon" et cite trois fois son nom comme celui d'un mathématicien, K. V. Fritz, quant à lui, signale (dans son article "Théon" de la *Real Enzyclopaedie*) qu'un buste de lui, trouvé à l'époque de Louis XIV, se trouve au musée du Capitole, dans la salle des philosophes sous le n°25; le style de ce buste correspond sans équivoque à l'époque d'Hadrien (IIe siècle) et comporte une inscription gravée: "Théon, philosophe platonicien, [c'est] le prêtre Théon [qui honore] son père".[2] Sans entrer dans le détail des querelles concernant le fait de savoir si Théon le mathématicien, cité par Ptolémée et Théon d'Alexandrie, et ce Théon philosophe sont une seule et même personne, nous devons néanmoins relever quelques chefs d'accusation importants que les critiques modernes ont formulés à son encontre. Th. H. Martin et O. Neugebauer ont cru relever des contradictions entre certaines mesures proposées par Théon à différents endroits de son oeuvre, et K. V. Fritz de suggérer qu'il n'a peut-être été qu'un dilettante[3] en mathématique et en astronomie, un dilettante pour qui la philosophie était beaucoup plus importante. On peut lire aussi chez I. Thomas que "l'oeuvre de Théon est un curieux méli-mélo contenant peu de réelle valeur pour l'étude de Platon et aucune originalité".[4] Voilà une situation bien peu encourageante pour aborder l'étude de cet auteur !

Pourtant nous ne regrettons pas d'avoir tenté l'aventure, sur le conseil de J.-P. Dumont; en effet voici ce que nous sommes, en l'état actuel de nos recherches, tentée plutôt de dire: *Théon n'est pas un dilettante en mathématiques ni en astronomie, mais un praticien et un technicien confirmé.* Théon n'est pas seulement un spécialiste de philosophie platonicienne, ni non plus seulement un spécialiste de mathématiques et d'astronomie; mais, comme *son projet est d'abord pédagogique*, cela le place nécessairement au carrefour de ces disciplines, et le met surtout dans l'obligation de *dépasser les querelles d'école afin d'expliquer clairement et efficacement le mouvement des astres.* Faisant le pari d'un écrit cohérent et construit, plutôt que d'un "méli-mélo" désordonné, c'est-à-dire, nous comportant par rapport au livre de Théon comme la tradition pythagoricienne recommande aux astronomes de le faire par rapport à l'apparence variée et désordonnée

2 R. E. p. 2067.

3 *Ibidem*, p. 2068.

4 *Greek Mathematical works* II, p. 403: "méli-mélo" traduit "Hotch Potch".

du mouvement des astres, nous avons voulu "*chercher les principes simples et réguliers permettant d'en expliquer le désordre apparent et de rendre compte du vrai mouvement*" de pensée de l'auteur.

Les 44 chapitres du livre s'articulent, selon nous, en sept sections que nous allons énumérer rapidement:

1) Introduction rappelant le principe de sphéricité.

2) Nomenclature et définitions de termes astronomiques fondamentaux.

3) Théories poétiques et musicales tentant de rendre compte de l'ensemble des positions et des mouvements des astres.

4) Le problème scientifique du mouvement des planètes: son enjeu philosophique et épistémologique.

5) Etude mathématique (géométrique) du mouvement du soleil et des planètes.

6) Justification physique: recherche d'un modèle qui ne soit pas seulement mathématique.

7) Perspectives historiques et épistémologiques.

La démarche ne nous paraît pas particulièrement incohérente qui prétend d'abord rappeler le principe premier de la sphéricité, et définir les termes techniques d'astronomie qui seront ensuite employés, puis évoquer le contexte culturel et littéraire du sujet avant d'en circonscrire clairement les limites scientifiques dans les sections 4 à 7. Quant à savoir si ces quatre dernières sections ont une composition logique linéaire ou une composition de type circulaire, plus conforme peut-être à la tradition rhétorique antique, ce n'est pas le lieu ici d'en débattre. Car nous nous proposons, maintenant, de concentrer notre effort sur la compréhension du dernier chapitre avant la conclusion, laquelle n'est en fait qu'une transition avec un autre livre portant sur l'harmonie des sphères, aujourd'hui perdu.

II - Lecture du chapitre 43.

Ce chapitre s'intitule "*Du mouvement en spirale*"; en voici la traduction par J. Dupuis, celui des trois éditeurs de la fin du XIXe siècle qui a proposé la première version française du livre de Théon. Les deux autres éditeurs de notre livre, Th. H. Martin et E. Hiller s'étant consacrés à l'édition du texte sans le traduire.[5]

> *"Les planètes décrivent des spirales par accident, c'est-à-dire en conséquence de leurs deux mouvements en sens*

5 Voir la bibliographie.

contraire l'un de l'autre. En effet, comme elles sont portées par leur propre mouvement du tropique d'été au tropique d'hiver et réciproquement, en allant lentement, et qu'elles sont rapidement entraînées chaque jour en sens contraire sous la sphère des étoiles, elles ne passent pas en droite ligne d'un parallèle à un autre, mais entraînées autour de la sphère des fixes. En d'autres termes, pour aller sur le Zodiaque d'un point A à un autre point B, leur mouvement ne se fait pas seulement suivant une ligne droite du Zodiaque, mais il devient en même temps circulaire autour de la sphère des fixes, de sorte qu'en passant d'un parallèle à un autre, elles décrivent des spirales semblables aux vrilles de la vigne; c'est comme si on enroulait une courroie autour d'un cylindre d'un bout à l'autre: telles étaient les lanières enroulées sur les scytales de Laconie et sur lesquelles les éphores écrivaient leurs dépêches.

Les planètes décrivent encore une autre spirale, mais celle-ci non comme si on la traçait sur un cylindre d'un bout à l'autre, mais comme si on la traçait sur une surface plane. Puisque depuis un temps infini, elles passent d'un cercle parallèle à l'autre et de nouveau de celui-ci au premier, et cela sans interruption et sans fin, si nous supposons des lignes droites, disposées en nombre infini, représentant les cercles parallèles et que les planètes se meuvent sur ces parallèles dans le même sens que la sphère des fixes, tantôt vers le tropique d'hiver, tantôt vers le tropique d'été, elles nous paraîtront décrire une hélice sans fin. A cause du mouvement incessant et continu autour de la sphère sur les cercles parallèles, le chemin parcouru sera semblable à celui qui se ferait suivant les lignes droites étendues à l'infini, comme l'indiquent les figures ci-jointes. Les planètes décrivent donc deux ***spirales* par accident**, *l'une comme autour d'un cylindre, l'autre comme sur une surface plane."*

La lecture de J. Dupuis laisse effectivement une impression de "méli-mélo" qu'il convient d'essayer de dissiper. Nous avons en particulier identifié plusieurs énigmes que nous aimerions démêler prioritairement :

1) La première est d'ordre géométrique et mécanique et résulte de la perte des figures qui accompagnaient le texte. *Pourquoi et comment la course circulaire des astres à travers la zone zodiacale se projette-t-elle en spirale?*

2) La seconde concerne l'histoire des théories astronomiques. Comment cette explication-représentation du mouvement des astres se situe-t-elle par rapport aux grandes polémiques astronomiques qui ont agité l'antiquité: celle du mouvement rétrograde apparent ou réel, et celle du centre de révolution des différents astres, unique (sphères homocentriques) ou multiple (épicycles et excentriques)? Une question subsidiaire pouvant être ici: *"l'autre spirale" correspond-elle à un véritable savoir astronomique ou à une imagination mécanicienne et anticipatrice?*

3) La troisième énigme résulte de la rencontre, deux fois dans ce texte, de l'expression "*kata symbébèkos*" traduite traditionnellement par l'équivalent "*par accident*", et dont nous avons cru découvrir, chez Théon de Smyrne, un emploi technique et répété, chargé de sens géométrique, mécanique ou épistémologique.

4) Enfin, *la référence à l'infini, "apeiron" ou illimité* est loin d'être claire. Nous aurons à la situer dans l'histoire des idées philosophiques et scientifiques. Elle empêche, en tout cas, de ne donner à ce chapitre qu'un référent strictement géométrique et mécanique, et nous rappelle que, dans l'antiquité, l'astronomie était autant l'affaire des poètes et des philosophes...

III - Etude de la lettre du texte.

Nous allons reprendre le texte pas à pas dans une traduction que nous avons tentée, la plus exacte et proche possible du grec.

"Du mouvement hélicoïdal".

*C'est une hélice [*hélica*] que décrivent les astres "par coïncidence" (ou par construction ou combinaison), à cause d'un double mouvement contraire (ou bien parce que sont mus l'un par rapport à l'autre deux mouvements contraires). En effet, selon leur mouvement [*kinèsin*] propre, d'un tropique à l'autre ils sont portés et reviennent, de ce fait, lentement ils tournent [*périionta*]; mais rapidement entraînés à tourner dans le sens contraire par la sphère des fixes, ils avancent [*poreuétai*] non pas en ligne droite d'un parallèle à l'autre, mais entraînés en tournant [*périagoména*] autour de la sphère fixe.*

*Pour précisément se déplacer [*chôrèsè*] en suivant le Zodiaque d'un point A à un point B, leur mouvement [*phora*] ne se produisant pas seulement selon la ligne droite du*

Zodiaque, mais aussi en cercle autour de la sphère fixe, ils décrivent (pluriel) une hélice dans le passage (ou la double route: diodos*) d'un parallèle à l'autre, (hélice) semblable à la vrille de la vigne; comme quand on enroule une lanière autour d'un cylindre d'une extrémité à l'autre, de la même manière que, autour des scytales lacédémoniennes, les éphores écrivaient leurs lettres en enroulant des lanières.*

*Mais les astres décrivent encore une autre hélice, non seulement comme autour d'un cylindre, d'une extrémité à l'autre, mais aussi comme dans un plan. En effet, puisque éternellement [*di'aiônos*] ils se déplacent [*chôrousi*] d'un parallèle à l'autre, et à nouveau de celui-ci vers le même, et que cela se produit de leur fait, sans interruption et sans fin [*adialeiptôs kai apaustôs*],* ***nous concevrons*** *que les parallèles sont des droites tendues à l'infini [*ép'apeiron ekteinoménas*], et, les astres avançant [*poreuoména*] entre eux dans le même sens, tantôt sur la route d'hiver, tantôt sur celle d'été, jusqu'à l'infini [*méchris apeirou*]* ***nous pourrons découvrir*** *qu'ils décrivent une hélice.*

*Et, étant donné le caractère sans fin et éternel [*apauston kai aiônon*] de l'avance [*poréia*] autour de la sphère entre les parallèles, la route qui est la leur est semblable à la route entre des droites tendues à l'infini [*ép'apeiron ekteinoménôn*], comme le montrent les figures ci-dessous. En sorte que ce sont deux hélices qu'ils décrivent "par coïncidence" (ou bien construction ou combinaison), l'une comme autour d'un cylindre, l'autre comme dans un plan."*

Nous avons préféré traduire "hélica" par "hélice" plutôt que par "spirale" après avoir quelque peu hésité; en effet, si la courbe décrite "comme autour d'un cylindre" est sans conteste une hélice, pour la courbe décrite dans le plan, la chose est moins claire, et peut-être devons-nous supposer que les figures que nous avons perdues représentaient effectivement des spirales. Néanmoins, si nous tentons de projeter géométriquement dans un plan, en déroulant en quelque sorte la surface sphérique de la zone zodiacale, la courbe lentement décrite par les astres allant et revenant d'un tropique à l'autre, c'est *une sinusoïde* que nous obtiendrons, mais pas une spirale, ni non plus une hélice.

On peut aussi imaginer que la projection dans un plan se fait parallèlement au plan de l'équateur. Dans ce cas, la course hélicoïdale

rapide de l'astre donnera une hypocycloïde assez facilement représentable[6]; quant à la course lente de l'astre, elle ne pourra, à son tour, donner qu'une autre hypocycloïde de période beaucoup plus longue, et il en sera ainsi d'ailleurs, que les tropiques se projettent selon des cercles, ou qu'on entreprenne de les dérouler selon des droites parallèles comme le conseille Théon. Savoir si ce type de courbe est plus proche de ce que nous désignons par "hélice", ou de ce que nous nommons aujourd'hui "spirale", nous a paru difficile. Aussi avons-nous préféré "coller au grec" en traduisant "*hélica*" par hélice".

L'image du support d'écriture des éphores lacédémoniens enroulé autour des scytales ne pose pas de problème particulier de traduction. Par contre, elle occupe dans le chapitre une place charnière importante qui lui donne une *fonction symbolique intéressante à analyser*. En effet, cette comparaison suggère que la progression linéaire horizontale de l'écriture n'est déchiffrable que lorsque les spires (ou lanières) sont correctement juxtaposées sur un cylindre de la dimension requise. On peut aussi bien dire que le message écrit devient visible et lisible à la fois, dès lors que leur enroulement régulier fait qu'on ne voit plus les spires des lanières. A supposer qu'on ait affaire à une écriture cursive, celle-ci est elle-même le résultat d'une combinaison régulière des mouvements rapides du stylet en cercle et en ligne droite, et de son mouvement lent d'avancée horizontale; or, la lisibilité du message a pour condition une autre combinaison de mouvements en cercle et en ligne droite: l'enroulement régulier de la lanière autour du cylindre, cette autre "hélice" ayant pour caractéristique de ne plus être visible dès qu'on s'intéresse au seul sens du message!

Nous avions d'abord voulu *interpréter l'analogie avec le mouvement des astres* sur le mode platonicien du visible et de l'intelligible, spirales (ou hélices) visibles, et cercles parfaits invisibles; mais elle nous semble à la réflexion contenir une *réversibilité des points de vue visible et invisible qui est plus mécanique que philosophique*: ou bien on voit le résultat d'une combinaison de mouvements, et ce qu'on ne voit pas est la projection géométrique ou la reconstruction de mouvements qu'on a décomposés; ou bien ce qu'on donne à voir est le résultat d'une décomposition de mouvements et ce qu'on ne parvient pas à voir a été engendré par une combinaison de mouvements. Tel nous semble être justement le contexte de l'emploi technique de l'expression "*kata symbébèkos*" par Théon, dont nous avons relevé plus de vingt occurrences caractéristiques, dans le reste de son livre. Nous avons cru, en effet, remarquer que cette expression se

---

6 Cf. les représentations proposées par M. J. CROWE dans *Theories of the world from Antiquity to the Copernician Revolution*, ch. 3, p. 37, 43 et 44.

rencontre avec un **sens "descendant"** pour qualifier la combinaison de deux mouvements premiers, simples, réguliers mais contraires (c'est le premier emploi de ce chapitre), dont la résultante correspond au mouvement apparent complexe que nous pouvons observer; mais on peut aussi l'utiliser en un **sens "remontant"**, en quelque sorte, pour qualifier la reconstruction géométrique abstraite d'un mouvement observable apparemment simple (comme la révolution synodique), mais dont la projection dans un temps éternel entraîne une complexité insoupçonnée.

L'insistance sur l'éternité du mouvement, son caractère "sans fin et sans arrêt", *et la représentation des droites "tendues à l'infini" pour mieux le* ***concevoir*** et le ***découvrir*** constituent sans aucun doute l'aspect le plus énigmatique de ce chapitre. Nous avons fait le pari qu'un éclairage géométrique, astronomique et mécanique de la question n'en diminuerait pas, loin de là, la portée philosophique et épistémologique.

Car c'est bien par une opération intellectuelle, avec l'aide de la géométrie et de la mécanique, que doivent s'opérer la **découverte** et la **conception** du mouvement éternel, "tendu" ou projeté "à l'infini".

Et s'il s'agissait du mouvement même de la pensée? Vis sans fin de la noèse cosmique, halètement cyclique du vivant éternel...

IV - L'énigme géométrique et mécanique

En fait ce qu'il s'agit de comprendre, c'est pourquoi la course circulaire des astres selon le cercle zodiacal se projette selon une "hélice", et non pas aussi selon une droite comme les cercles des tropiques. A cela plusieurs raisons:

a) **une raison astronomique et géométrique**: tous les cercles n'ont pas le même statut. Ceux des tropiques sont par convention des lignes de construction fixes, celui suivi par les astres errants à travers le Zodiaque est décrit par un mouvement de révolution que l'on s'efforce moins de projeter, que de se représenter. Or, il ne peut pas se produire en ligne droite, même s'il peut le paraître dans le déplacement du point A au point B, parce qu'il est sans fin et éternel. Dans la pensée grecque, en effet, *le "sans fin" et l'éternel "tournent rond"* [en kyklô][7] ; aussi, le développement dans le plan, du cercle oblique décrit par les astres errants et tangent aux deux cercles parallèles des tropiques, ne peut-il être qu'une série de spires! En voici une autre raison :

---

[7] Cf. la démonstration d'Aristote dans le traité *Du Ciel*, I 2.

b) **une raison mécanique**: avancer en tournant régulièrement entre des limites parallèles est un mouvement mécanique bien connu des techniciens, celui de la vis hélicoïdale. Les spires jusqu'à l'infini proposées par Théon sont pensées, semble-t-il, sur le modèle de la vis sans fin d'Archimède. Un article américain intitulé *"Sur l'hélice dans l'astronomie de Platon"*[8] a déjà émis l'hypothèse que le terme "*apiénai*" rencontré dans le *Timée* de Platon, et qu'on trouve dans ce chapitre sous la forme "*périionta*", avait un sens technique lié aux opérations de filetage, et renvoyait à l'écartement ou au pas de vis. Nous l'avons nous-même rencontré dans un autre passage du livre de Théon où cette interprétation paraît très plausible. Il s'agit du chapitre 18 où, après la description du mouvement varié des planètes (station, rétrogradation, avance et retard), Théon revient sur le déplacement en arrière[9], en disant que, selon Platon, ce changement se fait réellement [*ontôs*] **selon le mouvement propre de la planète qui "retourne" [*apiontos*] vers l'Orient**.

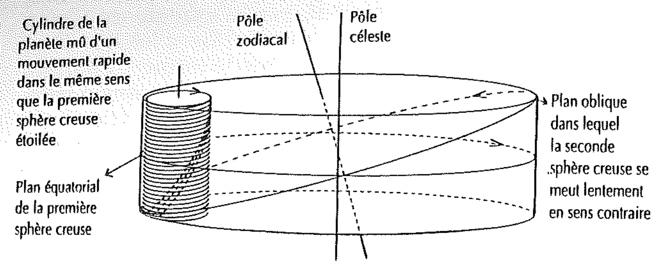
Il paraîtra évident qu'avec un tel modèle en tête, on ne parvienne à concevoir qu'*une représentation du mouvement lent des astres et non pas une projection à strictement parler scientifique*, géométrique ou bien géographique, (ce dont le IIe siècle grec fut par ailleurs capable, la lecture de Ptolémée nous le montre). A moins d'imaginer, comme l'a suggéré l'un des participants au groupe-atelier du Colloque IREM de Brest (Mai 1992) dont ceci est le compte rendu, un dispositif mécanique simple, constitué du grand cylindre de la zone zodiacale, à la surface intérieure duquel se déplacent un ou plusieurs cylindres tournant sur eux-mêmes, en même temps qu'ils sont entraînés par le grand cylindre. Cela correspondrait assez bien aux tambours, cylindres et roues dentées que Théon décrit en parlant des "sphéropées mécaniques"[10]; aussi avons-nous essayé, depuis cette suggestion, de préciser comment un tel dispositif mécanique devait permettre d'inscrire sur les cylindres planétaires le double mouvement hélicoïdal dont parle Théon. Voici le schéma auquel nous avons abouti et que nous avons présenté au congrès HPM de Toronto (août 1992).

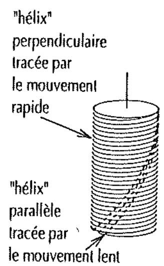
---

[8] Cf. R. and E. VON ERHARD, "The helix in Plato's Astronomy" in *Isis* vol. XXXIV 2 n°94 pp. 108 à 110.

[9] Cf. éd. E. HILLER, p. 147.

[10] Cf. éd. E. HILLER, p. 180 l. 18-22. "Comme dans les sphéropées mécaniques, ce qu'on appelle tambour se mouvant d'un mouvement propre autour de son centre par l'ajustement des dents en sens contraire, meut et retarde ce qui est placé sous lui ou à son contact."





Reste à comprendre pourtant dans quel plan est décrite la seconde hélice, car ce dispositif mécanique l'inscrit aussi sur un cylindre. S'agit-il simplement de la surface développée du même cylindre? Ne faut-il pas plutôt considérer qu'il s'agit d'*une véritable projection de l'hélice dans le plan équatorial,* laquelle du fait du mouvement régulier du cylindre sur lui-même produit les "hypocycloïdes" dont nous avons parlé plus haut? La perte des figures qui accompagnaient le texte de Théon ne nous permet pas d'en décider. Néanmoins, une figure plane assez complexe accompagne le passage sur les sphéropées mécaniques que nous venons de citer; et, comme Théon insiste sur l'utilité de suivre cette figure pour comprendre la suite de son traité, car "elle nous semble nécessaire pour les sphéropées"[11], on peut penser qu'il était d'usage dans l'antiquité, de représenter par de telle figures planes, dans le plan équatorial, les sphères ou les tambours zodiacaux représentant en volume les positions et les mouvements relatifs des astres. D'où l'expression: "comme dans un plan".

V - L'énigme d'histoire des théories astronomiques

Le livre de Théon nous a semblé se faire l'écho de *deux polémiques croisées*: la première concerne le mouvement réel ou apparent de *retour en arrière des planètes* mettant en lice l'opinion de Platon et celle d'Adraste, maître aristotélicien semble-t-il (à moins que

[11] Cf. éd. E. HILLER p. 181 l. 9-11.

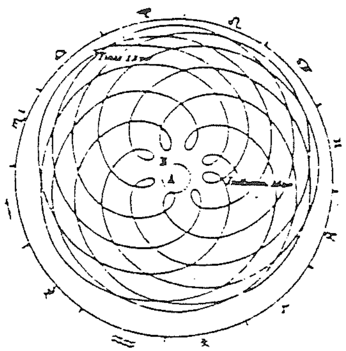
nous ne parvenions à démontrer qu'il fut plutôt stoïcien) de Théon. La seconde porte sur le système de représentation du mouvement relatif des astres par rapport à la terre, et oppose Aristote et les tenants des *sphères homocentriques,* Eudoxe l'Académicien et Callippe, aux astronomes mathématiciens comme Hipparque et Ptolémée concevant des *cercles excentriques et épicycles* pour rendre compte des anomalies et irrégularités observables.

L'explication de l'irrégularité [*anômalia*] des mouvements solaire, lunaire et planétaires est donnée par Platon à la p. 39 du *Timée.* Elle résulte, dit-il, uniquement de l'obliquité de l'axe planétaire et des différences de position de taille et de rang des astres, dans la combinaison du mouvement "dans le même sens" entraîné par la sphère des fixes, et du mouvement "en sens contraire" propre aux planètes, et tout aussi régulier, uniforme et circulaire que le premier. Or voici ce qu'il écrit: "Leur course oblique suivant le mouvement de l'Autre, le mouvement du Même la précédait et la dominait..." ajoutant un peu plus loin, "en effet, le mouvement du Même entraînait en spirale tous les cercles, et ainsi les mouvements étaient doubles et de sens contraire..."[12]. Cette page doit à son tour s'interpréter en fonction de la page 36 c-d où le démiurge, après avoir recourbé en cercles les deux branches du "*chi*" du mélange initial savamment dosé, construit un cercle intérieur se mouvant de manière identique, mais oriente le premier, celui du Même, "selon le côté d'un parallélogramme" de la gauche vers la droite, et le second celui de l'Autre, "selon la diagonale du même parallélogramme", mais de la droite vers la gauche... Il est clair que *l'entraînement en spirale de tous les cercles est un mouvement différent de chacune des deux composantes.* Il en est la **résultante mécanique** ; qu'on imagine l'écartement des spires ou le "pas" des hélices décrites par les orbites planétaires avançant perpendiculairement à l'équateur, comme l'enroulement irrégulier des vrilles de la vigne, selon l'image de Théon, ou comme le bobinage du fil sur les fuseaux, dans la vision d'Er le Pamphilien au livre X de la *République,* texte précisément que Théon a choisi de citer en entier dans la section 3 de son livre, il s'agit bien de se représenter des mouvements hélicoïdaux continuels, de période, vitesse et sens différents. La poésie de la vision ne doit surtout pas en dissimuler la précision mécanique!

Or *une tradition stoïcienne ancienne,* s'inscrivant, semble-t-il, *dans la filiation d'Anaxagore et de Démocrite* qui repoussaient l'existence du "mouvement contraire", attribue à Cléanthe (IIIe siècle avant J. C.) l'hypothèse selon laquelle "le Soleil se mouvait dans sa

[12] *Timée* 39a, trad,. A. Rivaud.

sphère suivant une spirale comprise entre les deux tropiques"[13]. Et on trouve, par exemple, chez Diogène Laërce,[14] "le Soleil a une course oblique au long du cercle du Zodiaque; de même aussi la Lune (a une course) hélicoïdale [*hélikoeidè*]," dans un contexte où c'est, cette fois, Posidonius, le grand savant astronome et géographe stoïcien (IIe - Ier siècles avant J. C.), qui est cité. Il n'est pas inutile de signaler ici l'intérêt que Képler a pu porter à de telles théories; par exemple, dans la première partie des *Commentaires sur les mouvements de la planète Mars*, où il concède, dans l'hypothèse, commune à Tycho-Brahé et à Ptolémée, du déplacement du Soleil à travers le Zodiaque et de l'immobilité de la Terre, que les astres décrivent bien des spirales [*esse re vera spirales*][15] ; et de joindre une représentation des déplacements en spirales de Mars de l'an 1580 à l'an 1596!



Sans doute ces courses en spirale ou en hélice ont-elles aussi à voir avec l'*hippopède* d'Eudoxe[16], à propos de laquelle I. Thomas écrit: "Dans toute l'histoire de la science, il y a peu d'hypothèses qui portent aussi immanquablement la marque du génie".[17] Cette courbe en forme d' "entrave à chevaux" a, comme l'écrit Neugebauer, "été complètement oubliée pendant le Moyen-Age, et ne fut pleinement redécouverte qu'en 1874 grâce au travail de Schiaparelli"[18]. "En particulier, ajoute-t-il, ce fut Schiaparelli qui le premier détermina *le caractère mathématique de l'"hippopède"* (i. e. entrave de cheval) selon l'appellation que les Anciens donnaient à la courbe sur laquelle la planète accomplit son cycle synodique."

---

13 Voir P. DUHEM, *Système du monde*, tome II, p. 157

14 Cf. *Vies, Doctrines et sentences des philosophes illustres* VII 144 (trad. R. GENAILLE, p. 99).

15 *De Motibus Stellae Martis*, ch. I p. 173 de l'édition latine des oeuvres complètes de Képler.

16 Cf. Simplicius, *Commentaire au traité Du Ciel d'Aristote*, (II 12, 293a 4) éd. HEIBERG, pp. 496, 23 - 497. 5. Voir T. L. HEATH, *Greek Astronomy*, pp. 65-70.

17 Cf. *Greek Mathematical Works* I, p. 411 note b.

18 Voir O. NEUGEBAUER, *A History of Ancient Astronomy*, part II p.677. Voir aussi G. SCHIAPARELLI, *Le Sfere omocentriche di Eudosso, di Callippo e di Aristotele*, Milan 1875.

Ce qu'il nous intéresse surtout de noter à ce propos, c'est le "caractère mathématique" de cette *courbe en huit, décrite sur la sphère et due au mouvement contraire de deux sphères homocentriques*. Il est important de bien comprendre que de telles hypothèses n'étaient pas simplement le fruit d'une imagination poétique ou philosophique, mais qu'elles devaient sans aucun doute correspondre à un corpus de savoirs et de savoir-faire astronomiques et mécaniques à la fois, dont la plus grande partie a été, dès la fin de l'Antiquité, détruite ou perdue.[19] Nous voudrions insister aussi sur le fait que les Stoïciens semblent avoir joué un rôle non négligeable de relais dans la transmission de ces savoirs de géométrie physique ou mécanique, liés en particulier aux sphéropées, comme l'a fort justement montré G. Aujac en traduisant l'*Introduction aux phénomènes* de Géminus.[20]

Enfin, il convient de préciser, et ceci sans doute est étroitement lié à la tradition des sphéropées mécaniques, le sens du *différent entre les tenants de l'homocentricité et les partisans des excentriques et des épicycles.*

La lecture critique et scrupuleuse d'un passage des *Commentaires* d'Hipparque (IIe siècle avant J. C.) aux *Phénomènes* d'Aratos (IIIe siècle avant J. C.) a permis à A. Szabo et E. Maula[21] de conclure à l'existence d'un savoir "allant de soi" dès l'époque d'Hipparque, concernant des calculs que nous ne connaissons nous-mêmes directement que par les tables de cordes et les références de C. Ptolémée (IIe siècle après J. C.) à son illustre prédécesseur; en particulier, à propos de l'équivalence de la mesure angulaire obtenue pour l' "*enklima tou kosmou*", courbure du ciel ou latitude géographique du lieu, et l' "*exarma tou polou*", hauteur du pôle au même lieu, il paraît évident que des connaissances mathématiques, géométriques et trigonométriques étaient indispensables pour mettre en rapport les deux méthodes de détermination, par la durée du jour le plus long, et par la mesure de l'ombre du gnomon dans le cadran courbe ou "*skaphè*". C'est ainsi en effet qu'Hipparque est amené à remettre en cause une mesure erronée d'Aratos et Eudoxe, concernant le rapport du jour le plus court au jour le plus long en Grèce.[22]

---

19 Cf. par exemple l'analyse des raisons de la "stagnation" technologique chez les Grecs par B. GILLES in *Les mécaniciens Grecs, la naissance de la technologie*, Paris 1980.

20 Voir la longue introduction et les notes qui accompagnent cette traduction dans la coll. Budé, Paris 1975.

21 Cf. *Les Débuts de l'astronomie, de la géographie et de la trigonométrie chez les Grecs*, Athènes 1982; trad. FEDERSPIEL, Paris 1986.

22 Voir *De Arati codice Hipparcheo*, in E. MAASS, *Aratea*, 12ème cahier des *Philologische Untersuchungen*, Berlin 1892.

Or précisément, Hipparque et Ptolémée ont été les champions des épicycles et des excentriques, alors qu'Eudoxe, Callippe et Aristote, comme nous le rappelle Théon de Smyrne considéraient eux que, "d'un point de vue physique" (*physikôs*), la seule hypothèse admissible était celle de l'homocentricité. Sinon, pourquoi en effet, Théon reprocherait-il à Hipparque, par manque de connaissance suffisante de la science naturelle (*physiologia*) de ne pas avoir "exactement su quel est le mouvement en accord avec la nature (*kata physin*) et de ce fait vrai (*alèthès phora*), et quel est le mouvement s'accordant par coïncidence" et apparent (*kata symbébèkos kai phainoménè*)?[23] Que peut bien signifier un tel "accord par coïncidence" opposé à l'accord, si important pour les Anciens, avec la nature, conformité recherchée, en effet, avec constance par toute la science et la philosophie grecques, qu'il s'agisse d'écoles aussi rivales que les Stoïciens et les Epicuriens!

Deux textes d'Aristote nous semblent intéressants à rapprocher de ces considérations. Tout d'abord, dans le traité *Du Ciel*, il écrit: "rien n'empêche, pensent-ils [il s'agit des Pythagoriciens], que *l'accord avec les phénomènes*, bien que nous ne résidions pas au centre, se fasse de la même façon que si la [surface de la] Terre était au centre même, [et non pas distante de tout un hémisphère]".[24] L'expression "*ta phainoména symbainein*" est traduite par Th. H. Martin par "accord avec les phénomènes", car nous dit-il[25] , Aristote n'emploie pas l'expression habituelle chez les autres auteurs : "sauver les phénomènes", (*ta phainoména sôzein)*. Ensuite, quelques pages plus loin, il recherche vers quel centre les corps pesants se dirigent selon la nature [*kata physin*]. Nécessairement cela doit être vers le centre de l'Univers. Mais voici ce qu'il ajoute: "Or il se trouve [*symbébèke*] que le même endroit est à la fois centre de la Terre et de l'Univers; s'ils se dirigent [il s'agit des corps pesants] vers le centre de la Terre, c'est par coïncidence [*kata symbébèkos*], du fait que la Terre a son milieu au centre de l'Univers".[26] La traduction traditionnelle de l'expression "*kata symbébèkos*" par l'équivalent "par accident", nous semble difficile ici, dans la mesure où le fait que le centre de la Terre soit situé au centre de l'Univers n'est justement pas fortuit; c'est en tant que corps pesant elle-même qu'elle s'y trouve! Par contre, c'est, après tout, un sens qu'Aristote lui-même a signalé en concluant le fameux chapitre 30 du livre Δ de la *Métaphysique* où il étudie le concept d' "accident" [*symbébèkos*],

23 Cf. éd. E. HILLER, p. 189.
24 *Du Ciel* II 293 b 27
25 Cf. Th. H. MARTIN, "*Mémoire sur l'histoire des hypothèses astronomiques chez les Grecs et les Romains*", 1ère partie, ch. V, par. 4, in *Mémoires de l'Institut*, Académie des Inscriptions et Belles Lettres, tome XXX, 2ème partie.
26 Cf. *Du Ciel* II 296 a 15-17.

prenant lui-même l'exemple géométrique du triangle dont la somme des angles est égale à deux angles droits. Cette propriété du triangle bien qu'étant essentielle ne lui est pas consubstantielle, et pourtant *elle s'accorde ou coïncide avec sa définition d'une manière nécessaire et éternelle*[27] . On voit bien, pour le centre de la Terre, qu'il serait plus juste de parler de coïncidence, au sens géométrique d'un exact recouvrement, ou bien même peut-être au sens logique de la rencontre ou de la convergence de deux registres de connaissance différents : la loi naturelle de la chute des corps pesants, et la localisation astronomique du centre des astres par rapport à celui de l'Univers.

Nous sommes ainsi amenés à faire deux remarques à la lecture de ces textes d'Aristote :
a) l'étude de l'énigme d'histoire de l'astronomie soulevée par les deux spirales de Théon nous a subrepticement entraînés à lever légèrement le voile sur le mystère des multiples répétitions de l'expression "*kata symbébèkos*" dans les sections 4 à 7 du livre de Théon. Evitons de nous demander si ce glissement s'est fait naturellement ou bien par coïncidence ou convergence logique !
b) Toutefois, dans le reproche fait à Hipparque par Théon, l'opposition de l'accord selon la nature et de l'accord selon la coïncidence pose un réel problème d'interprétation. Ou bien, comme il s'agit du mouvement vrai et du mouvement apparent, on se situe d'emblée dans la problématique platonicienne de la *République*, et le mouvement apparent en spirale n'est pas digne d'intérêt scientifique, il ne convient de s'intéresser qu'aux mouvements géométriques invisibles et fondamentaux, de translation et de rotation pour les astres. Ou bien on tient compte de la recommandation pédagogique de Platon dans le *Timée*, et l'on cherche à construire des maquettes et des dispositifs mécaniques pour "montrer" ces mouvements de translation et de rotation invisibles, et pour les faire comprendre aux non initiés; et alors on découvre que sur le cylindre s'inscrit une spirale... puis encore une autre spirale "comme dans un plan"! *Le mouvement des astres* selon ces deux trajectoires *est décrit "par coïncidence (combinaison ou construction)"*. L'apparence ou la trace du mouvement est hélicoïdale; quant au mouvement lui-même, nous ne pouvons pas le voir directement, sauf "par coïncidence construite" dans les sphéropées lesquelles nous mettent justement en situation de démiurges par rapport au monde, et nous permettent de comprendre comment se "déroulent" (ou bien se dédoublent ou se décomposent?) les doubles déplacements, circulaire rapide du Nord au Sud et vice versa, et circulaire lent de l'Est à l'Ouest et vice versa. Voilà de quelle manière Théon prétend

27 Voir la traduction récente et le commentaire de M. P. DUMINIL et A. JAULIN, P. U. Toulouse-le Mirail, 1991.

qu'Hipparque aurait dû étudier plus à fond ou plus méthodiquement [*éphôdiasthai*] le mouvement vrai "*kata physin*", et le mouvement apparent "*kata symbébèkos*".

VI - L'énigme philosophique de la référence à l'infini

Il pourrait être utile, pour commenter la référence à l'"apeiron" par Théon, de relire la définition que, dans la *Physique*, Aristote nous a conservée: définition par Zénon de l'illimité [*apeiron*] rapporté à la longueur et au temps, et plus généralement à tout ce qui est continu[28]. Car c'est une belle occasion pour le père de la dialectique de "parler double", en distinguant l'infini selon la division (en puissance), et l'infini selon les extrémités (en quantité ou en acte). Le Stagyrite nous rapporte aussi les cinq conditions d'où procède, selon Anaximandre, la croyance en l'illimité.[29] Mais nous renvoyons, pour l'étude originale et approfondie de ces fragments, à la communication que J.-P. Dumont, leur traducteur dans la bibliothèque de la Pléiade, a consenti pour les Actes du Colloque Inter IREM de Brest 1992.[30]

D'autre part, il nous a semblé plus important, pour l'interprétation du chapitre de Théon, de recourir à des auteurs néo-platoniciens plus tardifs auxquels, après tout, le projet d'aider à la lecture de Platon l'apparentait sans grande difficulté. Gardant d'abord le fil directeur de l'expression "*kata symbébèkos*", nous avons découvert que Plotin l'employait assez rarement pour que l'étude de ces occurrences soit significative. Or, voici ce qu'il écrit au troisième livre de la VIe Ennéade :

> *"Il ne faut pas prendre les choses en mouvement pour le mouvement lui-même: la marche ce n'est pas les pieds, c'est un acte qui est dans les pieds, acte dérivé d'une puissance. Mais comme cette puissance est invisible, on ne peut voir que les pieds en action; ils ne sont pas les pieds sans plus comme s'ils étaient immobiles; ils ont autre chose avec eux; cette autre chose est invisible en elle-même; mais comme elle est avec les pieds, elle est visible* ***par accident,*** *parce que l'on voit les pieds occuper, sans repos, un lieu toujours différent."*[31]

28 Cf. *Les Présocratiques*, Zénon A XXV = Aristote, *Phys*. VI ii 223a 21.
29 Cf. *Les Présocratiques*, Anaximandre A XV = Aristote, *Phys*. III iv 203b 6.
30 Voir communication chapître 2 du présent ouvrage : *"L'infini paradoxal de Zénon d'Elée, la dialectique de l'espace et du nombre"*.
31 Plotin, *Ennéades* VI 3 23, p. 154 dans l'édition Budé, trad. BREHIER.

Il est tentant de maintenir ici la traduction aristotélicienne traditionnelle: *par accident*; pourtant, l'idée que la puissance de se mouvoir "coïncide" ou s'ajuste exactement avec les pieds, en eux-mêmes immobiles, dans le mouvement considéré comme naturel de la marche, mérite d'être examinée. Comparée un peu plus loin à "un souffle s'exhalant sur le mobile", la force motrice (*dynamis tou kinein*) est "ce qui pousse les pieds et les fait changer de lieu". Si on ne la voit pas dans les pieds, il faut bien qu'elle y soit néanmoins partout répandue pour que toutes les parties des pieds se déplacent en même temps, d'où cette notion d'ajustage ou de coïncidence exacte point par point, notion plus mécanique ou géométrique que philosophique, convenons en. Et l'expression "les pieds se mettent en mouvement", ne devrait, de fait, rien perdre en signification si on l'inversait en "le mouvement se met en les pieds", car mécaniquement ou géométriquement l'ajustage est réversible.

Suivant toujours notre fil directeur, nous lisons au quatrième livre de l'*Ennéade* VI:

> *"Et comment admettre qu'une âme, qu'on dit indivisible et inétendue, soit partout, si, réellement, elle est inétendue? Si l'on dit qu'elle s'étend avec le corps, bien qu'elle ne soit pas un corps, ce n'est pas un moyen d'échapper à la difficulté; on lui attribue l'étendue* ***par accident ;*** *mais on pourra encore demander avec raison comment elle devient étendue* ***par accident****. L'âme n'est pas comme une qualité, par exemple la douceur ou la couleur, qui appartient à un corps entier; car ce sont là des affections du corps; le corps affecté possède tout entier son affection; laquelle n'est rien en elle-même..."*[32]

La réalité de l'âme étant d'un autre ordre, sa rencontre avec le corps est problématique: *l'idée d'une propriété essentielle mais non consubstantielle* telle qu'Aristote lui-même l'a émise à propos du triangle et de la somme de ses angles, ne nous paraît pas aussi déplacée [*atopos*] qu'elle n'en a l'air. En effet, l'âme possède bien l'éternité dont ce type de "propriété" est susceptible. Il est d'autre part intéressant de rappeler le souffle exhalé à quoi était comparée la "force motrice", dans la marche évoquée plus haut. Mais comme le débordement généreux de l'âme vers la matière n'exclut pas, en même temps, son audace extrême à se hausser jusqu'à l'abstraite discursivité de l'esprit, lisons quelques pages plus loin ce qu'il en advient:

32 *Ibidem*, VI 4 1 p. 176.

"L'être universel n'est pas présent intégralement, même s'il confère une de ses puissances à une chose; il n'y a pas de coupure entre lui et sa puissance; et la chose qui a reçu cette puissance, n'a pu la recevoir que parce que l'être lui était présent tout entier... Et pourtant il est séparé; car s'il devenait la forme d'une chose particulière, il cesserait d'être l'être universel et d'être partout en lui-même; il serait, ***par accident****, l'être d'une autre chose* [comprenons qu'il coïnciderait avec elle au point de se confondre avec son être]. *Comme il n'appartient à aucune d'elles, et comme les choses aspirent à lui appartenir, il s'approche autant qu'il est possible, de celles qu'il veut; mais il ne devient pas plus l'être de l'une que l'être de l'autre, et il reste l'objet de leurs désirs. (...) C'est un rapport de même nature que l'on trouve, peut-être non sans raison [ouk atopon isôs], entre l'âme et le corps:* ***rapport de sympathie accidentelle****,* [to kata symbébèkos houtô legein sympathein] *où l'âme, comme on dit, reste en elle-même, sans se donner à la matière ni au corps, tandis que le corps tout entier reste illuminé par elle en chacune de ses parties."*[33]

Nous pourrions aussi traduire : "*C'est pourquoi, dire de même que l'âme pâtit par coïncidence (ou en coïncidant) avec le corps n'est peut-être pas absurde*". En effet, l'âme se perd en s'incarnant et se confond avec l'être du corps, n'étaient les occasions d'activités verbales et intellectuelles pour lui rappeler son désir de l'être universel.

Mais tout cela ne nous éloigne qu'en apparence des préoccupations du professeur d'astronomie. En effet, les textes précédents trouvent selon nous un écho dans la célèbre description de l'action de la science mathématique, que Proclus brosse dans la première partie du *Prologue* au *Commentaire des Eléments d'Euclide*. Relisons rapidement la page :

"La science mathématique commence, au contraire, du dehors par la réminiscence, finit intérieurement dans des raisonnements, s'élève de choses moins importantes et arrive jusqu'à l'essence première des formes. ***Son opération n'est pas immobile*** *comme celle qui est intellectuelle;* ***elle se déroule dans un mouvement*** *qui n'est ni local ni modificatif à la manière des sens, mais* ***vivifiant*** *et qui parcourt l'arrangement des rapports incorporels,* ***tantôt en***

33 *Ibidem*, VI 4 3 p. 180.

s'avançant des principes aux résultats, tantôt en cheminant en sens contraire"...[34]

Le mouvement en question, correspondant à la mobilité et la réversibilité de la pensée s'exerçant aux mathématiques, est d'une autre espèce que les mouvements extérieurs des corps, il est "conçu dans l'imagination", comme l'explique Proclus lui-même, juste avant de commenter le troisième Postulat[35], à propos duquel il écrit ceci:

"Le troisième postulat nous enseigne la manière dont les choses qui progressent reviennent de nouveau à leurs propres principes; car la révolution de ce qui est mû autour de ce qui est fixe imite le retour circulaire en engendrant un cercle. Il importe toutefois de savoir ***qu'il n'appartient pas à toutes les lignes d'être prolongées à l'infini;*** *car cela n'appartient pas à la ligne circulaire ni à la figure cissoïde ni, en général, aux lignes qui décrivent des figures, ni même à celles qui ne forment pas de figures,* ***puisque la spirale monostrophe ne se prolonge pas à l'infini,*** *- car elle a sa disposition comprise entre deux points, - ni à aucune des autres lignes engendrées de cette façon."*

Ce qui nous ramène abruptement au mystère de la spirale" comme dans un plan" de Théon.

Au terme de l'étude des différentes énigmes que nous avions cru repérer en relisant soigneusement le chapitre 43 du livre sur l'Astronomie de Théon de Smyrne, il s'est donc avéré que la dimension mécanique et géométrique de ce passage n'en limitait aucunement la portée philosophique. Sur le plan épistémologique, nous nous trouvons devant un essai d'appréhension conceptuelle du mouvement complexe et non apparent des astres. Mais en même temps nous ne pouvons négliger la double référence à la *République* et au *Timée* de Platon, c'est-à-dire, la portée métaphysique, scientifique et en même temps symbolique, du message de Théon. C'est de l'âme du monde qu'il est question ici, dans les multiples "coïncidences", combinaisons ou décompositions de mouvements, montantes ou descendantes selon la "double route" [*diodos*], route d'hiver et route d'été, trace hélicoïdale des astres à l'infini; c'est de l'âme de l'homme dont il s'agit dans les multiples "coïncidences", combinaisons ou décompositions de

34 Proclus,*Commentaire aux Eléments d'Euclide*, trad. P. VER EECKE, pp. 14-15.
35 Cf. trad. VER EECKE, p. 164.

mouvements, que le géomètre et le mécanicien s'ingénient à agencer dans leurs démonstrations et dans leurs sphéropées.

BIBLIOGRAPHIE

- Aristote, *Du Ciel*, trad. MORAUX P., Paris 1965.
- AUJAC G., Introduction, texte et notes de *L'Introduction aux Phénomènes* de Géminus, coll. Budé, Paris 1975.
- CROWE M. J., *Theories of the world from Antiquity to the Copernician Revolution*, New York 1990.
- Diogène Laërce, *Vies, Doctrines et sentences des philosophes illustres* VII, trad. R. Genaille, Paris 1965.
- DUHEM P., *Système du monde*, tome II, Paris 1914, 1974.
- DUMINIL M. P. - JAULIN A., texte, traduction et commentaire de Aristote, *Métaphysique* Δ, P. U. Toulouse-le Mirail, 1991.
- DUMONT J.-P., "L'infini paradoxal de Zénon d'Elée. La dialectique de l'espace et du nombre" in *Actes du colloque Inter-IREM de Brest 1992*.
- GILLES B., *Les mécaniciens Grecs, la naissance de la technologie*, Paris 1980.
- HEATH T. L., *Greek Astronomy*, Londres 1932, New York 1991.
- Hipparque, *De Arati codice Hipparcheo*, in E. MAASS, *Aratea*, 12ème cahier des *Philologische Untersuchungen*, Berlin 1892.
- Képler J., *Opera omnia, De Motibus Stellae Martis I*,, éd. FRISCH C., Francfort 1858.
- MARTIN Th. H., "Mémoire sur l'histoire des hypothèses astronomiques chez les Grecs et les Romains", 1ère partie, ch. V, par. 4, in *Mémoires de l'Institut*, Académie de Inscriptions et Belles Lettres, tome XXX, 2ème partie.
- NEUGEBAUER O., *A History of Ancient Astronomy*, part II, Berlin-Heidelberg-New York 1975.
- Platon, *Timée*, trad. Rivaud A., Paris 1963.
- Plotin, *Ennéades* VI 1ère partie 3 23; VI 4 1 et 4 3, trad. BREHIER, Paris 1936, 1983.
- *Présocratiques (Les)*, Zénon A XXV; Anaximandre A XV, trad. DUMONT J-P, Paris 1988.
- Proclus, *Commentaire aux Eléments d'Euclide*, trad. VER EECKE P., rééd. IREM de Lille 1990.
- SCHIAPARELLI G., *Le Sfere omocentriche di Eudosso, di Callippo e di Aristotele*, Milan 1875.
- Simplicius, *Commentaire au traité "Du Ciel" d'Aristote*, (II 12, 293a 4) éd. Heiberg, Berlin 1894.
- SZABO A.-MAULA E., *Les Débuts de l'astronomie, de la géographie et de la trigonométrie chez les Grecs*, Athènes 1982; trad. Federspiel, Paris 1986.
- Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, texte et trad. DUPUIS J., Paris 1892.
- *Theonis Smyrnae Platonici liber de Astronomia*, texte et trad. latine, MARTIN Th. H., Paris 1849.
- *Theonis Smyrnae Philosophi Platonici Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*, éd. HILLER E., Leipzig 1878.
- THOMAS I., *Greek Mathematical works, Londres 1939 ; 1980.*
- VON ERHARD R. and E., "The helix in Plato's Astronomy" in *Isis* vol. XXXIV 2 n°94, pp. 108-110.

La Philosophie de l'infini dans l'oeuvre de Giordano Bruno

Jean Seidengart
Université Paris X-Nanterre

Un destin tragique :

Filippo Bruno naquit en 1548 à Nola, petite ville située à l'est de Naples. C'est vers 1565 que Bruno, entrant au couvent Saint Dominique et prenant l'habit des Frères Prêcheurs, reçut le nom de Giordano qu'il gardera toute sa vie. Cette vie fut des plus troublées tant pour des raisons qui relèvent du contexte historique et intellectuel de l'époque, que pour des motifs propres à la pensée de Bruno. On peut dire que la brève existence de Bruno apparaît comme celle d'un météore entre 1548 et 1600. Après quelques études de littérature classique et de philosophie à l'Université de Naples de 1562 à 1565, Bruno entre comme novice au monastère Saint Dominique de Naples où il prononça en 1566 ses voeux définitifs. Il mena donc, pendant onze ans (de 1565 à 1576), une vie monastique au cours de laquelle il soutint, en 1572 ses thèses de doctorat en théologie et fut ordonné prêtre. De 1576, date de sa fuite définitive du monastère (à la suite deux procès religieux intentés contre lui) à 1592, Giordano Bruno mena une vie errante à travers l'Europe qui connut des fortunes très diverses et très contrastées. En 1579 on retrouve sa trace à Genève où il se convertit au calvinisme. Puis la même année, il passa en France et vint enseigner la **sphère** de Sacrobosco ainsi que le **De anima** d'Aristote à Toulouse. Effrayé par les ravages des guerres de religion, Bruno quitta Toulouse pour monter à Paris en 1582 où il séjourna durant deux années. Il fut chargé de cours au Collège de Cambrai (sur l'emplacement actuel du Collège de France) puis le roi de France, Henri III, fit créer spécialement pour lui une chaire "extraordinaire" à la Sorbonne qui le dispensait d'assister aux offices religieux. En 1584, Bruno accompagna en Angleterre l'ambassadeur du roi de France devenu entre temps son protecteur, Michel de Castelnau, où il rencontra la Reine Élisabeth ainsi que les docteurs de l'université d'Oxford. De retour à Paris en 1586, il entra dans une violente polémique contre les Péripatéticiens dont il consigna plus tard les principaux arguments dans son célèbre **Acrotismus camoeracensis**. En raison des tumultes qui agitaient Paris en 1587, Bruno quitta définitivement la France et erra durant six années à travers les pays germaniques: Wittenberg, Marbourg, Prague, Helmstedt, Zurich et finalement à Francfort où il voulait assister à la publication de ses ouvrages latins à la foire de printemps 1591. C'est à cette époque que le patricien Zuane Mocenigo l'invita dans sa riche demeure de Venise à venir enseigner l'art de la mémoire et la géométrie. C'est pourtant ce même patricien qui le dénonça et le livra à l'Inquisition quelques mois plus tard (le 23 mai 1592). L'année suivante, l'Inquisition romaine réclama son extradition aux autorités vénitiennes qui accueillirent favorablement cette requête. Bruno passa les huit dernières années de sa vie dans les cachots de l'Inquisition. Soumis à d'interminables interrogatoires et supportant la torture avec un courage exceptionnel, il fut condamné à mort le 8 février 1600. La condamnation reconnaissait en Bruno un *"hérétique impénitent, opiniâtre et obstiné"* dont les livres devront être mis à l'Index et les exemplaires encore disponibles *"brûlés sur la Place Saint Pierre de Rome devant les escaliers"*. Un témoin direct de l'époque, Gaspar Schoppius, rapporte que lorsque Bruno eut écouté sans faiblir la sentence de mort, il déclara: *"Peut-être craignez-vous davantage de prononcer cette sentence contre moi, que moi de la subir"*. Le jeudi 17 février 1600 Giordano Bruno, à qui on avait atrocement arraché la langue dans son cachot pour les *"affreuses paroles qu'il avait proférées"*, comme le signale un document horrible de l'époque, fut conduit au *Campo dei Fiori* à Rome et dépouillé de ses vêtements, pour y être brûlé vif. Or, il se trouva que, par une cruelle ironie du destin, le supplice eut lieu le lendemain du mercredi des Cendres.

"L'Académicien de nulle académie" :

Les écrits de Bruno, fort complexes et divers, sont d'une hardiesse et d'une originalité frappantes, mais ils contiennent une profusion de questions dont il n'est guère aisé de saisir l'unité. Totalement incompris de ses contemporains, Bruno est un philosophe dont la pensée a souvent été trahie, travestie voire défigurée. Auteur maudit au XVIIème siècle, comme Mersenne ne manque pas de le rappeler avec des propos indignés, Bruno fut redécouvert par Huygens, Leibniz, Bayle et Diderot quelques générations plus tard. Mais il fallut attendre la fin du XVIIIème siècle, pour que l'oeuvre de Bruno puisse susciter un véritable intérêt chez des philosophes comme Jacobi, Schelling et Hegel. C'est vers le milieu du XIXème siècle, au moment de la montée du positivisme, du scientisme, et des âpres conflits opposant l'Église et l'Etat laïque, que naquit l'image légendaire d'un Bruno, grand savant, martyrisé par l'Église non pas pour ses hérésies religieuses, mais pour sa cosmologie infinitiste et pour sa défense de l'héliocentrisme copernicien. On délaissait à cette époque dans le corpus brunien, tout ce

qui ne rentrait pas dans cette optique. Plus récemment, on a vu fleurir des études d'une remarquable érudition situant l'oeuvre de Bruno dans le contexte très complexe de la Renaissance finissante et restituant un Bruno vivant (Corsano, Guzzo, Firpo, Badaloni). Mme Frances Yates est même parvenue à dissiper de nombreuses obscurités du corpus en les référant à la tradition hermétique véhiculée par les écrits de Marsile Ficin. Ces genres de recherches, aussi précieux qu'ils soient, ont pourtant fini par reléguer au second plan la pensée philosophique de Bruno en la diluant dans les jeux de correspondances symboliques propres à l'hermétisme du **Pimandre** et de **Asclépius**. Certes, l'érudition n'est d'un grand secours (à condition de ne pas en abuser) que dans la stricte mesure où elle permet d'identifier les emprunts que fit Bruno à des doctrines aussi diverses que le pythagorisme, le platonisme, le néo-platonisme, l'averroïsme, le stoïcisme, l'épicurisme, l'hermétisme, l'Art de Lulle, le copernicianisme, etc... Toutefois, il ne faut jamais perdre de vue que ces emprunts ne sont pour Bruno que des moyens de repenser autrement l'Univers, La Nature, Dieu, l'Etre et la substance, la connaissance, l'homme et la société. En incorporant ces divers philosophèmes à sa propre pensée, Bruno a finalement versé du vin nouveau dans de vieilles outres. Par ailleurs, il serait vain de chercher à reconstruire un système philosophique rigoureusement structuré que l'on ne saurait nullement trouver dans le Corpus brunien, à moins de le mutiler gravement et de réécrire entièrement l'oeuvre elle-même. Il convient plutôt de retrouver les intentions originales qui ont animé et organisé les écrits de Bruno, sans les réduire à tel ou tel aspect "*prédominant*". Bruno n'est ni un illuminé, ni un utopiste, ni un occultiste, ni un savant, ni un politique : le Nolain s'est toujours présenté comme un philosophe, tant dans ses écrits que lors des innombrables interrogatoires de l'Inquisition. A cet égard, les documents de l'Inquisition qui ont été publiés (même si les Archives secrètes du Vatican possèdent encore des inédits) sont du plus haut intérêt pour l'exégèse brunienne, car Bruno resta très ferme sur ce point jusqu'au bûcher : *"Le contenu de tous mes livres, en général, dit-il au Grand Inquisiteur de Venise le 2 juin 1592, est un contenu philosophique et [....] j'y ai toujours parlé en philosophe, suivant les principes et la lumière naturelle, sans me préoccuper en particulier de ce que la foi nous commande d'admettre"* . La bouffonnerie ou le burlesque, la verdeur de certains propos rabelaisiens, et même certaines formes d'ésotérisme ne doivent pas égarer le lecteur, car Bruno est toujours resté très attaché à la rationalité dans sa recherche héroïque d'une philosophie de l'infini. Ainsi, les représentations symboliques d'allure hermétique, les images poétiques, et la bouffonnerie croustillante des personnages qui animent les **dialoghi italiani** , ne doivent jamais faire oublier que la révolution intellectuelle, que tenta d'opérer Bruno pour mettre en place une nouvelle conception de l'Univers et pour repenser les rapports de l'infini et du fini, n'est qu'un effort d'unification de la pensée en quête d'une cohérence plus élevée, sans concession aucune à quelque forme d'autorité que ce soit. C'est d'ailleurs cette trop grande confiance dans la puissance de l'argumentation philosophique qui l'a conduit à sa perte en cette époque de Contre-Réforme. Cependant, le courage exemplaire de cet homme libre préférant monter sur le bûcher de l'inquisition plutôt que de trahir sa propre pensée mérite le plus profond respect. Tel Actéon, auquel il aimait si souvent se comparer, l'esprit du Nolain décrit bien en ces quelques vers son propre déchirement:

> *"Ainsi mes pensées, poursuivant une proie divine*
> *Se retournent contre moi,*
> *Et me font périr de leur morsure cruelle"* .

L'infinitisation de l'univers :

Aristote avait fondé son finitisme cosmologique sur des arguments rationnels, mais également en s'appuyant sur les données observationnelles qu'il s'efforçait de ne jamais perdre de vue. Or, c'est précisément cet attachement aux fausses évidences sensibles que dénonce Bruno dans l'ensemble de son oeuvre, non pas en ce sens qu'il répudie les enseignements de la perception, mais que ceux-ci doivent être soumis au jugement de l'intellect pour déjouer les illusions des sens. Bruno écrit: *"C'est à l'intellect <intelletto> qu'il appartient de juger et de rendre compte des choses absentes, que le temps et l'espace éloignent de nous"*. Bruno part du fait que nos sens sont bornés parce qu'ils ne peuvent appréhender que les objets qui sont à leur portée, ce qui restreint considérablement la valeur de leurs informations:

> *"Les sens [....] affichent et confessent leur faiblesse ainsi que leur insuffisance en produisant l'apparence d'un horizon fini, apparence d'ailleurs toujours changeante".*

C'est précisément ce phénomène d'horizon que Bruno analyse en évoquant avec émotion, dans un célèbre passage du **De Immenso et innumerabilibus** (1591), un souvenir d'enfance. Lorsqu'il observait le Vésuve du haut du mont Cicala, près de Nola, ses yeux d'enfant voyaient en lui le bout du Monde: *"Dans mon enfance,* écrit-il, *j'ai cru qu'il* n'y *avait plus rien au-delà du Vésuve, car il m'était impossible d'apercevoir quelque chose au-delà de lui"*. L'horizon semble enclore dans son confinement circulaire le monde perçu, et pourtant chacun de nos déplacements franchit cette limite illusoire qui n'a donc pas

d'existence propre ou absolue. Il n'y a pas d'horizon en soi, mais toujours *pour un observateur :* c'est en quelque sorte le corrélât de la limitation des sens. Le phénomène d'horizon ne cesse d'accompagner les déplacements de l'observateur situant celui-ci immanquablement au centre de sa propre perspective. Ainsi, le confinement circulaire de l'horizon perceptif résulte bien de la projection de la finitude de nos sens, et non pas de la structure de l'Univers. L'expérience du phénomène d'horizon nous procure un double enseignement, car elle nous présente *a la fois la détermination distincte d'une limite et le franchissement de cette limite* suscitant ainsi en nous la pensée d'une "avancée au-delà" que rien ne peut réprimer ou contenir dans sa progression illimitée. Toutefois, cela ne signifie pas que pour Bruno l'idée d'un espace infini soit, en quelque sorte, comme l'aboutissement de cette progression illimitée de la pensée ou de l'imagination qui réitérerait indéfiniment son interrogation sur l'au-delà de la limite.

Au fond de la pensée brunienne, sur ce point les commentateurs sont unanimes, il y a une *intuition de l'infini* qui ne parvient pas à s'expliciter entièrement dans une démonstration en forme. Bruno a l'intuition d'un *Univers infini en acte,* et c'est sur le fond (entendu également comme fondement) de cet infini extensif que se détache ou se découpe, pour lui, le confinement illusoire de l'horizon. Le franchissement de la limite ne fait que révéler l'infini extensif qui le précède ontologiquement et logiquement. Ainsi, Bruno dégagea peu à peu les enseignements de cette expérience perceptive pour les élever, par abstraction, à la dignité d'une technique argumentative. Si l'idée d'une limite ultime et infranchissable est impensable sans contradiction, Bruno s'appuie sur son *impensabilité* à la fois pour incliner ses lecteurs vers l'infinitisme et pour réfuter les arguments finitistes quels qu'ils soient.

On ne saurait dire, cependant, que Bruno suit une simple démarche apagogique tirant parti des seules apories du finitisme, car il entend faire découvrir dans l'intériorité de notre pensée un infini actuel "*infigurable*" (comme dit le **De Immenso**) qui conditionne en fait toute notre connaissance. Bruno a étendu sa réflexion sur les apories de la limitation locale, aux dimensions de la cosmologie en assimilant, semble-t-il, l'oeuvre de Copernic à travers le prisme d'une lecture critique et peu orthodoxe d' *"un tel savant, désigné par les dieux comme une aurore annonçant le retour du Soleil de l'antique et vraie philosophie"*. Le Nolain entend ainsi faire passer ses lecteurs de l'horizon *local* terrestre, à l'idée d'un horizon *global* et, par delà ce dernier, à l'idée d'un *Univers infini.* Certes, Copernic était resté attaché au finitisme cosmologique, même si son système héliocentrique avait agrandi considérablement les dimensions du Monde (ce qu'avaient déjà envisagé Aristarque de Samos et quelques Anciens, mais sans succès). Ce que Bruno retient de l'oeuvre de Copernic, c'est essentiellement sa *réduction de l'illusion géocentrique et géostatique*. Or, Copernic s'était appuyé sur le principe de la relativité optique pour montrer que le mouvement de la Terre est aussi plausible que celui de la sphère des fixes:

> *"Tout mouvement local apparent provient soit du mouvement de la chose vue, soit de celui du spectateur, soit d'un mouvement, inégal bien entendu, des deux. [....]. Si donc quelque mouvement appartenait à la Terre, celui-ci apparaîtrait en toutes choses qui lui sont extérieures, comme si elles étaient entraînées avec la même vitesse, mais en sens contraire".*

Bruno admet comme Copernic le mouvement de la Terre. Toutefois, en arguant de la relativité des apparences observationnelles, il remet en cause l'existence de la Huitième sphère, la sphère des étoiles fixes. Si c'est la Terre qui tourne et non point la "sphère des fixes", cette dernière n'est plus qu'une *illusion* produite par le mouvement de rotation axiale de notre planète. Bruno brise la sphère des fixes que Copernic venait tout juste d'immobiliser. Avec Bruno, le *ciel* disparaît et *l'espace* lui succède. Dès lors surgit immédiatement la question de savoir si cet espace cosmique est fini ou infini:

> *"Dès que nous avons reconnu,* écrit Bruno, *que le mouvement mondain apparent est dû au mouvement diurne réel de notre Terre [....] aucun argument ne nous forcera à accepter l'opinion vulgaire que les étoiles sont équidistantes de nous, qu'elles sont comme clouées et fixées sur la huitième sphère".*

Donc, si Copernic a bien été la cause déclenchante de la réflexion cosmologique de Bruno, il a eu tort, selon le Nolain, de borner sa recherche au seul système solaire. Copernic s'est interrogé, il est vrai, dans son **De revolutionibus orbium coelestium** (1543), sur les dimensions de l'Univers; et il reconnut avec une grande rigueur que si l'on pose le mouvement de la Terre: *"le ciel, par comparaison avec la Terre, est immense <immensum> et offre l'aspect d'une grandeur infinie et, pour l'estimation du sens, la Terre est, par rapport au ciel, ce que le point est au corps et le fini à l'infini"*. Copernic retrouve *l'incommensurabilité* de la Terre par rapport au reste de l'Univers, tout comme Archimède, quoique ce dernier se fût autorisé de la monstruosité de cette conséquence pour récuser l'hypothèse héliocentrique d'Aristarque. Copernic a clairement saisi la difficulté de trancher entre un Univers *fini* ou *infini*, mais il est resté résolument attaché au culte de la sphéricité; c'est ce qui a dû inhiber en lui toute remise en question de

l'existence ou de la non-existence de la sphère des fixes. En ce sens, la philosophie naturelle de Copernic était restée fidèle à la tradition antique, au modèle de Platon-Eudoxe-Aristote et de Ptolémée où la sphéricité du Monde, souverainement enclose dans son invariance géométrique et symbole d'éternité, constituait depuis deux millénaires le paradigme de la perfection. Pour Bruno, en revanche, la réduction de l'illusion géocentrique et géostatique porte non seulement sur le mouvement apparent de la sphère des fixes, mais aussi sur l' *existence même de cette sphère:*

> *"Comme nous avons reconnu le mouvement de la Terre,* écrit Bruno, *nous savons que ces mondes [les étoiles] ne sont pas équidistants du nôtre comme c'est le cas pour un déférent. [...]. Ces mondes ne sont pas comme encastrés dans une seule coupole, notion ridicule que les enfants pourraient avoir, imaginant peut-être que si ces mondes n'étaient pas attachés à cette tribune et surface célestes par quelque bonne colle ou cloués par quelques clous solides, ils nous tomberaient dessus comme une grêle".*

Dès lors, puisqu'il n'y a plus de sphères cristallines emboîtées, comment Bruno peut-il rendre compte de la cause des mouvements des mondes innombrables autour de leurs soleils respectifs ? Le Nolain, rejetant toute causalité transitive et extrinsèque du mouvement invoque l'action de principes internes c'est-à-dire d'âmes motrices inhérentes aux mondes, seuls principes véritablement naturels: *"Les mondes innombrables qu'il (l'Univers infini) contient [....] se meuvent tous grâce à un principe interne, qui est leur âme propre"*. Cette âme motrice est à la fois une sorte d'intellect et un principe vital spontané, "la *tendance naturelle et vivante de chaque être à se perpétuer dans l'être, et à se régénérer"*. Sur ce point, Bruno reste bien un penseur de la Renaissance. L' âme du Monde, dont les âmes particulières ne sont que des diversifications et des modes, est à la fois ce qui assure le dynamisme (la puissance active) et l'harmonie (l'organisation interne) des êtres au sein de l'Univers infini.

Bruno ne se contente pas de critiquer le *"réalisme naïf"* des Péripatéticiens pour réfuter leur finitisme cosmologique: il déploie également une double argumentation contre les apories de la limitation, qui s'inspire de la philosophie naturelle et de la théologie.

La première argumentation, empruntée aux Epicuriens, aussi bien qu'au Cusain, consiste dans l'idée que la limitation du fini implique nécessairement *autre chose* que lui-même, ce qui rend absurde et contradictoire dans les termes la notion de limite *ultime* ou absolue.

L'illustration de cet argument, c'est la main, le bâton, le javelot ou l'épée qui franchit la limite convexe de l'illusoire sphère des fixes :

> *"Si quelqu'un avançait la main aux delà de cette convexité [du Monde], cette main ne serait en aucun lieu de l'espace, et ne serait nulle part ; par conséquent, elle n'aurait plus d'existence. [....]. J'ajoute à ceci qu'aucune intelligence ne saurait concevoir cette affirmation péripatéticienne sans contradiction".*

Cette image est issue d'une longue tradition, comme ne manquent pas de le rappeler Alexandre Koyré et Léon Robin, car on la retrouve chez Archytas, Eudème, Epicure, Lucrèce, Cicéron, etc... Certains y voient même l'illustration de l'axiome d'Eudoxe-Archimède. Ainsi, Bruno montre que l'intellect <*intelletto*> peut dépasser toutes les limitations que perçoivent nos sens finis, et qu'il ne trouve en lui aucune raison déterminante ou contraignante de s'arrêter dans ce dépassement continuel, comme l'indiquent de manière figurée l'image lucrécienne du javelot ou l'image brunienne de l'envol :

> *"C'est donc vers l'air que je déploie mes ailes confiantes, ne craignant nul obstacle, ni de cristal, ni de verre, je fends les cieux, et je m'érige à l'infini".*

En outre, il est vrai que l'étude de la grande comète de 1577 et de celles de 1582 et 1585 par Tycho Brahé, a fourni à Bruno des *arguments observationnels décisifs* (dont il fit longuement état dans son **De immenso et innumerabilibus**) venant confirmer le bien-fondé de ses attaques contre l'existence des sphères cristallines emboîtées, contre la distinction aristotélicienne du monde sublunaire et du monde supralunaire, et enfin contre le dogme traditionnel de l'incorruptibilité des cieux.

L'autre argumentation fait appel à des considérations d'ordre théologique. En effet, Bruno se sent plus conséquent que les théologiens scolastiques qui prétendaient prouver l'existence du Dieu biblique à partir de la contingence du monde clos aristotélicien ! Bruno considère que le Dieu infini de la théologie chrétienne implique nécessairement l'existence d'un Univers infini. En effet, un Dieu infiniment bon et tout-puissant, ne peut que peupler l'espace infini d'une pluralité infinie de mondes :

> *"Comme l'abolition et la non-existence de notre monde représenteraient un mal, ainsi la non existence d'autres mondes innombrables ne serait pas un bien".*

C'est précisément ce genre d'argument que Lovejoy appelle *"le principe de plénitude"*. Bruno renverse son propre argument pour montrer les conséquences impies que présente une cosmologie finitiste: *"Donc, qui nie l'effet infini, nie la puissance infinie"*. C'est encore avec cet argument inversé que Bruno tentera de se justifier devant le tribunal de l'Inquisition de Venise le 2 juin 1592:

> *"Je jugeai chose indigne de la bonté et de la puissance divine, si elle pouvait produire une infinité de mondes, qu'elle pût se contenter de produire un seul monde fini".*

Pour Bruno, en Dieu tout est en acte, donc il n'est rien de possible qui ne passe à l'existence, contrairement aux êtres finis mondains en lesquels la potentialité est distincte de l'actualité. Bruno prend comme allant de soi sa propre conception de la nature divine et de l'exercice de sa toute-puissance: *"Il ne s'ensuit aucun inconvénient,* écrit-il, *voire au contraire: c'est tout ce qui convient à la science, aux lois et à la foi"*. C'est là une chose peu compréhensible surtout de la part d'un religieux, ordonné prêtre et docteur en théologie; d'ailleurs, quelques jours avant le bûcher, il croyait qu'il était encore possible de convaincre l'Inquisition romaine et plus certainement même le Pape Clément VIII en arguant dans ce sens.

Bruno est allé de la relativité des apparences observationnelles à l'Univers infini. Mais corrélativement, l'infinitisation de l'Univers entraîne la *relativisation* des termes qui étaient considérés comme absolument opposés dans la perspective péripatéticienne; on assiste à une subversion des valeurs et des oppositions établies dans le **Traité du ciel** d'Aristote. Ce qui était auparavant considéré comme *global, total, absolu et unique* chez Aristote, devient chez Bruno: *local, partiel, relatif et multiple*. Dans un Univers infini, tous les points de l'espace sont équivalents: il n'existe ni lieux privilégiés, ni directions absolues, ni de qualités absolues. Les couples d'opposés (haut / bas; centre / périphérie; droite / gauche; avant / arrière; lourd / léger, repos / mouvement, etc.) deviennent soit arbitraires, soit proprement relatifs, c'est-à-dire valables seulement pour un système de référence déterminé. En outre, cette relativisation s'accompagne d'une *homogénéisation* de l'espace, contrairement à la théorie aristotélicienne du lieu ; elle fait de l'espace un contenant physique, tridimensionnel et continu qui contient indifféremment tous les corps, comme le dit le **De Immenso** : *"Est ergo spatium, quantitas quaedam continua physica triplici dimensione constans"*. En ce sens précis, il appert nettement que Bruno liquide les restes d'aristotélisme qui pouvaient hanter encore le système de Copernic, mais cette liquidation ne se fait pas au nom d'une science mathématique de la nature comme le laissaient entendre de nombreux interprètes à la fin du XIXème siècle. Même si Bruno possédait quelques connaissances mathématiques, comme en témoignent ses

Praelectiones Geometricae et l'**Ars deformationum** récemment redécouverts et publiés par G. Aquilecchia en 1964, il n'était en ce domaine qu'un amateur. En fait, Bruno a toujours reproché aux mathématiques de n'avoir aucune prise véritable sur la réalité physique, et de se contenter de sauver les apparences, car: "A *quoi bon* dit-il, *ajouter les cercles aux cercles, les orbes aux orbes, si ce n'est pour suivre la vérité géométrique et pour soumettre non pas ta sottise a la Nature, mais l'ordre de la Nature a tes symétries ?"*.De ce point de vue, Bruno ne préfigure nullement l'oeuvre de Galilée!

De l'infinité cosmique à l'infinité divine :

Cette refonte du concept d'Univers déplace tous les concepts métaphysiques et théologiques traditionnels, tout en instaurant une nouvelle conception des rapports entre Dieu et l'Univers. Bruno risque de sombrer dans l'aporie traditionnelle de deux infinis qui menacent de venir se limiter mutuellement, attendu que Dieu et l'Univers sont infinis.

Ce problème s'était déjà posé au Cardinal Nicolas de Cues qui avait introduit non seulement des distinctions nouvelles entre les différents ordres d'infinité (Complicatio/explicatio), mais il avait affirmé clairement la *transcendance* du Dieu infini par rapport à sa création qui n'est infinie que *privativement,* c'est-à-dire quantitativement (pluralité infiniment finie). Dieu est l'unité infiniment infinie *(négativement* pour notre intellect fini), c'est-à-dire qualitativement. Chez le Cusain, à cela s'ajoute qu'entre l'infinité négativement infinie de Dieu et l'Univers privativement infini, intervient la médiation du *Christ.* D'ailleurs, dans les textes postérieurs à la **Docte Ignorance** (1440), comme l'**Apologie de la Docte Ignorance** (1449), cette tendance transcendantiste se renforce et se confirme, puisque: *"Dieu est au-delà même de la coïncidence des opposés".*

Rien de tel chez Bruno qui emploie pourtant sur ce point certains des termes du Cusain, mais en leur donnant un tout autre sens. Dès ses premiers ouvrages en langue vulgaire, Bruno n'a cessé de clamer l'infinité de l'Univers et l'infinie pluralité des mondes. On a souvent remarqué que ce thème de l'infini est en quelque sorte le problème personnel de Bruno, le thème central de toute sa philosophie. Toutefois, Bruno est également le théoricien de l'infinité divine. Est-ce à dire que Bruno attribue l'infinité de manière équivoque à Dieu et à l'Univers ?

Tout d'abord, Bruno prend grand soin d'éviter de sombrer dans les paradoxes traditionnels de l'infini, dont certains avaient été rapportés par Aristote pour confirmer et renforcer son finitisme cosmologique. Aussi, affirme Bruno que : "son *enseignement peut échapper a ces innombrables labyrinthes".* D'ailleurs, Bruno précise que l'infinité

cosmique contient *en elle* une infinité de parties, mais que celles-ci ne sont *pas constitutives* de ladite infinité, car: *"Cela ne revient pas au même de parler de parties* ***dans*** *l'infini et de parties* ***de*** *l'infini".* En outre, Bruno place le parfait du côté de l'infini et non pas du côté du fini comme le voulait la tradition. Cette dernière avait rapproché, depuis l'Antiquité, le parfait du côté de ce qui est accompli, achevé, complet, dans un idéal de la finition artistique ou artisanale, où le produit de l'art a atteint son télos (*τελος*), et peut enfin se reposer dans son identité à soi. Pour Aristote, en ce sens, le fini coïncidait avec le parfait (*περας* = *τελειος*), et ce qui est bien délimité va de pair avec les conditions optima d'intelligibilité. Bruno remanie ce schéma en associant le parfait à l'infini comme le montre clairement la table des oppositions fondamentales de l'être (inspirée de celle des Pythagoriciens, mais modifiée sur ce point) dans son **De Monade**. C'est encore en ce sens qu'il précise que: *"L'infini est parfait [. .]. parce que dans l'Univers [que nous posons comme infini] se trouvent les mondes comme autant de parties et leurs membres concourent a former un tout parfait".*

La perfection divine qui s'exprime directement dans son essence, c'est-à-dire dans son *unité* absolue, relève d'une certaine modalité de sa présence dans le Tout et dans les parties. La perfection de l'Univers est comme dispersée dans cet "*immense simulacre corporel*" qui *représente* la Divinité. L'Univers, pourrait-on dire, participe à la perfection divine qui se reflète en lui, mais d'une façon seconde, dérivée, infiniment dispersée. Le dialogue italien **De l'Infinito** est plus explicite sur les modalités ontologiques qui distinguent Dieu de l'Univers, comme le montre la formule suivante qui revient dans la plupart des textes de Bruno : *"Dieu est tout infini de façon compliquée et totale; mais l'Univers est tout en tout d'une manière expliquée et non totale".*

L'Univers est envisagé ici comme un espace infini, un infini extensif dépourvu de terme ou de limite puisqu'une limite (finis, terminus) n'a de sens qu'en tant qu'elle sépare deux réalités du même ordre. Or, étant donné qu'il n'existe qu'un seul univers infini, il ne saurait être a son tour limité par un autre Univers, ni par une surface quelle qu'elle soit. A ce niveau, Bruno caractérise l'Univers en reprenant l'expression traditionnelle que l'hermétisme réservait à Dieu seul (mais que Nicolas de Cues appliqua pour la première fois en 1440 à l'Univers): "*Une sphère infinie dont le centre est partout et la circonférence nulle part.*". Au contraire, c'est l'essence même de Dieu qui répugne à toute limitation quelle qu'elle soit, tandis que l'immensité infinie de l'espace cosmique n'est telle que parce qu'elle reflète l'infinité divine et parce que l'idée d'un Univers fini est incompréhensible et contradictoire en soi. En d'autres termes, Bruno affirme l'infinité de Dieu par une démarche directe et positive, tandis qu'il pose l'infinité cosmique à la suite d'une démarche non pas négative, mais indirecte et apagogique. Sa démarche fait fond, en effet, sur les absurdité du finitisme cosmologique et sur les apories de la limitation. Bien que les mondes et les atomes que contient l'Univers soient en quantité infinie, chacun de ceux-ci est fini, limité, comme chacun des nombres qui appartiennent à la série infinie des entiers naturels. La finité individuelle de chaque élément limite en quelque sorte la puissance de l'ensemble qui les englobe. Chaque monde fini, chaque atome, et chaque individu expriment respectivement *un* des aspects infinis de l'être infini ; mais chacun d'eux étant enclos dans sa détermination distincte, il ne peut à lui seul épuiser la variété infinie de la totalité de l'être. On comprend bien de la sorte que le tout soit dans tout mais pas totalement. En Dieu, au contraire: *"chacun de ses attributs est infini [. .] et je dis que Dieu est totalement infini, parce que tout en lui se trouve dans le monde en son entier et dans chacune de ses parties, infiniment et totalement"*. Autrement dit, une infinité d'attributs revient à Dieu, mais chacun des attributs divins est à son tour infini, au sens de l'infini intensif. C'est là l'infinité absolue de Dieu. Or, comme cet infini absolu est omniprésent, il est tout entier en chacun des êtres que comprend l'Univers: il y est même si immédiatement présent, qu'il est *"plus intime à chaque être que ceux-ci ne le sont à eux-mêmes"*. Ce qui distingue l'infinité divine de l'infinité cosmique consiste également dans la modalité de leur présence respective. Est-ce à dire, par ailleurs, que Bruno soit alors dualiste et qu'il ménage une place toute particulière à la transcendance divine ? Si, au contraire, Bruno s'est orienté, dans une perspective résolument moniste et immanentiste (comme son naturalisme le laisse pressentir), ne risque-t-il pas de sombrer dans un matérialisme où l'être divin n'est plus qu'un *"flatus vocis"*, un vain mot, une abstraction creuse simplement destinée à masquer son incroyance ou son athéisme ? L'analyse des rapports entre Dieu et l'Univers montre plutôt un net infléchissement de la pensée brunienne vers un monisme immanentiste reconnu et revendiqué comme tel par son auteur, mais n'ayant aucun rapport avec un matérialisme athée.

Les rapports entre Dieu et l'Univers :

L'évolution de la pensée brunienne jusqu'à ses dernières publications, démontre explicitement que les quelques résonances transcendantistes qui émaillent certains des dialogues en langue vulgaire, sont dues à l'importation par Bruno d'un vocabulaire néoplatonicien véhiculé tant par l'hermétisme que par la philosophie de Nicolas de Cues, et par les textes publiés par Marsile Ficin. En fait, Bruno cherchait dans tous ces écrits des philosophèmes lui permettant d'attaquer, de critiquer et de vaincre le péripatétisme officiel. Mais en incorporant certains de ces vocables et de ces schèmes néoplatoniciens à sa propre pensée, Bruno n'a fait que verser du vin nouveau dans de

vieilles outres, laissant ainsi planer toutes sortes d'équivoques et de malentendus possibles. En revanche, dans les textes où Bruno s'exprime d'une manière plus univoque (et force est de reconnaître qu'ils sont plutôt rares), se dessine assez clairement sa propre conception de Dieu.

Tout d'abord, le dualisme Créateur/créature, où Dieu intervient de l'extérieur pour agir *"du dehors"* sur l'Univers, est totalement banni et vigoureusement rejeté par Bruno: *"Dieu n'est pas une intelligence extérieure <exterior> faisant tourner d'un mouvement circulaire [l'Univers] ; car il doit être plus digne de lui d'être principe interne de mouvement <internum principium motus> qui est la nature propre, l'espèce propre, l'âme propre que possèdent, tous autant qu'ils sont, les êtres qui vivent en son sein et en son corps"*. Désormais, puisque Copernic a immobilisé la sphère des fixes, la nouvelle cosmologie n'a donc que faire d'un premier moteur "extérieur" dont l'existence avait été posée, du reste, pour les seuls besoins du cosmos antico-médiéval. En outre, il serait vain chez Bruno de rechercher la trace d'un Dieu personnel ayant librement créé "ex nihilo" l'Univers, et ayant envoyé son Fils pour nous sauver de la Chute originelle. Le Dieu de Bruno, qui ne doit rien au Stagirite, ni aux Péripatéticiens médiévaux, n'a guère de rapport avec le Dieu de la Révélation biblique (comme l'Inquisition le lui rappellera)! C'est un Dieu de philosophe, qui est caractérisé à la fois par son *Unité* et par son *immanence* totale au sein de l'Univers infini. L'énorme **De Immenso** (1591), véritable testament philosophique de Bruno, s'achève au Livre VIII sur un dernier chapitre consacré à *l'Unité divine* où l'auteur précise que: *"Dieu est infini dans l'infini, partout en toutes choses, ni au-dessus ni à l'extérieur mais totalement intime à toutes choses <non supra, non extra, sed praesentissimum>"* . Bruno avait rejeté la transcendance des essences affirmée par les Platoniciens, afin de préparer le terrain à son monisme immanentiste. La théologie brunienne est solidaire de son ontologie et de sa cosmologie. Or, Bruno nous a mis en garde contre toute tentation de séparer la *"nature des êtres naturels, la bonté de ce qui est bon, et l'entité des étants"*. D'où les attaques virulentes de Bruno contre toute forme de transcendance fût-elle démiurgique ou non :

> *"Il n'existe pas d'artisan <formator> qui préside d'en-haut, et qui de l'extérieur ordonne <digerat> et façonne <figuret>[tout]. [...] A quoi servent donc ces fantaisies techniques de Platon, ces artifices, ces archétypes, ces idées, ces figures, ces statues, ces chars de l'imagination, ces vaisseaux remplis de babioles, tous situés à l'extérieur du monde corporel ?"*.

Bien au contraire, l'Unité divine façonne l'Univers de *l'intérieur* <*ab internis*>, c'est si l'on peut dire un *"art vivant"*. La fiction de la transcendance divine, selon Bruno, découle d'une conception artificialiste plaçant l'Artisan à *l'extérieur* d'une matière qui lui est étrangère et à laquelle il vient imposer son art. Or, rien ne peut être extérieur à l'Univers infini, puisque son infinité même implique précisément qu'il n'ait pas d'Autre. Aussi, la théologie brunienne (si l'expression n'est pas trop forcée), prend le contre-pied de l'artificialisme démiurgique en suivant la voie du vitalisme naturaliste: "*L'art, écrit-il, est extérieur à la matière, la nature est à l'intérieur <interior> de la matière. [---] . La nature agit plus intimement en toutes choses que celles-ci ne sont intimes à elles-mêmes, et elle est principe de l'être, source de toutes les espèces, Esprit <Mens>, Dieu, Etre <Ens>, Un <Unum>, Vrai, Destin <Fatum>, Raisons, ordre <Ordo >*". Bruno veut simplement suggérer que Dieu est ce qui vivifie de l'intérieur les êtres naturels, ce qui les relie entre eux dans un ordre commun de co-appartenance (Ordre, Raison, Etre), tout comme l'exprimaient si bien ces vers célèbres de Virgile que Bruno répétait à l'envi, jusqu'à la face des Inquisiteurs :

> " *Totamque infusa per artus*
> *Mens agitat molem, et magno se corpore miscet*"

La clef de ce problème, consiste à bien comprendre que la distinction qui sépare l'*essence* de l'*être* (c'est-à-dire Dieu de l'Univers) n'est qu'une *distinction de raison*, autrement dit, le résultat d'une abstraction: "*Distinguitur autem essentia ab esse tantum logice*". En réalité, la substance est une, mais si l'on parle de Dieu pris à part, on l'isole *abstraitement<logice>* en pensée et l'on risque d'en faire une substance séparée. Donc, le Dieu de Bruno, c'est l'Unité de l'Etre qui s'*explique* à travers l'immensité cosmique et la multiplicité infinie des mondes innombrables, et qui se *complique* dès lors que l'esprit remonte de la multiplicité infinie des êtres à leur "*Cause, à leur Principe et à l'Un*". Dieu assure l' Unité de l'Etre, l'Uni-totalité de l'Univers, et finalement l'Unité de la pensée du Nolain. A cet égard, Dieu est tout à fait indispensable à la philosophie de Bruno, quoi qu'on ait pu dire de son athéisme, de son incroyance ou de son matérialisme. Cependant, cette Unité, qui fonde la cohérence du tout et de la doctrine de l'infini, bien qu'elle soit pensable, elle demeure en elle-même incompréhensible.

COMMISSION INTER -IREM
HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

NOMBRE , CONTINU ET INFINI : DE ZENON A CANTOR

Actes du 9ème colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

Jean Paul DUMONT est décédé le 1er décembre 1993. Les premières manifestations de la maladie qui l'a emporté l'avaient empêché de venir jusqu'à Brest proposer sa conférence sur Zénon d'Elée. Lors d'un bref temps de répit, en février 1993, il avait toutefois accepté de nous présenter cette conférence à Paris.

La commission Inter-IREM d'Epistémologie et d'Histoire des Mathématiques, profondément affectée par sa disparition, se réjouit néanmoins d'avoir pu accueillir le grand historien de la philosophie antique pour l'une de ses dernières interventions, et de contribuer à la publication d'un de ses derniers écrits.

L'infini paradoxal de Zénon d'Elée : la dialectique de l'espace et du nombre

Jean-Paul Dumont†
Professeur d'histoire de la philosophie
Université Charles de Gaulle-Lille III

Et si l'histoire du concept d'infini, telle que la racontent les fragments des pré-socratiques, pouvait nous amener à en mieux comprendre la richesse philosophique ? Voilà la question qui constitue notre motivation initiale. Qu'y a-t-il de commun entre l' ἄπειρον, traduit par **illimité** ou **infini**, dont le Milésien Anaximandre fait la souche primitive, la source et l'origine, voire le principe[1] de toutes choses, et cet infini qui va prendre chez Aristote[2] tantôt la valeur d'infini en puissance, et tantôt la valeur d'infini par addition[3]? Toute grandeur étant par lui tenue pour continue, elle est divisible, c'est-à-dire **peut** être divisée à l'infini: tel est l'infini en puissance; mais cette division, qui n'épuise jamais le continu, peut se répéter un nombre indéfini de fois, ce qui a pour conséquence la mise en évidence d'un infini par addition, ou encore d'un infini en nombre [4] :

> *" L'infini par addition est en un sens le même que l'infini par division. En effet, dans la grandeur finie, l'infini par addition se produit à l'inverse de l'infini par division; car dans la mesure où nous constatons que la division se poursuit à l'infini, dans cette même mesure nous constatons que l'addition tend vers la limite du défini. En effet si nous prenons une partie définie d'une grandeur finie et si nous y ajoutons une autre partie en suivant la même proportion, ce qui a pour effet d'opérer sur le tout un prélèvement non identique au premier, nous ne parviendrons pas à épuiser la grandeur limitée, tandis que en revanche si nous augmentons la proportion de telle sorte que chaque fois nous prélevions la même grandeur, nous viendrons à bout de la grandeur limitée, étant donné que toute grandeur limitée peut se trouver épuisée par la soustraction d'une quelconque grandeur finie".*

Entre l'illimité naturel des Ioniens et la construction achevée du concept d'infini, conçu d'une part en puissance, d'autre part en nombre, comme nous le propose Aristote, l'intervention la plus marquante et la plus riche de conséquences pour l'histoire de la notion est celle de Zénon d'Elée. Zénon est d'abord celui qui passe aux yeux d'Aristote[5] pour l'inventeur de la dialectique. Certains, nous le savons bien, voudraient réduire la dialectique à sa dimension littéraire et rapprocher l'art du dialecticien, du fragment de ce qui paraît être le premier dialogue philosophique conservé[6] , où Zénon d'Elée s'entretient avec Protagoras du bruit que peut faire en tombant la dix-millième partie d'un grain de mil, s'il est vrai qu'un sac contenant un boisseau du même mil fait du bruit quand il tombe. D'autres, voulant donner à la dialectique un sens déjà plus technique, voudraient attribuer à Zénon la première codification de l'art d'interroger et de répondre, qui permet aussi bien la réfutation que la recherche de la vérité concernant les principes du savoir. Mais sans doute est-il plus raisonnable, et plus philosophique en même temps, de s'attacher au lien très vraisemblable qui unit la dialectique à la constitution des paradoxes.

Nous savons, par le témoignage tardif du néoplatonicien Proclus[7], que l'ouvrage de Zénon, sans doute celui dont il a donné lecture à Athènes devant Socrate[8], contenait quarante paradoxes. Parmi ces paradoxes, les quatre relatifs au mouvement (la **dichotomie,** l'**Achille**, la **flèche immobile** et le **stade**) ont fait la célébrité de Zénon au point de masquer l'existence des trente-six autres. Cela est dû à la notoriété même de la **Physique** d'Aristote qui s'est fait le témoin des quatre plus connus. La conséquence directe est que l'infini est devenu essentiellement cet **à l'infini** vers lequel tend , en se répétant, la division en deux ou **dichotomie**. Le commentaire des quatre paradoxes sur le mouvement a suscité les discussions que l'on sait, au point que les logiciens ont voulu ramener les paradoxes à des constructions logiques. Les paradoxes ont pu même aussi conduire les mathématiciens à s'interroger sur les totalités que sont les ensembles. D'autres ont insisté sur le jeu de langage auquel recourt la mise en oeuvre du paradoxe, et qui relève de la sémantique. On connaît les nombreuses variantes littéraires du texte de Lewis Carroll : **Ce que se dirent Achille et la tortue**[9], et le jeu logique auquel il nous engage en usant de la régression à l'infini dans la constitution d'une axiomatique.

Mais notre intention n'est pas de suivre Achille et la tortue sur ce terrain, d'autant que ce serait courir le risque d'entreprendre une course infinie ! Il est sans doute plus philosophiquement instructif de revenir sur ce que **paradoxe** veut dire dans l'esprit de Zénon d'Elée. Il ne faut pas parler de tel ou tel paradoxe comme d'**une** proposition ou d'**un**

énoncé qui heurterait l'attente de la raison, en s'opposant à une opinion généralement partagée. Ce qui en réalité produit le heurt ou le choc, c'est la rencontre d'**opinions** également probables, mais qui pourtant paraissent s'exclure. La conception aristotélicienne[10] de la dialectique propose d'examiner les tableaux comparatifs de conceptions ou d'opinions philosophiques également probables, et dont il convient d'éprouver la validité en examinant leurs conséquences par recours à un syllogisme. Déjà chez Platon, dans le **Parménide**[11], la dialectique zénonienne permet de mettre en évidence les situations paradoxales qui résultent de ce que l'Un, cessant d'être pensé comme purement un, se trouve engagé dans l'existence. En termes techniques, Platon dit alors que "l'Un participe à l' οὐσία". Enoncer des paradoxes ne consiste pas à juxtaposer telle ou telle opinion surprenante, comme on dirait de l'Un qu'il est immobile ou qu'il est en mouvement, qu'il est même ou autre, qu'il est semblable ou dissemblable, etc. Enoncer un paradoxe, je le répète, est au contraire construire un système, et cela précisément parce que seul un **système** peut être paradoxal. Si la participation de l'Un à l'existence fait paradoxe, c'est justement parce que cet Un devient par là-même un Un-multiple qui est en même temps en lui-même et en un autre, immobile et en mouvement, même et autre, semblable et dissemblable, en contact et séparé, égal et inégal, engagé dans le temps et dans les parties du temps. Bien sûr, il faudrait interpréter philosophiquement, sans doute avec l'aide de Proclus, la succession de paires conceptuelles qui constituent les paradoxes, et observer comment, d'une manière dialectique, mais cette fois au sens moderne selon un processus de mise de côté qui est conservation et dépassement[12], les termes précédents se trouvent tout entiers immanents dans le terme suivant. Ainsi, en rebroussant chemin, on trouve que le temps est nombre et qu'il est structuré par le paradoxe de l'égal et de l'inégal propre à tout nombre; qu'étant nombre, il est paradoxalement en contact et séparé, ce qui est l'effet de la présence en lui de l'opposition du semblable et du dissemblable qui nourrit toute image; et que ce statut de l'image est lui-même travaillé par le paradoxe du même et de l'autre. Arrêtons là une énumération suffisamment éloquente ! La lecture du **Parménide** de Platon devrait faire apparaître que Platon, en exposant ce que la tradition néoplatonicienne tiendra pour l'essentiel de sa théologie[13], a pris le risque divertissant et instructif d'appliquer à l'Un, en la reprenant à son compte, la dialectique paradoxale à laquelle Zénon soumettait les grandeurs multiples.

Car l'objet principal et initial de Zénon est l'analyse des multiples, c'est-à-dire du paradoxe inhérent à l'**existence** de toute grandeur. Ces paradoxes sur l'Un et le multiple sont eux aussi connus d'Aristote. Le paradoxe concernant l'Un est cité à la fois dans la **Métaphysique** et dans la **Physique**[14]; le paradoxe de la dichotomie est allégué dans la

Physique[15], et lié par Aristote à l'invention de la théorie des grandeurs insécables ou atomes. Cette connexion, très tôt établie par Aristote, entre l'atomisme et la procédure dichotomique qui consiste, nous l'avons vu, à diviser une grandeur en deux selon une proportion quelconque et à répéter ensuite l'opération autant de fois que l'on voudra, fait justement l'objet d'un commentaire d'Aristote qui, au lieu de prendre place, comme on s'y attendrait, dans la **Physique**, se situe au début du ler livre **De la génération et de la corruption**[16]. Ce témoignage est philosophiquement de la plus grande importance, au point qu'il paraît être, au moins au même titre que le texte de Zénon d'Elée, la source du commentaire de Zénon par Simplicius.

C'est à Simplicius en effet, dans le **Commentaire de la "Physique" d'Aristote**[17], que l'on doit d'avoir conservé, dans un ordre que la critique moderne conteste[18], les seules citations textuelles de Zénon que nous connaissions. Après avoir lu la citation que H. Diels tient pour le premier fragment, nous allons nous efforcer d'en pénétrer le sens, et d'y mesurer l'usage que Zénon fait du concept d'infini. En tentant d'en apprécier les conséquences, une double surprise nous attend. L'application de la dichotomie à la grandeur va connaître une double fortune historique: d'un point de vue géométrique, elle engendre l'atomisme des Abdéritains; d'un point de vue arithmétique, elle produit le pythagorisme de Philolaos qui va inspirer l'enseignement oral de Platon.

fragment 1

προ-
δείξας γὰρ ὅτι 'εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἴη', ἐπάγει 'εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου. καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος. καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν· οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοιοῦτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται. οὕτως εἰ πολλά ἐστιν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι'.

fragment 2

'εἰ γὰρ ἄλλωι ὄντι, φησί, προσγένοιτο, οὐδὲν ἂν μεῖζον ποιήσειεν· μεγέθους γὰρ μηδενὸς ὄντος, προσγενομένου δέ, οὐδὲν οἷόν τε εἰς μέγεθος ἐπιδοῦναι. καὶ οὕτως ἂν ἤδη τὸ προσγινόμενον οὐδὲν εἴη. εἰ δὲ ἀπογινομένου τὸ ἕτερον μηδὲν ἔλαττον ἔσται μηδὲ αὖ προσγινομένου αὐξήσεται, δῆλον ὅτι τὸ προσγενόμενον οὐδὲν ἦν οὐδὲ τὸ ἀπογενόμενον'.

1 *En effet. il a commencé par démontrer que : Si l'existant n'avait pas de grandeur, il n'existerait pas. Il poursuit: S'il existe, il est nécessaire que chaque existant ait une certaine grandeur, une certaine épaisseur, et qu'il y ait une certaine distance de l'un par rapport à l'autre. Et le même argument vaut pour celui qui est devant lui. Car celui-ci aussi aura une grandeur, et un certain existant se trouvera devant lui. Or le dire une fois revient à le dire sans cesse. Car aucun existant n'occupera le dernier rang, et il n'est aucun existant qui n'existe pas en relation avec un autre. Donc, si les existants sont multiples, il est nécessaire qu'ils soient à la fois petits et grands, petits au point de ne pas avoir de grandeur, et grands au point d'être illimités.*

2 *Car si on l'ajoutait à un autre existant, il ne le rendrait pas plus grand. Car si l'on ajoute à quelque chose quelque chose qui n'a pas de grandeur, il n'est pas possible que celle-là gagne en grandeur. Et de cette façon, il s'ensuit que ce qui a été ajouté n'était rien. Et si la soustraction de quelque chose opérée à partir d'une autre chose n'a pas pour effet de rendre celle-ci plus petite, de même que l'addition de quelque chose à autre chose n'a pas pour effet de l'augmenter, il est clair que l'ajouté ou le retranché n'était rien.*

L'unique présupposé qui constitue le point de départ de l'analyse de Zénon, c'est que l'étant possède de la grandeur. Il s'agit bien de l'existant ou de l'étant (τὸ ὄν), qui n'est pas tenu ici pour un être intelligible "abstrait", mais pour un **quelque chose** qui possède l'être, par opposition au devenir, et qui fait partie des entités "naturelles" (si l'on peut ainsi dire), pourvues de grandeur. Le terme de grandeur (μέγεθος) appartient au premier chef au vocabulaire de la géométrie plane; l'existant doit posséder d'abord deux dimensions, ce qui n'exclut pas que l'on puisse user d'une ligne pour les besoins de l'exemple en se bornant à prendre en considération une dimension unique. Dans le premier fragment qui nous concerne la grandeur s'accompagne de l'épaisseur (πάχος), ce qui confère à l'existant une réalité stéréométrique. Même si, car tel est bien le cas, l'analyse porte sur un objet intelligible saisi par l'intellect, ou sur ce que Démocrite appellera une **idée**[19], l'enjeu est constitué par une entité volumineuse susceptible d'être tenue pour immanente à toute réalité physique faisant corps, comme plus tard la forme aristotélicienne sera dite immanente à la matière du composé.

Mais, cependant que l'existant possède grandeur et épaisseur, il doit être séparé des autres existants par une certaine distance. La pensée de la séparation et de la distance (notre traduction n'a pas pu faire l'économie du substantif **distance**) ne s'exprime pas en grec par un substantif (comme **grandeur** ou **épaisseur**), mais au moyen d'un simple verbe: ἀπέχειν, qui décrit le fait ou l'action d'être séparé ou à distance. Cela veut dire que la distance n'a pas de réalité substantielle, qu'elle est un acte et non une chose, bref quelque chose qu'il faut penser non pas comme un être, mais comme un fait. Et ce fait, qui accompagne la présence de l'existant, est la présence du non-être séparant les êtres, ou du vide isolant les atomes. De l'ordre du fait est ce que Démocrite appellera le μηδέν par opposition à la substance désignée par le néologisme δέν[20]. Aussi faut-il souligner en arrière-fond du premier paradoxe, la présence d'un autre paradoxe, encore plus fondamental, qui concerne le **il est** réduit au **il y a,** et qui énonce qu'à côté de l'être il y a du non-être produisant l'effet de distance entre les êtres ou les existants.

C'est alors que s'introduit sous une forme un tant soit peu masquée le concept d'**infini en nombre,** ou que, si l'on préfère, l'infini fonctionne comme un opérateur. Car, si l'argument vaut pour un existant donné, il doit valoir de la même façon pour celui qui le précède. La séparation, non désignée ici par le terme technique de **dichotomie,** bien que ce soit de dichotomie qu'il s'agisse, s'opère comme dans le sorite, ce qui correspond à poser en principe que "le dire une fois revient à le dire sans cesse". Comme on le voit, le caractère illimité de la séparation s'impose à l'intellect comme un **réquisit,** dès lors que l'intellect est amené à concevoir les conditions rationnelles qui président à l'apparition d'existants multiples. La raison n'a pas le choix: il faut, s'**il y a** des existants, qu'une séparation les distingue, et que, si séparation **il y a,** cette séparation corresponde à une opération réalisée par l'*"être"* du non-être, c'est-à-dire la présence d'un vide infini. L'infini du vide fonde et supporte l'indéfinité de l'opération de mise à distance, et c'est bien pourquoi la séparation une fois produite doit s'opérer ensuite à l'infini.

Quelle est alors la conséquence de la présence du vide ajoutée à celle des existants ? Faudrait-il que, si le vide est infini, les existants qui doivent, par le fait même, être en nombre infini, soient eux-mêmes des grandeurs ou des volumes proprement infinis ? On voit bien que la réponse est négative, car la raison ne peut pas revenir sur le principe posé initialement que tout existant doit avoir une grandeur et une épaisseur. Et c'est bien là le paradoxe de l'infini, qui repose sur la constatation que si l'infini, entendu comme opérateur de distanciation et de séparation, est la conséquence de la grandeur propre aux existants, symétriquement l'illimitation de l'infini doit se heurter quelque part au

caractère non séparable des existants, c'est-à-dire à l'insécabilité fondamentale de toute grandeur[21].

Nous touchons là à un très grand moment de l'histoire de la philosophie et de la science. Zénon va être le premier à donner une valeur spécifique au couple de concepts constitué par la paire du Grand et du Petit, qu'il emprunte au pythagoricien Alcméon.[22]

Relisons la conclusion du premier fragment qui introduit en même temps le deuxième :

> *" Si les existants sont multiples, ils doivent être Grands et Petits, Grands au point qu'ils soient illimités en grandeur, et Petits au point d'être sans grandeur".*

Par là, Zénon entend que la grandeur (μέγεθος) propre à un existant doit être une **mégagrandeur** ; cela est la condition nécessaire de la divisibilité de cette grandeur. Comme la première division ou séparation doit en effet pouvoir se répéter sans cesse, un nombre infini de fois, il faut que la grandeur soit infiniment grande. On voit que le Grand est requis par la divisibilité.

Dans ce texte de Zénon, nous pensons donc qu'il convient de conserver à Grand son sens naturel et géométrique, et ne pas donner à Grand le sens arithmétique de grandeur en nombre. Car si le grand nombre de divisions possibles doit être contenu dans le Grand, c'est le caractère grand de l'existant, ou la grandeur de sa dimension qui fondent la divisibilité. Ainsi, Grand est le caractère de tout existant possédant une grandeur [23] : Grand est synonyme d'illimité ou infini.

La référence au Petit, qui est l'opposé relatif au Grand, est appelée par la conséquence absurde qu'entraînerait l'existence d'un pur illimité. Car une grandeur illimitée[24] se trouverait émiettée[25] en fragments non fragmentaires qui se réduiraient à des points sans grandeur. Est-il possible de concevoir une grandeur qui soit la somme de non-grandeurs, même en nombre infini ? Si la suite numérique de divisions, dont il était d'abord postulé qu'elles pouvaient se poursuivre à l'infini, allait jusqu'à l'infini, on se heurterait à une contradiction : cela exigerait en effet que la division ne puisse pas se poursuivre à l'infini, puisqu'elle aurait rencontré l'infini comme son terme : l'ensemble arithmétique ne serait pas infini, contrairement à ce qui avait été posé.

En outre, cette fois d'un point de vue géométrique, l'unité composant la grandeur finirait par être privée de dimension. Ajouter ou retrancher une telle grandeur ne produirait aucun effet, le plein serait vide et l'être se dissoudrait en non-être.

Pour ne pas aller jusqu'à sombrer dans un tel néant, il faut donc reconnaître que l'infini numérique a une fin, ou si l'on préfère, que l'ensemble constitutif de la grandeur est formé d'unités ou de monades qui échappent à la division, et par là doivent être dites insécables, c'est-à-dire porter le nom d'**atomes**. Le Petit existant de Zénon, c'est l'atome.

Qu'on me permette ici d'insister sur le fait que le Petit n'est pas une réalité physique ou naturelle, comme le serait un corps, mais que le Petit est bien une réalité intelligible, appréhendée par l'entendement, et qui a le statut d'une **idée**. La grandeur n'est pas une qualité d'un corps, mais une propriété enveloppée dans le concept d'existant. Le concept de Petit est la condition qu'il faut nécessairement poser comme étant ce qui rend possible le fait, pour le concept d'existant, d'envelopper la grandeur.

Tel est bien l'essentiel du paradoxe. L'enchaînement des raisons exige que, partant d'une grandeur tenue pour indéfiniment divisible, Zénon doive aboutir à poser l'indivisibilité de **minima** élémentaires. Le Grand ne va pas sans le Petit, mais cela ne résulte pas d'un effet de relativité, comme lorsque l'on dit que le Grand est grand par rapport au Petit et que le Petit est petit par rapport au Grand. Il s'agit au contraire d'un paradoxe ontologique, et bien autrement fondateur: la pensée de l'existant en général doit dialectiquement faire référence au paradoxe du Grand et du Petit.

Nous voudrions, parvenus à ce point de notre propos, indiquer brièvement les conséquence d'une telle dialectique de l'infini, et marquer son retentissement à la fois dans la philosophie des nombres propre aux pythagoriciens et à Platon, et dans la philosophie concurrente représentée par l'atomisme géométrique des Abdéritains.

On a coutume, lorsqu'on évoque la figure de Philolaos, d'en faire une sorte de Platon avant la lettre. La raison en est peut-être l'**opinion** rapportée par Aétius[26] : "*Les principes sont la limite et l'illimité*". Ce jugement est renforcé par une notation tardive du néoplatonicien Damascios[27] : "*...comme Platon l'écrit dans le* ***Philèbe*** *et Philolaos dans ses livres* ***De la nature****, ce qui est constitué de* **limite** et ***d'illimité***...".Mais de telles formules n'ont qu'une valeur très approximative et peuvent induire une interprétation qui fait contresens. Comme nous le verrons ensuite, le platonisme tient sur l'infini un discours original et différent, puisque l'illimité sera pour Platon une grandeur continue, Platon refusant, sous quelque forme que ce soit, l'existence du vide.

En réalité, l'expression de Philolaos est différente et exprime une conception opposée de l'infini, qui présuppose la discontinuité.

Les deux principes, qui ne sauraient exister séparément, et que l'on trouve à l'origine de tout existant, portent les noms de **Limitants** et **d'Illimités** (au pluriel)[28] . Nous lisons par exemple :

"*Il est bien clair que c'est de l'accord à la fois de* ***limitants*** *et* ***d'illimités*** *que le monde, ainsi que tout ce qu'il contient, ont été constitués*".

Que sont ces **illimités** ? La réponse la plus vraisemblable est que ce sont les **minima** distincts et en nombre infini qui constituent le matériau de la grandeur. Demeurant fidèle à la leçon de Zénon d'Elée, Philolaos renonce à parler de l'illimité et de l'infini au singulier, dont la division aboutirait contradictoirement à un néant. Il faut donc bien qu'il existe des entités infiniment petites et en nombre infini, pour que l'existant qu'elles composent par addition ait lui-même une grandeur.

Qu'est-ce alors que les **limitants** ? Le terme de **limitant** désigne ce que les anciens physiologues appellent depuis longtemps l'*enveloppant* ou le περιέχον. Car il faut bien, pour qu'une grandeur existe, plus exactement pour qu'existe un être ayant de la grandeur, que les grandeurs infiniment petites qui la composent, soient enveloppées, retenues et maintenues ensemble par un principe assurant la cohésion du tout résultant des parties. Le limitant ne saurait pas davantage exister seul que les illimités. L'analyse dialectique de l'existant possédant grandeur, débouche sur l'exigence paradoxale du concours des **illimités** et du **limitant** pour rendre compte de la présence de l'existant quel qu'il soit. (Les limitants ne sont au pluriel dans le texte de Philolaos que du fait même que les existants quelconques sont eux-mêmes multiples.)

Si l'on voulait se livrer à un exercice de rétroversion, en retraduisant le vocabulaire de Philolaos dans la langue de Zénon, il faudrait dire que le **limitant** est le Grand, tandis que les **illimités** sont le Petit. Tout composé est pour Philolaos rendu Grand par la puissance enveloppante et en même temps Petit par sa divisibilité en une infinité de matériaux renfermant encore une grandeur résiduelle.

L' enseignement oral de Platon, dont Aristote est le témoin[29], va tout au contraire se montrer soucieux de préserver la réalité du continu. Cela entraîne deux ordres de conséquences. D'une part, la limite de la grandeur est sans grandeur: elle a le statut du nombre, ou encore du point par rapport à la ligne. Cela a pour effet de faire de la limite (et non plus du limitant) un principe unificateur des multiples qui, en opérant, manifeste la manière dont l'Un participe à la réalité substantielle qu'elle concourt à produire. L'enveloppant cesse alors d'être le Grand, comme chez Zénon et chez Philolaos: il n'est ni le **limitant** relatif au **limité,** ni le Grand du Petit; il est l' Un du Multiple responsable de la finitude du continu. Pour tenir le langage d'Aristote, on peut dire que la limite fait exister en acte une grandeur par ailleurs infiniment divisible en puissance, parce que continue.

Mais, d'autre part, Platon ne renonce pas au Grand et au Petit. Puisque tout existant est un par sa forme et multiple par sa matière, ou encore est fini par sa limite et illimité quant à l'étendue (même si l'on doit aussi parler d'une "matière intelligible"), c'est dans la réalité seule du multiple et de l'illimité que l'infini retrouve son lieu propre. Par opposition à l'Un de la limite, l'illimité porte alors le nom de **Deux** ou **Dyade,** Platon posant en second principe, à côté de l'Un, la **Dyade indéterminée** (ou **aoriste) du Grand et du Petit**.

Voici en quels termes Simplicius, dans son **Commentaire à la "Physique" d'Aristote**, transcrit les notes prises par Aristote, Héraclide, Hestiée et d'autres lors de la célèbre leçon de Platon **Sur le bien**[30] :

> "*Il* (Platon) *pose le plus et le moins, le plus intense et le moins intense, comme étant de la nature de l'illimité; car, où ils sont présents et se manifestent sous l'aspect de l'excès et du défaut, ce qui participe d'eux ne connaît ni immobilité ni limitation, mais se meut vers l'indéterminé de l'illimitation. Il en est de même pour le maximum et le minimum, et pour le Grand et le Petit, par lesquels Platon désigne ceux-là. Prenons en effet une quelconque grandeur limitée, par exemple une coudée: si, des deux demi-coudées qui résultent de sa division en deux, nous laissons l'une indivisée et, divisant l'autre demi-coudée, nous l'ajoutons petit à petit à celle qui est indivisée, alors la coudée aura deux parties, l'une devenant plus petite, l'autre plus grande, sans que ce processus connaisse une fin. Car, en procédant à ces divisions, nous n'arriverons jamais à une partie indivisible; en effet, la coudée est continue, et le continu se divise en divisibles toujours. Une telle division ininterrompue montre une certaine nature de l'illimité enclose dans la coudée, et même plutôt plusieurs, une allant vers le Grand et l'autre vers le Petit. Dans ces conditions, on voit que la Dyade indéfinie est formée de la réunion de l'unité qui va vers le Grand et de l'unité qui va vers le Petit. Et ces caractères appartiennent aux corps continus et aux nombres*".

On mesure ce qu'est devenue la dichotomie zénonienne. Le paradoxe ne concerne plus que la Dyade, c'est-à-dire la matière. Si j'ajoute à la moitié le quart et le huitième constituant le Grand qui ne demande qu'à grandir, le huitième restant forme le Petit qui n'aspire lui-même qu'à diminuer. Mais cette transformation en un couple des deux termes de l'infini a aussi pour résultat de faire s'évanouir tout paradoxe. Alors que l'existant de Zénon peut être à la fois Grand et Petit, et que Philolaos était obligé de maintenir la présence d'une multitude d'illimités, Platon construit un modèle non paradoxal de l'illimité ou infini, pour en faire une réalité dynamique. Car si celle-ci reste duelle ou double, parce que faite du Grand et du Petit, le Grand et le Petit n'apparaissent pas comme des entités en acte, mais simplement comme des possibles. Le Grand n'est plus que ce qui a puissance de grandir sous l'effet de la division, cependant que le Petit n'est plus que le sujet d'une diminution possible. Ainsi se trouvent jetées les bases de la solution aristotélicienne aux paradoxes de Zénon: toute existence réalisée est une existence en acte, et par conséquent finie, comme est fini l'intervalle qui sépare la flèche de sa cible; en revanche, la divisibilité à l'infini n'a d'être qu'en puissance : l'infini n'est plus que la conséquence éventuelle du continu qui est le lieu du possible.

Mais si Platon, grâce en partie à Philolaos, a pu ainsi creuser la tombe de Zénon, l'atomisme a continué d'exister en dehors de lui, chez ses contemporains d'Abdère. La spéculation atomiste a été d'abord géométrique. C'est à elle que se rattache la définition de la ligne tenue pour un ensemble de points matériels, ou plutôt de lignes insécables (ἄτομοι γραμμαί), la définition de la surface comme un empilement de lignes, et la définition du volume comme un empilement de surfaces. Ainsi le cône ou la pyramide de Démocrite sont constitués de surfaces égales-inégales; toute surface étant égale à celle qui la précède (et qui est plus grande) et à celle qui la suit (et qui est plus petite), mais pour cette raison inégale par rapport à elle-même puisque celle qui la précède est plus grande et celle qui la suit est plus petite[31].

Sans doute convient-il de mettre un terme à cette histoire ancienne des paradoxes de l'infini. Nous avons pu constater que le legs de Zénon est loin de se borner aux quatre paradoxes sur le mouvement. Ce qui est en cause, c'est l'invention de la dialectique et les premiers effets dialectiques d'une raison qui s'efforce de rendre compte des phénomènes en mettant en évidence les exigences logiques et ontologiques que leur salut requiert. Que le paradoxe soit au fond de la dialectique, nous pouvions nous en douter. Que l'infini soit un objet éminemment paradoxal, nous avons pu en prendre la mesure. Que dès l'origine, la dialectique ancienne ait été déjà moderne, c'est ce que nous voudrions avoir en même temps établi.

NOTES

1 - Le mot grec d'ἀρχή, auquel Aristote donnera la valeur technique de **principe**, a-t-il déjà ce sens chez Anaximandre? La difficulté est impossible à trancher.

2 - Aristote, **Physique** III, 6.

3 - **Ibid**. 206b 3-12.

4 - Nous citons le texte (206b 3-12) dans notre propre traduction.

5 - Dans deux oeuvres perdues (des dialogues ?) : le **Sophiste**, in W.D. Ross, **Aristotelis fragmenta selecta**, Oxford, 1955, fgm. 1, p.15; et dans le **Sur les poètes**, fgm. 3, p.68.

6 - **D.K** (29) Zénon A XXIX, **290** (379). Les références aux **Présocratiques** sont données successivement de trois manières: l'abréviation **D.K.** renvoie à H.Diels-W.Kranz, **Die Fragmente der Vorsokratiker**, 6e. éd., Berlin 1951, avec le numéro de l'auteur antique entre parenthèses suivi de son nom, et le numéro du *témoignage* précédé de la lettre A, ou du *fragment* précédé par la lettre B; l'indication suivante en gras signale le numéro de page de la traduction donnée dans notre édition des **Présocratiques**, Paris 1988 et 1989, éd. Gallimard, Bibl. de La Pléiade; enfin on indique entre parenthèses le numéro de la page de l'édition de poche, **Les écoles présocratiques**, Paris 1991, éd. Gallimard, Folio-Essais.

7 - **D.K.** (29) Zénon A XV, **281** (369).

8 - **Ibid.** A XI, **280** (368).

9 - Lewis Carroll, **Oeuvres**, Paris, Gallimard,1990, La Pléiade, p. 1622-1625.

10 - Aristote, **Topiques** I, 13 à 15.

11 - Platon, **Parménide**, 142b 5 - 155d 1 (2ème hypothèse).

12 - Au sens hégélien de l'**Aufhebung**.

13 - L'interprétation néoplatonicienne du **Parménide**, qui commence avec Plotin et, après Proclus, s'achève par la théologie négative de

Damascios et du Pseudo-Denys, a été battue en brèche par la critique moderne et en particulier par V.Brochard ("La théorie platonicienne de la participation", **Etudes de philosophie ancienne et de philosophie moderne**, Paris, Vrin, éd. 1966, p. 113-150) qui voyait dans la seconde partie du **Parménide** une machine de guerre sceptique, destinée à montrer qu'en dehors de toute participation de l'Un à l'existence, on ne peut rien dire ni de l'Un ni des multiples, et que dans le cas de la participation de l'Un à l'existence, on peut dire tout et n'importe quoi, le même et son contraire, aussi bien de l'Un que des multiples. Ce tout et n'importe quoi, ce Même et cet Autre caractérisent non seulement le scepticisme antique, mais tout paradoxe logique. Il est fort instructif de noter que la plus profonde dialectique paradoxale peut se trouver subvertie en paradoxologie sceptique: un tel phénomène s'est produit dans l'Antiquité quand Zénon, dialecticien, s'est trouvé, après la lecture d'Aristote, changé en sophiste auteur de paradoxes.

14 - **D.K.** (29) Zénon A XXI et XXII, **283** (371) et **285** (373).

15 - **D.K.** (29) Zénon A XXII, **loc. cit**.

16 - Aristote, **De la génération et de la corruption** I,2. 316a 14-317a 12.

17 - Simplicius, **In Phys** 138, 29 - 142,15 (éd. H.Diels, Berlin 1882). En réalité, Simplicius ne commente pas les passages des livres III, IV et surtout VI de la **Physique** où Aristote reprend les paradoxes sur le mouvement, mais le livre I,3. Il s'inspire successivement d'Alexandre d'Aphrodise citant Eudème, et de Porphyre.

18 - **D.K.** (29) Zénon, B I, II et III, **291** (379). H.Diels cite les trois fragments dans l'ordre III, I, II, considérant que le troisième fragment cité par Simplicius précède en réalité les deux premiers.

19 - **D.K.** (68) Démocrite A CII, **798** (452) ; B CXLI, **879** (533) ; B CLXVII, 889 (543) ; B Vi et B VI, **844** (498).

20 - **D.K.** (68) Démocrite A XXXVII, **767** (421); A XLIX, **774** (428) ; B CLVI, **885** (539).

21 - Renvoyons ici au commentaire d'Aristote, **De la génération et de la corruption** I, 2. 316a 24, trad. J. Tricot, pp. 15-16. Il porte sur l'ensemble des problèmes soulevés par la séquence des deux premiers fragments de Zénon.

22 - **D.K.** (24) Alcméon A III, **218** ; et (58) Ecole pythagoricienne B V, **566** (302).

23 - Si l'analyse de Zénon devait s'arrêter là, le Grand de Zénon aurait pour strict équivalent le continu d'Aristote, qui est divisible à l'infini, en puissance.

24 - Voir la suite du fragment B II, **291** (379) et le commentaire d'Aristote cité en première page du présent article, n. 4.

25 - Aristote use de l'image de la sciure de bois, **De la génération et de la corruption**, I, 2. 316a 34.

26 - **D.K.** (44) Philolaos A IX, **492** (252).

27 - **D.K.** (44) Philolaos B II, **503** (263).

28 - **Ibid.** B I et B II, **502** (262).

29 - Aristote, περὶ τἀγαθοῦ , éd. W.D. Ross, **op. cit.** fgm. 2, p. 113.

30 - **Ibid.** p. 117; notre citation de Simplicius, **In Phys**, va de 453, 31 à 454, 10.

31 - Nous avons eu l'occasion d'étudier le parti que les stoïciens ont tiré de cette géométrie paradoxale; voir "Mos geometricus, mos physicus" in J. Brunschwig éd., **Les Stoïciens et leur logique**, Chantilly 1976, Paris, Vrin 1978.

Comment les Eléments d'Euclide traitent du continu sans recourir à l'infini.

Marie-José Durand-Richard
Collège Paul Gauguin, Paris
Chercheur associé REHSEIS. CNRS

Les *Eléments* d'Euclide (-323, -285) constituent le premier ouvrage connu qui traite exclusivement des mathématiques. Sa structure axiomatico-déductive, tout comme la rigueur de ses démonstrations, lui confèrent encore valeur canonique au 17ème siècle; et en dépit d'un fondement axiomatico-déductif, sa représentation géométrique des opérations les fait apparaître, au moins jusqu'à l'émergence des géométries non-euclidiennes au 19ème siècle, comme une théorisation adéquate du réel. De fait, l'organisation des 13 livres de l'ouvrage est au service d'une maîtrise opératoire du continu qui puisse ne pas faire référence à l'infini. Leur rédaction, outre qu'elle livre aux mathématiciens d'Alexandrie la somme des connaissances acquises par leurs prédécesseurs, en restructure le contenu autour du livre V, connu comme théorie des proportions ou théorie de la mesure. De fait, elle intervient comme mode de résolution de la crise du rationnel, crise à laquelle s'étaient heurtés les Pythagoriciens en établissant l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré. Une telle résolution a ceci d'exemplaire qu'elle permet d'observer le processus d'invention et de structuration des concepts en mathématiques. Elle montre quelles sont les contradictions soulevées entre la logique de l'arithmétique géométrique pythagoricienne, qui constitue l'ancien système de représentation, et cette nouveauté, philosophiquement étrangère au mode de théorisation antérieurement accepté. Elle éclaire les médiations nécessaires à la recomposition théorique du champ des mathématiques : celles-ci passent par la nécessité de retravailler les anciennes significations, les anciens concepts, afin de fournir à de nouvelles pratiques une interprétation qui permette de les intégrer. C'est au cours de cette étape particulière qu'a lieu l'échange le plus étroit entre le langage scientifique - mathématique - et le langage courant, et que se repose le problème qui intervient de manière récurrente dans l'histoire des mathématiques, et qui est celui de leur nature, celui de savoir de quoi elles parlent, et de la difficulté sans cesse éprouvée de reconnaitre ce que représentent les objets mathématiques dans un réél toujours difficile à cerner.

L'ambition de cet article est donc :

- de présenter la proposition 1 du livre X, qui sert de principe à toutes les démonstrations d'Euclide, d'Archimède, et de leurs successeurs, exprimant une aire curviligne à partir d'une aire rectiligne selon une méthode unique que Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) qualifiera d'exhaustion, parce qu'elle exhausse cette aire, au sens où elle l'épuise par une succession d'aires de polygones inscrits (la proposition 2 du livre XII, donnée en annexe, en est le premier exemple de mise en pratique)

- de resituer le travail d'Euclide dans le contexte de la science grecque, relativement au traitement opératoire que donne Aristote de l'infini, et à la fonction spécifique du *logos* dans la philosophie grecque, notamment dans les différentes symbolisations du cosmos, de la cité, de l'espace et du mouvement.

I. La crise de la rationalité

La crise de la rationalité[1] intervient à propos des implications du théorème aujourd'hui bien connu, dit de Pythagore, puisqu'en général, si je construis un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont mesurés par des entiers, l'hypoténuse n'est pas mesurée par un entier. Des exceptions existent cependant, et sont investis, du fait même de leur rareté, d'un caractère sacré, comme le triangle (3,4,5) que connaissaient les Egyptiens et la plupart des civilisations de l'Orient. La question se pose donc de préciser la mesure de cette hypoténuse. De fait, il est très difficile de dire qui, de Pythagore ou de ses disciples, a produit ce théorème, ni s'il a vraiment été démontré par eux. Sa démonstration se trouve en tous cas au livre I, proposition 47, des *Eléments* d'Euclide. La crise de la rationalité va naître de la confrontation entre l'existence constructible de cette hypoténuse du triangle rectangle d'une part, et d'autre part, l'état des modes de représentation du champ numérique, associée à la conception pythgoricienne du nombre.

---

1 Je préfère parler de crise de la rationalité plutôt que de crise des irrationnels :
1°) pour une raison de nature mathématique : si les irrationnels existaient, il n'y aurait pas de crise,
2°) pour une raison d'ordre philosophique, puisque la démonstration des Pythagoriciens menace directement la possibilité d'une maîtrise rationnelle du monde par le biais du discours.

1. La notion de nombre et la discontinuité du champ numérique

Les nombres ne sont ni aussi "naturels", ni aussi "réels" que ces appellations le laissent supposer. Ils ne sont perçus comme tels que dans la mesure où ils correspondent à l'usage le plus traditionnel que nous en avons. Nous avons aujourd'hui une représentation intuitive de l'ensemble des nombres réels grâce à l'ensemble des points d'une droite, que nous appelons d'ailleurs la droite réelle. Cette représentation intuitive a ceci de spécifique qu'il s'agit d'une représentation continue, mais elle ne va pas de soi. De fait, elle nous a été enseignée à l'école, où on utilise cette bijection entre l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des points d'une droite. Cette identification était explicitement admise dans les programmes dits de mathématiques modernes, et elle est aujourd'hui pratiquée couramment sans que rien d'explicite ne soit formulé à ce sujet. Qui plus est, la numération décimale à virgule nous rend immédiatement perceptible la continuité de IR, qui fait qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours en trouver un troisième, en poussant assez loin les subdivisions décimales de l'unité. Mais cette numération à virgule, que nous devons à Simon Stevin de Bruges (1548-1620), est extrêmement récente, comparée aux cinq millénaires d'écriture mathématique qui l'ont précédée. Hors l'école, nous sommes également confrontés à des représentations graphiques ("courbe" du chômage, "courbe" des impôts) qui tendent à nous faire considérer cette identification entre les points d'une droite et l'ensemble des nombres réels comme naturelle. Mais la démonstration mathématique de la continuité de l'ensemble des nombres réels, et de la possibilité de l'identifier par bijection avec une droite, date de la fin du 19ème siècle[2]. On la doit aux recherches parallèles de J. W. Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) et Karl T. W. Weierstrass (1825-1897).

C'est dire que notre intuition dépend des instruments de pensée qui sont devenus d'usage courant. Compte tenu de cette observation, il n'y a aucune raison de supposer *a priori* que l'intuition du champ numérique dans le monde grec est identique à la nôtre. Elle est en effet tributaire de leur conception même du nombre, qui est d'abord, comme celle de leurs prédécesseurs, essentiellement discontinue.

La richesse conceptuelle des systèmes de numération de l'Antiquité n'est que trop évidente. L'écriture mathématique, dont

---

2 M. Caveing, "Quelques remarques sur le traitement du continu dans les Eléments d'Euclide et la Physique d'Aristote", in Coll., *Penser les Mathématiques*, Paris, Points Seuil, 1982. Cf. ch. 1, note 3, p. 3.

l'origine coïncide avec la naissance de l'écriture, décuple les capacités collectives de mémoire et la complexité des opérations qu'il est possible d'enregistrer. Elle participe d'une objectivation de l'inscription du sujet dans le temps, dans la mesure où elle augmente ses possibilités de différenciation, et lui permet un repérage qui se dégage de la seule généalogie. Au même titre que l'alphabet, la mise en place d'une base de numération, et d'un système de position, réalisent une considérable économie de signes, puisqu'elle autorise l'écriture d'un nombre aussi grand que l'on veut, par simple réitération ou déplacement d'un ou de plusieurs signes.

Mais cette richesse ne saurait faire oublier la discontinuité fondamentale du champ numérique que les systèmes de numération permettent de symboliser. Le système de numération des Babyloniens, dont témoignent par exemple les tablettes du règne d'Hammurabi, combine les bases 10 et 60, avec un principe de position. Les fractions s'y écrivent comme les entiers, et seul le contexte permet de lever les ambiguïtés d'une telle écriture. Ainsi, 92 s'écrit I<<<II, où I désigne l'unité à gauche, mais la soixantaine à droite, alors que < désigne 10. De même, <IIIII peut désigner 15, ou bien la fraction 1/4, qui correspond aux 15/60èmes de l'unité. Le système hiéroglyphique de numération des Egyptièns, dont témoigne par exemple le papyrus Rhind, est un système décimal non positionnel. 231 s'écrit Ihhh99. Seules les fractions de numérateur 1 sont envisagées, et s'écrivent en faisant surmonter le dénominateur du signe ⬭. Certaines fractions échappent à cette situation, comme la fraction 2/3, mais elles jouissent d'un statut particulier, quelque peu mythique, et sont associées à un symbole spécifique[3].

En Grèce, les signes du systéme décimal adopté pour compter ne sont autres que les lettres de l'alphabet[4]. Pour les Pythagoriciens

---

3 Cf. A. Dahan-Dalmédico, *Routes et Dédales*, Paris-Montréal, Etudes Vivantes, 1982, ch. 1 ; J. Ritter, "Babylone, -1800", & "Chacun sa vérité : les mathématiques en Egypte et en Mésopotamie", *Eléments d'histoire des Sciences*, ss. dir. M. Serres, Paris, Bordas, 1989, ch. 1 et 2; G. Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites*, Paris, Flammarion, 1975.

4 Dans le domaine de la logistique grecque, les nombres sont écrits avec les mêmes caractères que les mots, à ceci près qu'une barre au-dessus les en distingue. Cette écriture alphabétique des nombres, pour surprenante qu'elle puisse être, est plus facile à comprendre si on se souvient de la fascinante innovation que représente l'alphabet grec. Cette identification entre numération et écriture ne fera pourtant qu'accentuer le fait que le nombre soit envisagé comme une multitude d'unités, dont il est toujours aussi difficile d'envisager la partition, et celui que le champ numérique persiste à être perçu comme discontinu, atomistique en quelque sorte. Kristeva, J., *Le langage, cet inconnu,* Paris, Seuil, Coll. Points Sciences Humaines, p. 105-18.

cependant, la question de la représentation de la diagonale du carré ne se pose pas à propos de l'écriture des nombres, qui ressort de l'art de compter, c'est-à-dire d'un artifice de l'ordre de la pratique, appelé logistique. Elle est au contraire la question cruciale pour l'arithmétique pythagoricienne proprement dite, entendue comme théorie des nombres, et qui relève de la philosophie. C'est une arithmétique géométrique où la généralité des propriétés numériques est établie grâce à différentes configurations d'assemblages de points, dont chacun symbolise une unité substantielle[5].

2. De la nature du questionnement philosophique chez les Présocratiques ...

Il faut le rappeler : la science grecque ignore tout de cette expérimentation qui sera le fait de la "Révolution Scientifique" du 17ème siècle. Elle n'est pas non plus le produit d'une réflexion naïve et spontanée de la raison sur la nature. J.P. Vernant a bien montré comment elle transpose, sous une forme laïcisée et dans un vocabulaire plus abstrait, la conception du monde des mythes cosmogoniques[6]. Elle marque la prise de conscience d'une séparation entre l'être et le monde, une prise de conscience qui intervient dans les nouvelles cités de la côte ionienne. Le philosophe grec scrute les fondements d'un monde que ne garantit plus aucune souveraineté royale, et qui se doit donc de la dépasser, de l'englober, tant d'un point de vue logique que chronologique. Si sa pensée se distingue de celle du mythe, c'est dans un contexte où la confusion du sociologique et du psychologique, confusion entre la personne, le groupe et l'univers tout entier, autorise les transpositions sémantiques d'un domaine à l'autre[7]. C'est dans la mesure même où l'ordonnancement de l'espace, la création du temps, la régulation du cycle saisonnier ne sont plus garantis par le sacré que ces thèmes vont constituer l'objet privilégié du questionnement philosophique[8]. Ainsi s'opère une identification minutieuse de processus qui sont attribués à des puissances "matérielles" dont les propriétés

---

5 A. Dahan-Dalmédico & J. Peiffer, op. cit., p. 44.

6 Cf. annexe 4. Mythe et philosophie tentent ici de répondre au même type de questions, communes à toutes les cultures, même si elles y reçoivent des réponses de nature diverse : magique, religieuse, esthétique, philosophique, scientifique.

7 M. de Corto, "La vision philosophique d'Héraclite", *Laval théologique et philosophique*, 1960, n° 16, pp. 169-236, p. 190.

8 Il porte sur des interrogations du type : comment expliquer le jour, la nuit, l'été, l'hiver, et le perpétuel recommencement de certains phénomènes naturels? en vertu de quel principe les êtres naissent-ils et se développent-ils avant de décliner et de mourir? comment ce monde en apparence si confus et si désordonné peut-il être décrypté grâce à des principes simples que notre raison puisse comprendre?

correspondent à une transposition des qualités divines[9].

Dans ce contexte, la recherche philosophique consiste à envisager ce qui permet au monde de perdurer, dans son dynamisme même, au-delà des apparences, de se perpétuer tout en se modifiant, nous dirions : de vivre, les philosophes grecs auraient dits : d'être. Elle cherche à identifier un principe d'existence qui soit différenciateur sans être aléatoire. La question des origines du monde y est donc primordiale. Sa création est affirmée comme un processus de différenciation qui en autorise tout à la fois la permanence et le changement. A partir d'un état initial considéré comme confusionnel, posé comme un chaos au sein duquel rien ne saurait être connu ou reconnu, ces différenciations installent des distinctions dont la permanence assure l'ordre du monde. Le changement, conçu comme processus vital, est essentiellement continu, et sa continuité est inscrite dans la nature, dans la substance même des éléments fondateurs ainsi différenciés, et ce aussi bien dans les mythes de Thalès ou Anaximandre que dans la philosophie d'Aristote.[10]

Cette quête de permanence, que le philosophe appelle vérité, réalise la conversion symbolique de cette disparition du sacré, dont elle conserve le caractère d'évidence, d'universalité et d'absolue nécessité. Elle passe par l'énonciation d'un discours structuré, susceptible de juguler les incertitudes psycho-sociologiques d'une société dont la stabilité, la légitimité, n'étant plus garanties par un pouvoir de nature divine, passent par une appropriation collective et une diversification des fonctions du pouvoir, et des possibilités d'intervention de la pensée.

3. ... à la conception pythagoricienne du nombre.

Pythagore (≈-580, ≈-497) est présenté, selon les différents types de biographies consultées, tantôt comme le noyau d'une communauté mystico-religieuse, tantôt comme le fondateur d'une école qui installe la réflexion mathématique au coeur de la recherche philosophique, tant il est difficile pour un lecteur du 20ème siècle, d'intégrer le fait

9 Elle aboutira à la distinction fondamentale entre matière et esprit, ou plutôt entre animé et inanimé, à partir d'une réflexion portant sur l'être comme schème de ce qui est animé.

10 C'est le *Chaos*, chez Hésiode; *Nux*, *Erèbos*, *Tartaros*, dans certaines Théogonies attribuées à Orphée, à Musée et à Epiménide; et, plus important encore pour le propos de cet article, c'est l'*Apeiron*, le non-délimité, chez Anaximandre. J.P. Vernant, *Les origines de la pensée grecque* , Paris, PUF Quadrige, 1981, et J.P. Vernant, *Mythe et Pensée chez les Grecs*, Paris, Petite Collection Maspéro, 2 vol.1965.

que Pythagore fût les deux à la fois, et que l'une de ces spécificités ne saurait être dissociée de l'autre.

La pensée pythagoricienne est effectivement mystique. C'est par le mysticisme qu'elle tente de dépasser cette séparation si difficile à assumer entre l'homme et le monde. Le salut individuel y est conçu comme la réintégration de l'homme au tout par une assimilation progressive au divin[11], qui ne peut être atteint que grâce une ascèse communautaire, spirituelle et morale[12]. Les pratiques philosophico-religieuses, tant celles de Pythagore à Samos (jusqu'en ≈-480) que des Pythagoriciens à Crotone, et plus tard dans toute la Grèce, sont fondées sur l'idée première d'un ordre cosmique organisé par une harmonie, qui signifie à la fois beauté, perfection structurelle[13] et affinité universelle[14], autrement dit, par un ordre tout entier investi de puissance moralisante et unificatrice. Seule la connaissance d'une telle harmonie est censée permettre de réaliser cette union du même en soi et du même hors de soi, parce qu'elle participe tout autant de l'âme humaine que de cet univers vivant et divin auquel elle est intimement liée[15] et que les Pythagoriciens sont les premiers à dénommer *cosmos*. En tant que tel, le monde naturel n'est pas conçu comme un objet inerte, mais comme vivant, animé par des forces puissantes et mystérieuses que seule cette harmonie permet d'équilibrer[16].

C'est le nombre qui, dans la philosophie pythagoricienne, est considéré comme l'essence même de cette harmonie. Pourquoi le nombre, et comment est-il conçu? Plusieurs interprétations de ce caractère fondateur du nombre sont fournies par les historiens. Une origine monétaire, parce que sur l'île marchande de Samos,

11 W.K. Guthrie, *A History of Greek Philosophy*, Cambridge Un. Press, 1965, vol 1., p. 181-182.

12 La recherche d'une sublimation du temps fait intimement partie de cette ascèse. Les Pythagoriciens tentent de l'atteindre notamment par la maîtrise des exercices de mémoire, que pratiquaient avant eux les poètes ou aèdes de cette civilisation à tradition orale. C'est là un exercice de purification destiné à libérer l'âme du corps qui l'enchaîne à la vie présente. Dans le cadre de la conception cyclique du temps qui est la leur, et celle du monde grec en général, il permet de maîtriser le temps dans sa totalité, d'en rejoindre le commencement, donc d'échapper à la mort, au devenir. J.P. Vernant, *Mythe et Pensée*, I, op. cit., p. 80-107.

13 Guthrie, op. cit., p. 206, ainsi que Platon, "Gorgias", 5O7e et "Ménon", 81a-c, *Oeuvres Complètes*, Paris, Gallimard, 1950.

14 Guthrie, op. cit., p. 203.

15 Ibid., p. 206.

16 La conception d'une telle harmonie fait obstacle à l'idée d'une expérimentation, puisqu'elle bouleverserait l'équilibre que fonde cette harmonie, et qui fait du *cosmos* ce qu'il est.

l'économie monétaire est un phénomène récent, perçu comme un facteur quantitatif susceptible de réaliser une certaine forme d'unification des phénomènes[17]. Les constellations du Zodiaque constituent un autre modèle possible, celui d'objets cosmiques qui s'évanouissent et réapparaissent régulièrement, dont la forme est régie par le nombre d'unités que représentent leurs étoiles et par la forme géométrique qu'elles constituent[18]. Une telle représentation peut servir de base à une conception générale de l'univers, et semble ici d'autant plus prégnante que le nombre pythagoricien n'est pas clairement distingué des objets qu'il dénombre, et qu'il est associé à un ensemble de points qui n'ont pas perdu toute dimension[19]. Mais l'interprétation la plus fréquente, et la plus argumentée, de ce recours à une harmonie organisant le *cosmos* est celle de l'harmonie musicale, des rapports entre les sons de la lyre, ou plus vraisemblablement de cet instrument monocorde qu'était alors le canon[20]. Ainsi faut-il entendre le "Toutes choses sont nombres" des Pythagoriciens : des nombres qui sont à la fois notion abstraite et réalité intuitive, qui participent de la substance, c'est-à-dire d'une entité où matière et forme ne sont pas perçues séparément[21]. Il n'empêche que leur étude systématique des proportions d'entiers fait évoluer la description du *cosmos* vers une recherche de plus en plus formelle[22].

C'est bien parce que le nombre pythagoricien est ainsi investi d'une nature substantielle que la génération des objets physiques peut être envisagée à partir de celle des figures géométriques, elles-mêmes engendrées par les nombres. C'est le nombre qui, par sa nature, est la cause de tous les phénomènes naturels. Cette génération se confond avec l'idée d'un processus temporel. Dans ce processus

17 Guthrie, op. cit., p. 221.

18 L. Brunschwicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, Blanchard, 1981, p. 33.

19 M. Krasner, *La pluralité et l'infini dans la philosophie et la mathématique grecques*, Paris, Publications de l'Université Paris-Nord, Coll. Philosophie et Mathématiques, 1981, p. 15.

20 La longueur de vibration de la corde y est fixée par un pont amovible. Une corde deux fois plus longue vibre à une vitesse moitié, et l'intervalle correspondant est d'un octave en fréquence (rapport inverse). Le rapport de quinte correspond à 3/2, le rapport de quarte à 4/3. A l'addition des intervalles musicaux correspond la multiplication des rapports de fréquence. Ainsi le *cosmos*, manifestation de l'ordre et de la beauté, semble organisé par les nombres 1, 2, 3 et 4, dont la somme 10 est un nombre considéré comme parfait et contenant la nature même du nombre.

21 Comme elles le seront par Aristote. Cf. II. Guthrie, op. cit., p. 240.

22 Ibid., p. 4.

d'engendrement, c'est cette unité qui constitue le principe[23].

La philosophie pythagoricienne est en même temps fondée sur une dualité des formes numériques, qui s'articule sur une table de dix oppositions, qu'Aristote nous rappelle en ces termes :

"D'autres (pythagoriciens), parmi ces même philosophes, reconnaissent dix principes, qu'ils rangent en deux colonnes parallèles : Limite et Illimité, Impair et Pair, Un et Multiple, Droite et Gauche, Mâle et Femelle, en Repos et Mû, Rectiligne et Courbe, Lumière et Obscurité, Bon et Mauvais, Carré et Oblong."[24]

Dans ce système dualiste de valeurs, où l'éthique et l'ontologique ont le même poids, ce sont les nombres - entiers, finis, représentés par des points - et les rapports numériques, qui confèrent aux choses l'ordre et la perfection : un composé est bon s'il est fait de rapports déterminés. Le *cosmos*, parce qu'il est vivant et divin, est bon. Et parce qu'une telle harmonie, à la fois divine et numérique, régit l'ordre dans les relations entre ses parties, il est limité. Ainsi l'harmonie musicale elle-même impose-t-elle une limite (rapport d'entiers) à l'illimité (le continu de la variation du son musical) pour

23 C'est la raison pour laquelle les nombres pythagoriciens ont une signification mystique : ils ont une réalité indépendante des phénomènes puisque première, ils sont un principe divin qui gouverne la structure du monde tout entier. Dans la philosophie pythagoricienne, leur signification mystique symbolise également des qualités morales et d'autres abstractions. Ce qui aboutit parfois à une attitude non scientifique qui consiste à forcer les phénomènes pour qu'ils obéissent à des aspects théoriques fixés *a priori*, comme c'est le cas de l'existence supposée d'une dixième planète ou Antiterre, parce qu'il semblait inconcevable que le nombre de planètes ne fut pas un nombre parfait. Certains nombres, ou certaines figures géométriques qui les représentent sont sacrés, comme par exemple le triangle, ou *tetratys* qui représente le nombre 10, et le pentogramme ou *pentalpha*, qui deviendra plus tard un symbole magique très connu (Paracelse, Faust de Goethe)

```
      *                          *
    *   *                   *         *
   *  *  *
  *  *  *  *                    *    *
```

cf. Guthrie, p. 213, ainsi que les commentaires d'Aristote dans *Métaphysique*, 986a3, et *Du ciel*, 293a25.

24 Aristote, *Métaphysique*, Vrin, A5, l. 10-27, p. 24. Le dualisme de ce système de valeurs, tant éthiques que conceptuelles, ne manquera pas de marquer très profondément, non seulement l'idéologie qui s'attachera à la science dans les siècles ultérieurs, mais le dualisme chrétien, par le biais d'un platonisme héritier du pythagorisme.

faire du limité, de l'ordre, de l'harmonie[25]. Le fini, le limité est donc ce qui rend intelligible, rationnel en ce sens qu'il permet de tenir un discours, un *logos* défini, c'est-à-dire fini. Chez les Pythagoriciens, est irrationnel ce qui ne peut être dit, c'est-à-dire ce que le *logos* est impuissant à exprimer en termes finis. L'intelligible se confond avec ce qui reste dans la mesure, ou avec ce qui est mesurable, fixant les rapports, les proportions des choses entre elles et au tout. Et les devises pythagoriciennes : "Toutes choses sont nombres", "Rien de trop", "Observe la limite", rendent compte des articulations principales de cette philosophie, dans laquelle l'infini occupe, en tant qu'instrument de connaissance, un rang inférieur au fini.

4. Les exigences de la raison démonstrative : il n'existe aucun rapport de nombre exprimant la relation ontologico-opératoire entre diagonale et côté du carré.

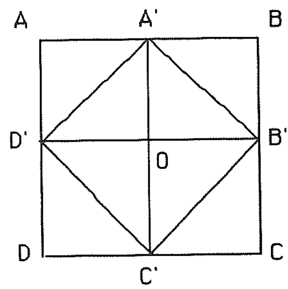
C'est donc confrontés à un système discontinu de signes en même temps qu'à leur conception métaphysique de l'entité numérique, et à une quête philosophique envisagée comme l'élaboration d'un discours rigoureux que les Pythagoriciens font face à cette question majeure, qui dépasse de loin le seul cadre mathématique : comment un système discontinu de signes peut-il permettre de rendre compte des phénomènes continus, de saisir le monde dans sa globalité ?

La contradiction éclate lorsque Nicomaque démontre l'inexistence d'un rapport de nombres[26] entre la diagonale et le côté du carré. La démarche est simple. Elle s'appuie sur un raisonnement par l'absurde, qui consiste à supposer que la diagonale du carré est commensurable à son côté, et à réfuter une telle hypothèse. Voici une présentation rapide et quelque peu modernisée, des différentes étapes de la démonstration.

* Sur une figure aussi élémentaire que la figure ci-dessus, il est clair que le carré A'B'C'D' est au carré AA'OD' comme 2 est à 1. Si

25 Guthrie, op. cit., p. 248. On la retrouve dans la cosmologie pythagoricienne où chacune des révolutions des planètes et des étoiles fixes est supposée émettre un son musical propre, que nous ne percevons pas parce que nous l'entendons depuis notre naissance. Et les dimensions comparées des orbites planétaires sont censées obéir à l'entremêlement des deux progressions géométriques fondamentales de raison 2 et 3 : 1, 2, 3, 4, 8 9 16 27, 32, 81.
26 donc l'impossibilité d'une unité commune, et de la commensurabilité.

le rapport de leurs côtés A'D' et A'O s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers premiers entre eux, alors $(\frac{p}{q})^2 = 2$, ce qui équivaut à $p^2 = 2q^2$.



* p^2 est donc un nombre pair. Et les Pythagoriciens savent que le carré d'un nombre impair est un nombre impair. Ce qui implique la parité de p, qui peut alors s'écrire 2r. Dans ces conditions, q est un nombre impair.

* $p = 2r$ et $p^2 = 2q^2$ conduisent à $2r^2 = q^2$; et le même raisonnement permet d'affirmer que q est aussi un nombre pair.

* q est donc affirmé à la fois comme nombre pair et comme nombre impair, ce qui est impensable[27].

Ce faisant, les Pythagoriciens établissent, grâce au principe de non-contradiction, qu'il n'existe aucun rapport de nombre qui soit susceptible d'exprimer le rapport de la diagonale au côté du carré. La difficulté dépasse le simple problème de logique : elle a des répercussions métaphysiques essentielles, que la traduction moderniste de la démonstration ne permet pas de percevoir. L'existence constructible d'un rapport de grandeurs continues qui ne peut être exprimé comme un rapport d'entiers oblige à renoncer à la maîtrise du continu par le numérique, sous quelque forme qu'il s'exprime alors. Pire, elle menace l'existence même de toute pensée, puisque le *logos* lui-même est conçu comme la mise en rapport des choses par le biais du discours, dans un contexte qui est celui de la langue grecque, où le même mot[28], *logos* désigne aussi bien le rapport d'entiers, que la possibilité d'une expression langagière rigoureuse, qui se donne en termes finis. C'est pourquoi ce rapport de

27 On dirait plus volontiers aujourd'hui : p et q étant alors tous deux affirmés comme nombres pairs, la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, ce qui est contraire à l'hypothèse.
28 La traduction française *raison* , dérivée de la traduction latine *ratio*, maintient cette double signification, dont l'une appartient aux mathématiques et l'autre à la langue commune.

la diagonale au côté du carré est qualifié d'irrationnel en même temps que d'*alogon*, c'est-à-dire de non-calculable tout autant que d'impensable.

C'est bien parce que le nombre pythagoricien veut traduire l'essence de l'être que l'unité est porteuse d'ontologie et que sa divisibilité pose problème. Ce nombre étant un aggrégat d'unités ne saurait être autre qu'un entier. Et de ce fait, l'unité elle-même n'est pas un nombre, puisqu'elle sert à le définir[29]. Celle-ci est donc une et première par principe, mais, étant essentielle, autrement dit substantielle, elle ne saurait être arbitrairement choisie comme elle l'est aujourd'hui, et elle se doit d'être finie. C'est cette caractérisation ontologique qui entre en contradiction avec ses spécificités opératoires dès qu'il s'agit de mesurer le continu.

Cette crise de la rationalité, outre qu'elle menace la maîtrise du continu par la finitude, que ce soit celle du nombre ou celle du discours, semble donc ouvrir la voie à "l'univers redoutable de la démesure"[30] que le *logos* tentait justement de contenir. C'est d'ailleurs sous forme de légende que la doxographie rend compte de la crise épistémologique ouverte par un tel résultat. Celle-ci rapporte que son auteur présumé, Hippase de Métaponte, périt noyé dans un naufrage[31].

5. La place du *logos* dans la cité et dans la science grecque.

Civilisation de la parole, dotée d'une écriture qui décuple ses possibilités d'échanger et de transmettre, communauté d'hommes libres assumant les nécessités de sa propre cohésion par le biais d'institutions qu'elle a elle-même produites, toutes ces spécificités de la cité grecque s'articulent autour de la maîtrise du discours, puisque c'est par elle que passe la maîtrise d'un ordre qui garantit l'équilibre socio-politique. Ce faisant, elles produisent, relativement au *logos*,

29 C'est là une distinction qu'Euclide reconduira. D'après la définition 1 du livre 7, "L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une".

30 J.T. Desanti, "Une crise exemplaire : la "découverte" des nombres irrationnels", *Logique et Connaissance scientifique*, ss dir. J. Piaget, op. cit., 439-464, p. 441.

31 Jamblique, *Vie pythagorique*, 88; *De la science mathématique commune*, 25; in J.P. Dumont, D. Delattre, J.L. Poirier éd., *Les Présocratiques*, Paris, Gallimard, 1988, p. 76. Le scoliaste anonyme qui commente le livre X des *Eléments* d'Euclide l'interprète ainsi : "Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de formes doit demeurer caché. Que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors, elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants." J.T. Desanti, op. cit., p. 441.

une confiance qui l'autorise à étendre les exigences du débat contradictoire pratiqué dans la cité à bien d'autres domaines que celui de la seule organisation politique. C'est dans ce cadre de référence qu'à partir du 7ème siècle, et d'abord en Ionie, ces écoles philosophiques proposent des systèmes d'explication du monde soumis à des argumentations rhétoriques, où la création ne relève plus de l'accouplement des dieux, ni les catastrophes de leur colère, ou les guerres de leur conflit. La naissance de la pensée philosophique correspond à la recherche de principes premiers dont la nature même suffise à déterminer l'organisation logique du monde qu'ils engendrent, selon des relations qui ne sont plus conçues comme biologiques, mais comme causales. Elle explicite un type rationnel de discours, qui accompagne la différenciation progressive du savoir en disciplines distinctes, structurant les catégories mentales et passant par les différents types de maniement des signes[32].

Dans ce contexte, cette raison grecque transpose sur la nature, son origine et sa composition, les termes d'une réflexion sur l'ordre dans la *polis*, où la maîtrise du dynamisme de la cité passe davantage par la maîtrise de la rhétorique que par celle de la nature[33]. La démarche des philosophes grecs ne saurait donc être assimilée à celle des épistémologues du 20ème siècle cherchant à spécifier les caractères distinctifs du sujet connaissant, de l'objet de connaissance et de la relation qui les lie[34]. Leur fonction sociale prolonge bien davantage celle des scribes et des prêtres des anciens royaumes orientaux, tout en déplaçant leur mode de pensée et leur domaine d'intervention.

II. L'ontologie du mouvement et du continu chez Aristote.

La résolution de cette crise de la pensée aboutit à une différenciation radicale entre le champ de l'être et le champ de l'opératoire, que vont réaliser Aristote sur le plan philosophique et Euclide en mathématiques. Lorsqu'il exclut tout recours à un quelconque infini en acte, et affirme haut et fort que l'infini ne saurait

32 J.P. Vernant, *Mythe et pensée*, op. cit., Petite Collection Maspéro, 1965, t. 1, p. 6-7.

33 Ibid., p. 131-133. Etant donnés l'état du développement des techniques, et les difficultés de leurs relations avec le discours de la science, issu de la philosophie, la maîtrise de la nature, telle qu'elle sera envisagée par Descartes, est inconcevable pour l'aristocratie démocratique des citoyens à laquelle appartiennent les philosophes, même s'il arrive à ces derniers d'y puiser certains modèles de représentations du monde (comme les sphères armilliaires de Platon).

34 Cf. annexe 5. J. Piaget, "L'épistémologie et ses variétés", *Logique et connaissance scientifique*, ss. dir. J. Piaget, Paris, Gallimard, 1967, p. 3-14.

être qu'en puissance, et que comme tel, il suffit aux mathématiciens, Aristote explicite en effet l'autonomie du champ opératoire en dégageant les propriétés du continu divisible, et en respectant l'exigence de finitude de toute rhétorique[35]. Il tente d'échapper aux difficultés de ses prédécesseurs à propos de la définition de l'unité comme être.

Les conceptions aristotéliciennes de l'être et du mouvement sont indissociables, et s'articulent toutes deux dans sa philosophie du devenir. En dépit de la vigueur des critiques qui s'élèveront à la fin de la période médiévale contre la pensée péripatéticienne, ou plutôt contre la pensée scolastique, qui en est la forme remaniée datant du 13ème siècle, il est essentiel de souligner qu'Aristote élabore, essentiellement dans sa *Physis* mais aussi dans d'autres ouvrages, comme le *Traité du Ciel*, la première théorisation raisonnée et systématique qui fasse du changement autre chose qu'une affection superficielle ou un écoulement irrationnel. De fait, la théorie aristotélicienne du mouvement en est un modèle métaphysique, qui coordonne en un seul et même système une cosmologie, une mécanique, une théorie des éléments, et une ontologie, toutes fondées sur un seul et même ensemble de principes.

Il n'est pas question de préciser ici toutes les spécificités et implications de la théorie aristotélicienne de l'être et du mouvement, mais seulement de préciser ses fondements et d'indiquer comment elle intervient dans sa conception du continu. L'être dans sa totalité ne saurait être qu'en puissance, défini comme virtualité. Porteur de toutes ses potentialités, il est ce qu'il adviendrait si elles se réalisaient, et ne peut donc être saisi, embrassé, que par la pensée. L'être tel qu'il est réalisé ici et maintenant est défini comme être en acte. Introduisant le mouvement à partir de l'idée de manque, de privation[36] relativement à un état potentiel de l'être, Aristote signifie que c'est dans l'être lui-même que le changement trouve finalement sa cause. Il pose l'existence pour tous les êtres d'une nature comme principe même de mouvement, un mouvement-changement défini comme processus de réalisation d'un devenir qui leur soit propre, c'est-à-dire comme médiation entre l'être en acte et l'être en puissance. Par cette distinction, Aristote réalise une synthèse entre la recherche des fondements de la permanence et l'intégration des possibilités du devenir. Une fois individué, l'être est substance. Et toute substance est à la fois matière et forme. La forme, immuable et parfaite, est à la fois principe d'organisation et d'évolution, elle fournit à l'être toutes les

35 Cf. annexe 3. J.T. Desanti, op. cit., p. 451.

36 Conversion de l'idée anthropomorphique de désir.

qualités destinées à se réaliser dans un individu particulier. La matière, support de la forme, est principe d'individuation. Elle est éternelle, car elle est définie comme sujet de tout ce qui s'engendre, et ne saurait donc être née avant d'être engendrée. Elle est inconnaissable, puisqu'elle ne peut être observée qu'informée.[37]

Pour Aristote, le mouvement, comme la grandeur et le temps, sont ensemble, et pour les mêmes raisons à la fois logiques et ontologiques, des continus, terme qu'il définit comme là encore comme potentialité, puisqu'un continu "est divisible en parties qui sont toujours divisibles"[38]. Quant à l'infini, il est, pour les mêmes raisons que l'être, distingué entre infini en acte et infini en puissance, Aristote affirmant que les mathématiciens n'ont recours qu'à l'infini en puissance et que l'infini en acte n'existe pas. Ainsi Euclide pourra-t-il, sur les pas d'Aristote, traiter de problèmes relatifs à l'infini en ne manipulant que des quantités finies, et en explicitant cette possibilité toujours renouvelée de perpétuer l'opération engagée.

III. Les *Eléments* d'Euclide[39] et le traitement opératoire du continu

C'est donc la question de la maîtrise opératoire du continu qui impose la structure des *Eléments* d'Euclide, dont les opérations portent désormais sur les rapports de grandeurs, et s'articulent sur des constructions qui relèvent de la maîtrise de l'espace. Les *Eléments* constituent en ce sens l'aboutissement d'une nouvelle situation d'équilibre entre les besoins de la cohérence du discours, et l'opérativité des mathématiques de cette époque, une solution à la crise de la rationalité qui, en omettant de définir les grandeurs, laisse en suspens la question de l'ontologie du continu, désormais soutenue par la conception aristotélicienne du mouvement.

Si on en juge d'après ce qu'en dit Proclus (410, 485), bien tardivement il est vrai, dans son *Commentaire* d'Euclide, les *Eléments* nous livre un travail de tradition hellénique[40], fournissant un ensemble logiquement structuré de démonstrations irréfutables, pour des

37 M. Clavelin, *La philosophie naturelle de Galilée*, Paris, A. Colin, 1968, p. 21.

38 Aristote, *Physique*, op. cit., 231b17, t. 2, p. 43, ainsi que 231b18-232b4.

39 Bien que les *Eléments* soient reconnus comme un ouvrage collectif, celui de l'école d'Euclide, je n'en poursuivrai pas moins cette présentation en parlant spécifiquement d'Euclide et des *Eléments* d'Euclide, afin d'en faciliter l'énonciation.

40 C'est également le cas des travaux d'Apollonius (-262, -190). Par contre, ceux de Héron et d'Archimède, tout en restant fortement ancrés dans cette tradition hellénique devenue euclidienne, introduiront quelques éléments nouveaux.

théorèmes énoncés par ses prédécesseurs[41], depuis Thalès jusqu'à Théêtête[42] et Eudoxe[43]. Ils ne font par contre aucune référence aux démarches heuristiques qui ont permis d'en établir les résultats. Tel n'est manifestement pas leur propos, tout entier consacré à établir l'enchaînement rigoureux des propositions, d'autant qu'ils visent des résultats issus d'une si longue tradition qu'ils sont vraisemblablement considérés, au moment où intervient Euclide, comme des acquis dont on n'interroge même plus l'origine. Mais la lecture de Platon et d'Aristote fournit des indications précieuses sur l'existence d'une forme de pensée dont l'exigence de rigueur, entreprise dans l'école de Pythagore, mise en place dans les écoles d'Eudoxe et de Platon, et enrichie de la logique aristotélicienne, est bien antérieure à la rédaction des *Eléments*, même si c'est avec Euclide qu'elle arrive à maturité.

L'expression grecque équivalente à ce titre s'écrit στ οιχεια , dont le sens est très proche de celui du mot "alignement". Le verbe correspondant se réfère à l'acte d'avancer comme les hoplites en ligne de bataille[44], de sorte que le nom se réfère à la ligne, la colonne, la rangée, et peut désigner l'alignement des atomes du langage dans l'ordre de la phrase, ce que J. Dhombres envisage comme la volonté consciente et assumée de présenter ce corpus mathématique selon un enchaînement linéaire de définitions, axiomes et propositions, qui renvoie à une recherche systématique d'ordre et de classification, et

41 M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, O.U.P., 1972, p 57. C'est ainsi que le pythagoricien Archytas de Tarente (-428, -347) avance plusieurs propositions d'Euclide des livres 7 et 8. L'historien des mathématiques van der Waerden a d'ailleurs montré que de nombreuses propositions et preuves du livre 8 ont été produites par Archytas et ses collaborateurs. Par contre, toutes les démonstrations antérieurement produites n'étaient pas néssairement conformes à l'esprit des *Eléments* d'Euclide, notamment celles que Démocrite est censé avoir proposé pour le calcul d'aires curvilignes, et qui auraient fait appel à des considérations infinitésimales.

42 Théêtête (≈-410, -369) est un des principaux membres de l'école platonicienne. S'il établit l'incommensurabilité à l'unité, des grandeurs que nous notons aujourd'hui, $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, ..., \sqrt{17}$, c'est par des méthodes faisant intervenir des faits sensibles du monde matériel, qui ne pouvaient convenir à l'orthodoxie de cette école. Platon lui a consacré l'un de ses *Dialogues*.

43 Eudoxe (-408,-355), élève d'Archytas, né et mort à Cnide en Asie Mineure, travaille avec Platon à l'Académie. On lui attribue la direction à Cyzique (Asie Mineure) d'une école qui rivalisait avec celle de Platon. Astronome, médecin, géomètre, législateur, géographe, il est l'auteur de la première théorie astronomique du mouvement des cieux. Sa réputation était telle qu'elle éblouissait encore Eratosthène (-284,-192), contemporain d'Archimède. Les livres 5 et 10 des Eléments lui sont attribués.

44 J.P. Vernant, *Origines*, op. cit., p. 58-59.

où la dette aux *Analytiques* d'Aristote est évidente[45].

L'oeuvre euclidienne met ainsi l'irréfutabilité du discours et la représentation géométrique des grandeurs au service d'un traitement opératoire du continu qui puisse se passer d'une représentation numérique spécifique des irrationnels. Or, dans la cité grecque, faut-il le rappeler, la maîtrise de ce dynamisme auquel le continu ne saurait manquer d'être encore métaphoriquement attaché, de par l'origine même de la démarche philosophique, passe par la maîtrise du *logos*, un *logos* qui ne saurait perdre de vue son objet pour devenir pur formalisme. Lire *les Eléments* d'Euclide en ignorant ce contexte peut facilement conduire à une interprétation trop moderniste de son contenu, en ne s'appuyant que sur la rigueur abstraite de sa présentation.

1. L'organisation générale de l'ouvrage

Sa composition reflète la réorganisation dont a fait l'objet l'ensemble des connaissances antérieures pour pouvoir offrir les *Eléments* comme solution à la crise du rationnel. Ils sont entièrement articulés autour de la théorie de la mesure[46] que constitue le livre 5, qu'on peut à juste titre qualifier de traitement qualitatif de la quantité puisque n'y figure aucune notation, aucun symbolisme, ni aucune référence directe au champ numérique[47]. Les quatre premiers livres servent en effet à mettre en place les bases géométriques - constructions de figures, définition géométrique des opérations et comparaison d'aires de surfaces rectilignes - sur lesquelles va fonctionner cette théorie. Les livres 3 et 4 présentent les propriétés géométriques indispensables aux constructions du livre 10 et à l'étude des aires curvilignes du livre 12. Les livres 6 à 9 sont rejetés après le livre 5, alors qu'ils contiennent des résultats qui lui sont bien antérieurs :

- le livre 6 théorise les acquis des architectes de Milet, depuis Thalès[48], sur la similitude[49], dont les proportions du livre 6 servent à préciser l'étude quantitative, tout en lui donnant un maximum de généralité, puisque les rapports envisagés sont désormais quelconques;

45 Cf. annexe 1. J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu, épistémologie et histoire*, Paris, Cedic/Nathan, 1978, p. 30.

46 Proclus attribue à Eudoxe le contenu de ce livre 5.

47 L. Brunschwicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, p 97.

48 Dans la proposition 12, le théorème de Thalès est utilisé pour établir l'existence d'une quatrième proportionnelle à 3 longueurs données.

49 Les quatre premiers livres ne contiennent aucun mode de démonstration faisant appel à la similitude.

- la théorie des nombres des livres 7 à 9 n'est autre que la théorie pythagoricienne des proportions d'entiers, qui apparaît ici comme un cas particulier de la théorie des grandeurs, alors qu'elle a servi de base à l'étude des propriétés opératoires et que la théorie des grandeurs est née de son dépassement.

Le manque d'équilibre entre les différents livres, ainsi que certaines répétitions, témoigne de son rôle compilatoire[50].

2. La structure axiomatico-déductive des Eléments

L'approche axiomatique ou postulationnelle de l'ouvrage n'est pas sans rapport avec la notion de limite dans la mesure où elle sert justement à traiter des problèmes du continu en évitant tout recours à l'infini.

Le livre 1 s'ouvre sur 18 définitions qui manifestent le fondement géométrique, en même temps qu'intuitif, des mathématiques euclidiennes. Celle de la droite est particulièrement remarquable, qui traduit l'expérience de visée de l'architecte ou du géomètre de terrain[51] : la ligne droite est celle qui est également placée entre ses points. Cette intuition pratique[52], qui n'intervient plus du tout dans l'édificie théorique, fournit des définitions globales et statiques, qui sont précisément de nature à éviter tout recours à une conception générative de la ligne, de la surface ou du volume, dont Archimède suggère pourtant qu'elle n'est pas absente des travaux de Démocrite, aujourd'hui perdus[53]. Comme le précise M.E. Baron :

"Dès le départ, il est clair que l'entreprise concerne le monde réel et non un système abstrait quelconque. Tous les concepts qui ne sont par immédiatement compréhensibles en termes concrets simples tels que les infinitésimaux, la vitesse instantanée, la divisibilité à l'infini, sont complètement éliminés. ... Tout le contenu des 13 livres est exprimé dans une terminologie géométrique et a constamment recours à une imagerie spatiale. ... Avec Euclide, les Grecs rejettent,

50 Les livres 7, 8 et 9 reprennent pour les proportions d'entiers bon nombre des résultats obtenus au livre 5 pour les rapports de grandeurs, sans que soit précisé qu'il s'agit là de cas particuliers. La 1ère partie du livre 13 reprend certains résultats des livres 2 et 4. Les livres 5 et 10, dont l'unité est évidente, sont traditionnellement attribués à Eudoxe, ou parfois à Théêtête, avec le livre 13.

51 Remarque de Mr. Ch. Houzel.

52 Cet appui direct sur les données élémentaires de l'expérience témoigne également de l'influence aristotélicienne.

53 Archimède, "Lettre à Eratosthène", "La méthode relative aux théorèmes mécaniques", *Les oeuvres complètes, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon*, trad. P. Ver Eecke, Paris, Blanchard, rééd. 1966. M.E. Baron considère cette suggestion comme vraisemblable.

au moins formellement, le concept fructueux de lignes comme collections de points et de surfaces comme collections de lignes : la surface est seulement la frontière d'une solide, une ligne la frontière d'une surface, un point l'extrémité d'une ligne"[54]

Si ces hypothèses s'appuient sur une intuition du monde physique, il est essentiel d'insister sur le fait qu'il s'agit pourtant de définitions nominales, qui ne donnent de signification aux objets géométriques que du point de vue du discours. Mais ces définitions nominales ne suffisent pas à spécifier ces objets. Ce sont les six demandes ou postulats qui accompagnent ces définitions qui permettent de le faire, en les donnant à voir grâce aux constructions qu'ils autorisent et qui, réalisées uniquement à la règle et au compas, équivalent à des théorèmes d'existence[55]. La construction assure donc la vérification du discours vis-à-vis de la réalité idéelle. C'est pourquoi L. Brunschwicg préfère parler de système axiomatico-déductif, ou catégorico-déductif, plutôt qu'hypothético-déductif[56].

Quant aux axiomes ou notions communes, qu'il s'agit également d'admettre, ils définissent l'équivalence de la mesure, qui peut être appréciée :

- de notre point de vue, comme une notion fondamentale dans la construction d'un système déductif formel[57],
- et historiquement, comme une affirmation des conditions d'invariance de l'égalité - cette isonomie si fondamentale à la pensée grecque - par rapport les opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division par deux[58]. Pas d'équivalence des formes géométriques sans cette invariance, sans cette valeur fondamentale de l'isonomie dans la production même du discours

54 M.E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Oxford, Pergamon Press, 1969, p 26 (traduction personnelle).

55 Il faut noter tout particulièrement le 5ème postulat, ou postulat des parallèles (ou axiome d'Euclide), comme articulation fondamentale de cette géométrie euclidienne, et dont le dépassement, essentiel au début du 19ème siècle, conduira à l'élaboration des géométries non-euclidiennes. Son énoncé est d'autant plus remarquable qu'il diffère grandement de celui qu'on apprend à l'école, et permet d'apprécier l'évolution du discours, pour une même théorie, à plusieurs siècles d'intervalle : "Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits".

56 L. Brunschwicg, op. cit., p 91.

57 M. Baron, op. cit., p. 26.

58 Il faut savoir que la multiplication et la division par deux (duplication et dédoublement) ont longtemps constitué des opérations à part entière. On en trouve trace dans les traités d'arithmétique commerciale au 15ème et au 16ème siècles.

cohérent, et qui relève ici d'un traitement géométrique de l'espace[59].

3. La théorie des grandeurs.

Parce que la crise de la rationalité a mis en évidence l'impossibilité de donner des résultats numériques directs à propos des longueurs, des aires et des volumes quelconques, le livre 5 met en place, à propos des rapports de grandeurs, toutes les propriétés opératoires qui permettront de comparer des grandeurs irrationnelles (livre 10) ou d'obtenir des aires curvilignes (livre 12), en respectant l'exclusion de l'infini (en acte) spécifiée par Aristote. C'est par le biais de ces rapports, dont le statut demeure ambigu, que le champ opératoire va pouvoir intégrer la mesure des grandeurs continues[60]. Cette nécessité de recourir aux rapports dans tout problème de mesure interviendra jusqu'à ce que Descartes affirme explicitement la liberté de choisir une unité arbitraire. Jusqu'au 17ème siècle, tous les résultats sont donc exprimés sous forme de rapports, ce qui est, pour le lecteur du 20ème siècle, tantôt une facilité, puisque la simplification de certains d'entre eux peut donner des énoncés simples, tantôt un inconvénient, parce que cette présentation dissimule des résultats aujourd'hui connus sous d'autres formes[61]. De nombreuses dénominations spécifiques aux mathématiques grecques s'enracinent dans ce passage obligé par la comparaison des rapports, comme celles de "rectification d'une courbe", de "quadrature d'une surface", et de "cubature d'un volume"[62].

Euclide ne définit donc pas ce qu'il entend par grandeur[63] (déf. 1 et 2), pas plus qu'il ne précise, au-delà d'une simple analogie, ce qu'il entend par leur raison (déf. 3), dont il ne définit que l'égalité, c'est-à-dire la proportion (déf. 4). Ces définitions n'ont de sens que relativement

59 M. Serres, "Gnomon : les débuts de la géométrie en Grèce", *Eléments d'histoire des Sciences* (ss dir.), Bordas, 1989, p. 94. L'auteur souligne d'ailleurs à ce propos qu'il n'y a pas de connaissance sans cette invariance.

60 Il s'agit là d'une potentialité, puisque toute mesure suppose, dans cet ouvrage, un procédé de construction qui permette d'obtenir la grandeur et de la comparer à une autre.

61 L'énoncé du théorème où Archimède compare l'aire et le périmètre du cercle comporte ces deux aspects. Son expression sous forme de rapport provient de l'impossibilité d 'une conception numérique de ce qu'on nommera π au 18ème siècle : "Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base", autrement dit, le rapport entre l'aire et le périmètre du cercle est égal au demi-rayon.

62 Il s'agit de comparer la longueur d'une courbe à celle d'une ligne, l'aire d'une surface à celle d'un carré, le volume d'un solide à celui d'un cube.

63 Cf. annexe 2. Cette absence se réfère au fait qu'Euclide abandonne l'ontologie des grandeurs pour ne se consacrer qu'à l'étude de leurs possibilités opératoires.

au problème de la mesure, mesure qui ne signifie elle-même que relativement au nombre entier, entendu comme nombre de fois.

La définition 5 fixe fondamentalement les limites de toute comparaison des grandeurs - donc de l'ouvrage lui-même - selon la raison, c'est-à-dire, techniquement, selon le rapport, et idéologiquement, d'un point de vue rationnel. Elle exclut tout recours au concept d'infinitésimal, c'est-à-dire de grandeur infiniment petite mais différente de O, ainsi que de grandeur infiniment grande. Les seules grandeurs comparables pour les mathématiques euclidiennes, et qu'on dit aujourd'hui archimédiennes, sont celles qui répondent à ce critère, aujourd'hui connu sous le nom d'axiome d'Archimède, parce que celui-ci l'utilisera abondamment. [64]

La définition 6 doit retenir toute notre attention, non seulement du fait de sa complexité, mais parce qu'elle fixe le critère d'égalité des raisons, et intervient donc directement dans la démonstration des propositions, notamment celle des propositions 11, 15 et 22 de ce livre[65].

64 Euclide bute cependant sur la difficulté des grandeurs non-archimédiennes à propos de l'angle corniculaire ou angle contingent, formé par un arc de cercle et la tangente à ce cercle en l'une de ces extrémités (livre 2, prop. 16) : le type de définitions des *Eléments*, à la fois finitiste et géométrique, rend inconcevable d'attribuer la valeur O à un tel angle, et plus généralement à l'angle de deux courbes, alors qu'il détermine une portion d'éspace. Historiquement, cette référence constante à l'axiome d'Archimède comme seul outil de comparaison des grandeurs empêchera les mathématiciens du 18ème siècle de travailler en toute liberté sur les infiniment petits. De ce point de vue en effet, des "grandeurs" telles que x^2 et x^3 ne sont pas comparables au voisinage de O. Cf. J. Dhombres, op. cit., p. 30.

65 Cette définition a aussi un rôle crucial du point de vue historique puique, à supposer que l'ensemble des raisons puisse être identifié à celui des rationnels, elle équivaudrait au concept de coupure défini par R. Dedekind au 19ème siècle, grâce auquel il donne une construction des réels à partir des rationnels. M.E. Baron (op. cit.) établit en effet assez clairement cette équivalence de la manière suivante :
Soient α et β deux nombres (rationnels ou irrationnels) qui chacun divise l'ensemble des rationnels, A et B pour a, A' et B' pour b, tels que :
si $\frac{n}{m} \leq \alpha$ alors $\frac{n}{m} \in A$ et si $\frac{n}{m} > \alpha$ alors $\frac{n}{m} \in B$; et de même :
si $\frac{n}{m} \leq \beta$ alors $\frac{n}{m} \in A'$ et si $\frac{n}{m} > \beta$ alors $\frac{n}{m} \in B'$
En effet, la définition 6 s'écrit, si $\alpha = \frac{a}{b}$ et $\beta = \frac{c}{d}$
a = b pourvu que, pour tous les entiers m et n, on ait :
na = mb si et seulement si nc = md,
na < mb si et seulement si nc < md,
na > mb si et seulement si nc > md,
c'est-à-dire : A=A' et si B=B', d'où $\alpha = \beta$.

Les définitions suivantes concernent l'ordre des raisons (déf. 6 à 8), ainsi que le vocabulaire des proportions qu'on peut former à partir d'une proportion donnée[66]. Quant aux propositions, elles établissent les propriétés classiques de ces proportions, en liaison avec la possibilité d'opérer selon les définitions précédentes et avec la transitivité de l'égalité. Il est temps de remarquer que l'écriture : A est à B comme C est à D confère à la rhétorique démonstrative, en même temps qu'un rythme très caractéristique, sans doute fort important lors de sa transmission orale, enracinée dans un certain rituel, une lourdeur dont le lecteur moderne se passerait volontiers, mais qu'il convient de respecter afin que soit préserver le climat dans lequel les mathématiques vont évoluer jusqu'au 17ème siècle.

Fondamentale est également l'absence dans ce cinquième livre de toute référence, non seulement au quantitatif, mais surtout à la géométrie, à tel point que si les axiomes y sont nécessaires, les postulats n'y sont aucunement utilisés. C'est une des raisons, sans doute la plus importante, pour lesquelles ce livre 5 est historiquement considéré comme un chef d'oeuvre de la pensée formelle, à tel point qu'une question récurrente à son propos est celle de savoir s'il correspond à une construction de fait de l'ensemble des réels positifs[67], alors qu'une telle construction n'a été explicitée qu'à la fin du 19ème siècle. S'il est justifié de se poser la question d'une équivalence possible entre cette théorie de la mesure et notre construction de $\mathbb{R}^+$, c'est afin de pouvoir distinguer avec précision l'écart qui sépare notre conception du champ numérique, du champ opératoire élaboré par Euclide[68]. Reste à se méfier, peut-être ici plus qu'ailleurs, d'une interprétation anachronique ou rétrohistorique : il convient d'évaluer cette avancée théorique, non pas en fonction de ce qui lui manque pour ressembler aux nôtres, mais relativement au problème qu'elle vise à résoudre, et aux potentialités qui sont les siennes, au-delà de ses propres intentions.

66 A partir d'une proportion où A est à B comme C est à D, Euclide envisage les proportions obtenues :
- par raison alterne, où A est à C comme B est à D (à supposer que les quatre grandeurs soient ici homogènes (cf. déf. 3) , précision dont l'importance sera discutée au § II. 5),
- par raison inverse, où B est à A comme D est à C,
- par raison composée, où A+B est à B comme C+D est à D,
- par division de raison, où A-B est à B comme C-D est à D,
- par conversion de raison, où A est à A-B comme C est à C-D,

transformations qui interviendront dans les démonstrations.

67 Puisque les nombres négatifs sont absents des mathématiques grecques.

68 J. Dhombres, op. cit., p. 56-58.

4. Au coeur de la méthode d'exhaustion : la proposition 1 du livre 10.

Ce livre, le plus technique et le plus long des parmi les livres des *Eléments*, est consacré à une classification des quantités irrationnelles quadratiques et biquadratiques, géométriquement construites et représentées par des droites et des rectangles. Classification rendue nécessaire, selon l'historien Zeuthen, du fait que les segments obtenus à partir des constructions géométriques sont parfois difficiles à distinguer.[69]

La proposition 1 est au coeur de tout traitement des problèmes du continu dans la mesure où elle permet d'obtenir une grandeur plus petite que n'importe quelle grandeur donnée *a priori*. Elle est présente dans toutes les démonstrations fondées sur la méthode d'exhaustion[70] qui, pour établir qu'une surface S est équivalente à une surface Σ, procède d'un double raisonnement par l'absurde[71], construit selon le plan suivant :

1. Si S n'est pas équivalente à Σ, elle est plus grande ou plus petite.
2. Qu'elle soit d'abord plus grande.

On peut donc former la différence S-Σ, et construire, d'après la proposition 1 du livre 10, une grandeur plus petite que S-Σ, pour aboutir à une première contradiction.

3. Qu'elle soit ensuite plus petite.

On peut donc former la différence Σ-S, et construire de même une grandeur plus petite que Σ-S, pour aboutir à une seconde contradiction.

4. S n'étant ni plus grande ni plus petite que Σ lui est donc équivalente[72].

Le plan de toutes les démonstrations utilisant la méthode d'exhaustion est constant. On y repère là encore ce rythme quasi rituel, essentiel à la communication orale, tout comme dans le plan général de toute démonstration euclidienne, où le rythme des étapes est très spécifiquement marqué.

69 A. Dahan-Dalmédico & J. Peiffer, op. cit., p. 58.

70 Ainsi nommée parce qu'elle "exhausse" (au sens d'épuiser) la figure proposée par une suite de polygones inscrits.

71 Ce type de raisonnement est qualifié d'apagogique, c'est-à-dire de dévié ou de séduit, conduisant hors du droit chemin. M. Serres, op. cit., p. 87.

72 La démonstration de la proposition 2 du livre 12, présentée dans l'annexe 2, est conforme à ce plan.

Proposition I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Sa démonstration n'est autre que l'explicitation mathématique de la définition du continu telle que la soutient l'argumentation aristotélicienne de la *Physique*. Affirmant au livre I que "le continu est divisible à l'infini", Aristote précise au livre VI, après avoir établi que l'infini en acte n'existe pas, et que par conséquent, l'infini ne saurait être qu'en puissance :

"... il est impossible qu'un continu soit formé d'indivibles, ..., nul continu n'est divisible en choses sans parties, ..., **tout continu est divisible en parties toujours divisibles.**"[73]

Cette lecture d'Euclide à la lumière d'Aristote confirme l'interprétation que donne J. Dhombres[74] de la définition 1 du livre 5, lorsqu'il affirme, à partir de considérations opératoires portant sur la finalité même de l'ouvrage, qu'une grandeur y est considérée comme divisible à volonté (par un entier bien sûr!). Dans ces conditions, le livre V traite bien des différentes possibilités d'opérer sur les grandeurs continues.

5. Conclusion.

Plus encore que par la rigueur, toute activité mathématique est radicalement marquée par la présence du signe. C'est pourquoi le principe de la démonstration mathématique qui se structure en Grèce ne saurait être analysée indépendamment des spécificités de la parole et de son inscription par l'écriture dans le vécu du philosophe grec. Conçues comme symbolisation d'une permanence dont le champ numérique est alors incapable de supporter l'ensemble des représentations, les mathématiques grecques maîtrisent l'opérativité du continu grâce à une théorie des grandeurs d'essence nominale, fondée sur une énonciation logico-discursive, mais dont l'existence idéelle persiste à s'appuyer sur des représentations géométriquement constructibles. Or, l'espace euclidien dans lequel les théorèmes se donnent à voir est sémantiquement bien différent de l'espace de notre

73 Aristote, *Physique*, op. cit., § 231a21-25, 231b11, 231b16.
74 J. Dhombres, op. cit., p. 33.

physique, puisqu'il reste attaché aux autres modes de représentation de cette permanence qui ont cours dans la civilisation grecque de cette époque.

Il n'empêche qu'on assiste, de Pythagore à Euclide, à un formidable travail d'abstraction, puisque ce recours au *logos* et aux représentations spatiales débouche, au prix d'une séparation de l'ontologique et de l'opératoire, sur une certaine maîtrise du continu. C'est grâce au traitement opératoire du continu qu'Euclide démontre, au livre 12, que "les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres"[75], ainsi que les principaux théorèmes relatifs aux volumes construits à partir de la droite et du cercle[76] : pyramides à base triangulaire ou polygonale, cônes et cylindres de révolution. A en juger par l'importance des commentaires, et par la perennité de méthodes qui ont encore valeur canonique au 17ème siècle, l'impact de ce travail d'élucidation conceptuelle fut considérable. Pour ce qui concerne les méthodes relatives aux calculs d'aires et de volumes, l'apport d'Archimède est plus considérable encore, lui qui exerce une influence constante sur tout le Moyen-Age byzantin et sur les savants arabes, jusqu'à forcer l'admiration de Galilée.

Devenues pensables, les grandeurs irrationnelles ne seront intégrées qu'avec difficulté au champ numérique, dont la continuité devra être construite d'un point de vue logique. Les mathématiciens arabes les nommeront *gidr* ou *assam*, c'est-à-dire racines muettes ou aveugles, que Gérard de Crémone traduira par le latin *surdus*. Leur représentation numérique interviendra en même temps que la symbolisation de l'algèbre au 16ème siècle, et leur conceptualisation, établie en même temps que la continuité de l'ensemble IR, sera démontrée à la fin du 19ème siècle.

La mathématisation du mouvement au 17ème siècle, c'est-à-dire l'élaboration du calcul infinitésimal, en déstabilisant la *Physique* d'Aristote, reposera le problème de l'existence des indivisibles, et fera ressurgir la question ontologique de l'être, auquel la philosophie mécaniste tentera de renoncer définitivement.

Paris, novembre 1992.

75 Les cercles, c'est-à-dire, leurs aires. J'ai volontairement modernisé l'écriture de ces énoncés, sauf pour les termes qui ne sont plus usités aujourd'hui, et sans toucher à la syntaxe.
76 Il faut insister sur le fait que la géométrie euclidienne est une géométrie de la règle et du compas.

Annexe 1 : Les 13 opuscules ou livres des *Eléments* d'Euclide

Livre 1 : Constructions et propriétés élémentaires des figures rectilignes planes, notamment celles du triangle - dont le théorème de Pythagore - et du parallélogramme, avec une attention toute particulière portée au calcul d'aires (48 propositions).
Livre 2 : Fondement de l'algèbre géométrique : Présentation des opérations où toutes les grandeurs sont représentées géométriquement, les nombres par des segments de droite, le produit de deux nombres égaux par un carré, le produit de deux nombres quelconques par un rectangle, etc. S'y trouvent formulées les expressions de carrés de sommes ou de différences (14 propositions).
Livre 3 : Propriétés du cercle (37 propositions).
Livre 4 : Propriétés des polygones réguliers inscrits et circonscrits dans le cercle (16 propositions).
Livre 5 : La théorie de la mesure : théorie des rapports de grandeurs (25 propositions).
Livre 6 : Propriétés des figures semblables, notamment le théorème de Thalès. Constructions de longueurs utilisant la méthode pythagoricienne d'application des aires (33 propositions).
Livres 7, 8, 9 : Théorie des nombres, obtenue par application de la théorie des proportions aux nombres entiers, avec notamment, l'étude des multiples et diviseurs, des nombres premiers, du P.G.C.D. de deux nombres, des progressions géométriques et des proportions continuées (41, 27 et 36 propositions).
Livre 10 : Classification des quantités irrationnelles, notamment en irrationnelles quadratiques et biquadratiques, à partir des constructions qui permettent de les obtenir, qui sont fondées sur les conséquences du théorème de Pythagore et les opérations dont elles sont susceptibles (115 propositions, et deux apocryphes).
Livre 11 : Propriétés élémentaires des figures dans l'espace (40 propositions).
Livre 12 : Etude de certaines aires curvilignes, notamment par la méthode plus tardivement nommée méthode "d'exhaustion" (18 propositions).
Livre 13 : Construction des polyèdres réguliers dans l'espace : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre[77] (18 propositions).

467 propositions en tout.

---

[77] Cet achèvement des *Eléments* sur la construction des polyèdres est significative de l'influence exercée sur Euclide par la pensée platonicienne.

Annexe 2 : Extraits des *Eléments* d'Euclide[78]

Cinquième Livre

Définitions.
1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.
2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.
3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.
4. Une proportion est une identité de raisons.
5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.
6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.
7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.
8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.
9. Une proportion a au moins trois termes.
10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

Dixième Livre

Définitions.
1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.
2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.
3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés sont mesurés par une même surface.
4. Et incommensurables, lorsque leurs quarrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

---

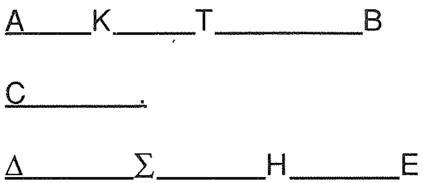
[78] Euclide : Les Eléments, *Oeuvres*, traduction française de Peyrard, Paris, Blanchard, rééd. 1966. Une nouvelle traduction des *Eléments* par Bernard Vitrac, est en cours de publication, aux PUF. Seul le volume I (livres 1 à 4) est paru. Il m'a donc semblé plus cohérent de donner toutes mes citations dans la traduction de Peyrard.

5. Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.
6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur, soit en puissance, soit en puissance seulement.
7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.
8. On appellera rationnel le quarré de la proposée.
9. On appellera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.
10. Et irrationnelles celles qui lui sont incommensurables.
11. On appellera encore irrationnelles les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

Proposition I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Soient deux grandeurs inégales AB, C; que AB soit la plus grande; je dis que, si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur C.



Car C étant multiplié deviendra enfin plus grand que AB. Qu'il soit multiplié; que ΔE soit un multiple de C, et que ce multiple soit plus grand que AB. Partageons ΔE en parties ΔΣ, ΣH, HE égales chacune à C; retranchons de AB une partie BT plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre de divisions de AB soit égale au nombre de divisions de ΔE; que le

nombre de divisions AK, KT, TB soit donc égal au nombre des divisions ΔΣ, ΣH, HE.

Puisque ΔE est plus grand que AB, et qu'on a retranché de ΔE une partie EH plus petite que sa moitié, le reste HΔ est plus grand que le reste TA. Et puisque HΔ est plus grand que TA, qu'on a retranché de HΔ sa moitié HZ, et que de TA on a retranché TK plus grand que sa moitié, le reste ΔΣ sera plus grand que le reste AK. Mais ΔΣ est égal à C; donc C est plus grand que AK; donc AK plus petite que la grandeur C, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés.

Douzième Livre

Proposition I.

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entr'eux comme les quarrés des diamètres.

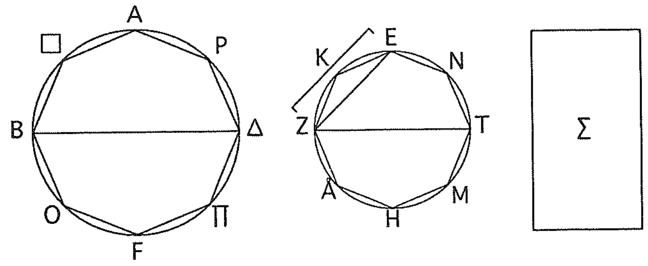
Proposition II.

Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.

Soient les cercles ABFΔ, EZHT, et que leurs diamètres soient BΔ, ZT: je dis que le quarré de BΔ est au quarré de ZT comme le cercle ABFΔ est au cercle EZHT. (cf. fig. p. 93)

Car si le quarré de BΔ n'est pas au quarré de ZT comme le cercle ABFΔ est au cercle EZHT, le quarré BΔ sera au quarré de ZT comme le cercle ABFΔ est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle EZHT. Que ce soit d'abord à une surface Σ plus petite. Dans le cercle EZHT décrivons le quarré EZHT; le quarré décrit sera plus grand que la moitié du cercle EZHT, parce que, si par les points E, Z, H, T nous menons des tangentes à ce cercle, le quarré EZHT sera la moitié du quarré circonscrit au cercle. Mais le cercle est plus petit que le quarré circonscrit; le quarré inscrit EZHT est donc plus grand que la moitié du cercle EZHT. Partageons les arcs EZ, ZH, HT, TE en deux parties égales aux points K, Å, M, N, et joignons EK, KZ, ZÅ, ÅH, HM, MT, TN, NE. Chacun des triangles EKZ, ZÅH, MHT, TNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points K, Å, M, N nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites EZ, ZH, HT, TE nous construisons des parallélogrammes, chacun des triangles EKZ, ZÅH, HMT, TNE sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé. Mais un segment est plus petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles EKZ, ZÅH, HMT, TNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales; si nous joignons leurs extrêmités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle EZHT sur la surface ∑; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle EZHT placés sur les droites EK, KZ, ZÅ, ÅH, HM, MT, TN, NE, et qu'ils soient plus petits que l'excès du cercle EZHT sur la surface ∑. Le polygone restant EKZÅHMTN sera plus grand que la surface ∑. Décrivons dans le cercle ABCΔ un polygone A□BOF∏ΔP semblable au polygone EKZÅHMTN; le carré de BΔ sera au quarré de ∑T comme le polygone A□BOF∏ΔP est au polygone EKZÅHMTN; donc par permutation, le cercle ABCΔ est au polygone qui lui est inscrit comme la surface ∑ est au polygone EKZÅHMTN. Mais le cercle ABFΔ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface ∑ est donc plus grande que le polygone EKZÅHMTN. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible; le quarré de BΔ n'est donc point au quarré de ZT comme le cercle ABFΔ est à une surface plus petite que le cercle EZHT. Nous démontrerons semblablement que le quarré de ZT n'est point au quarré de BΔ comme le cercle EZHT est à une surface plus petite que le cercle ABFΔ. Je dis ensuite que le quarré de BΔ n'est point au quarré de ZT comme le cercle ABCΔ est à une surface plus grande que le cercle EZHT. Car si cela est possible, que le quarré de BΔ soit au quarré de ZT comme le cercle ABFΔ est à une surface ∑ plus grande. Par inversion, le quarré de ZT sera au carré de BΔ comme la surface ∑ est au cercle ABFΔ. Mais la surface ∑ est au cercle ABFΔ comme le cercle EZHT est à une surface plus petite que le cercle ABFΔ; le quarré de ZT est donc au carré de BΔ comme le cercle EZHT est à une surface plus petite que le cercle ABFΔ, ce qui a été démontré impossible; le quarré de BΔ n'est donc pas au carré de ZT comme le cercle ABFΔ est à une surface plus grande que le cercle EBZT. Mais on a démontré que le quarré de BΔ n'est point au quarré de ZT comme le cercle ABFΔ est à une surface plus petite que le cercle EZHT; le quarré de BΔ est donc au quarré de ZT comme le

cercle ABCΔ est au cercle EZHT. Donc, etc.



Annexe 3 : La Physique d'Aristote :

Des concepts nouveaux pour une philosophie du devenir

L'être en acte et l'être en puissance

"Les derniers des Anciens, eux aussi, se donnaient bien du mal pour éviter de faire coïncider en une même chose l'un et le multiple." ... "Sur ce point, on les voyait, plein d'embarras, avouer que l'un est multiple, comme s'il n'était pas possible que la même chose fût un et multiple, sans revêtir par là deux caractères contradictoires : en effet, il y a l'un en puissance et l'un en acte."[79]

"Il faut distinguer ce qui est seulement en acte et ce qui est d'une part en acte d'autre part en puissance, et cela soit dans l'individu déterminé, soit dans la quantité, soit dans la qualité, et semblablement pour les autres catégories de l'être."[80]

L'ontologie du mouvement

"Puisque la nature est principe de mouvement et de changement et que notre recherche porte sur la nature, il importe de ne pas laisser dans l'ombre ce qu'est le mouvement; nécessairement, en effet, si on l'ignore, on ignore aussi la nature. Après avoir déterminé la notion de mouvement, il faudra entreprendre, de la même façon, les questions

---

79 Aristote, *La Pysique,* Paris, Les Belles-Lettres, 1966, § 185b25, § 186a1-4.
80 Aristote, *Physique*, op. cit., livre III, 200b26-27, p. 89-90.

qui suivent celles-là. Or, semble-t-il, le mouvement appartient aux continus, et dans les continus, l'infini apparaît en premier lieu; c'est pourquoi les définitions qu'on donne du continu se trouvent utiliser souvent la notion de l'infini, le continu étant divisible à l'infini. En outre, sans lieu, ni vide[81], ni temps, le mouvement est impossible. On voit donc par là et parce que ce sont des choses communes à tout, et valant universellement, que notre effort doit commencer par l'examen de chacun de ces points; car la considération des choses particulières vient après celle des choses communes[82]."[83]

Les différentes espèces du mouvement

"Il n'y a pas de mouvement hors des choses; en effet, ce qui change, change toujours ou substantiellement, ou quantitativement, ou qualitativement, ou localement; or on ne peut trouver, nous l'avons dit, de genre commun à ces sujets du changement, qui ne soit ni l'individu particulier, ni quantité, ni qualité, ni aucun des chefs d'affirmation; par suite il n'y aura ni mouvement ni changement en dehors des choses qu'on vient de dire, puisqu'il n'y a rien hors des choses."

"Ensuite chacun de ces modes de l'être se réalise en toute chose d'une double façon; par exemple, pour l'individu déterminé, il y a sa forme, et la privation; et aussi dans la qualité (blanc et noir); et aussi dans la quantité (l'achevé et l'inachevé); de même dans le mouvement local (le centrifuge et le centripète, ou le léger et le grave). Ainsi il y a autant d'espèces du mouvement que de l'être."[84]

La définition du mouvement.

"Etant donnée la distinction, en chaque genre, de ce qui est entéléchie, et de ce qui est en puissance, l'entéléchie de ce qui est en

81 Ce terme a ici le sens de privation.

82 Ce terme a ici le sens de général.

83 Aristote, *Physique*, op. cit., livre III, 200b12-25, p. 89.

84 Ibid., livre III, 200b32-201a8, p. 90. Il faut rappeler ici qu'Aristote définit comme catégories de l'être les dix façons possibles pour un attribut d'être le prédicat d'une proposition : substance, quantité, qualité, relation, lieu, temps, position, possession, action, passion. Le débat reste ouvert concernant la question de savoir s'il s'agit là de catégories de langue ou de catégories de pensée. Cf. R. Blanché, *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*, Paris, A. Colin, 1970, p. 30-31; E. Benvéniste, *Problèmes de linguistique générale*, Paris, Gallimard, 1966, p. 63-74.

puissance, en tant que tel, voilà le mouvement[85]; par exemple, de l'altéré, en tant qu'altérable, l'entéléchie est altération; de ce qui est susceptible d'accroissement et de son contraire ce qui est susceptible de décroissement (il n'y a pas de nom commun pour tous les deux), accroissement et diminution; du générable et du corruptible, génération et corruption; de ce qui est mobile quant au lieu, mouvement local."

"Que le mouvement soit bien tel, c'est clair d'après ce qui suit. En effet quand le construisible, en tant que nous le disons tel, est en entéléchie, il se construit; et c'est là la construction; de même l'apprentissage, la guérison, la rotation, le saut, la croissance, le vieillissement."[86]

Le moteur comme cause active; le mobile comme support passif.

"Le mouvement est l'entéléchie du mobile comme mobile. Mais cela arrive par le contact du moteur... . Quoi qu'il en soit, le moteur toujours apportera une forme, soit substance particulière, soit qualité, soit quantité, laquelle sera principe et cause du mouvement, quand le moteur produira le mouvement ... Et l'on voit la difficulté; le mouvement est dans le mobile; en effet, c'est l'entéléchie de celui-ci sous l'action du moteur; mais l'acte du moteur n'est pas une autre chose; en effet il faut une entéléchie à l'un et à l'autre; or celui-ci, considéré en puissance est moteur, en acte est mouvant; maintenant, il a la faculté de faire passer à l'acte le mobile; par conséquent il n'y a qu'un seul acte pour l'un et l'autre également; ... ; ces choses, en effet, sont unes, mais leur définition n'est pas une. ... Ici une difficulté logique; il est peut-être nécessaire que de l'actif et du passif les actes soient différents : l'un action, l'autre passion, l'un ayant pour oeuvre et fin de produire un effet, l'autre de le subir."[87]

L'impossibilité physique de l'infini

"D'une façon générale, on voit qu'il est impossible d'admettre un corps infini et en même temps un lieu pour les corps, s'il est vrai que

85 D'ordinaire, l'acte est ce qui conduit à l'essence parfaite, l'entéléchie est l'essence parfaite elle-même. C'est cette définition du mouvement à laquelle Descartes affirmera ne rien comprendre : le terme même de mouvement aura changé de signification, n'empruntera plus son sens à la conception du devenir et de l'accomplissement de soi, mais concernera exclusivement la possibilité de décrire le déplacement des objets, donc une relation entre un espace et un temps devenus premiers par rapport au mouvement.

86 Ibid., 201a9-18, p. 90.

87 Ibid., 202a7-24, p. 93.

tout corps sensible a ou pesanteur ou légèreté et que, s'il est lourd, sa nature lui donne un transport vers le centre, s'il est léger vers le haut; car il devrait en être de même pour l'infini; mais il est impossible ou qu'il soit tout entier ici ou là, ou qu'il soit par moitié ici et là; comment en effet le diviser, ou comment une partie de l'infini sera-t-elle l'une haut, l'autre bas, extrêmité, centre?" En outre, tout corps sensible est dans un lieu, et les espèces et différences du lieu sont haut bas avant arrière droite gauche, et ces distinctions valent non pas relativement à nous et par position, mais dans le tout lui-même. Or il est impossible qu'elles soient dans l'infini."[88]

L'infini aristotélicien est opératoire :

"L'être se dit et de l'être en puissance et de l'être en acte, et l'infini est par composition et par retranchement. Que la grandeur n'est pas infinie en acte, on l'a dit; mais elle l'est par division, car il n'est pas difficile de ruiner les lignes insécables; reste donc que l'infini est en puissance. Mais il ne faut pas prendre l'expression "en puissance", comme dans le cas où l'on dit : ceci est en puissance une statue, c'est-à-dire sera une statue, comme s'il y avait une chose infinie qui dût dans l'avenir être en acte; mais puisque l'être se prend en plusieurs acceptions, de même que l'existence de la journée et de la lutte est un renouvellement continu, de même aussi l'infini. ... . D'une manière générale, ... , l'infini consiste dans le fait que ce qu'on prend est toujours nouveau, ce qu'on prend étant certes toujours limité, mais différent." ...(2O6a14-27)

"L'infini par composition est en quelque sorte le même que l'infini par division; dans la chose limitée, l'infini par composition se produit à l'inverse de l'autre; dans la mesure où le corps apparait divisé à l'infini, dans cette mesure les additions successives apparaissent converger vers le corps fini. En effet, si sur une partie prise dans une certaine proportion sur une grandeur limitée, on en prend une autre dans la même proportion, n'enlevant pas ainsi au tout la même grandeur, on n'arrivera pas au bout du corps limité; mais si l'on augmente la proportion, au point d'enlever successivement une quantité toujours la même, on y arrivera, parce que tout corps limité est épuisé par une soustraction finie quelconque."(206b3-11)

"L'infini par accroissement est aussi lui-même infini en puissance, et nous l'identifions en quelque sorte à l'infini par division, car on peut toujours prendre quelque chose en dehors de lui; mais cependant on ne dépassera pas toutes limites dans la grandeur,

---

88 Ibid., 205b24-32, p. 103.

comme on dépasse en division tout corps fini, et on restera en deça." (206b16-20)

"L'infini se trouve donc être le contraire de ce qu'on dit; en effet, non pas ce en dehors de quoi il n'y a rien, mais ce hors de quoi il y a toujours quelque chose, voilà l'infini[89]." (206b33-34)[90]

L'infini des mathématiciens est lui aussi en puissance.

"La théorie ne supprime pas les considérations des mathématiciens, en supprimant l'infini qui existerait en acte dans le sens de l'accroissement, considéré comme ne pouvant être parcouru; car, en réalité, ils n'ont point besoin et ne font pas usage de l'infini, mais seulement de grandeurs aussi grandes qu'ils voudront, mais limitées; ... ."[91]

La définition du continu

"Si la continuité, le contact, la consécutivité obéissent aux définitions précédentes (le continu est ce dont les extrémités sont une seule chose; le contact est entre ce dont les extrémités sont ensemble; le consécutif est ce entre quoi il n'y a aucun intermédiaire du même genre), **il est impossible qu'un continu soit formé d'indivisibles**, par exemple qu'une ligne soit formée de points, s'il est vrai que la ligne soit un continu et le point, un indivisible. En effet, on ne peut dire que les extrémités des points font un, puisque pour l'indivisible il n'existe pas une extrémité qui serait distincte d'une autre partie; ni que les extrémités sont ensemble, car il n'y a rien dans une chose sans parties qui soit une extrémité, puisque l'extrémité est distincte de ce dont c'est l'extrémité."(231a21-28)

"En outre, il faudrait alors que les points dont serait fait le continu fussent, ou en continuité, ou en contact réciproque; même raisonnement pour tous les indivisibles (231a29-31). Or, ils ne peuvent être continus, d'après ce qu'on vient de dire, et, quant au contact, il faut qu'il ait lieu, soit du tout au tout, soit de la partie à la partie, soit de la partie au tout; mais, l'indivisible étant sans parties, ce sera forcément du tout au tout; or le contact du tout au tout ne fera point une continuité, car le continu a des parties étrangères les unes

---

89 C'est en ce sens qu'Aristote oppose le terme "infini" à celui d'"entier" ou d'"achevé", termes de même nature, dit-il, en ajoutant que "rien n'est achevé s'il n'est terminé; or le terme est limité." ibid., 207a11-13, p. 106.
90 Ibid., 206a14-207a2, p. 105-6.
91 Ibid., 2O7b27-33, p. 108.

aux autres et il se divise en parties qui se distinguent de cette façon, c'est-à-dire qui sont séparées quant au lieu." (231b1-5)

"Maintenant, il n'y aura pas plus de consécution entre un point et un point, un instant et un instant, de façon à en faire la longueur ou le temps. En effet, sont consécutives les choses entre lesquelles il n'y a aucun intermédiaire du même genre, tandis que, pour les points, l'intermédiaire est toujours une ligne, pour des instants, un temps. Ajoutons que le continu serait divisible en indivisibles, s'il est vrai que chacun des deux doive se diviser en ce dont il est composé. Mais nul continu n'est divisible en choses sans parties."(231b6-11)

"D'autre part, il n'est pas possible qu'entre les points et les instants il y ait aucun intermédiaire d'un genre différent; un tel intermédiaire en effet sera évidemment, s'il existe, ou bien indivible, ou bien divisible, et s'il est divisible, ce sera, ou bien en indivisibles, ou bien en parties toujours divisibles; or c'est là le continu. Mais il est clair que le continu est divisible en parties qui sont toujours divisibles; si en effet c'était en indivisibles, il y aurait contact d'indivisibles à indivisibles; en effet dans les continus, si l'extremité est une, il y a aussi contact."(231b12-17)

Continu, mouvement et infini :
les différentes étapes du raisonnement.

"Pour la même raison, ou bien la grandeur, le temps, le mouvement sont composés d'indivisibles et se divisent en indivisibles, ou bien aucun ne le peut."(231b18-21).....

"Puisque toute grandeur est divisible en grandeurs (il a été démontré en effet qu'un continu ne peut être composé d'indivisibles et, d'autre part, que toute grandeur est continue), nécessairement le plus rapide doit se mouvoir sur une plus grande distance en un temps égal, sur une égale en un temps moindre, c'est-à-dire davantage en un temps moindre. (232a23-28) ...

"Mais puisque tout mouvement a lieu dans le temps et que dans tout temps il y a possibilité de mouvement, puisque d'autre part tout mû peut être mû plus rapidement et plus lentement, dans tout temps on pourra trouver un mouvement plus rapide et un plus lent. Cela étant, nécessairement le temps doit être continu. Or j'appelle continu ce qui est divisible en parties toujours divisibles; si cette notion du continu est notre base, forcément le temps sera continu."(232b20-25)

"En même temps, on voit que toute grandeur est continue, car ce

sont les mêmes et d'égales divisions qui divisent le temps et la grandeur."(233a10-12)...

"On voit donc, d'après ce qui a été dit, que ni la ligne, ni la surface, ni en général aucun des continus, ne sera indivisible, non seulement pour les raisons déjà données, mais parce que la conséquence serait la division de l'indivisible. ... On voit donc que nul continu n'est sans parties."(233b15-17,31)[92]

Annexe 4 : Les travaux de J.P. Vernant. Pour une étude contextuelle du rôle de la raison dans la cité grecque.

Les transformations socio-politico-culturelles.

"En l'espace de quelques siècles, la Grèce a connu, dans sa vie sociale et dans sa vie spirituelle, des transformations décisives. Naissance de la Cité et du droit - avénement, chez les premiers philosophes, d'une pensée de type rationnel et organisation progressive du savoir en un corps de disciplines positives différenciées : ontologie, mathématiques, logique, sciences de la nature, médecine, morale, politique -, création de formes d'art nouvelles, les divers modes d'expression, ainsi inventés, répondant au besoin d'authentifier des aspects jusqu'alors méconnus de l'expérience humaine : poésie lyrique et théâtre tragique dans les arts du langage, sculpture et peinture conçus comme artifices imitatifs dans les arts plastiques.

Ces innovations dans tous les domaines marquent un changement de mentalité si profond qu'on a pu y voir comme l'acte de naissance de l'homme occidental, le surgissement véritable de l'esprit, avec les valeurs que nous reconnaissons à ce terme. De fait, les transformations n'intéressent pas seulement les démarches de l'intelligence ou les mécanismes du raisonnement. De l'*homo religiosus* des cultures archaïques à cet homme, politique et raisonnable, que visent les définitions d'un Aristote, la mutation met en cause les grands cadres de la pensée et tout le tableau des fonctions psychologiques : modes de l'expression symbolique et maniement des signes, temps, espace, causalité, mémoire, imagination, organisation des actes, volonté, personne -, toutes ces catégories se trouvent transformées dans leur structure interne et leur équilibre général."[93]

---

92 Ibid., t. II, l. VI, p. 39-45.

93 J. P. Vernant, Introduction, *Mythe et pensée*, op. cit., t. I, p. 6-7.

De la politique au *logos*.

"Toutes les questions d'intérêt général que le Souverain avait pour fonction de régler et qui définissent le champ de l'*archè* sont maintenant soumises à l'art oratoire et devront se trancher au terme d'un débat.... Entre la politique et le *logos*, il y a ainsi rapport étroit, lien réciproque. L'art politique est, pour l'essentiel, maniement du langage; et le *logos*, à l'origine, prend conscience de lui-même, de ses règles, de son efficacité, à travers sa fonction politique. Historiquement, ce sont la rhétorique et la sophistique qui, par l'analyse qu'elles entreprennent des formes du discours en tant qu'instrument de victoire dans les luttes de l'assemblée et du tribunal, ouvrent la voie aux recherches d'Aristote définissant, à côté d'une technique de la persuasion, des règles de la démonstration et posant une logique du vrai, propre au savoir théorique, en face de la logique du vraisemblable ou du probable qui préside aux débats hasardeux de la pratique."[94]

Le *logos* et le droit.

"Quand, avec la cité, le juge représente le corps civique, la communauté dans son ensemble, et qu'incarnant cet être impersonnel supérieur aux parties, il peut décider lui-même, trancher suivant sa conscience et d'après la loi, ce sont les notions même de preuve, de témoignage et de jugement qui se trouvent radicalement transformées. Le juge doit en effet amener au jour une vérité en fonction de laquelle il aura désormais à se prononcer. Il demande aux témoins, non plus d'être cojureurs s'affirmant solidaires d'une des deux parties, mais de rapporter sur les faits. Par cette conception entièrement nouvelle de la preuve et du témoignage, le procès mettra en oeuvre toute une technique de démonstration, de reconstruction du plausible et du probable, de déduction à partir d'indices ou de signes - et l'activité judiciaire contribuera à élaborer la notion d'une vérité objective, qu'ignorait, dans le cadre du "prédroit", le procès ancien."[95]

La nature de la raison pour les philosophes grecs

"Avénement de la Polis, naissance de la philosophie : entre les deux ordres de phénomènes les liens sont trop serrés pour que la pensée rationnelle n'apparaisse pas, à ses origines, solidaire des

94 J.P. Vernant, *Les origines de la pensée grecque*, Paris, P.U.F. Quadrige, 1981, p. 45.
95 Ibid., p. 78.

structures sociales et mentales propres à la cité grecque. Ainsi replacée dans l'histoire, la philosophie dépouille ce caractère de révélation absolue qu'on lui a parfois prêté en saluant, dans la jeune science des Ioniens, la raison intemporelle venue s'incarner dans le Temps. L'école de Milet n'a pas vu naître la Raison; elle a construit une Raison, une première forme de rationalité. Cette raison grecque n'est pas la raison expérimentale de la science contemporaine, orientée vers l'exploration du milieu physique et dont les méthodes, les outils intellectuels, les cadres mentaux, ont été élaborés au cours des derniers siècles dans l'effort laborieusement poursuivi pour connaître et dominer la Nature. Quand Aristote définit l'homme comme un "animal politique", il souligne ce qui sépare la Raison grecque de celle d'aujourd'hui. Si l'*homo sapiens* est à ses yeux un *homo politicus*, c'est que la Raison elle-même, dans son essence, est politique. ...

La raison grecque, c'est celle qui de façon positive, réfléchie, méthodique, permet d'agir sur les hommes, non de transformer la nature. Dans ses limites comme dans ses innovations, elle est fille de la cité."[96]

Annexe 5 : Le point de vue génétique de J. Piaget
La science grecque n'est pas une science expérimentale.

"Pour des raisons psychologiques faciles à dégager, les opérations logico-mathématiques se sont constituées dans l'histoire (comme elles s'élaborent chez l'enfant) bien avant l'expérience physique, chimique ou biologique. Ces raisons tiennent, d'une part, au fait que de telles opérations logiques ou mathématiques sont tirées des actions du sujet (ou de leur coordination) exercées sur les objets, et non pas des objets comme tels, ce qui comporte une antériorité génétique de ces opérations générales par rapport à la connaissance détaillée des objets. D'autre part, l'expérimentation sur les objets ne consiste nullement en un simple enregistrement de leurs propriétés, au cours duquel le sujet se bornerait à constater les faits, mais elle suppose un ensemble de démarches actives de dissociation et de mise en relation qui impliquent l'emploi constant des opérations logico-mathématiques à titre d'instruments d'analyse. Pour ces deux raisons conjointes les mathématiques et la logique se sont formées bien avant notre ère, tandis que les sciences expérimentales ne se sont développées qu'à partir des temps modernes.

L'épistémologie grecque est donc née d'une réflexion sur les

96 Ibid., p. 131-3.

mathématiques, avec Platon, et sur la logique, avec Aristote, tandis qu'il a fallu attendre Descartes, Leibniz et surtout Kant pour voir se développer des épistémologies nées de la collaboration des mathématiques avec l'expérience physique.

Mais un autre ensemble de considérations psychologiques explique que l'on puisse utiliser longtemps les opérations logico-mathématiques sans prendre conscience de leur existence en tant qu'opérations. L'introspection ne constitue, en effet, qu'un très pauvre instrument de connaissance, même sur le terrain de la pensée, et nous prenons conscience du résultat des opérations de notre esprit bien avant de découvrir les structures de celles-ci, de même que, de façon générale, nous prenons conscience du résultat de nos actions bien avant d'apercevoir leurs mécanismes. Il résulte de ces lois psychologiques que les mathématiques grecques ont été essentiellement "réalistes" (ou, comme l'a dit Boutroux, "contemplatives"), c'est-à-dire qu'elles ont projeté dans le réél les résultats des opérations au lieu de réfléchir sur celles-ci et de les manipuler en tant qu'instruments mobiles et libres de transformation et de combinaison. C'est pourquoi les Grecs n'ont point constitué une science de l'algèbre, tout en connaissant plusieurs transformations algébriques, et se sont adonnés de préférence à la géométrie. C'est aussi pourquoi la première sans doute de leurs théories épistémologiques, qui a consisté en réflexions de Pythagore sur la nature des nombres, s'est avérée totalement "réaliste" : selon ce grand mathématicien les nombres entiers constituaient les éléments des objets et des figures, comme s'il s'agissait en quelque sorte d'atomes spatiaux, et cela sans aucun soupçon du fait que ces nombres pourraient résulter d'activités, d'opérations ou d'actions proprement dites du sujet lui-même. Pour le réalisme, en effet, le sujet connaissant n'intervient pas dans la connaissance : il n'existe pas encore en tant que sujet actif, et se borne à "contempler".[97]

[97] J. Piaget, "L'épistémologie et ses variétés", *Logique et connaissance scientifique*, Paris, Gallimard, La Pléiade, 1967, p. 16-18.

Faire la droite avec des points

Th. Gilbert, B. Jadin, Ph. Tilleuil
GEM, Institut de Mathématiques
Louvain-la-Neuve

"... Je connais un labyrinthe grec qui est une ligne unique, droite. Sur cette ligne, tant de philosophes se sont égarés, qu'un pur détective peut bien s'y perdre...
-... je vous promets ce labyrinthe, qui se compose d'une seule ligne droite et qui est invisible, incessant."

J.-L. Borges, in "La mort et la boussole."
(Fictions, 1957)

La droite fait partie des objets conceptuels familiers que tout un chacun, mathématicien ou non, connaît et manipule. Pourtant l'appréhension qu'en a le mathématicien diffère de celle de monsieur tout-le-monde comme c'est le cas pour la plupart des concepts mathématiques.

Comment le mathématicien voit-il la droite, les points et comment imagine-t-il l'alignement de points les uns derrière les autres pour faire la droite ? Et vous, comment le voyez-vous ?

Pour faire un peu de lumière sur la question, interrogeons des mathématiciens qui ont fait leurs preuves. Dans l'ordre, nous regarderons principalement des textes d'Aristote, Galilée, Pascal, Bolzano, Dedekind et Cantor.

Aristote.

Aristote évoque plusieurs fois l'infini et le continu dans les livres Physique 1 et 3[1]. Pour lui, le continu est divisible à l'infini. Mais cet infini n'existe pas en acte, il est en puissance.

Dans le livre Physique 5 [2], Aristote donne une définition du continu. Celui-ci est fait de parties consécutives, en contact et dont les extrémités sont confondues.

Mais le continu, la ligne par exemple, ne peut être formé d'indivisibles, de points. La ligne est une collection bien enchaînée de parties virtuellement séparées par des points-limites mais la ligne n'est pas l'ensemble de ces points.

"Si la continuité, le contact, la consécutivité obéissent aux définitions précédentes (le continu est ce dont les extrémités sont une seule chose : le contact est entre ce dont les extrémités sont ensemble ; le consécutif est ce entre quoi il n'y a aucun intermédiaire du même genre), il est impossible qu'un continu soit formé d'indivisibles, par exemple qu'une ligne soit formée de points, s'il est vrai que la ligne soit un continu et le point un indivisible. En effet, on ne peut dire que les extrémités des points font un, puisque pour l'indivisible il n'existe pas une extrémité qui serait distincte d'une autre partie ; ni que les extrémités sont ensemble, car il n'y a rien dans une chose sans parties qui soit une extrémité, puisque l'extrémité est distincte de ce dont c'est l'extrémité.

En outre, il faudrait alors que les points dont serait fait le continu fussent, ou en continuité, ou en contact réciproque ; même raisonnement pour tous les indivisibles. Or ils ne peuvent être continus, d'après ce qu'on vient de dire, et, quant au contact, il faut qu'il ait lieu, soit du tout au tout, soit de la partie à la partie, soit de la partie au tout ; mais, l'indivisible étant sans partie, ce sera forcément du tout au tout ; or le contact du tout au tout ne fera point une continuité, car le continu a des parties étrangères les unes aux autres et il se divise en parties qui se distinguent de cette façon, c'est-à-dire qui sont séparées quant au lieu.

Maintenant, il n'y aura pas plus de consécution entre un point et un point, un instant et un instant, de façon à en faire la longueur ou le temps. En effet, sont consécutives les choses entre lesquelles il n'y a aucun intermédiaire du même genre, tandis que, pour des points, l'intermédiaire est toujours une ligne, pour des instants, un temps. Ajoutons que le continu serait divisible en indivisibles, s'il est vrai que chacun des deux doive se diviser en ce dont il est composé. Mais nul continu n'est divisible en choses sans parties.

D'autre part, il n'est pas possible qu'entre les points et les instants il y ait aucun intermédiaire d'un genre différent ; un tel intermédiaire en effet sera évidemment, s'il existe, ou bien indivisible, ou bien divisible, et, s'il est divisible, ce sera, ou bien en indivisibles, ou bien en parties toujours divisibles ; or c'est là le continu. Mais il est clair que tout continu est divisibles en parties qui sont toujours divisibles ; si en effet c'était en indivisibles, il y aurait contact d'indivisibles à indivisibles ; en effet dans les continus, si l'extrémité est une, il y a aussi contact." [2](Phys. 6, 1, 231 a et b)

Après avoir rappelé ses définitions de continu, contact, consécutif, Aristote réfute successivement la possibilité pour des points de former le continu, d'être en contact, d'être consécutifs. Décomposons son raisonnement.

1. On ne peut parler d'extrémité pour un point. Car l'extrémité est distincte de ce qui ne l'est pas, il y aurait donc des parties à un indivisible. Impossible.

2. On ne peut dire que les extrémités des points font un puisqu'on ne peut parler d'extrémité pour des points. Des points ne peuvent être continus.

3. Les points ne peuvent être en contact. Car celui-ci devrait avoir lieu soit du tout au tout, ce qui est impossible car le continu a des parties étrangères les unes aux autres ; soit de la partie à la partie ou de la partie au tout, ce qui est impossible car l'indivible est sans partie.

4. Les points ne peuvent être consécutifs, car il y aurait un intermédiaire d'un genre différent. Soit un divisible en indivisibles, ce qui est impossible car il y aurait contact entre indivisibles. Soit un divisible en divisibles, ce qui est le continu.

Aristote développe en quelque sorte un point de vue topologique sur la droite. Le physicien et philosophe qu'il est, s'intéresse à la nature du concept alors que d'autres, comme Pascal s'intéresseront aux attributs, aux propriétés de ce concept.

Galilée.

S'intéressant à des problèmes de résistance des matériaux, Galilée se laisse aller, de paradoxe en paradoxe, à des considérations sur l'infini. Voici sa conclusion finale au sujet de la ligne et des points.

"Quand donc le seigneur Simplicio me présente des lignes de longueur inégale, et me demande comment il peut se faire que les plus grandes ne contiennent pas davantage de points que les plus petites, je lui réponds qu'il n'y en a ni plus ni moins ni même autant, mais en toutes un nombre infini ;

[...]

J'en arrive maintenant à une autre considération. Si l'on admet que la ligne et tous les continus sont divisibles en parties toujours divisibles, je ne vois pas comment échapper à la conclusion qu'ils sont constitués par une infinité d'indivisibles : une division et une subdivision susceptibles de se poursuivre sans fin supposent, en effet, que les parties soient en nombre infini, on en tire immédiatement qu'elles n'ont pas de grandeur, car un nombre infini de parties ayant une grandeur donne une grandeur infinie ; ainsi le continu nous apparaît-il composé par un nombre infini d'indivisibles." [3]

Pascal.

"De même quelque grand que soit un espace, on peut en concevoir un plus grand, et encore un qui le soit davantage ; et ainsi à l'infini, sans jamais arriver à un qui ne puisse plus être augmenté ? Et au contraire quelque petit que soit un espace, on peut encore en considérer un moindre, et toujours à l'infini, sans jamais arriver à un indivisible qui n'ait plus aucune étendue.

[...]

Enfin, s'ils trouvent étrange qu'un petit espace ait autant de parties qu'un grand, qu'ils entendent aussi qu'elles sont plus petites à mesure, et qu'ils regardent le firmament au travers d'un petit verre, pour se familiariser avec cette connaissance, en voyant chaque partie du ciel en chaque partie du verre.

Mais s'ils ne peuvent comprendre que des parties si petites, qu'elles nous sont imperceptibles, puissent être autant divisées que le firmament, il n'y a pas de meilleur remède que de les leur faire regarder avec des lunettes qui grossissent cette pointe délicate jusqu'à une prodigieuse masse ; d'où ils concevront aisément que, par le secours d'un autre verre plus artistiquement taillé, on pourrait les grossir jusqu'à égaler ce firmament dont ils admirent l'étendue." [4]

"Je vous apprend que, dès qu'il entre tant soit peu d'infini dans une question, elle devient inexplicable, parce que l'esprit se trouble et se confond." [4]

"[...] puisqu'un indivisible multiplié autant de fois que l'on voudra est si éloigné de pouvoir dépasser une étendue, qu'il ne peut jamais former qu'un seul et unique indivisible ;

[...]

Un indivisible est ce qui n'a aucune partie, et l'étendue est ce qui a diverses parties séparées.

Sur ces définitions, je dis que deux indivisibles étant unis ne font pas une étendue.

Car, quand ils sont unis, ils se touchent chacun en une partie ; et ainsi les parties par où ils se touchent ne sont pas séparées, puisque autrement elles ne se ttoucheraient pas. Or, par leur définition, ils n'ont point d'autres parties : donc ils n'ont pas de parties séparées ; donc ils ne sont pas une étendue, par la définition de l'étendue qui porte la séparation des parties.

[...]

Mais si l'on veut prendre dans les nombres une comparaison qui représente avec justesse ce que nous considérons dans l'étendue, il faut que ce soit le rapport du zéro aux nombres ; car le zéro n'est pas du même genre que les nombres, parce qu'étant multiplié, il ne peut les surpasser ; de sorte que c'est un véritable indivisible de nombre, comme l'indivisible est un véritable zéro d'étendue." Et on trouvera un pareil entre le repos et le mouvement, et entre un instant et le temps ; car toutes ces choses sont hétérogènes à leurs grandeurs, parce qu'étant infiniment multipliées, elles ne peuvent jamais faire que des indivisibles non plus que les indivisibles d'étendue et par la même raison. Et alors on trouvera une correspondance parfaite entre ces choses ; car toutes ces grandeurs sont divisibles à l'infini, sans tomber dans leurs indivisibles, de sorte qu'elles tiennent toutes le milieu entre l'infini et le néant." [4]

Méré, Berkeley et vous.

"Je vous demande encore si vous comprenez distinctement qu'en la cent-millième partie d'un grain de pavot il y pût avoir un monde, non seulement comme celui-ci, mais encore tous ceux qu'Epicure a songés !" [5](Lettre de Méré à Pascal, pp 348-359)

"Les mathématiciens parlent de ce qu'ils nomment un point. Ce point, disent-ils, n'est pas complètement rien et il n'est pas complètement quelque chose. Or, nous, Irlandais, nous inclinons à penser que ce quelque chose et ce rien sont bien près l'un de l'autre." [6](Cahier de notes de Berkeley, 1707-1708)

Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. Le point est comparable a une boule de boulier. En serrant les boules l'une contre l'autre, on fait la ligne.

2. Le point est un nuage infiniment compressible, c'est-à-dire qu'on peut le rendre infiniment petit. Si on prend des points en nombre infini, on peut faire un morceau de ligne.

3. Le point est un zéro d'étendue. Multiplié une infinité de fois, cela ne fait toujours qu'un point.

4. Le point est quelque chose de "limite". Pour tracer une ligne, on part d'un point et on s'arrête un peu plus loin à un autre point. Quand on parcourt une ligne, si on s'arrête, c'est toujours sur un point. La ligne est une collection bien enchaînée de parties virtuellement séparées par des points-limites mais n'est pas l'ensemble de ces points.

Bolzano.

Dans son mémoire de 1817 [7], B. Bolzano tente de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires. Il réfute les démonstrations antérieures se basant sur des considérations géométriques ou sur les concepts de temps ou de mouvement; il veut une démonstration purement analytique du théorème. Pour cela, il a besoin du critère dit de Cauchy qu'il pense démontrer. En fait, il arrive seulement à prouver l'unicité du nombre vers lequel converge une suite de Cauchy. Il lui manque, pour la preuve de son existence, une définition des réels qui n'est pas encore établie à cette époque.

Peu avant sa mort, en 1847, il donne une caractérisation du continu dans un de ses *Paradoxes de l'infini* [8], [9] (§38) : nous en donnons une traduction de quelques extraits.

[...] il faut reconnaître, en effet, que deux instants ou points ou (dans le domaine de la réalité) deux substances sont séparées par une infinité d'autres : mais quelle contradiction s'en suit-il précisément? Seulement celle-ci : aucune étendue ne peut être engendrée par 2, 3, 4 ou un nombre seulement fini de telles entités. Nous sommes bien d'accord avec cela et même avec plus, à savoir, qu'une infinité de points ne suffit pas toujours pour engendrer un continu, mais que les points doivent aussi être bien arrangés. Si nous essayons de former une idée claire de ce que nous appelons "extension continue" ou "continu", nous sommes forcés de déclarer qu'un continu est présent si et seulement si nous avons un aggrégat d'entités simples (instants, points, substances) arrangées de telle façon que chaque membre individuel de l'aggrégat a au moins un voisin de l'aggrégat pour chaque distance aussi petite que l'on veut. [...]

Que pourrait-on exiger de plus?

Certains répondront : "que chaque point ait un voisin en contact immédiat avec lui-même". Cette demande cependant est une impossibilité claire et recèle une contradiction. Car quand dirons-nous que deux points se touchent? Peut-être quand le bord de l'un, disons le droit, coïncide avec le bord de l'autre, disons le gauche? Mais les points sont les constituants simples de l'espace et donc n'ont pas de bord, ni de côté droit ou gauche. Soit un point a une partie en commun avec l'autre et alors ils coïncident. Soit c'est quelque chose de différent et les deux doivent se trouver séparés, laissant la place pour un point intermédiaire et donc pour une infinité d'autres puisque l'argument peut être appliqué à nouveau au premier point intermédiaire.

[...] A proprement parler, on devrait d'un côté certainement enseigner qu'une étendue n'est jamais produite par un ensemble fini de points, et est produite par un ensemble infini si et seulement si la condition maintes fois mentionnée est satisfaite - à savoir que chaque point dans l'ensemble possède, pour chaque distance suffisamment petite, un voisin appartenant aussi à l'ensemble; et d'un autre côté, on devrait admettre que toute subdivision d'un objet spatial ne le réduit pas en ses composants simples : en aucun cas pour les subdivisions en nombre fini et même pas pour toutes les subdivisions en nombre infini, par exemple celles qui consistent en des bissections successives. Néanmoins, il nous faut à nouveau insister sur le fait que n'importe quel continu peut être en dernière analyse composé de points et de points seulement.

Comment interpréter : "... chaque membre individuel de l'aggrégat a au moins un voisin de l'aggrégat pour chaque distance aussi petite que l'on veut." ? Cela signifie-t-il : *à chaque distance donnée* ou *à une distance moindre que celle donnée* ? On peut se demander de toute façon à quoi se rattache le mot *distance* . Si les distances sont des réels, on tourne en rond puisque ceux-ci ne sont pas définis. Remarquons que, même en acceptant de considérer les distances comme des réels et si on prend l'interprétation *à une distance moindre que celle donnée*, la caractérisation donnée est vérifiée par l'ensemble des rationnels.

On voit aussi que Bolzano se préoccupe non seulement de cette caractérisation mathématique du continu comme le feront plus tard Dedekind et Cantor et d'autres, mais aussi de la nature des points, problème qui ne sera pas abordé par Dedekind et Cantor.

Dedekind.

Avec R. Dedekind, on laisse donc de côté le problème métaphysique du continu pour ne s'intéresser qu'au problème mathématique. Dedekind veut trouver une caractérisation du continu des réels qui soit applicable dans des démonstrations. En 1872, il écrit *Continuité et nombres irrationnels* [10], ouvrage dans lequel il crée les réels à partir des rationnels. Nous reproduisons les traductions de quelques extraits. Dans l'introduction, il explique sa motivation à créer les nombres réels.

> "Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvai alors, en tant que professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. A propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une valeur limite fixe et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel, ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale." [11]

Dedekind se rend compte que les mathématiciens parlent de "quantités continues" sans avoir élucidé cette notion de continuité. Il veut trouver une réelle définition de l'essence de la continuité dans les éléments de l'arithmétique. Il y parvient en novembre 1858 mais il ne publie ses résultats qu'en 1872.

Il suppose connu le développement de l'arithmétique des nombres rationnels mais en rappelle quelques points principaux dont celui-ci :

> Le système **Q** constitue un domaine ordonné unidimensionnel, infini dans deux directions opposées.

Il veut remplacer la représentation géométrique de cette propriété par une considération purement arithmétique. Après avoir défini la relation d'ordre < et celle d'égalité =, il expose les trois lois suivantes relativement à la relation d'ordre dans **Q**.

> I. Si $a > b$, et $b > c$, alors $a > c$. Nous dirons brièvement en accord avec les idées géométriques que b se trouve entre a et c.
>
> II. Si a et c sont deux nombres différents, alors il existe une infinité de nombres différents compris entre a et c.
>
> III. Si a est un élement de **Q**, alors tous les nombres de **Q** se répartissent en deux classes, A_1 et A_2, chacune comprenant une infinité de nombres ; A_1 comprend tous ceux $< a$ et A_2 tous ceux $> a$; le nombre a lui-même peut à volonté appartenir à la première ou à la seconde classe; étant respectivement le plus grand ou le plus petit de la première ou de la seconde classe. Dans tous les cas, la séparation de **Q** en deux classes A_1, A_2 est telle que chaque nombre de A_1 est plus petit que chaque nombre de A_2.

Il compare ensuite les nombres rationnels avec les points d'une droite en remarquant, d'une part que, une fois choisi un repère sur la droite, on peut associer à chaque nombre rationnel un point de la droite, d'autre part, qu'aux lois I, II, III sur les rationnels correspondent les mêmes lois où l'on remplace la relation "est plus grand que" par la relation "est à droite de" en différenciant les deux directions opposées de la droite en "droite" et "gauche".

Par contre, il existe sur la droite une infinité de points ne correspondant à aucun rationnel.

"Si maintenant l'on veut, et c'est bien ce que l'on souhaite, suivre ainsi arithmétiquement tous les phénomènes de la droite, les nombres rationnels n'y suffisent pas et il devient alors absolument indispensable de raffiner de façon essentielle l'instrument **Q** construit par la création des nombres rationnels, en créant de nouveaux nombres tels que le domaine des nombres devienne aussi complet, ou nous dirons tout de suite aussi "continu" que la droite." [11]

Dedekind veut définir ces nouveaux nombres en se basant uniquement sur l'arithmétique tout comme on ne fait intervenir que les nombres entiers positifs pour définir les nombres entiers négatifs et les nombres rationnels.

La comparaison faite ci-dessus entre le domaine **Q** des nombres rationnels et une droite a induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ?

[...] Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point p de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité, dans la réciproque, c'est-à-dire dans le principe suivant :

"Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions.

[...]

La supposition de cette propriété de la droite n'est autre qu'un axiome par lequel nous attribuons à la droite sa continuité, par lequel nous trouvons la continuité dans la droite. Si l'espace a au moins une existence réelle, il n'est pas nécessaire pour autant qu'il soit continu ; beaucoup de ses propriétés subsisteraient s'il était discontinu. Et si nous étions sûr que l'espace était discontinu, rien ne nous empêcherait, si nous le désirions, de remplir ses trous, en pensée, et donc de le faire continu ; ce remplissage consisterait en une création de nouveaux points et aurait été effectué en suivant le principe ci-dessus.

Et voici comment il crée les nombres irrationnels.

"Les derniers mots indiquent déjà suffisamment de quelle façon le domaine **Q** des nombres rationnels, non continu, doit être complété en un domaine continu. Dans le paragraphe 1, on souligne (III) que tout nombre rationnel opère une division du système **Q** en deux classes A_1, A_2 telle que tout nombre a_1, de la première classe A_1, soit plus petit que tout nombre a_2 de la seconde classe A_2 ; le nombre a est soit le plus grand nombre de la classe A_1 soit le plus petit nombre de la classe A_2. Soit donnée maintenant une certaine partition du système **Q** en deux classes A_1, A_2 ayant pour seule propriété caractéristique que tout nombre a_1 dans A_1 est plus petit que tout nombre a_2 dans A_2. Nous nommerons par souci de brièveté une telle partition une "coupure", que nous désignerons par (A_1, A_2). Nous pouvons dire alors que tout nombre rationnel a "opère" une ou, à vrai dire, deux sections que nous ne considérons cependant pas comme essentiellement différentes ; cette coupure a d'autre part la propriété suivante : ou bien il existe parmi les nombres de la première classe un nombre qui en est le plus grand, ou bien il existe parmi les nombres de la seconde classe un nombre qui en est le plus petit. Et réciproquement, si une coupure a aussi cette propriété, elle est opérée par ce nombre rationnel qui est le plus grand ou le plus petit.

Mais on se persuadera aisément qu'il existe une infinité de coupures qui ne sont pas opérées par des nombres rationnels." [11]

Dedekind donne un exemple de coupure qui n'est pas opérée par un nombre rationnel.

"Dans cette propriété que toutes les coupures ne sont pas opérées par des nombres rationnels, consiste le caractère incomplet et non continu du domaine **Q** de tous les nombres rationnels.

Chaque fois que nous sommes en présence d'une coupure (A_1, A_2) non produite par un nombre rationnel, nous créons un nombre nouveau, irrationnel, x que nous considérons comme parfaitement défini par cette coupure (A_1, A_2) " [11]

Le système de tous les nombres réels répond alors aux trois lois correspondant aux lois I, II, III vérifiées par les rationnels relativement à la relation d'ordre.

En plus de ces propriétés, cependant, le domaine **R** possède aussi la *continuité* ; c'est-à-dire que le théorème suivant est vrai :

IV. Si on partage le système $\mathbf{R}$ en deux classes U_1 et U_2 de façon que chaque nombre α_1 de U_1 soit plus petit que chaque nombre α_2 de U_2 alors il existe un et un seul nombre α qui engendre cette séparation.
Preuve. [...]

Dedekind étend à $\mathbf{R}$ les opérations existant dans $\mathbf{Q}$ et en donne quelques propriétés, puis fait le lien entre les considérations précédentes et certains théorèmes fondamentaux de l'analyse infinitésimale. Il commence par donner une définition de la limite, puis indique que le théorème que toute suite croissante majorée admet une limite est équivalent au *principe de continuité*, plus précisément au théorème IV repris ci-dessus.

Nous reproduisons également un extrait du livre *Que sont et que représentent les nombres?* [10]. Cet ouvrage fut publié en 1888 mais la première rédaction date de 1872-1878. Dedekind fonde d'abord les entiers puis $\mathbf{Q}$, puis $\mathbf{R}$ en utilisant les idées de théorie des ensembles de G. Cantor. Nous reprenons un extrait de la préface à la première édition.

> Ma réponse au problème qui figure dans le titre [*Que sont et que représentent les nombres?*] est alors, dit brièvement, la suivante : les nombres sont de libres créations de l'esprit humain; [...] C'est seulement grâce au procédé logique de construction de la science des nombres et de cette façon par l'acquisition du domaine continu des nombres que nous sommes en mesure d'examiner nos notions d'espace et de temps en les mettant en relation avec le domaine des nombres créé par notre esprit.

Cantor.

Dans un article de synthèse paru dans les "Mathematische Annalen" en 1883 , article qui résume les résultats essentiels de ses travaux depuis 1870, G. Cantor propose enfin une caractérisation *mathématique* de l'idée de continu.

Il n'est pas inutile de rappeler que Cantor, dès 1872, et comme Dedekind, a développé une construction complète de $\mathbf{R}$, sans laquelle la caractérisation mathématique de continu qu'il avait en vue aurait été illusoire.

La traduction ci-dessous est largement inspirée des *Fondements d'une théorie générale des ensembles* [13].

> Il ne me reste donc plus qu'à chercher, au moyen de notions de nombres réels, une idée purement arithmétique, et aussi générale que possible, d'un continu de points. Je prends nécessairement pour point de départ l'espace arithmétique plan à n dimensions G_n, c.à.d. l'ensemble de tous les systèmes de valeurs :
>
> $$(x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_n),$$
>
> où chaque x peut avoir indépendamment des autres toutes les valeurs numériques réelles de $-\infty$ à $+\infty$. La distance de deux points est définie par l'expression :
>
> $$+\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2}$$
>
> Il s'agit donc de proposer une définition précise et aussi générale que possible de ce qu'on entend par un sous-ensemble continu P de G_n.

Ici, bien sûr, G_n désigne ce que nous notons $\mathbf{R}^n$.

La première question à aborder est celle du nombre de points dont il faut disposer pour fabriquer un ensembre continu ; ce nombre d'éléments d'un ensemble est ce que formalise la notion de *puissance* d'un ensemble.

> J'ai démontré que tous les espaces G_n, si grand que soit le nombre de dimensions n, ont la même puissance entre eux et par suite la même puissance que le continu linéaire, et la même que l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle (0...1). De là résulte que tous les systèmes de points infinis P ont soit la puissance de la première classe de nombres (I) soit celle de la seconde (II).

Cette dernière phase signifie : << tous les systèmes P infinis de points ont soit la puissance de $\mathbf{N}^*$, soit la puissance immédiatement supérieure, qui se trouve (!) être égale à celle de [0,1] ou de $\mathbf{R}$ >> ; le point d'exclamation est là pour signaler que l'affirmation de Cantor n'est rien de moins qu'une des premières apparitions de la célèbre Hypothèse du Continu. Il s'agit maintenant de disposer convenablement tous ces points, de les situer les uns par rapport aux autres, de les agglomérer convenablement, d'en faire du continu.

> Pour arriver maintenant à la notion générale d'un continu donné dans G_n, j'utilise la notion d'ensemble dérivé $P^{(1)}$ d'un

ensemble de points P donné, elle conduit à la notion d'un dérivé $P^{(\gamma)}$, où γ peut être un nombre entier quelconque d'une des classes de nombres (I), (II), (III), etc.

Si S est dans des conditions telles que l'emploi du procédé de dérivation n'y change absolument rien, en sorte que :

$$S \equiv S^{(1)}$$

et par conséquent aussi :

$$S \equiv S^{(\gamma)},$$

j'appelle ces systèmes S *ensembles parfaits de points.*

On peut démontrer pour les systèmes parfaits ce théorème : ils n'ont jamais la puissance de (I).

Rappelons que, si P est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on appelle premier (ensemble) dérivé de P, et on note $P^{(1)}$ ou P', l'ensemble des points d'accumulation de P, c'est-à-dire l'ensemble des points a de $\mathbb{R}$ tels que, pour tout intervalle ouvert I contenant a : $P \cap (I - \{a\}) \neq \phi$, ce qui équivaut à ce que $P \cap I$ comporte une infinité de points distincts.

Mais la seule propriété d'être parfait ne suffit pas : Cantor propose, comme contre-exemple, l'ensemble triadique qui, depuis, porte son nom.

Les systèmes de points parfaits S ne sont pas toujours ce que nous avons appelé condensés dans toute étendue ; c'est pourquoi ils ne se prêtent pas encore à la définition complète d'un continu de points, quand même on est obligé d'accorder immédiatement que le continu doit être toujours un système parfait.

Comme exemple d'un système de points parfait, qui n'est pas condensé dans toute étendue d'un intervalle si petit qu'il soit, j'indique l'ensemble de tous les nombres réels contenus dans la formule :

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \ldots$$

où les coefficients c peuvent prendre à volonté les deux valeurs 0 et 2 et où la série peut être composée d'un nombre fini ou infini des membres.

Cantor énonce alors une seconde condition que doit remplir un ensemble de points pour mériter d'être qualifié de continu.

Il faut donc encore une notion pour la joindre à celle qui précède et définir le continu : c'est la notion d'un système de points T bien enchaîné.

Nous disons que T est un système de points bien enchaîné, quand pour deux points quelconques t et t' de ce système, avec un nombre donné ε aussi petit qu'on voudra, il y a toujours un nombre fini de points $t_1, t_2, \ldots t_\nu$ de T, en sorte que les distances $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \ldots \overline{t_\nu t'}$ soient toutes plus petites que ε.

Et Cantor avance alors l'hypothèse que ces deux conditions suffisent à caractériser un sous-ensemble de points de $\mathbb{R}^n$ qu'on veut qualifier de continu.

Tous les continus de points géométriques que nous connaissons sont aussi compris, comme il est facile de la voir, sous cette notion du système de points bien enchaîné ; mais je crois maintenant reconnaître aussi dans ces deux attributs "parfait" et "bien enchaîné" les caractères nécessaires et suffisants d'un continu de points et je définis par conséquent un continu de points dans G_n comme un système parfaitement enchaîné. Ici "parfait" et "bien enchaîné" ne sont pas seulement des mots, mais des attributs du continu tout à fait généraux, caractérisés d'une manière abstraite, de la façon la plus précise, par les définitions précédentes.

Il propose enfin un procédé de construction de sous-ensemble continu de $\mathbb{R}^n$.

Le dérivé d'un système de points bien enchaîné est toujours un continu, que le système de points bien enchaîné ait la première ou la deuxième puissance.

Ce critère entraîne, en particulier, que le premier dérivé de $\mathbb{Q}$, à savoir la "droite" réelle, est un continu, au sens de Cantor.

En guise de conclusion.

La question de savoir si l'on peut faire une droite avec des points est intéressante, parce qu'elle pose merveilleusement bien *la question du statut de l'intuition en mathématiques.*

Pour l'essentiel, l'histoire de cette question-là est celle de *la caractérisation mathématique d'un objet* qui soit "*continu en lui-même*". L'ensemble des textes présentés dans notre atelier témoigne de ce que la solution de cette question a été lente et détournée, en particulier parce que la perception intuitive, ou physique, du continu s'est révélée être autant un frein (de Méré, Berkeley,...) qu'un moteur (Aristote, Pascal,...)

A posteriori, il est facile d'aller au coeur de la question. Dès le cinquième siècle avant Jésus-Christ, *les paradoxes de Zénon ont cristallisé les difficultés* liées à l'intuition du continu. Ces difficultés se sont précisées au fur et à mesure des progrès du Calcul Infinitésimal ; il n'y a rien d'étonnant à cela, quand on sait que *le concept de nombre réel était le préalable essentiel*, autant à l'arithmétisation définitive de l'Analyse, qu'*à l'entrée du continu dans le monde mathématique.* C'est ce que la lecture des textes de Bolzano, Dedekind ou Cantor, permet de vérifier.

Or, et pour en revenir au statut de l'intuition, *cette notion de nombre réel ne saurait pas être une notion issue d'une intuition immédiate* : il n'aurait pas fallu, sinon, 2500 ans pour réaliser que la définition même de nombre réel résout les paradoxes de Zénon. Et les découvertes de fonctions "monstrueuses" (Weierstrass, Peano, Lebesgue,...), de boules équidécomposables de rayons différents (Banach, Tarsky,...), des mesures fractionnaires (Hausdorff,...), etc. n'auraient pas créé les surprises qu'on sait.

Ainsi apparaît finalement, lorsqu'on fait, ou lorsqu'on apprend des mathématiques, et qu'on souhaite les accorder à une forme mathématique d'intuition, *LA NECESSITE DE SE DEPRENDRE DE LA NATURE DES CHOSES* (*). Peu importe ainsi l'idée que l'on se fait de la nature d'un objet mathématique, ce qui compte, c'est qu'on soit d'accord avec les propriétés qu'on attribue à cet objet, qu'on explicite la cohérence de ces propriétés, qu'on ne cherche pas à imposer à un tel objet plus de propriétés qu'il n'est à même d'en supporter.

(*)Citation empruntée au débat, pendant l'atelier...

Mais, si cette nécessité condamne l'intuition immédiate d'une notion à un statut non mathématique, elle ne fait pas pour autant de cette intuition une forme de connaissance à proscrire. *Cette intuition première* n'est ni inutile, ni nuisible. *C'est*, bien au contraire, *une étape nécessaire dans la mise au point d'une notion*, nécessaire parce que c'est elle qu'il s'agit de dépasser. *La formalisation est cette étape de dépassement*, et cette étape ne prend tout son sens qu'avec *l'apparition d'une nouvelle intuition, proprement mathématique* celle-là, et *extraordinairement plus riche que celle de la perception ordinaire.* Les exemples cités plus haut (Weierstrass, Péano, Lebesgue, Banach, Hausdorff,...) en font foi.

Cette intuition nouvelle devient tellement riche qu'elle éclaire enfin le mystère de ce labyrinthe rectiligne, dû à l'imagination de J.-L. Borges, et qui nous servait d'épigraphe.

Mais est-ce une coïncidence ?

Bibliographie

[1] Aristote, *Physique (I-IV)*, Tome I, Les Belles Lettres, Paris, 1983.

[2] Aristote, *Physique (V-VIII)*, Tome II, Les Belles Lettres, Paris, 1969.

[3] Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, Armand Colin, Paris, 1970.

[4] B. Pascal, De l'esprit géométrique et de l'art de persuader, dans *Oeuvres complètes*, Seuil, Paris, 1963.

[5] B. Pascal, *Oeuvres complètes*, Tome III, Desclée de Brouwer, Paris, 1991.

[6] G. Berkeley, *Oeuvres choisies*, Tome I, Aubier, Montaigne, 1944.

[7] B. Bolzano et son mémoire sur le théorème fondamental de l'analyse, *Revue d'histoire des sciences* 17 (1964), pp. 129-164.

[8] B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, Beic. H. Reclam Sen., Leipzig, 1851.

[9] B. Bolzano, *Paradoxes of the infinite*, Yale University Press, New Haven, 1950.

[10] R. Dedekind, *Essays on the theory of numbers*, Dover Publications, New York, 1963.

[11] J. Dhombres, etc., *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris, 1987.

[12] P. Dugac, *Sur les fondements de l'analyse au XIXe siècle*, U.C.L., Louvain-la-Neuve, 1980.

[13] G. Cantor, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, Acta Mathematica 2 (1883), pp. 381-408.

Statut du nombre et détermination de l'infini

Gilles Ferréol
Université de LILLE I
(METIS / C.L.E.R.S.E.)

L'absence d'une définition réellement satisfaisante du nombre entier a condamné non seulement la mathématique grecque mais aussi celle de l'époque classique à faire l'économie de l'infini. Il faudra attendre la seconde moitié du XIXème siècle pour qu'un renversement de perspective puisse s'opérer (cf. l'Annexe, p. 127). Les travaux de G. Cantor (1878), G. Frege (1884) et R. Dedekind (1888) méritent, à cet égard, une analyse attentive et requièrent une compréhension préalable de la cardinalité (C. Imbert, 1969 ; H. Wang, 1974).

Le problème de la nature du nombre

Ce problème, rappelle J.-L. Gardies, "hante avec d'autant plus de constance la philosophie occidentale que celle-ci ne commencera à en apercevoir la solution que très tardivement, dans les années 1880-1890" (J.-L. Gardies, 1989, p. 549).

T. Dantzig ajoute, pour sa part, qu' "il n'y a pas deux branches des mathématiques qui présentent un plus grand contraste que l'arithmétique et la théorie des nombres" ; la première est accessible à l' "esprit le moins ouvert" ; la seconde nécessite une "adresse insoupçonnée" et une "habileté consommée" (T. Dantzig, 1974, p. 41).

Examinons tout d'abord le point de vue défendu par les Grecs (A. Darbon, 1951). Thalès, du moins si l'on en croit certains témoignages, aurait emprunté aux Egyptiens l'idée que le nombre était une "collection d'unités". Aristote appartient à cette tradition, de même qu'Euclide (cf. le livre VII des **Eléments**). La théorie des proportions et la mise en évidence de rapports irrationnels (tel celui de la diagonale du carré à son côté) conduisent à souligner la spécificité des grandeurs. Celles-ci peuvent être caractérisées par les propriétés de continuité, de consécutivité et de contiguïté :

- Est **consécutif** ce qui, dans un ordre donné, "n'est séparé de la chose avec laquelle il y a consécution par aucun intermédiaire du même genre" ;

- Est **contigu** "le consécutif qui est en outre en contact" ;

- Le contigu, enfin, est dit **continu** "lorsque les limites par lesquelles les deux choses sont en contact ne sont qu'une seule et même chose".

La rencontre avec les "imaginaires" allait ébranler le prétendu privilège intuitif de la notion de grandeur. Le moment décisif se produit avec Cantor et Dedekind, lesquels raisonnent non plus en termes d' "agglomération d'unités" mais sous l'angle d'un "ensemble d'ensembles ayant même puissance" (**Mächtigkeit**). La possibilité d'une relation bijective ouvre dès lors la voie à une considération positive de l'infini, ainsi que l'avait déjà envisagé Bolzano dans ses **Paradoxes** (traité posthume de 1820). A condition toutefois de bien maîtriser l'essence de la cardinalité. A défaut de cette compréhension, la conception aristotélicienne réapparaît sous une forme ou sous une autre (J.-M. Salanskis, 1991). Songeons, en particulier, au vocable d'**infini**, cher à Descartes et aux métaphysiciens du XVIIème siècle. Pour l'auteur des **Principes de la philosophie** (paragraphe 26), "nous ne nous embarrasserons jamais dans les disputes de l'infini ; d'autant qu'il serait ridicule que nous, qui sommes finis, entreprissions d'en déterminer quelque chose, et par ce moyen le supposer fini en tâchant de le comprendre. C'est pourquoi nous ne nous soucierons pas de répondre à ceux qui demandent si la moitié d'une ligne infinie est infinie, et si le nombre infini est pair ou non pair, et autres choses semblables, à cause qu'il n'y a que ceux qui s'imaginent que leur esprit est infini qui semblent devoir examiner de telles difficultés. Et pour nous, en voyant des choses dans lesquelles, selon certains sens, nous ne remarquons point de limites, nous n'assurerons pas pour cela qu'elles soient infinies, mais nous les estimerons seulement indéfinies".

C'est contre cette approche que s'inscrit Cantor à travers le célèbre adage : **Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt** (Dieu est le seul absolu qui échappe en tant que tel aux déterminations). Pour apprécier le courage qu'il fallait pour rompre aussi ouvertement avec les traditions du passé, considérons par exemple le passage suivant, extrait d'une lettre de Gauss à Schumacher : "Quant à votre preuve, je dois protester très énergiquement contre l'usage que vous faites de l'infini

comme de quelque chose d'achevé, car cela n'est jamais permis en mathématiques. L'infini n'est qu'une façon de parler, une expression abrégée pour signifier qu'il existe des limites dont certaines valeurs peuvent croître au-delà de toutes limites. Il ne s'élèvera aucune contradiction tant que l'homme fini ne commettra pas l'erreur de prendre l'infini pour quelque chose de déterminé, tant qu'il ne sera pas conduit par une habitude acquise de son esprit à considérer l'infini comme quelque chose de limité". Les idées de Gauss sur cette question, note T. Dantzig, étaient universellement partagées, et "l'on peut, par conséquent, imaginer quelle tempête souleva dans le camp des orthodoxes le défi de Cantor : non pas qu'à cette époque on n'usât point de l'**infini en soi** d'une manière ou d'une autre ; mais, en pareille matière, l'attitude des mathématiciens rappelait un peu celle de ce puritain à l'égard de l'adultère : il aurait préféré s'en rendre coupable plutôt que de prononcer le mot en présence d'une femme !". Heureusement pour Cantor, "une longue et mûre méditation l'avait solidement armé car, pendant plusieurs années, il dut soutenir la lutte tout seul, et quelle lutte !". Ainsi donc, "les débuts agités de la théorie des agrégats prouvent que, même dans un domaine aussi abstrait que celui des mathématiques, les passions humaines ne disparaissent jamais complètement" (T. Dantzig, 1974, pp. 212-213).

La détermination de l'infini

Dans **Was sind und was sollen die Zahlen** ?, R. Dedekind, tirant profit d'une suggestion jadis formulée par certains scolastiques comme Duns Scot, énonce la propriété suivante : "Un système S est dénommé **infini** quand il est semblable (**ähnlich**) à une de ses parties propres", c'est-à-dire quand on peut lui faire correspondre une bijection. Dans le cas contraire, S est dit **fini** (P. Dugac, 1976).

On peut alors reprendre, sous un angle nouveau, la célèbre distinction entre **infini catégoramatique** et **infini syncatégoramatique**. Si l'on se réfère au vocabulaire d'Eustache de Saint-Paul ou des jésuites du Collège de Coïmbre, on dira que :

- l'infini catégoramatique, seul infini actuel à proprement parler (**proprie dictum**), est celui qui contient des parties infinies toutes égales à l'une déterminée d'entre elles, qui existent en même temps de manière distincte, tel l'ensemble infini des entiers ;

- l'infini syncatégoramatique, infini actuel à parler improprement (**improprie dictum**), est celui en revanche "qui contient des parties infinies en acte, qui n'ont cependant pas d'ordre entre elles, comme la première, la seconde, la troisième et ainsi de suite, et qui tendent à la constitution d'une chose finie, comme la multitude des points de la ligne" (J.-L. Gardies, 1989, p. 553).

Cantor tiendra des propos analogues mais sur la base de véritables démonstrations mathématiques (cf. celle relative à la diagonale). De sorte que les nombres infinis, pour être concevables en quelque manière, doivent constituer une "espèce totalement nouvelle, dont les dispositions dépendent entièrement de la nature des choses et sont l'objet de notre recherche, non de notre arbitraire ou de nos préjugés". Les propriétés habituelles de parité ou d'imparité, lit-on dans **Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre** (1878), ne s'appliquent plus aux transfinis. Résultat que pressentait à sa façon Pascal dans son **Pari** : "Quant à l'infini en nombre, nous ne savons pas ce qu'il est : il est faux qu'il soit pair, il est faux qu'il soit impair car, en ajoutant l'unité, il ne change pas de nature ; cependant, c'est un nombre et tout nombre est pair ou impair (...). **Il est vrai que cela s'entend de tout nombre fini**".

Pour de nombreux observateurs, "Cantor commence là où Galilée a renoncé. Oui, il est possible d'établir une correspondance entre deux ensembles infinis, même si l'un n'est qu'une partie de l'autre ! Pour préciser, nous dirons que deux ensembles, **finis** ou **infinis**, sont équivalents ou ont la même puissance si on peut les appareiller élément par élément. Si deux ensembles sont de puissance inégale, l'appareillement épuisera l'un, mais il restera des éléments de l'autre non encore appareillés ; en d'autres termes, le premier peut s'appareiller à une partie du second, mais le second ne peut pas s'appareiller à une partie quelconque du premier" (T. Dantzig, 1974, p. 213). Et si le problème de la réduction des réels aux rationnels fait l'objet, à partir du XIXème siècle, de nombreuses discussions (cf. les contributions de Cantor et Dedekind, celles de Weierstrass, Charles Méray ou Edouard Heine), c'est en grande partie parce que le développement de la théorie des groupes (en tant que théorie de la symétrie, de l'indiscernabilité et de l'homogénéité) attire notre attention sur la nécessité de construire le continu sans le moindre appel à l'intuition de l'espace, mais par des moyens rigoureusement arithmétiques, hors des "évidences géométriques" (G. Frege, 1969). Dedekind ira encore plus loin et dira des entiers naturels eux-mêmes qu'"on peut à juste titre les nommer une libre création de l'esprit humain". Cantor, à l'opposé, réaffirmera après Newton que "le mathématicien n'est que le scribe fidèle se contentant de recueillir ce que profère la voix de la Nature".

Cependant, des interrogations subsistent : "Si nul ne peut contester qu'il soit devenu possible de disposer d'un **analogon** de la ligne continue par des procédures logico-mathématiques, il n'en demeure pas moins que l'ensemble des réels surgit au terme d'une cascade de constructions comme une entité hautement abstraite, alors que le continu, dans une optique aristotélicienne que le simple bon sens aurait du mal à désavouer, se rencontre déjà presque au niveau des substances premières que nous livre la perception" (J.-L. Gardies, 1989, p. 556). Dès lors, après Gauss, Dirichlet ou Frege, "est-on en état de comprendre de l'intérieur les tentatives des Grecs et de rejeter un intuitionnisme relayé d'Eudoxe à Descartes et dont l'esthétique kantienne pourrait être le dernier avatar ?" (**Ibid**.).

Concluons provisoirement avec L. Couturat : "Nous espérons avoir suffisamment justifié l'infini de grandeur et de nombre des contradictions qu'on lui a imputées, et avoir dissipé la plupart des objections que l'on a accumulées contre cette idée. Sans doute, le nombre infini se présente, en apparence, comme le résultat d'un dénombrement ou d'une mesure interminable, et peut donc paraître impossible et contradictoire. Mais cette conception négative implique une donnée positive, à savoir une collection ou une grandeur réellement infinies ; ce fait suffit à légitimer l'invention du nombre du même nom, et à lui conférer un sens et une valeur objective : ce nombre représente, suivant le cas, une pluralité innombrable ou une grandeur incommensurable. On peut se demander, à ce sujet, si ces deux aspects sont différents. Pour résoudre cette question, il faut rechercher l'origine rationnelle de ces deux emplois et en déterminer les conditions d'application. Cette application étant le fondement mathématique de la Physique, nous remonterons ainsi à la source de la connaissance scientifique, et nous en apercevrons peut-être mieux le caractère et la portée. Nous serons en même temps amenés à définir et à distinguer les diverses facultés de connaître, et la part qui revient à chacune d'elles dans l'élaboration de la science" (L. Couturat, 1973, p. 505). Quant au sage, "il jette un dernier regard sur les cimes lointaines derrière lesquelles s'est perdue l'origine de la pensée et répète avec le maître Henri Poincaré : **L'obscurité de la source n'empêche pas le fleuve de couler**" (T. Dantzig, 1974, p. 246).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

COUTURAT L. (1973), **De l'infini mathématique**, Paris, A. Blanchard (1ère édition : 1896).

DANTZIG T. (1974), **Le nombre, langage de la science**, trad. fr., Paris, A. Blanchard (1ère édition : 1930).

DARBON A. (1951), **Une doctrine de l'infini**, Paris, P.U.F.

DUGAC P. (1976), **Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nombreux textes inédits)**, Paris, Vrin.

FREGE G. (1969), **Les fondements de l'arithmétique. Recherche logico-mathématique sur le concept de nombre,** trad. fr., Paris, Seuil (1ère édition : 1884).

GARDIES J.-L. (1989), "Nombre, infini, continu", in **Encyclopédie philosophique universelle. I : L'univers philosophique** (volume dirigé par JACOB A.), Paris, P.U.F.

IMBERT C. (1969), **Les fondements de l'arithmétique**, Paris, Seuil.

SALANSKIS J.-M. (1991), **L'herméneutique formelle. L'infini, le continu, l'espace**, Paris, C.N.R.S.

WANG H. (1974), **From Mathematics to Philosophy**, Londres, Routledge and Kegan Paul.

ANNEXE (Source : T. Dantzig, 1974, pp. 247-248)

Points de repère dans l'évolution du concept du nombre.

L'ŒUVRE.	L'AUTEUR.	LE PAYS.	L'ÉPOQUE.
Découverte des valeurs *irrationnelles* .	Pythagore.	Grèce.	VIe siècle av. J.-C.
Première crise du concept de l'*infini* ...	Zénon, Platon, Aristote.	Grèce.	IVe siècle av. J.-C.
L'idée de *limite* est formulée pour la première fois......	Archimède.	Grèce.	IIIe siècle av. J.-C.
L'invention du symbole *zéro*	Inconnu.	Inde.	Premiers siècles après J.-C.
Les nombres *négatifs*.	Inconnu.	Inde.	Id.
Premier usage d'une *suite*	Fibonacci.	Italie.	XIIIe siècle.
Premier emploi systématique des *fractions continues*.....	Bombelli.	Italie.	XVIe siècle.
On formule pour la première fois les *nombres complexes*.	Cardano. Bombelli.	Italie.	XVIe siècle.
Invention de la *notation littérale*	Viète.	France.	Fin du XVIe s.
Les valeurs infinitésimales	Cavalieri.	Italie.	1635.
On formule pour la première fois l'*agrégat infini*.........	Galilée.	Italie.	1638.
Invention de la géométrie analytique	Descartes.	France.	1639.
Le principe de l'induction mathématique est formulé pour la première fois......	Pascal.	France.	1654.
L'invention du *calcul infinitésimal*.......	Newton. Leibniz.	Angleterre. Allemagne.	Vers 1677.
Premier emploi systématique des *séries infinies*	Newton. Leibniz.	Angleterre. Allemagne.	Vers 1677.
Découverte d'une interprétation géométrique des *nombres complexes*	Gauss.	Allemagne.	1797.
On formule pour la première fois la *puissance* d'un agrégat	Bolzano.	Allemagne.	1820.
Découverte des nombres *algébriques*, ne pouvant pas s'exprimer par des radicaux	Abel.	Norvège.	1825.
Découverte des nombres transcendants.	Liouville.	France.	1844.
L'invention des *quaternions*	Hamilton.	Gde-Bret.	1843.
Première théorie des *grandeurs extensibles*.	Grassmann.	Allemagne.	1844.
On formule explicitement pour la première fois le principe de *permanence* des lois formelles..	Hankel.	Allemagne.	1867.
Première théorie scientifique des valeurs *irrationnelles*	Dedekind.	Allemagne.	1872.
Deuxième théorie scientifique des valeurs *irrationnelles*.	Cantor.	Allemagne.	1883.
L'invention du *transfini*	Cantor.	Allemagne.	1883.
Découverte des *antinomies* de la théorie des agrégats......	Burali-Forti.	Italie.	1897.

De la difficulté d'être omniscient

Henri Lombardi
Université de Franche-Comté
(URA CNRS 741)

Le moyen fait partie de la recherche de la vérité, aussi bien que le résultat. Il faut que la recherche de la vérité soit elle-même vraie; la recherche vraie, c'est la vérité déployée, dont les membres épars se réunissent dans le résultat.

Karl Marx, cité par Georges Perec dans *Les Choses*

Résumé

Depuis les résultats de consistance relative de l'axiome de choix et de sa négation, de l'hypothèse du continu et de sa négation, il est difficile d'accorder foi au réalisme platonicien selon lequel un Univers Mathématique Cantorien (ou plutôt Zermelo-Frankelien) existe de manière idéale quelque part, garant du sens des énoncés mathématiques cantoriens usuels . Pour Gödel, par exemple, qui défend ce point de vue, on doit un jour trouver des axiomes raisonnables qui permettront de décider l'hypothèse du continu. Mais est-ce vraiment un programme raisonnable ?

La contradiction entre l'axiome du choix et l'axiome de détermination pose un problème plus délicat encore, celui de l'impossibilité d'être omniscient en ce qui concerne l'infini actuel, s'il existe. On peut interpréter ce paradoxe en disant qu'il est impossible de vouloir extrapoler du fini à l'infini tout ce qui semble raisonnable dans le domaine fini.

Dans l'article, après avoir situé les problèmes soulevés, on essaiera de montrer comment une problématique d'infini potentiel relativise ces problèmes et change l'interprétation même du vocabulaire ensembliste.

Introduction

Les affirmations du langage courant se prêtent très mal à la logique du Vrai et du Faux. Lorsqu'on dit par exemple : «Ceci est une grosse pomme» la limite entre Vrai et Faux est entourée d'une zone de flou importante. Tout d'abord concernant la partie “ceci est une pomme” (s'il manque la queue ? si elle est coupée en deux, si on a enlevé les pépins, etc...) et aussi concernant l'affirmation que la pomme est “grosse”.

En un certain sens on peut dire que l'homme a inventé des êtres mathématiques abstraits tels que “les nombres” ou “le plan euclidien” de manière à pouvoir raisonner “sans ambiguïté de sens”, c'est-à-dire de manière à pouvoir raisonner avec une logique du Vrai et du Faux. Une fois définies les opérations élémentaires sur les nombres entiers une affirmation telle que :

> si p est un nombre premier et si r est un entier $< p$, alors le nombre $r^{p-1} - 1$ est divisible par p

est vraie, et on peut en donner une démonstration parfaitement convaincante.

Cependant l'introduction par Cantor des ensembles infinis dans les mathématiques a jeté une certaine confusion au sujet de la notion de Vrai et Faux. La question du Vrai et du Faux se pose en effet de manière différente selon qu'un énoncé mathématique est testable par un processus fini ou par un processus infini, ou encore par une infinité en cascade de processus infinis, ou même par des processus encore plus “mystérieux”.

On pourrait croire que l'infini en mathématiques existait bien avant Cantor, dès que la notion de nombre entier fut mise au point. La collection des entiers naturels, en effet, a la particularité de n'être “jamais finie”.

En fait, avant Cantor, personne n'avait eu l'audace de considérer “l'ensemble de tous les entiers naturels” comme une totalité donnée, actuelle. L'esprit humain, en effet, ne peut appréhender qu'un nombre fini d'objets, les uns après les autres.

Avant Cantor donc, la collection des entiers naturels était seulement un infini en puissance, un infini “potentiel” et non “actuel”. Lorsqu'on parle d'infini potentiel, ce que l'on a clairement en tête, c'est ***le processus*** qui permet de passer de l'entier n à l'entier $n + 1$, processus qui fait que la collection des entiers n'est jamais finie.

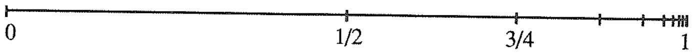
La croyance en un infini actuel équivaut en fait de manière quasiment logique à la croyance en un “Dieu mathématicien”

capable, lui, d'appréhender “d'un seul coup” l'ensemble de tous les entiers naturels. C'est ce que nous essayerons d'illustrer dans cet article.

Les philosophes grecs ne croyaient pas en l'infini actuel, ou tout au moins s'en interdisaient l'usage en mathématiques.

Zénon d'Elée, à sa manière et à juste titre, avait soulevé la contradiction existant entre l'homme et “Dieu” puisque “Dieu” est capable de diviser en un temps fini (en une seconde !) l'intervalle de temps constitué par 1 seconde en une infinité de subdivisions, alors que l'homme n'arrive *jamais* au bout de la description complète de cette “subdivision à l'infini”, ni en une seconde, ni en un siècle.

Un paradoxe de Zénon



*Y a-t-il **VRAIMENT** une infinité d'instants “en acte” entre l'instant 0 et l'instant 1 ?*

La solution proposée par les Grecs et acceptée jusqu'à Cantor : *Seul l'infini potentiel est autorisé en mathématiques.*

De même Euclide, dans ses Eléments, ne considère pas “un espace infini à 3 dimensions” mais seulement “un espace à 3 dimensions qui n'est jamais fini”. Il ne considère pas “l'ensemble de tous les entiers naturels” mais seulement “des entiers naturels” (collection ouverte, jamais finie). Il ne considère pas “l'ensemble des nombres réels” mais se contente de comparer entre eux des rapports de grandeurs homogènes qui viennent se présenter à lui dans sa quête géométrique. Interprétation en langage moderne : deux rapports sont égaux selon Eudoxe[1] si et seulement si ils définissent des coupures égales selon Dedekind. Mais Euclide se refuse à considérer la coupure en tant que telle, elle représenterait un infini actuel. A fortiori refuse-t-il de considérer l'infini actuel de telles coupures.

[1] On attribue à Eudoxe la théorie des proportions mise au point par les Grecs pour faire face aux problèmes des grandeurs "sans commune mesure" comme le côté et la diagonale d'un carré.

La notion d'infini mathématique actuel s'est avérée extrêmement "pratique" et a été adoptée par la majorité des mathématiciens.

Cependant, le prix à payer est en fin de compte assez cher. En effet, les notions logiques de base, qui ne posent pas problème lorsqu'elles sont utilisées pour des propriétés bien définies portant sur des collections finies d'objets mathématiques, ne peuvent s'appliquer aux propriétés concernant des ensembles infinis qu'au prix d'une extrapolation douteuse.

La question du tiers exclu pour des énoncés du type de la conjecture de Goldbach

La conjecture de Goldbach est la suivante :

Tout entier pair supérieur à 4 est somme de 2 nombres premiers.

Nous sommes tellement habitués à raisonner avec l'infini actuel comme avec le fini, que si vous lisez :

La conjecture de Goldbach est forcément vraie ou fausse

vous avez l'impression de lire une trivialité.

Or ce n'est pas du tout une trivialité.

Dire que la conjecture est fausse c'est dire qu'on peut trouver un entier pair supérieur à 4 qui n'est pas somme de 2 nombres premiers. Donc il suffit d'une vérification pour montrer que la conjecture est fausse.

Par contre dire que la conjecture est vraie c'est signifier, ou bien qu'on en possède une démonstration convaincante, ou bien qu'il faut faire une infinité de vérifications. Or non seulement l'homme ne sait pas faire une infinité de vérifications, mais on peut penser qu'une infinité de vérifications est a priori hors des "capacités de calcul de l'univers". Autrement dit, une "machine à calculer infinie" semble inconcevable. Même si l'univers avait une durée de vie infinie et si une machine à calculer pouvait être construite qui dispose de l'éternité du temps à venir, la conjecture de Goldbach ne serait pourtant "jamais vérifiée en entier".

Maintenant supposez que la situation concrète soit la suivante

– l'homme ne trouvera jamais de démonstration convaincante de la conjecture,
– l'homme ne trouvera jamais de contre-exemple prouvant que la conjecture est fausse.
– il ne peut exister de machine à calculer infinie

Alors dans ce cas, seul un "Dieu mathématicien" (s'il existe) peut dire que la conjecture est forcément vraie ou fausse.

Vous direz sans doute que je coupe des cheveux en quatre. En fait je souligne seulement qu'il n'est pas du tout trivial de considérer que la loi du tiers exclu s'applique aux ensembles infinis, même dans le cas d'un énoncé dont la structure est extrêmement simple.

Le coup de génie de Cantor a été de transformer la fameuse démonstration d'impossibilité «l'infini actuel ne peut exister en mathématiques puisque le tout doit toujours être supérieur à la partie» en une définition d'existence «j'appelle infini un tout qui est en bijection avec l'une de ses parties». Cet acte fondateur est le refus d'admettre comme définitive une évidence qui a lieu dans le domaine du fini. Mais d'autres évidences qui ont lieu dans le domaine du fini, comme le tiers exclu, sont alors ipso facto elles-mêmes sujettes à caution et à discussion. Si j'appelle distribution la dérivée d'une fonction continue non dérivable, je dois bien évidemment m'attendre à ne pas pouvoir faire avec les distributions tout ce que j'avais le droit de faire avec les fonctions continues. Et celui qui ne prendrait pas de précautions de peur de se faire accuser de couper les cheveux en quatre serait sûrement accusé de laxisme.

Reprenons en le détaillant, ce genre d'extrapolation, du fini à l'infini, qui se cache derrière la phrase : «La conjecture de Goldbach est forcément vraie ou fausse»

Notons «$A(n)$» pour « $2n + 4$ est somme de 2 nombres premiers »

L'affirmation $A(n)$ peut être testée pour tout entier n. En effet l'affirmation $A(n)$ est parfaitement décidable puisqu'on dispose d'un processus effectif qui permet de calculer tous les nombres premiers inférieurs à $2n + 4$. On est donc assuré que $A(n)$ est "Vrai ou Faux" en un sens fort[2] , pour chaque entier n . Cela s'écrit en langage formalisé constructif :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ (A(n) ou non A(n))

Dire que la conjecture de Goldbach est forcément vraie ou fausse consiste à affirmer :

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ A(n) ou $\exists n \in \mathbb{N}$ non A(n)

Le fait qu'un énoncé du type (1) implique l'énoncé correspondant du type (2) est, du point de vue de l'interprétation constructive de la vérité, un *principe d'omniscience*. Dans la littérature constructive, on l'appelle «le petit principe d'omniscience».[3]

Ce principe est couramment admis par les mathématiciens actuels, en général au nom du réalisme platonicien : il y aurait, quelque part, au moins de manière idéale, un ensemble infini actuel des entiers naturels, pour lequel la logique du tiers exclu s'applique tout comme dans les ensembles finis.

C'était en tout cas le point de vue de Gödel, qui étendait d'ailleurs le réalisme platonicien à toute la hiérarchie cumulative des ensembles.

2 Il est vrai que pour un entier dépassant 10^{100} chiffres, la possibilité de vérifier A(n) semble excéder à jamais en pratique nos capacités de calcul. Néanmoins, on peut considérer que cette possibilité n'est pas exclue en principe mais seulement en pratique. Admettre qu'un énoncé du type A(n) peut, au moins en principe, être testé vrai ou faux pour tout entier n relève de l'"extrapolation du potentiellement réalisable". Dans ce genre d'extrapolation, on extrapole un résultat vrai depuis le fini raisonnable jusqu'au fini même déraisonnable, mais on reste dans un cadre fini.

3 Ce principe d'omniscience peut être compris et discuté sans recours à aucun système formel. Dans les systèmes formels classiques, on admet le principe du tiers exclu, qui est une sorte de méga principe d'omniscience. Dans de tels systèmes formels, aussi bien les énoncés du type (1) que les énoncés du type (2) sont des théorèmes, et donc a fortiori les énoncés du type (1)$\Rightarrow$(2). Dans un système formel constructif, il n'y a pas de preuve générale des énoncés (1)$\Rightarrow$(2). Néanmoins, si on rajoute le schéma d'axiome (1)$\Rightarrow$(2). on obtient un système formel où le tiers exclu n'est pas pour autant valable. D'autres principes d'omniscience, plus faibles ou plus forts que le «le petit principe d'omniscience» peuvent être discutés. Le degré de non-effectivité des théorèmes usuels de mathématiques classiques peut être analysé en référence à un nombre relativement restreints de tels principes d'omniscience.

Le réalisme platonicien

Un ensemble infini "en acte" $\mathbb{N}$ *existe, au moins de manière idéale, et, dans cet ensemble, la logique du "Vrai ou Faux", valable pour les ensembles finis, s'applique tout aussi bien.*

Ce réalisme platonicien semble difficile à distinguer de la croyance en un "Dieu mathématicien connaissant la vérité de tous les énoncés sensés concernant les entiers naturels".

Une autre approche était celle de Hilbert, qui pensait pouvoir réduire le recours aux ensembles infinis à une simple "manière de parler", un peu comme lorsqu'on dit «$\sqrt{-3}$ est un nombre» ou encore «toute fonction continue est dérivable (au sens des distributions)». En ce sens l'énoncé (2) peut évidemment être décrété «Vrai de manière purement conventionnelle», mais alors le mot «Vrai» est privé de sa signification habituelle.

Le problème est alors de démontrer, (au sens de : emporter la conviction intime), que les preuves purement formelles qu'on déroule n'aboutissent jamais à affirmer vraies des propositions douées d'une signification concrète précise et cependant fausses dans la réalité.

La solution formaliste (Hilbert)

On introduit $\mathbb{N}$ *comme "manière de parler", (exactement comme* $\sqrt{-3}$*), on raisonne avec la logique du "Vrai ou Faux" valable pour les ensembles finis.*

On prouve, par une argumentation séparée, qu'un théorème démontré "idéalement vrai" n'est jamais "concrètement faux".

Le programme de Hilbert sous sa forme la plus stricte (Hilbert demandait que la preuve de consistance du système formel considéré soit d'un type particulièrement élémentaire) a été ruiné par le théorème d'incomplétude de Gödel. Néanmoins, on peut considérer qu'il a été réalisé pour l'essentiel, sous une forme légèrement affaiblie, pour la théorie formelle «arithmétique de Peano», notée PA, qui se limite à décrire les entiers naturels à un niveau assez élémentaire.

Par contre, le programme de Hilbert n'a jamais été réalisé pour la théorie des ensembles infinis actuels de Cantor, formalisée aujourd'hui dans le système axiomatique noté ZF [4] , ni même pour ce qui concerne des théories, beaucoup moins puissantes que ZF, qui cherchent à décrire ne serait-ce que l'ensemble des parties de **N** .

La solution constructive

On introduit **N** *comme "infini potentiel".*
On raisonne avec une logique absolument sûre.
Tout théorème démontré a une signification algorithmique.

Outre que le programme de Hilbert semble totalement hors de notre portée en ce qui concerne ZF, il est extrêmement désagréable de démontrer des théorèmes avec l'arrière pensée qu'ils n'ont pas de signification réelle, c'est pourquoi la philosophie spontanée des mathématiciens est le réalisme platonicien à la Gödel plutôt que le formalisme à la Hilbert.

L'hypothèse du continu a-t-elle une signification ?

Nous abordons dans cette section un domaine véritablement au delà de l'arithmétique, faisant partie du noyau dur de la théorie des ensembles infinis actuels.

L'hypothèse du continu est l'affirmation suivante (notée HC) :
il n'existe dans l'ensemble des nombres réels **R** *aucune partie* A *qui contienne les entiers naturels, et qui ne puisse être mise en bijection ni avec* **N** *ni avec* **R**

Si les "infinis actuels" **N** et **R** existent réellement "quelque part, au moins de manière idéale" (du point de vue du réalisme platonicien) alors l'hypothèse du continu semble bien avoir une

[4] Le système proposé par Zermelo, noté Z , permet la construction de tous les $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\ldots \mathcal{P}(\mathbf{N}))\ldots)$. Le système ZF, qui est le précédent "amélioré" par Frankel, permet d'itérer de manière infinie la construction précédente. Dans ZFC, on rajoute l'axiome du choix. Les mathématiques usuelles ne dépassent pas $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$.

signification. Cantor s'est acharné toute la fin de sa vie à trouver une preuve de cette conjecture.

Voyons la chose de manière un tout petit peu plus formalisée et technique en théorie des ensembles classique.

Une application étant caractérisée par son graphe, les bijections dont il est question dans HC peuvent être considérées comme des parties de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. l'énoncé HC se réécrit donc sous la forme suivante :

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ $\exists K \in \mathcal{P}(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ tels que : si A contient **N** alors K est le graphe d'une bijection de **N** sur A ou d'une bijection de **R** sur A

Faisons en outre les remarques suivantes :

– l'ensemble **R** peut être mis en bijection avec l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ des parties de **N**.

– via la bijection précédente, une partie A de **R** s'identifie à un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$

– les graphes d'applications $g : \mathbf{N} \to A$ ou $h : \mathbf{R} \to A$ s'identifient alors à des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}) \times \mathcal{P}\mathbf{N}))$

– l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}) \times \mathcal{P}(\mathbf{N}))$ peut lui-même être mis en bijection avec $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$.

L'énoncé HC a donc une structure logique du type suivant :

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$ $\exists K \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$ tels que

si A représente un ensemble compris entre **N** et **R** alors K représente une bijection de **N** sur A ou une bijection de **R** sur A

Ainsi, une formalisation possible de l'énoncé HC utilise en fait uniquement les ensembles **N**, $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$.

Du point de vue de la théorie des ensembles infinis de Cantor, c'est très peu.

Les variables de cet énoncé ont "seulement" pour domaine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$, ou N, ou $\mathcal{P}(N)$ [5].

Pour un réaliste platonicien à la Gödel qui pense que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$ existe quelque part, au moins de manière idéale, et que les énoncés qui ne font référence qu'à ce "petit" infini sont forcément Vrais ou Faux "en réalité", l'hypothèse du continu admet certainement une réponse positive ou négative.

Pourtant Gödel et Cohen ont démontré les deux résultats selon lesquels l'hypothèse du continu ne peut ni être prouvée fausse, ni être prouvée vraie dans le système formel ZFC, qui semble pourtant intégrer tous les ingrédients raisonnables de la théorie cantorienne.

Beaucoup de logiciens et de mathématiciens s'accordent à interpréter ces résultats de la manière suivante : l'homme ne saura jamais démontrer si l'hypothèse du continu est vraie ou fausse.

Certains autres, à la suite de Gödel, pensent qu'on finira par découvrir un axiome raisonnable qui prouvera que l'hypothèse du continu est fausse (ou, plus improbablement, vraie).

On voit donc que l'introduction des trois infinis actuels N, $\mathcal{P}(N)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$ suffit à produire des problèmes sans doute à jamais insolubles pour l'homme, même en utilisant des preuves hautement abstraites et absolument pas constructives. Voici qui jette un flou considérable sur la notion de "Vérité" appliquée dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$!

En fait, l'attitude qui semble la plus naturelle, au vu des résultats de consistance relative de Gödel et Cohen, serait de déclarer que l'hypothèse du continu est insoluble pour la bonne raison qu'elle n'a pas de signification réelle précise, mais seulement une signification purement conventionnelle. A savoir la signification d'une «règle du jeu» qu'on décide d'introduire ou non dans la théorie des ensembles infinis actuels. C'était par exemple le point de vue d'A. Robinson, le créateur de l'Analyse non standard (cf. son texte "Formalisme 64"). Cette attitude trouve un autre argument en sa faveur dans le théorème de Lowenheim-Skolem :

[5] Des variables quantifiées sont cachées dans les morceaux phrases en français : «représente une bijection».

la théorie des ensembles infinis, une fois formalisée, par exemple dans le système axiomatique ZFC, admet des modèles dénombrables

Dans un tel modèle, la vraie cardinalité de $\mathcal{P}(N)$ est le dénombrable, mais aucune des bijections existant entre N et $\mathcal{P}(N)$ n'est dans le modèle.

La majorité des réalistes platoniciens adopte sur ces questions une position de repli confortable : tout ceci n'est pas bien grave puisque l'hypothèse du continu n'a aucune conséquence importante pour les mathématiques couramment pratiquées.

Peut-on imaginer un jeu sans partie nulle mais sans stratégie gagnante pour aucun des deux joueurs ?

Un des axiomes de la théorie des ensembles qui a fait couler beaucoup d'encre est *l'axiome du choix*, qui est en fait un axiome de choix infini uniforme. Combiné avec le principe du tiers exclu, cet axiome permet de démontrer l'existence d'objets idéaux (par exemple : une clôture algébrique d'un corps arbitraire, ou une fonction réelle non Lebesgue-mesurable) pour lesquels aucune construction explicite n'est possible. Donnons un énoncé parmi d'autres pour cet axiome du choix.

$\forall\, g : X \longrightarrow Y$ surjective, $\exists\, h : Y \longrightarrow X$ telle que $\forall\, y \in Y$ $g(h(y)) = y$

Si l'ensemble X est fini ou si c'est l'ensemble des entiers naturels, l'axiome est évidemment "vrai dans la réalité": on prend pour h(y) le premier x de X qui vérifie $g(x) = y$. Le problème avec l'axiome du choix est donc un problème d'extrapoler un énoncé depuis l'infini dénombrable jusqu'à des infinis de structure arbitraire.

Je vais maintenant montrer une autre extrapolation à l'infini qui semble a priori tout aussi légitime et qui, en réalité, ne l'est pas du tout (pour les adeptes de Cantor eux-mêmes).

Il s'agit de considérer un jeu ou deux adversaires s'affrontent sans intervention du hasard. Ce jeu, par exemple le jeu d'échec, est d'abord supposé de nature finie, c'est-à-dire que le nombre de coups dans une partie est limité a priori (par exemple à 1000) et que dans chaque situation le joueur ne peut choisir qu'entre un nombre fini de possibilités (mettons par exemple 200).

La partie peut alors grosso modo être décrite de manière formalisée comme suit : le premier joueur choisit un nombre entre 1 et 200 : x_1 , le deuxième joueur choisit à son tour un nombre entre 1 et 200 : x_2 etc...

Au bout de 1000 coups la partie s'arrête (si elle est terminée avant, on peut convenir, pour simplifier notre description formalisée, que tous les coups de la fin sont d'un type donné, réservé à cet effet).

La partie ainsi complètement décrite est une suite $(x_n)_{n\in\{1,\ldots,1000\}}$ de 1000 nombres entiers compris entre 1 et 200 . Si j'appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les suites de 1000 nombres entiers $\in C := \{1,\ldots,200\}$ (l'ensemble $\mathcal{A}$ possède 200^{1000} éléments), la "règle du jeu" peut être considérée comme donnée par un sous-ensemble B de $\mathcal{A}$ pour lequel on a :

– si $(x_n)_{n\in\{1,\ldots,1000\}} \in B$, c'est le joueur 1 qui a gagné
– si $(x_n)_{n\in\{1,\ldots,1000\}} \notin B$, c'est le joueur 2 qui a gagné

Comme 200^{1000} est un nombre hors d'atteinte des ordinateurs les plus puissants, il est possible que le jeu en question (si le sous-ensemble B est suffisamment compliqué) reste à jamais un mystère pour l'homme. C'est peut être le cas du jeu d'échec par exemple. Néanmoins, on peut affirmer[6]

– ou bien le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante
– ou bien le deuxième joueur dispose d'une stratégie gagnante.

En effet, la première affirmation peut s'écrire :

(*) $\exists x_1\in C\ \forall x_2\in C\ \exists x_3\in C \ldots \exists x_{999}\in C\ \ \forall x_{1000}\in C$
la liste $[x_1,\ldots,x_{1000}] \in B$

et la deuxième affirmation est simplement la négation de la première :

(**) $\forall x_1\in C\ \ \exists x_2\in C\ \forall x_3\in C \ldots \forall x_{999}\in C\ \ \exists x_{1000}\in C$
la liste $[x_1,\ldots,x_{1000}] \notin B$

En admettant l'extrapolation du potentiellement réalisable, une et une seule de ces 2 affirmations est forcément vraie, car ceci est

6 Si on admet l'extrapolation du potentiellement réalisable : c'est à dire l'extrapolation du fini "raisonnable" au fini "déraisonnable"

vérifiable en *un nombre fini* d'opérations purement mécaniques (cela pourrait faire l'objet d'un programme d'ordinateur) .

Passons maintenant au problème de "l'extrapolation à l'infini" de cette affirmation («ou bien le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante, ou bien c'est le deuxième») . On se trouve face à la question d'interpréter la signification d'une écriture

$\exists x_1\in C\ \ \forall x_2\in C\ \ \exists x_3\in C\ \ldots$
où on trouverait une infinité de quantificateurs en cascade.

Il faut pour cela donner une formulation équivalante à cette écriture dans le cas "fini" et pour laquelle "l'extrapolation à l'infini" soit plus facile à écrire.

Pour cela, notons L l'ensemble des listes finies d'éléments de C , limitées à 1000 éléments, y compris la liste vide.

Voici alors une formulation équivalente à (*)

(#) $\exists f : L \longrightarrow C\ \ \forall x_2, x_4, \ldots, x_{1000}\in C$,
la liste $[\, f([\,]), x_2, f([x_2]), x_4, f([x_2,x_4]), x_6,\ldots,f([x_2,x_4,\ldots,x_{998}]), x_{1000}\,] \in B$

Un examen un peu attentif convaincra le lecteur que la formulation (#) est équivalente à (*) : en effet le « $\exists f$ » dans (#) signifie que le premier joueur a le moyen de riposter à tous les choix faits par le deuxième joueur.

De même on obtient une formulation équivalente à (**)

(##) $\exists f : L \longrightarrow C\ \ \forall x_1, x_3, \ldots, x_{999}\in C$,
la liste $[x_1, f([x_1]), x_3, f([x_1,x_3]), x_5,\ldots, x_{999}, f([x_1,x_3,\ldots,x_{999}])] \notin B$

Nous sommes maintenant en mesure de donner une signification à la phrase "le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante" lorsqu'on "extrapole à l'infini" c.-à-d. lorsqu'on remplace les ensembles finis $C = \{1,2,\ldots,200\}$ et $\{1,2,\ldots,1000\}$ par $\mathbf{N}$.

Prenons en effet pour $\mathcal{A}$ l'ensemble $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ de toutes les suites infinies de nombres entiers. Si nous notons $\mathbf{x}$ un élément de $\mathcal{A}$ nous noterons x_n le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite $\mathbf{x}$. Prenons pour B un sous-ensemble arbitraire de $\mathcal{A}$. Notons L l'ensemble des listes finies d'éléments de $\mathbf{N}$, sans limitation du nombre d'éléments. L'énoncé ($\approx$)

qui signifie “le premier joueur a une stratégie gagnante pour le jeu B ” est le suivant :

$(\approx)$ $\exists f : L \longrightarrow C \;\; \forall x \in N^N$,
la suite infinie $(f([\,]), x_1, f([x_1]), x_2, f([x_1,x_2]), x_3, \ldots) \in B$

De la même manière, on a l'énoncé $(\approx\approx)$ qui signifie “le deuxième joueur a une stratégie gagnante pour le jeu B ”.

$(\approx\approx)$ $\exists f : L \longrightarrow C \;\; \forall x \in N^N$,
la suite infinie $(x_1, f([x_1]), x_2, f([x_1,x_2]), x_3, \ldots) \notin B$

On s'attend alors, en extrapolant la forme particulière de tiers exclu[7] examinée, à l'infini, à avoir le résultat suivant :

Pour tout jeu infini $B \subset N^N$ *ou bien le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante, ou bien le deuxième joueur dispose d'une stratégie gagnante.*

Disons plutôt : on s'attend à ce que ce résultat soit vrai (ou au moins que son contraire ne soit pas un théorème) dans la théorie des ensembles couramment pratiquée. Eh bien, surprise! ce résultat est *démontré FAUX* dans la théorie des ensembles infinis actuels habituelle, formalisée dans le système ZFC (fonctionnant selon les règles de la logique “classique”, donc admettant la version ordinaire du tiers exclu).

Des logiciens ont proposé de modifier la théorie ZFC en supprimant l'axiome du choix et en introduisant comme nouvel axiome “de tiers exclu”, l'énoncé ci-dessus en italique, rebaptisé **axiome de détermination.**

Mais cette solution, qui sauve le tiers exclu dans le cas des “jeux infinis”, ne sauve nullement le principe général d'extrapolation à l'infini.

En effet, l'axiome du choix est “évidement vrai” dans le cas d'ensembles finis, et il n'y a aucune raison de refuser son extrapolation à l'infini pour un mathématicien classique.

Gödel a d'ailleurs démontré que l'axiome du choix était “non contradictoire avec les autres axiomes de ZF”. Plus précisément, “s'il existe” un “univers mathématique” ou les axiomes de ZF sont

7 Il ne s'agit pas du "tiers exclu" au sens ordinaire de la logique classique, il s'agit néanmoins d'une forme "intuitive" de tiers exclu, apparemment parfaitement raisonnable, ni plus ni moins "contestable" que la forme ordinaire du tiers exclu.

vérifiés, alors on peut décrire en son sein un autre “univers mathématique” ou tous les axiomes de ZFC (ZF avec l'axiome du choix) sont vérifiés.

L'enseignement que je tirerai de cet exemple est que, d'un point de vue cantorien, toutes les extrapolations à l'infini “raisonnables” ne sont pas compatibles entre elles. C'est le témoignage d'une *fragilité interne certaine* du système de pensée cantorien. Pour les réalistes platoniciens de la hiérarchie cumulative des ensembles, ce devrait être un sacré coup dur[8] . Non seulement cette “réalité existante idéale” nous cache ses secrets (comme l'hypothèse du continu), mais elle nous tend des pièges carrément méchants, comme celui d'avoir à choisir, en toute ignorance de cause, entre deux axiomes parfaitement raisonnables mais cependant contradictoires, celui du choix infini uniforme et celui de la détermination des jeux infinis.

Au risque de se faire condamner par un Ayatollah, par l'Inquisition ou par l'Opus Dei, on peut désormais avancer la “preuve d'inexistence” suivante :

si l'infini existe il ne saurait être infiniment savant

en effet, ou bien il est savant au point de savoir choisir simultanément un élément dans chaque ensemble d'une collection infinie arbitraire, ou bien il est savant au point de savoir élaborer une stratégie gagnante pour un des deux partenaires de n'importe quel jeu infini; mais il ne peut être savant au point de savoir faire les deux choses à la fois.

Que les croyants se rassurent, ce n'est ni le premier ni le dernier sophisme au sujet de l'infini en acte[9] .

D'ailleurs, puisque nous avons commencé par une citation de Marx, en voici une autre, qui nous conseille de nous méfier de l'omniscience en politique :

> *La doctrine matérialiste qui veut que les hommes soient des produits des circonstances et de l'éducation, que, par conséquent, des hommes transformés soient des produits d'autres circonstances et d'une éducation modifiée, oublie que ce sont précisément les hommes qui transforment les circonstances et que l'éducateur a lui-*

8 Mais en matière de philosphie, les coups durs ne sont jamais mortels.
9 Le plus célèbre est bien évidemment le pari de Pascal.

même besoin d'être éduqué. C'est pourquoi elle tend inévitablement à diviser la société en deux parties dont l'une est au-dessus de la société

(Thèses sur Feuerbach)

La question de la comparaison des cardinaux en mathématiques constructives

Revenons à la question de l'hypothèse du continu.

On peut remarquer que l'homme ne pourra, quant à lui, jamais définir qu'une quantité "dénombrable" de nombres réels : un nombre réel défini par un homme sera toujours en fin de compte défini par une phrase imprimée dans un livre. Donc l'homme ne dispose que d'un infini "potentiel" de parties de $\mathbb{N}$, pas plus gros que l'infini "potentiel" des nombres entiers. L'affirmation selon laquelle «l'ensemble $\mathbb{R}$ a un cardinal strictement plus grand que l'ensemble $\mathbb{N}$» est donc une vérité moins "absolue" que $2 + 2 = 4$; elle est entachée d'un certain flou ; elle nécessite certainement "les nombres réels que l'homme ne pourra jamais définir, même à l'état potentiel".

Si on examine en détail la preuve diagonale de Cantor selon laquelle l'infini $\mathbb{N}$ des entiers naturels est de cardinalité strictement plus petite que l'infini $\mathbb{R}$ des nombres réels, on est frappé par le caractère constructif de cette preuve. Par exemple, à partir d'une énumération explicite des nombres réels algébriques, la preuve de Cantor fournit un procédé explicite pour construire des nombres réels transcendants, c-à-d. non algébriques. En fait, la preuve de Cantor peut être affinée et rendue entièrement constructive et fournit alors le théorème suivant (cf. [BB] théorème 2.19 p.27) :

étant donnés une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres réels, et deux réels* a, b *avec* $a < b$, *on peut construire un réel* c *clairement distinct de tous les* x_i *et compris entre* a *et* b

Il s'agit d'une version précise du théorème selon lequel $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. C'est une affirmation de caractère positif (on peut construire ...) susceptible de fournir un programme qui "exécute" le théorème.

Quelle doit donc être l'interprétation constructive de cet énoncé en termes de cardinaux ? La notion de cardinal a été élaborée par Cantor pour comparer entre eux des infinis actuels. L'idée était de les comparer selon leur taille.

Constructivement, la question de comparer entre eux des infinis potentiels tels que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ est également légitime. Mais en tant qu'infinis potentiels, ils n'ont pas réellement de taille, et il serait sans doute impossible d'attribuer une signification à l'affirmation qu'un infini potentiel est **plus gros** qu'un autre, ne serait-ce qu'en raison de l'argument avancé au tout début de cette section. Ce que dit la preuve du théorème de Cantor, c'est que les nombres réels ne peuvent pas être générés de manière automatique comme les nombres entiers, selon un processus clairement défini une fois pour toutes. Chaque fois qu'on aura défini un processus de manière claire, il produira une suite de nombres réels, et il manquera tout plein de nombres réels dans cette suite. En deux mots :

L'infini $\mathbb{R}$ *est* ***plus compliqué*** *que l'infini* $\mathbb{N}$

Si on adopte le point de vue des constructivistes russes selon lequel tout nombre réel doit pouvoir être calculé de manière purement mécanique[10] , on peut produire une preuve que l'ensemble $\mathbb{R}$ peut être mis en bijection avec le quotient (par une relation d'équivalence) d'un sous-ensemble $\mathbb{R}$ de $\mathbb{N}$. Cela ne contredit pas l'interprétation constructive du théorème de Cantor, en effet :

"La partie" $\mathbb{R}$ *est nettement* ***plus compliquée*** *que "le tout"* $\mathbb{N}$.

Cela contredit par contre les mathématiques classiques.

Le point de vue constructif minimal développé par Bishop (cf. [BB] et [MRR]) ne prétend pas donner de définition du mot «effectif», qui est pris comme une notion primitive. En conséquence, tous les théorèmes obtenus avec ce point de vue sont vrais pour à peu près tous les mathématiciens[11] . En outre, ils ont toujours un contenu algorithmique et constituent en quelque sorte des schémas de programmes informatiques.

Il est intéressant d'analyser l'hypothèse du continu quand on se place du point de vue constructif minimal. La première chose que l'on constate, c'est que des tas d'énoncés équivalents à HC en

[10] En mots de tous les jours : tout procédé effectif doit pouvoir être mécanisé de manière automatique.

[11] Il y a des mathématiciens qui n'admettent pas l'extrapolation du potentiellement réalisable, et qui donc ne sont pas satisfaits par les mathématiques constructives à la Bishop.

mathématiques classiques, ne peuvent plus être prouvés équivalents en mathématiques constructives, ce qui fournit autant d'hypothèses du continu distinctes, n'ayant pas la même signification intuitive. Si nous comparons deux infinis selon le point de vue des applications injectives de l'un vers l'autre, alors l'hypothèse du continu s'avère plutôt fausse, et certainement indémontrable[12]. En effet l'infini $\mathbb{N}$ peut être injecté dans l'infini $2^{\mathbb{N}}$ qui peut lui-même être injecté dans l'infini $\mathbb{R}$, (cf. l'ensemble triadique de Cantor), mais l'infini $\mathbb{R}$ ne sera (sans doute) jamais injecté de manière constructive dans $2^{\mathbb{N}}$: cette impossibilité est un théorème des constructivistes russes, et ce théorème "russe" empêche qu'on puisse construire l'injection au moyen d'un procédé purement mécanique.

Conclusion

Face aux problèmes posés par la "signification réelle" des énoncés mathématiques de la théorie des ensembles infinis actuels[13] d'une part, et par la "validité réelle" des résultats obtenus dans cette théorie (problème de validité qui se pose lorsque ces résultats ont une signification concrète évidente), la tentation est grande de se rabattre sur un système formel du genre "théorie axiomatique des ensembles ZFC"

C'est pourtant une option bien contestable, car quel intérêt porter à une théorie formelle dont les "théorèmes" ne prétendent plus énoncer des Vérités ?

Le point de vue "constructif" en mathématiques est le point de vue "réaliste concret" qui, à propos de chaque énoncé mathématique, pose le problème de sa "signification algorithmique". Le point de vue "constructif" demande que toute affirmation mathématique ait *un sens*. Cela ne revient pas à jeter bas toutes les mathématiques "classiques" mais à les aborder d'un autre point de vue.

E. Bishop, auteur de "Fondements de l'analyse constructive", fait à ce sujet la remarque suivante :

---

[12] L'affirmation peut paraître un peu présomptueuse. Il faudrait préciser "indémontrable dans tous les systèmes formels constructifs connus". Une caractéristique des systèmes formels constructifs actuels est que toute preuve d'existence "contient en filigrane" une preuve d'existence explicitée par des procédés purement mécaniques.

[13] Ce qu'on appelle ordinairement la "théorie des ensembles" est en fait une "théorie des ensembles infinis actuels".

« Le point de vue constructif ne signifie pas que les mathématiques classiques sont "sans valeur". Ce serait aussi stupide que de dire que, d'un point de vue "classique" les mathématiques "non rigoureuses" seraient "sans valeur".

Tout théorème de mathématiques classiques pose un défi au mathématicien constructif

– soit en trouver une démonstration constructive

– soit en donner une version constructive. »

Je terminerai en remarquant que dans les applications "concrètes" des mathématiques (en physique théorique, en astronomie...) il s'agit toujours en fin de compte de décrire des processus de calcul qui, à partir de certaines données numériques, permettent d'obtenir des résultats sous forme numérique, à vérifier ou infirmer par l'expérience.

Ainsi seule la partie "constructive" des mathématiques s'avérera en définitive un jour ou l'autre "utile" et "vérifiable"[14]. La partie non constructive, elle, consiste essentiellement en un **discours** concernant des êtres mathématiques dont l'existence réelle est tout sauf évidente. Et personne (sauf à croire en un Dieu mathématicien) ne peut être sûr que ce discours n'est pas en grande partie "vide de sens".

BIBLIOGRAPHIE

Il n'existe pas actuellement de livre de référence en français concernant les mathématiques constructives. On pourra consulter les livres et articles suivants.

"Penser les mathématiques" - Collection Seuil Points.

On comparera avec intérêt les articles de Dieudonné et de Apéry. Une bibliographie assez complète se trouve à la fin de l'article d'Apéry.

---

[14] Il ne faut pas prendre cette affirmation pour la défense d'un point de vue "utilitaire". Même la partie constructive d'une théorie mathématique donnée n'est pas forcément directement ou immédiatement "utilisable" en physique théorique par exemple (son utilité peut n'apparaître que bien longtemps après sa construction comme théorie mathématique : cf la théorie des groupes). Cependant, toute mathématique constructive est toujours "immédiatement utile" en tant que partie de la "théorie générale des processus" : ce qui revient à dire : tout énoncé de mathématiques constructives démontré constructivement a bien un sens.

"Les fondements des mathématiques" - Morris Kline. La Recherche n° 54.

"Mathématiques constructives" - Allan Calder. Pour la Science n° 26.

Concernant la théorie des ensembles classiques, il faut recommander le remarquable :

"Théorie des Ensembles" , Krivine. Collection SUP des PUF.

Concernant "la Vérité" des théorèmes mathématiques, il faut relire :

"Preuves et Réfutations" , I. Lakatos, chez Hermann.

Des problèmes voisins de ceux abordés ici sont discutés dans :

"Formalism 64" A. Robinson. in Logic, *Philosophy and Methodology of Sciences* proceedings, 1964, North Holland 228-246

"Intuitionnisme 84". Harthong J., Reeb G. in : *La Mathématique non standard* (Fondements des Sciences) Editions du CNRS, Paris, 1989, p.213-252.

"Les mathématiques : fin en soi ou instrument ?" Pierre Thuillier. La Recherche n° 37.

Pour les mathématiques constructives, il y a quelques livres de référence en anglais

[Ab] Aberth O. : *Computable analysis* (McGraw-Hill; 1980)7

[BB] Bishop E., Bridges D. : *Constructive Analysis.* (Springer-Verlag; 1985)

[Bee] Beeson M. : *Foundations of Constructive Mathematics.* Springer-Verlag (1985)

[Bi] Bishop E. : *Foundations of Constructive Analysis.* (McGraw-Hill; 1967, épuisé)

[BR] Bridges D., Richman F. : *Varieties of Constructive Mathematics.* London Math. Soc. LNS 97. Cambridge University Press (1987)

[Bri] Bridges D. : *Constructive Functional Analysis.* (Pitman, London; 1979)

[Hey] Heyting A. : *Intuitionism.* 1966. Amsterdam. North Holland

[Ku] Kushner. *Constructive real numbers and constructive function spaces* Translation of Mathematical Monographs (traduit du russe) American Mathematical Society Vol. 21. 1968.

[MRR] Mines R., Richman F., Ruitenburg W. : *A Course in Constructive Algebra* (Springer-Verlag; Universitext; 1988) .

Remarques

Le point de vue intuitionniste de Brouwer et Heyting est critiqué dans certains de ses aspects "idéalistes" par Bishop et Sanin.

L'école russe (Markov, Sanin, Kushner) admet la coïncidence de la notion intuitive d'effectivité avec la notion mathématique de récursivité (effectivité mécanique), ce que n'admet pas Bishop (ni Brouwer et Heyting). Le livre de Aberth, plus facile à lire que celui de Kushner, est un exposé du constructivisme russe.

Les livres [Be] et [BR] font une étude comparée des différents points de vue constructifs existants.

Les divergences de point de vue existant entre différents mathématiciens "constructivistes" (ou intuitionnistes) ne doivent pas cacher l'existence d'un socle fondamental commun, basé sur la critique de la notion de "vérité absolue" en mathématiques. Le livre de Bishop, repris dans [BB], qui reste le plus prudent, contient ce socle fondamental commun.

Enfin, il faut signaler que, même si la position philosophique constructive n'est pas largement représentée chez les mathématiciens, le courant dans la recherche mathématique qui s'intéresse particulièrement aux résultats de nature effective et algorithmique a toujours été vivant et connaît actuellement un fort développement.

COMMISSION INTER -IREM
HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

AIRES ET VOLUMES : SANS OU AVEC L'INFINI

Actes du 9ème colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

Le Volume de la Pyramyde par Eudoxe De Cnide

Michel Levard
Collège D. Huet, Saint Clair
IREM Basse Normandie

Le 23 mai 1992, tous n'étaient pas des mathématiciens. J'ai essayé de rédiger cet article pour ceux-là aussi.

Au $V^{ème}$ siècle avant notre ère, une méthode proposée par le Cnidien, Eudoxe, permit la preuve de ce que maintenant nous appelons la formule du volume de la pyramide. Lointaine ancêtre des techniques de l'infinitésimal, appliquée plusieurs fois dans le livre XII des **Eléments** d'Euclide, elle évite nécessairement les processus démonstratifs infinis. Je propose de la faire ressortir par la comparaison de deux propositions, la deuxième et la cinquième. L'important énoncé de cette dernière proposition amena l'auteur à la preuve du résultat sur la pyramide à la septième proposition dont je donnerai un bref aperçu de sa démonstration bien qu'elle soit sans rapport avec toute discussion sur l'infini.

Aujourd'hui, un lycéen voit dans la formule $V = \frac{Bh}{3}$ l'occasion d'exercer ses connaissances sur les suites numériques [1] et le calcul

---

[1] $V = \frac{Bh}{3}$; B est l'aire de la base, h la hauteur de la pyramide. Le lycéen doit encadrer la pyramide par deux piles de prismes composées de n tranches extérieures, (n-1) intérieures. La somme des volumes S_n et s_n s'exprime alors par

$$S_n = \frac{Bh}{3} + \frac{Bh}{2n} + \frac{Bh}{6n^2}\ ;\ S_n = \sum_0^n \text{tranches extérieures}$$

$$s_n = \frac{Bh}{3} - \frac{Bh}{2n} + \frac{Bh}{6n^2}\ ;\ S_n = \sum_0^{n-1} \text{tranches intérieures}\ ;\ \text{donc, } \lim S_n = \lim s_n = \frac{Bh}{3}$$

L'argument de l'intégral s'obtient beaucoup plus facilement que les sommes ci-dessus.

$$\int_0^h \frac{Bt^2}{h^2}\,dt = \frac{Bh}{3}$$

intégral révèle au jeune étudiant un outil plus efficace encore; mais à chaque fois et au premier abord, l'infini présent dans ces deux techniques risque de leur faire l'effet d'un artifice dont ils devront peut être méditer un certain temps sur son utilisation avant de se débarrasser de leurs réticences et d'en admettre sa valeur démonstrative. A l'époque euclidienne les paradoxes de Xénon étaient déjà célèbres et leurs argumentations reposaient sur un emploi de l'infini qui bâtissait des conclusions absurdes. En conséquence, quiconque alors proposait un raisonnement crédible a dû s'astreindre à décrire des processus démonstratifs finis. Rejeté des démonstrations, l'infini n'était pas banni pour autant de toute activité mathématique. Environ un siècle après Euclide, en effet, Archimède nous a laissé ses théorèmes mécaniques où il a proposé d'appliquer un certain infini à la découverte de résultats purement mathématiques ; par exemple la quadrature de la parabole requiert une décomposition d'un triangle en l'infinité de ses droites. Mais si l'infini découvre, il ne prouve pas. La Syracusain connaissait les réticences de ses contemporains sur ce sujet. Il ne partageait pas complètement leurs doutes mais pour s'épargner une dispute sur la validité de ses résultats, il proposait comme preuve un raisonnement inspiré de celui d'Eudoxe, l'auteur du livre XII, où tous les processus démonstratifs sont finis. Cette technique mise au point par Eudoxe de Cnide nous a été transmise par Euclide dans **les Eléments** où elle apparaît pour la première fois dans la proposition (XII-2) [2]

Une tradition l'appelle parfois et à tort la méthode d'exhaustion. Ces deux méthodes ne sont pourtant pas semblables ; la deuxième due à Grégoire de St Vincent s'inspire de la première et la simplifie. Au XVIème siècle, les résultats du savant jésuite sur les progressions lui permirent cette révolution : substituer une sommation infinie, au rassurant mais prolixe double raisonnement par l'absurde d'Eudoxe. La technique du Cnidien, (je l'appellerai souvent la méthode d'Eudoxe), engage un processus d'exhaustion que la proposition (X-1) contrôle. G. de St Vincent le laisse filer à l'infini.

Deux méthodes, deux époques. Vingt deux siècles séparent les deux hommes et cette révolution marque autant la fin d'un monde que l'aurore d'une science nouvelle.

La méthode d'Eudoxe de Cnide, cependant, comporte deux imperfections. Leurs présences ne manquent pas de surprendre un

[2] Pour simplifier la rédaction je noterai l'expression "la proposition (XII-2)" par la simple parenthèse "(XII-2)". Je ferai de même pour d'autres propositions.

lecteur du cinquième livre des Eléments car si la seconde semble ignorer les résultats contenus dans cet autre ouvrage du Cnidien, la première y est apparue en (V-18).

L'attribution inconditionnelle à des surfaces dans (XII-2), ou à des volumes dans (XII-5), d'un quatrième terme pour compléter une proportion, autrement dit l'existence à tout coup d'une quatrième proportionnelle, ne repose ni sur un axiome, ni sur une proposition. C'est un principe implicite que semble avoir éludé l'esprit, pourtant inquisiteur, des grecs. La démonstration (VI-12), la seule solution au problème posé par la quatrième proportionnelle dans les **Eléments**, n'exprime surement pas une existence mais doit être lue pour ce qu'elle paraît : une construction d'un segment satisfaisant à la proportion souhaitée. La deuxième imperfection, plus subtile, se présente deux fois. La première fois au milieu de la démonstration pour établir l'inégalité:

$$\sum > \text{polygone E...N}$$

(je ne recopie pas toutes les lettres comprises entre E et N).

Euclide va déduire ce résultat des deux relations obtenues auparavant :

$$\frac{\text{Cercle A..}\Delta}{\Sigma} = \frac{\text{polygône A...P}}{\text{polygône E...N}} \text{ et cercle A..}\Delta > \text{polygône A..P}$$

Un lecteur du livre V s'attend à un appel de la proposition (V-14) :

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et si } a < c \text{ (ou si } a = c) \text{ alors } b < d \text{ (ou } b = d)$$

(La notation actuelle souligne mieux l'adaptation de cette proposition au résultat cherché). Pourtant l'auteur choisit de permuter les moyens :

$$\frac{\text{Cercle A...}\Delta}{\text{polygone A..P}} = \frac{\Sigma}{\text{Polygone E..N}},$$

et appelle implicitement la proposition

$$\text{si } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ et si } a > c \text{ alors } b > d$$

La deuxième fois quelques lignes avant la fin : "mais la surface est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface (T) plus petite que le cercle ΑΒΓΔ". Phrase traduite en termes modernes par la proportion :

$$\frac{\Sigma}{\text{Cercle A..}\Delta} = \frac{\text{cercle E..}\Theta}{T}$$

A la lecture de cette phrase, une question se pose. Pourquoi la surface T est-elle plus petite ? La proposition (V-14) porte une réponse possible : sous l'hypothèse Σ > cercle E..Θ, elle implique T < cercle A..Δ . Apparamment Euclide ne choisit pas cette solution mais à la place, nous lisons une démonstration de l'inégalité T < cercle A..Δ dans le lemme placé après la proposition (XII-2). Ni Eudoxe, ni Euclide n'ont rédigé une telle réponse. Dans la proposition (XII-5) le lemme prétend résoudre une comparaison entre les termes d'une proportion analogue à celle citée au-dessus. Or il outrepasse ainsi ses capacités car la différence de nature entre les termes des deux proportions, des aires ici des volumes dans la proposition (XII-5), rend son emploi incongru et justifie son rejet des Eléments comme interpolé. Peut-on alors lui substituer la proposition (V-14) ? A la lecture des **Eléments** tels qu'ils nous sont parvenus, la réponse est affirmative ; à celle du livre I des **Coniques** d'Apollonius nous devenons prudents.

On trouve chez ce disciple d'Euclide, à la deuxième génération, une situation analogue à celles du livre XII des Eléments :

des hypothèses $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et a = c prouver que b = d.

La proposition (v-14) permet immédiatement de conclure. Pourtant Apollonius raisonne comme dans le livre d'Euclide, par permutation des moyens b et c ; puis

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ et a = c impliquent b = d.

L'usage était-il alors de permuter les termes d'une proportion afin de mettre en rapport ceux dont on avait apprécié la comparaison ? A la réflexion, la proportion permutée représente la voie la plus naturelle pour réaliser la comparaison des deux termes b et d. La validité du résultat ne dépend pas de la proposition (V-14), encore moins du lemme, mais simplement de la définition (V-5) d'une égalité de rapports. Je la rappelle en termes modernes :

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ équivaut à : pour tout $(n,m) \in N^2$ na < mc => nb < md

ou na = mc => nb = md

ou na > mc => nb > md

En particulier avec n = m = 1

a < c => b < d ou a = c => b = d, etc, a pour signification évidente : si dans une proportion, on sait comparer les deux premiers termes, on compare immédiatement les suivants. Le lemme écarté, Eudoxe disposait donc de deux éléments pour justifier ses affirmations. Auxquels pensait-il quand il donnait la surface (T) plus petite que le cercle A..Δ ? A chacun sa réponse.

La proposition (XII-2) a suscité assez de commentaires récents pour m'épargner d'en ajouter un autre et me permettre de me restreindre au principe seul de cette démonstration. Pour compléter ce simple rappel, j'invite le lecteur à le comparer avec le canevas de la proposition (XII-5) dès qu'il l'aura connu. Cette mise en parallèle devrait lui fournir alors une meilleure compréhension de la méthode d'Eudoxe ; mais avant de poursuivre il me faut préciser quelques points d'écriture car j'ai choisi d'adopter des notations différentes pour rendre plus facile l'exposition du texte euclidien. Ainsi cercle (1) désignera, sans plus de distinction qu'Euclide, un disque de diamètre d_1 ou la mesure de son aire. Aucune confusion n'est à craindre, le contexte suffit à lever chaque fois l'ambiguité de la notation. Ceci dit la proposition, (XII-2) s'énonce alors en termes actuels :

$$\frac{\text{Cercle (1)}}{\text{Cercle (2)}} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Avec la même ambiguité, polygone (1) dénote en plus un polygone inscrit dans le cercle (1). Dans les mêmes termes, la proposition (XII-1) s'énonce :

$$\frac{\text{polygône (1)}}{\text{polygône (2)}} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

où le polygone (2) inscrit dans le cercle (2) est semblable au polygone (1).

Dans ces notations, la démonstration de la proposition (XII-2) se déroule ainsi : supposons les rapports $\frac{d_1^2}{d_2^2}$, $\frac{\text{cercle (1)}}{\text{cercle (2)}}$, inégaux et substituons à cercle (2) une surface (X) qui réalise la proportion :

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{\text{cercle (1)}}{(X)}$$

L'existence de (X), je le rappelle, ne se discute pas dans les **Eléments**. C'est un postulat implicite : (X) est une quatrième proportionnelle aux trois surfaces d_1^2; d_2^2 et cercle (1).

1ère hypothèse :(X) < cercle (2)

l'hypothèse fournit l'inégalité : cercle (2) - (X) < cercle (2)
Cercle (2) est le plus grand des deux termes ; le processus d'exhaustion [3] lui ôte des polygônes inscrits et aboutit à l'inégalité :

cercle (2) - polygone (2) < cercle (2) - (X)

C'est à dire :

(X) < polygone (2)

La suite va montrer l'inégalité stricte et contraire à celle-ci.
Le processus d'exhaustion aboutit à l'inégalité en un nombre fini d'étapes. De ce fait, polygone (2) a un nombre fini de côtés. Donc il existe un polygône (1) qui lui est semblable dans cercle (1). A la proportion posée en hypothèse, se joint alors celle de la proposition (XII-1) vue plus haut :

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{\text{cercle (1)}}{(X)}\ ;\ \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{\text{polygone (1)}}{\text{polygone (2)}}$$

qui permettent l'égalité

$$\frac{\text{cercle (1)}}{(X)} = \frac{\text{polygone (1)}}{\text{polygone (2)}}$$

mais l'inégalité cercle (1) > polygône (1) (l'un est inscrit dans l'autre) implique l'inégalité contradictoire annoncée :

(X) > polygône (2) [4]

La première hypothèse est donc impossible.

INTERMEDE :
Revenons à l'inégalité supposée des rapports de l'énoncé. Un échange entre les deux cercles conduit à substituer à cercle (1) une surface (Y) qui satisfait la proportion :

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{\text{cercle (2)}}{(Y)}$$

[3] Je n'explique pas davantage le processus d'exhaustion ici pour ne pas charger le texte mais j'y reviendrai lors de la discussion de la proposition (XII-5).

[4] Bien que l'auteur ne l'ait pas utilisée, c'est une conséquence de (V-14) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $a > c$ alors $b > d$.

Mutatis mutandis, l'impossibilité de l'hypothèse (Y) < cercle (1) se démontre d'une manière analogue.

2ème hypothèse : (X) > cercle (2)

Adjoignons aux grandeurs (X), cercle (1) et cercle (2) une surface (Y) pour réaliser la proportion :[5]

$$\frac{(X)}{\text{cercle (1)}} = \frac{\text{cercle (2)}}{(Y)}$$

La remarque suivante est importante :
l'inégalité posée en hypothèse, (X) > cercle (2), implique cette autre inégalité : cercle (1) > (Y)[6]
Rassemblons toutes les relations connues sous la 2ème hypothèse :

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{(X)}{\text{cercle (1)}}\ ;\ \frac{(X)}{\text{cercle (1)}} = \frac{\text{cercle (2)}}{(Y)} \quad \text{et cercle (1)} > (Y)$$

Celles-ci autorisent la conjonction :

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{\text{cercle (2)}}{(Y)} \quad \text{et cercle (1)} > (Y)$$

L'intermède a montré au lecteur l'absurdité.de cette conjonction, l'impossibilité de la 2ème hypothèse s'ensuit.

En conclusion, puisqu'une inégalité stricte entre (X) et cercle (2) ne tient pas, ces deux surfaces ont des aires égales. Le canevas de la démonstration de la proposition (XII-2) se clot ici.

Ce qui suit concerne la pyramide. L'égalité $V = \frac{1}{3}$ Bh qui suppose une mesure des grandeurs n'a pas de réalité dans l'antiquité. Le résultat prouvé par Eudoxe, découvert par Démocrite au témoignage d'Archimède, exprime un rapport équivalent à cette formule:

[5] L'auteur postule pour la seconde fois l'existence d'une 4ème proportionnelle (Y). La notation choisie exprès représente à priori une grandeur indépendante de celle de l'intermède.

[6] Implication démontrée par le lemme (XII-2) bien qu'une fois de plus la proposition (V-14) s'applique immédiatement ici.

La pyramide est la troisième partie (le tiers) d'un prisme qui a même base et même hauteur qu'elle[7] .
Les propositions (XII-1) et (XII-2) interviennent dans la preuve d'un rapport analogue entre le cône et le cylindre mais les résultats sur la pyramide rassemblés dans les propositions (XII-3) à (XII-7) ne les utilisent pas. Parmi celles-ci, seule la proposition (XII-5), prouvée aussi par la méthode d'Eudoxe, mérite une étude particulière. Elle énonce : "Les pyramides triangulaires de mêmes hauteurs sont dans le rapport de leurs bases".

Cet énoncé appliqué à des pyramides à bases égales (en aire) implique alors l'égalité des pyramides (en volume). Admettons-le, dépassons la proposition (XII-6) qui généralise l'énoncé (XII-5) aux pyramides à bases polygonales pour atteindre la proposition (XII-7) dont je résume la démonstration.

Soit une pyramide de base ABΔ et de sommet Γ dénotée (Γ-ABΔ) (fig.1). Qu'elle soit complétée par un prisme de même base et même hauteur (fig.2) Il vient

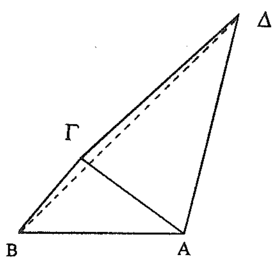


fig 1

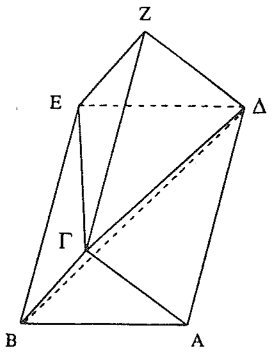


fig 2

(Γ-ABΔ) = (Γ-ΔEB) car les bases sont les moitiés d'un même parallélogramme
(Γ-ΔEB) = (Δ-EBΓ) la même pyramide vue d'un autre sommet
(Δ-EBΓ) = (Δ-ΓZE) car les bases sont les moitiés d'un même parallélogramme
(Δ-ΓZE) = (Γ-ΔZE) la même pyramide vue d'un autre sommet.
(XII-5) a donc permis d'établir les égalités :

---

7 Traduction KAYAS : un énoncé actuel comprendrait les mots volumes et aires mais une fois encore le contexte est suffisamment clair pour lever l'ambiguité.

(Γ-ABΔ) = (Γ-ΔEB) = (Γ-ΔZE) ; le prisme ainsi décomposé en trois volumes, tous égaux à la pyramide initiale, prouve le résultat de Démocrite.

Le calcul intégral ou le découpage en tranches vus au début n'ont aucun point commun avec cette preuve. Ce même raisonnement élémentaire, ce même découpage fini en ses parties donnent aussi la formule $v = \frac{1}{3}$ Bh mais la simplicité s'arrête là. Toute l'argumentation repose sur la proposition (XII-5) dont l'énoncé apparemment facile ne foit pas leurrer. Sa preuve chemine sur une réelle difficulté et pour l'écrire aujourd'hui la voie la plus simple rencontre l'infini. Eudoxe s'arrête avant, il veut convaincre. Dans ce but le processus d'exhaustion évite la sommation de termes en nombre infini et fait de sa méthode un outil intellectuel adapté à son époque pour répondre à ce type de problème. Dans la démonstration de la proposition (XII-5), Eudoxe l'applique sous la forme d'une itération qui ôte des prismes d'une pyramide jusqu'à obtenir un reste plus petit qu'une quantité donnée. Je commencerai toutefois par décrire l'itération (XII-2) puisqu'elle n'a pas encore été expliquée; la description de celle utilisée dans la proposition (XII-5) suivra et leur comparaison révèlera mieux la voie suivie par le Cnidien.

L'étape initiale de la première itération est un segment de disque (fig 1). L'arc de cercle de longueur non nulle détermine en son milieu deux nouveaux segments (fig 2). L'ensemble des deux segments représente alors l'étape suivante. La longueur non nulle des arcs de chacun des éléments permet ensuite quatre segments, etc.

La similitude des éléments de chaque étape au segment initial, le passage d'une étape à l'autre par dichotomie rendent le procédé itératif.Mais Eudoxe connaît Zénon ; pour devenir un principe de démonstration, la dichotomie doit s'arrêter. Or, ici, le nombre des étapes nécessaires à l'argumentation échappe à l'entendement ;; l'originalité d'Eudoxe est d'avoir su trouver dans la proposition (X-1) le moyen de contourner la difficulté par un contrôle de l'itération : le nombre d'étapes n'est jamais infini.

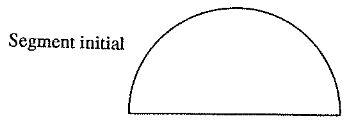


fig 1

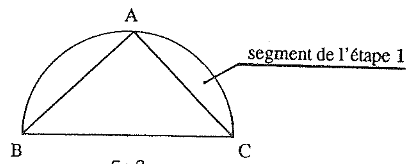


fig 2

Le contrôle mis en oeuvre à l'intérieur de la démonstration (XII-2) s'appuie sur une comparaison d'aires entre le segment de disque et le triangle résultant ABC (fig 2) à savoir : l'aire triangulaire est supérieure à la moitié de celle du segment entier. L'itération ne modifie jamais cette relation car les éléments de chaque étape sont des segments de disque semblables au segment initial. Le but de l'auteur, je le rappelle, est de déterminer une aire plus petite qu'une autre donnée par hypothèse. La suite fait appel à la proposition (X-1) dont l'énoncé est à peu près : si d'une grandeur nous ôtons au moins sa moitié (comme d'un segment de disque le triangle résultant) ; puis du reste obtenu au moins sa moitié, (comme des deux nouveaux segments de disque les deux triangles résultants), et que l'on poursuive toujours ainsi, alors un nombre fini d'ablations suffit pour obtenir un reste plus petit que toute grandeur donnée par avance. En termes modernes :

si b et a > b sont donnés, alors la suite

$$a \; ; \; a - \frac{1}{2}.a = \frac{a}{2} \; ; \; \frac{a}{2} - \frac{1}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a}{4} \; ; \; \frac{a}{4} - \frac{1}{2}.\frac{a}{4} = \frac{a}{8} \; ; \ldots ; \; \frac{a}{2}\,n \; ; \text{etc}$$

aboutit nécessairement à $\frac{a}{2}\,n < b$ pour un nombre n fini.

Le processus d'exhaustion de la proposition (XII-2) connu, la description de celui de la proposition (XII-5) s'exprime dans la lignes qui suivent.

L'étape initiale est une pyramide (fig 3). Les arêtes de longueur non nulle déterminent par leurs milieux deux nouvelles pyramides (fig 4). L'ensemble de ces deux pyramides représente alors l'étape suivante. La longueur non nulle des arêtes de chacun des éléments permet ensuite quatre pyramides, etc.

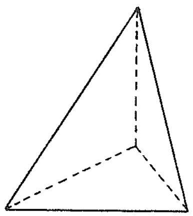


fig 3

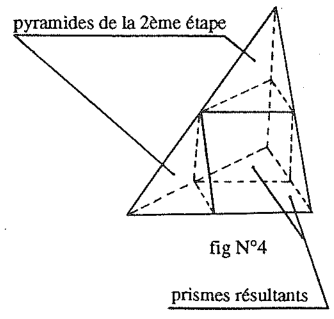


fig N°4

La ressemblance avec l'itération vue plus haut est claire ; au segment de disque correspond une pyramide, au triangle résultant un couple de prismes. Je le nomme couple résultant. Correspondance géométrique mais aussi métrique : l'auteur démontre dans la proposition (XII-3) l'égalité, en volume, des deux prismes entre eux et la supériorité de leurs volumes pris ensemble à la moitié de celui de la pyramide dont ils sont issus.

Le parallélisme se poursuit dans l'application des processus d'exhaustion : le nombre des segments de disque apparus tout au long de l'itération suit la progression 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; ..; 2^n ; etc, que vérifient aussi les triangles résultants. Enfin les restes successifs du segment initial après ablation des triangles se laissent décrire sous la forme :

Segment initial - (1 triangle) ;
Segment initial - (1 + 2) triangles résultants ;
Segment initial - (1 + 2 + 4) triangles résultants ; etc.
Donc le reste s'écrit en général :
Segment initial - (somme des triangles résultants apparus)
Une même situation se présente avec les pyramides :

Le nombre de pyramides apparues tout au long de l'itération suit la progression 1 ; 2 ; 4 ; ..; 2^n ; etc, que vérifient aussi les couples résultants de prismes. Les restes successifs de la pyramide initiale après ablation des couples acceptent une description identique :

pyramide initiale - 1 couple de prismes ;
pyramide initiale - (1 + 2) couples ;
pyramide initiale - (1 + 2 + 4) couples ; etc
d'où l'écriture plus générale :
pyramide initiale - (somme des prismes résultants apparus).

Les parties techniques sont maintenant expliquées et il me reste encore à énoncer la proposition (XII-4) mais avant j'ai besoin de préciser mes notations : pyramide (1) dénote une pyramide de base, base (1), ou son volume. L'expression "somme des prismes résultants (1) apparus" traduit le volume représenté par les prismes apparus lors de l'application du processus d'exhaustion dans la pyramide (1).

La proposition (XII-4) énonce :

Soient deux pyramides de même hauteur, pyramide (1) et pyramide (2).

L'itération décrite plus haut, appliquée un même nombre de fois dans chacune des deux pyramides autorise la proportion :

$$\frac{\text{base (1)}}{\text{base (2)}} = \frac{\text{somme des prismes résultants (1) apparus}}{\text{somme des prismes résultants (2) apparus}}$$

Ce résultat joue dans la démonstration (XII-5) le rôle tenu par la proposition (XII-1) dans la démonstration (XII-2).
Je rappelle l'énoncé de la proposition (XII-5): Les pyramides triangulaires de mêmes hauteurs sont dans le rapport de leurs bases.
En termes modernes et pour deux pyramides :

$$\frac{\text{pyramide (1)}}{\text{pyramide (2)}} = \frac{\text{base (1)}}{\text{base (2)}}$$

Comme dans la démonstration décrite auparavant, supposons pour la preuve de la proposition (XII-5) les rapports inégaux et substituons à pyramide (2) un volume (X) qui réalise la proportion :

$$\frac{\text{base (1)}}{\text{base (2)}} = \frac{\text{pyramide (1)}}{\text{(X)}}$$

1ère hypothèse : (X) < pyramide (2)
L'hypothèse fournit l'inégalité : pyramide (2) - (X) < pyramide (2)
Pyramide (2) est le plus grand des deux termes ; le processus d'exhaustion lui ôte des couples de prismes et aboutit à l'inégalité :

pyramide (2) - (somme des prismes résultants (2) apparus)
< pyramide (2) - (X)

c'est à dire :

(X) < somme des prismes résultants (2) apparus.

La suite va montrer l'inégalité stricte et contraire à celle-ci.

Le processus d'exhaustion aboutit à l'inégalité après un nombre fini d'itérations. Le même nombre d'itérations appliquées à la pyramide (1) nous met en présence de la proportion démontrée dans la proposition (XII-4) :

$$\frac{\text{base (1)}}{\text{base (2)}} = \frac{\text{somme des prismes résultants (1) apparus}}{\text{somme des prismes résultants (2) apparus}}$$

qui jointe à la proportion :

$$\frac{\text{base (1)}}{\text{base (2)}} = \frac{\text{pyramide (1)}}{\text{(X)}}$$

donne :

$$\frac{\text{pyramide (1)}}{\text{(X)}} = \frac{\text{somme des prismes résultants (1) apparus}}{\text{somme des prismes résultants (2) apparus}}$$

mais l'inégalité pyramide (1) < somme des prismes résultants (1) apparus (les prismes sont ôtés de la pyramide) implique l'inégalité contradictoire annoncée :

(X) > somme des prismes résultants (2) apparus.

INTERMEDE

Un retour à l'inégalité supposée des rapports de l'énoncé et un échange entre les deux pyramides conduit à substituer à pyramide (1) un volume (Y) qui satisfait la proportion :

$$\frac{\text{base (2)}}{\text{base (1)}} = \frac{\text{pyramide (2)}}{\text{(Y)}}$$

Mutatis mutandis, l'impossibilité de l'hypothèse (Y) < pyramide (1) se démontre d'une manière analogue.

2ème hypothèse : (X) > pyramide (2)

Adjoignons aux grandeurs (X), pyramide (1) et pyramide (2) un volume (Y) pour réaliser la proportion :

$$\frac{\text{(X)}}{\text{pyramide (1)}} = \frac{\text{pyramide (2)}}{\text{(Y)}}.$$

La remarque suivante est importante :
l'inégalité posée en hypothèse, (X) > pyramide (2), implique cette autre inégalité : pyramide (1) >(Y)[8].

Rassemblons toutes les relations connues sous la 2ème hypothèse :

$$\frac{\text{base (2)}}{\text{base (1)}} = \frac{\text{(X)}}{\text{pyramide (1)}} \; ; \; \frac{\text{(X)}}{\text{pyramide (1)}} = \frac{\text{pyramide (2)}}{\text{(Y)}}$$

---

[8] Le lemme (XII-2) invoqué à cet endroit outrepasse ses possibilités : ici les termes de la proportion sont des volumes.

et pyramide (1) > (Y).

Celles-ci autorisent la conjonction :

$$\frac{\text{base (2)}}{\text{base (1)}} = \frac{\text{pyramide (2)}}{\text{(Y)}} \text{ et pyramide (1)} > \text{(Y)}$$

L'intermède a montré au lecteur l'absurdité de cette conjonction. L'impossibilité de la 2ème hypothèse s'ensuit.

De la comparaison des deux propositions, la cinquième et la deuxième, deux principes ressortent autour desquels Eudoxe bâtit ses démonstrations.. L'un, apporté par la proposition (X-1), apparaît comme la clé de voute de la méthode permettant l'arrêt du processus d'exhaustion. La validité de cette proposition entraînant celle de la méthode d'Eudoxe, repose sur l'axiome dit d'Archimède qui attribue à certaines grandeurs de même nature, des longueurs, des aires ou des volumes, la propriété de se surpasser mutuellement : une plus petite longueur a toujours un certain multiple supérieur à une plus grande ; une plus petite aire a toujours, etc. La quatrième proportionnelle, le second principe, correspond plutôt a une pierre de fondation. Discutée, l'édifice eudoxien s'ébranle, niée il s'effrondre.

A ce que nous savons, ce ne fut jamais le cas pour les grandeurs. Pour les nombres, entiers et positifs, son existence est discutée dans le livre VII où les conditions de son attribution à trois nombres sont données. Qualité générale des grandeurs, particulière avec les nombres ; toute la différence tient en ces deux mots : discret ou continu.

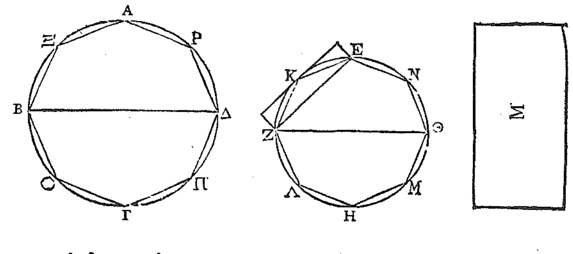
Mais il semble raisonnable de voir dans la discution de l'existence d'une quatrième proportionnelle un débat sur la continuité des grandeurs s'ouvrir sur des questions trop au delà des connaissances grecques pour être sérieusement posées. Aussi, d'une validité impeccable pour ses contemporains, la méthode du Cnidnien sera reconnue, jusqu'au XVI siècle, comme exemplaire pour argumenter les preuves de résultats devinés ou trouvés par des voies impropres à la démonstration rigoureuse.

LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION II.

Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.

Soient les cercles ABΓΔ, EZHΘ, et que leurs diamètres soient BΔ, ZΘ ; je dis que le quarré de BΔ est au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ.

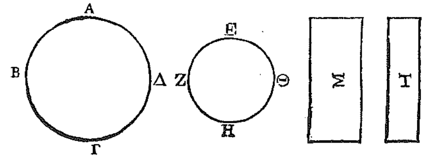


Car si le quarré de BΔ n'est pas au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ, le quarré BΔ sera au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle EZHΘ. Que ce soit d'abord à une surface Σ plus petite. Dans le cercle EZHΘ décrivons le quarré EZHΘ ; le quarré décrit sera plus grand que la moitié du cercle EZHΘ, parce que, si par les points E, Z, H, Θ nous menons des tangentes à ce cercle, le quarré EZHΘ sera la moitié du quarré circonscrit au cercle (47. 1 et 31. 3). Mais le cercle est plus petit que le quarré circonscrit; le quarré inscrit EZHΘ est donc plus grand que la moitié du cercle EZHΘ. Partageons les arcs EZ, ZH, HΘ, ΘE en deux parties égales aux points K, Λ, M, N, et joignons EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE. Chacun des triangles EKZ, ZΛH, MHΘ, ΘNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points K, Λ, M, N nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites EZ, ZH, HΘ, ΘE nous construisons des parallélogrammes, chacun des triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé (37. 1). Mais un segment est plus petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales ; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle ΕΖΗΘ sur la surface Σ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle ΕΖΗΘ placés sur les droites ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ, et qu'ils soient plus petits que l'excès du cercle ΕΖΗΘ sur la surface Σ; le polygone restant ΕΚΖΛΗΜΘΝ sera plus grand que la surface Σ. Décrivons dans le cercle ΑΒΓΔ un polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ semblable au polygone ΕΚΖΗΝΜΘΝ; le quarré de ΒΔ sera au quarré de ΖΘ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ (1. 12). Mais le quarré de ΒΔ est au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à la surface Σ; le cercle ΑΒΓΔ est donc à la surface Σ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ; donc, par permutation, le cercle ΑΒΓΔ est au polygone qui lui est inscrit comme la surface Σ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais le cercle ΑΒΓΔ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface Σ est donc plus grande que le polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible; le quarré de ΒΔ n'est donc point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ. Nous démontrerons semblablement que le quarré de ΖΘ n'est point au quarré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Je dis ensuite que le quarré de ΒΔ n'est point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Car si cela est possible, que le quarré de ΒΔ soit au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface Σ plus grande. Par inversion, le quarré de ΖΘ sera au quarré de ΒΔ comme la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ. Mais la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ; le quarré de ΖΘ est donc au quarré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ, ce qui a été démontré impossible; le quarré de ΒΔ n'est donc pas au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Mais on a démontré que le quarré de ΒΔ n'est point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ; le quarré de ΒΔ est donc au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ. Donc, etc.

LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

LEMME.

Je dis que si la surface Σ est plus grande que le cercle ΕΖΗΘ, la surface Σ sera au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ.

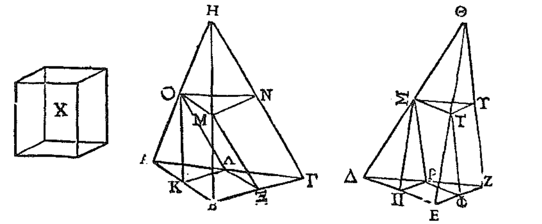


Car que la surface Σ soit au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface Τ; je dis que la surface Τ est plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Car puisque la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à la surface Τ, par permutation, la surface Σ sera au cercle ΕΖΗΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à la surface Τ (16. 5). Mais la surface Σ est plus grande que le cercle ΕΖΗΘ; le cercle ΑΒΓΔ est donc plus grand que la surface Τ; la surface Σ est donc au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION V.

Les pyramides triangulaires qui ont la même hauteur sont entr'elles comme leurs bases.

Que les pyramides dont les bases sont les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, et dont les sommets sont les points Η, Θ, ayent la même hauteur; je dis que la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ.



Car si la base ΑΒΓ n'est pas à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ; la base ΑΒΓ sera à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide plus petit que la pyramide ΔΕΖΘ ou à un solide plus grand. Que ce soit d'abord à un solide Χ plus grand; divisons la pyramide ΔΕΖΘ en deux pyramides égales entr'elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux ; les deux prismes seront plus grands que la moitié de la pyramide entière (3. 12). Que les pyramides engendrées par cette division soient divisées de la même manière, et faisons toujours cela jusqu'à ce qu'il nous reste de la pyramide ΔΕΖΘ certaines pyramides qui soient plus petites que l'excès de la pyramide ΔΕΖΘ sur le solide X. Cherchons ces pyramides, et qu'elles soient par exemple ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ ; les prismes restants de la pyramide ΔΕΖΘ seront plus grands que le solide X. Divisons semblablement la pyramide ΑΒΓΗ en autant de parties que la pyramide ΔΕΖΘ ; la base ΑΒΓ sera à la base ΔΕΖ comme les prismes de la pyramide ΑΒΓΗ sont aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ (4. 12). Mais la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est au solide X ; la pyramide ΑΒΓΗ est donc au solide X comme les prismes de la pyramide ΑΒΓΗ sont aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ ; donc, par permutation, la pyramide ΑΒΓΗ est aux prismes qu'elle renferme comme le solide X est aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ. Mais la pyramide ΑΒΓΗ est plus grande que les prismes qu'elle renferme ; le solide X est donc plus grand que les prismes que renferme la pyramide ΔΕΖΘ. Mais, au contraire, il est plus petit ; ce qui est impossible ; la base ΑΒΓ n'est donc point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide quelconque plus petit que la pyramide ΔΕΖΘ. Nous démontrerons semblablement que la base ΔΕΖ n'est point à la base ΑΒΓ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ. Je dis enfin que la base ΑΒΓ n'est point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ. Car, si cela est possible, que ce soit à un solide X plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ ; donc, par inversion, la base ΔΕΖ sera à la base ΑΒΓ comme le solide X est à la pyramide ΑΒΓΗ. Mais le solide X est à la pyramide ΑΒΓΗ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ, ainsi que cela est démontré ; la base ΔΕΖ est donc à la base ΑΒΓ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide quelconque plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ, ce qui a été démontré absurde ; la base ΑΒΓ n'est donc point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide quelconque plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ. Mais on a démontré que ce n'est point non plus à un solide X plus petit ; la base ΑΒΓ est donc à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ. Donc, etc.

BIBLIOGRAPHIE

EUCLIDE : Les Eléments, texte grec et traduction française libre par G.J Kayas, CNRS, Paris : 1978. Traduction française par F.Peyrard : 1819.

BARBIN E: Heuristique et démonstration en mathématique : La méthode des Indivisibles au XVII siècle. Article paru dans les Fragments d'Histoire des Mathématiques II. Brochure APMEP N° 65.

GREGOIRE M. Le mystère de la pyramide. Article paru dans la démonstration mathématique dans l'histoire : ed IREM de Besançon et IREM de Lyon.

LE GOFF J.P : De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire de Saint-Vincent. Article paru dans la démonstration mathématique dans l'histoire. Ed. IREM de Besançon et IREM de Lyon.

Les progressions de l'infini : rôles du discret et du continu au XVIIè siècle

Jean Dhombres
Université de Nantes

Les progressions géométriques ont joué un rôle historiquement important dans l'appréhension de l'infini et du continu, rôle que l'on aurait bien tort de réduire à la seule attribution d'une valeur finie à une somme comportant un nombre infini de termes. Bien sûr, acquise sous une forme ou sous une autre, et pour $|x|$ strictement inférieur à l'unité, une formule telle que

$$\text{(G)} \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} x^n ,$$

n'a pu manquer d'être l'amorce de l'étude des séries, la série du binôme au premier chef,

$$(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots,$$

pour un exposant α quelconque, (G) correspondant à $\alpha = -1$, et plus généralement les séries entières

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n \quad .$$

Grâce à sa versatilité d'emploi, notamment par le calcul explicite du reste, la série géométrique a servi d'exemple typique pour approcher un nombre réel quelconque et partant pour comprendre un continu tel que l'ensemble des points d'une droite situés entre deux points donnés sur celle-ci puisque le ressort de l'écriture décimale illimitée d'un nombre réel x quelconque en dépend. En écrivant

$$\pm \sum_{n=-N}^{n=\infty} \frac{x_n}{10^n},$$

où, pour chaque n, x_n est un entier compris entre 0 et 9, et N un entier positif ou nul, grâce à la relation (G) appliquée avec $x = \frac{9}{10}$, on constate qu'un nombre pour lequel l'entier x_n est toujours égal à 9 à partir du rang n' (> 0), a pour valeur :

$$\pm\left(\sum_{n=-N}^{n=n'-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n'-1}}\right)$$

Le choix d'un regard historique

Mon propos n'est certainement pas de dérouler la longue histoire des interventions de la série géométrique, qui pourrait débuter par la légende du roi qu'aurait ruiné la promesse d'une récompense d'un grain de blé doublé successivement sur chaque case de l'échiquier. J'entends ne rendre compte que de quelques utilisations de cette série, celles qui ont pu façonner certains des concepts sur l'infini et le continu, reconnaissant bien volontiers le côté subjectif - mais toute histoire n'est-elle pas une construction ? - et avouant sans gêne puiser très sélectivement dans l'immense réservoir des mathématiques du passé.

Certes, en affichant la simple recherche des déterminations de la formule (G), je pourrais préserver mon étude contre toute attaque, du côté de la méthodologie notamment : souvent l'on prend ainsi prétexte de la positivité d'un fait mathématique pour en faire le récit, dressant une longue liste d'intervenants au fil des âges et des articles publiés ou manuscrits. Mais tel n'est pas ici l'enjeu : une formule, et tout particulièrement une formule analytique, est rarement un point d'aboutissement mais le plus souvent un point de départ. Comment ne pas songer au rôle de la formule (G) dans le façonnage de la théorie des anneaux normés, les algèbres de Banach (idéaux maximaux, etc), sous l'impulsion de N. Wiener d'abord, puis de I.M. Gelfand, D.A. Raikov, G.E. Chilov, etc, juste avant la seconde guerre mondiale ? Une autre piste serait la théorie de la stabilité du calcul des valeurs et des vecteurs propres des matrices par la méthode de relaxation, baptisée sous le double patronyme de Gauss et de Seidel. A vrai dire, la formule (G) est suffisamment simple et générale pour se retrouver au départ de bien des théories ou pratiques mathématiques, le calcul symbolique n'étant pas l'une des moindres. N'appartient-il pas à l'historien des mathématiques - et à l'épistémologue - d'effectuer la sélection de ces filiations ? Une démarche dont on reconnaîtra qu'elle évite l'insupportable visée téléologique - l'explication de l'avant par l'après - sans que l'on ait à se départir de la dynamique, c'est-à-dire de ce sens d'une visée dans la recherche mathématique, alors même que cette visée est bien rarement l'objectivation pensée aujourd'hui.

Les facteurs historiques ne sont certes pas les seuls à créer l'objectivité mathématique et le logicien aura soin d'une explication tout autre alors que les mathématiciens choisissent à cet effet aussi bien la conception architecturale, l'efficacité, l'esthétique manifestée par l'élégance ou, plus souvent qu'on ne le pense, le dévoilement du réel. Pourtant, un platonicien convaincu ne peut guère se désintéresser du mouvement par lequel le regard se détourne du mur de la caverne et un phénoménologiste ne saurait récuser la délimitation des strates qui font d'une théorie mathématique un être-là dont les cadres s'imposent objectivement, sinon inéluctablement.

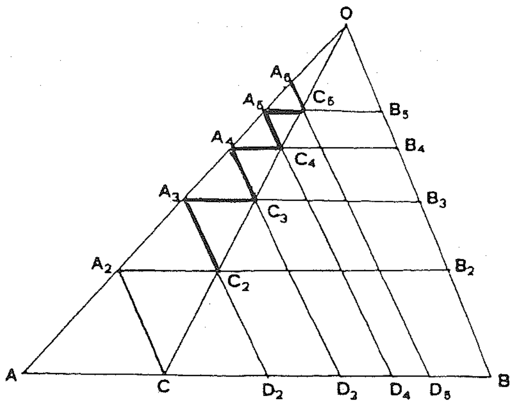
C'est en tout cas sur l'articulation entre une formule et certains concepts du continu que j'ai choisi de porter un regard historique. Si j'ai adopté de préférence des textes du XVIè siècle et de la première moitié du XVIIè siècle, textes suivis avec attention et longuement cités, c'est que la méthode historique exige une telle concentration qui ne saurait exclure le recours épisodique à des œuvres d'Euclide aussi bien qu'à celles de scolastiques.

Une expérience : le morcelage du continu

C'est peut-être une expérience de dessin qui est à l'origine de la composition du continu chez un auteur que tout le monde crédite à juste titre de la première résolution mathématique du paradoxe de Zénon, celui de l'Achille courant désespérément derrière une tortue. Cet auteur est Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), père jésuite dont la formation mathématique s'effectua au Collège romain au cours de la première décennie du XVIIe siècle. Il fut l'animateur de ce que l'on peut appeler l'école mathématique belge, ayant comporté des maîtres comme Guldin, de la Faille ou Tacquet[1].

[1] Sur ses élèves, comme sur la vie de Grégoire de Saint-Vincent, on peut consulter divers articles d'érudition. En particulier, H. Bosmans, "Deux lettres inédites de G. de Saint-Vincent", *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 26 (1901-1902), pp. 22-40; et surtout le texte de cet auteur paru dans la *Biographie nationale belge*, 21, (1911-1913), colonnes 141-171; P. Bockstaele, "Four letters from G. a Sancto Vincentio to Chr. Grienberger", *Janus*, 1969, 56, pp. 63-107; Omer Van de Vyver, "L'Ecole de mathématiques des Jésuites de la province franco-belge au XVIIème siècle", *Archivium Historicum Societatis Iesu*, vol. XLIX, 1980, n°97, pp. 265-278.

Figure 1



Le donné visuel est un triangle OAB, avec choix arbitraire d'un point C entre les points A et B, point déterminant une sécante OC. De C, on mène une parallèle au côté OB coupant le côté OA en A_2. Du point A_2, on mène une parallèle à la base AB, coupant la sécante OC en C_2. De C_2, à nouveau on mène parallèlement à OB la droite C_2A_3 puis A_3C_3 parallèlement à AB, et ainsi de suite. Alternativement sur le côté OA et sur la sécante OC, deux familles de points sont ainsi établies A, A_2, A_3, A_4, A_5, etc; C, C_2, C_3, C_4, etc. Naturellement, en traçant des parallèles à OB, on peut rabattre tous ces points sur la droite AB générant ainsi une famille A, C, D_2, D_3, D_4, etc, ou encore, en traçant des parallèles à la base AB, les rabattre sur OB pour avoir cette fois B, B_2, B_3, B_4, etc.

Dans cette situation, c'est la concaténation de deux faits qui dut frapper Grégoire de Saint-Vincent. D'une part, on peut "voir" la longueur OB toute entière, mais on la voit aussi morcelée en segments distincts CA_2, C_2A_3, C_3A_4, etc, segments déplacés qui correspondent aux segments alignés BB_2, B_2B_3, B_3B_4, etc. D'autre part, l'opération de constitution des différents segments est répétitive : c'est la **même** construction qui est sans cesse itérée. De telle sorte que la simplicité de l'itération suggère qu'un calcul est possible, qu'une loi régulière préside à la composition en segments de la longueur OB. Il s'avère que cette régularité est celle de la progression géométrique.

Pour prouver cette affirmation, il suffit de calculer avec des proportions sur une seule étape : une figure réduite est bien plus commode et cette simplification est un des avantages de l'itération.

Adoptons les notations mêmes de Grégoire de Saint-Vincent qui, naturellement, ne fait pas usage des indices numériques (nous les avons d'abord adoptés par souci de simplification), mais utilise le rang des lettres dans l'alphabet latin pour se faire entendre.

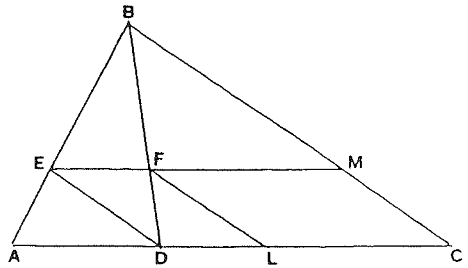


Figure 2

Appliqué deux fois, le théorème dit de Thalès fournit :

$$\frac{AD}{EF} = \frac{DB}{FB} \quad \text{et} \quad \frac{DC}{FM} = \frac{DB}{FB}.$$

Puisque le parallélogramme DEMC procure EM = DC, on dispose de la proportion :

$$(1) \qquad \frac{AD}{EF} = \frac{EM}{FM}.$$

Ce que l'on peut encore écrire selon une proportion ne faisant jouer que des longueurs portées sur la base AC :

$$\frac{AD}{DL} = \frac{DC}{LC}.$$

Un calcul d'algèbre des proportions conduit aussitôt à :

$$\frac{AD}{DL} = \frac{DC}{LC} = \frac{AD + DC}{DL + LC} = \frac{AC}{DC}.$$

Dont on déduit :

$$(2) \qquad \frac{AD}{EF} = \frac{AC}{DC}.$$

Les relations (1) et (2) constituent un groupement simple qui fait saisir la permanence de l'itération : le rapport d'une longueur comme AD à la longueur suivante EF est un invariant car s'il est égal au rapport dans lequel D divise la base AC (soit $\frac{AC}{DC}$), il l'est aussi bien au rapport dans lequel le nouveau point F divise la nouvelle base EM (soit $\frac{EM}{FM}$). En posant $r = \frac{AC}{DC} = \frac{EM}{FM}$, on manifeste à son tour

que $\frac{AD}{EF} = r$. Traduite dans le langage des lettres indexées de la figure 1, cette invariance donne :

$$(3) \qquad r = \frac{AC}{A_2C_2} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3} = \frac{A_3C_3}{A_4C_4} = \cdots .$$

Une permanence que l'on peut aussi bien lire sur la seule base AB :

$$(4) \qquad \frac{AC}{CD_2} = \frac{CD_2}{D_2D_3} = \frac{D_2D_3}{D_3D_4} = \cdots ,$$

ou encore, moyennant la similitude des triangles ACA_2, $A_2\,C_2\,A_3$, $A_3\,C_3\,A_4$, etc, lire sur le seul côté OB :

$$(5) \qquad \frac{BB_2}{B_2B_3} = \frac{B_2B_3}{B_3B_4} = \frac{B_3B_4}{B_4B_5} = \cdots .$$

Autrement dit, les points A, C, D_2, D_3, D_4, etc, déterminent sur le segment AB des intervalles successifs dont les longueurs forment une progression géométrique[2] et les points B, B_2, B_3, B_4, etc, forment de même sur le segment BO une autre progression géométrique. D'autres progressions sont obtenues avec les points A, A_2, A_3, A_4, etc, sur OA ou les points C, C_2, C_3, C_4, etc, sur OC.

On remarquera de plus que la comparaison de (1), après traduction sur l'axe AC, avec (2), montre que la longueur DC (fig. 2) est moyenne géométrique des longueurs AC et LC ($DC = \sqrt{AC.LC}$). En abscisse (dans la fig. 1), ce résultat pourrait facilement lancer une progression géométrique à rebours en quelque sorte, avec les segments BA, BC, BD_2, BD_3, BD_4, etc. Ce n'est pas la voie empruntée ici par Grégoire de Saint-Vincent, mais il la connaît bien sûr[3].

Si s'avère notable la présence de progressions géométriques générées par l'itération très simplement menée, la "visualisation" ne

---

[2] En posant $\frac{AC}{A_2C_2} = r$ $(r>1)$, on a pour $n \geq 2$, $A_nC_n = \frac{AC}{r^{n-1}}$, $D_{n-1}D_n = \frac{AC}{r^{n-1}}$ en convenant de poser $D_1 = C$ et, avec $B_1 = B$, toujours pour $n \geq 2$, $B_{n-1}B_n = \frac{BB_2}{r^{n-2}}$.

[3] Evangelista Torricelli adopte une figure encore plus simple que la figure (1), et il met en évidence la progression géométrique des longueurs AC, A_2C_2, A_3C_3, etc, dans son manuscrit *De dimensione parabolæ*, lemme XXIV : "*Si duae rectæ lineæ invicem concurrant, et inter ipsas descriptum sit quoddam flexilineum constans ex lineis alternatim parallelis; erunt omnes lineæ quæ inter se parallelæ sunt, in continua proportione*". Ensuite, en traçant des parallèles, il représente la somme totale sur le segment AB (lemme XXVI). Voir : *Opere di Evangelista Torricelli*, G. Loria e G. Vassura (ed.), vol. 1, Faenza, 1919, pp. 147-148.

vaut cependant pas preuve de la composition du continu AB par $AC + CD_2 + D_2D_3 + D_3D_4$ + etc, celle du continu OB par $BB_2 + B_2B_3 + B_3B_4$ + etc, ou encore celle du continu OC par $CC_2 + C_2C_3 + C_3C_4$ + etc. Grégoire de Saint-Vincent entend bien réussir cette preuve : tel est l'objet de la deuxième partie de son deuxième livre consacré aux progressions géométriques.

"L'expérience" que nous venons de décrire se trouve quant à elle insérée juste avant, dans la première partie de ce même livre 2, à la proposition 70 précisément. Cet emplacement est tout à fait voulu comme on peut s'en rendre compte en reprenant l'organisation générale de l'ouvrage après un historique rapide. L'*Œuvre géométrique* [4] de Grégoire de Saint-Vincent parut très tardivement à Anvers en 1647 : elle comporte dix livres et culmine à 1225 pages in folio; c'est un des textes mathématiques les plus copieux parmi tous les textes du XVIIè siècle et sans doute de bien d'autres époques. Les résultats essentiels étaient déjà rédigés dans les années 1617-1625, alors que le savant dévoilait les mathématiques à un public restreint d'apprentis jésuites, à Anvers d'abord, puis à Louvain[5]. Le contenu est sagement divisé en fonction des sections coniques : un livre particulier pour le cercle, trois autres pour l'ellipse, la parabole et l'hyperbole respectivement, un livre enfin pour les surfaces du second degré (selon la terminologie actuelle). Mais dans cette géométrie du second degré s'insèrent des livres conçus comme aides techniques, le premier concerne "*la puissance des lignes*" et met en place les proportions et l'algèbre correspondante, le second est entièrement consacré à la progression géométrique sur laquelle retour est fait au huitième livre pour l'adapter à la mesure des aires et des volumes, grâce à la théorie du *ductus* du septième livre, un chapitre très original de l'*Opus*

[4] *P. Gregorii a S^{to} Vincentio Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*, I. et I. Meursios, Anvers, 1647.

[5] La Bibliothèque Royale de Bruxelles possède un important fonds de manuscrits laissés par Grégoire de Saint-Vincent. Ils sont reliés en gros volumes, allant chacun de 300 à presque 600 pages (Numéros 5770-5793). Mais la chronologie n'est pas respectée. Un essai de datation fut effectué par Hermann van Looy dans sa dissertation doctorale de la Katholieke Universiteit te Leuven (*Chronologie en analyse van de mathematische handschriften van G. a Sancto Vincentio*, 1979). Les conclusions sont reprises dans deux articles du même auteur, dont le second est une traduction du premier : H. van Looy, "Chronologie et analyse des manuscrits mathématiques de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)", *Archivium Historicum Societatis Iesu*, vol XLIX, 1980, n°97, pp. 279-303 ; "A chronology and historical analysis of the mathematical manuscripts of Gregorius a Sancto Vincentio (1584-1667)", *Hist. Math.*, 11, 1984, pp. 57-75. Une étude antérieure est due à E. Sauvenier-Gauffin, "Les manuscrits de G. de Saint-Vincent", *Bull. Soc. des Sciences de Liège*, 1951, pp. 413-436 ; 563-590, 711-737.

geometricum quoique totalement oublié aujourd'hui[6]. Le dernier livre de l'ouvrage en est la honte, en ce sens que Grégoire prétend y démontrer la possible quadrature du cercle, et d'ailleurs celle des autres coniques.

En première partie du deuxième livre, intitulée *De progressionibus geometricis* (Des progressions géométriques), Grégoire de Saint-Vincent traite des "*progressions inchoatives, c'est-à-dire non terminées, en ce sens que le terme* [final] *des progressions ne sera pas encore pris en considération*"[7]. Il s'agit bien sûr des progressions géométriques finies. L'exposé est "abstrait" mais, à la manière du livre 5 des *Eléments* d'Euclide, puisque si l'auteur utilise des grandeurs de même genre, il les représente toutes par des segments de droite, utilisant donc le minimum de spatialité ; l'objet de calcul est la raison, c'est-à-dire le rapport de deux grandeurs de même genre.

La proposition 70 dont nous venons de fournir le contenu détonne pourtant dans l'ensemble des 74 propositions de la première partie. Car la figure qui y est utilisée n'est pas un alignement de segments, mais elle fait intervenir des lignes tracées dans des triangles[8]. Le spatial géométrique est à l'œuvre. En outre, c'est la première fois qu'intervient un procédé dûment itératif auquel un beau développement était promis dans le reste de l'ouvrage. En tout cas, Grégoire annonçait ce rôle de l'itération dès l'introduction du livre 2 l'avait particulièrement frappé l'expression "*Et hoc semper fiat*" qui intervient chez Euclide, notamment au livre X des *Eléments*. Ainsi, à la proposition 1 de ce livre on lit : "*Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une*

[6] Une traduction française de ce septième livre, avec un commentaire, devrait paraître prochainement dans *Sciences et Techniques en Perspective*.

[7] Argumentum du livre 2, *Opus geometricum*, p. 52 ("*progressionum inchoatarum*"). Afin d'alléger la présentation, nous donnons directement une traduction française de certains passages de l'ouvrage. Voir Jean Dhombres, *Une algèbre de raison au 17e siècle : la quadrature de l'hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent*, livre à paraître. Nous reviendrons sur la signification attribuée au mot "terme" sous la plume de Grégoire de Saint-Vincent.

[8] Auparavant, au livre 2, seules les figures des propositions 31, 35, 36, 38, 40 et 69 présentent une spatialité semblable, mais elles sont très classiques dans leur fond puisqu'il s'agit de construire soit une moyenne proportionnelle, soit de montrer l'effet du théorème de Thalès, soit enfin (à la proposition 69) d'illustrer géométriquement l'importante propriété algébrique $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ sur laquelle nous reviendrons. Au contraire, la proposition 70 fait jouer l'itération et un processus infini dont rend compte la figure.

certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées"[9]. Grégoire se réfère tout autant à Archimède dont la formulation diffère pourtant de celle d'Euclide, par exemple dans la *Quadrature de la Parabole*[10], voire dans la *Mesure ducercle*[11]. "*Cette petite formule titilla particulièrement mon esprit et me contraignit à des pensers chagrins*"[12] avouait non sans inquiétude le Père jésuite. La proposition 70 manifeste le résultat de telles "pensées". De sorte que cette proposition, que nous avons qualifiée d'expérience, constitue certainement un pivot, le passage de la progression finie à la progression infinie, c'est-à-dire de l'interminé au terminé dit précisément Grégoire de Saint-Vincent. Ce passage, que nous rangeons aujourd'hui dans le domaine de l'analyse et qui, pendant longtemps, fut considéré comme du ressort de l'algèbre, est d'abord inscrit en ce début du XVIIè siècle sous la bannière de la géométrie.

Voici le texte original de la proposition 70. On notera que l'énoncé littéral joue sur des segments qui ne sont pas alignés, le premier objectif étant de montrer la stabilité de l'itération avant de les sommer en les alignant.

[9] *Les Œuvres d'Euclide*, traduction F. Peyrard, Paris, 1816, Patris, tome second, p. 113. La traduction latine généralement adoptée est justement le "*hoc semper fiat*" pour rendre le "καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται", et si l'on fait toujours la même chose. Au livre XII des *Eléments*, Euclide reprend la même formulation pour la mesure du cercle : "*et si l'on continue toujours de faire la même chose*".

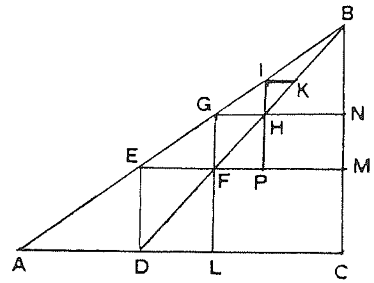
[10] A la proposition 24 de ce livre, on lit "*et nous continuons à inscrire dans les segments apparaissant successivement des triangles...*", ce qui, avec la suppression de l'adverbe "toujours" s'avère moins précis (*Archimède*, tome premier, La mesure du cercle, trad. C. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1970, tome 2, p. 193).

[11] Dans ce texte d'Archimède, la formulation est plus prudente encore. Mugler traduit par : "*que les segments de cercle aient à la fin une somme inférieure...*" mais il éprouve le besoin de préciser: "*(sc. si on répète les opérations de division en deux parties égales)*", (trad. Mugler, op. cité, p. 137). A vrai dire, aussi bien dans d'autres livres, au lieu de la formulation d'une continuation indéfinie, Archimède préfère fixer le moment à partir duquel on peut s'arrêter. Ainsi, dans *De la Sphère et du cylindre* : "*En divisant en deux parties égales.... nous trouverons comme restes des segments dont la somme est inférieure à l'aire Θ*" (trad. Mugler, tome 1, proposition 9, p. 26) et dans le livre *Sur les Conoïdes et les Sphéroïdes*, Archimède choisit de porter l'accent sur la possibilité même de l'arrêt de l'itération: "*Il est dès lors possible d'inscrire au cercle un polygone...*"(ει δυνατον...., trad. Mugler, tome 1, proposition 4, p. 167). Les réticences mêmes d'Archimède - quelquefois porteuses de précision - disent suffisamment que la continuation indéfinie faisait problème dès l'Antiquité.

[12] "*Titillavit me hæc particula, et coëgit morosiore cogitatione circa hæc versari*", *Opus geometricum*, op. cité, p. 51.

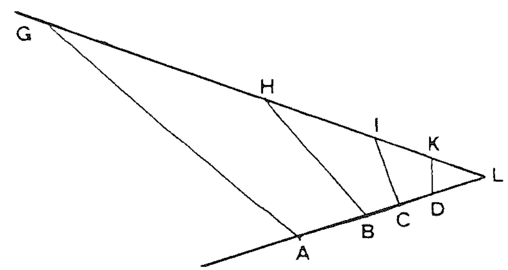
Propositio LXX *: Sit ABC triangulum diuisum rectâ lineâ DB, ducanturq̃ ; linee DE, EF, FG, GH, HI, IK basi AC, et lateri BC parallele quot libuerit. Dico omnes AD, EF, GH, IK, item DE, FG, HI, etc, esse in eadem continuata analogia.*

figure 3



Ceci obtenu, au lieu d'avancer directement dans la seule voie itérative qu'il inaugure avec la proposition 70, Grégoire de Saint-Vincent propose d'abord quelques récréations ; on peut supposer qu'il le fait dans l'intention de souligner l'intrusion de la géométrie, celle du continu spatial, dans un livre qui paraissait ne relever jusque là que de l'algèbre, du moins celle qui est liée à la théorie des proportions dont les règles sont précisément indépendantes de la nature des grandeurs en cause. Ainsi, à la proposition 71, il prend deux progressions géométriques sur deux droites concourantes en L. Joignant par des segments les termes de rang correspondant dans les deux progressions (figure 4), Grégoire indique que les aires des triangles constituent également une progression géométrique[13], de même que les aires des trapèzes ABHG, BCIH, CDKI, etc. Ces digressions ne sauraient trop durer!

Figure 4



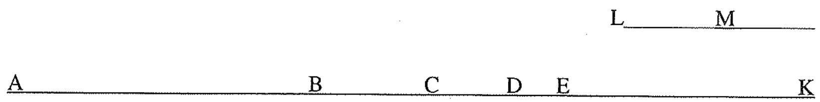
[13] La raison de la progression des aires est le produit des raisons des progressions sur chacune des deux droites. Nous retrouverons ce résultat.

Des formes de la formule (G) : le continu morcelé et le discret continué

Si le dessin de la proposition 70 invente un morcelage du continu, le dessein n'en est pas moins la composition de ce continu et, dès la proposition 75 qui est la première de la deuxième partie du livre 2, Grégoire de Saint-Vincent se met à l'œuvre. Pour démontrer d'abord une évidence visuelle : sur leur droite respective, les points A, A_2, A_3, A_4, etc, ou C, C_2, C_3, C_4, etc, ou encore B, B_2, B_3, B_4, etc, restent en deçà du point O (figure 1). L'énoncé adopté à cet effet simplifie les données dans la mesure où il suffit de considérer une seule progression géométrique, et surtout que l'on peut abandonner la spatialité de la représentation figurée pour revenir à la simple linéarité de la représentation des longueurs.

1) Présence de l'infini: une preuve par récurrence

"*Proposition 75 : Si l'on a une grandeur AB qui soit à la grandeur BK comme la grandeur BC à la grandeur CK, je dis que la proportion de AB à BC peut être poursuivie en acte sans terme* [final] *à l'intérieur de la grandeur AK, de telle manière qu'elle ne parvienne jamais à K*"[14].



La conclusion de cette proposition 75 présente une indéniable connotation philosophique. Grégoire de Saint-Vincent entend prouver la poursuite en acte d'une progression ; c'est incontestablement à un théorème d'existence qu'il s'attaque. Nous allons donc surveiller la preuve fournie par le jésuite brugeois afin de saisir le pur jeu algébrique qu'il instaure par la manipulation des proportions et, ce faisant, nous familiariser avec celles-ci. La chose peut paraître fastidieuse au début, surtout par comparaison avec notre algèbre, mais dans cette proposition 75 la récurrence non explicite du raisonnement

[14] *"Si fuerit magnitudo AB, ad magnitudinem BK, ut magnitudo BC ad magnitudinem CK. Dico proportionem AB ad BC, sine termino continuari actu posse intra magnitidunem AK, ita ut numquam ad K perveniatur"*, Proposition 75, livre 2, *Opus geometricum*, op. cité, p. 95.

de Grégoire exige une attention assez scrupuleuse[15].

L'hypothèse fixe au départ les points extrêmes A et K, et deux points intermédiaires B et C, de telle sorte que

$$(1) \qquad \frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK}.$$

De fait, le point B est choisi arbitrairement entre A et K tandis que le point C est déterminé par la relation (1). Il conviendrait donc d'établir que C est effectivement situé entre les points B et K, c'est-à-dire que la longueur BC est inférieure à BK, et ce pour tout choix possible de B. Grégoire de Saint-Vincent ne le fait pas et, quand bien même le résultat serait exact, il nous faudra expliquer une telle absence qui, en fait, est l'indice non d'une faute mais bien plutôt d'un présupposé. Nous y reviendrons.

En tout cas, $\frac{AB}{BC}$ est une raison fixée et, en respectant la règle discrète que nous notons (G_d) pour repérage ultérieur, l'on peut construire itérativement une progression de points D, E, F, etc :

$$(G_d) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{DE} = \frac{DE}{EF} = \cdots .$$

Le but de la proposition est de prouver qu'ainsi établis tous les points D, E, F, etc, sont en deçà du point K. Comme pour tout raisonnement par récurrence - et c'est ce dont il s'agit puisqu'il faut interpréter (G_d)

[15] Pour vérification du commentaire, voici le texte traduit de la démonstration fournie par Grégoire de Saint-Vincent (proposition 75, livre 2): "*Que ce qu'est AB à BC, BC le soit à L. Parce que AB est donc à BK comme BC à CK, en alternant on aura que ce qu'est AB à BC (c'est-à-dire BC à L), BK l'est à CK. Et derechef en alternant, ce que BC est à BK, L l'est à CK. Partant, puisque BC (par hypothèse) est moindre que BK, L également sera moindre que CK. Donc, de CK on pourra soustraire CD égale à L. Or, AB, BC et L étaient toutes trois en proportion continue, donc AB, BC et CD sont aussi toutes trois en proportion continue. Maintenant, à ces trois grandeurs en proportion continue AB, BC et CD, qu'on pose la quatrième proportionnelle continue M. Parce que j'ai montré un peu auparavant que BK est donc à BC comme CK est à L (c'est-à-dire CD), on aura dividendo et en inversant que BC est à CK comme CD à DK. Je puis montrer que M est moindre que DK grâce au raisonnement même par lequel, auparavant, j'ai montré que L est moindre que CK. On pourra, par conséquent, de DK retrancher DE égale à M. Les quatre grandeurs AB, BC, CD, DE sont donc en proportion continue. Et, ainsi, nous démontrerons que la proportion AB à BC, à l'intérieur de la ligne AK, peut être continuée en acte sans terme final, de telle façon qu'elle ne parvienne pas à K. Ce qu'il fallait démontrer*".

comme une itération, un répétition indéfinie - Grégoire de Saint-Vincent commence par situer le premier point, le point D. Parce que la démarche suivie doit présenter un caractère suffisamment général, elle est très détaillée et constructive. Il pose d'abord une grandeur L comme troisième proportionnelle des deux premières longueurs AB et BC données, et l'inscrit d'ailleurs dans la figure au-dessus du segment AK :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{L}. \tag{2}$$

Une telle construction est licite dans le cadre même de la théorie des proportions : Clavius, le maître de Grégoire de Saint-Vincent au Collège Romain, l'avait dûment incorporée au corpus euclidien dans son édition latine commentée des *Eléments*[16] en 1574. Echangeant les termes moyens dans la première proportion de (1) qui définit C à partir de A, B, et K, Grégoire obtient la proportion:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BK}{CK}. \tag{3}$$

Comparant (2) et (3), et échangeant encore les termes moyens, il dispose de :

$$\frac{BC}{BK}=\frac{L}{CK}. \tag{4}$$

La relation (4) est bien adaptée pour indiquer que L est une longueur strictement inférieure à CK puisque l'on sait déjà - quoique ceci n'ait pas été démontré - que la longueur BC est strictement inférieure à BK. Cette obtention d'une inégalité à partir de proportions convenablement agencées maintient la pure tradition euclidienne (livre V des *Eléments*).

Remarquons que le point D n'est pas encore intervenu et, de fait, Grégoire le construit maintenant en posant

$$CD = L,$$

ce qui assure la position du point D avant le point K grâce à L < CK. Mais il faut alors **prouver** que le point D ainsi construit correspond au point D défini au départ par l'itération (G_d). C'est chose facile puisque,

[16] *Euclidis elementorum libri XV...*, Auctore Christophore Clavio, Romæ, apud Vincentium Accoltum, 1574, 2 vol.

simultanément, AB, BC, CD (selon (G_d)) et AB, BC, L (par construction) sont en progression géométrique ; or une telle progression est déterminée par ses deux premiers termes[17], d'où l'égalité L = CD.

Cette première étape acquise, il faut maintenant attaquer l'étape générale et tout est préparé pour pouvoir le faire par analogie avec la démarche utilisée lors la première étape. Ce ne peut cependant être une simple répétition car, en chemin, on a dû utiliser la proportion (1) qui fixe quantitativement la position de C par rapport à K, alors que dans l'étape générale on ne connaît pas *a priori* la relation liant DK, EK, etc, avec les quantités précédentes. Ainsi le propos, de pur calcul, est-il d'établir en général une relation de la forme (1) pour les points successifs. Car, ceci acquis, la démarche même de la première étape sera renouvelable, et la récurrence dûment prouvée. Avec cet objectif, le point suivant E doit être considéré comme **point générique** de la suite, alors que D était bien le premier point. Ce mode d'attaque d'une récurrence par un point particulier est normal, compte tenu de l'absence de notation indexée.

Précisément, comme à la première étape, Grégoire construit une longueur M qu'il définit comme quatrième proportionnelle de trois grandeurs selon :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{CD}{M}, \tag{5}$$

grandeur M qu'il pose à son tour sur la figure, au-dessus de AK. En élidant la proportion intermédiaire $\frac{BC}{CD}$, l'auteur indique que le rang ne compte pas et que $\frac{AB}{BC}$ intervient comme raison de la progression géométrique; c'est un élément **générique**. De sorte que l'évocation d'une troisième proportionnelle lors de la première étape apparaît désormais comme un événement fortuit qui tient à la seule contiguïté de B et C; en fait si $\frac{AB}{BC} = r$, il faudrait lire $r = \frac{BC}{L}$ et maintenant $r = \frac{CD}{M}$; et ainsi de suite.

[17] Pour Grégoire de Saint-Vincent, et pour les mathématiciens de son époque, la raison d'une progression géométrique est le rapport du premier terme au second, c'est-à-dire l'inverse de ce que nous appelons raison aujourd'hui, ce qui trompe parfois les commentateurs.

De même qu'à la première étape, Grégoire évite de faire jouer le nouveau point, E en l'occurrence, alors que la comparaison de (5) et de (G_d) fournit évidemment l'égalité M = DE, de sorte que l'inégalité à atteindre M < DK fixera E, point générique, entre son prédécesseur (D en l'occurrence) et le point K. La tactique est de faire intervenir DK et, telle que définie au livre V, la manipulation des proportions s'y prête fort bien. Pourtant, Grégoire commence par inverser la proportion (4) où L = CD, ce qui est une gêne pour la récurrence dans la mesure où cette relation ne présente pas un caractère générique. Il faudra y revenir. En tout cas, il dispose de la proportion:

$$\frac{BK}{BC}=\frac{CK}{CD}, \tag{6}$$

et puisque BK> BC et CK> CD (ce sont des hypothèses de la récurrence), Grégoire utilise la règle dite *dividendo* :

$$\frac{BK-BC}{BC}=\frac{CK-CD}{CD},$$

pour avoir:

$$\frac{CK}{BC}=\frac{DK}{CD},$$

proportion qu'il inverse encore :

$$\frac{BC}{CK}=\frac{CD}{DK}. \tag{7}$$

La récurrence est cette fois enclenchée, car la relation (7) est l'analogue exact de la relation (1) : elle fixe quantitativement le point D entre C et K de la même façon que le point C est fixé entre B et K et d'ailleurs comme B est fixé entre A et K. De sorte que l'analogie formelle[18] avec la première étape procure l'inégalité M < DK. L'affaire est entendue :*"on pourra par conséquent retrancher de DK une grandeur DE égale à M. Donc les quatre grandeurs AB, BC, CD, DE sont en proportion continue"*[19]. De sorte que la conclusion admoneste par un "ainsi" la récurrence que nous venons de faire

[18] Voici la suite des calculs conduits comme à la première étape. La relation (7) donne par échange des moyens $\frac{BC}{CD}=\frac{CK}{DK}$, et puisque $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}$, (5) se lit encore $\frac{BC}{CD}=\frac{CD}{M}$. Donc $\frac{CK}{DK}=\frac{CD}{M}$, et en échangeant les moyens $\frac{CD}{CK}=\frac{M}{DK}$. On a prouvé l'inégalité CD < CK. D'où la conclusion M < DK.

[19] *"poterit ergo ipsi M, ex DK abscindi DE aequalis. Sunt igitur quatuor magnitudines AB, BC, CD, DE continuae proportionales"* p. 95).

ressortir : *"Et ainsi nous démontrerons que la proportion de AB à BC, à l'intérieur de la ligne AK, peut être continuée en acte sans terme* [final] *de telle façon qu'elle ne parvienne pas à K"*[20]. Ce que clôt un sonore : "*Quod erat demonstrandum*".

2) Horizon discret, horizon continu ; analyse et synthèse

Le genre dont voudrait relever la démarche de Grégoire de Saint-Vincent au cours de cette preuve est le genre analytique, entendu au sens classique, celui de Pappus, puisque d'abord sont posés selon la règle (G_d) les points B, C, D, etc, et, les supposant construits, un calcul permet d'établir d'autres relations :

$$\frac{AB}{BK}=\frac{BC}{CK}=\frac{CD}{CK}=\frac{DE}{DK}=\dots,$$

dont sont déduites les inégalités successives CD < CK, DE < EK, etc, qui, en retour, justifient le placement avant le point K des points C, D, E, etc, ce qui en constitue l'existence même. Ce genre analytique est développé de façon algébrique, nous l'avons bien constaté. Mais bientôt cette référence à l'algèbre allait à elle seule caractériser la démarche analytique elle-même.

Magistralement menée, la récurrence analytique se déroule convenablement à l'exception de la position initiale du point C qui n'est pas prouvée, à l'exception aussi, dans ce qui relève de l'étape générale de la récurrence, d'une intervention de la relation (3), *a priori* non générique. De fait, les deux exceptions relèvent d'un même horizon que, par opposiiton avec la démarche analytique, l'on peut qualifier de synthétique. Cet horizon tient à la définition d'une série géométrique chez Grégoire de Saint-Vincent car il faut la distinguer - du moins en un premier temps - de celle d'une progression géométrique. Certes, une progression géométrique est "*la succession d'un nombre quelconque de termes selon la même raison*"[21], de sorte que, satisfaisant (G_d), les longueurs AB, BC, CD, etc, constituent une telle progression. C'est ce que nous rangeons sous la dénomination de **discret continué**. Mais la série géométrique est une notion plus globale où précisément intervient *a priori* le continu : "*J'appelle série géométrique une quantité finie, divisée en succession*

[20] *"Atque ita demonstrabimus proportionem AB ad BC, intra lineam AK sine termino posse actu continuari, ita ut nunquam ad K perueniatur"* (Proposition 75, livre 2, *Opus geometricum*, p. 95).

[21] Définition 2, livre 2, *Opus geometricum*, p. 54, " *Progressio Geometrica est quotcunque terminorum secundum eandem rationem continuatio*".

ininterrompue selon une raison donnée quelconque"[22]. Une série géométrique représente **à la fois** une grandeur telle que AK **et** une division de cette grandeur par les points B, C, D, etc, selon une règle itérative notée ici (G_c) pour résumer, c étant mis pour continu :

$$(G_c) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} = \frac{DK}{EK} = \dots .$$

Une série, selon Grégoire de Saint-Vincent, est un **continu morcelé**.

Du point de vue du calcul, les deux notions ne sont certes pas indépendantes, mais l'une engageant l'analytique et l'autre le synthétique, leurs horizons sont différents. Or, ceux-ci se recouvrent dans la démonstration de la proposition 75, et c'est ce qui en fait tout l'intérêt, malgré la complication que cela paraît procurer. Intérêt majeur, car si la pensée mathématique ultérieure allait bientôt gommer la notion de série comme continu au profit de la notion discrète de progression - un gommage qui substitue le premier vocable pour le couler dans le sens du second - du moins pouvons-nous vérifier qu'**il a fallu combiner le continu et le discret pour aboutir à une théorie de la convergence**.

Il ne s'agit pourtant pas ici de mettre en place une logique. Pour Grégoire de Saint-Vincent, si les deux concepts de "série" et de "progression" sont utiles et ne constituent pas des définitions seulement nominales et dénuées de représentation mathématique effective, c'est qu'un calcul explicite les relie, et c'est ce calcul même qui, sous-jacent à la preuve de la proposition 75 du livre 2, la dirige en fait. Il est facile d'en rendre compte.

Partons de la "série géométrique" AK, laquelle comporte donc

$$(G_c) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} = \frac{DK}{EK} = \dots .$$

La règle *dividendo* des proportions donne aussitôt

$$\frac{AK\text{-}BK}{BK} = \frac{BK\text{-}CK}{CK} = \frac{CK\text{-}DK}{DK} = \frac{DK\text{-}EK}{EK} = \dots,$$

une suite de proportions que nous allons noter (G_i) :

[22] Définition 1, livre 2, *Opus geometricum*, p. 54, "*Geometricam seriem voco quantitatem finitam, diuisam secundum continuationem cuiuscunque rationis datæ*".

$$(G_i) \qquad \frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK} = \frac{CD}{DK} = \frac{DE}{EK} = \dots .$$

Si i est mis ici en indice dans (G), c'est d'une part que la relation itérative (G_i) sert d'intermède[23] dans la proposition 75 et, d'autre part, que le discret et le continu y apparaissent simultanément puisqu'il y a en numérateur les grandeurs AB, BC, CD, etc, et en dénominateur BK, CK, DK, etc, ces dernières grandeurs étant liées au point final K. Mais ce n'est pas tout. Des seules relations (G_i), on peut déduire les relations (G_d) selon un calcul qui apparaît fréquemment au livre 2. De même, à partir de (G_i) seulement, l'on peut aussi bien retrouver (G_c). Démontrons ces deux assertions.

De la première proportion dans (G_i), on déduit par échange des moyens

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{CK}.$$

Avec la règle d'addition bien particulière des proportions[24], l'égalité précédente fournit :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{CK} = \frac{AB+BK}{BC+CK} = \frac{AK}{BK}.$$

On peut tirer deux proportions de ce qui précède (2è et 4è terme, 1er et 4è terme):

$$(8) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK},$$

et

$$(9) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{AK}{BK}.$$

Comme lors du calcul effectué pour la proposition 70, les proportions (8) et (9) établissent une stabilité. Quoique Grégoire ne le fasse pas explicitement - il le suggère - , il est plus clair de poser $r = \frac{AK}{BK}$. Il suffit de se déplacer d'un cran dans (G_i) pour que la forme des relations (8) et (9) devienne respectivement

[23] Grégoire est tout à fait conscient du rôle de cet intermède et il lui consacre une proposition, la proposition 76, à la suite donc de la proposition 75.

[24] Une règle que nous avons déjà vue à l'œuvre lors de la proposition 70. Nous reviendrons sur cette règle car elle est certainement à l'origine d'une des preuves de la formule (G), notre point de mire dans cette étude.

$$\frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} (= r),$$

et
$$\frac{BC}{CD} = \frac{BK}{CK} (= r).$$

Est notable la permanence de la raison r, de sorte que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}.$$

L'itération est enclenchée, et pour les points B, C, D, E, etc, apparaissent deux progressions géométriques ayant même raison. D'une part,

$$(G_c) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} = \frac{DK}{EK} = \ldots$$

et d'autre part,

$$(G_d) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{DE} = \frac{DE}{EF} = \ldots$$

Ces deux progressions ne diffèrent que par leur premier terme; pour la première il s'agit de AK, la totalité, et pour la seconde progression le premier terme est AB.

Si (G_d), (G_c), et (G_i) sont des relations équivalentes[25] du point de vue du calcul, le statut qu'elles confèrent aux deux concepts grégoriens de "série et de "progression" ne permet pas de les confondre car, dans la série, on part d'une totalité, alors que dans une progression on excède cette totalité sans qu'elle intervienne *ab ovo*. Posé brutalement, le point K n'intervient pas dans (G_d). De là à prétendre que ce point peut être construit, il n'y a certes qu'un pas, mais c'est bien ce pas qui inaugure une théorie de la convergence. Pour le faire, il faut donc adopter un parti pris ontologique, qui correspond à la mise en existence d'une grandeur mathématique

[25] Nous avons démontré l'équivalence de (G_c) et (G_i) et le fait que (G_i) implique (G_d). L'implication réciproque nécessite préalablement que soit fixé un lien entre AK et la raison $\frac{AB}{BC}$; ce lien peut être la relation (1) et la proposition 75 montre alors l'équivalence de (G_i) et de (G_d). On peut aussi poser AK comme somme de la série AB + BC + CD +... , auquel cas il y a équivalence de (G_c) et de (G_d). En quel sens peut-on parler de somme infinie? Tel est précisément l'objet du travail minutieusement organisé par Grégoire de Saint-Vincent.

comme AK, au lieu de partir de celle-ci comme d'un acquis.

3) L'ontologie analytique

La double conception initiale de Grégoire de Saint-Vincent - "série" et "progression", ou discret continué et continu morcelé - , énoncée en termes modernes cette fois, revient à ne pas séparer la somme dans une série représentée par ses termes successifs (selon (G_d)) de son reste explicité (selon (G_c)) : avec AB + BC, il y a CK; avec AB + BC + CD, il y a nécessairement DK; etc. Ainsi, la permanence de l'évocation d'un continu global est nette.

Ceci se voit particulièrement à la propositon 70, par exemple sur la figure 2. Il y a aussi bien stabilité "discrète" de la raison $\frac{AD}{EF}$ (c'est-à-dire $\frac{AC}{A_2C_2}$ dans la figure 1) que stabilité "continue" de la raison $\frac{AC}{DC}$ ($\frac{DC}{LC}$), stabilité entérinée par la moyenne géométrique $DC = \sqrt{AC.LC}$.

La force du raisonnement de Grégoire de Saint-Vincent, après avoir nettement localisé les deux concepts par des définitions, est de construire le premier par le second. Son succès réduira de fait le premier au second. Tel est le mouvement indiqué par la proposition 75 où la relation (G_d) est *in fine* envisagée presque seule aux dépens de la relation (G_c). Presque devons-nous ajouter, car il subsiste des rémanences de (G_c) et du continu morcelé au cours de la preuve. Ainsi, K figure *ab ovo* dès l'énoncé de la proposition 75 : AK est une totalité continue qui reste à l'horizon. De la même façon, la position du point C entre les points B et K est acquise sans discussion parce qu'il est présupposé par Grégoire - ou considéré comme évident - que l'on dispose de la proportion

$$(10) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{AK}{BK},$$

ce qui n'est autre que l'égalité des raisons des deux progressions géométriques (G_d) et (G_c). Ainsi instituée, bien que le point B soit quelconque entre A et K, cette proportion prouve que la longueur AK dépasse toujours AB et, derechef, BK dépasse BC. De la même façon, comme AK dépasse BK, AB dépasse BC, et ce résultat non explicité par Grégoire est pourtant bien présent à son esprit (décroissance des termes). Enfin, la proportion (4) avec L = CD, loin d'être particulière, est-elle pensée comme générique (ce qui justifie la récurrence) puisque :

$$(G'_i) \qquad \frac{AB}{AK} = \frac{BC}{BK} = \frac{CD}{CK} = \frac{DE}{DK} = ...,$$

résultat qui provient encore de l'égalité des raisons des progressions (G_d) et (G_c). Si le mouvement de la pensée est dirigé vers (G_d), la forme (G_c) ne cesse d'intervenir, sous les substituts éventuels (G_i) et (G'_i).

Au fond, il vaudrait mieux concevoir que le donné de départ pour la proposition 75 est simultanément constitué des relations (G_d) et (G_i), c'est-à-dire que la proportion (1) est d'emblée itérée. Sous la **seule** régulation de (G_d), le jeu consiste à montrer qu'est effectivement possible la construction du point D entre C et K, du point E entre D et K, etc; même si de temps à autre l'on doit utiliser (G_i) dans le calcul. Grégoire emploie effectivement une tournure propre à une construction (*"poterit ergo ipsi L, ex CK sumi æqualis "*), tournure qu'il renouvelle explicitement (*"poterit ergo ipsi M, ex DK abscindi DE æqualis"*), ayant soin d'introduire des quantités intermédiaires L, M, dûment construites et évaluées par rapport aux autres données, et seulement ensuite placées en situation et rendues égales à CD et DE. Cette construction est itérative et vaut pour les points F, G, etc. Grégoire de Saint-Vincent ne se contente pas de la visualisation géométrique fournie par l'itération à la proposition 70 (lorsque la construction par le dessin est évidemment réalisable) ; il prouve par le calcul cette possibilité à l'infini ; il garantit donc la poursuite de l'itération (*"je dis que la proportion de AB à BC peut être poursuivie en acte..."*).

Cette preuve analytique de la constructibilité des points D, E, F, etc, serait pourtant redondante si l'on prenait comme définition de ces points celle portée par les relations (G_i). En effet, avec cette relation, à chaque étape, par exemple après celle qui fournit le point D situé strictement entre C et K, il est loisible de diviser en E le segment restant DK selon la proportion fixée par la position du point B :

$$\frac{DE}{EK} = \frac{AB}{BK}.$$

Et le point E ne coïncide ni avec D, ni avec K. Mais, de fait, une telle remarque rendrait inutile la démonstration de la proposition 75 tout entière, puisque les points successivement construits selon (G_i) sont évidemment situés avant le point K, sans jamais coïncider avec ce

point. Si Grégoire fournit une preuve et un énoncé, c'est que ceux-ci ont pour rôle de mettre en exergue la loi de progression (G_d), loi à partir de laquelle il n'est plus besoin de faire intervenir le point final K - ou la totalité AK - , du moment qu'est fixée la raison que nous avons notée r, et qui est de fait inférieure à l'unité comme le calcul a pu le prouver. Quoique la donnée initiale prenne la totalité AK en compte - elle est *a priori*-, la stratégie choisie pour la preuve consiste à s'en débarrasser au profit de la seule progression (G_d); donnée potentielle de l'énoncé, c'est elle qui est établie *"en acte"*. Au point que Grégoire de Siant-Vincent estime avoir lié le point K à la seule progression AB, BC, CD, etc.

Pour se déployer, la démarche adoptée doit pourtant partir de la totalité AK. Il y a un lien net entre la conception synthétique du continu chez Grégoire[26] et la preuve analytique qu'il adopte pour cette proposition 75 qui, selon lui, a vertu ontologique pour le point K lui-même. Si Grégoire de Saint-Vincent ne pense pas d'abord un discret qui serait sommé, mais un continu dont seul le morcelage est discret, il n'en prépare pas moins la voie pour le discret continué.

Le genre analytique est certes le genre courant en algèbre. Mais pour un théorème d'existence, le choix d'un tel genre est très rare. En le privilégiant, pour établir en acte la progression infinie AB, BC, CD, DE, etc, donc en indiquant la validité d'une démarche algébrique, Grégoire de Saint-Vincent marque une **défiance vis-à-vis de l'évidence géométrique** portée par la proposition 70. **Confirmée par la définition de la convergence, une rigueur est à l'œuvre.**

4) Le terme d'une progression

La contructibilité établie, reste précisément à éliminer le reste, ou plus exactement à exprimer la totalité du continu AK comme somme des segments AB, BC, CD, DE, etc. Grégoire de Saint-Vincent choisit une démarche logiquement irréprochable ; celle de définir en quel sens on peut affirmer qu'une totalité est décomposée, alors qu'elle n'est jamais atteinte à une étape déterminée de l'itération. Le "terme" est l'horizon du voyage, à proprement parler de l'itération, et l'important fut de se dégager de la forme spécifique du reste. Ce désengagement a été d'autant plus difficile que demeure l'évidence liée à une "série géométrique" puisque les restes d'une "progression géométrique" finie forment à leur tour une progression géométrique : avec (G_d), on lit automatiquement (G_c) et donc (10) qui est l'égalité

[26] Conception manifestée par sa définition d'une "série géométrique".

des raisons. Cette forme spécifique doit pourtant être élidée pour que la théorie de la convergence débute. C'est ce qui a lieu.

Une définition limpide est venue s'inscrire dès les premières pages du livre 2 de l'*Opus geometricum*, après celle de "série géométrique" et de "progression géométrique", mais elle n'a pas encore servi : "*Le terme de la progression est la fin des séries à laquelle s'il nous est permis de poursuivre à l'infini, aucune progression ne peut aboutir, mais à laquelle il est possible d'accéder d'aussi près que de n'importe quel intervalle donné* "[27]. Par l'arbitraire d'un intervalle de longueur quelconque, c'est bien le continu en soi qui sert de référence à cette remarquable définition du "terme"[28] d'une progression, d'une suite, d'un discret. Certes, dès Euclide par exemple, une grandeur fixée quoique quelconque[29] permettait le jeu de la démonstration, mais on n'en était pas encore à attribuer un nom au comportement décrit. C'est ici un intervalle, "*une quantité LM ou autre, petite à volonté*"[30] qui, en mesurant l'obtention d'une limite nulle, mesure *ipso facto* toute autre limite. Naturellement, le continu est un donné géométrique; il ne pose aucun problème d'existence. La **généralité** du propos de Grégoire de Saint-Vincent mérite d'être soulignée alors que ses exemples sont tous pris sur des séries géométriques. Il a su attribuer un nom générique à un comportement : voilà l'originalité.

Mais, chez les Anciens, une grandeur nulle ne présentait aucun sens, en particulier parce qu'elle ne saurait en s'additionnant dépasser toute grandeur donnée. Du coup, l'expression limite nulle ne pourrait que paraître déplacée. Grégoire de Saint-Vincent ne l'utilise pas, comme on le verra nettement à l'occasion de la proposition 78. Cependant, créant la surprise, à la proposition 77 il envisage d'abord ce que nous appelons une limite infinie (les suites en jeu sont croissantes), même si la définition d'une telle limite n'est pas plus individualisée :

---

27 Definitio tertia : "*Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur; sed quouis interuallo dato proprius ad eum accedere poterit*", *Opus geometricum*, p. 55.

28 Par coquetterie linguistique, le mot "terme" possède deux acceptions chez Grégoire de Saint-Vincent, terme général de la progression d'une part et terme final d'autre part. Nous préciserons en ajoutant au besoin entre crochets le mot [final]. On parle encore en français du terme d'un loyer au sens de fin d'une période et de terme comme élément de vocabulaire.

29 Par exemple au livre X des *Eléments*, proposition 1.

30 "*Detur enim quantitas LM aut alia quantumuis parua*", proposition 78, début de la démonstration, *Opus geometricum*, p. 96.

On se donne une proportion[31] *quelconque de plus petite inégalité* [32]*AB à AC. Je dis que si on la continue*[33]*, on doit pouvoir exhiber une grandeur supérieure à n'importe quelle grandeur donnée.*[34]

L

A B C D E K

La démonstration débute ainsi : "Qu'on se donne en effet une grandeur quelconque L. Il est patent que si l'on prend plusieurs fois BC, excès de la deuxième grandeur AC sur la première AB, la somme deviendra plus grande que la grandeur L". Comme on peut s'y attendre, pour montrer qu'au bout d'un certain nombre d'étapes la grandeur AK est dûment supérieure à la grandeur L, c'est l'axiome d'Eudoxe-Archimède qui intervient dans la démonstration dont la suite est facilement imaginable. Cette proposition acquise, le cas de la limite nulle - mais sans ce vocabulaire - est envisagé:

"*Que d'une grandeur AK soit ôtée une partie quelconque AB, et que du reste BK soit ôté BC en suivant cette loi : que comme AB est à BK de même BC soit à CK. Je dis que si l'on poursuit toujours cette ablation, il restera de AK une quantité moindre qu'une quantité donnée. Cela s'applique à tous les cas relevant de la première proposition du livre X.*"[35]

A B C D E K

L M N O P R

---

31 Au XVIIè siècle comme au siècle suivant, l'expression "*proportio*" désignait aussi bien une véritable proportion avec quatre termes que la raison ("*ratio*") à deux termes seulement, composante si l'on veut de la proportion. La "*proportio*" d'une progression géométrique en désigne souvent la raison (alors rapport du premier au second terme).

32 C'est-à-dire que AB est strictement inférieure à AC, et donc en écriture moderne $\frac{AB}{AC} < 1$ (Le nombre 1 n'était pas encore admis en tant que nombre entier au même titre que les autres).

33 "*Dico si hæc continuetur*" : c'est-à-dire si, à partir du rapport $\frac{AB}{AC}$, on construit une proportion continue : $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$, etc, comme celle qui est déduite de la condition posée lors de l'énoncé de la proposition 75, livre 2.

34 Proposition 77, *Opus geometricum*, p. 96.

35 " *A magnitudine AK auferatur quæuis pars AB, et a residuo BK auferatur BC, ea lege vt sicut est AB ad BK, ita sit BC ad CK. Dico si hæc ablatio semper fiat, relinqui ex AK quantitatem data minorem* ". Proposition 78, livre 2, *Opus geometricum*, p. 96.

En inversant la raison de la progression géométrique, c'est-à-dire en construisant une autre progression à partir de la quantité donnée, la démonstration peut reposer sur la seule proposition 77, qui traite de la limite infinie.

C'est après ces considérations, aussi nettes que novatrices, que Grégoire place un scholie épistémologiquement précis, car il n'entend pas se faire piéger au vu du seul vocabulaire. Si la démarche suivie à la proposition 75 était constructive, si elle prouvait une existence, avec les propositions 77 et 78 il insiste sur le fait qu'il n'a accordé aucune existence effective à une quantité moindre qu'une quantité quelconque : "*Lorsqu'il est dit dans la proposition que* ***si l'on poursuit toujours cette ablation il restera de AK une quantité moindre qu'une quantité donnée,*** *le sens de cette proposition n'est pas qu'après que l'ablation ait été continuée jusqu'à son terme à l'infini, il reste de AK une quantité moindre qu'une quantité donnée; ou qu'après toute la série achevée, il reste encore une quantité moindre qu'une quantité donnée. Mais, qu'ayant enlevé des termes de AK selon la raison susdite, à un certain moment des retranchements, la part résiduelle de AK sera plus petite qu'une quantité donnée. Que ceci soit dit pour contenter certains*"[36]. La définition du terme d'une progression a un sens, mais il ne faut pas chercher plus loin et attribuer des qualités cachées à ce sens explicite.

Certes, Grégoire de Saint-Vincent s'inscrit dans la lignée de la proposition 1 du livre X comme il le souligne lui-même en terminant l'énoncé de la proposition 78 : " ***est universalis primæ decimi***". Chez Euclide même, c'est essentiellement une inégalité qui gère l'ablation : on doit seulement enlever plus de la moitié de ce qui reste. Il est vrai qu'Euclide termine son énoncé de la proposition I au livre X en évoquant le cas de l'égalité : "*La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés*"[37]. Chez Grégoire de Saint-Vincent, c'est par contre une proportion, donc une égalité, qui gère l'itération, le cas frontière d'Euclide étant en quelque sorte préféré : on doit toujours enlever la même proportion[38]. Si la liberté porte sur la

---

[36] "*Quod in gratiam quorundam dictum sit*" (*Opus geometricum*, p. 97). Phrase que, selon la suggestion de J.P. Le Goff, l'on pourrait encore traduire par un : "*A bon entendeur, salut*".

[37] *Euclidis opera omnia*, ed. I.L. Heiberg et H. Menge, Lipsiae, t. III, 1886.

[38] C'est ce qu'indique la forme (G_i) ou encore la forme (G_c), de sorte que AB, BC, CD, etc, aussi bien que AK, BK, CK, etc, forment des progressions géométriques.

raison de celle-ci[39], qui n'est pas nécessairement $\frac{1}{2}$, Grégoire introduit une rigidité, comme un privilège acquis par la progression géométrique aux dépens des inégalités et de leur maniement. Cette rigidité n'est que provisoire ; elle ne figure que dans les exemples afin de mieux asseoir la signification à donner au mot terme, une limite qui, par contre, a été définie en toute généralité.

Démonstrativement parlant, la filiation de Grégoire de Saint-Vincent à Euclide est très précise car le déroulement de la proposition 78 suit exactement celle adoptée par l'Alexandrin à la proposition I du livre X. Du moins, si l'on remplace l'opération d'addition ou de report chez Euclide par la multiplication par une raison fixe, c'est-à-dire si l'on adopte derechef les proportions et leur manipulation. La façon de procéder de Grégoire de Saint-Vincent est donc mieux adaptée que celle d'Euclide, puisque ce dernier doit finalement comparer l'entier n avec 2^n. Une amélioration qui a exigé une préparation. Au cours de sa preuve, Euclide fait jouer l'axiome (additif) d'Eudoxe-Archimède qui est énoncé dans une définition[40] du livre 5 des *Eléments* : deux grandeurs a et b étant données, a<b, il existe un entier n tel que na>b. Grégoire de Saint-Vincent adopte un succédané de cet axiome, ou plutôt il en fait intervenir un raffinement multiplicatif : nous dirions aujourd'hui qu'il utilise le fait que, lorsque $\beta>1$, β^n tend vers l'infini avec n. C'est ce qu'il a exprimé précisément, en termes de progression géométrique, à la proposition 77 que nous avons décrite.

---

[39] La stabilité de la proportion notée

$$\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK} = \frac{CD}{DK} = ..., \text{ avec } 0 < x < 1,$$

qui n'est autre que (G_c), fournit $1\text{-}x = \frac{AB}{AK} = \frac{BC}{BK} = \frac{CD}{CK} = ...$, c'est-à-dire ($G_i$) et dont en particulier le n-ème terme vaut $(1\text{-}x)x^{n-1}$ AK et tend vers 0 à l'infini lorsque $x = \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{BC} = ...$, c'est-à-dire lorsque l'on dispose d'une progression géométrique, AB, BC, CD, etc, de raison x (c'est la forme (G_d)). Le quotient $\frac{1-x}{x}$ prend toutes les valeurs possibles entre 0 et l'infini lorsque x reste confiné dans l'intervalle ouvert $0<x<1$. Ce qui correspond à la liberté complète du choix du point B entre A et K à la proposition 75. Est donc quelconque la raison de la progression AB, BC, CD, etc, (mais inférieure à 1, bien entendu).

[40] "*Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs étant multipliées peuvent se surpasser mutuellement*" (trad. F. Peyrard, op. cité).

5) Le continu recomposé

Afin que tout soit désormais prêt pour que l'on puisse travailler avec le "terme" d'une progression géométrique comme conclusion, Grégoire présente les résultats sous forme de plusieurs équivalences, toutes faisant intervenir la totalité elle-même. Privilège reste au continu. Cependant, il ne retient en conclusion que la seule progression géométrique sous la forme que nous avons qualifiée de discrète : un tournant est effectivement pris.

"On se donne une grandeur quelconque AK[41]*. Si on a :*
AB à BK comme BC à CK[42] *;*
AB à AK comme BC à BK[43] *;*
ou AK, BK et CK sont en proportion continue[44]*;*
AB à BC comme BK à CK[45] *;*
AB à BC comme AK à BK[46] *.*

Je dis que la grandeur AK est égale à la progression tout entière des grandeurs en proportion continue, de raison AB à BC continuée à l'infini ou, ce qui revient au même, que le terme de la série dont la raison AB à BC est continuée à l'infini est K.[47]

A B C D E F I K

Les formes équivalentes que nous avons notées (G_c) (G_d), ou (G'_i) sont remplacées par la seule forme (G_d). Telle est la conclusion, véritable aboutissement de l'expérience géométrique de la proposition 70.

---

[41] Pour décrire cet énoncé en termes modernes, posons $AB = a$, $\frac{BC}{AB} = x$ et $AK = y$, avec la relation entre x, y et a donnée par la formule que nous avons dénotée (G) : $y = \frac{a}{1-x}$.

[42] $\frac{a}{y-a} = \frac{xa}{y - a(1+x)}$. C'est la forme que nous avons noté (G_i).

[43] $\frac{a}{y} = \frac{xa}{y-a}$. C'est la forme que nous avons noté (G'_i).

[44] $\frac{y}{y-a} = \frac{y-a}{y-a(1+x)}$. C'est la forme que nous avons noté (G_c).

[45] $\frac{1}{x} = \frac{y-a}{y-a(1+x)}$. C'est la forme que nous avons noté (G_i).

[46] $\frac{1}{x} = \frac{y}{y-a}$. C'est la forme déduite de la raison commune à (G_c) et (G_d).

[47] Proposition 79, livre 2, *Opus geometricum*, p. 97.

Pour organiser la preuve de cette proposition 79, grâce aux résultats acquis dans la proposition 75, Grégoire de Saint-Vincent part d'un continu donné (AK) - qui va se trouver être le terme (K) - continu sur lequel opère une décomposition itérative, avec à la clef deux progressions géométriques : (G_c) et (G_d). Deux et non pas une seule car les restes jouent leur rôle. Le caractère constructif de la proposition 75 - le théorème d'existence - assure que la somme d'une progression géométrique a un terme, c'est-à-dire que la raison $\frac{AB}{BC}$ itérée conduit à un terme, disons K'. Le but de la proposition 79 est d'établir que ce terme K' coïncide avec K. Le raisonnement administré est donc par l'absurde, très proche de ses analogues antiques utilisés pour la méthode d'exhaustion[48]. Indéniablement, Grégoire de Saint-Vincent fait fond sur la rigueur ancienne, à laquelle il a su adapter ses définitions et ses preuves.

"Démonstration : Puisque AB est à BK comme BC est à CK, la raison AB à BC pourra toujours être continuée dans les limites de la grandeur AK en sorte qu'elle ne parvienne jamais à K (prop. 75 de ce livre), c'est-à-dire que AK sera supérieure à une série finie quelconque de termes[49]*. Donc AK n'est pas inférieure à la série tout entière de raison AB à BC. Puis, parce que AB est à BK comme BC à CK, si la raison AB à BC est toujours continuée, on aura (prop. 76 de ce livre) : ce que AB à BK, c'est-à-dire ce que BC est à CK, CD l'est à DK et DE à EK et ainsi de suite à l'infini*[50]*. En conséquence, si l'on continue toujours la raison AB à BC, ne restera finalement de AK qu'une grandeur inférieure à une grandeur quelconque donnée*[51] *(prop. 78 de ce livre). C'est pourquoi AK ne saurait être supérieure à la série de raison AB à BC ; car, si elle était supérieure, elle devrait l'être par un certain excès. Soit IK cet excès. Dans ce cas*[52]*, AI sera égale à une série de raison AB à CD ; donc la raison AB à BC continuée à volonté ne dépassera jamais I ; donc aussi restera de AK une grandeur toujours supérieure à IK ; et, par conséquent, pas moindre qu'une grandeur donnée quelconque. Contre ce qui a déjà*

---

[48] Voir J. Dhombres, Le raisonnement par l'absurde dans la pratique des mathématiciens, à paraître.

[49] Terme est pris ici dans son sens de terme général. On peut aussi bien avoir $\frac{AB}{BK}$ inférieur ou supérieur à l'unité. En revanche, le rapport $\frac{AB}{BC}$ est supérieur à l'unité, de sorte que la raison (au sens moderne) de la progression géométrique AB, BC, CD, etc, soit inférieure à l'unité.

[50] C'est la forme (G_i).

[51] *"ex AK magnitudo quavis datâ minor".*

[52] *"igitur AI seriei rationis AB ad CD æqualis erit".*

été démontré ! Donc AK ne sera pas supérieure à la série de raison AB à BC. En conséquence, puisqu'on a montré auparavant qu'elle n'est pas non plus inférieure, elle doit nécessairement être égale. C.Q.F.D[53].

Si continu et discret sont imbriqués dans une preuve[54] qui, malgré la rigueur cherchée, donne vaguement l'impression d'un cercle vicieux[55], par ses conclusions nettes la proposition signale un tournant de l'ouvrage, **le passage à l'analytique des séries**. Ce tournant ne fait pourtant qu'inaugurer une parenthèse dans l'*Opus geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent, mais aussi court qu'il ait été il marqua les successeurs du mathématicien jésuite.

6) Le discret continué

Car désormais, la lecture de la proposition 79 peut être sélective, et ne mettre en jeu que la série géométrique **infinie** AB + BC + CD + DE + ... Une question posée dès la proposition suivante indique l'objectif: "*inuenire magnitudinem, quæ omnibus terminis totius seriei datæ in infinitum continuatæ, sit æqualis*"[56]. Tant est forte la pratique

53 Grégoire poursuit: *Les démonstrations des hypothèses restantes se ramènent à la première. Car si AB est à AK comme BC à BK, on aura dividendo : AB est à BK comme BC est à CK. Donc, d'après* la *première démonstration, le terme de la raison AB à BC toujours continuée est en K.*
2° Si AK, BK, et CK sont en proportion continue, on aura dividendo : AB est à BK comme BC est à CK. Donc derechef, la proposition est évidente de par la première démonstration.
Enfin, si l'on a : AB est à BC comme BK est à CK (ou AK à BK), on aura en permutant, soit AB est à BK comme BC est à CK, soit AB est à AK comme BC est à CK. D'où derechef, la proposition est pleinement justifiée à l'aide de la première démonstration".

54 Par contraste, Torricelli ne s'embarrasse nullement d'un appareil analytique aussi compliqué et ne prétend nullement à une rigueur à l'ancienne : dès l'évidence géométrique de la proposition 70 examinée, il obtient directement la "somme" d'une série géométrique puisque celle-ci se "voit" grâce au segment AB (figure 1) et il lui suffit de faire jouer la similitude: "*Suppositis infinitis magnitudinibus in continua proportione Geometrica maioris inaequalitatis, erit prima magnitudo media proportionalis inter primam differentiam et inter aggregatum omnium*", lemme XXVII (Voir, *Opere di Evangelista Torricelli*, G. Loria e G. Vassura (ed.), vol. 1, Faenza, 1919, page 149). De fait, Torricelli explique ce que Grégoire de Saint-Vincent donne à la proposition 80 en 3°, comme nous allons le voir. En outre, Torricelli indique en un scholie que Cavalieri avait préalablement obtenu l'expression de la somme d'une progression géométrique.

55 Le cercle vicieux tient à l'existence même d'un point final pour la progression AB, BC, CD, ertc. C'est l'ontologie de la proposition 75 qui gêne, car il a fallu poser ce que l'on voulait construire. Il s'en faut de peu que le raisonnement de Grégoire de Saint-Vincent soit irréprochable.

56 *Opus geometricum*, Proposition 80, op. cité, p. 97.

géométrique, ce sont trois constructions qui sont aussitôt proposées, là où nous verrions plutôt des formules, mais les preuves sont toutes issues de la proposition 79 que nous avons fournie. S'agit-il d'ailleurs de preuves puisque l'enjeu est une lecture orientée de la proposition 79. Grégoire de Saint-Vincent a préparé la voie : le point K a reçu un nom, son existence est acquise et il ne reste qu'à le construire pratiquement, ce qui relève de la géométrie ordinaire.

1° Si l'on pose un point M entre A et B, de sorte que AM = AB - BC (BM = BC), K s'obtient par le jeu d'une quatrième proportionnelle[57]:

$$\frac{AM}{BC} = \frac{BC}{CK} .$$

A________M________B________C________________K

2° K s'obtient par une autre quatrième proportionnelle

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BC}{BK} .$$

3° K s'obtient par une troisième proportionnelle

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AK} .$$

Confronté à tout cet apparat démonstratif et explicatif, on comprend qu'un historien se soit alors laissé entraîné à écrire[58] que Grégoire de Saint-Vincent était le premier à avoir véritablement traité d'une série infinie, abolissant les remarques pertinentes d'Oresme et d'autres au XIVè siècle à propos de séries telles que $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{2^n}$, voire oubliant la façon dont dans la *Quadrature de la Parabole* Archimède travaillait sur l'égalité :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3}\ \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3} .$$

57 La formule est facile à vérifier en notations modernes avec AB = a, BC = ax, CD = ax^2, etc, AM = a (1-x) et AK = $\frac{a}{1-x}$. Il en est ainsi des deux suivantes.

58 C.R. Wallner, "Uber die Enstehung des Grenzbegriffes", *Bibliotheca Mathematica*, (3), IV, 1903, p. 246-259.

Avec $\dfrac{AB}{1 - \dfrac{BC}{AB}}$, c'est la formulation 3° qui correspond le mieux à la forme $\dfrac{a}{1-x}$ de la formule (G). Mais on constate qu'il ne s'agit pas de la forme (G) explicite, puisque la seule algèbre en jeu est celle des proportions, et non l'algèbre polynomiale qui permet d'écrire 1-x. De sorte que Grégoire doit recourir à la construction du point M. A tout le moins, pour bien renforcer le discret qui vient d'être sommé, Grégoire de Saint-Vincent réécrit la proposition 79 : c'est la proposition 82 qui indique qu'à partir de la seule progression géométrique AB, BC, CD, etc, dont la somme est AK, alors $\dfrac{AB}{BK} = \dfrac{BC}{CK}$; $\dfrac{AB}{AK} = \dfrac{BC}{BK}$, etc. Ceci n'apporte guère par rapport à la proposition 79, si ce n'est une formulation libératoire. **Le discret devient la référence en lieu et place du continu.**

7) Florilège et dépassement de la formule (G) : l'unité des mathématiques

A partir de l'obtention de la proposition 79 et de la réorientation fournie par la proposition 82, Grégoire de Saint-Vincent se lance dans une débauche de résultats, qui tous exploitent l'une des formes de la proposition : faisant jouer l'algèbre des proportions, ce sont des variations de calcul pour dire le contenu de la formule (1)... sans que jamais pourtant on ne l'écrive (AK = ...). Ainsi, la proposition 84 exprime que le rapport des sommes de deux progressions géométriques de même raison est celui de leur premier terme[59]; la suivante évoque la somme d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{3}$ (Fidèle à sa terminologie, Grégoire parle de raison triple), puis de raison $\frac{1}{4}$, etc. "*Mais assez dit à ce sujet. N'importe qui pourra, en effet, à partir de la proposition 80 de ce livre bien comprise, représenter la série tout entière d'une proportion rationnelle, c'est-à-dire de nombre à nombre, et en conséquence, le rapport de cette série à son premier terme*". Le numérique n'est pas l'essentiel.

Car, et ceci peut surprendre, Grégoire entend revenir au continu lui-même. Si désormais il use de la forme (G), disons de la

[59] Autrement dit, $\frac{AM}{AB}$ ne dépend que de la raison de la progression géométrique.

proposition 82 ou d'autres formes plus générales du discret, c'est afin de dire des propriétés du continu, et non pour explorer les séries elles-mêmes. La parenthèse de l'analytique des séries est en quelque sorte terminée, ce qui entraîne un nouveau renversement de perspective : **le discret est devenu un outil au service du continu.** Envisagée en premier, une question évoque effectivement la mise en place de cet outil : une raison étant donnée, ainsi qu'un continu, comment trouver des points en progression géométrique selon cette raison qui, comme somme des intervalles découpés, pourvoient le continu de départ[60] ? Sur cette nouvelle lancée apparaît une proposition particulièrement intéressante, la proposition 116. Elle énonce[61]: "*Soient deux quantités AB et CD ; soit AB divisée en E et G de telle façon que AE ne soit pas inférieure à la moitié de AB, et EG pas inférieure à la moitié de EB; qu'on divise de la même manière CD en F et H, et soient AE, EG et CF, FH proportionnelles et que cela puisse se faire indéfiniment. Je dis que AB tout entière est à CD tout entière comme AE est à CF.*"

A E G I B

C F H O D

Grâce à la seule donnée d'une raison, d'une propriété de la discrétisation de deux continus, la proposition 116 déduit un résultat les concernant. Cet énoncé général, notons-le bien, contient l'itération : avec le "*et hoc semper fieri possit*" inséré dans les hypothèses mêmes de la proposition 116, Grégoire de Saint-Vincent suppose explicitement qu'il est possible de poursuivre indéfiniment l'itération sous les conditions indiquées. Ce qui signifie que la proportion $\dfrac{AE}{EG} = \dfrac{CF}{FH}$ dont on dispose par hypothèse se poursuit de la même façon pour les points ultérieurs de division E, G, I, de la première grandeur ou F, H, O, de la seconde, sous la forme $\dfrac{EG}{GI} = \dfrac{FH}{HO}$, et que, de plus, est respectée la règle des inégalités (ôter plus de la moitié).

[60] En termes modernes, $\frac{a}{1-x}$ étant donné, ainsi que x, trouver a, et à sa suite ax, ax^2, ..., etc (*Opus geometricum*, Prop. 90, p. 103-104).

[61] "*Sint duæ quantitates AB,CD, sitque AB diuisa in E et G, ita vt AE, sit non minor dimidio AB, et EG non minor dimidio EB; eodem modo diuisa sit CD in F et H, sintque AE, EG; CF, FH proportionales; et hoc semper fieri possit. Dico totam AB essse ad totam CD, vt est AE ad CF*"", *Opus geometricum*, chap 2, page 119 et suivantes.

Chaque fois qu'il voudra utiliser cette proposition, il lui faudra donc démontrer effectivement la possibilité d'une dichotomie indéfinie respectant toujours les proportions requises. Une méthode est donc mise en instance, de sorte qu'est évacuée toute considération *a priori* sur la dichotomie issue des mathématiques grecques. Quoique portant sur le continu, et parce que joue la discrétisation, Grégoire fait fi désormais des objections ontologiques au profit d'une vérification d'ordre mathématique : la stabilité algorithmique du processus de dichotomie. Ceci est corroboré par le fait majeur : la progression géométrique ne joue plus aucun rôle dans la proposition 116, car la décomposition du continu qui intervient pour AB comme pour CD est beaucoup plus générale. Mais, avant d'examiner le déroulement de la preuve de cette proposition 116, et en quelque sorte pour mettre en appétit, il n'est pas indifférent d'en montrer quelques-unes des conséquences utiles. Au livre 6 consacré à l'hyperbole, Grégoire y a recours en effet pour établir un résultat fondamental sur le comportement des aires hyperboliques.

Il démontre que si l'on dispose des points selon une progression géométrique sur l'une des asymptotes d'une hyperbole, les aires découpées sous la courbe par des parallèles à l'autre asymptote sont égales. C'est la proposition 130 du livre 6 : les aires des trapèzes curvilignes $A_1 A_2 B_2 B_1$; $A_2 A_3 B_3 B_2$, etc, sont égales lorsque les longueurs AA_1, AA_2, AA_3, AA_4, etc, sont en progression géométrique (figure 5). Ce résultat indique que les aires hyperboliques transforment une progression géométrique en une progression arithmétique : l'une des progressions porte sur des longueurs, et l'autre sur des aires, mais qu'importe, **c'est un comportement logarithmique qui est en cause**[62]. Ce qui installe dans le giron de la géométrie savante, donc noble, le logarithme né dans la deuxième décennie du XVIIè siècle par les efforts de Neper, mais confiné dans la pratique des calculateurs et des algébristes. Ainsi, le discret continué de Grégoire de Saint-Vincent, poursuivi comme outil pour le continu spatial, se révèle intégrateur de méthodes algébriques en géométrie : c'est bien un procédé qui renforce l'unité de la mathématique.

[62] Ce n'est pas Grégoire de Saint-Vincent qui le déclare sous cette forme, mais l'un de ses disciples, le Père Alphonse de Sarasa dans un ouvrage paru deux ans après l'*Opus geometricum* : *Solutio Problematis a R.P. Marino Mersenno minimo propositi...*, I. et I. Meursios, Anvers, 1649. Voir J. Dhombres, "Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction", *Arch. Hist. Exact Sc.*, vol. 36, n° 2, 1986, pp. 91-181.

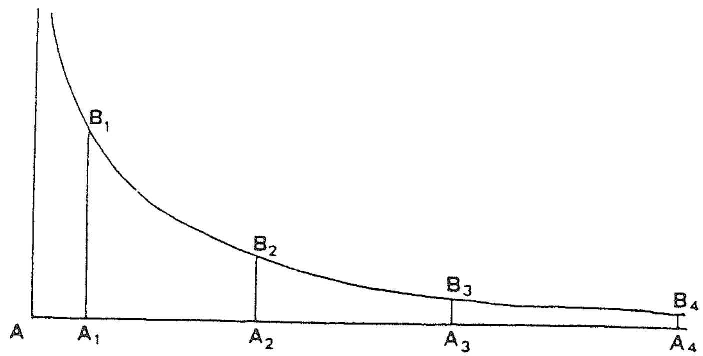


Figure 5

Il serait intéressant de montrer que cette "quadrature" de l'hyperbole dépasse les quadratures anciennes. En ce sens qu'aucune aire rectangle n'est assignée par égalité à l'aire d'un trapèze hyperbolique, mais qu'est obtenue une égalité à l'infini entre des aires inconnues (quoique calculables, mais seulement par approximation grâce aux logarithmes pour lesquels des tables sont précisément dressées[63]). Sans définition qui en fournirait l'existence *a priori*, sans ontologie, la démarche de Grégoire de Saint-Vincent fait entrer le logarithme dans le calcul intégral : **des quadratures, il est passé à l'intégration**. Le fait objectif est son travail sur l'exponentielle, fonction qui restait non nommée à son époque[64]: il la définit à partir des aires, comme primitive si l'on tient à rattacher sa façon à quelque chose qui viendra plus tard, et il en donne les règles de calcul.

Mais préciser de tels jugements exigerait un développement qui sortirait des limites assignées à la présente étude ; il faut sagement revenir aux progressions sommées à l'infini, en reprenant les explications de la proposition 116 du livre 2 dont les services sont éminents dans tout l'ouvrage du père jésuite puisqu'elle règle la méthode d'exhaustion.

[63] C'est ce qu'explique en 1649 A. de Sarasa, élève de Grégoire de Saint-Vincent, lequel vraisemblablement tient la plume si l'on en juge par les manuscrits préparatoires à l'ouvrage.

[64] A propos de ces difficultés, il suffit peut-être de rappeler le problème de de Beaune auquel Descartes est confronté. Voir C. Scriba, "Uber Auftauchen und Behandlung von Differentialgleichung in 17. Jahrhundert", *Humanismus und Technik*, 15, n° 3, 1972, p. 1-40 ; J. Vuillemin, *Mathématique et métaphysique chez Descartes*, Paris, Vrin, 1960, chap. 1.

8) Une preuve à l'ancienne : le discret décrypte le continu

Examinons la démonstration par l'absurde que propose Grégoire de Saint-Vincent au livre 2, en la commentant par des références euclidiennes. " *Si , en effet, la proportion de AB à CD n'est pas égale à celle de AE à CF, elle sera plus grande ou plus petite. Admettons d'abord qu'elle soit plus petite. Posons donc que AB est à CD dans un rapport plus petit que celui de AE à CF.* [La quantité] *AB aura à une quantité plus petite que CD (par exemple CK* [65]*) le même rapport que AE à CF (d'après la proposition 8 du livre V* [66]*). Et puisque ne sera indéfiniment soustrait des quantités AB et CD et de leurs restes pas moins de leur moitié, si l'on continue cette soustraction pour quelques termes, disons par exemple pour trois* [67]*, CF, FH et HO, il restera finalement OD inférieure à KD (d'après la première proposition*[68] *du livre X). C'est pourquoi CO sera supérieure à CK. Si alors on enlève de AB autant de parties, conformément à la proportion AE, EG, et GI, on aura par hypothèse que AE est à EG comme CF est à FH, et EG à GI comme FH à HO.*

65 Ici, en nommant - explicitement - la quantité CK (définie par la proportion $\frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CK}$), Grégoire de Saint-Vincent fait - implicitement - appel à la quatrième proportionnelle. La nature des quantités n'étant pas autrement spécifiée, c'est donc une quatrième proportionnelle abstraite qui est en jeu.

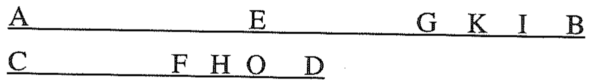
66 Ici, et dans toute cette démonstration, Grégoire de Saint-Vincent fait référence aux *Eléments* d'Euclide. L'énoncé de la proposition du livre V des *Eléments* est le suivant : "*Deux grandeurs étant inégales, la plus grande a avec une même grandeur une plus grande raison que la plus petite, et une même grandeur a avec la plus petite une plus grande raison qu'avec la plus grande* ". La référence sert donc à placer le point K avant le point D si l'on adopte l'image des segments ou à fixer l'inégalité CD > CK si l'on prend le langage "universel" des quantités. On remarquera que Grégoire de Saint-Vincent n'adopte toutefois pas les facilités géométriques du langage des segments. Il utilise le terme de quantité ("*Sint duae quantitates*") au lieu du terme attendu de grandeur ("*duae magnitudines* ").

67 Comme chez Euclide, il y a toujours une difficulté de notation. Faute d'une écriture indexée des suites, il faut choisir une lettre pour fixer les choses. Nous avons déjà rencontré cette façon à propos de la récurrence dans la proposition 75.

68 Cette proposition 1 du livre X a déjà été énoncée plus haut, au début du présent article. C'est pour pouvoir utiliser une telle référence que Grégoire de Saint-Vincent a besoin d'imposer des ablations qui, à chaque étape, dépassent la moitié de la quantité encore disponible. Au fond, et en termes modernes, il aurait seulement besoin d'une convergence vers 0.

C'est pourquoi, en permutant [69]*, ce que AE est à CF, EG le sera à FH et ce que EG est à FH, GI le sera à HO. Donc ce qu'est AE (un des antécédents) à CF (un des conséquents), tous les antécédents*[70] *(c'est-à-dire la ligne*[71] *AI) le seront à tous les conséquents (c'est-à-dire la ligne CO) (proposition 12 du livre V* [72]*). Mais ce que AE est à CF, par construction, AB le sera à CK. Donc AI est à CO comme AB à CK, ce qui est absurde, comme cela ressort clairement des Eléments* [73]*. Donc la proportion de AB à CD n'est pas inférieure à celle de AE à CF.*

Soit maintenant, si cela est possible[74]*, que la proportion de AB à CD soit supérieure à celle de AE à CF.*



69 Au départ, les divisions se présentent séparément pour la grandeur AB ou pour la grandeur CD. La permutation les mêle avantageusement : $\frac{AE}{EG} = \frac{CF}{FH}$ implique $\frac{AE}{CF} = \frac{EG}{FH}$ $(= \frac{GI}{HO}$, etc) selon la proposition 16 du livre V des *Eléments*. Techniquement, la simple opération de permutation est le tournant de la preuve de la proposition 116.

70 Cette expression ("*tous les antécédents*") est mise pour indiquer la somme (finie) des antécédents.

71 Jusqu'ici, Grégoire de Saint-Vincent gardait le vocabulaire universel des quantités. Il laisse passer le vocabulaire de "ligne".

72 Grégoire de Saint-Vincent a mis par erreur l'indication de la proposition 8 des *Eléments*. Il s'agit de la proposition 12.

73 La proportion $\frac{AI}{CO} = \frac{AB}{CK}$ est impossible lorsque AI < AB et CO > CK. Cela résulte de la proposition 14 du livre V des *Eléments* : "*Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième; et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième*".

74 "*Sit iam, si fieri potest.* "

Dans ces conditions[75], une certaine ligne inférieure AK aura vis-à-vis de CD le même rapport que AE à CF (proposition 8 du livre V). Et, puisque l'on ne retranche indéfiniment pas moins de la moitié, après la soustraction d'un certain nombre de parties, par exemple trois, AE, EG et GI, il restera finalement IB inférieure à KB. C'est pourquoi AI sera supérieure à AK. Si maintenant on en enlève autant de la quantité CD, par exemple les parties CF, autant de la autant de la quantité CD, par exemple les parties CF, FH et HO, on aura par hypothèse et par permutation que AE est à CF comme EG est à FH, de même comme GI est à HO; donc ce que AE (un des antécédents) est à CF (un des conséquents), tous les antécédents (c'est-à-dire la ligne AI) le seront à tous les conséquents (c'est-à-dire la ligne CO) (proposition 12 du livre V). Mais par construction, ce que AE est à CF, AK le sera à CD; donc AI est à CO comme AK à CD. Ce qui est absurde comme cela ressort clairement des Eléments[76]. Donc le rapport de AB à CD n'est pas supérieur à celui de AE à CF. La vérité de la proposition est donc évidente."

Indéniablement, et comme nous pouvions nous y attendre, cette démonstration par double raisonnement par l'absurde et double jeu sur les proportions (inégalités et égalités) se rattache à la façon de procéder des Anciens, à la méthode d'exhaustion logique. Le balancement de la phrase est d'une part identique à celui qui figure pour l'emploi de la méthode d'exhaustion aussi bien chez Euclide que chez Archimède[77]. D'autre part, il y a le même emprunt à la quatrième proportionnelle, comme nous l'avons fait remarquer au cours de la démonstration et les références sont explicites au livre V des *Eléments*. Enfin, l'égalité s'obtient au terme d'une contradiction pour les deux inégalités contraires, contradiction qui elle-même provient

75 On pourrait s'attendre à une démonstration très courte de cette deuxième branche de l'alternative. En effet, pour retrouver la situation précédente, il suffit d'échanger AB et CD qui jouent un rôle symétrique, et donc pouvoir conclure. On aurait $\frac{AB}{CD} \geq \frac{AE}{CF}$, mais par le même effet $\frac{CD}{AB} \geq \frac{CF}{AE}$ et donc nécessairement l'égalité cherchée $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CF}$. Grégoire de Saint-Vincent ne procède pas ainsi, alors qu'Euclide à la proposition 2 du livre XII avait donné l'exemple d'une simplification de la méthode d'exhaustion grâce au jeu sur la symétrie des figures. L'attitude de Grégoire de Saint-Vincent témoigne d'une préoccupation analytique au nom de laquelle tous les possibles doivent être systématiquement inventoriés.

76 La proportion $\frac{AI}{CO} = \frac{AK}{CD}$ est impossible lorsque AI > AK et CO < CD.

77 " *Si enim non est proportio AB ad CD æqualis proportioni AE ad CF, erit vel maior vel minor: sit primo minor...Sit iam, si fieri potest, proportio AB ad CD maior proportione AE ad CF: itaque aliqua minor quam AK...quod esse absurdum patet ex elementis...*"

d'inégalités incompatibles.

L'originalité de Grégoire de Saint-Vincent ne réside donc pas dans la façon de démontrer, mais dans la place réservée à la proposition 116. Elle survient en dehors d'un contexte géométrique (le livre 2 est algébrique), comme pour localiser ou mieux baliser le recours au raisonnement par l'absurde. Et, en deuxième lieu, c'est la généralité du résultat, indépendamment de la nature des grandeurs en jeu, qui compte.

Une écriture en termes modernes[78] nous fait mieux saisir cette généralité. Soient x et y deux grandeurs, qui s'identifient pour nous à des nombres réels positifs et qui représentent x = AB et y = CD. Soit α un nombre réel avec $0<\alpha$. On suppose $\alpha = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = \dots$ pour des grandeurs $x_1 = AE$, $x_2 = EG$, $x_3 = GK$; $y_1 = CF$, $y_2 = FH$, $y_3 = HO$, grandeurs assujetties aux inégalités[79]:

$$x > x_1 > \frac{x}{2} \text{ et } y > y_1 > \frac{y}{2}; \ (x-x_1) > x_2 > \frac{(x-x_1)}{2} \text{ et } (y-y_1) > y_2 > \frac{(y-y_1)}{2};$$

et plus généralement est imposé:

$$x-(x_1+\dots+x_n) > x_{n+1} > \frac{x-(x_1+\dots+x_n)}{2} \text{ et}$$

$$y-(y_1+\dots+y_n) > y_{n+1} > \frac{y-(y_1+\dots+y_n)}{2}, \text{ etc.}$$

78 Dans cette reconstruction, nous avons choisi de manipuler des inégalités strictes. Le texte de Grégoire de Saint-Vincent est imprécis à cet égard mais la tradition euclidienne, lorsqu'il s'agit d'inégalités, est de traiter séparément le cas des égalités. Grégoire de Saint-Vincent n'utilise guère la façon euclidienne de signaler une inégalité par l'expression "*retranchée du reste*".

79 Ne figurent pas explicitement chez Grégoire de Saint-Vincent, même sous la forme rhétorique qui est la seule adoptée dans le texte, certaines des inégalités à respecter à chaque étape pour les termes aussi bien en x qu'en y : $(x-x_1) > x_2$ et $(y-y_1) > y_2$ ou plus généralement, $x-(x_1+\dots+x_n) > x_{n+1}$; $y-(y_1+\dots+y_n) > y_{n+1}$. Sans doute tant elle paraissent évidentes grâce à la représentation géométrique par des segments : $AB > AE > \frac{AB}{2}$; $CD > CF > \frac{CD}{2}$; $EB > EG > \frac{EB}{2}$; $FD > FH > \frac{FD}{2}$; etc. Nous ne pouvons donc pas dire que la proposition 116 du livre 2 soit entièrement dégagée d'une vision géométrique quant à la démonstration, bien que le géométrique y joue un rôle particulièrement minime.

Voilà tout le contenu analytique des hypothèses[80] faites à la proposition 116, et ce pour tout entier $n \geq 1$. La conclusion de la proposition est:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n}{\sum_{n=1}^{n=\infty} y_n} = \frac{x_1}{y_1} = \alpha .$$

Le résultat est numérique, en tout cas mis sous la forme d'une proportion, et non géométrique.

Le lecteur moderne, disposant de la théorie des limites de suites réelles, peut être déçu par un résultat qui lui paraît maladroitement encombré de conditions inutiles. Il constate évidemment que x_n, comme la suite y_n, converge vers 0 et que la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n$ converge vers x, de même que $\sum_{n=1}^{n=\infty} y_n$ converge vers y. La convergence du rapport s'en déduit aisément. Grégoire n'en est pas encore à isoler la convergence de $\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n$ comme une propriété à partir de laquelle on peut construire d'autres propriétés : cette convergence doit pour lui être une conséquence d'hypothèses qu'il importe de fixer, et nous assistons bien à des balbutiements : le spectacle n'en est que plus riche.

Loin de disposer de la théorie des limites, Grégoire de Saint-Vincent contribue à son établissement. Le résultat décrit par une écriture analytique contient en effet deux choses. D'une part, portant sur des grandeurs en division de la grandeur initiale, il y a une totalisation $x = \sum_{n=1}^{n=\infty} x_n$ ("*totam AB*"). Totalisation à partir d'une décomposition générale de la grandeur continue initiale x (= AB) : le fait majeur est qu'il n'y a aucune règle particulière de formation des x_n les uns à partir des autres de sorte qu'est dépassé le stade de la

80 A nos yeux, ces hypothèses restrictives sous forme d'inégalités servent seulement à assurer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n$ vers x et de la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} y_n$ vers y. Nous ne pouvons cependant pas généraliser à ce point la pensée de Grégoire de Saint-Vincent.

progression géométrique. **On est justifié de parler de série.** La restriction sur la décomposition de x en des éléments qui servent à le décrire par recomposition porte seulement sur des inégalités à respecter, inégalités destinées à assurer la convergence. Celles-ci expliquent à elles-seules que le texte comporte explicitement: "*et hoc semper fieri possit*", car on peut ne pas pouvoir réaliser les découpages indiqués (par exemple si les quantités AB et CD sont *a priori* dans un rapport autre que celui initialement choisi de x_1 à y_1). Naturellement, fait problème le fait que dans la totalisation la somme soit infinie. Grégoire de Saint-Vincent y a pourvu par la définition du terme (final) d'une progression.

D'autre part, le résultat de la proposition 116 fournit la maintenance de la proportion $\frac{x_1}{y_1} = \alpha = \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$, proportion par ailleurs quelconque. Deux exhaustions menées parallèlement sur deux grandeurs corrélées par le rapport de leurs parties permettent de conclure à la stabilité de ce rapport pour les grandeurs elles-mêmes. **Le discret détermine le continu.** Cette maintenance ne pouvait que passer pour avantageuse dans le nouveau pays mathématique que Grégoire de Saint-Vincent explorait. Précisément parce qu'il s'agissait, dans la mesure des aires par exemple, d'établir en général une telle proportion. Dans certains cas, celle-ci pouvait conduire effectivement à une quadrature au sens ancien, mais, dans d'autres elle restait l'indication d'une relation précise entre deux aires par ailleurs inconnues. Ainsi, en demeurant au niveau des raisons, la démarche évitait le recours aux grandeurs elles-mêmes, et supprimait de la sorte une étape de la méthode classique d'exhaustion, celle que nous pouvons qualifier d'exhaustion du rapport. Loin d'être une faute contre la rigueur, cette suppression d'une étape marque une extension de la méthode qui s'attaquait ainsi directement aux raisons. Celles-ci devenaient le cœur de la démonstration : il y a là indéniablement une algébrisation des objets.

Mais à procéder ainsi, il y avait un autre avantage, d'ordre épistémologique cette fois. Puisqu'était signalée l'intervention explicite de la quatrième proportionnelle dont Clavius dans ses commentaires des *Eléments* avait indiqué en 1574 qu'elle manquait à l'inventaire des présupposés euclidiens. Effectivement, la quatrième proportionnelle abstraite (c'est-à-dire en dehors du cas des longueurs bien réglé par le théorème de Thalès) intervient à la proposition 116, précisément à la manière dont elle se rencontre dans l'Antiquité afin d'introduire une grandeur intermédiaire que l'on compare alors aux grandeurs données. Mais, ceci est fait une fois pour toutes, de sorte que pour le calcul des aires on peut éviter l'intervention de la quatrième proportionnelle dans les autres étapes de la méthode d'exhaustion. Et du coup, on peut éviter tout autant le recours à la procédure du raisonnement par l'absurde. C'est bien ce que nous pouvons constater en lisant avec attention la démonstration de la proposition 106 du livre 6 relative à la quadrature de l'hyperbole. Ainsi donc, en isolant le raisonnement par l'absurde, Grégoire de Saint-Vincent modifie la donne classique de la méthode d'exhaustion. Il en permet l'algébrisation et celle-ci porte cette fois sur les raisonnements.

Un paradoxe de Zénon : le retour au continu

L'algébrisation par discrétisation permet à Grégoire de Saint-Vincent de se débarrasser en sus d'un des paradoxes anciens auxquels le nom de Zénon était attaché[81]. Il le fait pour illustrer sa proposition 80, avant même d'envisager la proposition 116 (dont nous avons vu qu'elle réglait l'exhaustion spatiale). Le mieux est de fournir l'argumentation en son intégralité, d'autant que, souvent cité sans référence, le texte n'a pas été traduit jusqu'ici, sans doute à cause de la lourdeur scolastique du finale (que nous avons reporté en note).

"Scholie: Si l'on décide d'utiliser la seconde construction de la proposition 80, on aura, en une seule opération, la proportion de la première grandeur au reste de la série. Si, par contre, nous utilisons la première construction, nous obtiendrons la proportion des première et seconde grandeurs prises ensemble au reste de la série.

Le présent sujet me remet en mémoire ce que j'ai dit en préface, dans l'argumentaire de ce livre, lorsqu'il a été fait mention de l'argument de Zénon d'Elée, par lequel il croyait qu'il pouvait bannir toute raison [d'être] *du mouvement. Or, le nerf de cet argument a eu auprès de l'auteur tant de poids qu'il le jugeait digne du surnom d'"**Achille le plus invincible des chefs**". Il était persuadé que ce nerf aurait une si grande solidité qu'il égalerait la force probante de toutes les Démonstrations philosophiques.*

Je reprendrai le raisonnement de Zénon dans les termes mêmes dont j'ai usé dans ma préface. Il consistait en deux [corps] *qui se meuvent; d'abord Achille courant à toute vitesse, en face la tortue*

[81] Sur les paradoxes de Zénon, voir M. Caveing, *Zénon d'Elée. Prolégomènes aux doctrines du continu. Etude historique et critique des Fragments et Témoignages*, Vrin, Paris, 1982 ; F. Cajori, "History of Zeno's arguments on motion", *Amer. Math. Monthly*, XXII, 1915, pp. 1-16; 39-47; 109-115; 179-186; 215-220; 253-258; 292-297; B. Russell, *The Principles of mathematics*, Cambridge, 1903.

rampant aussi lentement que possible.

A B D E C

Qu'on suppose, disait-il, qu'Achille le plus rapide des coureurs, partant du point A veuille rattraper une tortue qui rampe sur le chemin BC en une course très lente. Pendant le temps qu'Achille va de A à B, la tortue s'est déplacée d'un certain espace et arrive en D. Donc Achille n'a pas encore rattrapé la tortue. Derechef, pendant le temps qu'Achille court à partir de B pour rattraper la tortue qui était en D, la tortue s'est déplacée jusqu'au point E. Donc Achille parvenu en D n'a pas encore rattrapé la tortue, et ceci écherra indéfiniment! Puisque le continu est divisible à l'infini, en conséquence Achille ne rattrapera jamais la tortue. Il nous appartient de détruire ce nerf à partir de la théorie de ce livre; ce que nous avons réalisé, vous le savez, puisque nous avons assigné le point exact où Achille attrape la tortue.

Pour défaire ce nœud Gordien à partir des principes de ce livre, nous supposons qu'Achille, non moins que la tortue, avance uniformément dans sa course. En sorte que la vitesse, acquise dans la première partie du mouvement, reste dans le même état jusqu'au dernier moment de temps où ils parcourent leur espace. Supposons de plus (parce que tout mouvement est une espèce [particulière] *de quantité) que ces deux mouvements, puisqu'on les suppose uniformes dans leurs parties, se trouvent avoir entre eux une certaine proportion; il est nécessaire que cela arrive entre toutes les quantités qui appartiennent à la même espèce, comme sont deux mouvements droits et uniformes.*

Donc, qu'on suppose que la proportion de ces deux mobiles, au point de vue de la vitesse, consiste en une raison double, de telle sorte qu'Achille franchisse un espace deux fois plus vite que la tortue. Par conséquent, pendant le temps que la tortue avance jusqu'à un quart de stade, Achille aura parcouru la moitié. Partant, les lignes AC et DC étant prolongées en raison double à partir[82] *du point C, qu'on les divise en B, F, H, etc, etc, E, G, I, suivant une raison double; en sorte que AC soit double de BC et DC de EC, de même BC double de FC, EC double de GC, etc.*

[82] A nouveau, comme à la proposition 70, c'est à partir du terme final C que la construction est effectuée. Ce qui signe ici un raisonnement par synthèse.

A B F H C

D E G I

figure 6

Qu'on place ainsi Achille en A et soit AC représentant un chemin en longueur ou stade. Quant à la tortue, on la place au milieu du stade, au point B (ou D) en posant DC égal BC. Parce qu'Achille commence à se déplacer en A, au moment où la tortue commence sa course à partir de D, Achille sera donc parvenu de A en B dans le temps où la tortue, partie de D, atteindra E. Et pendant le temps qu'Achille parti de B atteindra F, en ce même [temps] *la tortue parviendra de E en G, et ainsi de suite. Mais, parce que le terme de la progression de raison AB à BF se place en C (comme on l'a démontré*[83] *à la proposition 85), de même puisque la progression suivant la raison de BF à FH (ou de DE à EG) trouve sa fin au point C (selon la même proposition), en conséquence le concours de ces deux mobiles (Achille et la tortue) se trouvera au point C. Que si, au lieu d'une proportion double, on suppose une proportion triple, alors le concours sera déterminé par la proposition 86 de ce livre. Si elle est quadruple, ce sera la proposition 87 qui servira, et ainsi de suite.*

Le raisonnement captieux de Zénon crée des embarras à celui qui ne tient pas compte de la différence qui surgit ici à l'intérieur d'une progression double, progression qui rend double[84] *le fil conducteur de la démonstration. Autre chose en effet est une progression par parties égales, et autre une progression par parties proportionnelles. Ici, la course de chacun des deux est supposée se faire par parties uniformes, c'est-à-dire par égalités (puisque le premier pas ne diffère pas du second ou du troisième, bien que deux pas d'Achille, par exemple, demandent le même temps qu'un seul de la tortue). Or, c'est conformément à ces pas que se fait la course de chacun des deux. Mais Zénon dans le cours de son raisonnement divise le mouvement des coureurs à l'aide de parties proportionnelles suivant lesquelles les mobiles ne se déplacent nullement! Et partant, il tombe dans le même sophisme que quelqu'un qui dirait, pendant le temps que je diviserai la ligne AE en quatre parties égales, un autre la subdiviserait suivant une certaine série par parties proportionnelles.*

---

[83] C'est la proposition qui somme une série géométrique $2a = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a}{2^n}$.

[84] Un doublement manifesté sur la figure adoptée par Grégoire de Saint-Vincent : il y a deux lignes de lettres de part et d'autre du segment AC.

A B C D E

A coup sûr, on assignerait plus vite les termes des quatre parties égales que les termes infiniment [nombreux] *des parties proportionnelles. Car Achille et la tortue, parcourant l'espace AE par parties égales, trouvent facilement le terme de leurs parties égales; mais Zénon pendant que cela se passe, veut que l'espace AE soit divisé par les coureurs en parties proportionnelles,* [parties] *suivant lesquelles les mobiles ne se rapprochent pas*"[85].

Indéniablement, l'explication que fournit Grégoire de Saint-Vincent fait fond sur les mathématiques : il se nicherait même *in cauda* quelque dénigrement des arguments philosophiques[86] ("*Verum hæc in gratiam Philosophorum dicta sufficiant*"). Tant il sait que c'est là que réside la difficulté, Grégoire se garde d'opposer le discret et le continu pour résoudre le paradoxe : bien au contraire son raisonnement se base sur le continu, dûment représenté à partir des vitesses uniformes d'Achille et de la tortue, vitesses qui ont nécessairement un rapport, une raison qui relève de la théorie des proportions. Le cadre "continuiste" est délimité avec soin.

Cependant, Grégoire déroge au penchant analytique - au sens de Pappus - que nous avons jusqu'à présent décrit puisque le style d'exposition est d'emblée synthétique : la longueur AC est posée **d'abord**, puis le milieu B, point de départ de la tortue (figure 6). C'est à partir du continu AC qu'est construite la progression géométrique "*en acte*" de raison $\frac{1}{2}$ (au sens moderne) AB, BF, FH, etc, progression

---

[85] *Opus geometricum*, p. 101-103. Ce texte se termine par les phrases suivantes: "*En outre, il faut répondre à l'argument suivant lequel "**avant qu'Achille ne parvienne de A à B, la tortue s'est avancée de B en F**". Que le sens de cette proposition coïncide avec celui où l'on dirait qu'Achille doit assigner le point B avant qu'il ne désigne le point F, ce qui est contraire à une course selon le rapport du mouvement. Car toute assignation de ce genre de choses contient une connotation de subsistance* [dans l'intelligence], *comme le pensent les Mathématiciens, tout au moins selon l'esprit; donc, partant, d'un certain repos qui contredit le mouvement. Mais ces réflexions destinées aux Philosophes suffisent*".

A B F H C

[86] Du coup, il n'est pas utile d'aborder ici l'intéressante critique que Bergson adresse à de telles résolutions du paradoxe. Remarquons bien que Grégoire de Saint-Vincent se plie au raisonnement de Zénon tel que rapporté par Aristote dans la *Physique*.

dédoublée en DE, EG, GI, etc. En effet, F est contruit comme milieu de BC, H comme milieu de FC, etc, et de même E comme milieu de DC, G comme milieu de EC, etc. Puisque AB + BF + FH + ... = 2 AB = AC et DE + EG + GI + ... = 2 DE = DC, ce n'est qu'après qu'ait été construit le point C qu'il est ensuite prouvé qu'il s'agit du point de rencontre d'Achille et de la tortue. En privilégiant cette fois le mode synthétique, Grégoire de Saint-Vincent tente d'apparaître sans réplique possible, prenant appui sur toute la tradition euclidienne. Il l'annonçait dès sa vigoureuse préface au livre 2 : "*Et je ne voudrais pas que l'on se mît das la tête que nous entrons dans un domaine qui contredît les lois de la logique: au contraire, plus clair que le jour, nous montrerons par notre méthode que sont aussi bien levées les plus graves apories pour lesquelles, en matière de quantité, dans les gymnases et les Lycées des Philosophes, ceux-ci ont coutume de se déchirer.* "[87]

L'exposé synthétique, brillant, n'est pourtant possible qu'une fois analytiquement établi le continu comme somme d'un découpage en progression géométrique: **c'est un aboutissement**. Il fait date dans le déroulement scientifique.

Quelques années plus tard, Isaac Barrow, professeur lucasien de mathématiques à Cambridge, renverse la perspective établie par Grégoire de Saint-Vincent : c'est sur l'évidence "géométrique" du continu, ramassée dans le nécessaire rattrapage de la tortue par Achille, qu'il explique la sommation d'une série géométrique. Il le fait vers 1664-1665 dans ses *Lectiones mathematicae*[88], à l'occasion de la troisième conférence intitulée *De l'identité de l'Arithmétique et de la Géométrie* au cours de laquelle il se propose, à propos de la science des nombres, non de la supprimer de la "*République des mathématiques*" mais *"I will rather restore it into its lawful Place, as being removed out of its proper Seat, and ingraff and unite it again into its native Geometry, the Stock from whence it has been plucked"*[89]. Il ne s'agit pas d'un tic de mathématicien, désireux de manipuler dans tous les sens possibles les objets déjà étudiés par ses prédécesseurs. Barrow indique fermement un ordre selon lequel les mathématiques

[87] *Opus geometricum*, Argument du livre 2, p. 51. Voir aussi A. Tacquet, *Arithmeticæ theoria et praxis*, 1656 (p. 502-503). Pour un traitement antérieur du paradoxe d'Achille et de la tortue, voir Richard Suiseth, *Liber calculationem*, Padoue, 1477.

[88] I. Barrow, *Lectiones mathematicae*, Trad. anglaise par J. Kirkby, *The usefulness of mathematical learning explained and demonstrated : being Mathematical lectures read in the Publick schools at the University of Cambridge*, London, S. Austin, 1734, Réédition, F. Cass, 1970.

[89] I. Barrow, *The usefulness of mathematical...*, opus cité, p. 29.

doivent se déployer et le continu géométrique est premier. L'argument se déroule ainsi à partir d'une figure :

A E F G H Æ Z

Un point mobile A (Achille) se déplace d'un mouvement uniforme sur une ligne droite AZ, de même que le point E (la tortue) qui possède une vitesse trois fois moindre. Lorsque A s'est rendu en E, E est déjà en F, avec $EF = \frac{AE}{3}$; de même lorsque A parvient en F, E est en G avec $FG = \frac{EF}{3}$, *"et ainsi de suite, ad infinitum, jusqu'à ce que le point A rattrape E en Æ"*[90]. La rencontre en Æ ne fait aucun doute : c'est un donné relatif au continu. Il n'y a rien à prouver! De sorte que la longueur AÆ est décomposée selon AE + EF + FG + ..., soit $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ du moins si la longueur AE est prise pour l'unité. D'ailleurs, puisque les points mobiles A et E se rencontrent en Æ, c'est que la longueur AÆ parcourue par A est triple de celle EÆ parcourue par E. *"Donc A Æ est à AE comme 3 à 2"*. D'où l'égalité numérique :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{3}{2}$$

Isaac Barrow explique aussitôt que le résultat de sommation est général, adaptable à toutes les raisons inférieures à l'unité. Il exécute un calcul à partir d'un quelconque rapport des vitesses $\frac{R}{S}$ (R > S), de sorte que

$$\frac{AE + EÆ}{EÆ} = \frac{R}{S},$$

donc *dividendo* $\frac{AE}{EÆ} = \frac{R\text{-}S}{S}$ ou $\frac{AÆ}{AE} = \frac{R}{R\text{-}S}$. Mais comme l'interprétation par les vitesses pourvoit aussi bien la proportion $\frac{AE}{EF} = \frac{R}{S}$, on dispose finalement de :

$$\frac{AÆ}{AE} = \frac{AE}{AE - EF}.$$

[90] I. Barrow, *The usefulness of mathematical...*, opus cité, p. 32.

"The Sum of any Series of Numbers continually decreasing from Unity, or to Nothing, in any Proportion, will be to Unity, as the Antecedent, or greater Term of the proportion, is to the Excess of the Antecedent above the Consequent" [91]. C'est une façon d'indiquer la somme d'une progression géométrique : elle correspond à la troisième forme choisie par Grégoire de Saint-Vincent dans sa proposition 80 du livre 2.

La conclusion de Barrow est épistémologique ; les propriétés du continu sont fondatrices[92] : *"So easily are Arithmetical Conclusions, (otherwise sufficiently intricate and difficult to be investigated) drawn from the Consideration of Geometry"* [93]. Si, par rapport à la tradition euclidienne, l'on peut s'étonner de l'incorporation de la vitesse, donc du temps et du mouvement dans le domaine de la géométrie, celle-ci n'est pas scandaleuse puisque Barrow a pris soin de définir la géométrie comme l'étude de la quantité en tant que telle : *"The same way Geometry proposes Magnitude for the Subject of its Enquiry, not the peculiar Magnitude of this or that Body, but Magnitude taken universally ; together with its general Affections, viz. Divisibility, Congruence, Proportionality, a Capacity of different Situation and Position, Mobility, etc, declaring these to be inherent to it, and after what manner they are so"*[94].

Grégoire de Saint-Vincent ne désavouerait peut-être pas cette déclaration de principe, car elle renforce l'unité des mathématiques, mais au moins il avait su utiliser la vitalité propre du discret. Symptomatiquement toutefois, il épouvait le besoin de figurer spatialement des résultats que l'on peut qualifier d'algébriques, par exemple la formule (G) qui est notre guide au long de cette étude[95]. Et le verbe "figurer" décrit trop insuffisamment son objectif : car c'est bien aux propriétés spatiales qu'il veut aboutir en fin de compte. Ainsi, à l'issue du chapitre 2 du livre 2, où figurent à la fois les propositions 79, 82 et 116 que nous avons commentées longuement, Grégoire ajoute deux chapitres phénoménologiques. *"Ce que nous avons démontré jusqu'ici dans la seconde partie sur les progressions géométriques, s'applique sans aucune différence aux lignes, aux surfaces et aux corps. Pour cette raison en effet, afin d'indiquer*

[91] I. Barrow, *The usefulness of mathematical...*, opus cité, p. 32-33.
[92] I. Barrow sait très bien que ce qu'il professe s'oppose à la démarche de John Wallis qui avait publié son *Arithmetica infinitorum* à Oxford en 1655. De la même façon, en plus virulent encore, Thomas Hobbes s'opposait à l'utilisation de l'algèbre en géométrie.
[93] I. Barrow, *The usefulness of mathematical...*, opus cité, lecture 3, p. 33.
[94] I. Barrow, *The usefulness of mathematical...*, opus cité, lecture 1, p. 13.
[95] Par opposition, voir H.J.M. Bos, On the representation of curves in Descartes' Géométrie, *Arch. Hist. Ex. Sc.*, 24, 1981, pp. 295-338.

l'universalité des propositions, nous avons perpétuellement employé le nom de "grandeur" et non [celui] *de "ligne". Parce que toutefois, s'ils sont alignés à l'extérieur les uns des autres, les progressions des surfaces et des corps semblablement semblables ont beaucoup de propriétés, il nous a paru bon de les étudier en détail dans cette troisième et quatrième partie".*

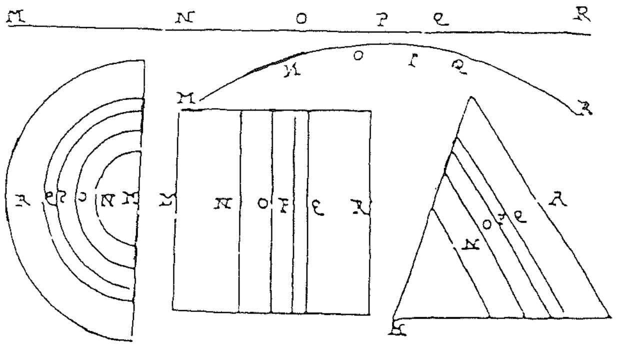


Figure 7

Quelques dessins viennent aussitôt, certains reproduits ci-dessus, et avec eux l'annonce d'une double recherche. D'une part, il y a la décomposition d'un donné spatial, c'est-à-dire l'investigation du continu par le discret. Joue l'itération qui sera largement présente dans l'ouvrage et son rôle dépasse la seule progression géométrique. D'autre part, Grégoire veut évoquer l'agrégation de figures semblables composant, par leur ensemble, une nouvelle figure qu'il s'agit d'étudier. Les progressions géométriques jouent alors le rôle majeur: c'est le modèle.

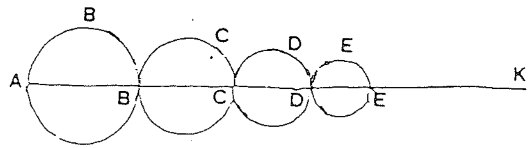
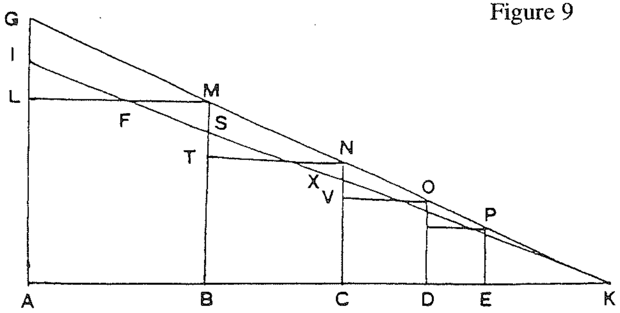


Figure 8

Cette seconde démarche le conduit à figurer des progressions géométriques en abscisse et à interpréter les diverses formes de (G) par des figures posées sur cette base : la proposition fondatrice étant qu'à une progression géométrique en abscisse correspond des plans semblables formant également par leurs aires une progression géométrique (proposition 124 de l'*Opus geometricum*, livre 2). Or, la raison de cette nouvelle progression géométrique spatiale est le carré de la raison de la première progression représentée linéairement et, par conséquent, la seconde se voit tout autant sur le dessin linéaire, puisqu'il suffit d'omettre les termes de rang pair[96]. La pratique de ce genre de propriétés devient vite fastidieuse, mais elle témoigne du besoin de géométriser, une force baroque en l'occurrence. A titre d'unique exemple, voici l'énoncé traduit de la proposition 141 et le dessin correspondant.

Proposition 141: Inscrite dans un triangle AGK, on se donne une série de carrés, ayant leurs bases alignées et dont le terme [final] *de la longueur est K. Par F, on divise en deux parties égales le côté LM du premier carré, puis on mène par F la droite FK qui rencontre AG en I. Je dis que le triangle AIK est égal à la série des carrés et le triangle IGK est égal à celle des triangles LGM, TMN, etc.*

Figure 9



La force du discret

Si la crispation de Barrow sur le continu est d'une nature bien différente de la position de Grégoire de Saint-Vincent qui explore le discret en vue du continu et l'illustre à satiété, il est particulièrement éclairant d'associer à ces démarches celle issue d'une autre lecture des *Eléments* d'Euclide, démarche adoptée par des mathématicien

---

96 La somme $\frac{a\alpha}{1-x^2}$ se lit de deux manières sur la figure, comme somme des figures carrées ou comme somme des segments de rang pair.

aussi différents que François Viète, Luca Valerio[97] ou Pierre de Fermat. A partir d'une proposition euclidienne, ce dernier auteur sera notre cible principale.

1) Illustration d'une propriété euclidienne

Le résultat de base est une propriété que nous pouvons écrire sous la forme des quotients

(1) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}\ .$$

Euclide énonce : *"Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents, comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents"* [98]. La démonstration n'est qu'une suite directe de la définition subtile d'une proportion par les équimultiples[99] (définition 5 du livre V) jointe à la propriété que nous traduisons par la distributivité[100]:

(2) $$n\,(A + B + C) = nA + nB + nC.$$

Parce que l'algèbre des proportions est aujourd'hui oubliée, on a du mal à comprendre à quel point la relation (1) était inscrite dans la pratique des mathématiciens, jusqu'au XVIIè siècle inclusivement. Bien entendu, Grégoire la fait intervenir et lui donne même un statut important[101]. Mais, dans sa quête des interprétations continues du discret, il ne peut manquer d'en fournir une figuration géométrique. A dire vrai, il choisit plutôt une complication de cette relation, à savoir l'énoncé

---

97 Dans son *De Centro gravitatis solidorum libri tres*, Bononiæ, 2è édition, 1661; voir H. Bosmans, "La démonstration par l'analyse infinitésimale chez Luc Valerio", *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, 37, 1913, pp. 211-228 ; D.T. Whiteside, "Patterns of mathematical thought in the seventeenth century", *Arch. Hist. Ex. Sc.*, 1, 1961/62, pp. 179-388.

98 Proposition 12 du livre 5, trad. de F. Peyrard, op. cité, p. 262, t. 2.

99 Voir J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu; épistémologie et histoire*, Nathan, Paris, 1978, chap. 1.

100 Propriété à laquelle Euclide donne une autre formulation, $\frac{nA}{A} = \frac{nA + n\,B + nC}{A + B + C}$ (proposition 1 du livre V).

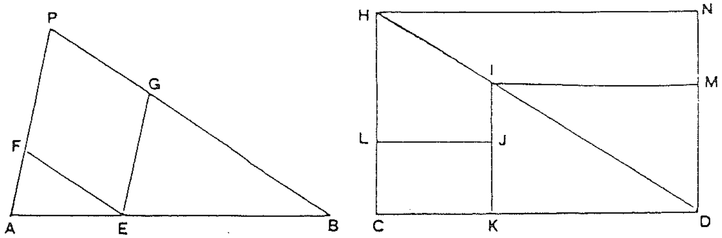
101 La proposition 12 du livre V des *Eléments* est dûment citée par Grégoire de Saint-Vincent, et il insiste sur son importance dans une correspondance justificative avec le Père C. Grienberger du Collège romain (lettre du 22 mai 1625 par exemple).

$$(3) \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ et } \frac{a'}{b}=\frac{c'}{d} \text{ impliquent } \frac{a+a'}{c+c'}=\frac{b}{d}.$$

Cette implication (3) se réduit aisément à (1) à partir de l'échange des termes moyens :

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}=\frac{b}{d}.$$

Afin de lui conférer une figuration spatiale en "réalisant" la relation (1), Grégoire adopte des triangles et des rectangles. Il part de deux segments AB et CD sur lesquels sont tracées deux figures, triangle et rectangle. Ces segments sont divisés par les points E et K respectivement dans un même rapport $(\frac{AE}{CK}=\frac{AB}{CD})$ et sur chacun des quatre segments ainsi générés, il construit deux par deux des figures semblables aux figures initiales. D'un côté les triangles AFE et EGB, et de l'autre les rectangles CKJL et DMIK (figure 10). La conclusion, qui se veut une visualisation de (1), est que la somme des aires des figures AFE et EGB est à la somme des aires des figures CKJL et KDMI comme l'aire de la figure APB à celle de la figure CDNH. Telle est la proposition 69 du livre 2 de l'*Opus geometricum*.



figures 10

La visualisation est si peu efficace qu'on peut se demander si ce n'est pas la technique de calcul qui est seule en cause, comme un plaisir scolaire. Car la justification de cette géométrisation de l'algèbre des proportions exige une certaine attention si l'on veut respecter scrupuleusement les règles. Elle repose sur la similitude : les aires de deux figures rectilignes semblables sont entre elles comme le carré du rapport des longueurs de deux longueurs homologues (Prop. 20 du livre VI des *Eléments* d'Euclide). Dès lors, à partir de l'hypothèse de division des segments et de la relation (1),

$$\frac{AE}{CK}=\frac{EB}{KD}=\frac{AE+EB}{CK+KD}=\frac{AB}{CD}.$$

Soit, par échange de termes moyens :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{CK}{CD} \text{ et } \frac{EB}{AB}=\frac{KD}{CD}.$$

En élevant au carré :

$$\left(\frac{AE}{AB}\right)^2=\left(\frac{CK}{CD}\right)^2 \text{ et } \left(\frac{EB}{AB}\right)^2=\left(\frac{KD}{CD}\right)^2.$$

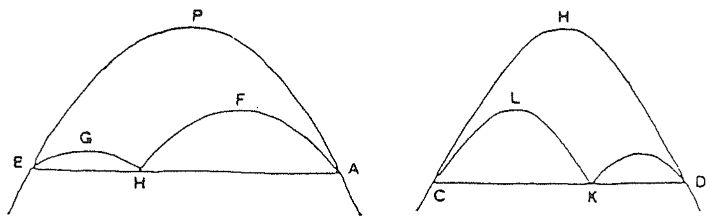
Donc

$$\frac{\text{Aire tr. AFE}}{\text{Aire tr. APB}}=\frac{\text{Aire rect. CKJL}}{\text{Aire rect. CDNH}}; \quad \frac{\text{Aire tr. EGB}}{\text{Aire tr. APB}}=\frac{\text{Aire rect. KDMI}}{\text{Aire rect. CDNH}}.$$

Et, grâce à (3), la conclusion annoncée :

$$\frac{\text{Aire tr. AFE + Aire tr. EGB}}{\text{Aire rect. CKJL + Aire rect. KDMI}}=\frac{\text{Aire tr. APB}}{\text{Aire rect. CDNH}}.$$

Pour bien marquer la généralité de (1), ce que la formulation algébrique (1) dit bien plus facilement, Grégoire de Saint-Vincent fournit d'autres figures où les triangles et les rectangles sont remplacés par des cercles, ou encore d'une part des paraboles, d'autre part des hyperboles. Pour dire l'universalité, Grégoire impose la profusion baroque.



. Eodem modo si curuilinea, cum diuersæ speciei curuilineis, tres nempe parabolæ similes, cum tribus hyperbolis similibus, conferantur, eadem his quoque demonstrandi ratio conuenict : cùm tam parabolæ similes, quàm hyperbolæ sint in duplicata ratione subtensarum. Constat igitur huius theorematis vniuersalis veritas.

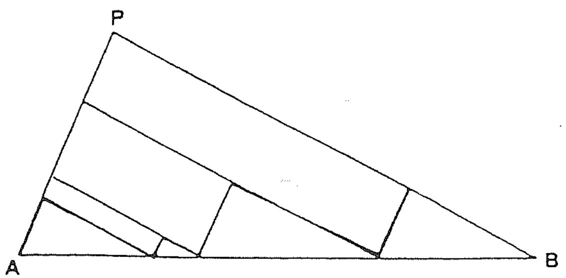
Figures 11

Si le dessin est plaisant, on ne peut manquer de trouver peu probante cette dernière figuration, ou plutôt on doit remarquer combien est nécessaire le discours en accompagnement : on n'évite par l'expression rhétorique. Quant à l'universalité, elle reste un leurre : chez Euclide en effet, la propriété de la similitude quant aux aires est d'abord restreinte aux seules figures rectilignes, et étendue ensuite aux cercles seulement [102] (c'est la proposition 2 du livre XII des *Eléments*). Son extension aux paraboles et hyperboles, au 17e siècle du moins, n'avait rien de prouvé... et on peut avancer qu'elle est gravement fautive en avant-scène d'un ouvrage dont le but, précisément, est de déterminer les aires relatives à de telles courbes !

Grégoire de Saint-Vincent prépare bien plutôt une extension de la relation (1): c'est, repéré géométriquement, le rythme de l'itération qui lui convient. En divisant le segment AB en n segments, x_1, x_2, x_3,...x_n où $AB = \sum_{k=1}^{k=n} x_k$, et de même CD en n segments y_1, y_2, y_3,...y_n, où $CD = \sum_{k=1}^{k=n} y_k$, de telle sorte que pour tout k, $1 \leq k \leq n$, $\frac{x_k}{y_k} = \frac{AB}{CD}$, il retrouve la force de la proposition 116. Sur les segments découpés sur AB il porte des triangles semblables au triangle APB et des rectangles semblables au rectangle CDNH sur les segments découpés sur CD.

Pour les triangles, un simple jeu de droites parallèles prévaut à la construction. Et ce jeu peut se poursuivre (figure 12).

Figure 12



Pour les rectangles, comme indiqué ci-dessous (figure 13), le jeu porte sur les deux diagonales, et il peut de la même façon se poursuivre.

[102] Dont les diamètres sont respectivement AB, CD, AE, EB, CK et KD.

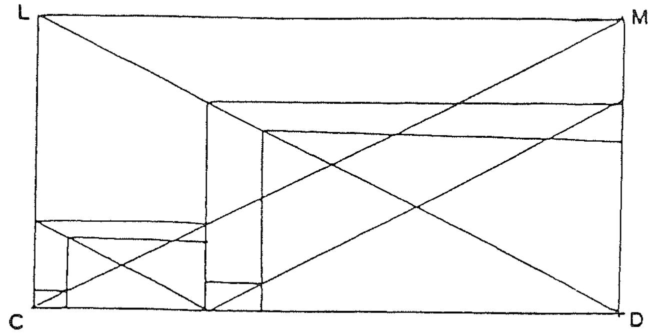


Figure 13

Mais, au final, compte tenu des hypothèses ($\frac{x_k}{y_k} = \frac{AB}{CD}$), on obtient seulement le bien piètre résultat :

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k^2}{\sum_{k=1}^{k=n} y_k^2} .$$

Nous avons vraiment abandonné Euclide et le cadre, éventuellement numérique, que pourrait fournir la relation (1).

2) L'algèbre des séries : l'adégalisation

Dans le cadre numérique qui s'impose au livre VII puisqu'il concerne les nombres entiers, Euclide énonce à nouveau la relation (1) : "*Si tant de nombres qu'on voudra sont proportionnels, un des antécédents sera à un des conséquents, comme la somme des antécédents à la somme de conséquents*"[103]. A cette proposition, une extension est proposée au livre IX, extension pour laquelle nous utilisons d'abord une écriture algébrique : si x_1, x_2, ... x_n sont en proportion continue, c'est-à-dire si

$$(3) \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

[103] Proposition 12, livre VII, trad. F. Peyrard, op. cité, tome 1, p. 408.

on a :

$$\text{(4)} \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{x_2 + \ldots + x_n}.$$

En appelant S_n la somme (finie) $x_1 + \ldots + x_n$, on dispose donc de la proportion :

$$\text{(5)} \qquad \frac{S_n - x_n}{S_n - x_1} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Si les notations indexées n'existent ni chez Euclide, ni d'ailleurs au cours de la première moitié du XVIIe siècle, un équivalent de la formule (5) est en fait prononcé : "*Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si du second et du dernier on retranche un nombre égal au premier, l'excès du second sera au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui*" [104].

Cette formulation, qui se réfère explicitement à des nombres entiers, convient si $x_2 > x_1$ (progression géométrique croissante) et on la déduit facilement de (5) par utilisation de la règle de calcul :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{implique} \quad \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}.$$

Soit

$$\text{(6)} \qquad \frac{x_n - x_1}{S_{n-1}} = \frac{x_2 - x_1}{x_1}.$$

Acceptons alors trois faits (H_1), (H_2) et (H_3) que nous énonçons volontairement dans le langage moderne :

(H_1) S_n admet S comme limite lorsque n tend vers l'infini (ce qui suppose $x_1 > x_2$);
(H_2) x_n tend vers 0 ;
(H_3) les proportions subsistent à la limite.

Alors, de la relation (5), on tire aussitôt la valeur de la somme de la série géométrique tout entière.

$$\text{(7)} \qquad \frac{S - 0}{S - x_1} = \frac{x_1}{x_2}.$$

[104] Proposition 35, livre IX, trad. F. Peyrard, op. cité, tome 2, p. 104.

Soit

$$\text{(8)} \qquad S = \frac{x_1^2}{x_1 - x_2}.$$

La formulation (8) est rhétoriquement indiquée chez F. Viète[105]. Si elle est équivalente aux formulations fournies par Grégoire de Saint-Vincent à la proposition 79 de son livre 2, et si on la trouve beaucoup plus tard chez I. Barrow[106], la démarche suivie est pourtant autre, d'inspiration arithmétique et algébrique. On le constate bien à partir d'un texte de Fermat dont le titre même fait directement référence aux progressions géométriques : *Sur la transformation et la simplification des équations de lieux, pour la comparaison sous toutes les formes des aires curvilignes, soit entre elles, soit avec les rectilignes, et en même temps sur l'emploi de la progression géométrique pour la quadrature des paraboles et hyperboles à l'infini*"[107].

Ce texte très riche qui fut vraisemblablement écrit[108] à la suite d'une lecture de l'*Arithmetica infinitorum* [109] de Wallis, quoique publié en 1679 seulement[110], entendait illustrer le fait que la progression géométrique est *"très féconde en quadratures"*[111]. De fait, Fermat disposait du calcul avant 1647 comme en atteste une lettre à Digby (20 avril 1657), où il indique qu'il l'avait fait parvenir à Torricelli[112]. La somme d'une série est d'emblée donnée sous la forme que nous repérons par la lettre (F) :

(F) "*Etant donnée une progression géométrique dont les termes décroissent à l'infini, la différence de deux termes qui constituent cette progression est au plus petit terme, comme le plus grand des*

[105] F. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum libri VIII*, Tours. 1593; *Opera mathematica*, Leiden, 1646 p. 347-435.
[106] I. Barrow, *Lectiones mathematicae*, trad. anglaise, op. cité, p. 32, en note.
[107] De œquationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricœ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus, *Œuvres de Fermat*, P. Tannery, C. Henry, (éd.), Paris, Gauthier-Villars, t. I, pp. 255-288.
[108] Voir P. Tannery, Sur la date des principales découvertes de Fermat, *Bull. Sc. Math. Astr.*, (2), 7, 1883, pp. 116-128 ; M. S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat (1601-1665)*, Princeton, 1973.
[109] J. Wallis, *Arithmetica infinitorum, sive Nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam aliaque difficiliora Matheseos Problemata*, Oxoni Typis L. Lichtfield, 1656, 216 p. in-4°.
[110] P. de Fermat, *Varia opera*, S. Fermat (éd.), Toulouse, 1679.
[111] P. de Fermat, *De œquationum...*, op. cité.
[112] *Œuvres de Fermat*, op. cité, tome II, p. 338.

termes de la progression est à la somme de tous les autres à l'infini"[113].

En termes algébriques, x_1 étant le premier terme, S la somme infinie, et x_n le terme général ($x_n = x_1 x^n$, $n \geq 1$, x étant la raison au sens moderne prise inférieure à l'unité) :

$$(9) \qquad \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{S - x_1}\,.$$

Or, avec $x = \frac{x_1}{x_2}$, on a $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{1-x}{x}$, de sorte que (9) est une forme possible[114] de la formule (8), autrement dit de (G). Une forme suffisamment souple pour l'usage qu'en veut faire Fermat, et il ne convient pas de fixer l'entier n dans le membre de gauche[115], mais bien plutôt de le laisser libre.

En tout cas, cette somme infinie est pour Fermat un départ pour les quadratures, le seul même : *"Unico, quod notissimum est, proportionis geometricæ attributo tota hæc methodus innititur"*.[116] Il s'attaque aussitôt aux *"hyperboles"* et aux *"paraboles"* généralisées, c'est-à-dire à des courbes pour lesquelles il y a constance du produit ou du quotient d'une puissance de l'abscisse par une puissance de

[113] Une traduction de ce texte figure au tome III des *Œuvres de Fermat*, op. cité, pp. 216-237. Nous n'avons pas toujours suivi cette traduction trop algébrisante.

[114] (9) donne en particulier $\frac{x_1 - x_2}{x_2} = \frac{x_1}{S - x_1}$.

[115] Comme le fait malencontreusement le traducteur des *Œuvres de Fermat*. Le rapport $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}$ se calcule avec deux termes successifs quelconques, en retranchant le plus petit x_{n+1} du plus grand x_n. L'essentiel est que ce rapport ne dépende pas du premier terme de la progression (x_1 disparaît dans le quotient). C'est dans le second membre $\frac{x_1}{S - x_1}$ que figure explicitement le premier terme. L'indépendance de $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}$ par rapport au premier terme est exploitable dans la mesure où l'on peut calculer sur une autre progression géométrique, de même raison quoique de premier terme autre. Fermat va jouer de cette possibilité.

[116] P. de Fermat, *De æquationum...*, op. cité, p. 255 : *"Toute cette méthode dérive d'une seule propriété bien connue de la progression géométrique"*.

l'ordonnée : α et β étant des nombres positifs[117], $AG^\alpha . EG^\beta$ = cste, ou $\frac{AG^\alpha}{EG^\beta}$ = cste. En attribuant éventuellement un signe à α, ce que Fermat ne fait pas, on peut ranger sous un même registre le cas du produit (hyperbole) et celui du quotient (parabole) : $AG^\alpha \; EG^\beta$ = cste. Chez Fermat, une représentation analytique des courbes est posée dès le départ, quoiqu'il ne s'agisse pas vraiment d'une équation cartésienne puisqu'il use de deux points courants :*"Hyperbolas autem definimus infinitas diversæ speciei curvas... sit ut potestas quædam rectæ AH ad potestatem similem rectæ AG, ita potestas rectæ GE, vel similis vel diversa a præcedente, ad potestatem ipsi homogeneam rectæ HI"*[118] :

$$\frac{AG^\alpha}{AH^\alpha} = \frac{EG^\beta}{IH^\beta}$$

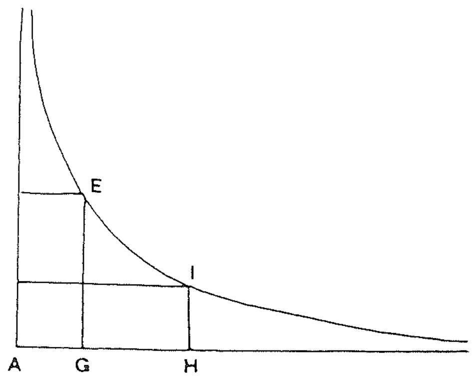


Figure 14

[117] Fermat indique les cas où les exposants α et β sont entiers, mais aussi bien les cas $\alpha = \frac{1}{n}$; $\beta = \frac{1}{m}$ (*sed etiam latera simplicia, quorum exponens est unitas*, p. 256). On peut estimer qu'il envisage tous les nombres rationnels comme exposants α et β. Or, à propos de l'œuvre de Grégoire de Saint-Vincent, nous avons déjà souligné la difficulté conceptuelle présentée par une exponentielle à cette époque (exposants quelconques), difficulté qui ne bloque pourtant pas le calcul sur des exposants manipulés comme s'il s'agissait de simples rationnels. C'est au final que la généralité s'impose... naturellement !

[118] P. de Fermat, *De æquationum*, op. cité, p. 256 : *"Je définis hyperboles des courbes d'espèces variant à l'infini ..., on aura toujours le même rapport entre une puissance déterminée de AH et la même puissance de AG d'une part, et une puisssance de GE (semblable ou différente par rapport à la précédente) et la même puissance de HI d'autre part"*.

Fermat installe en abscisse (figure 15) une progression géométrique croissante[119] de raison q (q > 1), à partir d'un premier terme AG suivi de AH = qAG, AO = q^2AG, ..., etc.

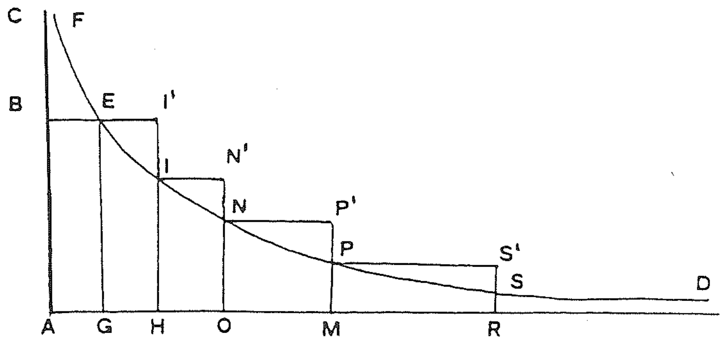


Figure 15

Les aires des parallélogrammes GHI'E, HON'I, OMP'N, etc, forment une autre progression géométrique[120], ce que Fermat démontre en utilisant les seuls outils de la théorie des proportions (notamment la composition des raisons, c'est-à-dire leur produit au sens moderne), se contentant de calculer le rapport des deux premières aires, rapport égal à l'inverse de la raison de la progression géométrique en abscisse dans le cas de "l'hyperbole" particulière choisie ($\alpha = 2$, $\beta = 1$).

La restriction du calcul aux seuls deux premiers termes ne présente pas de gêne, du moins si le lecteur prend conscience du rôle effectif de la progression géométrique en abscisse : AG, AH, AO, AM, AR, etc, à laquelle correspond une autre progression géométrique en ordonnée : GE, HI, ON, MP, RS, etc. Cette correspondance vient de la propriété même de définition de "l'hyperbole" puisque :

$$\left(\frac{AH}{AG}\right)^{\alpha} \left(\frac{HI}{GE}\right)^{\beta} = \left(\frac{AO}{AH}\right)^{\alpha} \left(\frac{ON}{HI}\right)^{\beta} = \text{etc.}$$

119 Il choisit de travailler d'abord sur le cas $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Mais son raisonnement est général pour les courbes $AG^{\alpha}\ EG^{\beta}$ = cste avec $\alpha > \beta$ (> 0): " *Fingantur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi...* " . La traduction française de ce texte, produite au tome III des *Œuvres de Fermat* interprète par une progression *"décroissant indéfiniment"* ! *"Imaginons les termes d'une progression géométrique étendue à l'infini"*.

120 Les points I', N', et P' ne sont pas nommés sur la figure dont se sert Fermat.

Dans le cas de l'hyperbole ordinaire, soit $\alpha = \beta = 1$, Grégoire de Saint-Vincent avait pris soin d'établir qu'à une progression géométrique en abscisse, la courbe faisait correspondre une progression géométrique en ordonnée (au livre 6). Pour lui, cette propriété jouait en partie le rôle que prendra ultérieurement l'équation cartésienne[121] (xy = constante). Comme d'autres mathématiciens de son époque, Fermat n'avait d'ailleurs envisagé les courbes plus générales que parce qu'elles conservaient les progressions géométriques[122]. Les aires des parallélogrammes successifs GHI'E, HON'I, OMP'N, etc, correspondent bien au produit des termes correspondant de deux progressions géométriques : ces produits forment aussi une progression géométrique (comme Grégoire de Saint-Vincent avait tenu à le montrer géométriquement dans sa proposition 71 du livre 2 que nous avons déjà mentionnée). En l'occurrence, si la première raison est q, la seconde raison est q élevée à la puissance $-\frac{\alpha}{\beta}$, d'où la valeur de la raison du produit : $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ en exposant de $\frac{1}{q}$.

Le calcul du rapport des deux premiers termes est bien générique et lorsque $\alpha > \beta$, puisque q > 1, la sommation infinie des aires de parallélogrammes est possible à partir de la relation (9). En l'occurrence, dans cette relation S désigne maintenant l'aire que nous notons $\mathcal{A}$ = Aire (GHI'E) + Aire (HON'I) + Aire (OMP'N) + Aire (MRS'P) + ..., tandis que x_1 est l'aire du premier parallélogramme GHI'E (on pose $x_1 = a$ = GH x GE). Le rapport de gauche dans la relation (9) prend la valeur $q^{(\alpha-\beta)/\beta} - 1$. Mais ceci est une expression en termes modernes que n'utilise nullement Fermat. Notre calcul algébrique masque donc la démarche précise de l'auteur, car tout comme Grégoire de Saint-Vincent, Fermat interprète géométriquement, c'est-à-dire qu'il choisit des segments de la figure pour représenter les rapports en cause, et ceci doit le contraindre à spécifier α et β entiers ou inverses d'entiers. Nous devons donc entrer dans les détails de la preuve, et suivre les différents cas d'hyperboles.

121 Ce rôle est discuté dans J. Dhombres, L'innovation comme produit captif de la tradition : une théorie des courbes entre Apollonius et Descartes, Actes du colloque Transmission des mathématiques, Paris, septembre 1991, à paraître, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences.

122 Torricelli l'avait fait explicitement avant lui. L'investigation de toutes les puissances rationnelles pouvait fournir au final une riche moisson pour le calcul des aires liées aux courbes algébriques. Voir : E. Bortolloti, "La memorie, De infinitis hyperbolis di Torricelli", *Archeion*, VI, 1925, pp. 45-58, 139-152.

Lorsque $\alpha = 2$, $\beta = 1$, le rapport de gauche dans (9), que nous écrivons q - 1, se lit sur la figure 15 comme le rapport $\frac{GH}{AG}$, quotient de la différence du plus grand terme au plus petit terme par ce dernier. C'est que Fermat a "représenté" les aires des parallélogrammes successifs par une progression géométrique de segments, à savoir la progression AO, AH, AG, ..., progression inverse de celle fixée au départ. (*"Sed tres rectæ quae constituunt rationes parallelogrammorum, rectæ nempe AO, HA, GA sunt proportionales ex constructione"*[123]). Pour le calcul de la somme de cette nouvelle progression, il utilise astucieusement la forme (F) qui, pour le terme à gauche, utilise deux termes successifs sans faire intervenir le premier terme. De sorte que pour le calcul de $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}$ le remplacement de la progression des aires des parallélogrammes par celle des segments, deux progressions dont les premiers termes diffèrent pourtant, est indifférent. Ici, en gardant a = GHxGE au dénominateur,

$$\frac{GH}{AG} = \frac{GH \times GE}{\mathcal{A} - a}\ .$$

Une réduction au même numérateur fournit :

$$\frac{GH \times GE}{AG \times GE} = \frac{GH \times GE}{\mathcal{A} - a}\ .$$

Posant $\mathcal{B}$ égale à l'aire du parallélogramme AGEB fixé sur la figure, il vient la relation :

$$\mathcal{A} - a = \mathcal{B}. \qquad (10)$$

Lorsque $\alpha = 3$, $\beta = 1$, l'expression $q^2 - 1$ qui fournit la raison de la progression des aires des parallélogrammes se lit tout autant linéairement sur la figure. En effet, une série géométrique de raison $\frac{1}{q^2}$ est visible avec des segments ; c'est la série AR, AO, AG, etc, série inverse des termes impairs de la première suite géométrique en abscisse. Quoique soient différents les premiers termes de la série des aires des parallélogrammes et de cette nouvelle série de segments,

[123] P. de Fermat, opus cité, p. 258 : *"Mais les droites AO, HA, GA qui constituent les raisons des parallélogrammes, forment, par construction, une proportion géométrique".*

l'expression $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}$ reste la même pour les deux séries, et en l'occurrence peut s'écrire :

$$\frac{AO - AG}{AG} = \frac{GO}{AG}\ .$$

(*"in hoc vero casu, parallelogrammum primum erit ad secundum, secundum ad tertium, etc, ut recta AO ad GA ; quod statim compositio proportionum manifestabit"*[124]). Cette représentation géométrique adoptée, la forme (F) donne avec la même convention d'écriture :

$$\frac{GO}{AG} = \frac{GH \times GE}{\mathcal{A} - a}.$$

Mais $\frac{GO}{AG} = \frac{GO \times GE}{AG \times GE}$, soit après un échange des moyens, la relation :

$$\frac{GO \times GE}{GH \times GE} = \frac{AG \times GE}{\mathcal{A} - a}.$$

Donc

$$\mathcal{A} - a = \left(\frac{GH}{GO}\right) \mathcal{B} \qquad (11)$$

En termes modernes, la raison $\frac{GH}{GO}$ vaut $\frac{1}{1+q}$ (à partir de $\frac{q-1}{q^2-1}$) puisque q (q > 1) est la raison de la suite géométrique inscrite en abscisse au départ.

Lorsque $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 1$ (c'est-à-dire $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ si l'on adopte une écriture quotient comme Fermat), cas de la *"première parabole, celle d'Apollonius"*[125], le calcul formel pour les aires des parallélogrammes fournit une série géométrique dont la raison est q élevé à la puissance $\frac{3}{2}$. Cette fois il faut prendre une raison $0 < q < 1$ au départ si l'on veut pouvoir sommer la progression des aires. De sorte que le terme de gauche dans (9) vaut $\frac{1-q^{3/2}}{q^{3/2}}$. Ce n'est pas ce qu'écrit Fermat puisque le même souci d'interprétation géométrique, c'est-à-

[124] P. de Fermat, *De æquationum..*, op. cité, p. 259 :*"Mais, dans ce cas, la raison du premier parallélogramme au second, du second au troisième, etc, sera comme AO à GA, comme le montrera immédiatement la composition des raisons".*
[125] C'est le cas où $y^2 = ax$ (équation cartésienne).

dire de représentation de la série des aires par une série de segments, l'oblige à faire intervenir des moyennes géométriques. Si l'on pose AY comme moyenne géométrique entre AO et AH, (c'est-à-dire $AY = \sqrt{AO.\ AH}$), on aura bien $AY = q^{3/2}\ AG$. La série des aires est ainsi représentée par la série géométrique linéaire : AG, AY, AM, etc. Pour cette série de segments, compte tenu du fait que $q < 1$ et donc que AY donne le plus petit terme, le terme de gauche de (F) vaut :

$$\frac{GY}{AY}.$$

Finalement

$$\frac{GH \times GH}{\mathcal{A} - a} = \frac{GY}{AY}.$$

Puisque a = GH x GE, une astuce de calcul sur les proportions, usuelle au XVIIe siècle, fournit aussi bien

$$\frac{GH \times GE}{\mathcal{A}} = \frac{GY}{AY+GY} = \frac{GY}{AG}.$$

De sorte que[126]

(12) $$\mathcal{A} = \left(\frac{GH}{GY}\right) \mathcal{B}.$$

Remarquons qu'avec la parabole ordinaire, Fermat est passé d'une suite géométrique croissante en abscisse à une suite décroissante des aires ($q < 1$). La suite AG, AY, AO, AM, etc, tend vers O et l'on somme les aires d'une famille de parallélogrammes inscrits dans un carré d'aire finie. Si les calculs **formels** sont les mêmes, la visualisation géométrique ne l'est pas. De fait, voilà la figure correspondante[127] (figure 16) que nous ne donnons qu'à présent [128] :

---

[126] Rappelons que $\mathcal{B}$ est l'aire du parallélogrammme AGxGE.
[127] Fermat dresse effectivement cette figure, mais il change tout à fait les lettres par rapport à la figure *"hyperbolique"* précédente. Nous avons préféré garder les mêmes lettres afin de mieux manifester le parallélisme des calculs.
[128] Si l'on reprend le calcul précédent, on s'aperçoit que le recours à la figure est seulement utile lorsqu'on additionne AY + GY afin d'avoir effectivement GY, et encore peut-on penser cette addtition par le seul fait que la raison q est strictement inférieure à 1.

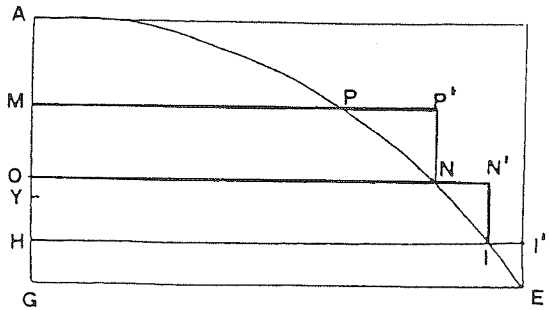
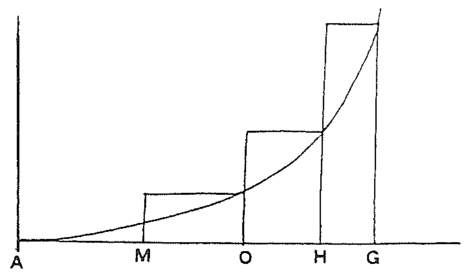


Figure 16

La stabilité des calculs pour des situations géométriques bien différentes (branche infinie ou arc fini de la courbe) établit à l'envi que Fermat adopte une démarche analytique, quoiqu'elle soit ici réduite à la seule algèbre des proportions. Toutefois, on aura noté combien cette algèbre est déjà "numérisée" : les proportions sont manipulées comme de banales fractions numériques.

Relativement au calcul de l'aire de la parabole, Fermat aurait tout aussi bien pu considérer en abscisse la décomposition indiquée à la figure 17, avec une raison $q < 1$, et une parabole dont l'équation cartésienne est $y = ax^2$. Sa méthode géométrique de calcul est tout à fait adaptée.

Figure 17



Il lui aurait suffi de prendre $\alpha = -2$ et $\beta = 1$ pour aboutir à une série de raison q^3 pour les aires ($q < 1$), et interpréter cette série par une série de segments AG, AM, etc, obtenant le rapport $\frac{GM}{AM}$ pour $\frac{1-q^3}{q^3}$ et dès lors, par un calcul semblable de proportions à partir de

$\frac{a}{\mathcal{A}-a} = \frac{\text{GM}}{\text{AM}}$, disposer de la relation :

(13) $$\mathcal{A} = \left(\frac{\text{GH}}{\text{GM}}\right) \mathcal{B}.$$

En choisissant plutôt la disposition parabolique de la figure 16, et en faisant intervenir les moyennes géométriques, Fermat préparait mieux le cas algébrique d'une autre "parabole" (dite semi-cubique) qu'il avait déjà évoqué dans sa *Dissertation géométrique : de la comparaison des lignes courbes avec les lignes droites*[129], parabole déterminée par la relation $\frac{\text{GE}^3}{\text{HI}^3} = \frac{\text{AG}^2}{\text{AH}^2}$. Avec les notations adoptées, ce dernier cas correspond à $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Soit pour la série des aires des parallélogrammes la raison $q^{5/3}$. Par analogie avec le cas de la parabole ordinaire (figure 16), Fermat pose cette fois AT = $q^{5/3}$ AG, c'est-à-dire qu'il insère deux moyennes proportionnelles entre les points G et H et prolonge la progression jusqu'au cinquième point. Le même type de calcul que précédemment fournit :

(14) $$\mathcal{A} = \left(\frac{\text{GH}}{\text{GT}}\right) \mathcal{B}.$$

Bien sûr, Fermat ne s'arrête pas aux seules formules (10), (11), (12), (13) ou (14) qui ne fournissent pas d'aires hyperboliques. Il entend bien obtenir non pas seulement l'aire d'une série de parallélogrammes circonscrits à la courbe, mais l'aire délimitée par la courbe elle-même. Pour ce faire, il raisonne par *"adégalisation"* (*"ut loquitur Diophantus"*), c'est-à-dire qu'**il fait tendre vers 1 la raison q de la suite géométrique de départ**. Et il interprète de façon triple ce passage à la limite, lequel - c'est là une analogie importante - fonctionne tout comme le calcul de la somme d'une série géométrique à partir de l'expression euclidienne pour une série finie (passage de (5) à (8) avec les trois propriétés (H_1), (H_2), et (H_3) déjà évoquées).

(H'_1) D'une part, les aires des parallélogrammes rectilignes tendent vers les aires des parallélogrammes curvilignes, ou plutôt la somme toute entière

aire (GHI'E) + aire (OMP'N) + aire (MPS'P) + ...,

[129] Dissertatio : de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione ; *Œuvres de Fermat*, op. cité, tome I, p. 217-254.

devient égale à l'aire délimitée par la droite EG, l'axe des abscisses et la courbe elle-même, et ceci que la courbe s'étende à l'infini (cas des "hyperboles", aire GED avec la figure (15)) ou soit inscrite à distance finie (cas des "paraboles", aire AGE avec la figure 16). Ceci correspond à (H_1).

(H'_2) D'autre part, une aire telle que celle du parallélogramme GHI'E devient négligeable. Ceci correspond à (H_2).

(H'_3) Enfin, un rapport de deux termes pris dans la suite géométrique est automatiquement remplacé par le rapport des numéros qui repèrent ces termes dans l'ordonnancement de la série géométrique éventuellement complétée par les constructions intermédiaires : ainsi par exemple dans la relation (11), $\frac{\text{GH}}{\text{GO}}$ devient $\frac{1}{2}$ et dans la relation (14), $\frac{\text{GH}}{\text{GT}}$ devient $\frac{3}{5}$. Ceci est l'analogue de (H_3), mais nécessite une explication que nous donnerons un peu plus loin.

A partir de ces trois faits, (H'_1), (H'_2) et (H'_3), et si l'on appelle dans chaque cas $\mathcal{S}$ l'aire totale de la surface curviligne, les formules (10) à (14) donnent respectivement

(15) $$\mathcal{S} = \mathcal{B},$$

(16) $$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \mathcal{B},$$

(17) $$\mathcal{S} = \frac{2}{3} \mathcal{B},$$

(18) $$\mathcal{S} = \frac{1}{3} \mathcal{B},$$

et

(19) $$\mathcal{S} = \frac{3}{5} \mathcal{B}.$$

Non seulement Fermat retrouve la quadrature de la parabole[130] (formule (17)), mais il peut faire le lien quantitatif entre la quadrature et la définition analytique de la courbe considérée, c'est-à-dire inscrire dans le résultat même les coefficients α et β qui entrent dans la définition de la courbe (coefficients nécessairement positifs pour lui). Par l'addition ou la soustraction de ces coefficients, il distingue le cas

[130] Archimède ayant prouvé que l'aire curviligne AGE vaut les $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle rectiligne AGE.

des *"paraboles"* et celui des *"hyperboles"*. Ainsi, pour les *"paraboles"*:

Canon vero ***universalis*** *inde nullo negotio elicietur :* ***patet nempe fore semper parallelogrammum BD ad figuram AICB ut aggregatum exponentium potestatum applicatæ et diametri ad exponentem potestatis applicatæ***[131].

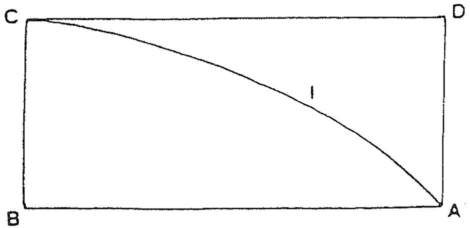


Figure 18

Malgré l'efficacité quantitative du résultat, remarquons qu'il n'est pas besoin de préciser une abscisse et une ordonnée, car elles jouent le même rôle (ce sont tout simplement les appliquées[132]). Seul le choix d'une première détermine bien sûr la seconde, mais en outre il exprime la portion de surface qui est examinée, qu'il s'agisse de BAIC ou de DAIC (figure 18).

Pour les hyperboles, le résultat est tout aussi général :

In ***hyperbolis*** *autem canon non minori facilitate invenietur universalis : erit enim semper in quacumque hyperbole, si recurras ad primam figuram, parallelogrammum BG ad figuram in infinitum protensam RGED ut differentia exponentium potestatum applicatæ et diametri ad exponentem potestatis applicatæ*[133].

[131] Opus cité, p. 265. "*On peut de là tirer facilement une règle universelle. Il est clair en effet que la raison du parallélogramme BD à la figure AICB est toujours égale à celle de la somme des exposants des puissances de l'ordonnée et de l'abscisse à l'exposant de la puissance de l'ordonnée*".
[132] Alors que le traducteur des *Œuvres de Fermat* les distingue malencontreusement.
[133] Opus cité, p. 266. "*Pour les hyperboles, on trouve aussi facilement une règle universelle. Dans une hyperbole quelconque la raison du parallélogramme BG à la figure indéfiniment étendue RGED sera égale à la raison de la différence de l'exposant de la puissance de l'ordonnée et de celui de la puissance de l'abscisse à l'exposant de la puissance de l'ordonnée*".

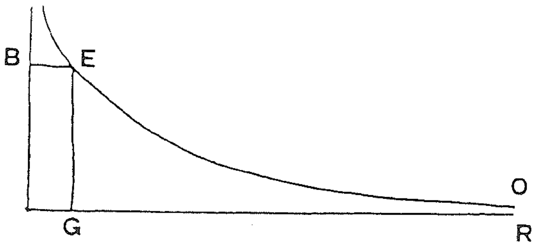


Figure 19

Pourtant, si les hyperboles s'étendent à l'infini, aussi bien en abscisse qu'en ordonnée, les aires ne sont pas finies des deux côtés simultanément, et d'ailleurs pour l'hyperbole ordinaire, celle d'Apollonius, les aires sont infinies des deux côtés, comme Fermat le remarque bien à la suite de Grégoire de Saint-Vincent[134]. De sorte que la règle universelle doit cette fois être précisée ; par exemple par la détermination d'une abscisse où les points de l'hyperbole vont à l'infini et d'une ordonnée : la différence des *"puissances"* ne peut se prendre alors que d'un plus grand à un plus petit. Ainsi avec yx^2 = constante, du côté de l'infini des x, l'aire est finie (différence 2 - 1) ; mais du côté de l'infini des y, on doit écrire xy^2 = constante de sorte que la différence est 1 - 2, qui n'est pas possible[135].

Remarquons que si, dans la démonstration, les coefficients α, β (les puissances des abscisses ou des ordonnées) sont manipulés comme des nombres entiers, ou des quantièmes d'entiers, voire même des rationnels, l'énoncé gomme de telles restrictions et α comme β apparaissent comme des coefficients quelconques (des puissances). Les mathématiciens du XVIIIe siècle, Euler en particulier, maintiendront cette attitude d'un énoncé nettement plus général qu'une démonstration restreinte au cas rationnel, voire entier[136]. Bref

[134] Ce qui lui donne l'occasion de cerner la raison du succès des quadratures en dehors du cas de l'hyperbole ordinaire : les aires des parallélogrammes circonscrits forment une série géométrique, non une série arithmétique.

[135] Dans une lettre à Digby, Fermat explicite ces différences en faisant ressortir une notion géométrique, à savoir le centre de gravité de la portion de surface considérée.

[136] Voir J. Dhombres, "Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle", *Revue d'Histoire des Sciences*, X/2, 1987, pp. 179-202 ou J. Dhombres, Euler et la rigueur mathématique, Actes de l'Université d'été en histoire des mathématiques, Toulouse, 1987, pp. 243-333.

la série géométrique, convenablement manipulée, a conduit à des quadratures fort riches. La méthode repose sur l'adégalisation, manifestée ici par les trois propriétés (H'_1), (H'_2) et (H'_3).

Avec (H'_1) et (H'_2), l'adégalisation, lorsqu'elle porte sur des séries géométriques, se réduit à une continuité que Fermat ne cherche pas à mieux justifier. Une somme discrète d'aires tend vers une aire continue lorsque la raison de la série géométrique, cette sorte d'échafaudage destinée à atteindre le continu, tend vers l'unité. Que la somme discrète soit finie ou infinie ne change rien à la perception de ce qui est posé comme une réalité[137]. **Une réalité géométrique facile à justifier** puisque la somme des morceaux curvilignes, la somme des aires des triangles curvilignes EI'I, IN'N, NP'P, PS'S, etc (figure 15), ne dépasse pas l'aire du parallélogramme GHI'E dont il est facile de prouver la petitesse, c'est-à-dire de la rendre inférieure à une quantité donnée[138] pour reprendre l'expression de Grégoire de Saint-Vincent. L'essentiel est dans cette petitesse. Fermat se débarrasse en tout cas de la justification et fait une référence à la fois lointaine et définitive tant à la tradition de l'exhaustion qu'à un consensus des géomètres. **Il donne ainsi au discret une nette autonomie de calcul.**

"*Imaginons les termes d'une progression géométrique étendue à l'infini : soient AG le premier (terme), AH le second, AO le troisième, etc. Supposons que ces termes soient assez rapprochés les uns des autres pour que, suivant la méthode d'Archimède, on puisse adégaler, comme dit Diophante, ou égaler par approximation le parallélogramme rectiligne GE par GH au quadrilatère mixtiligne GHIE ; nous supposerons de plus que les premiers intervalles rectilignes GH, HO, OM, etc, des termes de la progression soient suffisamment égaux entre eux, pour que l'on puisse facilement employer la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible, par circonscriptions et inscriptions. Il suffit de faire cette remarque une fois pour ne pas s'obliger à revenir et à insister constamment sur un*

[137] La somme des aires des parallélogrammes, dans le cas d'une "hyperbole", si $x^\alpha y^\beta = a$ en est l'équation "cartésienne" avec $\alpha > \beta > 0$, tend vers

$I = a^{1/\beta}\int_x^\infty \frac{dx}{x^{\alpha/\beta}} = \frac{a^{1/\beta}}{\frac{\alpha}{\beta} - 1}\frac{x}{x^{\alpha/\beta}}$. Cette intégrale vaut encore $I = \frac{xy}{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}$, en interprétant xy comme l'aire d'un rectangle. On a précisément l'énoncé de la proposition **universelle** de Fermat.

[138](H'_1) est réduite à (H'_2), laquelle paraît évidente puisque la longueur GH tend vers 0 lorsque q tend vers 1.

article bien connu de tous les géomètres"[139].

Plus subtil sans aucun doute est (H'_3), avec le calcul à la limite (lorsque q tend vers 1) des rapports de termes de la progression qui interviennent dans les égalités (11), (12), (13) ou (14). La justification de Fermat est brutale parce qu'elle se réfère aux logarithmes, ces objets que Grégoire de Saint-Vincent ne mentionne pas du tout dans son *Opus geometricum*:[140] "*propter nostram methodum logarithmicam*" [141] : "*parallelogrammum BD est ad totam figuram in hoc casu ut 5 ad 3*". Dans chaque cas, le calcul moderne consisterait à lever une indétermination 0/0 du genre $\frac{q-1}{q^2-1}$ ($q > 1$), ou $\frac{1-q}{1-q^{3/2}}$ ($q < 1$), ou encore $\frac{1-q}{1-q^3}$ ($q < 1$), ou $\frac{1-q}{1-q^{5/3}}$ ($q < 1$). Voire $\frac{1-q}{1-q^\gamma}$ avec $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$. La limite est évidemment $\frac{1}{\gamma}$ si l'on fait fond sur la technique des développements limités de l'exponentielle et du logarithme. Celle-ci n'est pas présente chez Fermat qui ne s'en réfère pas moins aux logarithmes pour justifier (H'_3). De fait, il considère dans le cas parabolique qu'un segment comme AG est approchable lorsque $q < 1$ par $\frac{1}{q^n}$ GX, où GX est suffisamment petit et n suffisamment grand, c'est-à-dire qu'il considère GX comme l'unité de base et il gradue AG par une progression géométrique. Mais les segments successifs, différence de deux termes de la progression, peuvent être considérés comme égaux : tel est le principe de base pour la constitution d'une table où les logarithmes sont des entiers, table qui ne donne que des valeurs approchées. Dès lors, le rapport de deux termes quelconques de la progression elle-même sont précisément les rapports de leur rang respectif. Dans le cas hyperbolique, le principe est le même à partir de GH, sauf que le segment AD représenté par q^n AG, avec

[139]"*Fingantur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi, quorum primus sit AG, secundus AH, tertius AO, etc, in infinitum, et ad sese per approximationem tantum accedant quantum satis sit ut, juxta methodum Archimedeam, parallelogrammum rectilineum sub GE in GH quadrilineo mixto GHIE adæquetur, ut loquitur Diphantus, aut fere æquetur ; item, ut priora ex intervallis rectis proportionalium, GH, HO, OM et similia, sint fere inter se æqualia, ut commode per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumscriptiones et inscriptiones, Archimedea demonstrandi ratio institui possit : quod semel monuisse sufficiat, ne artificium quibuslibet geometris jam satis notum inculcare sæpius et iterare cogamur*". Opus cité, p. 257.

[140] Nous avons déjà signalé que A. de Sarasa énonce la propriété des logarithmes à propos des aires sous l'hyperbole, mais quasiment sous la dictée de Grégoire de Saint-Vincent.

[141] Op. cité, p. 265.

q > 1, est infini. Mais cela n'est pas un handicap puisque le raisonnement part d'une approximation du logarithme. Autrement dit, Fermat gradue en logarithmes entiers AD aussi bien que AG. C'est maintenant que l'on comprend son insistance quant à la représentation linéaire (par des segments) de la somme des aires des parallélogrammmes ; cette représentation géométrique avait un but de calcul, le calcul logarithmique. Du coup, toute la démonstration prend son sens : on ne peut mieux manifester l'orientation numérique et algébrique donnée par Fermat au vieux résultat euclidien exprimé par la relation (5).

Conclusion

Dans aucun des textes étudiés, que ce soit chez Fermat ou Grégoire de Saint-Vincent, ne se présente l'algorithme du calcul intégral. Dans la préhistoire de ce calcul que nous venons d'évoquer, ce sont les liens entre le continu et le discret qui nous ont intéressé. Par l'intermédiaire de la même série géométrique et de sa sommation, nous pouvons constater que ces liens sont bien différents d'un Grégoire de Saint-Vincent à Fermat.

L'inscription du discret dans une courbe, chez Fermat, est éminemment faite pour dire le continu : la quadrature qui est visée n'est pas numérique, il y a effectivement un équivalent rectiligne, un carré égal à l'aire curviligne, hyperbolique ou parabolique. En ce sens, Grégoire de Saint-Vincent est plus réformiste qui recherche en tant que telles des relations entres des aires, sans avoir besoin de les connaître numériquement ou d'en trouver des équivalents géométriquement plus simples.

Comme Grégoire de Saint-Vincent, Fermat géométrise toutes ses constructions : les séries auxiliaires sont visualisées par des segments, les moyennes géométriques sont construites, etc. La géométrie est donc omniprésente chez les deux auteurs. C'est cependant une géométrie aplatie chez Fermat, une géométrie de la droite et de ses segments, bien proche d'une pratique des nombres réels, et du moins les raisons sont numérisées. La géométrie de Grégoire de Saint-Vincent est plus généreuse, avec deux ou trois dimensions, mais surtout la géométrie reste la visée et la théorie des proportions n'est pas réduite à une théorie des nombres.

Chez Fermat, le discret (représenté par la série géométrique) a acquis une autonomie propre ; s'il porte le calcul des proportions tout comme chez le jésuite belge, il comporte en soi sa légitimation.

Grégoire de Saint-Vincent a antérieurement agi dans ce même sens et sa nouvelle théorie de la somme d'une progression est totalement débarrassée de la géométrie, même si l'itération qui lui a donné naissance dépend d'une expérience géométrique. Par cette façon analytique, Grégoire a marqué les meilleurs esprits de son temps, alors que beaucoup d'autres, tels Barrow, sont constamment tentés par un retour à la géométrie. Cependant, Grégoire de Saint-Vincent n'a pas su ou pas voulu explorer le monde analytique qui s'ouvrait devant lui. Il est comme revenu en arrière, non sans prendre du plaisir à la contemplation de formes nouvelles.

L'adégalisation de Fermat pourrait certes bénéficier du même traitement de réduction à l'absurde dont Grégoire de Saint-Vincent fait une utilisation méticuleuse et comme privilégiée. Mais ce serait perdre son temps car l'opération de limite, confinée dans le texte étudié aux seules séries géométriques, fonctionne désormais d'elle-même. Ansi, alors que Fermat explore un infini dûment canalisé, Grégoire de Saint-Vincent aborde la profusion de l'infini généré par itération. Il s'y perd.

Présentation de l'"arithmetica infinirorum" de John Wallis

par Anne Chevalier
Université Louvain-La-Neuve

Ce qui frappe le mathématicien de cette fin du XXe siècle, à la lecture de l'"Arithmétique des Infinis", c'est d'être plongé dans un traité de mathématique construit essentiellement sur une succession d'inductions basées sur des analogies entre des résultats obtenus expérimentalement (c'est-à-dire à partir de calculs sur quelques valeurs particulières) sans autre forme de justification. Wallis fait défiler devant nous une suite de conjectures dont pratiquement aucune n'est soumise à une preuve de type déductif. Et pourtant, ce traité a réellement fait progresser une question séculaire des mathématiciens, à savoir la recherche des quadratures de surfaces planes délimitées par une courbe et celle des cubatures de solides dont une partie de la surface est courbe. Dix ans plus tard, le célèbre Newton, dont le génie n'est contesté par personne, met en œuvre ces mêmes méthodes pour poursuivre la recherche entamée par son prédécesseur.

Cet article présente l'objet (I) et la méthode (II) de l'"Arithmetica Infinitorum", à partir de traductions de cette oeuvre du latin en français[1] ainsi que les résultats auxquels l'auteur est arrivé (III).

John Wallis, sa vie, son oeuvre

Né en Angleterre en 1616, John Wallis entre en 1632 au Collège Emmanuel à Cambridge qui est le lieu de naissance de son génie mathématique comme il le sera, 30 ans plus tard, pour Newton.

En dépit de sa prédilection pour les mathématiques, Wallis devient un éminent théologien et est ordonné prêtre en 1640, ce qui l'occupe beaucoup et lui laisse peu de loisirs pour ses recherches. Il devient malgré tout un membre très actif de la "Royal Society".

---

[1] Cet article est un résumé d'un mémoire de D.E.A. cité en bibliographie.

C'est en 1647 que son intérêt pour les mathématiques rejaillit grâce à lecture du "Clavis Mathematicae" (Clef des Mathématiques) de Oughtred. Wallis lui dédie son œuvre fondamentale, "Arithmetica Infinitorum", lui exprimant ainsi sa reconnaissance d'avoir renseigné de façon claire et précise ce qu'il recherchait en vain chez les autres mathématiciens[2].

Il obtient en 1649 la chaire de Géométrie à Oxford, place qu'il occupera jusqu'à la fin de sa vie. Cette nomination lui donne enfin l'occasion d'exercer ses talents mathématiques.

En 1655, John Wallis publie deux ouvrages importants. L'un, le "De Sectionibus Conicis Tractatus", est un exposé de géométrie analytique. L'autre, l'"Arithmetica Infinitorum", traite des aires et des volumes à partir d'"indivisibles" auxquels sont associées des suites de nombres. Cet ouvrage a une influence importante sur le développement du calcul infinitésimal au XVII[e] siècle et en particulier sur la recherche du développement du binôme par Newton.

Wallis publie aussi "Mathesis Universalis" (1657) dont le principal intérêt est d'apporter une contribution au développement des notations, "De curbarum rectificatione et complatione" (1659), une recherche sur les courbes et les surfaces, dont un traité sur la cycloïde, "Mechanica, sive tractatus de motu" (1670-1671), un traité de mécanique et "Algebra", un traité d'algèbre en 1685.

Il meurt à Oxford en 1703.

I. Objet de l'"Arithmetica Infinitorum"

Ce traité expose - nous dit Wallis - "*toute la progression de la démonstration, en même temps que la méthode avec laquelle je suis parvenu tant à la quadrature du cercle qu'à celle d'innombrables autres courbes*"[3].

D'emblée, Wallis nous livre ses intentions tant du point de vue de la forme, à savoir combiner la présentation d'une méthode de découverte avec la démonstration des résultats auxquels il parvient, que du fond, arriver à la quadrature du cercle.

Nous allons tenter de montrer, dans cet article, comment et jusqu'où Wallis atteint les objectifs annoncés.

---

2 Wallis, Opera I, A.I., p.357.
3 Idem, p.362.

Dans une première partie, nous présentons les différents principes de la méthode mise en oeuvre par l'auteur ainsi que quelques aspects du traitement de l'infini et de l'infiniment petit proposé par Wallis ; nous exposons ensuite différents résultats auxquels il est parvenu.

II. Principes de la méthode de recherche de Wallis

a) La méthode des indivisibles

La recherche de Wallis s'inscrit dans le prolongement des différentes théories des indivisibles qui prennent naissance dans la première moitié du XVII[e] siècle avec Cavalieri et Torricelli. Voici ce qu'en dit Wallis, dans sa dédicace de l'"Arithmetica Infinitorum".

> "A la fin de l'année 1650, je suis tombé sur les écrits mathématiques de Torricelli [...] dans lesquels il expose, entre autres, la Géométrie des Indivisibles de Cavalieri. Je n'ai jamais eu Cavalieri sous la main et je l'ai cherché bien souvent en vain chez les libraires. Quant à sa méthode, telle qu'elle est relatée par Torricelli, elle m'était d'autant plus agréable que m'était venu à l'esprit je ne sais quel principe du même genre presqu'aussitôt que j'avais abordé la Mathématique ; ce qui est, en effet, soutenu par la plupart à propos du cercle (qui est considéré comme un polygone à un nombre infini de côtés et dont la circonférence est donc formée d'une infinité de côtés infiniment petits) m'était apparu, en changeant ce qui doit l'être, pouvoir s'appliquer utilement ailleurs et il me semblait aussi qu'un certain nombre de choses qu'on trouve çà et là chez Euclide, Apollonius et surtout Archimède allaient dans le même sens. "[4]

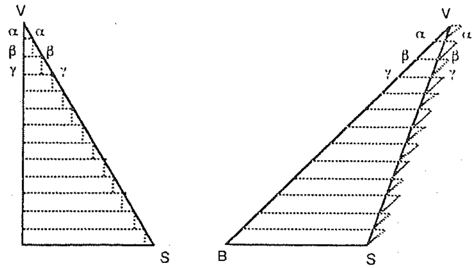
Wallis ne donne pas le détail des principes de Cavalieri et de Torricelli qui ont inspiré sa recherche. Il faut savoir que le concept d' indivisibles chez ces deux auteurs est très éloigné de ce que Wallis présente. Avant de développer la différence entre ces deux approches, penchons-nous sur un extrait de la proposition 1 du traité des Sections coniques[5], dans lequel Wallis présente ce qu'il entend par "indivisibles" :

---

4 Idem, p.357.
5 Notons ici que Wallis ne présente pas le fondement de sa méthode de quadrature dans l'"Arithmétique des Infinis" mais dans le traité des sections coniques dont la publication est contemporaine.

"**PROPOSITION 1** : Des figures planes considérées d'après la méthode des indivisibles.

> Je suppose, pour commencer (conformément à la Géométrie des Indivisibles de Cavalieri), qu'un plan quelconque peut être considéré comme formé par l'assemblage d'une infinité de lignes parallèles, ou plutôt (ce que je préférerais) d'une infinité de parallélogrammes de même hauteur, dont la hauteur de chacun d'eux soit égale à $1/\infty$ de la hauteur totale, c.-à-d. une partie aliquote infiniment petite (posant le signe ∞ pour le signe d'un nombre infini[6]), telle que la hauteur de tous les parallélogrammes pris ensemble soit égale à la hauteur de la figure.[...]"[7]



Il s'agit donc, pour Wallis, de diviser toute figure en une infinité de parallélogrammes infiniment minces. Il ne précise pas comment il procède pour arriver à ce découpage infini, ni ce qu'il entend par infini. Nous reviendrons sur cette question. A ce stade, il faut noter que les "indivisibles" de surface sont, pour Wallis, des surfaces infiniment petites et non des segments obtenus par l'intersection de la surface et d'un plan mobile sécant à celle-ci, comme l'envisage Cavalieri. Wallis présente une notion d'"indivisible" fort proche du concept développé par Roberval.

L'objectif du découpage des figures est la recherche de quadrature, c.-à-d. la comparaison de surfaces dont l'une est inscrite ou circonscrite à l'autre et d'aire connue.

Cavalieri, confronté à cette problématique des quadratures, compare les indivisibles des deux surfaces. Toutefois, des règles très strictes limitent les comparaisons possibles. La décomposition des figures en indivisibles doit se faire suivant la même "règle", c.-à-d. parallèlement à une même droite pour les surfaces et à un même plan pour les volumes. De plus, les indivisibles doivent être en bijection et répartis selon une même densité. Ainsi, les figures comparées ont même hauteur.

[6] Nous donnerons une interprétation possible de"∞" à la section f de ce chapitre.
[7] A.I., p.297.

Les règles énoncées ci-dessus sont tout à fait respectées par Wallis dans son "Arithmetica Infinitorum". Il compare des agrégats d'indivisibles parallèles, en même nombre et en même densité dans les deux figures comparées. Par contre, il se démarque de Cavalieri, dans la mesure où il travaille sur des parallélogrammes infiniment minces et non sur des segments, ce qui lui permet de passer à un travail purement algébrique.

> "Notre méthode prend naissance là où la méthode des indivisibles de Cavalieri s'achève : c'est là le point de départ pour le travail lui-même comme pour son titre (de sorte que si lui a décidé de nommer son œuvre, Géométrie des Indivisibles, moi j'ai décidé d'appeler la mienne Arithmétique des Infinis)."[8].

Pour cela, il associe un nombre à chacun des parallélogrammes, que nous appelons "indivisibles" d'une figure, de telle sorte que la suite des nombres ainsi définie soit dans le même rapport que la suite des "indivisibles".

b) La suite arithmétique des "indivisibles" d'un triangle

Dans la proposition 2 du traité des sections coniques, Wallis nous indique comment il associe une suite arithmétique aux "indivisibles" d'un triangle :

> "Si un triangle est coupé par une droite parallèle à la base, le triangle tronqué est semblable au triangle de départ, et par conséquent ses côtés sont proportionnels (comme il est bien connu). Par conséquent, si un triangle quelconque VBS est sectionné par un nombre quelconque de droites $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, etc. parallèles à la base BS, qui sont espacées également l'une de l'autre et qui par conséquent divisent l'un et l'autre côtés en segments égaux (et donc encore tout le triangle en bandes de même hauteur), ces droites $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$ etc. seront en proportion arithmétique. (Ces droites $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, etc. sont entre elles comme $V\alpha$, $V\beta$, $V\gamma$, etc., c.-à-d. comme 1, 2, 3, etc., à cause des excédents égaux $V\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, etc.) Pour cette raison, si ces droites sont supposées en nombre infini, la série de toutes (ce qui

[8] Idem, p.357.

correspond à l'entièreté du triangle en vertu de la proposition précédente) est l'agrégat d'un nombre infini de droites en proportion arithmétique, dont la plus petite est le point V (à savoir le sommet) et la plus grande est la base BS du triangle.

Et donc, la même chose arrivera si nous supposons qu'un nombre identique de parallélogrammes est compris entre cette infinité de droites dans cette même figure plane, et que la hauteur de chacun d'eux vaut $1/\infty$ de la hauteur du triangle. Ces parallélogrammes sont évidemment en proportion arithmétique puisqu'ils ont même hauteur et sont proportionnels à leur base."[9].

Ainsi, pour d'autres surfaces, la suite des indivisibles sera associée à la suite des carrés ou des cubes ou des racines carrées, etc. d'une suite arithmétique. Une démarche semblable peut être envisagée pour les solides. Il reste à comprendre comment il utilise ces suites pour étudier la quadrature des surfaces ou les cubatures de solides.

c) De la Géométrie des Indivisibles à l'Arithmétique des Infinis

La recherche d'une quadrature revient à comparer une figure à une autre qui lui est inscrite ou circonscrite. Ainsi, on peut étudier le rapport entre la somme des "indivisibles" du triangle ou de toute autre surface et la somme des "indivisibles" du parallélogramme circonscrit, qui se décompose en tout autant d'"indivisibles" égaux au plus grand de ceux de la première surface. Le résultat obtenu est le rapport entre les aires des deux figures comparées. C'est cette recherche qui fait l'objet des premières propositions de l'"Arithmétique des infinis".

Regardons sur quelques exemples comment fonctionne son principe.

Dans le cas d'un triangle de base b et de hauteur h, appelons h/∞ la hauteur infinitésimale de chacun des parallélogrammes et $a = b/\infty$ l'accroissement de longueur entre deux parallélogrammes consécutifs. Ainsi, la suite des indivisibles du triangle est proportionnelle à la suite des bases des parallélogrammes : 0a, 1a, 2a, 3a, ...ou encore à la suite des entiers 0, 1, 2, 3, ... Le parallélogramme circonscrit au triangle se décompose de la même façon en une même infinité de parallélogrammes infinitésimaux de hauteur h/∞ et de longueur égale à la base b. Rechercher la quadrature du triangle revient à calculer le rapport entre la somme des indivisibles du triangle et la somme des

[9] S.C., p.298.

indivisibles du parallélogramme circonscrit, ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{0a + 1a + 2a + 3a + \ldots}{b + b + b + b + \ldots} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + \ldots}{\text{tout autant d'égaux au plus grand}}$$

après simplification par a.

Si la suite des "indivisibles" est comme la suite des carrés d'une suite arithmétique, il s'agira d'étudier le rapport

$$\frac{0a + 1a + 4a + 9a + \ldots}{b + b + b + b + \ldots} = \frac{0 + 1 + 4 + 9 + \ldots}{\text{tout autant d'égaux au plus grand}}$$

Comment Wallis arrive-t-il à calculer ces rapports qui portent sur une infinité de termes ?

d) L'induction basée sur l'analogie

> "Le moyen d'investigation le plus simple pour ceci et pour certains problèmes suivants, est de montrer la chose même jusqu'à un certain point, d'observer les rapports qui en résultent et de les comparer l'un avec l'autre afin qu'une proposition universelle se fasse connaître enfin par induction."[10]

Un des aspects importants de la méthode de découverte mise en œuvre par Wallis est sa recherche constante d'analogies entre les résultats qu'il obtient dans le cadre d'une même problématique, afin de pouvoir induire des résultats nouveaux et plus généraux. Cet aspect de son travail lui donne une véritable force créative dont nous montrerons les fruits dans la suite.

Ainsi pour l'étude des rapports de séries infinies présentées plus haut, il part de l'observation des résultats obtenus dans quelques cas de sommes finies et en déduit, si possible, un résultat général.

C'est ainsi que, dès qu'une recherche portant sur plusieurs problèmes du même ordre lui fait découvrir quelques résultats, il s'évertue à les comparer afin de progresser dans leur généralisation. Il a la conviction que beaucoup de situations (il pense en particulier aux problèmes d'aires et de volumes de figures courbes), qui ont été étudiées jusqu'ici de façon isolée et pour lesquelles les Anciens ont apporté des

[10] A.I., p.365.

solutions au coup par coup, peuvent être traitées comme des cas particuliers d'une problématique plus générale, et donc qu'elles répondent à des lois qu'il faut découvrir à partir de cas particuliers.

Bien sûr, le mathématicien soucieux de rigueur sera souvent étonné de ce que Wallis démontre rarement les résultats qu'il obtient de cette façon. En effet, notre auteur cherche seulement à être confirmé soit par des résultats démontrés par d'autres, antérieurement, dans un cadre axiomatique rigoureux et accepté par tous, soit par la cohérence interne de son système.

Il est clair que cette façon de procéder ne plaît pas à tous. Fermat est un de ses opposants farouches. Wallis consacre le chapitre 79 de son traité d'algèbre, dont le titre fait référence explicitement aux réserves de Fermat, à cette question

> "Moi, je considère l'induction comme une remarquable méthode de recherche puisqu'elle nous mène à la découverte de lois générales ou du moins nous conduit près de celles-ci. Et chaque fois que ce type de recherche fait surgir un résultat évident par l'observation, il n'est pas nécessaire (bien que la chose soit possible) d'en donner une démonstration ultérieure."[11]

e) La méthode de Wallis confrontée avec celle des Anciens

Cette façon de procéder et d'avancer des résultats est nouvelle et choquante, pour qui est soucieux de rigueur et formé à l'école des Eléments d'Euclide, où toute proposition nouvelle se doit d'être justifiée à partir des définitions, axiomes et propositions qui précèdent. Ainsi, puisqu'à ce stade aucun traitement axiomatique de l'infini n'a pu être mis en place, il n'est pas question de démontrer une égalité entre deux quantités après une infinité d'étapes.

Il faut donc contourner la question de l'infini par des raisonnements par l'absurde dits d'"exhaustion" qui présentent les inconvénients d'être lourds à manipuler, de nécessiter un développement spécifique à chaque cas étudié ainsi que la connaissance du résultat final avant de commencer.

Avec les différentes théories des indivisibles, une nouvelle approche des mathématiques s'introduit au XVII[e] siècle, ouvrant la porte à l'usage des infiniment petits et des processus infinis. Ces outils ont permis de découvrir et d'avancer de nombreux résultats nouveaux qui

11 Wallis, Opera 2, Algebra, p331.

s'accordent avec ceux déjà démontrés par les Anciens. Le souci des mathématiciens de cette école est de fournir des raisonnements qui éclairent le lecteur sur la démarche suivie pour obtenir les résultats plus que de convaincre de la vérité de ceux-ci par des voies très éloignées de la découverte.[12]

C'est dans ce contexte qu'il faut situer Wallis afin de comprendre les différentes remarques qu'il fait tout au long de son exposé.

> "Il aurait peut-être été plus habile (si je ne m'étais attaché qu'à me faire une réputation) de cacher la méthode grâce à laquelle nous sommes parvenus jusqu'ici et d'exposer quelques propositions particulières (commme s'il s'agissait de quelque chose d'admirable ou même de stupéfiant) par des démonstrations apagogiques. Ce que je soupçonne que les Anciens ont fait souvent dans le passé ; ils semblent très souvent s'être donné pour but d'être admirés plutôt que compris, ou du moins de voir les autres, à la suite de leurs démonstrations, donner leur assentiment plutôt que de comprendre la marche authentique du problème. Voilà, je crois, la raison pour laquelle leur "analytique" a été presque entièrement cachée à la postérité (qu'ils en aient pourtant possédé une, cela est assez clair par de nombreux indices dans beaucoup de démonstrations)."[13]

Nul doute, pour Wallis et pour d'autres, que les Anciens maîtrisaient des techniques qui leur permettaient de découvrir de nouveaux résultats et qu'ils ne révélaient pas, peut-être pour les raisons évoquées ci-dessus, mais surtout par ce qu'elles impliquaient l'usage des infiniments petits et des processus infinis. Par contre, au XVII[e] siècle, les nouveaux géomètres, passant outre la rigueur euclidienne, cherchent à livrer leur méthode de recherche en même temps que leurs résultats :

> "J'aurais, certes, plutôt attendu des remerciements qu'une accusation, pour avoir indiqué ouvertement et loyalement, non seulement où j'étais arrivé, mais encore quelle route j'avais suivie."[14]

Wallis n'estime pas nécessaire de donner au lecteur, en plus des développements qu'il présente, toutes les démonstrations sous forme de

12 voir à ce sujet les articles d'Evelyne Barbin, cités dans la bibliographie.
13 A.I., p.412.
14 Wallis, Lettre à Digby du 1er décembre 1657, dans Fermat, Oeuvres, tome 3.

raisonnements par l'absurde, ce dont tout le monde - pense-t-il - est capable :

> "Quant à moi, ces démonstrations que j'ai produites en suivant la "Méthode des Indivisibles" de Cavalieri me suffisent (puisque je l'ai trouvée déjà admise par les géomètres). "[15]

A cette époque, en effet, la méthode de Cavalieri est admise, sans être fondée. Nous voyons que, de son côté, Wallis fait des tentatives pour justifier sa propre méthode, en faisant différents commentaires au sujet du traitement de l'infini.

f) Le traitement de l'infini et de l'infiniment petit

L'extrait ci-dessous est la suite de la proposition 1 du traité des Sections coniques, où Wallis tente de préciser ce qu'il entend par "indivisible":

> "Quelle que soit la façon dont on aborde la question (soit par une infinité de lignes parallèles, soit par une infinité des parallélogrammes de même hauteur, inscrits entre ces lignes), cela revient au même. En effet, un parallélogramme dont la hauteur est supposée infiniment petite, c.-à.d. nulle (car une quantité infiniment petite est tout à fait la même chose qu'une non-quantité), est à peine autre chose qu'une ligne. (Ces deux objets diffèrent au moins en ceci qu'on suppose que la ligne est dilatable, c.-à-d. qu'elle a au moins une épaisseur si petite que, par une multiplication infinie, elle puisse acquérir une certaine hauteur ou largeur, aussi grande que celle de la figure elle-même.) Par conséquent, dans ce qui suit (en partie parce que cette façon de parler semble avoir fait ses preuves dans la méthode de Cavalieri sur les Indivisibles, en partie aussi pour veiller à être bref), nous nommerons quelquefois lignes plutôt que parallélogrammes ces parties infiniment petites (c.-à-d. dont la hauteur est infiniment petite), du moins lorsqu'on ne considère pas une hauteur déterminée. Par contre, dès qu'on envisagera une hauteur définie (ce qui aura lieu quelquefois), il faudra tenir compte de cette hauteur réduite dans la mesure exacte où celle-ci, multipliée à l'infini, est supposée égaler la hauteur totale de la figure."[16]

[15] A..I., p.383.
[16] S.C., p.297.

Toute l'oeuvre de Wallis est traversée par ce double regard sur l'infini, à savoir $1/\infty$ égale zéro ou bien $1/\infty$ est une quantité telle qu'elle puisse être remultipliée par ∞ pour donner 1 c.-à-d. $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$.

Tantôt les quantités infiniment petites sont des quantités évanescentes, qui peuvent se rapprocher de 0 d'aussi près qu'on veut. Tantôt, un infiniment petit se définit comme l'inverse d'une quantité infiniment grande et possède une existence propre. On peut y appliquer les règles du calcul algébrique.

Wallis oscille donc, dans le cours de son œuvre, entre une conception de l'infini se rapprochant de la vision relevant aujourd'hui de l'analyse non standard au sens de Nelson et celle de notre analyse classique.

Ainsi, dans la proposition 1 des sections coniques, on perçoit l'infini noté "∞" comme un naturel plus grand que tous les autres. Il pourrait correspondre à un infiniment grand en analyse non standard, noté "ω" et défini comme étant un entier plus grand que tous les naturels standard. Son inverse $1/\omega$ est donc un infiniment petit strictement positif, plus petit que tous les réels standard. Peut-on dire que $1/\omega$ soit égal à 0 ? Non, en analyse non standard, on dit que qu'il est infiniment voisin de 0, différent de 0.

Par contre, quand Wallis exprime qu'une quantité infiniment petite s'évanouit et s'annulle, il effectue un passage à la limite, dans le sens de l'analyse classique : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Aujourd'hui, lorsque nous écrivons les égalités : $1/\infty = 0$ ou $\infty + 1 = \infty = \infty - 1$, nous sous-entendons ces passages à la limite. Et les difficultés auxquelles l'auteur est confronté proviennent de cette oscillation entre son acceptation et son rejet des infinitésimaux.

Il est clair que ces deux approches se rejoignent, mais qu'il importe de bien les distinguer. Travailler avec les deux regards en même temps peut être source d'erreurs.

III. Résultats auxquels Wallis est arrivé

a) La quadrature de la parabole.

Dès les premières propositions de l'"Arithmetica Infinitorum", Wallis s'attaque au comportement du rapport

$$\frac{0a + 1a + 2a + 3a + \ldots}{b + b + b + b + \ldots} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + \ldots}{\text{tout autant d'égaux au plus grand}}$$

pour lequel il trouve comme résultat 1/2 à partir de l'observation de quelques cas finis.

Ensuite, il s'attaque à l'étude du rapport

$$\frac{0a + 1a + 4a + 9a + \ldots}{b + b + b + b + \ldots} = \frac{0 + 1 + 4 + 9 + \ldots}{\text{tout autant d'égaux au plus grand}}$$

de la façon suivante :

"**PROPOSITION 19 : Lemme** : Soit une suite de quantités en proportion arithmétique en raison double (c.-à-d. comme la suite des nombres carrés), croissant continuellement, qui débute par un point ou zéro (par exemple comme 0, 1, 4, 9, 16,...) ; nous cherchons à connaître le rapport de cette série à la série de tout autant d'égaux au terme le plus grand.

Que la recherche se fasse au moyen de l'induction (comme dans la proposition 1) et on aura que :

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$
$$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$
$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$
$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} \text{ [...] et}$$

ainsi de suite.

Le rapport qui en ressort est toujours supérieur à 1/3. Quant à l'excès, il décroît sans interruption dans la mesure où le nombre de termes augmente, à savoir 1/6, 1/12, 1/18, 1/24, 1/30, 1/36, etc. dont le dénominateur des fractions (ou conséquent du rapport) augmente, comme on le voit, dans chaque cas d'un multiple de six (comme cela est évident) de sorte que l'excès du rapport obtenu au-delà de 1/3 est comme 1 est à six fois le nombre de termes au-delà de 0.

PROPOSITION 20 : Théorème : *Soit une suite de quantités en proportion arithmétique en raison double (c.-à-d. comme la suite des nombres carrés), croissant continuellement, qui débute par un point ou zéro ; le rapport de cette série à la série de tout autant d'égaux au terme le plus grand excèdera 1/3 ; et l'excès sera le rapport entre l'unité et six fois le nombre de termes au-delà de 0, ou encore entre la racine carrée du premier terme et six fois la racine carrée du terme maximum.*

Ainsi (si le terme situé après 0 vaut 1, et le dernier L) la somme vaut $\frac{l+L}{3} L^2 + \frac{l+L}{6L} L^2$.[...]

Avec le nombre croissant de termes, l'excès au-delà de 1/3 diminue continuellement, de sorte qu'il finit par devenir plus petit que n'importe quelle quantité donnée (comme cela est évident). Si on continue à l'infini, il s'évanouira finalement."[17]

Wallis fait donc apparaître la suite des excès, 1/6, 1/12, 1/18, 1/24, ... qu'il exprime, à la proposition 2, sous la forme 1/6L où L correspond au plus grand terme. Que peut-il dire du comportement d'une telle suite dont le dénominateur augmente en proportion arithmétique ? Il estime que, comme il est toujours possible de trouver dans la suite un terme plus petit que toute quantité donnée, le terme 1/6L s'évanouit à l'infini. Cette conviction permet à Wallis de conclure que :

"**PROPOSITION 21 : Théorème** : *Soit une suite infinie de quantités en proportion arithmétique en raison double (c.-à-d. comme la suite des nombres carrés), croissant continuellement, qui débute par un point ou zéro (par exemple comme 0, 1, 4, 9, 16,...) ; le rapport de cette série à la série de tout autant d'égaux au terme le plus grand sera comme 1 est à 3.*

Ceci est évident d'après ce qui précède.

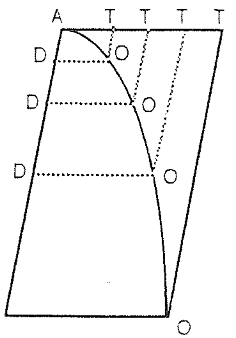
PROPOSITION 22 : Théorème : *Et pour cette raison, le cône ou la pyramide est au cylindre ou au prisme (de même hauteur et de même base) comme 1 est à 3.*

Nous supposons, en effet, que le cône aussi bien que la pyramide sont constitués d'une infinité de figures planes, semblables et parallèles, en raison double d'une suite arithmétiquement proportionnelle, dont le minimum est le point

[17] A.I.,p.373-374.

et le maximum la base (en vertu de ce que nous avons dit à la proposition 6 des sections coniques) tandis que le cylindre ou le prisme sont constitués de tout autant de surfaces égales à la plus grande (comme il est évident). En vertu de ce qui précède, le rapport est donc de 1 à 3.

PROPOSITION 23 : Corollaire : *De la même façon, le complément de la demi-parabole (à savoir la figure AOT qui, avec la demi-parabole remplit le parallélogramme) est au parallélogramme TD (construit sur la même base ou de base égale et de même hauteur) comme 1 est à 3. (Et par conséquent, la demi-parabole même est au même parallélogramme comme 2 est à 3.)*



Soit, en effet, la figure AOT de sommet A, de diamètre AT, de base TO, et un nombre quelconque de parallèles à celle-ci (entre la base et le sommet) TO, TO, etc. Puisque les droites DO, DO, etc. (en vertu de la proposition 21 des Sections Coniques) sont comme les racines carrées des droites AD, AD, etc.[18]

Les droites AD, AD, etc. et aussi TO, TO, etc. seront, par contre, en raison double [comme les carrés] des mêmes DO, DO, etc. et aussi des AT, AT, etc.

La figure entière AOT (constituée d'une infinité de droites TO, TO, etc. en raison double des droites AT, AT, etc., en proportion arithmétique) sera au parallélogramme de même hauteur TD (constitué de tout autant de droites égales au maximum des TO) comme 1 est à 3 en vertu de la proposition 21. (Ce qui devait être démontré.)

Et par conséquent, la semi-parabole AOD (le reste du parallélogramme) est au même parallélogramme comme 2 est à 3." [19]

b) La démarche de généralisation pour tous les paraboloïdes.

L'objectif de Wallis, en introduisant son calcul sur les suites de nombres, n'est évidemment pas de trouver la quadrature du triangle et

[18] "in subdupliata ratione rectarum"
[19] Idem, p.374.

de la parabole, toutes deux bien connues depuis des siècles. Par contre, confirmé dans sa méthode par l'adéquation entre les résultats qu'il obtient et ceux démontrés par les Anciens, il va explorer cette méthode aussi loin que possible pour trouver de nouveaux résultats.

C'est ainsi que, dans la lignée des suites arithmétiques d'une part et en raison double de celles-ci d'autre part, Wallis étudie, dans les propositions 39 à 42, le rapport de la somme des cubes d'une suite arithmétique à tout autant d'égaux au plus grand, en passant par les mêmes étapes que dans les deux cas précédents. Il trouve un rapport de 1 à 4. Et il poursuit immédiatement de la façon suivante :

"**PROPOSITION 44 : Théorème** : C'est pourquoi, si on considère une suite infinie de quantités, commençant par un point ou 0, augmentant continuellement en proportion arithmétique (suite que j'appelle suite de "Latérales" ou du premier ordre [Primanorum], ou leurs carrés, leurs cubes, leurs puissances quatrièmes, etc. (que j'appelle séries du deuxième ordre [Secundanorum], du troisième ordre [Tertianorum], du quatrième ordre [Quartanorum], etc.), le rapport de toute la série à la série de tout autant de termes égaux au terme le plus élevé est comme ce qui est indiqué dans le tableau qui suit:

égaux	1/1		1
premier ordre	1/2		2
deuxième ordre	1/3		3
troisième ordre	1/4	ou comme 1 à	4
quatrième ordre	1/5		5
cinquième ordre	1/6		6
sixième ordre	1/7		7 [...]

Et ainsi de suite. Ainsi les dénominateurs des fractions, c.-à-d. les conséquents des rapports, sont arithmétiquement proportionnels à partir de l'unité. Le numérateur ou antécédent est commun, à savoir 1.

PROPOSITION 45 : Corollaire : Cela nous enseigne une méthode pour chercher l'aire du complément de la parabole, et du paraboloïde cubique, du biquadratique, du sursolide ou de n'importe quelle puissance supérieure et, par conséquent, de l'aire même de la parabole ou des paraboloïdes de n'importe quelle puissance. [...]"[20]

[20] Idem, p.384.

Jusqu'ici, Wallis n'a fait que réexprimer et généraliser, à partir d'une méthode nouvelle certes, des résultats déjà découverts par d'autres mathématiciens de son époque, en particulier Cavalieri. La spécificité de notre auteur se situe dans l'extension de cette loi de quadrature, vérifiée pour tous les paraboloïdes à puissance entière, aux puissances fractionnaires et même négatives. C'est un raisonnement basé sur l'analogie qui permet à Wallis de conclure de la façon suivante :

"**PROPOSITION 54 : Théorème** : [...] Le rapport de la somme de toutes les racines à la série de tout autant d'égaux au maximum sera comme ce qui suit dans ce tableau :

racines carrées	2/3		1 1/2
racines cubiques	3/4	ou comme 1 à	1 1/3
racines quatrièmes	4/5		1 1/4
racines cinquièmes	5/6		1 1/5
[...]	et ainsi de suite." [21]		

et de façon plus générale, pour toutes les puissances fractionnaires :

"**PROPOSITION 64 : Théorème** : Soit une suite infinie de quantités, commençant par un point ou 0, et croissant continuellement en raison d'une puissance quelconque soit simple soit composée de simples, alors le rapport du tout à la série de tout autant d'égaux au plus grand, est ce que l'unité est à l'indice de la puissance augmenté de 1." [22]

Wallis obtient donc un résultat équivalent, en termes actuels, à $\int_0^1 x^q\,dx = \frac{1}{q+1}$ pour toute puissance q rationnelle positive. Dans la foulée de sa généralisation, il n'hésite pas à dire, sans aucune forme de justification, que :

"Si l'indice supposé est irrationnel, par exemple $\sqrt{3}$, le rapport sera comme 1 est à $1+\sqrt{3}$".

Wallis poursuit sa réflexion en regardant comment la proposition 64 s'applique aux indices négatifs. Il tombe sur 1/0, qui vaut l'infini, pour la série de puissance -1, et sur des valeurs négatives, qu'il interprète comme étant égales à plus que l'infini, pour toutes les

[21] Idem, p. 390.
[22] Idem, p. 395.

puissances inférieures à -1. On sent, à ce stade de la réflexion, que Wallis s'arrange pour conserver la cohérence de sa théorie mais qu'il est mal à l'aise avec les résultats qu'il obtient. Ceci ne l'amène cependant pas à revoir l'ensemble de sa démarche.

c) La quadrature du cercle

Comme nous l'avons déjà signalé dans la présentation de l'œuvre, l'objectif principal de Wallis est de "*découvrir comment quarrer le cercle, ou bien qu'il ne peut pas se quarrer mais qu'au moins il en sortirait quelques mesures qui vaudraient la peine*"[23].

Ce problème de la quadrature du cercle a occupé bien des esprits depuis l'antiquité et il semble important de signaler que Wallis fait entrer cette recherche dans une nouvelle phase. En effet, de l'antiquité au XVIIe siècle, les recherches sur la quadrature du cercle tournent autour de la question de savoir si on peut construire, à la règle et au compas, un carré de même aire qu'un disque donné. Autrement dit, il s'agit d'évaluer l'aire ou la circonférence du cercle par celles de polygones inscrits ou circonscrits à ce cercle.

La deuxième période coïncide avec le développement du calcul infinitésimal. La question n'est plus de tenter de construire un carré de même aire qu'un disque, mais bien d'approcher le rapport de l'aire du disque à celle du carré circonscrit le plus précisément possible, et de savoir si ce rapport peut s'exprimer comme rapport de deux entiers ou, à défaut, être approché par une expression à l'aide d'entiers. Wallis arrive, à la fin des développements qu'il propose dans ce traité, à exprimer $\frac{4}{\pi}$ sous la forme

$$\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \ldots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \ldots}.$$

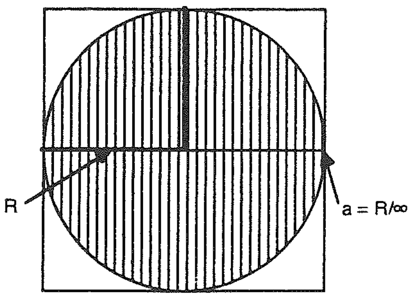
C'est la première formule permettant d'approcher π uniquement à l'aide d'entiers. Très vite après Wallis, on voit apparaître de nombreuses séries convergeant vers ce rapport. Il ne revient toutefois pas aux mathématiciens du XVIIe de démontrer que π est irrationnel, même s'ils en sont convaincus.

La méthode d'approche utilisée par Wallis est particulièrement originale. Ce qui suit en retrace les différentes étapes.

[23] Idem, p.258.

La suite associée aux indivisibles du quart de disque

Comme il l'a fait pour toutes les autres figures planes rencontrées jusqu'à présent, Wallis considère le disque comme étant constitué d'une infinité de parallélogrammes infiniment minces juxtaposés et en déduit que



"**PROPOSITION 121 : Corollaire** :

Pour cette raison, le cercle a au carré du diamètre (ou l'ellipse à un de ses parallélogrammes circonscrits) le même rapport que la série des racines carrées de la différence terme à terme de la suite infinie des égaux et de la suite du second ordre a à la série des égaux.

En effet, si on appelle R le rayon de ce cercle (dont une partie infiniment petite $R/\infty = a$), et que des perpendiculaires, ou “sinus recti”, en nombre infini sont placées sur le rayon de façon à couvrir le quadrant, alors ces perpendiculaires seront les moyennes proportionnelles entre les segments du diamètre (comme cela est bien connu) c.-à-d.

entre	$R + 0$,	$R + 1a$,	$R + 2a$,	$R + 3a$, etc.
et	$R - 0$,	$R - 1a$,	$R - 2a$,	$R - 3a$, etc.

dont les rectangles sont :

$$R^2 - 0 \quad R^2 - 1a^2 \quad R^2 - 4a^2 \quad R^2 - 9a^2, \text{ etc}$$

et les moyennes proportionnelles sont :

$$\sqrt{R^2 - 0} \qquad \sqrt{R^2 - 1a^2} \qquad \sqrt{R^2 - 4a^2} \qquad \sqrt{R^2 - 9a^2}$$

Ainsi, quel que soit le rapport de l'agrégat des racines carrées universelles à la somme d'autant de termes égaux à leur maximum (le rayon), tel est le rapport entre le quart de cercle (qui est constitué des premières) et le carré du rayon (qui est constitué des autres), au point que cela correspond au rapport

entre le cercle entier et le carré du diamètre. "Ce qui devait être montré". [24]

Il s'agit donc de calculer l'équivalent de $\int_0^1 (1 - x^2)^{1/2}\, dx$. Or, à partir de ce qui précède, Wallis peut, en développant les termes, calculer les rapports correspondant aux séries dont le terme général est du type $(R^q - (ka)^q)^n$ (avec q rationnel et n entier) et qui correspondent à $\int_0^1 (1 - x^q)^n\, dx$. $\int_0^1 (1 - x^2)^{1/2}\, dx$ échappe donc à ces possibilités puisque Wallis ne connait pas de développement polynomial de $(1 - x^2)^{1/2}$.

La quadrature du cercle par interpolation

En vue d'approcher au mieux la quadrature du cercle, l'idée de Wallis est d'étudier dans quelle mesure, il est possible de trouver le rapport de la série de terme général $(R^2 - k^2a^2)^{1/2}$ à tout autant de termes égaux à R, par interpolation[25] entre le premier et le deuxième terme de la suite des rapports correspondant aux séries dont les termes généraux sont :

$$(R^2 - k^2a^2)^0 ,\ (R^2 - k^2a^2)^1 ,\ (R^2 - k^2a^2)^2 ,\ (R^2 - k.^2a^2)^3$$

et qui valent 1, 2/3, 8/15, 48/105, ...Ces nombres forment une suite de premier terme 1 et dont l'élément d'ordre n, qui correspond à $\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx$, s'obtient en multipliant l'élément d'ordre n-1 par $\frac{2n-2}{2n-1}$.

La loi de formation de cette suite ne s'applique qu'à des valeurs de puissances entières. C'est ainsi que la première démarche d'interpolation en vue d'approcher la quadrature du cercle n'aboutit pas, du moins immédiatement.

Wallis en entame une autre après avoir transformé la notation de l'expression

$$(R^2 - k^2a^2)^{1/2} \text{ en } (\sqrt[1/2]{R} - \sqrt[1/2]{ka})^{1/2}.$$

Il calcule les rapports correspondants des séries dont les termes généraux sont les suivants :

---

[24] Idem, p.417.

[25] Par "interpolation", Wallis entend intercaler, entre les termes d'une suite donnée, d'autres termes se conformant autant que possible aux lois de formation des termes en place.

$(R-ka)^0$, $(R-ka)^1$, $(R-ka)^2$, $(R-ka)^3$, etc.

$(\sqrt[2]{R}-\sqrt[2]{ka})^0$, $(\sqrt[2]{R}-\sqrt[2]{ka})^1$, $(\sqrt[2]{R}-\sqrt[2]{ka})^2$, $(\sqrt[2]{R}-\sqrt[2]{ka})^3$,

$(\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{ka})^0$, $(\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{ka})^1$, $(\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{ka})^2$, $(\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{ka})^3$,

$(\sqrt[4]{R}-\sqrt[4]{ka})^0$, $(\sqrt[4]{R}-\sqrt[4]{ka})^1$, $(\sqrt[4]{R}-\sqrt[4]{ka})^2$, $(\sqrt[4]{R}-\sqrt[4]{ka})^3$,

dont les dénominateurs des rapports sont rassemblés dans le tableau de la proposition 132.

> "**PROPOSITION 132 : Théorème** : Si de la suite infinie des égaux, on soustrait une suite analogue du premier ordre [...], des racines carrées, des racines cubiques, etc., ces différences et les carrés, les cubes, les quatrièmes puissances, etc. de celles-ci auront le même rapport à la somme des égaux qu'a l'unité au nombre indiqué dans le tableau ci-dessous :

différence de la série d'égaux à la série	égaux [n=0]	résidus [n=1]	carrés [n=2]	cubes [n=3]	4e puis. [n=4]	5e puis. [n=5]	6e puis. [n=6]	7e puis. [n=7]	
nulle	1	1	1	1	1	1	1	1	
égaux	1	2	3	4	5	6	7	8	$(R-a)^n$
racines carrées	1	3	6	10	15	21	28	36	$(\sqrt[2]{R}-\sqrt[2]{a})^n$
racines cubiques	1	4	10	20	35	56	84	120	$(\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{a})^n$
racines quatrièmes	1	5	15	35	70	126	210	330	$(\sqrt[4]{R}-\sqrt[4]{a})^n$
racines cinq.	1	6	21	56	126	252	462	924	$(\sqrt[5]{R}-\sqrt[5]{a})^n$
racines sixièmes	1	7	28	84	210	462	924	1716	$(\sqrt[6]{R}-\sqrt[6]{a})^n$

> et ainsi de suite
> (...). Chacun des nombres intermédiaires du tableau est la somme des deux termes qui lui sont proches, situés l'un au-dessus, l'autre à gauche."[26]

C'est ici que l'écriture du terme général des indivisibles du cercle sous la forme $(\sqrt[1/2]{R}-\sqrt[1/2]{ka})^{1/2}$ prend tout son sens. En effet, Wallis imagine qu'on va trouver le dénominateur du rapport correspondant, intercalé entre les première et deuxième colonnes et les première et deuxième lignes du tableau de la proposition 132, puisque l'exposant

26 Idem, p.424.

1/2 est la moyenne entre les exposants 0 et 1 et $\sqrt[1/2]{\ }$ est l'intermédiaire entre $\sqrt[0]{\ }$ et $\sqrt[1]{\ }$. C'est pourquoi il exprime que :

> "*1/$\square$ sera le rapport de 1 au nombre interposé entre 1 et 2, dans la suite des nombres diagonaux du tableau de la proposition 132. On appellera dorénavant ce nombre* $\square$"[27]

Wallis va donc intercaler une nouvelle ligne et une nouvelle colonne entre chacune d'elles et créer ainsi un grand nombre de cases vides qu'il va remplir sur base de l'observation du comportement des suites d'indices entiers. C'est ainsi qu'il obtient à la proposition 189 un tableau du type suivant :

> "**PROPOSITION 189 : Théorème** : [...] Si le nombre désigné par la notation $\square$ est supposé connu, tous les autres seront aussi connus : [...]

	1	2 monades	3	4 nombres latéraux	5	6 nombres triangul.	7	8 nombresp yramid.
1	∞	1	$\frac{1}{2}\square$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\square$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}\square$	$\frac{15}{48}$
2:monades	1	1	1	1	1	1	1	1
3	$\frac{1}{2}\square$	1	$\square$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}\square$	$\frac{105}{48}$
4: nombres latéraux	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
5	$\frac{1}{3}\square$	1	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}\square$	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}\square$	$\frac{315}{48}$
6: nombres triangulaires	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10
7	$\frac{4}{15}\square$	1	$\frac{8}{5}\square$	$\frac{7}{2}$	$\frac{6}{4}\square$	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15}\square$	$\frac{693}{48}$
8: nombres pyramidaux	$\frac{15}{48}$	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10	$\frac{693}{48}$	20

L'estimation de la valeur de $\square$ se fait, à la proposition 191, à partir de la troisième ligne du tableau ci-dessus :

> "**PROPOSITION 191 : Problème** : Nous recherchons ce que vaut le terme $\square$ (du tableau de la proposition 189) le plus près possible en nombres parfaits.

27 Wallis, prop.167, p.441.

Afin de faciliter la recherche, les termes de la progression
$\frac{1}{2}\square, 1, \square, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\square, \frac{3 \times 5}{2 \times 4}, \frac{4 \times 6}{3 \times 5}\square, \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6}$, etc. sont appelés : α, a, β, b, γ, c, δ, d, etc.

[...] $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{1}, \frac{b}{a} = \frac{3}{2}, \frac{\gamma}{\beta} = \frac{4}{3}, \frac{c}{b} = \frac{5}{4}, \frac{\delta}{\gamma} = \frac{6}{5}$, etc.

C'est ainsi (puisque les rapports obtenus par multiplication continue décroissent perpétuellement) qu'on a

le carré de $\frac{\beta}{a}$ est plus petit que $\frac{a}{\alpha} \times \frac{\beta}{a} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{1}$ et donc $\frac{\beta}{a}$ est plus petit que $\sqrt{2} = \sqrt{1\frac{1}{1}}$

le carré de $\frac{\beta}{a}$ est plus grand que $\frac{\beta}{a} \times \frac{b}{\beta} = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ et donc $\frac{\beta}{a}$ est plus grand que $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1\frac{1}{2}}$

et par conséquent $\beta = a \times \frac{\beta}{a} = \square$ est plus petit que

$1\sqrt{2} = 1\sqrt{1\frac{1}{1}}$ et plus grand que $1\sqrt{\frac{3}{2}} = 1\sqrt{1\frac{1}{2}}$." 28

Si on part de l'hypothèse (utilisée mais non justifiée par Wallis) qu'on a toujours, par exemple, pour trois termes consécutifs, x, y, z, de la suite citée plus haut, que $\frac{y}{x} > \frac{z}{y}$ et donc $y^2 > xz$, on peut poursuivre le calcul de la façon suivante :

$1 > \frac{1}{2}\square^2$ d'où $\square < \sqrt{2}$; $\square^2 > \frac{3}{2}$ d'où $\square > \sqrt{3/2}$;

$\frac{3x3}{2x2} > \frac{4}{3}\square^2$ d'où $\square < \frac{3x3}{2x4}\sqrt{4/3}$;

$\frac{4x4}{3x3}\square^2 > \frac{3x3x5}{2x2x4}$ d'où $\square > \frac{3x3}{2x4}\sqrt{5/4}$;

$\frac{3x3x5x5}{2x2x4x4} > \frac{4x4x6}{3x3x5}\square^2$ d'où $\square < \frac{3x3x5x5}{2x2x4x6}\sqrt{6/5}$

et ainsi de suite.

---

28 Idem, p.467.

Wallis en conclut que :

"$\square$ est plus petit que

$$\frac{3x3x5x5x7x7x9x9x11x11x13x13}{2x4x4x6x6x8x8x10x10x12x12x14} \times \sqrt{14/13}$$ et

$\square$ est plus grand que

$$\frac{3x3x5x5x7x7x9x9x11x11x13x13}{2x4x4x6x6x8x8x10x10x12x12x14} \times \sqrt{15/14}$$

Et ainsi de suite jusqu'où on veut. [...]

Et par cette opération, on ira jusqu'à ce que la différence entre le plus grand et le plus petit soit rendue plus petite que toute quantité donnée (qui, par conséquent, s'évanouira finalement si on poursuit l'opération à l'infini)." 29

"Nous disons que la fraction
$\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \text{etc.}}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \text{etc.}}$ ou $\frac{9 \times 25 \times 49 \times 81 \text{ etc.}}{8 \times 24 \times 48 \times 80 \text{ etc.}}$ se poursuivant à l'infini est exactement le nombre recherché $\square$" 30

Difficile de comprendre où et quand il effectue un passage à la limite pour arriver à l'expression finale. Ce qu'il veut réellement montrer, c'est que la suite des minorants et la suite des majorants ont la même limite et qu'il s'ensuit que la valeur de $\square$, coincée entre ces deux suites, est donc nécessairement égale à cette multiplication continue poursuivie à l'infini.

Cette formule, dite "formule de Wallis", est la première écrite sous la forme d'un produit infini qui n'implique que des opérations sur les rationnels. Voilà donc bien l'objectif de notre auteur atteint, puisqu'il avait la conviction profonde qu'à défaut de pouvoir écrire la quadrature du cercle de façon exacte, il pourrait au moins l'approcher à l'aide de "vrais nombres".

"Aussi, il nous semble avoir approché la quadrature du cercle autant que la nature du nombre le permet. Et celui qui exige de pousser les recherches plus loin se comporte tout à fait comme s'il postulait d'exprimer $\sqrt{2}$ en vrais nombres, ce qui

---

29 Idem, p.468.
30 Idem, p.469.

serait une exigence déplacée. Entretemps, je n'ignore pas que cette quantité inexplicable peut se noter d'autres façons et qu'on peut arriver par d'autres méthodes à des valeurs proches de nombres vrais (comme ceci peut se dire des nombres sourds) et, à ce sujet, je n'ai pas de conseil à donner aux mathématiciens, mais je laisserai chacun libre de se servir de la notation qu'il préfère."[31]

En guise de conclusion

Ces quelques points de l'oeuvre de Wallis ont pu mettre en évidence un des aspects important des mathématiques, trop souvent absent des traités et des manuels anciens ou modernes, à savoir celui de la découverte. Comment accède-t-on à un énoncé mathématique ? L'"Arithmetica Infinitorum" nous en donne un exemple.

Ce travail est une suite de conjectures obtenues sur base d'une recherche d'analogies qui amènent à extrapoler ou interpoler de nouveaux résultats.

Les deux outils abondamment utilisés par l'auteur, à savoir l'analogie et l'interpolation, cachent tous deux une intuition du chercheur. Cette façon de procéder comporte une part de risque puisqu'il s'agit souvent d'étendre des résultats acquis à des situations nouvelles. Wallis ne cherche pas à justifier sa méthode autrement que par la cohérence globale de sa théorie.

Son traité nous confirme dans l'idée que faire des mathématiques, c'est bien plus que prouver des vérités, mais que c'est aussi, pour une large part, observer des phénomènes, comparer et combiner des observations, ouvrir des brèches et, à partir de là, énoncer des conjectures. Ensuite vient la phase de la recherche de certitude où démonstrations et contre-exemples s'affrontent pour faire progresser la connaissance.

[31] Idem, p.360.

Bibliographie

BARBIN E., *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques,* bulletin APMEP n° 366, décembre 1988.

BARBIN E., *Heuristique et démonstration en mathématiques: la méthode des Indivisibles au XVIIe siècle,* Fragments d'histoire des mathématiques no 2, brochure APMEP 65, 1987.

BOYER C. B., *The History of the Calculus and its conceptual development,* Dover, N.Y.1959.

CHEVALIER A., *Une étude de L'"Arithmetica Infinitorum" de John Wallis,* mémoire de D.E.A. en Histoire de Sciences et des Techniques, sous la direction de F. De Gandt, Universités de Lille I et III, octobre 1992.

DE GANDT F., *Naissance et Métamorphose d'une Théorie mathématique; la Géométrie des Indivisibles en Italie (Galilée, Cavalieri, Torricelli),* Fragments d'Histoire des Mathématiques n°2, Brochure APMEP n°65, 1987.

FERMAT, Oeuvres, tomes 2 et 3,

MONTUCLA J.E., *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle,* Paris 1754, reproduit par Irem-Paris VII, 1986.

Numéro Spécial Π, Supplément au Petit Archimède no 64-65, mai 1980.

POLYA G., *Induction and Analogy in Mathematics,* Princeton University Press, 1954.

ROBERVAL, G.P. *Traité des Indivisibles* dans Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699, volume VI, Paris, 1730.

SCOTT J.F., *The Mathematical Work of John Wallis,* Taylor and Francis, Oxford, 1938.

STRUIK J., *A source book in Mathematics,* 1200-1800, Princeton university Press, Princeton, New Jersey, 1967.

WALLIS John, *Arithmetica Infinitorum sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos Problemata,* Oxford, 1656.

WALLIS J. *Opera,* 3 volumes, Oxford, 1695-1699.

Séries et quadratures chez Leibniz

M.F. Jozeau ; M. Hallez, M. Bühler
Groupe M:A.T.H. - IREM Paris VII

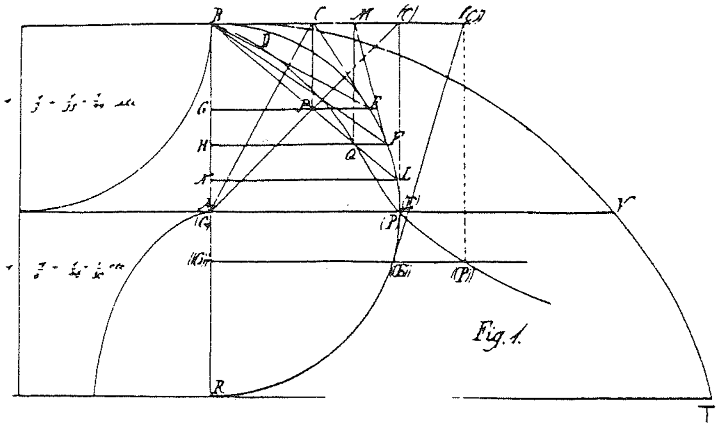


Fig. 1.

Nous avons présenté deux textes de Leibniz, accompagnés d'une analyse et d'énoncés de problèmes à donner à des élèves du second cycle.

Les documents suivants furent distribués :

La lettre à C. Wolf (publiée en 1713) au sujet de la série 1-1+1-1+1-1 ... qui peut être lue avec des élèves de premières ou Terminales A_1 - S et le compte-rendu d'un travail en $1eA_1$.

La lettre à La Roque pour laquelle nous avons rédigé une succincte "aide à la lecture" et l'énoncé d'un problème niveau terminale C.

Nous concluons par un extrait de **l'Encyclopédie Méthodique** de Diderot et d'Alembert sur les deux séries qui apparaissent dans ces deux lettres, qui, depuis, a fait l'objet de travaux en classe.

Nous avons commencé par une brève présentation de Leibniz.

Leibniz (1646-1716)

Sans entrer dans le détail, voici quelques dates repères de la bibliographie de Leibniz, co-inventeur avec Newton du calcul différentiel. Ses notations se sont imposées par leur efficacité et sont celles utilisées de nos jours.

De formation juridique, il pratique à peu près tous les arts de son temps : sciences, droit, lettres, philosophie...

Voyageant continuellement pour des missions diplomatiques, il écrit beaucoup en carrosse. Sa correspondance est volumineuse ; elle comporte environ 200 000 pages de manuscrits conservées à Hanovre[1].

En 1666, il soutient une thèse de logique **De arte combinatoria**, dans laquelle il traite de considérations sur les combinaisons. Il s'intéresse à des questions de logique formelle.

En 1671, il fait un projet de machine à calculer, reprenant l'idée de Pascal. Au cours de cette étude, il travaille sur des algorithmes. Les considérations algorithmiques qu'il aborde sont très formelles, caractéristiques du travail de Leibniz à cette époque là. En 1672, envoyé comme ambassadeur par le duc de Hanovre, il vient à Paris, période clef pour sa formation mathématique. Huygens lui fait connaître les écrits de Pascal, Cavalieri, Grégoire de St Vincent ... ; il apprend à calculer sur les séries. Comme le souligne Parmentier[2] : *"Leibniz n'a pas commencé par apprendre les maths, il a réalisé la gageure d'y être à la fois néophyte et inventeur"*. Il se rend aussi à Londres, correspond avec Oldenburg, Newton. En réponse à ses questions, Newton lui écrit deux lettres célèbres dans l'histoire des Sciences, connus sous le nom d'Epistola prior et Epistola posterior où il lui expose ses démonstrations, ses découvertes. C'est au cours de cette période qu'il élabore un algorithme qu'il appelle "propre au nouveau calcul"[3]. Le premier article de Leibniz annonçant la découverte de ce calcul date de 1684 (**Nova Methodus** in Acta Eruditorum, octobre 1684). Entre 1672 et cette date, une longue maturation a donc eu lieu. Leibniz raconte l'histoire de ses découvertes dans un texte de 1714, publié seulement à la fin du 19e siècle, **Histoire et origine du calcul différentiel**[4]. Ce calcul sera diffusé très rapidement par les frères Bernouilli, par l'intermédiaire des

[1] Certains de ces manuscrits ont été édités par Gerhart

[2] G.W Leibniz : la naissance du calcul différentiel : Marc Parmentier Vrin 1989

[3] Il s'agit bien sûr du calcul différentiel

[4] Traduction et notes in **Les cahiers de Fontenay** I, 1975.

Acta Eruditorum. C'est en 1696, que le Marquis de l'Hospital écrit le premier traité de calcul infinitésimal, faisant ainsi connaître le calcul leibnizien **Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes.**

Leibniz est surtout connu pour son invention du calcul différentiel mais ses contributions aux mathématiques sont nombreuses. Des travaux sur les séries ont précédé cette invention du calcul infinitésimal.

Le groupe M : A.T.H. a entrepris au début de l'année 1991-1992 un travail sur l'invention du calcul différentiel de Leibniz. Nous avons voulu avoir accès directement au travail de Leibniz. Nous avons donc cherché à présenter aux élèves des textes originaux de celui-ci. La lettre à Christian Wolf était le texte le plus ancien de Leibniz que nous avions à notre disposition. L'étude de cette lettre forte enrichissante nous a conduit d'une part à un travail avec nos élèves et d'autre part nous a permis peu à peu de suivre un cheminement dans la pensée de Leibniz. Au deuxième paragraphe de cette lettre, il évoque une méthode originale l'ayant fait découvrir que la somme $\frac{dx}{1+x^2}$ fournit la quadrature d'un secteur angulaire. Notre curiosité éveillée, nous avons lu **De vera proportione Circuli** (1682). Or dans le De vera nous n'avons pas trouvé de démonstrations mais seulement des résultats. Parmentier indique[5] que la méthode des métamorphoses est exposée dans une lettre à La Roque. Nous en avons donc pris connaissance.

Lettre au très illustre Christian Wolf, professeur de mathématiques à Halle sur la science de l'infini

(publiée dans les
Acta Eruditorum de Leipzig, supplément tome V, en l'an 1713).

Aide à lecture

L'objet de la lettre est la série :

"1-1 +1-1 +1 etc à l'infini" (notation de Leibniz).

Les mathématiciens contemporains la qualifient de série alternée admettant deux valeurs d'adhérence 0 et 1. Cette série est donc dite **divergente**. Or cette série fut, dans le monde des

[5] Parmentier op. cité p. 66

mathématiciens du XVIIe siècle, l'objet de controverses passionnées, comme cette lettre le met en évidence.

Leibniz, pour répondre à la question :
Cette série est-elle sommable ?
propose trois démarches :

1. Dans la première il utilise la somme des séries suivantes :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\frac{3}{4}$$

connues depuis la publication en 1647 de l'opus Geometricum de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) et il écrit

$$"\frac{1}{1-x}=1+x+xx+x^3+x^4+\textit{etc. à l'infini} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+xx-x^3+x^4-x^5+\textit{etc. à l'infini}" \qquad (2)$$

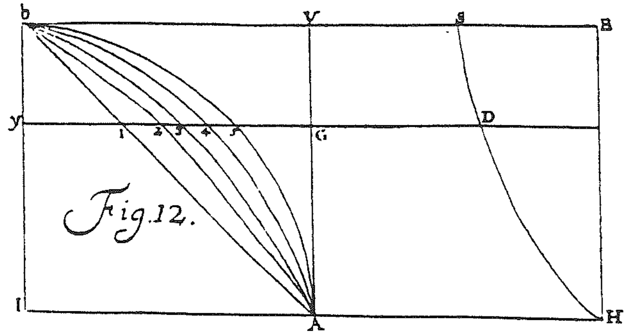
en précisant "*à condition naturellement de supposer en* x *une quantité plus petite que un*". Il attribue la première égalité à Saint-Vincent, la deuxième à Nicolas Mercator (1620-1687).

Il ose alors remplacer x par 1 dans (2) : "*Observons ce qui se passe si* x = 1. *A notre grand émerveillement, il vient alors*

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\textit{etc. à l'infini}".$$

La deuxième démarche consiste, à l'aide de la figure du mathématicien et théologien Guido Grandi (1671-1742), à "*mettre à la portée des gens peu familiarisés au calcul abstrait*" ce "*merveilleux*" résultat

Sur]0,1[Grandi représente les courbes dont les ordonnées sont respectivement 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 et la courbe dont l'ordonnée est $1-x+x^2-x^3+\ldots$ c'est à dire la courbe dont l'ordonnée est $\frac{1}{1+x}$.



XXVI – Epistola ad Christianum Wolfium (figure 48)

Pour x = AG < 1 on a GY - G1 + G2 - G3 + G4 - G5 + ... = GD, en nommant 1, 2, 3, 4, 5 les points d'abscisse x = AG. Pour x = 1, le premier membre devient bV - bV + bV - bV + bV - bV + ..., le deuxième membre devient $Vs=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$$\text{Conclusion de Grandi : } 1-1+1-1\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{2}$$

Leibniz fait ce commentaire : "*Ceci est en accord avec la loi de continuité ... Dans les continus, on peut considérer une limite externe comme une limite interne*", que l'on peut interpréter ainsi :
la fonction $x\rightarrow\frac{1}{1+x}$ est continue sur [0,1] ; la série $1-x+x^2\ldots$ est convergente sur [0,1[. Donc en considérant 1 qui est extérieur à [0,1[comme "limite interne", Leibniz étend l'égalité $1-x+x^2\ldots.=\frac{1}{1+x}$ à la valeur x = 1.

La troisième démarche est la plus surprenante, elle consiste à établir une moyenne en probabilité : il y a autant de changes d'obtenir 0 ou 1 pour la somme de cette série puisqu'il y a équiprobabilité du pair et de l'impair dans la suite des entiers naturels. Donc la somme de cette série est $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$!

Le pouvoir de conviction est faible pour un mathématicien moderne, mais reste fort pour beaucoup de non-mathématiciens même de nos jours.

Il ne faudrait pas en conclure que Leibniz ne fait aucune considération de convergence : dans une lettre du 26 juin 1705 il écrit à Jean Bernouilli :

"Il me semble que la détermination des limites est une partie essentielle de la théorie des séries si on veut la traiter complètement. En effet dans tous les cas tant que nous ne démontrons pas que la série converge vers le terme inconnu, afin que nous puissions rendre l'erreur plus petite qu'une quantité donnée, nous ne pouvons pas conclure que la série complète donne ce terme".[6] Mais cela n'est pas suffisant pour que Leibniz ne se laisse pas prendre à "l'évidence" géométrique du dessin de Grandi.

Sa réflexion, de plus, ne s'arrête pas là ; quelques mois plus tard le 10 janvier 1714, il écrit au même Bernouilli : *"Si tu y prêtes attention tu remarqueras aisément que lorsque les termes d'une série sont **continûment décroissants** et alternativement positifs et négatifs la valeur qu'elle exprime converge et est par conséquent fini"*[7]. Il donne là le critère suffisant de convergence d'une série alternée, lequel critère ne s'applique évidemment pas à la série $1 - x + x^2 \ldots$ pour $x = 1$.

Travail avec les élèves. Texte de problème

A. *Travail préliminaire à la lecture du texte de Leibniz*

Dans un repère $(A', \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 6$ cm, construisez les courbes représentatives des fonctions f, g, h, k, l définies sur [0,1] par :

$f(x) = 1$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$, $k(x) = x^3$, $l(x) = x^4$

Pour chaque fonction vous tracerez avec soin le point d'abscisse $\frac{2}{3}$ et vous nommerez j, b, V, G, Y les points de coordonnées respectives $(0,1)$ $(1,1)$ $(1,0)$ $(\frac{2}{3}, 0)$ $(\frac{2}{3}, 1)$.

[6] Parmentier op. cité p. 438 n° 12
[7] Parmentier op. cité p. 439-440 n° 15

Dans un autre repère $(A', \vec{i}, \vec{j})$ de mêmes vecteurs unitaires que le précédent construisez la courbe représentative de la fonction définie sur [0,1] par $m(x) = \frac{1}{1+x}$.

Vous appellerez H, D, S les points de $\mathcal{C}_m$ d'abscisses respectives $0, \frac{2}{3}$ et 1 et B le point de coordonnées (1,0).

B. *Lecture du texte 1* :

I - Justifiez et écrivez en symboles modernes la ligne 11.

II - Justifiez le passage de la ligne 11 à la ligne 14.

III -Justifiez la ligne 18.

IV - Quelles sont les propositions disjonctives dont il est question ligne 42 ? Quelle est la proposition affirmative de la ligne 43 ?

V - Quel commentaire pouvez-vous faire ?

C. *Lecture du texte 2* :

Vous vous servirez des graphiques tracés en A.

Leibniz appelle 1, 2, 3, 4 les points de mêmes abscisses sur les différentes courbes ; on peut utiliser les équivalences de notations suivantes :

$GY = f(x)$ $G1 = g(x)$ $G2 = h(x)$ $G3 = k(x)$ $G4 = l(x)$

I- Calculez $f(x) - g(x) + h(x) - k(x) + l(x)$ pour $x = \frac{2}{3}$ puis à 10^{-4} près la différence entre cette forme algébrique et $m\left(\frac{2}{3}\right)$.

II- Reprenez la question I pour x = 0,9 et pour x = 0,1.

III- Quelle est la limite quand n tend vers l'infini de

$1 - \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 \ldots\ldots + (-\frac{2}{3})^n$; de $1 - 0{,}9 + 0{,}9^2 \ldots\ldots\ldots + (-0{,}9)^n$

et de $1 - 0{,}1 + 0{,}1^2 \ldots\ldots + (-0{,}1)^n$

IV- Donnez une autre formulation pour les lignes 10 à 12.

V. Quelles conclusions tirez-vous de ces lectures ?

Commentaires

Les objectifs du travail avec les élèves étaient les suivants :

- Révision de la comparaison graphique des fonctions monômes de degré de 0 à 4.
- Utilisation des connaissances sur les séries géométriques
- Approfondissement de la notion de limite.

En classe de 1ère, le travail préliminaire A (Cf. p.6) fut donné à faire à la maison et corrigé en classe avant la distribution des 2 extraits du texte et du devoir B (Cf p.6) l'accompagnant.

En classe de Terminale, les deux travaux A et B sont donnés conjointement.

La correction en classe fut accompagnée de la lecture du texte intégral avec les élèves.

Pour la question B.I, la plupart des élèves utilisèrent $\lim \ S_n = u_o \frac{1}{1-q}$ pour la suite géométrique $u_n = x^n$, $u_o = 1$ de raison x, avec $0 < x < 1$.

Mais certains justifièrent l'égalité par la division infinie de 1 par 1+x.

Pour la question B.II, les réponses s'équilibrèrent entre l'utilisation de la suite géométrique de raison -x, avec $0 < x < 1$ et la substitution de -x à x ; quelques-uns refirent la division infinie de 1 par 1-x.

Dans l'ensemble, les élèves répondirent correctement aux questions et une vue d'ensemble claire de la partie B se dégageait de

leurs remarques. Il n'en était pas de même pour la partie C dont l'objectif leur parut fort confus jusqu'à la mise en commun des remarques et l'analyse de la figure de l'un d'entre eux agrandie sur transparent.

Le savoureux débat du XVIIe siècle dont la lettre de Leibniz à Wolf se fait l'écho, trouva son répondant dans les virulentes discussions des élèves qui se poursuivirent au café du lycée.

Voici quelques-unes de leurs remarques :

"Quel moyen peut-on utiliser pour obtenir quelque chose de fini à partir de rien ?".

"Est-ce vraiment des riens ?".

"On peut avoir $0 \times \infty = \frac{1}{2}$

par exemple avec $\frac{x+1}{2x+1} = (x+1) \times \frac{1}{2x+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x+1} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ "

"0 ou 1, symbiose du 0 et du 1 à l'infini, l'infini bouclé sur lui-même par la moyenne arithmétique" ....

Je laissais un certain suspense en ne répondant pas tout de suite aux questions "Leibniz a-t-il raison ?".

"Que dit-on aujourd'hui ?" La réponse donnée à la fin de l'heure de correction fut un soulagement pour beaucoup.

Texte 1

Dans la question remise récemment à l'ordre du jour par *Guido Grandi*, vous me demandez si je suis d'avis que $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. à l'infini est égal à $\frac{1}{2}$ et comment écarter l'apparente absurdité d'une telle proposition. En effet puisque l'égalité $1 - 1 = 0$ semble se reproduire une infinité de fois, on ne voit pas comment la répétition à l'infini de purs néants pourrait faire $\frac{1}{2}$

Ceux qui, suivant l'exemple du grand Archimède dans sa quadrature de la parabole, ont calculé la somme de termes en progression Géométrique, au premier chef *Grégoire de Saint Vincent*, ont déjà montré que

$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 +$ etc. à l'infini, à condition naturellement de supposer en x une quantité plus petite que un. Nicolas Mercator du Holstein a transposé ce résultat en

$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 +$ etc. à l'infini.

Laissons-là les quadratures et revenons à la série de termes en progression Géométrique (qui me suffit pour ce que je veux faire)

$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + xx - x^3 +$ etc. à l'infini, ou

$\frac{1}{1 + xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 +$ etc. à l'infini. Observons ce qui se passe si $x = 1$. A notre grand émerveillement il vient alors :

$\frac{1}{1 + 1}$ soit $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini, ce que la figure employée par M. Grandi nous met en quelque sorte sous les yeux.

Il m'appartient à présent de révéler la véritable solution, peut-être inattendue, en tout cas singulière, de cette *énigme*, ainsi que l'explication du *paradoxe*, en me ramenant d'abord à une série finie pour passer ensuite à une série infinie. Remarquons en effet que pour une série finie il faut distinguer deux cas qui, de façon assez surprenante, se confondent dès qu'il s'agit d'une série infinie. Nous pouvons développer une série finie : $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. de deux manières ; elle est ou bien constituée *d'un nombre pair de termes* et se termine par un $-$, comme $1 - 1$, $1 - 1 + 1 - 1$, ou $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, dans ce cas, aussi loin que nous poursuivions, nous obtenons toujours 0. Ou bien la série est constituée *d'un nombre impair de termes* et se termine par un $+$, par exemple $1 - 1 + 1$, $1 - 1 + 1 - 1 + - 1 + 1$, aussi loin que nous poursuivions, tous les cas donnent $+ 1$. Mais lorsque la Série est infinie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini, au-delà de tout nombre, en même temps que disparait la notion de nombre, disparait également la détermination pair impair. Et comme il n'y a pas plus d'arguments en faveur de la parité que de l'imparité, ni par conséquent en faveur d'un résultat égal à 0 ou à 1, le genie admirable de la nature fait que le passage du fini à l'infini s'accompagne du passage de propositions disjonctives (qui disparaissent) à une proposition unique affirmative (qui subsiste), moyen terme entre les deux propositions disjonctives. Or ceux qui ont traité des estimations ont montré que lorsqu'il s'agit de prendre le milieu entre deux quantités ayant même raison d'être, il faut prendre la moyenne Arithmétique, c'est-à-dire la moitié de leur somme ; c'est ainsi que la nature observe ici encore sa loi de justice, par conséquent puisque dans le cas d'un nombre fini de termes la série $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. vaut 0 si le nombre est pair et 1 s'il est impair, lorsque la multiplicité infinie des termes fait disparaître les deux cas, que les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et que l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent $\frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$ comme je l'avançais.

Texte 2

Soit le carré bJAV, traçons la diagonale Ab ou A_1b, ainsi qu'une infinité de paraboles et de paraboloïdes A_2b, A_3b A_4b, A_5b etc., de sorte que si nous prenions le côté du carré comme unité, que nous notions x l'abscisse AG, et que nous tracions la droite yG normale à AG coupant la diagonale et les paraboloïdes en 1, 2, 3, 4, 5, etc., les ordonnées Gy, G1, G2, G3, G4, G5 etc. soient respectivement 1, x, xx, x^3, x^4 x^5 etc. et qu'en conséquence les segments de droites Gy, G1, G2, G3, G4 etc. soient en progression Géométrique. Ceci posé, prolongeons bV jusqu'à B, avec BV = bV, et yG jusqu'à D de façon que GD soit la réunion des ordonnées alternativement additionnées et soustraites, soit $GD = Gy - G_1 + G2 - G3 +$ etc. ou encore, ce qui revient au même (compte tenu de ce que j'ai dit plus haut), $GD = \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AG}$. Complétons le carré AVBH et traçons la courbe SDH joignant tous les points D, et coupant AH en H et BV en S ; il est clair que dans le cas où AG = VA = 1 nous aurons $GD = \frac{1}{1 + xx} = \frac{1}{2} =$ VS, c'est-à-dire $GD = \frac{1}{2}$BV ; par conséquent dans ce cas, puisque G tombe en V et D en S, $VS = \frac{1}{2}$BV ou $= \frac{1}{2}$AV.

Or comme dans ces conditions tous les points 1, 2, 3, 4, 5 etc. coïncident au même et unique point B, les points G1, G2, G3, G4 etc. deviennent égaux à Gy ou BV, et finalement $Gy - G1 + G2 - G3 +$ etc. devient $BV - BV + BV - BV +$ etc. $= \frac{1}{2}$ BV.

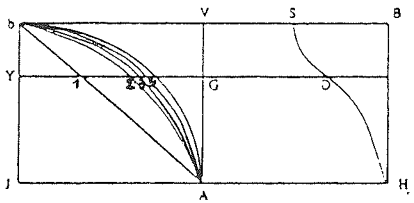


figure 48

Lettre au très illustre Christian WOLF, professeur de mathématiques à Halle, sur la Science de l'Infini? (publiée dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig en 1713)

Dans la question remise récemment à l'ordre du jour par *Guido Grandi*, vous me demandez si je suis d'avis que $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. à l'infini est égal à $\frac{1}{2}$ et comment écarter l'apparente absurdité d'une telle proposition. En effet puisque l'égalité $1 - 1 = 0$ semble se reproduire une infinité de fois, on ne voit pas comment la répétition à l'infini de purs néants pourrait faire $\frac{1}{2}$. Je constate que M. Grandi confère à l'infini le pouvoir de faire surgir quelque chose à partir de rien, et qu'il entend par là expliquer, non sans élégance, la création du monde, que l'omnipotence Divine tire du néant. Mais la Création n'est pas simple répétition de Néants et suppose l'adjonction d'une réalité nouvelle et positive. J'entends dire également, bien que ses arguments ne me soient pas parvenus, que *M. Marchetti*, Professeur de Mathématiques à Pise, s'est opposé à l'idée de Grandi. Au demeurant, comme l'examen du problème est plaisant et qu'il joue un rôle essentiel pour expliquer la *Science de l'Infini* (dont on ne s'est pas encore occupé comme elle le méritait), il sera bon de reprendre la chose d'un peu plus haut et de la ramener à ses origines. J'ai la conviction que ce ne sera pas pour déplaire à M. Grandi lui-même puisque sur le fond j'approuve sa conclusion, même s'il faudrait selon moi prêter attention à certains de ses raisonnements et de ses déductions pour qu'ils n'aillent pas porter préjudice à la science.

Ceux qui, suivant l'exemple du grand Archimède dans sa quadrature de la parabole, ont calculé la somme de termes en progression Géométrique, au premier chef *Grégoire de Saint Vincent*, ont déjà montré que

$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 +$ etc. à l'infini, à condition naturellement de supposer en x une quantité plus petite que un. Nicolas Mercator du Holstein a transposé ce résultat en

$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 +$ etc. à l'infini, résultat qu'il a démontré, en même temps que le précédent, à partir d'une division continue, bien qu'on puisse aussi le déduire du premier, en remplaçant $- x$ par $+ x$. Il fut également le premier à enseigner, en publiant sa *Logarithmotechnia*, comment déduire de ce résultat une Quadrature par une série infinie ; c'est de cette manière qu'il nous a fait connaître sa Quadrature Arithmétique de l'Hyperbole, et qu'il l'a ensuite mise en relation avec les Logarithmes. Encouragé par son exemple, j'ai eu le bonheur de trouver non seulement que la quadrature de l'Aire ayant pour ordonnée $\frac{1}{1 - xx}$ dépend de la Quadrature de l'Hyperbole, mais aussi semblablement, que $\frac{1}{1 - xx}$ repose sur la Quadrature Arithmétique du Cercle. En effet, puisque (en remplaçant x par xx) $\frac{1}{1 + xx}$ est égal à :

$1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} +$ etc. à l'infini, il s'ensuivait que $\int \frac{dx}{1 + xx}$ (une méthode originale m'avait fait découvrir que cette somme fournit la quadrature d'un secteur circulaire), serait :

$\int dx - \int xx\, dx + \int x^4\, dx - \int x^6\, dx +$ etc. à l'infini, c'est-à-dire (en faisant appel à la Quadrature des Paraboloïdes qui nous est connue) $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$ etc. Dès lors, dans le cas où x = 1, il vient :

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. à l'infini, et le rapport de cette série à l'unité est celui de l'aire d'un Cercle au carré de son Diamètre. La première année où ont paru les Actes de la République des Lettres de Leipzig, j'ai fait connaître ce résultat découvert bien longtemps auparavant. Plus tard dans ces mêmes Actes, j'ai donné la formule générale rassemblant en un unique théorème la Quadrature des secteurs de toutes les Coniques à centre. C'est ce que M. Grandi a voulu, dans une intention louable, mettre à la portée des gens peu familiarisés au calcul abstrait, en le démontrant à sa manière sur une figure, pour donner plus de prise à l'imagination ; lorsque dans ma jeunesse je résidais à Paris, j'avais eu moi-même l'intention de publier quelque chose d'analogue (mais applicable également à d'autres résultats apparentés), et en même temps d'éclaircir l'origine de leur découverte, qui n'est peut-être pas encore bien limpide aujourd'hui. Mais, appelé à d'autres tâches, j'ai suspendu ce projet. Il est naturellement bien plus facile de démontrer les inventions que d'en dévoiler l'origine et de faire ainsi progresser l'art d'inventer lui-même.

Laissons-là les quadratures et revenons à la série de termes en progression Géométrique (qui me suffit pour ce que je veux faire)

$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + xx - x^3 +$ etc. à l'infini, ou

$\frac{1}{1 + xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 +$ etc. à l'infini. Observons ce qui se passe si x = 1. A notre grand émerveillement il vient alors :

$\frac{1}{1 + 1}$ soit $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini, ce que la figure employée par M. Grandi nous met en quelque sorte sous les yeux.

Soit le carré bJAV, traçons la diagonale Ab ou A_1b, ainsi qu'une infinité de paraboles et de paraboloïdes A_2b, A_3b A_4b, A_5b etc., de sorte que si nous prenions le côté du carré comme unité, que nous notions x l'abscisse AG, et que nous tracions la droite yG normale à AG coupant la diagonale et les paraboloïdes en 1, 2, 3, 4, 5, etc., les ordonnées Gy, G1, G2, G3, G4, G5 etc. soient respectivement 1, x, xx, x^3, x^4 x^5 etc. et qu'en conséquence les segments de droites Gy, G1, G2, G3, G4 etc. soient en progression Géométrique. Ceci posé, prolongeons bV jusqu'à B, avec BV = bV, et yG jusqu'à D de façon que GD soit la réunion des ordonnées alternativement additionnées et soustraites, soit $GD = Gy - G_1 + G2 - G3 +$ etc. ou encore, ce qui revient au même (compte tenu de ce que j'ai dit plus haut), $GD = \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AG}$. Complétons le carré AVBH et traçons la courbe SDH joignant tous les points D, et coupant AH en H et BV en S ; il est clair que dans le cas où AG = VA = 1 nous aurons $GD = \frac{1}{1 + xx} = \frac{1}{2} =$ VS, c'est-à-dire $GD = \frac{1}{2}$BV ; par conséquent dans ce cas, puisque G tombe en V et D en S, $VS = \frac{1}{2}$BV ou $= \frac{1}{2}$AV

Or comme dans ces conditions tous les points 1, 2, 3, 4, 5 etc coïncident au même et unique point B, les points G1, G2, G3, G4 etc deviennent égaux à Gy ou BV, et finalement $Gy - G1 + G2 - G3 +$ etc devient $BV - BV + BV - BV +$ etc. $= \frac{1}{2}$ BV.

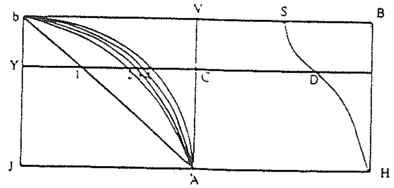


figure 48

Ceci est en accord avec la *Loi de Continuité* que j'ai proposée pour la première fois dans les Nouvelles de la République des Lettres de Bayle et appliquée aux Lois du Mouvement. Elle entraîne que *dans* *les continus, on peut considérer une limite externe comme une limite interne* , si bien que le dernier cas, même s'il est de nature complètement différente, est compris dans la loi générale gouvernant les autres ; dès ce moment, de manière paradoxale et pour ainsi dire, par une *Figure Philosophico-rhétorique*, nous pouvons considérer le point par rapport à la ligne, le repos par rapport au mouvement, comme des cas particuliers compris dans le cas général inverse , le point apparaissant comme une ligne infiniment petite, évanescente, ou le repos comme un mouvement évanescent . De même pour d'autres formules du même genre, que l'homme très profond qu'était *Joachim Jung* aurait nommées *vraies par tolérance* et qui sont des plus utiles pour l'art d'inventer, même si à mon avis elles enveloppent quelque chose de fictif et d'imaginaire. Car en les ramenant à des expressions ordinaires, il est très facile de les corriger et d'écarter tout risque d'erreur. Au reste la nature, qui procède toujours pas à pas et non par sauts, ne saurait violer la loi de continuité .

Mais apparaît ici l'objection pertinente que M. Marchetti et vous-même avez soulevée. Puisque BV – BV soit 1 – 1 = 0, n'en résulte-t-il pas que BV – BV + BV – BV + etc. à l'infini, soit

1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + etc. à l'infini, se réduit à

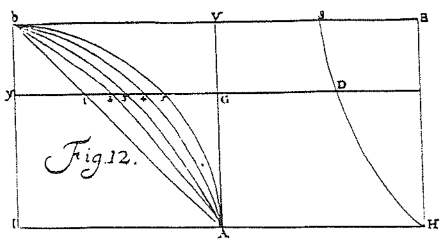
0 + 0 + 0 + 0 + 0 + etc. à l'infini ? On ne voit pas comment cela pourrait faire $\frac{1}{2}$. M. Grandi tente avec ingéniosité de lever l'objection en recourant à une analogie. Il imagine que deux frères devant partager un patrimoine découvrent dans l'héritage de leur père une pierre de très grande valeur, dont le testament interdise la vente ; ils conviennent donc entre eux de la déposer alternativement pour un an dans leur bibliothèque respective. De cette façon, à supposer que les héritiers respectent éternellement cette règle, la descendance de chaque frère se voyant accorder puis retirer la pierre une infinité de fois, en possèderait juridiquement exactement la moitié.

Mais à y regarder de plus près, cette analogie est trop claudicante. *Premièrement* parce que dans le cas qui nous occupe (M. Grandi le reconnaît lui-même), tout repose sur un privilège conféré à l'infini, de pouvoir de lui-même, par simple répétition, produire quelque chose à partir de Rien. Or dans le cas du partage d'un patrimoine, la situation reste inchangée s'il y a un nombre fini d'années. Imaginez en effet que la pierre échoie aux deux frères non par héritage paternel, mais par le legs d'un ami, et qu'ils n'en obtiennent pas la propriété perpétuelle, mais seulement l'usufruit pour cent ans ; il est clair, dès l'instant où ils la possèdent une année sur deux, que leurs droits respectifs seront les mêmes. Mais dans notre cas, si nous écrivons cent fois de suite l'unité, en faisant alternativement une addition puis une soustraction, c'est-à-dire si nous écrivons 50 fois ou même 50000 fois 1 – 1, il en résultera toujours 0.

Deuxièmement la différence tient à ce que dans le cas d'un droit commun à deux personnes possédant une chose tour à tour, ce qui est accordé puis ôté n'est pas la totalité du droit sur cette chose, mais le droit d'en user pendant un an, ce qui ne fait que de petites portions du droit total ; si nous répartissons celui-ci par années et que nous en concèdions l'usufruit pour cent ans, l'usufruit pour un an n'est, de toute évidence, que la centième partie du droit total, de ce fait puisque chacun en obtient de cette manière cinquante centièmes, nous voyons bien que chacun détient la moitié du titre. Mais dans notre cas c'est l'unité elle-même, le tout lui-même (non de petites parts), qui sont tantôt accordés, tantôt soustraits. C'est pourquoi, bien que séduisante, si nous l'examinons en détail, cette analogie laisse le problème entier.

Il m'appartient à présent de révéler la véritable solution, peut-être inattendue, en tout cas singulière, de cette *énigme*, ainsi que l'explication du *paradoxe*, en me ramenant d'abord à une série finie pour passer ensuite à une série infinie. Remarquons en effet que pour une série finie il faut distinguer deux cas qui, de façon assez surprenante, se confondent dès qu'il s'agit d'une série infinie . Nous pouvons développer une série finie : 1 – 1 + 1 – 1 + etc. de deux manières ; elle est ou bien constituée *d'un nombre pair de termes* et se termine par un –, comme 1 – 1, 1 – 1 + 1 – 1, ou 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1, dans ce cas, aussi loin que nous poursuivions, nous obtenons toujours 0. Ou bien la série est constituée *d'un nombre impair de termes* et se termine par un +, par exemple 1 – 1 + 1, 1 – 1 + 1 – 1 + – 1 + 1, aussi loin que nous poursuivions, tous les cas donnent + 1. Mais lorsque la Série est infinie 1 – 1 + 1 - 1 + 1 – 1 + etc. à l'infini, au-delà de tout nombre, en même temps que disparaît la notion de nombre, disparaît également la détermination pair-impair. Et comme il n'y a pas plu d'arguments en faveur de la parité que de l'imparité, ni par conséquen en faveur d'un résultat égal à 0 ou à 1, le génie admirable de la natur fait que le passage du fini à l'infini s'accompagne du passage d propositions disjonctives (qui disparaissent) à une proposition uniqu affirmative (qui subsiste), moyen terme entre les deux proposition disjonctives. Or ceux qui ont traité des estimations ont montré qu lorsqu'il s'agit de prendre le milieu entre deux quantités ayant mêm raison d'être , il faut prendre la moyenne Arithmétique, c'est-à-dir la moitié de leur somme ; c'est ainsi que la nature observe ici encore sa loi de justice, par conséquent puisque dans le cas d'un nombre fini de termes la série 1 – 1 + 1 – 1 + etc. vaut 0 si le nombre est pair et 1 s'il est impair, lorsque la multiplicité infinie des termes fait disparaître les deux cas, que les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et que l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ comme je l'avançais.

J'ajoute que même si ce type d'argumentation semble plus Métaphysique que Mathématique, il ne laisse pas d'être solide. Au reste les Règles *de la Véritable Métaphysique* (celle qui ne se contente pas de dresser des nomenclatures) sont en Mathématiques, en Analyse et même en Géométrie, d'un usage plus étendu qu'on n'imagine. En l'occurrence nous avions déjà un autre moyen de savoir, grâce au raisonnement que j'ai indiqué au début, que VS est $\frac{1}{2}$ BV (les ordonnées GD étant $\frac{1}{1 + AG}$ il en résulte que lorsque AG devient AV, c'est-à-dire 1, VS devient $\frac{1}{1+1}$). Or nous aurions pu égalemen montrer qu'en prenant G arbitrairement voisin de V, GD devient à sor tour aussi voisin de $\frac{1}{2}$ BV qu'on le souhaite, de façon que nous puissions rendre la différence inférieure à toute quantité donnée. Par conséquent, par la manière de raisonner d'Archimède nous obtenons également que VS vaut $\frac{1}{2}$ BV. Au demeurant le fait d'aboutir au même résultat à la fois par les propriétés des séries et par celles de l'infin n'est pas seulement source de satisfaction, ce sera aussi une aide trè précieuse pour construire des raisonnements rigoureux sur l'infini e dévoiler de mieux en mieux les origines de notre nouvelle théorie. O prendra garde du même coup à ne pas porter préjudice à la nouvell science en recourant à des paradoxes insoutenables. Ainsi lorsqu'o nous objectait que des quantités nulles si nombreuses soient elles n pouvaient rien donner de réel , il ne fallait pas répondre e distinguant entre le fini et l'infini, au sens où cette règle ne vaudrait pa pour l'infini, mais il fallait reconnaître la valeur générale de la règle e montrer, comme je viens de le faire, qu'il n'y a pas lieu de l'applique ici .

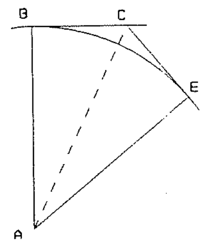


XXVI – Epistola ad Christianum Wolfium (figure 48)

Lettre à La Roque

Aide à la lecture

Paragraphe 3 :

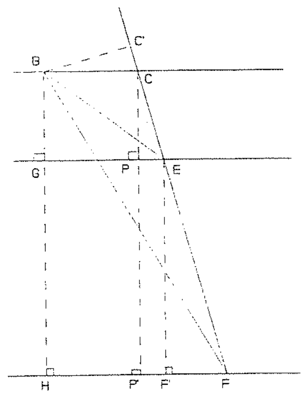


Pour un arc donné $\widehat{BE}$ dans un cercle de rayon 1, on pose b = BC. b est donc la tangente de la moitié de l'arc BE.
"La grandeur de l'arc" : il s'agit de l'aire du secteur circulaire BAE (c'est à dire de la moitié de la longueur de l'arc $\widehat{BE}$ puisque, si t est la mesure d'un arc en radians, le secteur correspondant a pour aire $\frac{1}{2}$ t).

On reconnaît dans $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ .... le développement en série d'Arctan b.

Pour un arc $\widehat{BE} = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ ..... qui est aussi l'aire du cercle de diamètre 1.

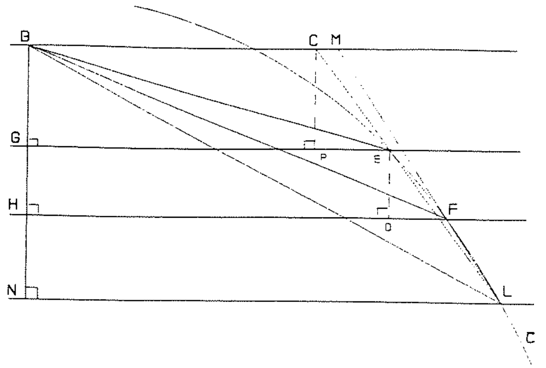
Paragraphe 4 : la méthode des métamorphoses



Lemme (BC), (GE), (HF) sont trois parallèles passant par les sommets B, E, F d'un triangle donné et C, E, F alignés.
Alors : le rectangle GPP'H a une aire double de celle du triangle BEF.
Leibniz omet la **démonstration de ce lemme** : projetons orthogonalement B en C' sur (EF) et E en F' sur (HF). Les triangles BCC' et EFF' sont semblables $\hat{C}' = \hat{F}'$ = un droit et (BC) parallèle à (HF) donc $\hat{C} = \hat{F}$). On a donc : $\frac{BC'}{EF'} = \frac{BC}{EF}$
i.e
BC' × EF = BC × EF'.

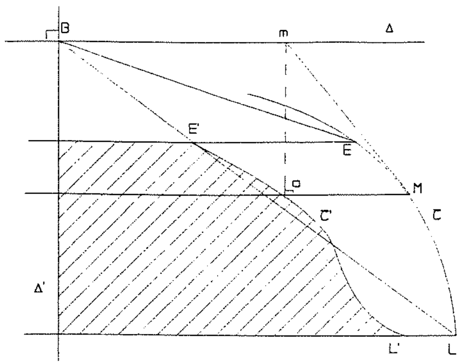
Or : BC' × EF = hauteur x base = 2 × aire du triangle BEF
BC × EF' = GP × PH = aire du rectangle GPP'H

Application du lemme à une courbe $\mathcal{C}$



E, F, L sont des points de $\mathcal{C}$.
. L'aire du rectangle construit sur GPH est le double de l'aire du triangle BEF.
. L'aire du rectangle construit sur HQN est le double de l'aire du triangle BFL.
etc ....

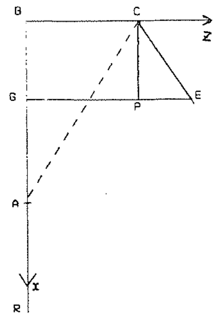
Si les bases EF, FL, etc deviennent infiniment petites, alors (EF), (FL), etc deviennent les tangentes à la courbe en E, F, etc et la somme des aires des triangles BEF, BFL, etc est l'aire de l'espace BEL limité par la courbe $\mathcal{C}$ et les droites (BE) et (BL).
On a donc remplacé une quadrature par une autre :



On transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ de la manière suivante : en tout point M de $\mathcal{C}$, on trace la tangente à $\mathcal{C}$ qui coupe Δ en m. On projette m orthogonalement en P sur la parallèle à Δ passant par M.

Alors, lorsque M décrit $\mathcal{C}$, P décrit une courbe $\mathcal{C}'$ et l'aire hachurée est le double de l'aire de l'espace BEL limité par $\mathcal{C}$, (BE) et (BL).

Paragraphe 5 : application de la méthode à la quadrature du cercle.



Le point E parcourt un arc de cercle, P parcourt la "transformée" $\mathcal{C}'$ dont on cherche l'équation.
On pose BC = z et BG = x
Les triangles BCA et BGE sont semblables (en effet $\hat{G} = \hat{B}$ = un droit et $\hat{E} = \hat{A}$ car ce sont des angles à côtés perpendiculaires). On a donc $\frac{BC}{GB} = \frac{CA}{EB}$

donc $EB^2 = CA^2 \times \frac{GB^2}{BC^2}$.

Comme le triangle BER est rectangle en R, $EB^2 = BG \times BR$;

on a donc : $\frac{BR}{GB} = \frac{CA^2}{BC^2}$ ("raison doublée").

Si AB = a (rayon), on a :

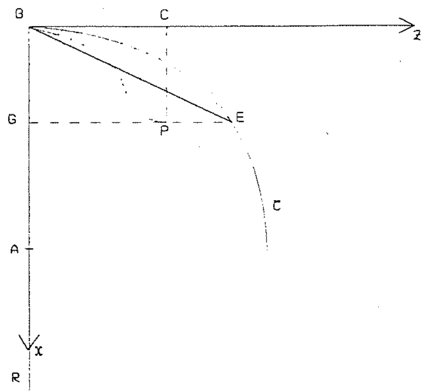
$AC^2 = BC^2 + AB^2 = a^2 + z^2$, $\quad BC^2 = z^2$

$BR = 2a \quad$ donc $\quad \frac{2a}{x} = \frac{a^2 + z^2}{z^2}$

$GB = x \quad\quad x = \frac{2a\, z^2}{a^2 + z^2}$

Lorsque le rayon de $\mathcal{C}$ est 1, l'équation obtenue est :

$$x = \frac{2z^2}{1 + z^2}$$



L'aire curviligne $\mathbb{A}_1$ limitée par (BR), (GE) et $\mathcal{C}'$ (en pointillés) est le double de l'aire $\mathbb{A}_2$ du segment de cercle BE (limité par $\mathcal{C}$ et (BE)).

Première étape : on calcule l'aire $\mathbb{A}_3$ (hachurée) limitée par (BC), (CP) et $\mathfrak{C}'$.

$$\frac{x}{2} = \frac{z^2}{1+z^2} = z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \ldots\ldots$$

"La somme de tous les x" : pour nous c'est $\int_0^b f(z)\,dz$ si $x = f(z)$

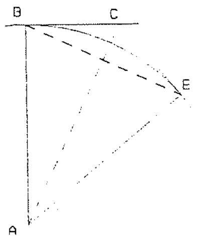
donc c'est $2\int_0^b (z^2 - z^4 + \ldots\ldots)\,dz = 2\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9} + \ldots\right)$

[*"La première de toutes les z étant infiniment petite .... la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, ..."* correspond à ce que nous écrivons

$\int_0^b z^2\,dz = \frac{b^3}{3}$].

Or $\mathbb{A}_3$ est la différence entre l'aire du rectangle BCPG et $\mathbb{A}_1$, elle-même double de $\mathbb{A}_2$ ("la différence entre le rectangle CBG et le double du segment de cercle").

Deuxième étape :



L'aire du secteur ABE est égale à l'aire $\mathbb{A}_2$ du segment de cercle ajoutée à l'aire du triangle BAE qui vaut (après calcul) $\frac{b}{1+b^2}$.

On obtient finalement :
l'aire du secteur BAE vaut :

$$\mathbb{A} = \underbrace{\frac{b}{1+b^2}}_{\text{triangle BAE}} + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{2b^3}{1+b^2}}_{\text{rectangle BCPG}} - 2\underbrace{\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9} - \ldots\ldots\right)}_{\mathbb{A}_3 \text{ (aire hachurée)}}\Big)$$

$$\mathbb{A} = b\left(\frac{1}{1+b^2} + \frac{b^2}{1+b^2}\right) - \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} \ldots\ldots\right)$$

$$\mathbb{A} = b - \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} \ldots\ldots$$

Ce qui termine la démonstration.
On remarque, comme toujours à cette époque, qu'on ne voit apparaître aucune préoccupation explicite de convergence.

Travail avec les élèves. texte de problème (niveau T.C.)

Quadrature du cercle à la manière de ....Leibniz

Les deux parties, bien que liées, sont indépendantes en grande partie. On peut toujours utiliser les résultats des diverses questions dans la suite du problème.

Le but du problème est de trouver une expression de π sous forme de limite d'une suite de nombres rationnels.

Partie A. Etude d'une fonction et approximation d'une aire

On définit la fonction f sur l'intervalle [0,1] par :

$$z \longrightarrow f(z) = \frac{2z^2}{1+z^2}$$

1°) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 8 cm) (on étudiera la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{3}}$).

2°) Donner une interpréation géométrique du nombre

$$A = \int_0^1 f(z)\,dz$$

Le but des questions suivantes est de déterminer une suite convergeant vers A.

3°) a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout z de $\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots\dots + (-1)^n z^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+2}}{1+z^2}.$$

b) En déduire une expression de A sous forme de la somme d'un nombre rationnel et d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer (tous deux dépendant de n).

c) On pose $\quad R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{z^{2n+4}}{1+z^2}\, dz$ et

$$u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots\dots + (-1)^n \frac{1}{2n+3}$$

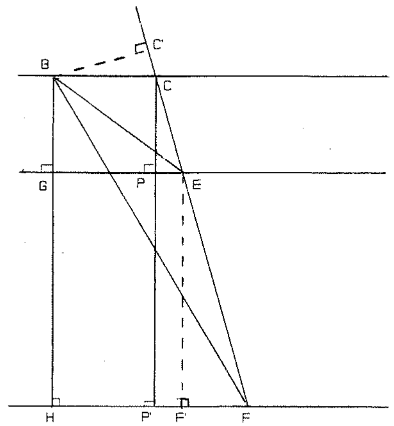
Montrer : $|R_n| < \frac{1}{2n+5}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de u_5, u_{50}, u_{500}.

Partie B : Métamorphose d'un cercle

1°) Lire le texte suivant, extrait d'une lettre de Leibniz, écrite à La Roque, directeur du *Journal des Savants*.

Pour cet effect je me suis servi de ce lemme : Trois paralleles BC, GE, HF (fig. 1), passant par les trois angles d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à la rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'intervalle BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel passe cette parallele, et sous GH, la distance des deux autres paralleles GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH normale à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double du Triangle BEF. De même, si HQ égale à BM, le rectangle QHN sera égal au double Triangle BFL.



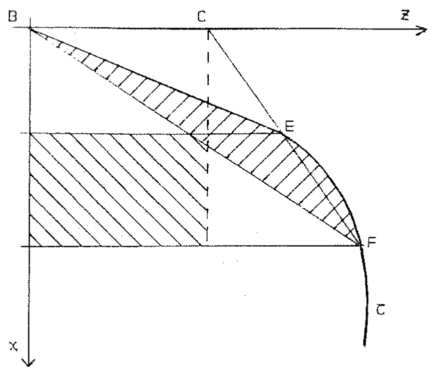
C, E, F sont alignés.
(BC), (GE), (HF) sont parallèles.
Le rectangle GPP'H a une aire double de celle du triangle BEF.
Les questions a) et b) sont destinées à vous aider à démontrer cette assertion.

a) On projette orthogonalement B en C' sur (EF) et E en F' sur (HF).

Montrer que les triangles BCC' et EFF' sont semblables.

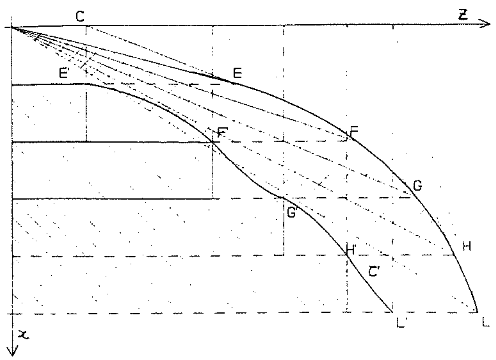
b) En déduire BC' × EF = BC × EF' et démontrer l'assertion de Leibniz.

2°) Voici ce qu'explique Leibniz dans la suite de sa lettre.



B point donné ("origine du repère formé par les axes (Bz) et (Bx), E et F deux points d'une courbe $\mathcal{C}$.
Si E et F sont très proches, la droite (EF) est la tangente à $\mathcal{C}$ en E et le triangle BEF limitée par l'arc EF de la courbe $\mathcal{C}$ et les droites (BE) et (BF).
Le 1°) dit alors :
L'aire hachurée est le double de l'aire pointillée.

En faisant ce travail en chaque point de la courbe, on obtient le résultat suivant :

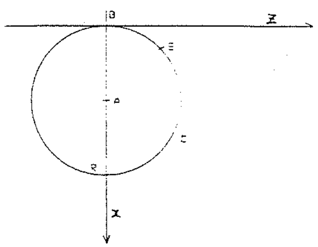


B origine du repère (Bz) (Bx).
En chaque point E de 𝕮, on trace la tangente à 𝕮, qui coupe (Bz) en C et on projette C orthogona-lement en E' sur la parallèle à (Bz) passant par E.
E' décrit une courbe 𝕮' lorsque E décrit 𝕮.

L'aire hachurée (assimilable à l'aire du domaine limité par (Bx), (EE"), (LL"), 𝕮') est le double de l'aire pointillée (du domaine limité par 𝕮, (BE), (BL).

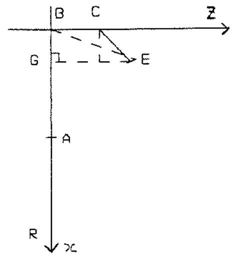
3°) Leibniz utilise alors ce résultat pour déterminer l'aire d'un cercle de rayon 1.

a)



Reproduire la figure et tracer le point E' de la courbe 𝕮' correspondant au point E.
(A : centre du cercle).

b) Nous allons chercher l'équation de 𝕮' dans le repère formé par B, (Bx), (Bz). (Le rayon du cercle est 1).



On pose BC = z et BG = x.
. Montrer que les triangles BCA et GBE sont semblables et en déduire

$EB^2 = CA^2 \cdot \dfrac{GB^2}{BC^2}$

. Montrer $\dfrac{BR}{GB} = \dfrac{CA^2}{BC^2}$

En déduire l'expression de x en fonction de z.

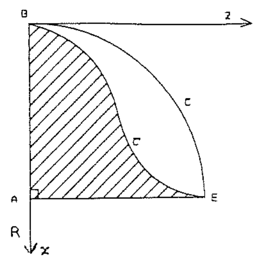
Lire l'extrait suivant de la lettre de Leibniz :

> Car la courbe E(E)((E)) estant un arc de cercle, la courbe des interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter à l'angle droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \sqcap x$, appellant BG ou CP, x et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de demonstrer.

La courbe E(E) ((E)) est la courbe 𝕮. La courbe BP(E)((P)) est la courbe 𝕮'. ; a est le rayon de 𝕮 (a = 1).

Que signifie l'expression :

"RB sera à BG en raison doublée de AC à BC"



B est l'origine du repère dont les axes sont (Bz) et (Bx).
a) Donner une expression de l'aire du domaine limité par 𝕮', (Bz) et la droite d'équation z = 1 à l'aide d'une intégrale.
b) En déduire une expression de l'aire hachurée (domaine limité par 𝕮', (Bx), la droite d'équation x = 1).

c) On a vu que l'aire hachurée est le double de l'aire du domaine limité par la corde (BE) et l'arc BE du cercle. Déduire de ce qui précède une expression de l'aire 𝔸 du quart de cercle ABE à l'aide d'une intégrale.

d) En utilisant la partie A, exprimer $\mathbb{A}$ comme limite d'une suite de nombres rationnels.

Quelle est la valeur exacte de $\mathbb{A}$? Qu'en conclure pour π ?

Lire le texte de Leibniz (nous avons travaillé dans le cas particulier où BAE est un angle droit ce qui correspond à b = 1).

Et pour y arriver il faut se servir de la belle methode de Nicolaus Mercator, selon laquelle, puisque *a* estant l'unité et $\frac{x}{2}$ égal à $\frac{z^2}{1+z^2}$, la même x sera égale à $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ etc. à l'infini, et la somme de toutes les x égale à la somme de toutes les $z^2 - z^4$ etc. Or la premiere de toutes les z estant infiniment petits, et la derniere estant d'une certaine grandeur, comme BC que nous appellerons b, la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, et la somme de toutes z^4 sera $\frac{b^5}{5}$ etc. (par la quadrature des paraboles), donc la somme de toutes les x ou l'espace BCPB, ou la difference du rectangle CBG et du double segment du cercle BEB sera $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. donc (par une suite assez aisée de la Geometrie ordinaire) l'arc BDE sera $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. le rayon estant 1 et BC, touchante de la moitié de l'arc, estant appellée b. Ce qu'il falloit demonstrer.

A quelle époque vivait Leibniz ? En avez-vous entendu parler à d'autres cours ?.

. Pouvez-vous donner une définition du nombre π ?

Quelles approximations de π connaissez-vous ? Connaissez-vous des méthodes permettant de justifier ces approximations ?

Lettre à La Roque, Directeur du Journal des Savants.

I.

Monsieur

La quadrature Arithmetique du Cercle et de ses segments ou secteurs, que j'ay trouvée et communiquée à plusieurs excellens Geometres il y a déja quelques années, leur a paru assez extraordinaire, et ils m'ont exhorté d'en faire part au public. Mais comme je n'aime pas d'écrire un volume farci d'un grand nombre de propositions repassées pour donner une seule qui soit nouvelle et considerable, j'ay recours à Vostre Journal qui nous donne le moyen de publier un theoreme sans faire un livre.

Quadrature Arithmetique est, qui exprime la grandeur de la figure proposée par un rang infini de nombres rationaux ou commensurables à une grandeur donnée, ce qui suffit pour l'Arithmetique lorsqu'on ne le sçauroit faire par un nombre rationel fini, car l'arithmetique ne connoist les nombres irrationaux qu'autant qu'elle les peut exprimer par les rationels soit finis soit infinis. Et il n'est pas difficile de donner même un rang infini de nombres rationaux égal à une racine sourde, ce que je croy d'avoir fait le premier, en......*) la division dans une extraction continuée.

La quadrature Arithmetique du Cercle et de ses parties peut estre comprise dans ce theoreme: Le rayon du Cercle estant l'unité, et la tangente BC de la moitié BD d'un arc donné BDE estant appellée b, la grandeur de l'arc sera: $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. Or les arcs estant trouvez, il est aisé de trouver les espaces, et le corollaire de ce theoreme est que le Diametre et son quarré estant 1, le Cercle est $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. L'usage de cette quadrature est qu'outre la beauté d'un theoreme aussi simple et aussi surprenant que celuy-ci, vous avons un moyen de trouver les angles par les costez et à rebours; item les espaces ou portions des Cercles, Ellipses, Cones, Spheres, Spheroides et de leur surfaces, le tout par une simple addition de nombres rationaux ou grandeurs commensurables au defaut même de tables toutes calculées, et sans polygones, dont le calcul demande une extraction perpetuelle de racines, outre qu'ainsi on approchera bien viste; car si *b* par exemple ou BC estoit $\frac{1}{10}$ du rayon, b^{11} seroit $\frac{1}{100000000000}$ et par consequent toutes les puissances plus hautes pourront negligées hardiment. Ce qui serviroit à continuer les tables, et à les rendre plus exactes sans beaucoup de peine.

Or comme il n'y a rien de si important que de voir les origines des inventions qui valent mieux à mon avis que les inventions mêmes, à cause de leur fecondité et par ce qu'elles contiennent en elles la source d'une infinité d'autres qu'on en pourra tirer par une certaine combinaison (comme j'ay coûtume de l'appeller) ou application à d'autres sujets lors qu'on s'avisera de la faire comme il faut; j'ay crû estre obligé de faire part au public de l'origine de celle-cy. J'ay donc consideré, que les quadratures que nous avons trouvées jusqu'icy par l'analyse ordinaire, dependent des regles Arithmetiques de trouver les sommes des rangs reglés, ou des progressions de nombres rationaux. Mais les données du cercle estant irrationelles, j'ay taché de transforme cercle en une autre figure, du nombre de celles que j'appelle tionelles, c'est à dire dont les ordonnées sont commensurable leurs abscisses. Pour cet effect j'ay fait le dénombrement de quai de Metamorphoses, et les ayant essayées par une combinaison aisée (car je pourrois par ce moyen écrire en une heure de te une liste de plus de 50 figures planes ou solides, differentes, neantmoins dependentes de la circulaire) j'ay trouvé bieutost moyen que je m'en vays expliquer. J'ay crû cependant à pro de remarquer cecy en passant pour justifier ce que j'avois dit tresfois de l'utilité des combinaisons pour trouver des choses l'algebre et si vous voulez, l'analyse même telle que nous l'av ne sçauroit donner. Or le moyen que les combinaisons m' offert sert à trouver un nombre infini de figures commensural à une figure donnée. Pour cet effect je me suis servi de ce lemı Trois paralleles BC, GE, HF (fig. 1), passant par les trois an d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'interv BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel pa cette parallele, et sous GH, la distance des deux autres paralle GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH n male à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double Triangle BEF. De même, si HQ égale à BM, le rectangle Q sera égal au double Triangle BFL. Et si ces bases EF, FL sont infiniment petites, et continuées pour remplir*) tout l'Esp EB((E))LFE à la courbe EFL((E)), et de même si GH, HN sont infiniment petites afin que les rectangles PGH, QHN etc. re plissent tout l'espace PG((G))((P))QP à la courbe PQ((P)), t cet espace sera le double de l'autre espace. Et puisque FEC, LF ((E))((C)) seront les touchantes de la premiere courbe, le theore se pourra enoncer generalement ainsi: Si d'une courbe E((E)) mene à un costé AB d'un angle droit ABC les ordonnées F ((E))((G)), à l'autre costé BC les touchantes EC, ((E))((C)), al la somme des interceptées BC, ((B))((C)) entre le point de l'an B et le point de la rencontre des touchantes C ou ((C)) appliqu normalement à l'axe AB ou GP, ((G))((P)), c'est à dire la figu PG((G))((P))QP sera le double de l'espace EB((E))E compris en une portion de la premiere courbe et les droites qui joignent extremités de cette portion au point B.

Le troisieme Corollaire est la quadrature Arithmetique du Cercle. Car la courbe E(E)((E)) estant un arc de cercle, la courbe des interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter a l'angle droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \sqcap x$, appellant BG ou CP, x et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de demonstrer. D'ou il s'ensuit premierement que celuy qui trouvera une regle de donner par abregé la somme d'un tel rang, quoyque fini, de nombres rationaux: $\frac{2,1}{1+1}$ ou $\frac{2}{2}$, $\frac{2,4}{1+4}$ ou $\frac{8}{5}$, $\frac{2,9}{1+9}$ ou $\frac{18}{10}$, $\frac{2,16}{1+16}$ ou $\frac{32}{17}$ etc. sans estre obligé de les adjouter ensemble l'un apres l'autre, aura achevé la quadrature du cercle, parceque c'est la progression des ordonnées CP de la figure BCPB, dont la quadrature donneroit celle du Cercle. Mais à present ce n'est pas encor la quadrature Arithmetique. Et pour y arriver il faut se servir de la belle methode de Nicolaus Mercator, selon laquelle, puisque a estant l'unité et $\frac{x}{2}$ égal à $\frac{z^2}{1+z^2}$, la même x sera égale à $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ etc. à l'infini, et la somme de toutes les x égale à la somme de toutes les $z^2 - z^4$ etc. Or la premiere de toutes les z estant infiniment petite, et la derniere estant d'une certaine grandeur, comme BC que nous appellerons b, la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, et la somme de toutes z^4 sera $\frac{b^5}{5}$ etc. (par la quadrature des parabole donc la somme de toutes les x ou l'espace BCPB, ou la differen du rectangle CBG et du double segment du cercle BEB sera $-\frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. donc (par une suite assez aisée de la Ge metrie ordinaire) l'arc BDE sera $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. rayon estant 1 et BC, touchante de la moitié de l'arc, estant pellée b. Ce qu'il falloit demonstrer. J'avoue que cette demo stration ne pourra pas estre entendue de tout le monde, par qu'elle suppose bien des choses qui ne sont connues qu'à ceux sont versez dans les nouvelles decouvertes et qui sçavent ma les characteres ou symboles. Mais il n'y en a que trop pe ceux-cy: et il faudroit un volume pour satisfaire aux autres. pourroit prouver aussi le rapport qu'il y a entre la figure interceptées B((G))((P))PB et le cercle, en supposant la quadrat de la Cissoeide trouvée par Mons. Hugens, comme il m'a fait marquer. Mais la demonstration que je viens de donner m'a se de principe d'invention et est feconde en theoremes nouvea S'il y a lieu d'esperer qu'on pourra jamais arriver à une rai analytique, exprimée en termes finis, du Diametre à la circonferen je croy que ce sera par cette voye, car quoyque les expressi soyent infinies, nous ne laissons pas quelques fois d'en trouver sommes: et pour cet effect je donneray pour conclusion l'obse tion suivante, qui me paroist tres curieuse:

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{48}\ \frac{1}{63}\ \frac{1}{80}\ \frac{1}{99}\ \frac{1}{120}$ etc. dont la somme $\sqcap \frac{3}{4}$ la progress estant co nuée à l'in

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{63} \cdot \frac{1}{99}$. etc. . . . . . . $\sqcap \frac{1}{2}$

$\cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{120}$ etc. . . . . . . $\sqcap \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}$ . . . $\frac{1}{35}$ . . . . $\frac{1}{99}$. etc. . . . . . . $\sqcap$ pendet ex q c

$\frac{1}{8}$ . . . $\frac{1}{48}$ . . . . $\frac{1}{120}$ etc. . . . . . . $\sqcap$. pendet ex q hyper

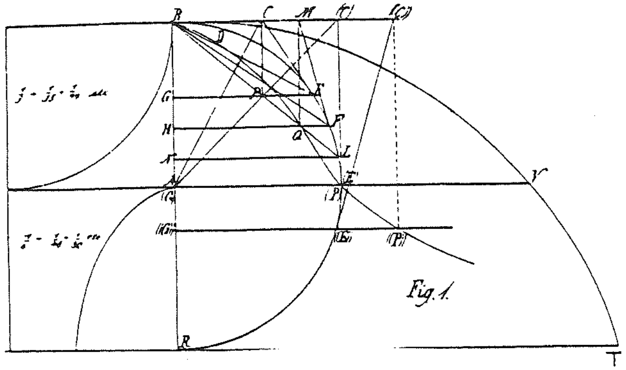


Fig. 1

Extraits de

l'*Encyclopédie Méthodique*

de Diderot et d'Alembert.,

Réédition A.C.L.

Mais, dira-t-on, qu'exprime donc alors une pareille suite? Car, par la nature de l'opération, elle doit être égale à la quantité ou fraction proposée; & cependant elle s'en éloigne continuellement. Un auteur nomme *Guido Ubaldus*, dans son traité de *quadratura circuli & hyperbolæ*, a poussé ce raisonnement plus loin, & en a tiré une conséquence fort singulière. Ayant pris la suite $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, & ayant fait la division, il a trouvé au quotient $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, &c. qui, à l'infini, ne peut jamais donner que 1 ou 0; savoir 1, si on prend un nombre impair de termes; & 0, si on prend un nombre pair; d'où cet auteur a conclu que la fraction $\frac{1}{1}$ pouvoit devenir 1 par une certaine opération, & que 0 pouvoit être aussi égal à $\frac{1}{2}$, & que par conséquent la création étoit possible, puisque avec moins on pouvoit faire plus.

L'erreur de cet auteur venoit de n'avoir pas remarqué que la suite $1 - 1 + 1 - 1$, &c. & en général $1 - c + c^2 - c^3$, &c. n'exprimoit point exactement la valeur de la fraction $\frac{1}{1+c}$. Car supposons qu'on ait poussé le quotient de la division jusqu'à cinq termes, comme la division ne se fait jamais exactement, il y a toujours un reste, soit ce reste r; & pour avoir le quotient exact, il faut, comme dans la division ordinaire, ajouter ce reste r divisé par le diviseur $1 + c$, à la partie déjà trouvée du quotient.

Ainsi supposons que la *série générale* soit terminée à $-c^3$, on aura $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c}$ $= \frac{1+c-c-c^2+c^2+c^3-c^3-c^4+c^4}{1+c} = \frac{1}{1+c}$.

Par conséquent la valeur exacte de $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ est $1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1+1}$; & cette valeur se trouve toujours égale à $\frac{1}{2}$, & non pas zéro à 1. *Voyez* dans les *Mémoires de l'Acad. de* 1715, un écrit de M. Varignon, où cette difficulté est éclaircie avec beaucoup de soin.

Quadrature du cercle par M. Leibnitz. Soit la tangente KB (*Pl. d'analyse fig.* 49) $= x$, $BC = 1$; la secante AC infiniment proche de CK; décrivez avec le rayon CK le petit arc KL: vous aurez $AK = dx$, $KC = V(1 + x^2)$. Maintenant puisque les angles B & L sont droits, & l'angle $BKC = KAC$ à cause de la petitesse infinie de l'angle KCL, nous aurons $KC : BC :: KA : KL$, c'est-à-dire, $V(1+x^2) : 1 :: dx : \frac{dx}{V(1+x^2)} = KL$.

De plus, $CK : KL :: CM : mM$; c'est-à-dire, $V(1+x^2) : \frac{dx}{V(1+x^2)} :: 1 : \frac{dx}{1+x^2} = Mm$.

Donc le secteur $CMm = \frac{1}{2} dx : (1 + x^2) = \frac{1}{2}(dx - x^2 dx + x^4 dx - x^6 dx + x^8 dx - x^{10}$ &c. & l'on trouve, par le calcul integral, le secteur BCM (dont la tangente KB est x) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}$ [illegible] &c. & ainsi à l'infini. C'est pourquoi si BM est la huitième partie du cercle ou un arc de 45°, le secteur sera $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14}$ &c. à l'infini. Donc le double de cette série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. à l'infini, est le quart de cercle.

COMMISSION INTER-IREM
HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

INFINIMENT GRANDS ET INFINIMENT PETITS

Actes du 9ème colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

Les 'Elemens de la géomètrie de l'infini' de Fontenelle

Michel Blay
CNRS, Paris

En décembre 1727, Fontenelle fait paraître à Paris un ouvrage qui lui tient profondément à coeur et auquel il a consacré près de trente années de travail: **Les Elémens de la géométrie de l'infini**. Dans son édition originale, cet ouvrage in 4° de 548 pages en deux parties (1), sortie des presses de l'Imprimerie Royale, est présenté comme une "suite des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences" (2).

Le livre reçut de la part des contemporains un accueil très réservé. Ces derniers, au lieu de porter leur attention sur le projet intellectuel fontenellien, s'attachèrent seulement à souligner, souvent d'ailleurs à juste titre, les insuffisances mathématiques et les difficultés de la construction théorique. En adoptant une telle attitude, ils méconnaissaient le véritable enjeu du travail et de la réflexion du secrétaire perpétuel.

Pour ce dernier, son livre n'a pas pour objet de présenter de nouveaux résultats, mais bien plutôt, en refusant de réduire le nouveau calcul, soit à un simple calcul d'approximation (3), soit à un artifice de calcul (4), d'éclairer en profondeur, par ce que l'on pourrait appeler en termes modernes un travail sur les fondements (5), les résultats déjà acquis. Pour Fontenelle, on ne peut être satisfait, comme beaucoup à l'époque, d'une méthode qui, sans doute, "marche bien" et donne de nombreux résultats, mais que, en contre partie, on manipule, pour ainsi dire, à l'aveuglette. Fontenelle est sur ce point très explicite dans la remarquable Préface qu'il place en tête de son livre et qui est aussi, d'une certaine façon, une histoire de la genèse du nouveau calcul leibnizien :

> "[...] *il est arrivé dans la haute Géométrie une chose bizarre, la certitude a nui à la clarté. On tient toujours le fil du calcul, guide infaillible, il n'importe où l'on arrive, il y falloit arriver, quelques ténebres qu'on y trouve. De*

plus, la gloire a toujours été attachée aux grandes recherches, aux solutions des Problemes difficiles, & non à l'éclaircissement des idées.

J'ai cru que cet éclaircissement, négligé par les habiles Géometres, pourroit être utile à la Géométrie; on n'en marchera pas plus sûrement, mais on verra plus clair autour de soi, avec le fil qu'on avoit dans des Labyrinthes sombres, on aura un flambeau, dont la lueur ne sauroit être si petite, qu'elle ne soit toujours de quelque usage, & même si cette petite lueur que je présente n'est pas fausse, rien n'empêchera qu'on ne l'augmente beaucoup" (6).

ou bien encore:

"J'avoue qu'on peut me reprocher qu'au lieu d'éclaircir l'Infini, j'y porte une obscurité nouvelle, un Paradoxe inoui, qui est exposé dans la Sect. III, & qui ensuite se retrouve souvent dans tout l'Ouvrage : mais si ce Paradoxe est vrai, s'il suit nécessairement de la nature de l'Infini, je la fais mieux connoître, j'en fais mieux connoître les propriétés, qui, quoiqu'obscures, sont la source de tout ce que le Calcul nous donne de plus étonnant ; on arrivera aux plus grandes merveilles bien préparé, & sans cette espèce de surprise, qui dans le fonds n'est point honorable à une vraie Science. C'est toujours un degré de lumiere, que de voir sûrement à quel principe, fût-il peu connu, tiennent certains effets" (7).

Pour répondre à cette exigence de clarté, mais aussi de rigueur, Fontenelle se propose de construire une véritable théorie ou un "système général de l'infini" (8) susceptible de rendre raison de tous les résultats obtenus, de leur donner un sens:

"Quand une Science, telle que la Géométrie, ne fait que de naître, on ne peut guere attraper que des Vérités dispersées qui ne se tiennent point, & on les prouve chacune à part comme l'on peut, & presque toujours avec beaucoup d'embarras. Mais quand un certain nombre de ces Vérités désunies ont été trouvées, on voit en quoi elles s'accordent, & les principes généraux commencent à se montrer, non pas encore les plus généraux ou les premiers, il faut un plus grand nombre de Vérités pour les forcer à paroître. Plusieurs petites Branches que l'on tient d'abord séparément, menent à la grosse Branche qui les produit, & plusieurs grosses Branches menent enfin au

Tronc. Une des grandes difficultés que j'aie éprouvées dans la composition de cet Ouvrage a été de saisir le Tronc, & plusieurs grosses Branches m'ont paru l'être qui ne l'étoient pas. Je ne suis pas sûr de ne m'y être pas encore trompé, mais enfin quand j'ai eu pris l'Infini pour le Tronc, il ne m'a plus été possible d'en trouver d'autre, & je l'ai vu distribuer de toutes parts, & répandre ses rameaux avec une régularité & une symétrie, qui n'a pas peu servi à ma persuasion particuliere.

Un avantage d'avoir saisi les premiers Principes, seroit que l'ordre se mettroit par-tout presque de lui-même, cet ordre qui embellit tout, qui fortifie les Vérités par leur liaison, que ceux à qui on parle ont droit d'exiger, & qu'on ne peut leur refuser sans une espece d'injustice, sur tout si on sacrifie leur commodité à la gloire de paroître plus profond" (9)

ou bien encore, un peu plus loin :

"Le Calcul n'est guere en Géométrie que ce qu'est l'expérience en Physique, & toutes les Vérités produites seulement par le Calcul, on les pourroit traiter de Vérités d'expérience. Les Sciences doivent aller jusqu'aux premieres causes, sur-tout la Géométrie, où l'on ne peut soupçonner comme dans la Physique des principes qui nous soient inconnus. Car il n'y a dans la Géométrie, pour ainsi dire,que ce que nous y avons mis, ce ne sont que les idées les plus claires que l'Esprit humain puisse former sur la Grandeur comparées ensemble, & combinées d'une infinité de façons différentes" (10).

C'est le sens de cette démarche théorique, visant à construire un "système général de l'infini", qui n'a pas toujours été bien perçu.

Ainsi, tandis que Leibniz dès le 20 juin 1702 écrit à Varignon:

"Entre nous je crois que Mons. de Fontenelle, qui a l'esprit galant et beau, en a voulu railler, lorsqu'il a dit qu'il vouloit faire des elemens metaphysiques de nostre calcul. Pour dire le vray, je ne suis pas trop persuadé moy même, qu'il faut considerer nos infinis et infiniment petits autrement que comme des choses ideales ou comme des fictions bien fondées. Je croy qu'il n'y a point de creature au desous de la quelle il n'y ait une infinité de creatures,

cependant je ne crois point qu'il y en ait, ny même qu'il y en puisse avoir d'infiniment petites et c'est ce que je crois pouvoir demonstrer. Il est que les substances simples (c'est-à-dire qui ne sont pas des estres par aggregation) sont véritablement indivisibles, mais elles sont immaterielles, et ne sont que principes d'action" (11).

le Père Castel, pour sa part, regrette dans une lettre adressée à Fontenelle en date du 20 mars 1728, que ce dernier ne soit pas dans son ouvrage "remonté à la métaphysique":

"Tous les autres, sans en excepter M. de l'Hôpital, n'en ont traité que l'art, le tâtonnement et la routine du calcul. De sorte que si vous aviez voulu remonter à la Métaphysique, comme je l'avois toujours espéré, je ne vois pas ce qui pourroit manquer à une si belle science" (12).

La raison de cette incompréhension réside pour une grande part dans une méconnaissance du concept fontenellien de système géométrique, concept dont l'introduction donne justement tout son sens à la distinction, essentielle pour Fontenelle, entre infini géométrique et infini métaphysique. Fontenelle insiste sur l'importance de ce concept en donnant à la première partie de son ouvrage le titre de "Système général de l'infini". Par ailleurs, c'est principalement sur cette question qu'il attire, dans sa correspondance, l'attention de ses lecteurs. Ainsi, dans sa lettre à Jean I Bernoulli en date du 22 avril 1725, il se"flatte" que son "assez gros ouvrage, dont le titre est **Elémens de la géométrie de l'infini**" soit :

"[...] *une espece de* ***sistéme****, non pas Metaphisique, mais Geometrique, assés bien lié de tout ce que vous nous avés découvert sur cette grande matiere. i'en croi l'ordre a peu prés aussi exact qu'il puisse l'étre, et le spectacle assés beau pour un Esprit mathematicien, il a falu, ne fust ce que pour la liaison des pierres du Bâtiment, que i'aye meslé un grand nombre de pensées qui n'étoient qu'a moi, avec celles qui vous appartenoient* [...] " *(13)*

Mais ce qui illustre, pour Fontenelle, de façon particulièrement exemplaire, sa conception d'un système géométrique "bien lié", c'est la place déterminante qu'il a dû concéder pour la cohérence du système à un paradoxe ; celui présidant à l'introduction des "finis indéterminables" (cf. infra).

Aussi précise-t-il, dans cette même lettre à Jean I Bernoulli en

date du 22 avril 1725 :

"Car ce qu'il y a de bizarre, c'est qu'autant que ce principe est ***paradoxe*** *et* ***sauvage****, autant il est fécond et général, et ie vous prie sur ce point seulement de m'en croire à ma parole. ie retrouve cela par tout, et sans l'avoir aucunement cherché, au contraire. i'aurois voulu de tout mon coeur m'en pouvoir passer, i'en connoissois le peril . i'en trouve à chaque moment dans le cours de l'ouvrage de nouvelles preuves par des analogies, par le Calcul, par la liaison necessaire de ce principe avec toutes les vérités connües qui peuvent y avoir rapport"* (14).

Fontenelle revient à de multiples reprises sur ces mêmes thèmes dans sa correspondance avec Jean I Bernoulli (15), mais aussi avec Jean-Pierre de Crousaz (1663-1750) (16), s'Gravesande (1668-1742) (17) et Boullier (1669-1759) (18). A la lecture de ces différents textes, il apparaît clairement que, pour lui, ses **Elemens** se présentent comme un "système géométrique" doté d'une remarquable cohérence interne ("bien lié"), et faisant usage entre autres d'une hypothèse en forme de paradoxe présidant à l'introduction des "finis indéterminables". Dans cette perspective, l'existence des objets du système repose, en dernier ressort, sur cette cohérence interne. Elle est le garant de leur réalité, leur seul support ontologique.

Fontenelle écrit d'ailleurs dans la Préface de ses **Elémens** :

"La Géométrie est toute intellectuelle, indépendante de la description actuelle et de l'existence des Figures dont elle découvre les propriétés. Tout ce qu'elle conçoit nécessaire est réel de la réalité qu'elle suppose dans son objet. L'Infini qu'elle démontre est donc aussi réel que le Fini , & l'idée qu'elle en a n'est point plus que toutes les autres, une idée de supposition, qui ne soit que commode, & qui doive disparoître dès qu'on en a fait usage" (19).

Cela étant, la distinction fontenellienne entre infini géométrique et infini métaphysique prend toute sa signification :

"Nous avons naturellement une certaine idée de l'Infini, comme d'une grandeur sans bornes en tous sens, qui comprend tout, hors de laquelle il n'y a rien. On peut appeller cet Infini ***Métaphysique****: mais l'Infini* ***Géométrique****, c'est-à-dire, celui que la Géométrie considere, & dont elle a besoin dans ses recherches, est*

fort différent, c'est seulement une grandeur plus grande que toute grandeur finie, mais non pas plus grande que toute grandeur. Il est visible que cette définition permet qu'il y ait des Infinis plus petits ou plus grands que d'autres Infinis, & que celle de l'Infini Métaphysique ne le permettroit pas. On n'est donc pas en droit de tirer de l'Infini Métaphysique des objections contre le Géométrique, qui n'est comptable que de ce qu'il renferme dans son idée, & nullement de ce qui n'appartient qu'à l'autre"(20)

L'infini géométrique, selon Fontenelle, apparaît donc, dans le cadre de sa conception du "système géométrique", comme un concept mathématique qui, en tant que tel, est ontologiquement indépendant de l'infini métaphysique. Il ne relève que de la cohérence du système à l'intérieur duquel il se déploie. En conséquence, pour Fontenelle, aucune critique du concept d'infini géométrique s'appuyant sur celui, d'ailleurs pour lui assez flou, d'infini métaphysique, ne peut être d'une quelconque valeur (21). Par cette volonté de considérer le concept d'infini géométrique comme un concept spécifique dont le contenu doit être défini à l'intérieur du seul discours mathématique, Fontenelle annonce incontestablement les travaux de Cantor et de ses successeurs, en dépit de certaines faiblesses mathématiques sur lesquelles nous reviendrons et résultant pour l'essentiel d'une absence de distinction nette entre nombres ordinaux et cardinaux (22).

Fontenelle définit dans la Section I de ses **Elémens** la grandeur comme ce qui "est susceptible d'augmentation et de diminution, ou ce qui est le même, de plus et de moins". Seront donc des grandeurs "les nombres, les lignes, les surfaces, les solides, les temps, etc.." (23). En son sens général, la grandeur est donc toujours "par son essence, susceptible de plus et moins", par conséquent, "elle ne perd rien de son essence en recevant ce plus ou ce moins, donc elle est encore grandeur, donc encore également susceptible de plus et de moins, donc elle en est toujours susceptible; donc elle est sans fin, ou à l'infini" (24). L'objet de la Section II est précisément l'examen de cette "grandeur infiniment grande" (25).

La réalité particulière du "nombre infini" est, comme le note Léon Brunschvicg à propos de Fontenelle, "immédiatement donnée" (26) par la "suite naturelle des nombres dont l'origine est O ou 1", et, en ce sens, "le nombre infini" possède le même type de réalité que celui que l'on suppose aux nombres finis (27) :

"84. Pour mieux concevoir l'Infini, je considere la Suite naturelle des nombres, dont l'origine est O ou 1.

Chaque terme croit toujours d'une unité, & je vois que cette augmentation est sans fin, et que quelque grand que soit le nombre où je serai arrivé, je n'en suis pas plus proche de la fin de la Suite, ce qui est un caractère qui ne peut convenir à une Suite dont le nombre des termes seroit fini. Donc la Suite naturelle a un nombre de termes infini.

En vain diroit-on que le nombre des termes qui la composent est toujours actuellement fini; mais que je le puis toujours augmenter. Il est bien vrai que le nombre des termes que je puis actuellement parcourir ou arranger selon leur ordre, est toujours fini; mais le nombre des termes dont la Suite est composée en elle-même, est autre chose. Les termes dont elle est composée en elle-même, existent tous également, & si je la conçois poussée seulement jusqu'à 100, je ne donne pas à ces 100 termes une existence dont soient privés tous ceux qui sont par delà. Donc tous les termes de la Suite, quoiqu'ils ne puissent pas être tous embrassés ou considérés ensemble par mon esprit, sont également réels. Or le nombre en est infini, comme on vient de le prouver, donc un nombre infini existe aussi réellement que les nombres finis" (28).

En outre "dans la suite naturelle chaque terme est égal au nombre des termes qui sont depuis 1 jusqu'à lui inclusivement", or, "le nombre de tous ses termes est infini"; il s'ensuit, par conséquent, que la suite naturelle "a un dernier terme qui est ce même infini". Ce dernier terme est exprimé par le "caractère ∞" (29).

Cependant, bien que le passage, dans la suite naturelle des nombres, du fini à l'infini, soit "inconcevable", cette situation n'entrave en rien un travail mathématique sur l'infini puisque la grandeur infiniment grande doit être prise, en suivant Fontenelle, "non comme étant dans ce passage obscur du fini à l'infini; mais comme l'ayant franchi entièrement et ayant passé par les degrés nécessaires, quels qu'ils soient, si ce n'est que je puisse quelque fois entrevoir quelque lumière sur la nature de ces degrés" (30).

Il n'en reste pas moins que le concept même de grandeur infiniment grande semble contradictoire puisque, d'une part, "l'idée naturelle de la grandeur infinie est, qu'elle ne puisse être plus grande ou augmentée" et que, d'autre part, la grandeur infiniment grande en tant qu'elle est grandeur "en doit conserver l'essence et être susceptible d'augmentation et même sans fin" (31). Cependant, "ces deux idées si contraires en apparence se concilient parfaitement" si l'on distingue rigoureusement, suivant Fontenelle, l'ordre du fini et celui de l'infini; en ce sens que l'infini en tant qu'il est grandeur peut recevoir des augmentations et des diminutions, mais seulement des augmentations et des diminutions à l'intérieur de son ordre, d'où finalement :

> *"113. Ces ordres ainsi établis, une grandeur quelconque a des rapports finis à tout ce qui est de son ordre, & elle ne peut recevoir des augmentations ou des diminutions que par ce qui est de son ordre. Si on la conçoit élevée à un ordre supérieur, il faut la prendre comme ayant franchi ce passage immense, & alors tout ce qui est d'un ordre inférieur n'est plus grandeur par rapport à elle, & disparoît devant elle, comme elle-même n'est point grandeur par rapport à toutes celles des ordres supérieurs, & disparaîtroit devant elles. Tout cela n'est que ce qui a été dit du Fini & du simple Infini, appliqué à tous les ordres en général, dont le Fini et le simple Infini n'étoient que les deux premiers" (32).*

Fontenelle dégage ensuite les deux concepts d'"infini indéterminé" et de "fini indéterminable" qui servent de clé de voûte à son système dans la mesure où ils sont introduits pour éviter implicitement tout à la fois les objections adressées au concept d'infini actuel et le retour des paradoxes de Zénon.

De ce point de vue, le cas du concept central de "fini indéterminable" est particulièrement exemplaire puisque son introduction, comme nous allons le voir, est précisément une réponse à la formulation d'un paradoxe pouvant servir d'argument contre l'infini actuel (33).

- Les "infinis indéterminés"

En divisant le dernier terme de la suite des nombres naturels A (à savoir ∞) par un "nombre fini quelconque" n , on obtient encore des infinis du même ordre :

> *"Puisque A est une progression arithmétique, dont le dernier terme est ∞, son terme du milieu est $\frac{\infty}{2}$, Infini, après lequel il ne peut y avoir que des Infinis plus grands.*

> *De même le terme de son 1er quart est $\frac{\infty}{4}$, encore infini, celui de sa premiere 100me partie est $\frac{\infty}{100}$ encore infini; de sorte que de l'intervalle infini, qui est entre 1 & ∞, divisé en 100 parties, il y en a déjà 99 qui ne peuvent avoir que des termes infinis, & il ne reste que la 1re qui puisse en avoir de finis. Il est visible que cette premiere 100ème partie sera infinie, puisqu'elle sera une partie finie d'un intervalle infini, & par conséquent elle contiendra encore une infinité de termes"* (34).

Ces infinis en "nombres prodigieux" contenus dans A et "moindres que ∞" sont tous distingués "par ce caractère α qui représente un infini indéterminé et variable du même ordre que ∞ , qui est un infini fixe" (35). Par conséquent, ces infinis indéterminés sont tels, par exemple, que " $\frac{\infty}{\alpha}$ est un entier fini, plus une fraction le plus souvent, et $\frac{\alpha}{\infty}$ est une fraction finie moindre que 1", ou bien encore, puisque les infinis indéterminés n'ont entre eux que des rapports finis " $\frac{\alpha}{\alpha}$ est un fini " (36).

Ces résultats sont très importants dans la perspective du système fontenellien car ils expriment en termes finis les rapports de grandeurs infinies du même ordre.

- Les "finis indéterminables"

Fontenelle souligne qu'"il est visible que A^2 a autant de termes que A" (37) ; cependant, on doit admettre que A^2 a des infinis "plutôt que A" ou que le passage à l'infini se fait plus tôt en A^2 qu'en A puisque les termes de A^2 croissent comme les carrés de A :

> *"Je représente les deux Suites aux yeux, pour mieux faire voir leur correspondance.*

								B		
A	1	2	3	4	&c.	n	nn		infinis	∞
A^2	1	4	9	16	&c.	nn			infinis	∞^2
								C		

"La ligne BC marque dans A la séparation des termes finis d'avec les Infinis, de sorte qu'à la gauche de BC ils sont tous Finis, & à sa droite Infinis, & en même temps elle marque dans A^2 , qu'au moins à sa droite ils seront tous Infinis, car les Infinis de A ne peuvent qu'augmenter dans A^2 par l'élévation au quarré.

Soit nn le plus grand quarré fini, qui soit dans A, & posé par conséquent à la gauche de BC, & tout auprès : il sera aussi dans A^2, puisqu'il est le quarré de n, un des termes de A. Mais il sera dans A^2 sous n sa racine, & n est dans A, fort éloigné de nn, & d'autant plus que n est plus grand. Mais nn est le plus grand quarré fini possible, & dans A^2 il y a encore loin de nn à la ligne BC. Donc dans A^2 il n'y a plus de termes finis après nn, ou bien il y a dans cette Suite un vuide depuis nn jusqu'à la ligne BC ; de sorte que tous les termes Finis qui sont dans A depuis n jusqu'à la ligne BC, n'ont point de correspondans ou de quarrés dans A^2 , ce qui est manifestement impossible. Donc après nn, il vient dans A^2 des Infinis, & A^2 en a plutôt que A" (38).

Par conséquent, et de façon paradoxale, pour parler comme Fontenelle, des termes finis de A peuvent donner des carrés infinis :

"[...] *les Infinis qui seront dans A^2 depuis nn jusqu'à la ligne BC seront donc des quarrés de termes finis correspondans qui étoient dans A depuis n jusqu'à la ligne BC : or comment des quarrés de termes finis peuvent-ils être infinis ?"* (39).

Fontenelle accepte finalement ce paradoxe (40) pour les deux raisons principales suivantes (41) :

- la première fait appel une nouvelle fois à l'obscurité (42) et à la spécificité du dynamisme présidant au passage du fini à l'infini (43).

- la seconde, plus suggestive, s'appuie sur la cohérence interne du système et la fécondité du dit paradoxe, en ce sens qu'une fois admis, ce paradoxe, d'après Fontenelle, "ne conduit jamais à aucune conclusion fausse. Au contraire, il se lie nécessairement aux vérités déjà connues, et en produit beaucoup de nouvelles. C'est de quoi l'on sera pleinement convaincu dans la suite". Par conséquent, si ce paradoxe est faux, il doit être cependant "parfaitement équivalent à quelque chose de vrai" et en remplir "bien heureusement la place". Il convient donc "en attendant ce vrai" de "prendre ce paradoxe pour une vérité démontrée dans l'art. précédent, me réservant toutefois, & je le dis avec la derniere sincérité, à le rejetter absolument, dès qu'on me fera voir que sans l'employer on peut faire un Système lié de l'Infini en Géométrie, ou qu'il y a quelque autre idée à lui substituer, qui fasse le même effet sans avoir la même difficulté, ou une équivalence" (44).

Cela étant, Fontenelle "appelle **Finis indéterminables**, les termes finis de A qui deviennent infinis dans A^2 par l'élévation au quarré : car comme ils sont dans le passage que fait A^2 du Fini à l'Infini, ils ne peuvent jamais être connus ni déterminés, comme les termes qui sont à l'origine de A ou de A^2 " (45).

Il généralise ensuite ces résultats aux cas des puissances entières et fractionnaires de A (46).

En résumé, cette étude de la suite A des nombres naturels a donc conduit Fontenelle à introduire trois grands ensembles d'éléments lui appartenant : les finis déterminables, les finis indéterminables et les infinis indéterminés. Pour illustrer au mieux la situation complexe liée à la répartition de ces éléments dans A, nous nous permettons de donner en citation un très long extrait de la lettre adressée par Bragelongne, disciple particulièrement fervent de Fontenelle, en avril 1729, à Daniel Bernoulli en réponse à la lettre que ce dernier avait adressée à Fontenelle le 5 octobre 1728 après avoir reçu un exemplaire des **Elémens**. Nous lisons donc sous la plume de Bragelongne:

"7°. Cela posé, si l'on prend m pour représenter tous les finis déterminables et n pour représenter tous les finis indéterminables, si outre cela (faute d'avoir un assez grand nombre de caractéristiques différentes) on représente les infinis qui forment la seconde et la plus grande partie de la Suite, par des fractions dont les numérateurs soient toujours la Caractéristique ∞, et les dénominateurs successivement, en s'éloignant du dernier terme, les finis déterminables, puis les finis indéterminables, en sorte que ces dénominateurs décroissent toujours en s'approchant du dernier terme ∞ , jusqu'à devenir = 1, il est évident que la suite marquée A *représentera suffisamment les changemens qui arrivent dans la Suite des nombres naturels avant d'arriver à son dernier terme qui est toujours ∞ .*

B C D E

A. / 0,1,2,3,4, &c .. m ../.. n.. / .. $\frac{\infty}{n}$../.. $\frac{\infty}{m}$ .. $\frac{\infty}{100}$ .. $\frac{\infty}{4}$ .. $\frac{\infty}{2}$ .. $\frac{\infty}{1}$ /

En effet on peut se représenter tous les nombres finis déterminables comme s'ils étoient contenus depuis A jusqu'en B, les finis indéterminables depuis B jusqu'en C, et enfin cette infinité de termes infinis qui vont toujours en augmentant s'étendra depuis C jusqu'en E. C'est à ces sortes d'infinis aux quels Mr de Fontenelle adopte la Caractéristique α, lorsqu'ils ne sont pas encore arrivez à leur dernier terme; je les représente icy par différentes fractions, pour pouvoir les distinguer les uns des autres, sans abandonner neantmoins la Caractéristique de l'Auteur (47).

Ainsi, l'introduction des finis indéterminables et des infinis indéterminés donne, si l'on peut dire, une épaisseur au "passage obscur du fini à l'infini", passage à l'intérieur duquel, dans le système fontenellien, se résolvent en fait les contradictions apparentes du calcul de l'infini. Ou, pour reprendre les termes de Léon Brunschvicg, c'est "par la distinction entre le dynamisme obscur du passage à l'infini et la clarté inhérente de l'idée statique de l'infini", que se résolvent "les contradictions apparentes du calcul de l'infini" (48).

Quant aux "grandeurs infiniment petites" (49), elles ne sont, pour reprendre une expression de Fontenelle, que des grandeurs infiniment grandes "renversées" (50). Et, corrélativement, les concepts de fini indéterminable et d'infini indéterminé se trouvent dans ce nouveau contexte introduits tout naturellement.

Puis, après avoir développé dans la très longue Section VII intitulée "Sur les suites infinies de grandeurs quelconques" (51), de multiples considérations centrées en particulier sur la question des "sommes de ces suites", Fontenelle en vient finalement au cas des "suites dont les différences seroient infiniment petites" (52). L'étude de ces suites dont "les variations seront conduites par degrés infiniment petits" (53) amène Fontenelle à introduire, pour exprimer ses concepts, une notation qui n'est autre, en fait, que la notation leibnizienne :

"Si on appelle y une grandeur variable quelconque, dont l'accroissement ou décroissement perpetuel réglé par

quelque Loi, forme une Suite, on appellera dy ses différences infiniment petites. Ces dy sont les $\frac{1}{\infty}$ *, & en effet ce sont des fractions ou parties infinitiémes de y, & dy est* $\frac{y}{\infty}$ *. Si les dy sont variables, ils auront aussi des différences qui seront par rapport à eux comme les dy par rapport aux y. On les appelle ddy, & on a ddy =* $\frac{dy}{\infty}$ *. De même les ddy pourront avoir leurs dddy , &c."* (54).

Ainsi, pour la première fois dans l'ouvrage de Fontenelle, un pont est jeté entre la recherche fontenellienne sur les fondements et le calcul leibnizien, ce dernier trouvant ainsi, si l'on en croit l'auteur, une nouvelle clarté, voire une nouvelle rigueur. Fontenelle précise d'ailleurs à la fin de la Section X intitulée "Des variations et des changements des courbes" (55) :

"Mais il y a toujours dans la connoissance des Courbes, même géométriques, un grand nombre de choses qui demandent la Théorie de l'Infiniment grand ou petit, du moins pour être connues d'une maniere générale & commune à toutes les Courbes, & en même temps immédiatement tirée du fond de leur nature. Il faut donc aussi avoir l'Art de calculer les Infinis qui entrent dans les Courbes, & surtout les Infiniment petits, parce que, comme nous l'avons vu, les différences infiniment petites des grandeurs finies qui y entrent, sont ce qu'il y a de plus important à considérer. Par cette même raison, ce Calcul s'appelle ***Différentiel****" (56).*

Cependant, ce n'est véritablement qu'à partir de la Section XI intitulée "Règles générales pour déterminer par le calcul différentiel tout ce qui appartient au cours d'une courbe rapportée à un axe" (57), que Fontenelle utilise systématiquement, pour exprimer ses propres concepts, les notations leibniziennes. Le point décisif réside dans le fait qu' aux différents ordres des différentielles correspondent les différents ordres fontenelliens des grandeurs "absolument infiniment petites". La fin de l'ouvrage est alors, pour l'essentiel, consacrée à la réorganisation de l'ensemble des résultats, y compris sur le mouvement, obtenus par les contemporains avec l'aide du calcul leibnizien (58).

LISTE des ABREVIATIONS

A.Ac.Sc. Registres : Archives de l'Académie des Sciences de Paris; Registres manuscrits des Procès-verbaux des séances de l'Académie Royale des Sciences de Paris.

GM : **Leibnizens mathematische Schriften**. Hrsg. von C.I.Gerhardt, Bd. 1-7 (Berlin, Halle 1849-1863, rééd. Hildesheim, 1960-1961).

UB Basel : Öffentliche Bibliothek der Universität, Basel.

1 - Les deux parties sont composées comme suit: la première (pages 1 à 392), divisée en douze Sections, porte le titre "Système général de l'infini"; la seconde (pages 393 à 546), divisée en huit Sections, porte le titre "Différentes applications ou remarques". Les dernières pages de l'ouvrage (546 à 548) sont intitulées "Réflexion sur les sommes des suites". Il semble que cette "réflexion" ait été faite alors que le livre était déjà sous presse. Des travaux sur ces questions sont présentés par Nicole à l'Académie à la séance du 25 juin 1727, **A.Ac.Sc. Registres**, t. 46, fol. 239, et **Ibid**. fol. 240-246. Nous avons déjà donné deux articles sur cet ouvrage: "Du fondement du calcul différentiel au fondement de la science du mouvement dans les 'Elémens de la géométrie de l'infini' de Fontenelle", **Studia Leibnitiana** (1989), XVII, 99-122, "Du Système de l'infini au statut des nombres incommensurables dans les 'Elémens de la géométrie de l'infini' de Fontenelle", dans **Le labyrinthe du Continu** (Springer Verlag, 1992) 61-75 ; voir également nos ouvrages, **La Naissance de la mécanique analytique** (PUF, 1992), 2° partie, chap. III, et **Les raisons de l'infini** (Paris, gallimard, 1993)

2 - Une Commission composée de Dortous de Mairan et de François Nicole a été nommée par l'Académie sur la demande de Fontenelle le mercredi 14 août 1726 "pour examiner mes Elémens de la géométrie de l'infini", **A.Ac.Sc. Registres**, t. 45, fol. 255 r°.

Le compte rendu des travaux de cette Commission a été présenté à la séance de l'Académie le samedi 22 février 1727, **Ibid**.,t. 46, fol. 73-74. Le rapport rédigé par la Commission a été publié en totalité par l'abbé Trublet à qui de Mairan l'avait communiqué, dans ses **Mémoires pour servir à l'histoire de la vie et des ouvrages de Fontenelle tirés du Mercure de France 1756, 1757 et 1758, par l'abbé Trublet, seconde édition corrigée et augmentée** (Amsterdam, 1759)

3 - **Elémens**, Préface, 8 et 12.

4 - **Ibid**., Préface, 9-10.

5 - La présence du terme "élémens" dans le titre de l'ouvrage est tout à fait significative.

6 - **Ibid**., Préface, 15-16.

7 - **Ibid**., Préface, 16. "Paradoxe" ne doit pas être pris ici dans un sens trop technique, mais seulement en conformité avec son etymologie, comme ce qui heurte l'opinion commune.

8 - C'est le titre donné par Fontenelle à la première partie de son livre. Voir supra.

9 - **Elémens**, Préface, 18-19.

10 - Ibid., Préface, 19-20.

11 - GM, IV, 110. Voir également la réponse non datée de Leibniz à la lettre de Fontenelle en date du 9 septembre 1704, **Lettres et opuscules inédits de Leibniz**, édités par Foucher de Careil (Paris, 1854), 234.

12 - **Oeuvres de M. de Fontenelle** (1766), XI, 157. Le Père Castel publie dans les mois suivants un Extrait des **Elémens** dans le Journal de Trévoux.

13 - **UB Basel** MS LIa 692. Sur cette correspondance, voir Michel Blay: "Note sur la correspondance entre Jean I Bernoulli et Fontenelle", **Corpus**, 13 (1989), 93-100.

14 - **UB Basel** MS LIa 692. Voir également **Elémens**, 66.

15 - Lettres en date des 7 juin 1725, 8 mai 1729, 28 juin 1729, 29 août 1729, **UB Basel** MS LIa 692.

16 - Lettres en date des 20 novembre 1728 et 29 mars 1729. Ces lettres ont été publiées par Jacqueline de la Harpe sous le titre "Des inédits de Fontenelle. Sa correspondance avec J.P. de Crousaz", **Revue Historique vaudoise** (juin 1954), 90-108.

17 - Lettre en date du 7 avril 1730, **Oeuvres de M. de Fontenelle** (1766), XI, 40-41.

18 - Lettre en date du 22 septembre 1739, Ibid., 29-30.

19 - **Elémens**, Préface, 11.

20 - **Ibid**., Préface, 13.

21 - **Ibid**., Préface, 14.

22 - Voir infra.

23 - **Elémens,** 1

24 - Ibid., 29.

25 - La Section II est intitulée "De la grandeur infiniment grande". Elle occupe les pages 29 à 57.

26 - **Les étapes de la philosophie mathématique** (Paris, 1912, rééd. Blanchard 1972), 244.

27 - Voir supra.

28 - **Elémens**, 29-30.

29 - **Ibid**., 30. Le symbole ∞ a été emprunté par Fontenelle à Wallis qui l'a utilisé précédemment dans son **De sectionibus conicis** (1655), partie I, Proposition 1. Il ne faut donc pas confondre le nombre infini de Fontenelle qui finalement, et c'est l'une de ses faiblesses, est

à l'intérieur de la "Suite naturelle", avec le nombre cantorien désigné par ω, dans **Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre** (Leipsig, 1883). Par contre, certains rapprochements peuvent être faits avec les développements récents de l'analyse non standard.

30 - **Elémens**, 30-31.

31 - **Ibid.**. 31-

32 - **Ibid.**, 35. Dans les paragraphes précédents, Fontenelle a bien précisé à l'aide d'exemples ce qu'il faut entendre par "ordres d'infinis".

33 - Galilée, **Discours**, première journée; Louis Couturat, **De l'infini mathématique** (Paris, 1896, rééd. Blanchard 1973), 445-446.

34 - **Elémens**, 59

35 - **Ibid.**, 59

36 - **Ibid.**, 61.

37 - **Ibid.**, 63.

38 - **Ibid.**, 63-64. Dans sa lettre à Jean Bernoulli en date du 22 avril 1725, Fontenelle raisonne à partir des infiniment petits, voir supra,

39 - **Elémens**, 64.

40 - Fontenelle emploie lui-même ici le terme de "paradoxe" pour caractériser la conclusion à laquelle il est parvenu, **Ibid.**, 64.

41 - Fontenelle donne en fait 7 arguments qui se recoupent pour l'essentiel.

42 - Voir supra.

43 - **Elémens**, 65.

44 - Ibid., 66.

45 - Ibid., 66-67.

46 - Ibid., 74 et 82.

47 - **UB Basel** MS LIa 676, fol. 114-118.

48 - **Op. cit.** note 26, 244.

49 - La Section IV de la première partie est intitulée: "De la grandeur infiniment petite". Cette Section occupe les pages 116 à 146.

50 - **Elémens**, 146.

51 - Cette Section occupe les pages 184 à 244.

52 - **Ibid.**, 243.

53 - **Ibid.**, 243.

54 - **Ibid.**, 243.

55 - Cette Section occupe les pages 271 à 310.

56 - **Ibid.**, 310.

57 - Cette Section occupe les pages 311 à 352.

58 - La Section XII est consacrée à la "Règle générale pour déterminer par le calcul différentiel, la courbure des courbes" (pages 353 à 392). Vient ensuite la seconde partie des **Elémens** intitulée: "Différentes applications ou remarques". Cette seconde partie se compose de 8 Sections.

Evolution du concept d'infiniment petit aux 18ème et 19ème siècles

Gert Schubring
Université de Bielefeld

L'intérêt pour l'histoire des quantités infiniment petites, qu'on peut remarquer depuis quelques années, est apparu avec la création d'une *nouvelle* théorie mathématique, l'*analyse non-standard* (NSA). Bien que l'accueil et le développement de cette théorie soient largement redevables à un objectif didactique, au souci tout-à-fait classique de "ne pas rebuter les commençants", d'applanir les entrées dans l'analyse, et donc de supprimer l'appareil technique embarrassant de l'analyse standard pour le remplacer par des notions accessibles intuitivement - bien qu'on pourra donc qualifier la NSA de théorie "didactique", ses promoteurs se sont proposés de trouver les origines historiques de leur programme. Il s'agit donc largement d'un intérêt visant une légitimation, et une grande partie des études historiques entreprises s'inscrivent dans une perspective finaliste qui n'est pas toujours favorable à un approfondissement historique. Ce n'est pas par hasard que la recherche de ses "racines" par la NSA se concentre sur Cauchy - mathématicien tellement fameux qu'il pourra bien servir comme précurseur légitimant la théorie ou même comme père direct de cette théorie.[1]

Pour entreprendre une analyse historique approfondie du concept d'infiniment petit, je souhaite qu'on se libère des contraintes finalistes et qu'on étudie l'évolution de la signification de ce concept dans son contexte historique *contemporain*. Un tel programme de recherche historique implique deux dimensions :

- premièrement, il ne faut pas seulement regarder un concept isolé, comme c'était en général le cas chez ceux qui analysaient le concept de convergence uniforme chez Cauchy, mais il faut plutôt étudier tout un "champ conceptuel" (selon G. Vergnaud), et cela veut dire, pour le concept d'infiniment petit, qu'il faut analyser le système

1 Pour une discussion de cette finalité je peux recommander le livre de Teun Koetsier (*Lakatos' Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, 1991), où les textes de Cauchy sont analysés soigneusement et comparés avec les prétentions des adhérents de la NSA.

des concepts fondamentaux du calcul différentiel et intégral et son évolution,

- et, deuxièmement, il ne faut pas se restreindre aux contributions des grands génies mathématiques, mais il faut considérer les contributions d'une communauté mathématique élargie.

ad 1. Comme concepts les plus pertinents pour le champ conceptuel des fondements de l'analyse concernant les infiniment petits, on peut nommer : les concepts de nombre, de variable, du limite, de fonction, de continuité et de convergence.

Pour tous ces concepts, on peut constater[2] qu'il y a eu pendant longtemps des discussions sur leurs significations, entre de nombreux participants et entre "précurseurs" (arrivant à des contributions significatives), et que ces discussions dépassent largement le cercle des quelques mathématiciens fameux qu'on cite d'habitude.

Par exemple, pour le concept de convergence des séries, on trouve déjà au 18e siècle, avant Gauss et Cauchy, des contributions intéressantes pour éclaircir sa signification au-delà de celle d'une série décroissante, en particulier chez Bougainville (1754) et A. da Cunha (1790). Pour le concept de continuité, la discussion était encore plus étendue; mais elle est pas bien connue en histoire des mathématiques parce qu'elle était menée largement comme débat métaphysique dans la mécanique, sur l'admissibilité du "choc dur". En outre, il faut tenir compte que le principe de continuité, énoncé par Leibniz, avait deux significations. La première est qu'il n'y a pas de sauts dans des processus naturels, mais il y avait aussi la deuxième qui est un principe de permanence : les lois et qualités valables dans le domaine fini restent valables après passage à l'infini. Cette pensée, qui est par exemple caractéristique chez Simon L'Huilier (qui avait emporté le prix de l'Académie de Berlin 1784 sur la question de l'infini), semble avoir encore influencé Cauchy.

Une autre dimension, qui montre que le développement conceptuel de la continuité n'était pas encore achevé au temps de Cauchy, concerne la distinction conceptuelle de la continuité : dans le cas où il existe aussi, pour un concept donné, la négation de ce concept, on peut exploiter cette négation pour analyser l'extension et la signification du concept originel. Dans notre cas, la discontinuité peut servir comme outil pour étudier les éléments de signification de la continuité. Chez Cauchy, il y a peu d'explicitation sur la notion de

2 Une étude approfondie de ces développements conceptuels est en préparation.

discontinuité, mais chez Ampère, qui a alterné avec Cauchy comme enseignant d'analyse à l'Ecole Polytechnique, on trouve (avant et après la publication du cours d'analyse de Cauchy), comme explication de la discontinuité, qu'il s'agit d'une "rupture de la continuité". Cela veut dire que la discontinuité n'est essentiellement qu'une autre forme de continuité : une continuité pièce par pièce. Cela confirme que, dans le contexte français, la signification de continuité était celle d'une continuité sur un intervalle et pas de continuité en un point - contrairement au cas de Bolzano, et cela signifie que la différentiation du concept de continuité n'etait pas encore assez évoluée pour étudier toutes sortes de comportements locaux de fonctions.

Concernant un troisième concept fondamental du champ conceptuel de l'analyse, le concept de nombre, il est pertinent, vis à vis de l'existence prétendue d'une signification non-standard des infiniment petits, d'analyser s'il est possible de détecter une conception des quantités non-archimédiennes dans les communautés mathématiques du 18e siècle ou de la première moitié du 19e siècle.

Euclide, dans son livre V sur la théorie des grandeurs, a exclu les quantités non-archimédiennes, et les temps modernes en Europe ont hérité de cette conception. Le seul endroit où Euclide se permet de considérer des quantités non-archimédiennes concerne les angles : il peut y avoir des angles curvilignes qui ne sont pas comparables avec les angles rectilignes. Pour les angles corniculaires, F. Klein a démontré qu'ils constituent un modèle de quantités non-archimédiennes, mais aux 17e et 18e siècles, où on a souvent discuté de ces angles (sous le nom d'angles de contingence), on les utilisait dans le but de clarifier la notion de courbure et on n'essayait pas d'approfondir le concept de nombre à partir d'eux.

Même pour l'utilisation des infiniment petits dans l'analyse elle-même, dont le caractère non-archimédien semble s'imposer, on ne trouve aucune réflexion sur leur statut par rapport au concept de nombre. Parce que l'axiome d'Archimède est équivalent à la supposition de continuité, qui est sous-jacente à toute l'analyse de cette époque, on peut conclure que des quantités non-archimédiennes restaient en dehors de l'horizon des mathématiciens contemporains.Une première réflexion sur une connection entre elles et le champ conceptuel des nombres est explicitée chez O. X. Schloemilch, un auteur important des manuels en Allemagne et un des propagateurs les plus actifs de Cauchy en Allemagne : il remarque dans un manuel de 1845 que l'équation $\infty + a = \infty$, un des énoncés majeurs de la méthode infinitésimale, est en contradiction avec les principes de la doctrine des nombres et des quantités, et ajoute qu'on pourra écarter cette contradiction en établissant une définition plus générale de la quantité, mais, comme il le souligne, personne ne s'est occupé de cela.

On peut dire, en général, que les débats dans le champ conceptuel des fondements de l'analyse n'étaient pas restreints aux mathématiques mais constituaient une interaction des mathématiques avec la mécanique et la philosophie.

Pour passer à la deuxième dimension de mon approche, **l'analyse des contributions de la communauté mathématique élargie**, j'ai choisi comme outil d'analyse les manuels, parce qu'ils correspondent mieux au niveau des connaissances et des conceptions d'un public plus large que les cercles restreints des académiciens.

Selon ce point de vue, les manuels qui exposent le calcul différentiel et le calcul intégral, en France au 18^e siècle, présentent un changement notable en ce qui concerne les publics visés :

- d'abord, il a fallu (comme le disait un auteur de la deuxième "génération" des manuels) enseigner la nouvelle théorie aux savants eux-mêmes [1.];
- puis, on peut remarquer la constitution presque parallèle de deux traditions différentes [2.] :
-- des manuels composés dans le contexte universitaire [2a], et
-- des manuels dans le contexte du système des écoles militaires [2b];
- après, on trouve une nouvelle génération qui marque une ouverture vers un public général [3.], et qui constitue une préparation au
- nouvel âge d'instruction publique dès la Révolution [4.].

L'existence de ces diverses générations (et différents publics) s'exprime et se traduit par des changements et des évolutions du cadre théorique et épistémologique du calcul différentiel et intégral.

Pour les premiers manuels, adressés à des "savants", on peut remarquer qu'ils sont imprégnés par la tradition des *indivisibles* : on utilise la notion de quantités infiniment petites pour justifier qu'on néglige des termes, mais il est bien clair qu'on conçoit les infiniment petits plutôt selon le caractère statique des indivisibles. L'Hôpital (1696) parle d'une "*portion* infiniment petite" d'une quantité, et le mathématicien suisse Crousaz parle dans un traité de 1721 d'un "filet" de la quantité. Et Varignon, appartenant comme L'Hôpital à "l'école" de Malebranche, conçoit les infiniment petits comme une "portion indéfiniment petite" de la quantité.[3]

Manuels d'analyse en France

1.	
L'Hôpital	1696
Varignon	1725
Fontenelle	1727
2a.	
Reyneau	1708/1739
La Caille	1758
Sauri	1770
J. Fr. Marie	1770
Beguin	1774
Martin	1781
2b.	
Deidier	1740
Bezout	1769
Bossut	1797
3.	
Cousin	1777/1796
Lacroix (grand traité)	1797
4.	
Prony	1795
Lagrange	1797/1806
Lacroix (traité élém.)	1802
Desponts	1804
Du Bourguet	1810
Garnier	1811
Boucharlat	1813
Servois	1814
Poinsot	1815
Cauchy	1821

Le dernier manuel dans la première génération, les *Elements de la Géométrie de l'infini* de Fontenelle, représente déjà une première approche purement formelle : un calcul n'englobant pas seulement les infiniment petits, mais aussi les infiniment grands.

Dans l'étape suivante, où l'analyse commence à n'être pas seulement enseignée aux "savants", deux courants différents de manuels vont s'établir : d'une part, ceux des universités, c'est-à-dire

3 La première controverse sur les infiniment petits a eu lieu dans les années 1701/02 à l'Académie de Paris. Ce débat, principalement entre Rolle et Varignon comme opposants, a été lumineusement documenté par Jeanne Peiffer (Bernoulli, 1988). Contrairement à la controverse en Angleterre entre Berkeley et les disciples de Newton, cette controverse portait plutôt sur les résultats du nouveau calcul que sur des questions métaphysiques.

des collèges, où il y a un certain enseignement des mathématiques dans les cours terminaux de philosophie, et ceux des écoles militaires, créées à partir des années 1740, d'autre part.

Les manuels dans le contexte militaire sont bien connus, parce que les auteurs étaient des examinateurs permanents, donc un groupe connu et pas du tout nombreux. La production des manuels dans le secteur universitaire, en revanche, n'a pas été vraiment étudiée et le seul qui a entrepris de telles recherches, Brockliss, n'a pas établi une liste complète.

En comparant la production respective de ces deux courants, on peut remarquer une différence qui s'accentue. Bien qu'on parte d'abord, de façon identique, de la notion d'infiniment petit comme justification du calcul différentiel, on s'exprime, de façon différente, à propos de la méthode analytique et de la méthode synthétique. Les deux courants se sentent obligés de réfléchir sur la généralité des méthodes et sur leur relations avec les méthodes connues : les méthodes géométriques. Il est très révélateur que la méthode synthétique est identifiée dans ces débats avec la *construction géométrique* tandis que la méthode analytique est, en général, identifiée avec le calcul.

Tandis que les partenaires universitaires commencent à s'exprimer, d'abord avec précaution mais de plus en plus d'une façon ferme, en faveur des méthodes analytiques et pour la généralité dans les méthodes, les manuels militaires soulignent la valeur de la géométrie et présentent l'analyse comme un simple outil de la géométrie. Assez caractéristique est Bezout qui s'excuse presque de faire précéder sa mécanique par des principes du calcul infinitésimal et assure qu'il n'a pas du tout l'intention d'assujettir la mécanique à ces calculs : il déclare qu'on peut traiter la mécanique aussi sans ce secours et que le lecteur pourra donc passer ces parties.[4]

La troisième génération, des manuels pour un public élargi, enseigne pour la première fois la méthode des limites. En fait, c'est l'académicien Cousin qui utilisa en 1777 en premier cette méthode comme fondement d'un manuel - sur l'incitation de D'Alembert qui avait proposé cette méthode dans l'Encyclopédie comme la seule

4 Quelques-uns des manuels font exception dans ces deux courants. Bossut (1797), par exemple, est lié au système de formation militaire mais sa conception correspond au renouvellement des mathématiques d'après la Révolution : il utilise comme concept de base un calcul algébrique des différences finies. D'autre part, il y a des manuels universitaires "sans méthode", exposant seulement une série des règles pratiques (La Caille et son successeur Marie).

fondée sur une bonne métaphysique.[5] Cousin déguisa son innovation comme un renouvellement: de la méthode des "Anciens", des Grecs, donc de la méthode d'exhaustion.

L'autre important manuel de cette génération est le grand traité de Lacroix : c'était le premier à exposer non seulement *une* méthode mais les trois méthodes principales de son temps, les quantités infiniment petites, les limites et le développement en séries. Son projet datait déjà d'avant la Révolution, mais les volumes furent publiés quelques années après. On a souvent reproché à Lacroix de présenter trois méthodes simultanément, mais il faut voir qu'il voulait donner accès, avec son grand traité, à toutes les recherches actuelles à un public général, ce qui constitue une innovation importante pour le style mathématique.

Cette intention explique aussi l'approche différente de son traité élémentaire qui était destiné à un public assez précis, les élèves de l'Ecole Polytechnique, où on adopta ce traité comme manuel classique pendant de nombreuses années : ici, Lacroix se décide raisonnablement pour une seule méthode, la méthode des limites.

Ce choix de Lacroix n'était pas évident parce que les débuts de l'enseignement de l'analyse à l'Ecole Polytechnique, dès 1794 (et c'est-à-dire faisant partie de la quatrième génération de l'enseignement des mathématiques dans l'instruction publique), sont caractérisés par une rupture profonde avec les traditions et courants existants. L'enseignement était dominé, pour la première fois, par la méthode analytique, et par le souci de généralisation. Pour le calcul différentiel et intégral, cette domination par l'analytique s'exprimait par l'adoption d'une quatrième approche, entièrement algébrique : fondée sur le calcul des différences finies (où la transposition des résultats du fini à l'infini était entendu comme évidente). Le représentant le plus actif de cette approche (liée au programme combinatoire en Allemagne et au calcul algébrique des dérivations d'Arbogast) était, fait remarquable, un ingénieur qui fut dans les premières années professeur d'analyse à l'Ecole Polytechnique : Gaspard Riche de Prony [6] . Cette approche algébrique ne domina pas seulement à l'Ecole Polytechnique, de nombreux manuels, composés

5 Chez D'Alembert, on peut la regarder comme une transformation de la méthode newtonienne des premières et dernières raisons.

6 A part sa biographie (voir Bradley, 1984), son oeuvre mathématique n'a pas encore été étudiée de plus près.

dans l'esprit de ce programme, ont été publiés, entre autre pour le public des écoles centrales.[7]

Mais une nouvelle rupture, effectuée au centre de l'enseignement scientifique, à l'Ecole Polytechnique en 1810/11, bouleversa la dominance de la méthode analytique : par un "retour du réfoulé", comme je l'ai appelé, la méthode synthétique retrouvait et gagnait la prédominance. Ce bouleversement était causé par des pressions de plus en plus fortes de la part des corps des ingénieurs de l'artillerie et du génie qui envisagèrent d'abord de réduire le programme algébrique-analytique et enfin de le supprimer. J'ai étudié l'évolution de ces pressions bien précisément; elles commencent à concerner les méthodes de l'enseignement en valorisant la mécanique rationnelle comme discipline majeure et aboutissent, en 1810, quand l'Ecole Polytechnique se trouva restreinte à la seule formation des ingénieurs (plutôt militaires!), où l'enseignement était donc mis sous la tutelle des champs d'applications et des corps d'ingénieurs respectifs.

L'expression majeure de la nouvelle domination par la méthode synthétique consiste, dans la décision du Conseil de Perfectionnement de l'Ecole Polytechnique du 13.7.1811, à substituer, dans le programme du calcul différentiel, la méthode des infiniment petits à celle des limites. Le conseil essayait de réclamer pour la méthode des infiniment petits un caractère "aussi analytique", mais cela constitue plutôt un moyen pour résister un peu aux pressions extérieures et pour maintenir le souci de rigueur. En fait, le Conseil ordonnait que les professeurs puissent "faire voir, dans les cas les plus simples, l'accord de cette méthode avec celles des limites ou du développement en série". Cette issue correspondait un peu à l'approche du grand traité de Lacroix où il exposait toutes les méthodes.[8] Mais, bien qu'on ait réussi à pratiquer cette sorte de compromis, le contexte de l'enseignement ne permettait plus de continuer à avoir le souci d'établir des fondements rigoureux des mathématiques.[9] Et le fameux énoncé de Cauchy (dans le préface de ses leçons sur le calcul différentiel de 1829) sur son intention de

---

[7] Il y a beaucoup à dire sur le rôle des conceptions de L. Carnot dans cette période. Je vais exposer mes recherches sur ces conceptions et leurs changements dans l'étude mentionnée au no. 2. Je remarque ici seulement que l'insistance de Carnot sur la loi de continuité a été utilisée par Lacroix pour son programme de modernisation de l'enseignement de l'analyse.

[8] Le traité de Boucharlat, publié en 1813 pour les élèves de l'Ecole Polytechnique, reprend cette approche et expose les trois méthodes.

[9] Servois avertissa en 1814 des conséquences néfastes pour le développement des mathématiques en France, car l'usage de la méthode des infiniment petits retardera le progrès des sciences mathématiques.

concilier la rigueur avec la simplicité "que produit la considération directe des quantités infiniment petites" n'est pas seulement un moyen pour dissiper la critique de ses essais de refonte des fondements, il est aussi une expression de la formule sous-jacente du compromis entre l'intention originelle de l'Ecole Polytechnique et les pressions sociales postérieures.

Un texte assez revélateur sur cette situation complexe est le programme de Poinsot de 1815 pour son cours d'analyse. En apparence, il s'exprime en faveur de la méthode des infiniment petits, mais ses arguments montrent qu'au fond il adhère à la méthode des limites. L'autre trait important est qu'il laisse entendre qu'il y a deux conceptions bien différentes des infiniment petits :

- la première correspond à la tradition des indivisibles : ici, les infiniment petits sont conçus comme des grandeurs moindres que tout ce qu'on peut assigner;[10] de plus, les éléments des quantités ne sont pas homogènes avec ces quantités, mais sont d'une autre nature (voir dimension). Ainsi, des points sont entendus comme les éléments des lignes, etc.

- la seconde peut être appelée la moderne et a été promue par Carnot. Ici, les infiniment petits sont conçus comme des variables. En outre, ils sont vus comme homogènes aux quantités en question.

Il est bien clair, que la conception de Cauchy des infiniment petits est en accord avec cette deuxième position. L'analyse du contexte mathématique et du développement de la signification conceptuelle amène donc à exclure que Cauchy a élaboré un concept de nombre infinitésimal, hyperréel.

Pourtant, si on cherche des précurseurs de la NSA, S. D. Poisson est un candidat bien plus adapté. Il était un partisan des infinitésimaux comme des quantités réelles et s'agitait beaucoup pour faire partager cette conception.

Des débats sur l'admissibilité et la nature des infiniment petits se sont longtemps poursuivis, en France et en Allemagne, tout au long du 19e siècle. La domination de la méthode ε-δ date seulement du 20e siècle.

---

[10] Pour le 18e siècle, on peut nommer Deidier comme représentant de cette conception et pour le 19e siècle Poisson.

Un argument important reste à être analysé : est-ce-que les infiniment petits sont vraiment indispensables dans les applications? Lagrange est toujours cité ici comme témoin, mais il ne l'a prétendu que dans la première édition de sa mécanique (1788), tandis que sa théorie des fonctions analytiques avait, comme un de ses buts explicites, de bannir les infiniment petits aussi bien dans l'application de l'analyse à la géométrie et à la mécanique. Et : sont ils vraiment plus simples dans les applications ? Je veux ici seulement mentionner que ceux qui étaient en dehors du système de l'Ecole Polytechnique, ont toujours contesté cette assertion et maintenu que la méthode des infiniment petits n'est pas du tout plus simple ou plus brève si on explicite les notions implicites ou sous-jacentes.

REFERENCES

Johann Bernoulli, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli. Band 2. Der Briefwechsel mit Pierre Varignon, erster Teil: 1692-1702.* Bearbeitet und kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer. Basel: Birkhäuser, 1988.

Margaret M. Bradley, *Gaspard-Clair-François-Marie Riche de Prony: His Career as Educator and Scientist.* Ph.D. thesis Coventry Polytechnic 1984.

Laurence W. B. Brockliss, *French Higher Education in the Seventeenth and Eighteenth Century: a Cultural History.* Oxford: Clarendon Press, 1987.

Felix Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band 2: Geometrie.* Reprint Berlin: Springer 1968.

Les infinitésimaux dans l'enseignement au XIXème siècle

Martin Zerner
UFR Sciences
Université de Nice

Outre que nous limiterons à la France, c'est à travers les traités que nous étudierons l'évolution de l'enseignement du calcul différentiel et intégral au XIXème siècle; comment faire autrement[1]? La matière est d'ailleurs particulièrement riche puisque la Révolution venait au début du siècle de doter la France d'institutions scientifiques originales, puissantes et bien organisées, tout particulièrement l'Ecole Polytechnique et ses classes préparatoires. La plupart des cours d'analyse de Polytechnique sont publiés; à partir des années 1860 on trouve aussi bien des cours des facultés des sciences; d'autres traités sont destinés à la formation des ingénieurs civils (c'est-à-dire en première approximation non polytechniciens, par la suite, ce sera d'eux qu'il s'agira quand on parlera simplement d'ingénieurs).

Ces traités ne s'adressent pas à des débutants complets mais à des gens qui ont eu un premier contact au moins avec les notions de limite et de dérivée dans les classes de mathématiques spéciales. Il est d'ailleurs très difficile de savoir ce qu'on enseignait dans ces classes pendant la première moitié du siècle. Ensuite on peut se faire une idée sans doute assez juste en consultant les dix-huit éditions successives du cours de Briot (1855).

Deux livres ont été utilisés pendant tout le siècle ou presque, il s'agit du *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix (à ne pas confondre avec le *Traité* tout cours) et les *Elémens de calcul différentiel et de calcul intégral* de Boucharlat. Ils ont eu 9 éditions chacun, le premier de 1802 à 1881, le second de 1813 à 1891 mais avec une réimpression en 1926[2]! C'est ce que j'appelle la première génération. Les fondements de l'analyse n'y posent pas problème. Après une définition rapide des fonctions, la

1 La plus grande partie de cet exposé est un résumé succinct de séminaires antérieurs (Zerner 1986 et 1989) et d'un article plus complet à paraître.

2 Tous les livres dont le lieu d'édition n'est pas donné ont été publiés à Paris.

dérivée, appelée coefficient différentiel, est introduite d'abord sur un ou deux exemples simples, puis de façon générale. Lacroix emploie systématiquement la méthode des limites. Il mentionne occasionnellement les infiniment petits dans une note en bas de page, en disant que c'était la méthode de Leibniz. Quant à Boucharlat, il déclare que les trois méthodes des limites, des infiniment petits et celle de Lagrange (développements en puissances entières) n'en forment au fond qu'une. Cependant sa préférence va visiblement à la dernière.

L'intermède Cauchy se situe dans les années 1820 avec la parution de ses cours à l'Ecole Polytechnique. Certains auteurs, dont Lombardi (1991) dans un article de *Repères* , croient y trouver la continuité uniforme. Cette thèse qui, telle le monstre du Loch Ness, reparaît de temps en temps, est discutable; le plus vraisemblable est qu'il ne faisait pas la distinction, du moins jusqu'à une date beaucoup plus tardive. Mais peu importe, le fait historiquement significatif est que tous les contemporains de Cauchy ont lu sa définition de la continuité comme ponctuelle. Il a été dit, essentiellement par les intégristes du non-standard, qu'à la suite de Cauchy les infinitésimaux avaient été chassés de l'enseignement. Je ne connais pas d'exemple plus parfait de contre-vérité. Premièrement, nous venons de voir qu'avant Cauchy les infinitésimaux n'étaient pas enseignés. Deuxièmement, Cauchy n'a pas eu d'influence sur l'enseignement, si ce n'est une influence tardive et indirecte dont nous parlerons sous peu. A preuve, les plaintes incessantes des conseils de l'Ecole Polytechnique contre l'enseignement de Cauchy et le fait que ses cours n'ont jamais été réédités. A preuve aussi, les *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. Augustin-Louis Cauchy* du Chanoine Moigno, grand ami de Cauchy (Belhoste 1985) parues en 1840; les fondements y sont traités comme chez Boucharlat encore qu'avec moins de soin. Le troisièmement nous amène à parler de la génération suivante.

Elle est inaugurée par la deuxième édition du cours de Polytechnique de Duhamel (1847). Les ouvrages les plus importants sont les *Eléments de calcul infinitésimal* du même Duhamel (quatre éditions de 1856 à 1886), le *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* de Sturm (quinze éditions de 1857 à 1929), le *Cours de calcul différentiel et intégral* de Serret (six éditions de 1863 à 1911). Les fonctions continues y sont définies, mais sans plus, les infiniment petits aussi, comme quantités variables ayant zéro pour limite, cette définition se réfère à Cauchy. Surtout un principe de substitution des infinitésimaux, placé au début du traité joue un rôle fondamental.

Nous en prendrons l'énoncé chez Bertrand (1864), où il est particulièrement condensé: "Deux infiniment petits a et b peuvent être substitués l'un à l'autre et l'on peut négliger leur différence soit dans la recherche d'une limite de rapport, soit dans celle d'une limite de somme, pourvu que cette différence soit infiniment petite par rapport à l'un d'eux." Il s'agit donc de deux propositions concernant l'une le rapport, l'autre la somme. D'ailleurs dans la plupart des traités on trouve deux énoncés distincts mais groupés. Ils s'appellent principes, théorèmes fondamentaux, parfois seulement théorèmes, mais alors on insiste en général sur leur importance. Ils se trouvent au début de l'ouvrage. Rétrospectivement, le premier, qui concerne le rapport, ne pose pas de problème particulier; nous l'enseignons encore aujourd'hui mais sans lui accorder un caractère fondamental. C'est le deuxième qui fait l'essence du principe de substitution et il demande quelques éclaircissements. On a deux sommes $a_1 + a_2 +\ldots+ a_n$, $b_1 + b_2 +\ldots+ b_n$ et quand n tend vers l'infini, la première a une limite. D'autre part, tous les rapports $(a_i-b_i)/a_i$ tendent vers zéro (tout le problème peut être vu dans l'ambigüité de cette phrase: comment l'indice i varie-t-il avec n ?). Conclusion: la deuxième somme tend vers la même limite que la première. Il n'est jamais question d'uniformité.

Si on cherche une classification plus fine, on peut distinguer ces traités selon qu'ils font de ce principe de substitution un usage technique précis (c'est typiquement le cas de Sturm) ou une justification générique de toute espèce de passage à la limite. Dans le deuxième cas, un lecteur peu averti peut avoir, bien à tort, l'impression de lire du non-standard.

Le premier livre de la troisième génération (rassurez vous, ce sera la dernière) est l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* de Jules Tannery[3] parue en 1886. Dans ce livre et ceux qui vont suivre on trouve les fondements rigoureux de l'analyse tels qu'ils ont été mis au point par Weierstrass et ses élèves. On y trouve une construction des nombres réels (en général par les coupures de Dedekind), les propriétés des fonctions continues, une étude rigoureuse de l'intégrale de Riemann. Le plus important de ces livres est celui de Goursat paru en 1902 qui sera l'ouvrage de référence jusque dans les années 1950.

Cette fois, les infinitésimaux sont éliminés des fondements de l'analyse, mais non pas de l'enseignement. Ils sont largement utilisés dans les parties consacrées à la géométrie différentielle, très

---

3 Il s'agit du frère de l'historien des mathématiques Paul Tannery.

importantes dans tous ces livres et aussi dans les problèmes d'examen. On peut lire dans le plus moderne de ces traités, la deuxième édition du *Cours d'analyse* de Jordan (1893):

> "Pour trouver l'équation de cette enveloppe, considérons l'une de ces courbes
> F(x,y,c) = 0,
> et la courbe infiniment voisine
> F(x,y,c+dc) = 0." (p.425 de la 2ème édition).

Le livre de Tannery me donne l'occasion de revenir sur l'article de Lombardi dont j'ai déjà parlé. Ce livre est extrêmement bien fait et aujourd'hui encore je crois que c'est une excellente lecture pour un étudiant en mathématiques. C'est là qu'on trouve pour la première fois (à ma connaissance) l'idée qu'il vaut mieux définir la continuité uniforme avant la continuité en un point. Cette idée refait surface de temps en temps depuis mais n'a jamais été suivie (encore un monstre du Loch Ness). Pourtant l'autorité de Tannery était grande. Sous-directeur scientifique à l'Ecole Normale Supérieure (ce qui voulait dire en fait directeur de la section scientifique de l'Ecole), c'est lui qui a formé la plupart des mathématiciens français pendant vingt ans. Au demeurant son livre est la rédaction d'un cours qu'il avait fait à l'ENS et il y a de bonnes raisons de penser qu'il a été lu par de nombreux enseignants . Il faut donc qu'il y ait une contrainte didactique très forte qui s'oppose à l'emploi de cette méthode. L'article de Lombardi dont j'ai dit un mot suggère de l'adopter; il pose un problème sérieux mais qui est typiquement du ressort des didacticiens.

Avant de terminer je dois ajouter que dans ce qui précède, j'ai négligé les livres destinés à la formation des ingénieurs. Quand on les examine, on découvre un phénomène très frappant de retard. Les manuels publiés en gros pendant la durée de vie de la deuxième génération (le dernier date de 1887) ne contiennent pas le principe de substitution des infinitésimaux et ont quelques autres points communs avec les livres de la première génération[4]. Seule exception: un cours de Boussinesq à l'Institut Industriel du Nord, et cette exception s'explique très bien par les particularités de l'auteur. Même phénomène avec les livres publiés à l'époque de la troisième génération (le premier en 1893)[5]. Pas un des cours de Polytechnique

4 Le plus important de ces livres est Sonnet *Premiers éléments de calcul infinitésimal à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur* publié en 1869 et qui a eu huit éditions jusqu'en 1919.

5 Le plus important de ces livres est Appell *Eléments d'analyse mathématique* publié en 1898 et qui a eu six éditions jusqu'en 1950 (il s'agit d'un cours de Centrale).

et des facultés des sciences ne présente ce phénomène de retard. Il ne m'est pas possible dans cette brève intervention de présenter les éléments d'explications que je crois en voir. C'est en tout cas à méditer.

Références

Belhoste B. 1985 *Cauchy, un mathématicien légitimiste au XIXème siècle* Belin, Paris

Bertrand J. 1864 *Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral* ,1er volume *Calcul Différentiel* , Gauthier-Villars, Paris

Briot C. 1855 *Leçons d'algèbre. Deuxième partie à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales* Carilian-Gœury et V. Dalmont, Paris

Lombardi H. 1991 L'uniformité, un concept implicite efficace chez Cauchy *Repères* 5

Zerner M. 1986 Sur l'analyse des traités d'analyse: les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914 *Cahier de didactique des mathématiques* n°30 IREM, Université Paris 7

Zerner M. 1989 La rectification des courbes dans les traités d'analyse français de la deuxième moitié du XIXème siècle *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 10 p.267-281 Laboratoire de Mathématiques Fondamentales, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

(Re)Lectures infinitésimales

André Deledicq
IREM de l'Université Paris VII

L'épistémologie du calcul infinitésimal présente une difficulté très particulière due à l'amplitude du décalage temporel, de l'ordre des siècles, entre d'une part les conceptions en usage dans la communauté des géomètres et des analystes des XVIIème et XVIIIème siècles, et d'autre part l'expression plus ou moins formalisée des invariants mathématiques de ces conceptions, avec l'analyse non standard dans le troisième tiers du XXème siècle.

Le formalisme classique des limites.

Fait exceptionnel dans l'histoire des mathématiques : le formalisme d'abord proposé pour rendre compte avec rigueur de l'intuition et des techniques efficaces du calcul infinitésimal ne traduit qu'une faible part de l'imagerie mentale associée à ce domaine et oblige à l'*exil épistémologique* la part qui semble avoir été pourtant la plus féconde tout en restant la plus immédiate.

Ici, il s'agit du formalisme des limites, dit en epsilon-éta, pressenti par Cauchy et dont l'expression complète est attribuée à Weierstrass, relayé par les analystes allemands, dans les années 1860-1870.

Ce formalisme revient aux sources euclidiennes qui avaient sagement exclu des premiers discours toute référence à l'*infini*.

La proposition I du livre X d'Euclide [11],

> *Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.*

supporte en effet très bien la traduction en termes classiques :

a et $b < a$ étant donnés, $\exists n \dfrac{a}{2^n} < b$.

On a vu ainsi clairement l'Analyse élémentaire devenir une manipulation raffinée de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, à l'image du subtil retournement de l'axiome dit d'Archimède, d'essence apparemment arithmétique, en un argument fondamental d'analyse évitant le recours aux infinitésimaux (il faut relire ici la magnifique démonstration de la proposition citée p. 333)

L'infiniment petit fonctionnel.

Parallèlement à l'établissement et au développement de cette analyse qui va devenir classique, la vieille conception d'infiniment petit va donc se trouver objectivement exilée. Cependant et décidément trop commode, elle sera momentanément récupérée dans un autre cadre que le cadre numérique où le *nombre* infiniment petit n'avait jamais réussi à trouver sa place : le cadre fonctionnel.

Ainsi trouve-t-on, dans les *Eléments de calcul infinitésimal - 1860* de Duhamel, l'énoncé de deux "principes de substitution" des infiniments petits [28]

> *Théorème 1 : La limite de la somme de quantités positives infiniment petites n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité.*
>
> *Théorème 2 : La limite du rapport de deux quantités infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres qui ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont respectivement pour limité l'unité.*

qui témoignent du même souci didactique que Dixmier en 1967 dans son *Cours de mathématiques du premier cycle - Tome 1, p. 227* :

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, on dit que $f(x)$ est un infiniment petit quand x tend vers a.

Il s'agit pour ces pédagogues de conserver vivante, dans l'esprit de l'analyste moderne, l'idée d'un infiniment petit qui ne se réduise

pas à une potentialité d'existence mais qui *soit* un véritable objet mathématique.

Et il se sera finalement passé un siècle avant que Abraham Robinson (*Non Standard Analysis* - 1960) puis Edward Nelson (*Internal Set Theory* - 1977) puissent permettre le retour de la notion prodige dans le giron exigeant de la Mère mathématique.

Les concepts non standard.

L'analyse non standard s'appuie à l'évidence sur des conceptions originelles retrouvées : celles qui se reconnaissent dans les expressions **infiniment grands**, **infiniment petits** et leurs nombreux avatars sémantiques. Mais il serait naïf de réduire l'apport conceptuel de l'ANS à cet aspect trop connu ; on ne comprendrait pas alors pourquoi le formalisme non standard est arrivé si tard et, surtout, comment il a réussi à éviter lui aussi le piège de l'infini.

Deux autres notions au moins, jusqu'alors plutôt extérieures aux mathématiques parce que souvent rencontrées dans des situations pragmatiques mieux considérées des physiciens et autres utilisateurs et applicateurs des mathématiques, apparaissent comme des concepts cruciaux de cette Nouvelle (et Simple) Analyse :

- la notion d'**ordre de grandeur** ; il s'agit précisément de la possibilité d'imaginer un $\mathbb{R}_+$ hétérogène se présentant comme un modèle mathématique où coexistent des quantités très petites, des quantités à notre échelle ("appréciables") et des quantités très grandes, et où l'on sait manipuler formellement l'inaccessible flou séparant ces trois ordres de grandeur. (Sur les obstacles à l'installation de ce concept, ses représentations et les invariants qui le structurent, voir [9]).

- la notion de **permanence** ; certainement l'idée la plus essentielle qui ait traversé, dirigé et éclairé le travail solitaire et miraculeusement positif de Robinson. (Voir à ce sujet l'article de Lakatos [5]).

Elle s'explicite par des "principes de permanence" qui prennent acte de l'impossibilité de définir les ordres de grandeur et leurs frontières respectives par des propriétés classiques ; d'où l'affirmation du débordement (et donc de la permanence) nécessaire de ces propriétés au-delà d'un seul ordre de grandeur où elles ne peuvent pas être confinées.

RE-LECTURES.

A ce point de notre réflexion, il nous semble à l'évidence qu'un travail de relecture de textes doit être entrepris. On a toujours en effet recherché, et naturellement retrouvé, dans les textes précédant la formalisation d'un concept, les germes et les anticipations comme aussi les errances et les fausses pistes, qui ont jalonné la construction de ce concept.

Aujourd'hui que les conceptions ont pu se forger et commencer à s'échanger dans la communauté des "non standardistes", n'est-il pas utile et possible de traquer dans la littérature les traces de celles que nous avons explicitées ci-dessus ?

Croit-on, même, qu'il soit raisonnable de *lire* un texte concernant le calcul infinitésimal sans une grille (au moins en partie) non standard ?

Que penserait-on aujourd'hui de quelqu'un qui prétendrait lire l'*Euclides vindicatus* (1733) de Saccheri sans vouloir y repérer les conceptions apparues avec les géométries non euclidiennes ?

Pour l'exposé présent, nous nous limiterons au modeste pointage de la trace de ces conceptions dans quelques textes choisis.

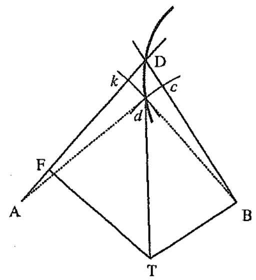
L'existence et la manipulation des infiniment petits.

On sait bien que cette existence fut souvent déniée par ceux mêmes qui les utilisaient. Leibniz lui-même les rangeait au placard des "êtres de raison", imaginables mais non rencontrables [20] :

> *Je ne croyois point qu'il y eût des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n'étaient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement, comme les racines imaginaires dans l'Algèbre, telles que* $\sqrt{-1}$.

Par contre, il faut remarquer que Newton les manipulait sans vergogne, d'abord sous le vocable de "moments" infiniment petits temporels, qui pour être imperceptibles n'en sont pas moins évidemment *réels*. L'universalité de la variable temps, comme elle lui avait permis de saisir comme primitive la notion de dérivée (alias la vitesse) lui permet aussi de manipuler sans peur l'infiniment petit existant, même lorsqu'il le fait dans un *cadre* on ne peut plus *géométrique* [18] :

> *XXXIX. Si l'on rapporte la Courbe à deux Soutendentes AD & BD, qui tirées de deux Points donnés A & B se rencontrent sur la Courbe ; imaginez que le Point D parcourt l'Espace infiniment petit Dd, & sur AD & BD prenez Ak=Ad, & Bc= Bd ; kD & cD seront les Moments contemporains des Lignes AD & BD, prenez donc DF à BD comme le Moment Dk au Moment Dc, (c'est-à-dire, dans le Rapport de la Fluxion de la Ligne AD à la Fluxion de la Ligne BD) élevez sur BD & AD les perpendiculaires BT & FT qui se rencontreront au Point T ; les Trapèzes DFTB et Dkdc seront semblables, & par conséquent la Diagonale DT touchera la Courbe.*



Cet exemple décrit parfaitement la manière de mener la tangente à une courbe définie par la relation liant la distance de ses points à deux points fixes donnés ; il est accompagné de huit autres exemples analogues en variant la technique de définition de la courbe dont on cherche la tangente. Outre l'emploi explicite des "**espaces infiniment petits**", on notera la béquille épistémologique dont il se dote pour éviter l'effroi de la toute dernière raison : la mise en évidence de deux figures (*DFTB* et *Dkdc*) appartenant à deux ordres de grandeur différents mais dont le dessin est identique. François de Gandt a reconnu le systématisme de cet artifice newtonien en le qualifiant du joli nom de "méthode des témoins finis". (Voir aussi, pour l'invariance à travers les ordres de grandeur, l'article [3] relatif à la découverte des logarithmes par Neper).

Les premiers essais de régularisation de l'emploi d'infiniment petits dans un *cadre numérique* sont dûs aux efforts de Jean Bernouilli, comme on peut le voir à la lecture de l'*Analyse des infiniment petits* (du Marquis de L'hospital [21]) :

I. DEMANDE ou SUPPOSITION

> *On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même.*

Cette demande est ensuite (naturellement) utilisée dans les démonstrations ; par exemple pour

> *prendre la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*
> *La différence de xy est ydx+xdy. Car y devient y+dy lorsque x devient x+dx, & partant xy devient alors xy+ydx+xdy+dxdy qui est le produit de x+dx par y+dy, & sa différence sera ydx+xdy+dxdy, c'est-à-dire ydx+xdy : puisque dxdy est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy ; car si l'on divise par exemple ydx & dxdy par dx, on trouve d'une part y & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la première de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la première.*

On pourrait être tenté de voir dans ce passage une paraphrase prémonitoire du calcul de la dérivée du produit *xy* dans les ouvrages non standard d'aujourd'hui. Il contient pourtant un intéressant errement très explicable à l'époque de Jean Bernouilli mais auquel les didacticiens de l'analyse devraient prêter attention.

La demande Jean Bernouilli est en fait double ; sa première demande pourrait se noter aujourd'hui :

$$x \cong y \Leftrightarrow x - y \cong 0$$

(x est infiniment voisin de y, ssi x-y est infiniment petit).

Mais cette demande ne suffirait pas à conclure dans la démonstration concernant la différence d'un produit ; en effet, d'une part Bernouilli ne prend pas $x + dx$ pour x, ou pour $x + 2dx$, ce que sa demande lui permettrait, mais d'autre part il exécute *dxdy*, non pas parce que la différence $xdy + ydx + dxdy$ moins $xdy + ydx$ est infiniment petite, mais parce que *dxdy* divisé par *dx* est infiniment petit alors que *ydx* divisé par *dx* ne l'est pas.

C'est en fait la deuxième partie de la demande qui est utile (et qui n'est donc pas comme il le prétend *la même chose* que la première partie). Le quotient joue ici le rôle principal et pourrait se noter aujourd'hui :

$$x \sim x + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{x} \text{ est infiniment petit } \Leftrightarrow \frac{x+\varepsilon}{x} = 1 + \frac{\varepsilon}{x} \cong 1.$$

Il s'agit une autre circonstance que celle d'être *infiniment proche*, c'est l'*équivalence* : $x \sim y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \cong 1.$

On sait bien aujourd'hui que l'équivalence et l'infinie proximité ne sont pas "la même chose" (et je suis heureux d'avoir incité les non standardistes français à distinguer chacune de ces notions par un vocabulaire et des notations spécifiques). On connaît en effet les difficultés pédagogiques rencontrées dans les calculs sur des fractions ou des sommes dont les termes tendent vers zéro. Le mérite d'une présentation non standard est de bien pouvoir séparer ces notions sans compliquer les situations par l'étude de limite de fonctions ; en effet la distinction n'est que de nature algébrique et leur confusion apparaît du même type que celle (qui ne devrait plus exister au niveau des lycées) entre les structures additives et multiplicatives.

Cependant bien sûr Jean Bernouilli ne fait pas exactement cette erreur. Dans le contexte qui est le sien, en effet, les nombres infiniment petits n'existent pas vraiment ; il a donc, en un certain sens, raison d'affirmer que ces deux demandes sont la même chose puisqu'elles ne portent que sur des *quantités*, c'est-à-dire, en termes d'aujourd'hui, sur des *nombres appréciables* (ou, à tout le moins, sur des couples de quantités, définis à un coefficient de proportionnalité près comme il était convenant en ce siècle de virtuosité sur les proportions).

En effet, on démontre sans difficulté :

Si x et y ne sont ni infiniment petits, ni infiniment grands, alors

$$x \cong y \Leftrightarrow x \sim y$$

Par contre :

. Si ε est infiniment petit : $\varepsilon \cong 2\varepsilon$ mais ε n'est pas équivalent à ε.
. Si N est infiniment grand : $N \sim N+1$ mais N n'est pas infiniment proche de $N+1$.

La notion d'ordre de grandeur.

L'association de cette notion à l'analyse est déjà exprimée par Leibniz d'une manière très claire [20] :

> *(...) il faut concevoir, par exemple, (1) le diamètre d'un petit élément d'un grain de sable, (2) le diamètre du grain de sable même, (3) celui du globe de la terre, (4) la distance d'une étoile fixe de nous, (5) la grandeur de tout*

le système des fixes, comme (1) une différentielle du second degré, (2) une différence du premier degré, (3) une ligne ordinaire assignable, (4) une ligne infinie, (5) une ligne infiniment infinie.

Cependant on sait que Leibniz en est resté, sur ce sujet, au plan du commentaire, sans jamais prétendre que l'*infiniment petit* n'était exactement que le *très petit* ; d'ailleurs ni Robinson, ni Nelson ne sont explicitement allés jusque là et c'est certainement dans la famille de ceux qui se réclament en France de Georges Reeb et qui s'intéressent plus particulièrement à l'enseignement, qu'il faut chercher les promoteurs de cette conception éliminant radicalement l'infini au niveau élémentaire. (Voir [6], [7], [9], [10]).

Jusqu'à Lazare Carnot, tous les métaphysiciens du calcul infinitésimal ont voulu considérer les infiniment petits ou grands comme des entités commodes et nécessaires au calcul, mais sans existence réelle. Et Carnot lui-même d'ailleurs, pense pareillement en un certain sens. C'est pourtant le premier qui tentera de raisonner avec deux catégories de quantités pouvant préfigurer les catégories standard/non standard.

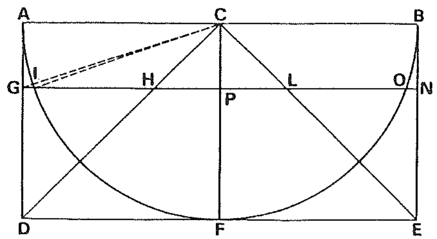
Au point que les analystes non standardistes d'aujourd'hui appellent "Principe de Carnot" la paraphrase des énoncés ci-dessous où les mots standard/non standard sont mis pour non -arbitraires(=désignées)/arbitraires [25].

24. Deux quantités non arbitraires ne peuvent différer entre elles que d'une quantité non arbitraire.
25. Deux quantités non arbitraires sont rigoureusement égales entre elles, du moment que leur différence prétendue peut être supposée aussi petite qu'on le veut.
26. Pour être certain que deux quantités désignées sont rigoureusement égales, il suffit de prouver que leur différence, s'il y en avait une, ne saurait être une quantité désignée.

Les deux exemples précédents sont bien connus. Par contre il nous a semblé reconnaître dans une fausse piste suivie par Galilée ce qui aurait pu être une amorce de considération des ordres de grandeur.

Les paragraphes suivant sont extraits du *Dialogue concernant deux sciences nouvelles* [15].

En outre, cette façon de composer la ligne de points, le divisible d'indivisibles, la quantité de non-quantités, me semble être un écueil des plus difficiles à franchir.
(...)
Aussi vais-je vous montrer que deux surfaces égales et, avec elles, deux solides égaux ayant pour bases ces mêmes surfaces, peuvent continuellement et également diminuer, ceux-ci comme celles-là, tout en laissant des restes toujours égaux entre eux, et en arriver pour finir, au terme de leurs perpétuelles égalités, à ce que l'un des solides et l'une des surfaces se réduisent à une très longue ligne, l'autre solide et l'autre surface à un seul point, autrement dit ceux-là à une infinité de points et ceux-ci à un seul.



Suit ici la remarquable et simple démonstration (Pythagore suffit) de l'égalité des aires du cercle de centre P de rayon PL et de la couronne engendrée par ON tournant autour de CF.

Ainsi Galilée démontre-t-il, de la plus belle manière, comment calculer le volume d'une sphère lorsqu'on sait calculer le volume d'un cône. Mais ce n'est pas cela qui l'intéresse le plus :

(...); il suffit d'avoir vu comment les surfaces ci-dessus définies sont toujours égales entre elles et que, diminuant toujours également, elles vont à la fin se réduire l'une à un seul point, l'autre à la circonférence d'un cercle dont la grandeur pourra surpasser celle du plus grand cercle que l'on voudra : c'est en effet cette seule conséquence qui suscite notre émerveillement.

Ce qui suscite l'émerveillement, et le trouble, de Galilée c'est qu'il soit possible de passer continûment d'un point à un cercle et donc de changer radicalement de forme. Ce trouble est essentiellement dû à la vision des nombres comme un modèle universel ("tout est nombre" : la mesure des objets comme leur forme ou leurs éléments de forme) et homogène : l'accumulation, même énorme, de "pas", même petits, n'aboutit jamais qu'à un résultat de même nature. Et la continuité de la droite réelle étant ainsi transmutée en continuité des formes, l'homogénéité supposée de R est elle aussi transportée sur les formes, ce qui fait dire à Galilée : "le cercle égale le point".

Cependant, comme l'homme de Michel-Ange, il aura touché du doigt une belle aventure intellectuelle : s'il avait en effet décidé de croire à l'hétérogénéité de l'espace des formes, il aurait eu l'image d'un passage continu d'un ordre de grandeur à un autre ; il est en effet possible de passer continûment du petit au grand en faisant des pas aussi petits que l'on veut, pourvu que l'on en fasse un assez grand nombre :

> Si ε est très petit, $N.\varepsilon.$ peut dépasser 5 ; il suffit de prendre N plus grand que $\mathrm{int}(5/\varepsilon)$; évidemment aucun N appréciable ne permet à $N.\varepsilon$ de dépasser les nombres très petits ; il faut prendre N très grand !

Ainsi l'utilisation de "quantité de non-quantités" permet-elle bien de traverser ce qui ne peut s'interpréter que comme une discontinuité si on croit à l'homogénéité du plan et de la droite (vision classique) mais qui ne contredit pas la continuité si l'on croit à l'hétérogénéité de R en différents ordres de grandeur (vision non standard).

La notion de permanence.

Relecture d'un texte de d'Alembert

Le premier essai de démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre est reconnu à d'Alembert, dans ses *Recherches sur le calcul intégral*, parues dans le bulletin de l'*Académie royale des sciences et des belles lettres de Berlin* en 1748 (Année 1746 - p. 182 à 224) [23].

Christian Houzel en a fait une analyse fine et classique, qui tente d'en expliciter les articulations in *Jean d'Alembert, savant et philosophe*, Editions des Archives Contemporaines.

Résumons rapidement ce texte de d'Alembert :

> *Propos. I. Soit TM une courbe quelconque dont les coordonnées TP=z, PM=y, & dans laquelle y=0 ou ∞ lorsque z=0. Si on prend z positive ou négative, mais infiniment petite, la valeur de y en z pourra toujours être exprimée par une quantité réelle, lorsque z sera positive ; & lorsque z sera négative, par une quantité réelle, ou par une quantité* $p+q\sqrt{-1}$, *dans laquelle p & q seront l'un & l'autre réels.*
>
> *Car lorsque Z est infiniment petite, on peut avoir la valeur de y en z par cette série très convergente* $y=az^{m/n}+bz^{r/t}+cz^{t/n}$ *& dans laquelle les exposants de z sont imaginés aller en augmentant, & dont on peut toujours supposer que tous les termes sont réels en faisant z positive ;*

Une relation $\varphi(z,y)$ est donc supposée, au voisinage de 0+, explicitable en une fonction y de z.

D'Alembert invoque pour une telle fonction l'existence d'un développement dit plus tard de Puiseux (voir, par exemple, Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann) à droite de zéro. Mais le "principe de permanence" de la validité des opérations algébriques (d'application déjà très féconde pour les négatifs et les complexes) le fait conclure à sa validité à gauche ; le calcul possible des racines chez les complexes lui permet alors de prolonger la relation sur les infiniment petits négatifs.

> *Si* $z^{m/n}$ *devient imaginaire en faisant z négative, ce qui arrivera si n est un nombre pair, et m un nombre impair, alors l'ordonnée correspondante à z négative ou positive pourra encore être exprimée par* $az^{m/n}$ *qui sera réelle, quand z sera positive, & qui se changera pour z négative en* $a(-z)^{\frac{m}{n}}(\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$. *Or les Géomètres savent que toute quantité* $B\,(\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$ *peut toujours se réduire à la forme* $p+q\sqrt{-1}$, *p & q étant réels. Donc l'ordonnée imaginaire répondante à z négative pourra être exprimée dans ce cas par* $p+q\sqrt{-1}$.

Après une translation des axes, voici le passage essentiel :

> *. Cor. II. Donc si on augmente l'abscisse AC, d'une quantité finie CQ, au moins jusqu'à un certain terme, l'ordonnée correspondante pourra être supposée =* $p+q\sqrt{-1}$. *Car s'il n'y avoit aucune valeur finie de CQ, telle que* $p+q\sqrt{-1}$ *pût exprimer l'ordonnée correspondante, cette ordonnée ne pourroit pas non plus être exprimée par* $p+q\sqrt{-1}$ *CQ étant infiniment petite. Ce qui est contre le Cor. précédent. D'ailleurs il est visible par les observations qui terminent l'art.2, que la valeur de*

y en z étant infiniment convergente lorsque z est infiniment petite, on peut supposer à z une valeur finie, telle que la valeur correspondante de y soit aussi exprimée par une série très convergente ; & si on imagine que cette série entière composée d'une infinité de termes soit substituée dans l'Equation de la courbe à la place de y, le résultat de la substitution sera infiniment petit ou zéro, soit dans le cas de z positive, soit dans le cas de z négative. Or dans le cas de z négative, la série qui exprime la valeur de y est composée de termes dont chacun est $A + B\sqrt{-1}$, *A & B marquant des quantités réelles. Par conséquent la série entière peut être supposée* $= p + q\sqrt{-1}$. *Il y a donc une valeur finie de z, à laquelle il répond une valeur de y, égale à* $p+q\sqrt{-1}$.

La relation entre z et y est donc prolongeable sur $[a\ ,\ 0]$ (avec $a < 0$).

D'Alembert postule alors (un peu hâtivement pour le cas général qu'il traite, mais valablement dans le cas d'une relation polynomiale) que les a pour lesquels la relation est prolongeable sur $[a\ ,\ 0]$ ont une borne inférieure a pour laquelle la relation est (aussi) prolongeable sur $[a\ ,\ 0]$.

. Cor. III. Je dis maintenant que, quelle que soit la quantité finie CQ dont on augmente l'abscisse AC, l'ordonnée imaginaire correspondante pourra toujours être supposée égale à $p + q\sqrt{-1}$. *Car supposons pour un moment qu'on ne puisse pas donner une telle valeur à l'ordonnée, & que CO soit la plus grande valeur de CQ, qui donne l'ordonnée correspondante égale à* $p + q\sqrt{-1}$, *c.à.d. que* α *ou CO soit la plus grande valeur de CQ qui donne p & q réels, il est évident (art. 2.3.4.) qu'en augmentant* α *d'une quantité infiniment petite, la valeur correspondante de p pourra être supposée* $t + i\sqrt{-1}$, *& celle de* $q = b + \delta\sqrt{-1}$, *les nombres t, i, b,* δ, *étant réels.*

Reprenant alors l'argument précédent, il peut prolonger la validité de la relation encore au-delà de a et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Finalement la relation $\varphi(z,y) = 0$, dans le cas polynomial où $z = y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + \ldots + fy + g$, peut être inversée pour tout z de $\mathbb{R}$ et, en particulier, il existe un y réel ou complexe annulant le polynôme.

. Propos. II. Soit un multinome quelconque $y^m+ay^{m-1}+by^{m-2}\ldots+ fy+g$, *tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de y, y fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité* $p + q\sqrt{-1}$ *à substituer à la place de y, & qui rendra ce multinome égal à zéro.*

(Note : nous avons mis y à la place du x mis par d'Alembert dans l'énoncé de ce dernier théorème).

On peut effectivement transformer la démonstration de d'Alembert en une démonstration juste dont le schéma serait le suivant :

1. Lorsque φ est continue de dérivée continue en (z_0, y_0), la relation $\varphi(z,y) = 0$, vérifiée pour (z_0, y_0) de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ peut être inversée sur un voisinage ouvert de (z_0, y_0) en au moins une fonction y de z.

2. Lorsque la relation est de la forme $z = P(y)$ où P est un polynôme, l'ensemble des z sur lesquels elle est vérifiée est fermé.

3. L'ensemble des z sur lequel φ peut être inversé est donc à la fois ouvert et fermé. La connexité de $\mathbb{R}$ fait conclure que cet ensemble est $\mathbb{R}$ tout entier et contient donc 0.

Il est passionnant de suivre d'Alembert dans cette démonstration, mais il est non moins étonnant de remarquer que cette démonstration est à peu près exclusivement de nature non standard. Elle utilise en effet successivement...

... les caractérisations non standard des ouverts et des fermés :
Un ensemble ouvert (standard dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$) est un ensemble qui contient les éléments infiniment proches de chacun de ses points.
Un ensemble fermé borné (standard dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$) est un ensemble qui contient les parties standard de chacun de ses éléments.

... et le "principe de permanence" de Robinson :
Si une propriété standard est vérifiée pour tout infiniment petit, alors elle est vérifiée sur un intervalle $[0,\ a\ ]$ où a est non infiniment petit.

Insistons sur le fait que d'Alembert énonce exactement (comme indiscutable et intuitivement manifeste) ce principe que les analystes non standardistes appellent parfois "principe de Cauchy", qui l'a aussi utilisé explicitement.

Relecture d'un texte d'Euler

Nous terminerons ces quelques relectures par ce qui est certainement le texte le plus surréaliste de l'histoire de l'analyse, celui où Euler fait émerger en quelques lignes, les formules qui porteront son nom [22].

Il démontre d'abord la formule de Moivre, d'où il tire :

133 . $$\cos.nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2} \quad \&$$
$$\sin.nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2v-i}$$

...

138. Supposons encore dans les formules précédentes (art. 133) ***l'arc z infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i,*** *afin d'obtenir pour* ***iz une valeur finie v*** *; nous aurons donc nz = v, & z = v/i, & par conséquent sin.z = v/i, & cos.z = 1 ; ces substitutions faites donneront*

$$\cos.v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{\mathrm{i}}\right)^{\mathrm{i}} + \left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{\mathrm{i}}\right)^{\mathrm{i}}}{2} \quad \&$$

$$\sin.v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i} - \left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}}{2\sqrt{-1}}.$$

Or dans le chapitre précédent, nous avons vu que $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^2$, *e désignant la base des logarithmes hyperboliques ; ayant donc écrit pour z, d'une part +* $v\sqrt{-1}$ *& d'une autre part* $-v\sqrt{-1}$, *on aura*

$$\cos.v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \quad \& \quad \sin v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus & à des cosinus d'arcs réels. On aura aussi

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos.v + \sqrt{-1}\,\sin.v, \quad \& \quad e^{-v\sqrt{-1}} = \cos.v - \sqrt{-1}\sin.v.$$

Il y a deux passages "délicats" dans cette démonstration :

1. les "substitutions" $\sin z \sim z$, avec $z = v/i$ infiniment petit, justifié par le fait que v est standard appréciable et i infiniment grand et $\cos z \sim 1$, pour les mêmes raisons.

2. l'égalité $(1 + z/i)^i = e^z$ pour i infiniment grand.

Le passage (2) est facilement justifiable en ANS. En effet pour z standard et i infiniment grand, il est classique d'établir $(1 + z/i)^i \cong e^z$.

Si l'on a donc

$$\cos v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i} + \left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}}{2}$$

alors, $\cos v$ étant limité, les parties standard des deux membres sont égales (c'est le principe de Carnot) et donc $\cos v$ est bien exactement égal à

$$\frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}.$$

Le passage (1) exige une attention beaucoup plus soutenue. Il s'appuie en effet sur le fait que :

Si $f_n(z) = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n$, alors $f_n(z) \cong (1 + \sqrt{-1}z)^n$, pour tout z infiniment petit, d'ailleurs égal à v/n, n étant infiniment grand.

Or ce résultat pourrait aujourd'hui effectivement se démontrer sur le schéma non standard suivant :

D'une part, la fonction $Z \longrightarrow Z^n$ est S-continue pour au moins un n infiniment grand ; la S-continuité de cette fonction n'est pas vérifiée pour tout N infiniment grand mais on peut l'assurer jusqu'à un certain n infiniment grand, par application du "principe de Robinson" (Nous n'explicitons ici ni ce qu'est la S-continuité, ni l'application de ce principe).

D'autre part, pour ce n là, et donc pour un $z = v/n$ infiniment petit, les nombres complexes $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$ et $1 + \sqrt{-1}z$ sont infiniment proches et donc leur puissances $n$ième aussi, d'après la S-continuité précédente.

Nous ne prétendons évidemment pas ici qu'Euler ait eu une quelconque idée des difficultés qui pouvaient l'attendre dans une telle démonstration ; mais nous ne pouvons nier qu'il ait eu dans la tête des conceptions suffisamment sûres pour lui permettre d'avoir la conviction que son schéma de raisonnement était correct. Et ces conceptions n'étaient pas simplement celles de nombres infiniment petits et infiniment grands ; nous ne saurons certainement jamais si elles intégraient tout, ou partie, ou plus, des notions d'*ordre de grandeur* et de *permanence*.

BIBLIOGRAPHIE SUR L'ANALYSE NON STANDARD

[1] . Abraham ROBINSON - *Non Standard Analysis* - North Holland, 1966.

[2] . *La mathématique non standard* - Collectif - Editions du CNRS, 1989. (contient la *Théorie des Ensembles Internes* de Edward NELSON, 1977 ; *Was sind und was sollen die Zählhen ?* de Pierre CARTIER ; *Une théorie du continu* de Jacques HARTHONG,...).

[3] . André DELEDICQ - *L'invention des logarithmes : une catalyse du calcul infinitésimal* - A paraître, 1993.

[4] . André DELEDICQ & Marc DIENER - *Le calcul infinitésimal* - Colin 1989.

[5] . Imre LAKATOS - *Cauchy and the continuum : the signifiance of Non Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics* - paru dans Mathematical Intelligencer, vol. 1, 77-78, 1966.

[6] . Georges REEB - *Mathématiques non standard* - Bulletin APMEP, n°328, avril 1981

[7] . R. LUTZ - *Rêveries infinitésimales* - La gazette des mathématicienes n° 34, octobre 1987.

[8] . André DELEDICQ - *Introduction au i-calcul, pratique de l'analyse non standard* - Quadrature n° 6 et 7, septembre 90 et janvier 91.

[9] . Thérèse ANTOINE, André BEAUMONT, André DELEDICQ, Jean Louis FORGUES, Marc DIENER - *L'analyse au lycée avec le vocabulaire infinitésimal* - IREM de Paris 7, 1991.

[10] . André DELEDICQ - *Cours d'analyse infinitésimale élémentaire (non standard)* - IREM de Paris 7, 1992.

LISTE DES AUTEURS DE TEXTES PRESENTES A L'EXPOSE

[11] . EUDOXE, pour le renversement d'un argument de type arithmétique (dit axiome d'Archimède) en un somptueux premier théorème d'analyse, dans les *Eléments d'Euclide*, livre X (rééd. et trad. Peyrard - Blanchard, 1966).

[12] . ARCHIMEDE, pour sa méthode qui, par un épuisement des cas d'inexistence conclut à la coïncidence de deux objets dont les algorithmes de construction appartiennent à deux cadres différents, dans *La Quadrature de la parabole* (rééd. et trad. Paul Ver Eecke - Blanchard, 1960).

[13] . STEVIN, pour ses essais de justification d'une premier sommation des effets de multiples tranches, dans *La Statique*, 1685 (trad. Albert Girard, 1734 - rééd. ACL Editions, 1987).

[14] . NEPER, pour l'invention d'une fonction qui conserve sa forme quel que soit l'ordre de grandeur auquel on la regarde, dans *Mirifici logarithmorum canonis descriptio...*, 1614 (cité par Charles Naux - *Histoire des logarithmes* - Blanchard, 1966).

[15] . GALILEE et CAVALIERI, pour leur faux-passage à la limite avec des indivisibles qui n'en sont pas, dans *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorne a due nuove scienze...*, 1638 (rééd. et trad. Paul Henri Michel - Hermann, 1966).

[16] [17] . FERMAT et GREGOIRE de SAINT VINCENT, pour leur emploi de la progression géométrique comme stéréotype de fragmentation, dans *Sur l'emploi de la progression géométrique pour la quadradutre des paraboles et hyperboles à l'infini*, ~ 1640, et l'*Opus geometricum quadraturae circuli et sectioni coni*, 1630.

[18] . NEWTON, pour son emploi explicite des infiniment petits, l'universalité de la variable temporelle et l'immédiateté conséquente de la dérivée, vue comme une vitesse, dans la *Méthode des fluxions et des suites infinies*, 1671 (trad. Buffon, 1740 ; rééd. Blanchard, 1966).

[19] [20] . LEIBNIZ, pour la découverte d'une représentation symbolique adaptée aux calculs et la dénégation de son propre génie, dans *Nova Methodus pro maximis et minimis...*, 1684 (rééd. et trad. Marc Parmentier - Vrin, 1989) et la *Lettre à Monsieur Dangicourt*, 1716 (trad. Jean Peyroux ; rééd. Blanchard, 1983).

[21] . BERNOUILLI Jean, nègre du marquis de L'Hospital, pour ses demandes à la manière d'Euclide et ses confusions inévitables à partir des conceptions leibniziennes, dans *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, 1696 (rééd. ACL-Editions, 1988).

[22] . EULER, pour son audace légitimée par une anticipation osée des principes de permanence robinsonniens, dans *Introduction à l'analyse infinitésimale*, 1748 (Trad. J.B. Labey, 1797 ; rééd. ACL-Editions, 1988).

[23] . D'ALEMBERT, pour l'énoncé des premiers théorèmes sur les limites et les premières rencontres des concepts topologiques élémentaires (ouvert, fermé, connexe), dans *Recherches sur le calcul intégral* - Berlin, 1748.

[24] . LHUILLIER, pour sa traduction formelle de l'intuition de borne, dans *Principes des calculs supérieurs* - Berlin, 1786.

[25] . CARNOT pour ses principes de manipulation de nombres "arbitraires", différents des nombres assignables, dans *Métaphysique du calcul infinitésimal*, 1797 (rééd. Blanchard, 1970).

[26] . LAGRANGE, pour son tour de passe-passe occultant le passage à la limite en le projetant à distance non finie, dans *Théorie des fonctions analytiques*, 1797.

[27] . CAUCHY, pour sa vision de l'uniforme continuité et le premier raisonnement en epsilon-éta, dans *Leçons d'Analyse à l'Ecole Polytechnique*, 1823 (rééd. ACL-Editions, 1987).

[28] . DUHAMEL, pour l'expression des principes de substitution des infiniment petits, dans *Eléments de Calcul Infinitésimal*, 1860.

[29] . DEDEKIND, pour son idée, qu'il croyait triviale, de "coupure", dans *Continuité et nombres irrationnels*, 1872 (trad. Judith Milner et Hourya Sinaceur).

ROBINSON et NELSON, pour leurs constructions débouchant sur l'idée de dé-fonctionnalisation et, partant, d'immobilisation du concept de limite (voir Bibliographie sur l'ANS [1] et [2]).

COMMISSION INTER-IREM
HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE : LA QUESTION DE L'INFINI

Actes du 9ème colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

Eclairages historiques pour l'enseignement de l'analyse

Jean-Pierre Friedelmeyer
IREM de Strasbourg

De nombreuses réformes ont ponctué l'enseignement des mathématiques des trente dernières années, et plus particulièrement en analyse. Ces réformes tentaient, apparemment en vain, de concilier deux impératifs : un impératif de rigueur, propre à tout enseignement des mathématiques, et un impératif pédagogique de compréhension et de transmission du sens. Mais lorsque ce sens concerne des notions qui mettent en jeu l'infini (nombres irrationnels, infiniment petits, infiniment grands, limites etc...) l'intuition, qui est le support du sens, se heurte à des contradictions et est incapable d'appréhender d'emblée la richesse conceptuelle des notions de l'analyse élaborées par des générations de mathématiciens. La solution qui semble avoir été adoptée durant ces dernières années est un certain abandon du sens au profit de méthodes essentiellement calculatoires qui préserve une illusion de rigueur. Mais celle-ci n'est en réalité conservée que dans des îlots dispersés qui empêche toute perception globale et structurée du sens, au profit de règles purement formelles. Une autre solution est possible préservant à la fois le sens, tout en structurant la pensée mathématique de l'élève en un tout cohérent et rigoureux : elle consiste à situer les mathématiques et leur enseignement dans l'histoire. Alors le sens et la rigueur ne sont plus absolus, contradictoires ou inaccessibles, mais se construisent en interaction, en même temps que se structure la pensée de l'élève, selon un processus dynamique et vivant.

1. Grandes variations dans les programmes d'analyse du lycée.

Si l'on parcourt les programmes d'analyse enseignés au lycée depuis 1945 on peut distinguer assez nettement trois périodes.

1) **Jusqu'en 1961** le mot analyse ne figure pas dans un tel programme bien qu'il y ait des rubriques que nous plaçons aujourd'hui sous ce titre comme l'étude des fonctions, la dérivée etc... Mais ces rubriques sont placées dans le chapitre Algèbre-trigonométrie. Cette situation prolonge en fait celle qui régnait tout au

long du 19ème siècle et du 20ème siècle d'avant la guerre dans les programmes et les manuels scolaires, mêmes supérieurs où, l'étude des fonctions, des séries numériques etc... faisait partie des questions d'Algèbre.

2) **La période 1961-1985** par opposition à la précédente connaît une grande instabilité. Elle est marquée par la volonté d'introduire un enseignement moderne de l'analyse, bien séparé de l'algèbre mais visiblement avec beaucoup d'hésitations et de tâtonnements : Par exemple pour les différents programmes de 1ère Scientifique :

En 1966 on introduit la notion de continuité et de limite en un point, ainsi que celle de différentielle.

En 1970 la différentielle devient *"fonction linéaire tangente"*.

En 1982 ces notions sont remplacées par celles de développements limités d'ordre 0 et 1.

En même temps on introduit l'étude des suites numériques et on insiste sur une pratique de l'analyse par encadrements, approximations, inégalités.

3) **depuis 1985** les instructions officielles se distinguent par deux caractères

a) une volonté affichée de stabilité, puisque les programmes *"conservent pour l'essentiel les objectifs des programmes mis en application en 1983. Le bilan de trois années de fonctionnement ayant montré la nécessité de les infléchir."*

et un commentaire analogue en 1991

"les programmes qui suivent reprennent pour l'essentiel les objectifs et la substance des programmes précédents."

b) l'insistance apportée à privilégier un enseignement plus pratique, visant à *"donner **un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques**"* et dans lequel *"on développera une vision géométrique des problèmes notamment en analyse, car la géométrie met au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés de représentation"*.

Voici quelques extraits des programmes de 1985 et 1991 mis en parallèle. Le libellé : *"limite d'une fonction en un point"* devient sous le titre : **langage des limites**

"après observation des fonctions $h \to h^n$, $n=1, 2, 3$ et $h \to \sqrt{h}$ au voisinage de 0, on dit que ces fonctions admettent en 0 la limite 0."

1985	1991
en 1ère la notion de continuité est hors programme	idem mais quelques lignes auparavant *"Comme en 2de, on mettra en valeur l'utilité du concept de fonction pour l'étude des phénomènes **continus**"*.
Calcul intégral en TC *"Étant donné une fonction f continue sur un intervalle I et un couple (a,b) de points de I, le nombre F(b)-F(a) où F est une primitive de f, est indépendant du choix de F. On l'appelle intégrale de a à b de f et on le note* $\int_a^b f(t)dt$*"*	idem avec cet objectif : *"Familiariser les élèves avec quelques **problèmes relevant du calcul intégral** et qui, en retour, **donnent du sens à la notion d'intégrale** : calcul de grandeurs géométriques (aires, volumes...) de grandeurs physiques (calcul de la distance parcourue connaissant la vitesse, valeurs moyennes, valeur efficace...)"*

Pour le Professeur de Première ou Terminale qui essaye de préparer son cours, tout ceci peut pour le moins, le laisser perplexe. Comment par exemple donner du sens à la notion d'intégrale telle qu'elle est définie à gauche et faire le lien avec les notions d'aire, de volume etc...

Ensuite il peut s'étonner qu'une science - l'analyse - dont les résultats et les méthodes enseignées au lycée sont acquis depuis au moins 150 ans et souvent bien plus, subisse aujourd'hui encore d'importantes modifications dans les programmes d'enseignement tous les cinq ou dix ans. On peut comprendre que l'irruption des calculatrices et des ordinateurs peut modifier certaines approches et faciliter les calculs et les représentations. Je ne pense pas que cela change les définitions des objets mathématiques.

2. Ces variations révèlent une contradiction

En fait je crois que toutes ces variations, hésitations, inflexions, manifestent une contradiction fondamentale entre deux impératifs aussi contraignant l'un que l'autre et dont le révélateur est justement l'infini.

d'une part un impératif pédagogique.

Enseigner des notions qui parlent à l'élève, qu'il puisse comprendre, imaginer, qui stimulent son intuition et son imagination. On utilise alors des mots très chargés de sens intuitif comme *"continu, limite, infini, infiniment petit ou grand etc..."* mais très éloignés de leur définition et de leur traitement mathématique actuels.

Non seulement ces mots sont incapables de rendre compte de la richesse et de la finesse des concepts de l'analyse, mais plus grave - l'intuition est incapable de les appréhender, ou lorsqu'elle le fait, elle tombe facilement sur des paradoxes, ou conduit à des erreurs. Songez par exemple aux réponses spontanées de vos éleves sur ces limites classiques :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ou

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right]$$

C'est pourquoi B. Russell dira :

"l'intuition n'a rien à voir avec l'infiniment petit"

et Bachelard *"la rigueur ne peut donc provenir que d'une correction radicale de l'intuition"*.

Ensuite un impératif de rigueur.

Or, qui dit mathématique, dit rigueur - d'où le second impératif en contradiction avec le premier : la nécessité d'une présentation précise et rigoureuse de définitions et de théorèmes mettant en jeu l'infini. Cette présentation est la plupart du temps trop difficile, trop abstraite pour la majorité des élèves du lycée et ne peut donc être donnée telle quelle. Pour prendre un exemple précis : l'élève a une certaine intuition du concept de vitesse instantanée ; mais s'il demande la définition mathématique le professeur peut-il lui répondre autre chose que ceci :

soit f(t) la distance parcourue en km au bout d'un temps t. Alors dire que à l'instant t_0 la vitesse est de 100km/h. signifie :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ |t-t_0|<\eta \Rightarrow \left|\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}-100\right|<\varepsilon$$

La méconnaissance du 1er impératif fit échouer les introductions prématurées et formelles, sans préparation, des notions de limite, de continuité, de différentielle etc... dans les année 60-70.

Au contraire sa prise en compte n'est certainement pas étrangère aux inflexions apportées depuis 1985. Mais cette prise de conscience ne supprime pas la difficulté liée au second impératif : la nécessité pour toute activité mathématique d'être précise et rigoureuse. Comment sortir d'une telle impasse?

3. La solution adoptée aujourd'hui : l'abandon du sens.

Il me semble que la solution adoptée aujourd'hui, c'est l'abandon de toute définition et de toute démonstration impliquant d'une façon ou d'une autre l'infini en mathématique. Cela commence au collège. Dans les manuels des années 50-60 on trouvait des démonstrations ou des esquisses de démonstrations du théorème de Thalès ou de la formule de l'aire du rectangle. Une fois ceci mis en place, on démontrait des choses comme le fait que y=ax+b est représenté par une droite et en 2de que, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$. Je crois que vous auriez du mal aujourd'hui à trouver de telles démonstrations dans les livres de collège ou de lycée. On ne dit même plus : il faudrait démontrer que ou, on admettra que - Non, on affirme:

"Les nombres a, b, c étant donnés,

L'ensemble des points M(x,y) tels que y=ax+b est une droite sécante à Oy.

L'ensemble des points M(x,y) tels que x=c est une droite parallèle à Oy.

Pour tout $\vec{u}$, $\vec{v}$ on a $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$."

Au point qu'il vous arrive aujourd'hui de devoir discuter pendant un bon moment avec des jeunes collègues pour les convaincre que ces propriétés élémentaires nécessitent effectivement une démonstration et que celle-ci est difficile parce-qu'elle met en jeu l'infini. Comment par exemple démontrer la formule de l'aire d'un rectangle, lorsque les côtés sont incommensurables? Pour eux, elles sont devenues des vérités innées et a fortiori elles le sont pour les élèves. Or les programmes ne manquent pas de répéter qu'il faut *"Entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique."*

En fait, l'analyse enseignée se limite à la mise en place d'un certain nombre d'outils uniquement calculatoires et graphiques dont la vérité et la pertinence sont toujours affirmées mais jamais démontrées, jamais justifiées.

L'avantage de cette façon de procéder est qu'elle conserve l'illusion d'une certaine rigueur : on pose des objets avec leurs propriétés : fonctions, vecteurs, points, droites, ... On demande d'admettre un certain nombre de règles de calcul et de résultats à leur sujet. Le travail de l'élève consiste alors uniquement à bien appliquer ces règles sans se poser la moindre question sur le sens de ces objets et de ces règles. L'ennui c'est que l'élève ne sait plus reconnaître dans les situations concrètes les modèles mathématiques. Comment peut-il faire le lien entre par exemple

- un phénomène exponentiel et la fonction du même nom?
- une aire, un moment d'inertie, une valeur moyenne et l'intégrale telle qu'elle lui a été présentée?

Ainsi la contradiction entre l'intuition de l'élève et une gestion rigoureuse de l'infini est levée par l'abandon du sens. Refuser d'affronter l'infini étroitement impliqué dans des questions comme le théorème de Thalès, les irrationnels, la notion de limite etc..., c'est refuser de se poser les questions : qu'est ce qu'un nombre? Le continu? Une droite? Une aire? Un volume? C'est faire des mathématiques une activité uniquement formelle où le calcul remplace le raisonnement qui est articulation du sens.

Il y a une expression tout à fait significative chez l'élève, qui reflète bien cet abandon du sens : c'est l'expression *"avoir le droit de". "On n'a pas le droit de diviser par 0 - a-t-on le droit de simplifier? On a le droit de dériver une série terme à terme sous telle ou telle condition."*

Comme les objets mathématiques ne sont pas régis par le sens mais uniquement par des règles, l'élève remplace très naturellement une attitude de pensée, de discernement du vrai et du faux, par une attitude de respect par rapport à des règles qui sont alors l'expression d'un certain droit au sens juridique.

Pour le professeur, adopter cette attitude juridique peut présenter des avantages : s'exerçant en termes de droit, elle relèverait du *"surveiller et punir"*. Au contraire, poser la question du sens met d'une certaine façon le professeur à égalité avec l'élève, vis à vis de quelque chose qui est extérieur à tous deux, indépendant de tous les deux : le sens.

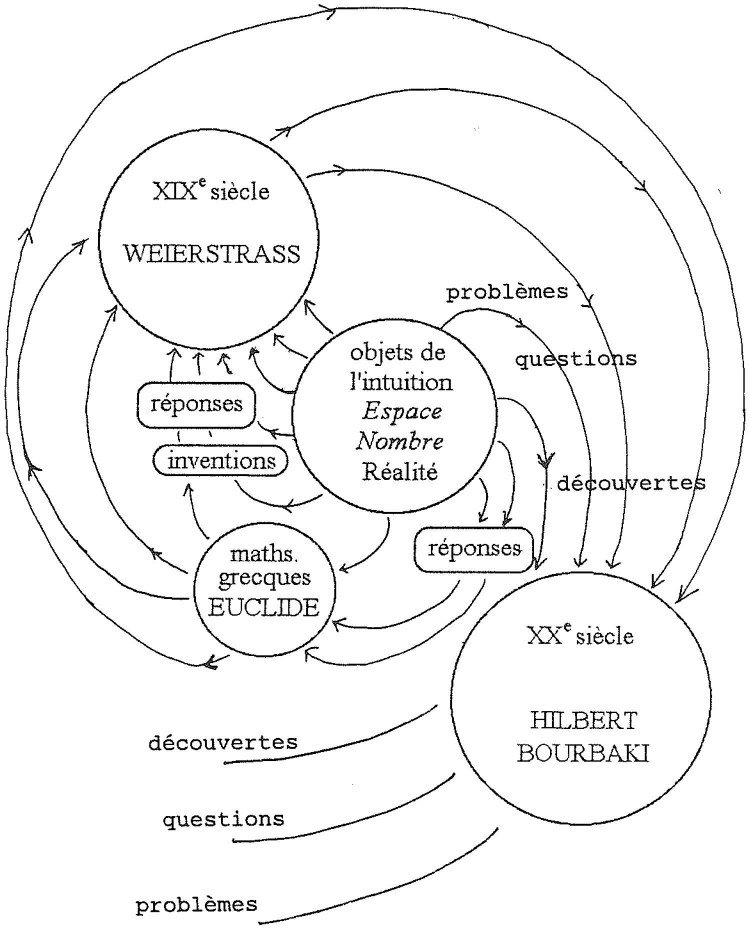
Au total, l'enseignement des mathématiques me paraît rester prisonnier d'un schéma trop rigide, d'une vision trop statique de ce que sont les mathématiques ; quelque chose comme la caricature suivante :

	mathématiques des chercheurs
sens et rigueur	mathématiques enseignées à l'Université
sens ?	ce qu'on peut enseigner au lycée
rigueur ?	ce qu'on peut enseigner au collège
	ce qu'on peut enseigner au primaire

Dans un tel schéma, seule l'Université semble être en mesure d'enseigner des mathématiques qui à la fois ont un sens et sont rigoureuses. Auparavant, ou bien l'on est obligé de sacrifier la rigueur (particulièrement pour les questions qui mettent en jeu l'infini) ou bien l'on sacrifie le sens (pour permettre un calcul rigoureux mais qui du coup reste formel).

4. Une autre solution : assumer la contradiction en situant les mathématiques et leur enseignement dans l'histoire.

Personnellement, je préfère voir les mathématiques dans l'histoire, selon un autre schéma, moins rigide, plus perturbé certes, mais vivant et en mouvement, comme celui-ci.



Dans ce schéma il y a d'abord un **donné**, une **réalité extérieure** qui fournit des objets à notre intuition : essentiellement **l'espace et le nombre**.

Ces objets suscitent des **problèmes**, par exemple ceux de la comparaison et de la mesure des grandeurs. Ils soulèvent des **questions**, et quelquefois amènent à des **découvertes** imprévues (par exemple la découverte qu'il existe des grandeurs incommensurables).

Ces problèmes, ces questions trouvent des réponses qui sont organisées à un moment donné en une **théorie mathématique**. Celle-ci codifie le discours mathématique et impose un modèle de rigueur, par exemple le modèle euclidien. L'enseignement joue souvent un rôle important dans cette organisation rigoureuse du savoir, car l'enseignement a besoin de pôles de stabilité. Il n'en demeure pas moins que ce modèle de rigueur ne répond pas à toutes les questions, ne résoud pas tous les problèmes. Par ailleurs, il peut être assailli par de nouvelles questions, de nouveaux problèmes, de nouvelles découvertes ou inventions qui peuvent à un moment donné déstabiliser complètement le modèle, au point de nécessiter la construction d'un nouveau modèle. Voici deux exemples.

Premier exemple : l'invention du calcul infinitésimal

L'invention du calcul infinitésimal au 17ème siècle développe des idées et des méthodes extrêmement efficaces, mais totalement étrangères, voire contradictoires au modèle euclidien. On peut s'en rendre compte à la lecture de la question suivante, posée en 1784 par l'Académie de Berlin, pour un prix mis à concours :

> *"La classe de Mathématique propose la question pour le Prix qui sera décerné en 1786.*
>
> *L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'estime qu'on a pour elles, et l'honorable dénomination de* Sciences exactes *par excellence qu'on leur donne à juste titre, sont dues à la clarté de leurs principes, à la rigueur de leurs démonstrations, et à la précision de leurs théorèmes.*
>
> *Pour assurer à cette belle partie de nos connaissances la continuation de ces précieux avantages, on demande* ***une théorie claire et précise de ce qu'on appelle Infini en Mathématique****.*

On sait que la haute Géométrie fait un usage continuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cependant les Géomètres, et même les Analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini ; et de grands Analystes modernes avouent que les ***termes grandeur infinie*** *sont contradictoires.*

L'académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'Infini, sans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matière soit traitée avec toute la généralité, et avec toute la rigueur, la clarté et la simplicité possibles".

Le 19ème siècle avec Cauchy, Abel, Bolzano, Weierstraß réussit à mettre en place une telle théorie claire et précise.

Deuxième exemple : le modèle de Weierstraß

Mais le modèle de Weierstraß fut incapable d'empêcher quelques décennies plus tard l'apparition des paradoxes surgis de la théorie des ensembles de Cantor. Presque 150 ans après la question de l'Académie de Berlin en 1925 Hilbert est amené à reposer le même problème, en des termes dont la similitude avec ceux du texte précédent ne peut que nous frapper :

"Il faut admettre que la situation dans laquelle nous nous trouvons présentement en regard des paradoxes ne peut-être supportée plus longtemps. Pensez donc, en mathématiques, ce modèle de certitude et de vérité, les formations des concepts et les raisonnements tels que tout un chacun les enseigne, les apprend ou les applique, conduisent à des absurdités. Et où pourra-t-on trouver ailleurs certitude et vérité, si même la pensée mathématique est défaillante?

Mais il existe un chemin totalement satisfaisant pour échapper aux paradoxes, sans trahir notre science. Les points de vue pour trouver ce chemin et les souhaits qui nous en indiquent la direction sont ceux-ci :

1. Nous voulons scruter soigneusement la formation des concepts et les raisonnements fertiles, si faibles que soient les perspectives qu'ils nous offrent, et les cultiver,

les consolider, les rendre efficaces. Du paradis que Cantor a créé pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser.

2. Il est nécessaire de mettre en place d'un bout à l'autre du raisonnement la même certitude que celle qui règne dans la théorie ordinaire et élémentaire des nombres de laquelle personne ne doute et où contradictions et paradoxes ne surgissent qu'à cause de notre inattention.

Ils ne nous est manifestement possible d'atteindre ce but que si nous réussissons à éclaircir totalement ***"la nature de l'infini""*** (Wesen des Unendlichen)

Comme vous pouvez le constater, à chaque fois c'est l'infini, ce sont les questions posées par l'infini, qui sont à la base même de l'évolution des modèles de rigueur, des espaces de sens, qui sont le moteur même de l'histoire des mathématiques.

Insérer les mathématiques et leur enseignement dans l'histoire c'est alors accepter l'idée qu'il n'y a pas un modèle absolu de rigueur, c'est comprendre que celle-ci est solidaire d'un approfondissement du sens.

5. Le point d'achoppement : la liaison entre le continu spatial et le continu numérique.

Cet infini est présent aussi bien dans l'intuition de l'espace que dans celle du nombre, mais une des évolutions principales qui se soit produite au cours de l'histoire porte sur la relation entre les deux, sur l'idée que l'on se fait de la relation entre géométrie et nombre. Les grecs distinguaient soigneusement les nombres des grandeurs géométriques ; pour eux ce n'étaient pas des entités de même nature. En créant la géométrie analytique, en proposant de repérer l'espace par des coordonnées numériques, Descartes a identifié le continu spatial et le continu numérique. C'est cette identification qui sous-tend l'identification entre une droite et l'ensemble des points d'équation y=ax+b. C'est elle qui certainement peut justifier les recommandations des programmes de *"développer une vision géométrique des problèmes, notamment en analyse"*. Mais je ne suis pas sûr qu'elle soit toujours bien consciente et comprise, si j'en juge par certaines réflexions d'élèves ou même de professeurs stagiaires.

Ainsi, lors d'un récent stage, on me demande : *"étant donnés deux segments BD et BC, peut-on construire un segment BE égal au produit BD.BC ?"*

Je lui donne la solution qu'expose Descartes au début de sa *"Géométrie"* et justifiée par l'égalité $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$ d'où BE=BD×BC si BA est pris pour unité (figure 1)

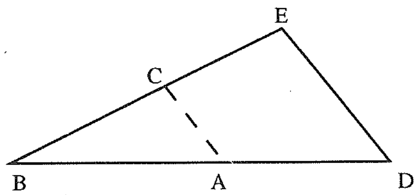


Figure 1

Mon collègue n'est pas satisfait : il voudrait une construction sans recours à une unité, comme cela se fait avec la construction d'une longueur AD égale à $\sqrt{AB.AC}$ (figure 2)

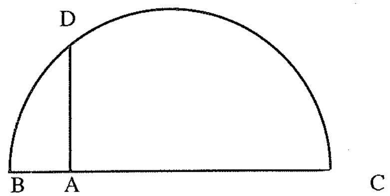


Figure 2

Je lui explique que cela n'est pas possible : dans le deuxième cas, il s'agit de la construction d'une moyenne proportionnelle AD, vérifiant $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}$ qui ne dépend nullement de l'unité de longueur choisie, et qui a une existence géométrique indépendante de toute mesure. Par contre dans le premier exemple, il s'agit d'exprimer l'aire d'un rectangle, qui dépend forcément de l'unité de longueur choisie.

Les géomètres grecs évitaient ce genre de difficulté en ne considérant des égalités qu'entre grandeurs homogènes, de même dimension.

Ce type de questions révèle bien une mauvaise assimilation de cette identification entre le géométrique et le numérique. Cette identification s'est accompagnée d'une perte de sens remplacé par un jeu formel de calcul sur des lettres. Il n'en a pas toujours été ainsi, et

je voudrais montrer dans quelles conditions le numérique s'est imposé peu à peu et a supplanté le géométrique dans l'analyse, jusqu'à oublier totalement ses origines géométriques.

6. La rigueur comme correction radicale de l'intuition.

Au 17ème et 18ème siècle l'analyse c'est l'étude des grandeurs géométriques au moyen de l'algèbre. Voici la définition que donne l'Encyclopédie Méthodique de D'Alembert du mot *Analyse*.

> *"**Analyse** est proprement la méthode de résoudre les problèmes mathématiques en les réduisant à des équations. L'analyse pour résoudre tous les problèmes, emploie le secours de l'Algèbre ou calcul des grandeurs en général : aussi ces deux mots : Analyse-Algèbre sont souvent regardés comme synonymes."* (cela rejoint le fait évoqué au début de cet article sur la place de l'analyse incluse dans l'Algèbre jusqu'en 1961).

Mais alors que les géomètres grecs s'appuyaient sur l'intuition de l'espace physique, les savant du 17ème et 18ème siècle s'appuyaient sur ce qu'ils appelaient les lois de la nature, lois qu'ils cherchaient à dégager et à décrire. Ce qui par exemple fait la gloire d'un Newton ce ne sont pas les résultats mathématiques en tant que tels mais le fait qu'il ait su donner *"les principes mathématiques de la philosophie naturelle"*. Et, aussi profonde que peuvent être leurs divergences quant à la *"Philosophie de la Nature"*, Newton et Leibniz s'accordent pour penser celle-ci dans le contexte théologique de la **Création**. Cette création est régie par des lois ou principes immuables, que le savant s'applique à découvrir. C'est donc la physique, (philosophie naturelle) qui pose les questions clefs à l'analyse, particulièrement à travers l'astronomie et la mécanique. C'est elle qui va déplacer l'objet des recherches longtemps centrées sur la géométrie, vers l'analyse infinitésimale, c'est à dire vers l'étude des fonctions. Celle-ci va rapidement prendre la place centrale de l'activité des géomètres en faisant le lien entre les trois aspects solidaires du phénomène physique.

1er aspect

- celle d'une relation réciproque entre deux variables (ou groupes de variables) qui **légifère** un phénomène donné, par exemple le mouvement des planètes. La fonction exprime la **loi** de ce mouvement. Ces fonctions sont forcément continues - car *"la nature ne fait pas de sauts"*.

$2^{ème}$ aspect

- celle d'un lieu géométrique, c'est à dire la courbe qui visualise la loi : c'est la loi qui fait naître (natura) la coube.

$3^{ème}$ aspect

- le polynôme éventuellement infini qui permet le calcul des valeurs numériques de la fonction.

Il y avait en effet un problème à résoudre : c'est que la plupart des lois s'exprimaient par des fonctions échappant *a priori* à l'algèbre, et que Leibniz qualifiera de **transcendantes** : fonction circulaires, logarithmes, exponentielles... Comment calculer ces fonctions avec les seules opérations dont dispose le calculateur : addition, soustraction, multiplication, division, extractions de racines, les seules pour lesquelles il possède un algorithme?

Voici comment Newton résout ce problème, en développant ce qu'il appelle une **Arithmétique universelle** : l'idée principale est la suivante

- de même que tous les nombres, qu'ils soient rationnels ou irrationnels peuvent s'écrire uniquement à l'aide des nombres entiers par leur développement décimal (celui-ci pouvant être fini ou infini). De même toute fonction peut s'écrire uniquement à l'aide d'un polynôme généralisé en une série (suite) de puissances de x (pas nécessairement positives).

> *"Comme les fractions décimales ont l'avantage de transformer en quelque façon toutes les fractions ordinaires et tous les radicaux en nombres entiers, de sorte que lorsque ces fractions et ces nombres sourds sont réduits en Décimales, ils peuvent être traités comme des Nombres entiers, de même les suites infinies ont l'avantage de réduire à la classe des quantités simples, toutes les espèces de Termes compliqués, tels que les fractions () les racines et d'autres semblables."* (Newton, *la méthode des fluxions et des suites infinies*).

L'exemple le plus typique en est la formule du binôme de Newton justement, qui va bientôt devenir le pivot même du nouveau calcul, dans la détermination des séries nécessaires pour le calcul des fonctions.

Exemple : le développement de sinx en série entière par Euler.

En voici les étapes principales

$$\sin(nz)=\frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^n-(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

$$\sin(nz)=\frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3+\ldots$$

Soit z un infiniment petit. Alors sinz=z et cosz=1

Soit n un infiniment grand, pour que nz=v soit fini : alors

$$\sin v = v-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{v^3}{n^3}+\ldots \text{ mais } \frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2};\frac{n-2}{3n}=\frac{1}{3}$$

car n infiniment grand

Donc

$$\sin v = v-\frac{v^3}{3!}+\frac{v^5}{5!}\ldots$$

Par ailleurs si P(x) est un polynôme de terme constant égal à 1, alors l'opposé du coefficient du terme linéaire est égal à la somme des inverses des racines.

Par exemple $(x-a)(x-b)=0$ ou $x^2-(a+b)x+ab=0$

peut s'écrire $\frac{1}{ab}x^2-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)x+1=0$

Or les racines de $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\ldots$ sont $x=k\pi$ ($k\in \mathbf{Z}^*$)

posons $x^2=u$ les racines de $1-\frac{u}{6}+\frac{x^2}{120}\ldots$ sont $k^2\pi^2$ d'où

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2\pi^2}=\frac{1}{6} \text{ ou } \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Des calculs de ce type, on en trouve des centaines de pages chez Euler, pour qui ils ne faisaient pas l'ombre d'une doute (*"c'est clair comme le jour à midi"* - aimait-il à le dire) et effectivement **ils sont**

exacts. Pourquoi alors nous mettent-ils mal à l'aise? Pourquoi les considérons nous comme **non rigoureux**? Ils sont soutenus par deux attitudes : 1. une intuition très sûre de l'infini, 2. une croyance très forte en la puissance du symbole.

Ce qui caractérise Euler comme ses contemporains, c'est qu'il semble surtout préoccupé de développer toutes les ressources de ce nouveau calcul, de multiplier les découvertes et les résultats, plutôt que de passer son temps à en justifier les méthodes. Bien plus, il est douteux qu'ils auraient pu arriver à ces résultats, s'ils avaient été contraints de les passer au crible de nos critères de rigueur. Par ailleurs ces calculs manifestent une foi extraordinaire en la puissance du symbolisme et à son caractère indubitable, et les résultats nombreux qu'il fournissait ne pouvait que renforcer leur conviction. C'est pourtant de ce côté là que viendront les premiers problèmes sérieux. Pour Euler par exemple l'égalité

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4\text{...etc...}$$

a un sens quelle que soit la valeur donnée à x car l'écriture $1-x+x^2-x^3+x^4$...etc n'est qu'une autre écriture de la fonction $\frac{1}{1+x}$ et

> *"elle peut être utilisée dans des opérations mathématiques comme équivalente à cette expression, même pour des valeurs de la variable pour lesquelles la série diverge"* [Euler ;*Opera Omnia : De Seriebus Divergentibus*].

Nicolas Bernoulli lui objectera bien que la même série pourrait découler du développement de deux fonctions différentes. Euler ne le croit pas : *"Bernoulli ne donne pas d'exemples et je ne crois pas possible que la même série puisse venir de deux expressions algébriques vraiment différentes."* (Fuss Corresp. 2, 701).

C'est Cauchy qui donnera les exemples lorsqu'il remarquera que les fonctions $e^{\frac{-1}{x^2}}$ ou $e^{\frac{-1}{\sin^2 x}}$ ont un développement en série de Mac Laurin réduit à zéro et que donc par exemple e^{-x^2} et $e^{-x^2}+e^{\frac{-1}{x^2}}$ ont le même développement en série convergente.

Mais d'autres raisons ont poussé les mathématiciens à se préoccuper de la mise en place de nouveaux critères de rigueur.

Tant que l'intuition était capable d'appréhender de façon suffisamment sûre les objets du calcul - comme cela apparaît nettement chez Euler - les risques d'erreur étaient minimes, et de fait, il y a étonnement peu d'erreurs de calcul au 18ème siècle. Mais les développements même de l'analyse conduisent les mathématiciens à construire des objets de plus en plus inaccessibles à l'intuition : fonctions de variables complexes, de plusieurs variables. Les nouvelles recherches en physique : équation des cordes vibrantes, théorie de la chaleur, aussi bien que les développements liés à la dynamique interne des mathématiques vont inverser le point de vue. Au lieu que la série découle d'une fonction, ce seront de plus en plus fréquemment des séries qui définiront les fonctions.

Par exemple, durant tout le 18ème siècle des dizaines de démonstrations de la formule du binôme se sont succédées sans jamais convaincre. Pour en venir à bout il faudra que l'on inverse le problème, en considérant la fonction φ définie par la série

$$\varphi(m)=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$$

Montrant que φ vérifie $\varphi(m+m')=\varphi(m)\varphi(m')$ Cauchy est amené à mettre en évidence l'importance du concept de fonction continue. Cauchy, Abel et bien d'autres insisterons sur la nécessité de ne placer la vérité que dans la stricte égalité numérique et à écarter les dérives auxquelles l'utilisation inconsidérée du symbolisme peut entraîner .

> *"Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées ce me semble que comme des inductions propres à faire pressentir quelque fois la vérité, mais s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques."* [CAUCHY Analyse algébrique].

Il se limitera donc strictement aux égalités entre quantités réelles. Mais cette égalité numérique stricte portant sur des séries donc des sommes infinies, seul un calcul par inégalités pouvait la justifier. L'égalité entre des nombres inaccessibles est remplacées par l'équivalence suivante de l'analyse :

"*X=Y si et seulement si* $\forall\varepsilon>0\ |X-Y|<\varepsilon$."

Weierstraß reformulera toutes les définitions de l'analyse au moyen de séquences du type$\forall\varepsilon>0\ \exists\alpha$...etc... Ce faisant il ouvre la porte à toute une série de monstres mathématiques, totalement coupés de l'intuition comme

fonctions continues sur un intervalle, nulle part dérivables.
fonctions continues mais non monotones sur aucune intervalle.

Mais quel est encore le sens d'une phrase comme :

"*la fonction* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ *avec* $b = \frac{1}{4}$, $a = 19$
est partout continue, nulle part dérivable?"

Y-a-t-il autre chose qu'une conformité formelle à des relations numériques du type

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ |x-x_0|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

et $$\forall x_0 \in \mathbf{R}\ \forall l \in \mathbf{R}\ \exists\varepsilon_1>0,\ \forall\eta>0,\ |x-x_0|<\eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - l\right|>\varepsilon_1$$

Pourquoi trouvons nous cet exemple paradoxal? Parce qu'il est coupé de l'intuition géométrique. Il n'a plus qu'un sens formel numérique, sans aucune représentation à l'intuition.

Ce qui fait dire à Hilbert que bien que Weierstraß ait ainsi réalisé un fondement remarquablement rigoureux du calcul infinitésimal, il n'en a pas pour autant clos la discussion sur les fondements de l'analyse.

"La raison en est que la signification de l'infini pour les mathématiciens n'est pas encore éclaircie totalement. Certes l'infiniment petit et l'infiniment grand sont éliminés dans l'analyse de Weierstraß, dans la mesure où ces expressions sont ramenées à des relations entre grandeurs numériques infinies qui définissent les réels, et plus loin encore dans le concept même du système des réels, lequel est ainsi conçu comme un ensemble existant de façon achevée et complète.

Les formules du raisonnement logique, dans lesquelles s'expriment cette conception : notamment lorsqu'on s'occupe par exemple de **tous** *les réels ayant une certaine propriété, ou qu'il* **existe** *un réel ayant une*

certaine propriété, ces formules sont utilisées sans restriction, et continuellement appliquées."

7. En conclusion

Le nœud des difficultés pour l'enseignement de l'analyse est d'abord dans une contradiction : celle d'une analyse qui gère uniquement le continu numérique, alors que l'intuition de l'élève s'appuie d'abord et longtemps sur la perception d'un continu géométrique. Il me semble que c'est une erreur pédagogique de notre enseignement de ne plus explorer autre chose que le continu numérique, en court-circuitant l'exploration du continu géométrique et spatial, présent dans les formules de mesure des grandeurs, ou dans le théorème de Thalès.

Si l'on veut effectivement donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques, si l'on veut développer une vision géométrique des problèmes notamment en analyse, est-il judicieux de faire l'économie de l'exploration du continu spatial ? N'est ce pas lui qui donne sens et réalité aux irrationnels ? N'est ce pas la mesure des grandeurs qui peu à peu a construit les réels?

Ce rapide survol de quelques épisodes de l'histoire de l'analyse du 17ème siècle jusqu'au début du 20ème siècle nous montre assez combien les raisons internes aux mathématiques qui ont façonné la rigueur exigée en analyse, dépassent de très loin les questions que l'on peut exposer à nos lycéens, et je crois qu'il est important pour un professeur d'en être conscient. Cela ne résoud évidemment pas le problème posé par les questions : que faut-il enseigner, comment faut-il enseigner, sachant l'importance des calculatrices et des ordinateurs?

Du moins l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques nous permettrait :

- de voir fonctionner des espaces de sens plus proches de l'intuition de l'élève, tout en étant perçus comme rigoureux

- ménager des étapes dans la construction des concepts et des outils fondamentaux de l'analyse.

- de comprendre la relativité des notions de sens et de rigueur, ainsi que leur caractère solidaire. C'est ce qu'écrit Hermite à son ami Mittag-Leffer

"Je crois (...) qu'il ne serait point sans péril d'exposer d'emblée à des commençants ces mathématiques

nouvelles, si incontestablement meilleures et plus rigoureuses que les anciennes. Mon sentiment est qu'il faut d'abord préparer à ces nouvelles théories, et suivre l'ancienne route, en montrant soit des erreurs, soit des insuffisances des démonstrations restées longtemps inaperçues, et annonçant que d'autres méthodes les feront disparaître. Et la raison est que quelque chose du développement historique de la science doit se trouver dans l'enseignement. Je m'explique. C'est un fait d'expérience absolument certain, que l'erreur a été bien souvent plus utile que des vérités parfaites, pour la marche de l'esprit et le progrès de la science. N'a -t-on pas été bien heureux jusqu'ici d'avoir cru à tort, que toute fonction continue admet une dérivée, que toute équation différentielle admet une solution, et plus anciennement que toute fonction est développable par la formule de Mac Laurin ? J'en tire peut-être en me trompant, la conclusion que l'appareil si complexe de la rigueur moderne, et le caractère abstrait qu'elle revêt, peut n'être absolument pas profitable pour des commençants, ou du moins qu'il est utile de reléguer à la fin, en le réservant pour le couronnement de l'édifice, cette rigueur, qui n'est point toujours suffisamment instructive."

Bibliographie

J. Harthong et G. Reeb : *Intuitionnisme 84* dans *"La mathématique non standard"* ; Éditions du CNRS 1989.

D. Hilbert : *"Über das Unendliche"* Mathematische Annalen 95 - 1926.

J.M. Salanskis : *"L'analyse non standard et la tradition de l'infini"* Revue d'Histoire des Sciences XLI/2 1988.

J. Grabiner : *"Is mathematical truth time-dependant?"* American Mathematical Monthly 81-1974.

Bkouche - Charlot - Rouche : *"Faire des mathématiques : le plaisir du sens"* Armand Colin 1991.

Prenons la tangente avant de dériver

Patrick Perrin
IREM de Reims

Le groupe Histoire des Mathématiques de l'IREM de Reims a entrepris depuis plusieurs années un travail sur l'introduction du calcul infinitésimal dans les classes de lycée. Une recherche de documents historiques portant sur l'origine du calcul différentiel, une réflexion sur le concept de tangente chez les élèves et une exploitation en classe de certains des textes retenus en furent les différentes étapes.

Petit historique du problème des tangentes

Commençons par un bref aperçu des différentes conceptions de la notion de tangente à une courbe rencontrées dans l'histoire des mathématiques.

On trouve dans le livre III des Eléments d'Euclide (vers 300 av. J.C.) la définition suivante : "Une droite qui touchant un cercle et qui étant prolongée ne la coupe pas est dite tangente à ce cercle". Cette conception généralisée à d'autres courbes que le cercle se retrouve chez Apollonius (262-192 av. J.C.) dans sa construction des tangentes aux coniques. On la trouve également chez Archimède (287-212 av J.C.) à propos de la tangente à la spirale. Des considérations d'ordre dynamique sont aussi présentes dans l'oeuvre du géomètre de Syracuse, mais elles ne prennent jamais la place d'une preuve géométrique. Rappelons qu'Archimède définit la spirale comme le lieu d'un point qui parcourt avec une vitesse constante une demi-droite, qui elle -même tourne autour de son origine avec une vitesse angulaire constante. Le principal reproche que l'on peut faire à cette conception est qu'elle ne donne pas de méthode pratique de construction de la tangente à une courbe.

Il faudra attendre le XVII siècle pour qu'apparaisse un changement radical de point de vue. Ce sont les travaux de Képler (1571-1630) et de Galilée (1564-1642) qui en sont la cause : le premier en énonçant ses lois sur les trajectoires elliptiques des planètes et le second en posant les bases de la mécanique, vont orienter les travaux des mathématiciens du début de ce siècle vers l'étude des courbes considérées comme trajectoires d'un point en mouvement. Ainsi Torricelli (1608-1647) et Roberval (1602-1675) vont développer une méthode originale de construction de la tangente reposant sur le principe de la composition des mouvements , principe qui avait été clarifié par Galilée (voir à ce sujet le texte de Roberval en annexe).

Appliquant cette méthode cinématique, Torricelli détermine la tangente à une parabole de degré entier quelconque (terminologie de l'époque pour les courbes d'équation $y = x^n$, n entier naturel) et Roberval la tangente à la cycloïde. Dans cette conception de la tangente il y a l'idée de direction instantanée et donc implicitement celle de limite. Elle est d'une remarquable efficacité mais n'est pas applicable à toutes les courbes.

Toujours en ce début du XVII siècle et parallèlement aux travaux précédents, de nombreuses autres méthodes vont éclore. Il s'agit dans la plupart des cas d'un calcul opérant sur l'équation de la courbe. Rappelons que l'on doit à Descartes (1596-1650) la possibilité de décrire certaines courbes, qu'il nomme géométriques, par une équation algébrique $P(x,y) = 0$. Ces méthodes utilisent des quantités infiniment petites ; la tangente y apparaît parfois comme position limite d'une sécante (ainsi dans le calcul par Fermat en 1629 de la tangente à la parabole), parfois comme la droite se confondant avec une partie indéfiniment petite de la courbe (cf le texte de Barrow en annexe). Ce sont ces méthodes de calcul de la tangente, plus générales que les précédentes et proches de nos conceptions actuelles, qui donneront naissance au calcul différentiel lorsque Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716) en auront fait une synthèse.

Un sondage révélateur

Afin de mieux cerner les difficultés de nos élèves et les carences de notre enseignement nous avons effectué en septembre 1991 un sondage auprès des classes de Terminales scientifiques du lycée Clémenceau de Reims. 127 élèves de section C et 99 élèves de section D ont ainsi été interrogés. Notre objectif était d'essayer de dégager les représentations que les élèves s'étaient forgées des notions de limite, dérivée et tangente. Je me limiterai dans cet article aux résultats concernant la tangente. Les voici :

Question :
"Quand dit-on qu'une droite est tangente à une courbe ?"

Réponses les plus fréquentes :	**en TC**	**en TD**
"Lorsqu'elle n'a qu'un point commun avec cette courbe"	57%	31%
"Lorsqu'elle touche la courbe sans la couper"	17%	9%
"Lorsqu'elle a pour équation :$y=f'(a)(x-a)+f(a)$"	9%	4%
"Lorsqu'elle a même direction que la courbe"	6%	3%
"Lorsque son coefficient directeur est égal à la dérivée"	4%	1%
"Lorsque la fonction est dérivable"	5%	0%
"Lorsqu'elle passe par un sommet de la courbe"	2%	2%

Question :
"Y a-t-il un rapport entre la tangente à une courbe et la tangente à un cercle ? Si oui lequel ?"

Réponses :

OUI	66%	en TC	38%	en TD
NON	17%	en TC	32%	en TD
S O	16%	en TC	39%	en TD

Ces résultats appellent quelques commentaires. L'image de la tangente que se font les élèves reste celle de la tangente au cercle ; on peut la rapprocher de la définition d'Euclide. Elle est peu modifiée par l'introduction du calcul différentiel en classe de première. Ce n'est qu'une demi-surprise si l'on se réfère aux recherches effectuées sur l'apprentissage des mathématiques qui ont montré qu'un concept nouveau, lorsqu'il est introduit, ne prend pas la place de l'ancien, mais se superpose plutôt à lui ; les deux pouvant coexister dans la pensée de l'élève pendant un temps relativement long. Cependant le très faible score des réponses classées à la troisième et à la cinquième place donne à réfléchir. En ce qui concerne la deuxième question le lien avec la tangente à un cercle, lorsqu'il est perçu, est justifié géométriquement (un seul point d'intersection), exceptionnellement en considérant le cercle comme la courbe représentative d'une fonction particulière. Ajoutons pour finir que l'analyse d'autres réponses (non reportées ici) portant sur des représentations graphiques a montré que la capacité de tracer une tangente "à vue d' oeil" n'est pas développée chez les élèves. L'utilisation des tangentes pour donner l'allure d'une courbe, qui en est de fait l'enveloppe, a disparu avec l'arrivée des calculatrices.

Présentation des textes

Au vu du sondage précédent j'envisageai d'essayer une autre démarche pour introduire le calcul différentiel dans ma classe. Plutôt que de définir le nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement, puis d'interpréter graphiquement cette définition en terme de tangente, je décidai de commencer par un travail sur la notion de tangente pour introduire ensuite le nombre dérivé comme coefficient directeur de celle-ci. Parmi la douzaine de textes anciens à ma disposition, deux me parurent cadrer avec les objectifs d'enseignement que je m'étais fixés, tout en restant accessibles à des élèves. Le premier de Roberval traite de la tangente à la cycloïde, le second de Barrow donne une méthode générale de calcul de la tangente (ils se trouvent en annexe du présent article). Je vais les resituer rapidement dans l'oeuvre de ces mathématiciens.

Né en 1602 à Roberval près de Senlis, Gilles Personne fut professeur au Collège Royal à Paris de 1634 jusqu'à sa mort en 1675. Il ne publia que deux ouvrages de son vivant, un traité de statique en 1636 et un d'astronomie en 1644. Par contre il transmit à l'Académie des Sciences, dont il fut membre dès sa création en 1666, de nombreuses notes portant sur la cycloïde, la composition des mouvements, les quadratures par la méthode des indivisibles, la recherche des centres de gravité. Le texte présenté ici est extrait du traité des indivisibles qui fut édité pour la première fois dans les mémoires de l'Académie des Sciences de 1693.

Isaac Barrow naquit à Londres en 1630. Il occupa la chaire de géométrie au Trinity Collège de Cambridge à partir de 1660. Il y dicta ses Lectiones Geometricae (dix livres) ainsi que ses Lectiones Opticae imprimées en 1670. Il céda sa place à un de ses étudiants promis à un bel avenir, Isaac Newton, et mourut en 1678. Les Lectiones Geometricae sont un véritable traité de "calcul différentiel" avant la lettre ; on y trouve par exemple la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, la dérivation comme inverse de l'intégration. Ces leçons sont écrites dans le plus pur langage géométrique, excepté en fait la lecture X que nous en avons extraite.(*)

(*) *Ce passage est une traduction libre du latin par* J.C. PENIN de l'IREM de Reims.

Une expérimentation en première scientifique

Revenons maintenant au travail effectué avec les élèves. L'étude historique avait fait apparaître trois visions différentes de la tangente, j'élaborai une séquence autour de chacune d'elles.

La première n'avait pas de caractère historique, elle consistait à faire construire plusieurs tangentes à la parabole d'équation $y=x^2$ par recherche de sécantes ayant un point d'intersection unique. Son objectif était de manipuler la vision "euclidienne" de la tangente, la seule connue des élèves à ce moment, et d'en indiquer les limites. Suite à une question de ma part, les élèves se sont accordés pour dire que, des deux propriétés de la tangente à un cercle, droite ayant un seul point d'intersection ou droite perpendiculaire au rayon, seule la première s'étendait facilement à la parabole. Cette séquence permit aux élèves, après qu'ils eussent résolu quelques exemples, de conjecturer et de démontrer la valeur du coefficient directeur de la tangente de la courbe étudiée au point d'abscisse a. Dans la synthèse qui suivit, j'insistai sur le fait que cette méthode leur avait été accessible parce qu'elle ne mettait en jeu que des équations du second degré et que par conséquent on ne pourrait pas l'appliquer à toutes les courbes. J'en profitai également pour illustrer la notion d'enveloppe à l'aide d'un transparent montrant les tangentes tracées sans la parabole.

La deuxième séquence était bâtie autour du texte de Roberval. Elle devait donner aux élèves une vision cinématique de la tangente (droite donnant la "direction future" de la trajectoire) à travers un exemple de courbe définie autrement que par son équation cartésienne. Le texte fut présenté et commenté en classe. A mon étonnement certains élèves avaient une première connaissance de la cycloïde (c'est une courbe formée d'arceaux, dirent-ils), mais le principe de sa génération dut être expliqué en détail. Le fait que le vecteur vitesse soit porté par la tangente était connu des élèves (ou admis facilement). Par contre la composition des mouvements ne l'était pas et nécessita donc des commentaires fournis. Ceci mis à part la lecture du texte ne posa pas de gros problèmes. Les élèves devaient approfondir ce travail chez eux en refaisant la construction de la roulette et de ses tangentes et en reconnaissant la courbe qui l'accompagne.

La troisième séquence construite autour du texte de Barrow était la plus ambitieuse. Elle devait amener la vision "différentielle" de la tangente (correspondant à l'approximation affine de la fonction), introduire la définition de la différentiabilité en un point, et donner la dérivée de trois fonctions usuelles : cube, racine carrée, inverse. Avant de distribuer le texte je présentai un transparent mettant en évidence comment une courbe finit par se confondre avec sa tangente lorsque l'on effectue des zooms successifs autour du point de contact (j'avais choisi comme exemple la parabole étudiée lors de la première séquence). La lecture du texte ne causa pas de gros soucis aux élèves, j'avais pris soin de remplacer les exemples originaux par celui plus simple de la courbe définie par $MP=AP^2$ et dont le résultat pouvait être recoupé avec les travaux précédents. Le travail demandé aux élèves était de justifier les trois règles de la méthode et de l'appliquer aux courbes définies par : $MP=AP^3$; $MP^2=AP$; $MP\times AP=1$.

Eu égard aux productions des élèves, le bilan de ces trois séquences m'est apparu positif. Les textes avaient suscité l'intérêt. Les méthodes de Roberval et de Barrow avaient été comprises par une majorité d'élèves. Lorsque, par la suite, je donnai la définition de la dérivabilité en un point par l'existence d'un développement limité d'ordre un, il me sembla que les élèves éprouvaient moins de difficultés. Ils savaient mieux "lire" cette définition, y reconnaître le nombre dérivé, les termes négligeables, voire même l'équation de la tangente dans le cas d'une étude en zéro. Autre avantage, le lien entre sens de variation d'une fonction et signe de sa dérivée avait pu être mis en évidence dès la première séquence.

Pour conclure

L'élaboration de certains concepts mathématiques a demandé plusieurs siècles et a été marqué par bien des détours, des polémiques, des erreurs avant qu'une définition "rigoureuse" ne remplace l'intuition première. Je ne pense pas seulement au calcul infinitésimal, mais aussi à la notion de fonction ou à celle de nombre complexe par exemple. Montrer aux élèves une partie du chemin parcouru leur permet d'avoir une vision plus riche du concept. Mais ce n'est pas la seule motivation qui me pousse à parler d'histoire des mathématiques en classe. L'autre est de donner une image plus vivante de ma discipline, différente de celle d'un catalogue de lois révélées, en espérant ainsi développer la curiosité des élèves.

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

NOus poſons que le diamétre AB du cercle AEFGB ſe meut parallelement à ſoy-méme, comme s'il étoit emporté par quelqu'autre corps, juſques à ce qu'il ſoit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamétre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamétre, enſorte que quand le diamétre eſt en CD, le point A eſt venu en B, & la ligne AC ſe trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette courſe du diamétre ſe diviſe en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle ſe diviſe auſſi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamétre, comme il a été dit. En aprés je conſidére le chemin qu'à fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un diamétre en avant, l'autre du ſien propre dans la circonférence. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il eſt venu en E il eſt élevé au-deſſus de ſon premier lieu duquel il eſt parti; cette hauteur ſe marque tirant du point E au diamétre AB un ſinus E1, & le ſinus Verſe A1 eſt la hauteur dudit A quand il eſt venu en E. De méme quand il eſt venu en F, du point F ſur AB je tire le ſinus F2, & A2 ſera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le ſinus G3, le ſinus Verſe A3 ſera la hauteur de A quand il eſt parvenu en G; & faiſant ainſi de tous les lieux de la circonférence que

PROBLEME I.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mémes mélez.

Mais nous ſuppoſons qu'on nous en donne aſſez de proprietez ſpécifiques, qui nous faſſent connoître les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point-là.

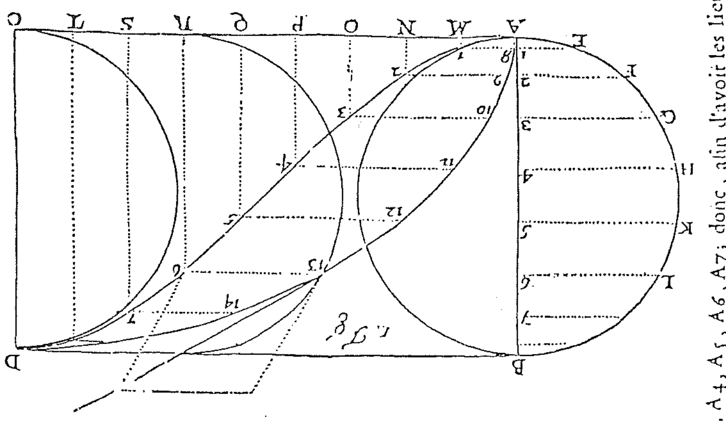
Le principe eſt aſſez intelligible, & on l'accordera facilement dés qu'on l'aura conſideré avec un peu d'attention.

Regle générale.

PAR les proprietez ſpécifiques de la ligne courbe (qui vous ſeront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens compoſez en un ſeul, tirez la ligne de direction du mouvement compoſé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonſtration eſt mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle eſt trés-générale, & qu'elle peut ſervir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne ſera point à propos de la répéter.

parcourt A, je trouve toutes ses hauteurs & élevemens pardessus l'extrémité du diamétre A, qui sont A1, A2,



A3, A4, A5, A6, A7; donc, afin d'avoir les lieux par où passe ledit point A, sçavoir la ligne qu'il forme pen-

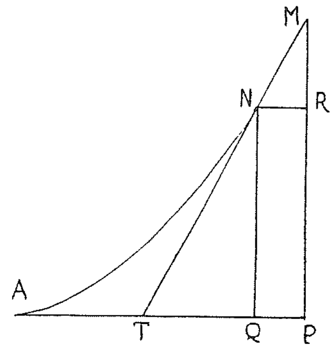
dant ses deux mouvemens, je porte toutes ses hauteurs sur chacun des diamétres M, N, O, P, Q, R, S, T, & je trouve que M1, N2, O3, P4, Q5, R6, S7 sont les mêmes que celles qui sont prises sur AB. Puis je prends les mêmes sinus E1, F2, G3, &c. & je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diamétre, & je les tire vers le cercle, & des extrémitez de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D. ...

Pour trouver la tangente de la figure en un point donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui passeroit par ledit point, car chaque point de cercle se meut selon la touchante de ce cercle. Je considére ensuite le mouvement que nous avons donné à notre point emporté par le diamétre marchant parallelement à soy-même. Tirant du même point la ligne de ce mouvement, si je paracheve le parallelogramme (qui doit toûjours avoir les quatre côtez égaux lorsque le chemin du point A par la circonférence est égal au chemin du diamétre AB par la ligne AC) & si du même point je tire la diagonale, j'ai la touchante de la figure qui a eû ces deux mouvemens pour sa composition, sçavoir le circulaire & le direct. Voilà comme on procéde en telles opérations quand on pose les mouvemens égaux. Que si on les avoit posez en quelqu'autre raison, comme si lorsque l'un parcourt dans un temps l'espace d'un pied, l'autre parcouroit dans le même temps l'espace d'un pied & demi, ou en autre raison, il faudroit tirer les conséquences suivant ladite raison.

ISAAC BARROW (1630-1677)

Lecture X

Ainsi nous nous sommes acquittés de la première partie de notre exposé. En complément, sous forme d'un appendice nous ajouterons une méthode que nous utilisons du calcul des tangentes. Toutefois je ne sais pas , après tant de méthodes déjà connues et rejetées, si on peut faire quelque chose de l'emploi de celle-ci. Encore fais-je ceci sur les conseils d'un ami; d'autant plus volontiers que ce que j'ai traité devant les autres parait fructueux et général. Je procède de cette façon.

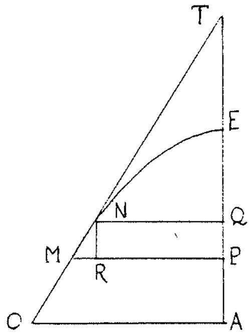


Soient AP, PM deux lignes droites données en position (telles que PM coupe la courbe proposée en M) & MT supposée toucher la courbe en M. et couper la droite AP en T, comme je cherche maintenant la quantité PT de la même droite, je pose l'arc de courbe MN indéfiniment petit; alors je trace les droites, NQ parallèles à MP, & NR à AP; je nomme MP = m ; PT = t ; MR = a ; NR = e ; quant aux restes des droites, déterminées par la nature particulière de la courbe et utiles à la proposition, je les désigne par leur nom ; je compare par le calcul au moyen de l'*Equation* considérée MR, NR elles mêmes (& par le moyen de celles-ci MP, PT) ; en observant simultanément ces règles.

1. Parmi ce qui est calculé je jette tous les termes dans lesquels *a* ou bien *e* sont des puissances d'eux-mêmes, ou bien dans lesquels ils sont multipliés entre-eux (en effet ces termes ne valent rien).
2. Après avoir établi l'égalité, je jette tous les termes dont les lettres désignent des quantités constantes ou bien fixées; ou bien dans lesquels on n'a pas *a* ou *e* (en effet ces termes amenés dans une des parties de l'égalité seront toujours rendus egaux à rien.
3. Je substitue à la place de *a*, *m* lui-même ; (ou bien MP) à la place de *e*, *t* lui-même (ou bien PT). De là on trouvera précisement les valeurs de PT elles-mêmes.

Parce que si une partie indéfiniment petite d'une courbe quelconque entre dans le calcul ; on poura substituer à cet endroit une petite partie de tangente ; ou bien (à cause de l'infini ténuité de l'arc de courbe) n'importe quelle droite équipollente à celle-ci.

Exemple I

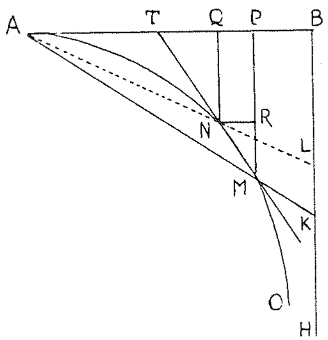


Soit la droite EA (donnée en position et grandeur) & la courbe EMO dont la propriété est de telle sorte que la droite MP étant tracée de manière quelconque elle soit perpendiculaire à EA, la *somme des cubes* de AP, & MP étant égale à la droite AE au *cube*.

Supposons nommé $AE = r$; $AP = f$; de là $AQ = f + e$; & AQ cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (ou bien après avoir rejetté ce qui est superflu, selon ce qui est prescrit) $= f^3 + 3ffe$. Ainsi NQ cub $=$ cub.$m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (C'est à dire) $m^3 - 3mma$. C'est pourquoi on a $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (AQ cub. + NQ cub. $=$ AE cub.$=$) r^3. et ayant rejetté les données, $3ffe - 3mma = 0$. ou bien $ffe = mma$; et substituant au lieu de a, & e, m et t eux-mêmes, il viendra $fft = m^3$; ou si on veut $t = \frac{m^3}{ff}$; donc PT est la quatrième proportionnelle en raison continue de AP et PM.

Semblablement, si on avait $APqq + MPqq = AEqq$ il serait trouvé que $PT = \frac{m^4}{f3}$; ou que PM est la quatrième proportionnelle en raison de AP et PM; d'un autre côté je ne sais pas si ces lignes *Cycloformes* sont dignes d'études.

Exemple II



Supposons que l'angle ABH soit droit, & soit la courbe AMO, telle que ayant conduit par A de quelque manière que ce soit la droite AK, qui coupe la droite BH en K & la courbe AMO en M, on suppose que la sous-tendante AM est égale à l'abscisse BK, il est demandé de tracer la touchante en M à cette courbe.

Il faut faire tout ce que a été prescrit ci-dessus, & (ayant tracé ANL) on nomme $AB = r$; $AP = q$; de là $AQ = q - e$; de même $QN = m - a$. donc $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma =$ ($AQq + QNq = ANq =$) BLq ; c'est (en rejetant, comme il a été enseigné ; ce qui est à rejeter) $qq - 2qe + mm - 2ma = BLq$. De plus $AQ:QN :: AB:BL$;

c'est à dire $q - e : m - a :: r : BL = \frac{rm + ra}{q + e}$

aussi $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe} = BLq$; ou bien (ayant rejeté ce qui est superflu) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} = BLq = qq - 2qe + mm - 2ma$. ou bien $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3 + 4qqee - 2qmme + 4qmae$; c'est à dire ayant rejeté ce que nous avons prescrit de rejeter) $-2rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$ ou bien $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$; ou en substituant m à la place de a, & t à la place de e, il vient $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; ou

$\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT.$

Sources :

BARROW I. : *Lectiones Geometricae*, 1670.

ROBERVAL G. Personne de : *Traité des Indivisibles*, 1693.

CHILD J.M. : *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, 1916.

KLINE M. : *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 1972.

DAHAN-DALMEDICO A. & PEIFFER J. : *Routes et Dédales*, 1982.

COMMISSION INTER-IREM
HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

ALGORITHMES, CALCULATRICES ET INFINI

Actes du 9ème colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

Une Approche de l'irrationnalité : Algorithme d'Euclide et fractions continues

Denis Daumas
IREM de Toulouse

"*Commensurable*", "*incommensurable*" : au coeur de ces notions il y a la mesure. L'acte de mesurer, de compter les "*mesures*", remonte vraisemblablement aux premiers échanges commerciaux. On connaît l'importance des comptes dans les premiers écrits des civilisations mésopotamiennes dès le milieu du IVème millénaire avant notre ère :

"Dans les deux sociétés [sud de la mésopotamie et région de Suse, en Iran] le support matériel est l'argile, pratiquement indestructible, et les premiers documents sont des comptes. C'est donc le besoin de mesurer, diviser et répartir la puissance matérielle de leurs sociétés qui a donné naissance aux premiers systèmes d'écritures."[1] On connaît également le soin des scribes à tenir compte de tout..

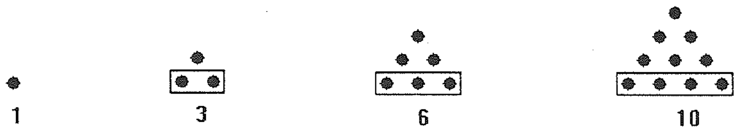
Coudée de MOYA (ou MAYA), attestée sous TOUTANKHAMON, environ 1350 avant J.-C. Musée du Louvre, PARIS.

[1] James RITTER *"Chacun sa vérité : les mathématiques en Egypte et en Mésopotamie"* in *ELEMENTS D'HISTOIRE DES SCIENCES* - BORDAS 1989 - p. 41.

I - NOMBRES, GRANDEURS et MESURE DANS LES MATHEMATIQUES GRECQUES.

Chez les grecs, nombres et mesure sont étroitement liés. Mais le nombre a un double aspect :

- Ontologique : le nombre et par essence composé d'unités, l'unité étant un principe irréductible. Ainsi, pour les Pythagoriciens, les nombres sont associés à des formes (triangles, carrés, ...) et représentés par une multiplicité discontinue d'unités-points :



Nombres triangulaires

Plus fondamentalement, la philosophie des Pythagoriciens prend cette unité comme principe, les nombres organisant le Monde.

- opératoire, avec comme fonction de compter. Mais pour compter il faut décider d'une unité de compte et pour mesurer il faut une unité de mesure. C'est à cette conception du nombre que se rattachent cette citation d'*Aristote* et les premières définitions du livre VII des ELEMENTS D'EUCLIDE, consacré à l'arithmétique :

"L'unité est ce suivant quoi chacune des choses existantes est dite une.

Le nombre est une multitude composée d'unités.

Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsqu'il mesure le plus grand".[2]

---

[2] EUCLIDE, *Eléments*, livre VII def. 1 à 3, traduit par Jean ITARD - HERMANN, Paris, 1961, page 83.

"L'Un n'a d'autre caractère que d'être mesure de quelque multiplicité, et le Nombre, d'être une multiplicité mesurée et une multiplicité de mesures. Aussi est-ce avec raison que l'Un n'est pas considéré comme un nombre, car l'unité de mesure n'est pas une pluralité de mesures."[3]

On peut penser que pour les Pythagoriciens et les premiers mathématiciens grecs, les rapports de grandeurs géométriques devaient pouvoir s'exprimer sous la forme de rapports de nombres, à l'image des segments de corde de la lyre dont les rapports correspondent aux harmonies musicales. Mais pour pouvoir associer rapport de grandeurs et rapports de nombres, il faut trouver une mesure commune à ces grandeurs. Comment ? Une piste nous est fournies dans les ELEMENTS D'EUCLIDE par cet algorithme célèbre, parfois nommé aujourd'hui anthyphérèse ou soustractions alternées :

"Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant continuellement retranché tour à tour du plus grand. si le nombre qui reste ne mesure jamais celui qui le précède avant qu'il ne reste l'unité les nombres originaires sont premiers entre eux."[4]

Il est possible qu'un reste autre que 1 mesure le précédent. La proposition 2 montre que ce reste est alors le plus grand commun diviseur des deux nombres (qui ne sont pas premiers entre eux).

Pour illustrer comment fonctionne cet algorithme, nous allons l'appliquer aux nombres 71 755 875 et 61 735 500 (ils se trouvent dans un traité d'astronomie d'*Aristarque De Samos* - env. -300- qui remplace, sans donner d'explication, leur rapport par le rapport de 43 à 37)

1ère soustraction	71 755 875	-	61 735 500	=	10 020 375
2ème soustraction	61 735 500	-	6. 10 020 375	=	1 613 250
3ème soustraction	10 020 375	-	6. 1 613 250	=	340 875

---

[3] ARISTOTE, Métaphysique N I 1088a. traduction J. TRICOT - VRIN Paris, 1986, page 802.

[4] EUCLIDE, *Eléments*, traduit par Jean ITARD - *LES LIVRES ARITHMÉTIQUES D'EUCLIDE* - Hermann, Paris, 1961, livre VII, proposition 1, page 84.

Si nous considérons le reste 340 875 comme négligeable, nous avons

$$10\ 020\ 375 \approx 6.\ 1\ 613\ 250 \quad \text{puis}$$

$$61735\ 500 \approx 6.\ 6.\ 1\ 613\ 250 + 1\ 613\ 250 = 37.\ 1\ 613\ 250 \quad \text{et,}$$

$$71\ 755\ 875 \approx 37\ .\ 1\ 613\ 250 + 6\ .\ 1\ 613\ 250 = 43\ .\ 1\ 613\ 250$$

$$\text{d'où} \quad \frac{71\ 755\ 875}{61\ 735\ 500} \approx \frac{43}{37}$$

Plus anachroniquement encore, nous pouvons présenter l'algorithme ainsi :

$$\frac{71\ 755\ 875}{61\ 735\ 500} = 1 + \frac{10\ 020\ 375}{61\ 735\ 500} = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1\ 613\ 250}{10\ 020\ 375}} = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{340\ 875}{1\ 613\ 250}}}$$

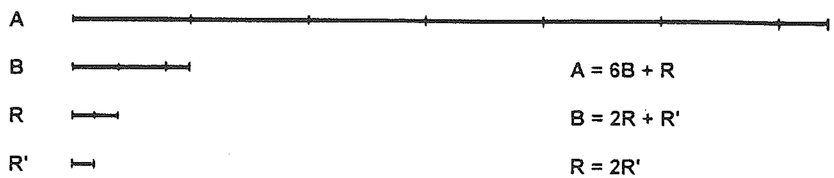
$$1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6}}, \text{ que l'on peut noter } 1 + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|6}.$$

Cette fraction que l'on nomme depuis le XVIIème siècle "fraction continue" est égale à $\frac{43}{37}$.

On pourra vérifier, en poursuivant l'algorithme que :

$$\frac{71\ 755\ 875}{61\ 735\ 500} = 1 + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6}$$

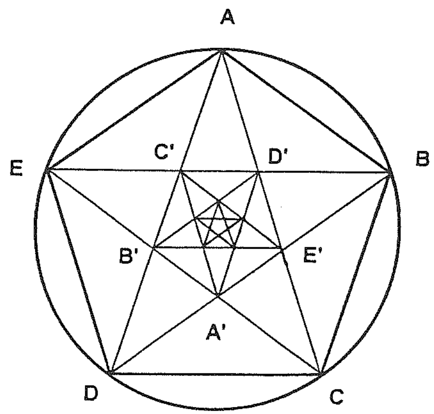
Revenons maintenant aux grandeurs géométriques. On peut retrancher des segments à des segments, des surfaces à des surfaces .... et par conséquent utiliser le même algorithme qui pourra fournir comme dans l'exemple qui suit une commune mesure à deux segments :



R' mesure à la fois A et B (B = 5 R' et A = 32 R').

A et B sont commensurables et on peut affirmer à la manière de la proposition 5 du livre X des ELEMENTS : "Les grandeurs commensurables ont entre elles la raison qu'un nombre a avec un nombre" (Peyrard p. 263) - que A a avec B, la raison que 32 a avec 5 -

Autre problème : Y-a-t'il une commune mesure entre la diagonale et le côté d'un pentagone régulier ?



Procédons à nouveau par anthyphérèse :

AC - AB = AC - AE' = E'C ,

AB - E'C = CD' - E'C = D'E'.

Mais E'C = CA' = A'D' : les restes successifs sont donc respectivement la diagonale et le côté du pentagone A'B'C'D'E'. On est ramené au point de départ, c'est à dire à la recherche d'une commune mesure entre la diagonale et le côté d'un pentagone. A la différence des nombres , les grandeurs géométriques sont continues, c'est à dire divisibles à l'infini et dans notre cas l'anthyphérèse est sans fin.

La fraction continue associée au rapport de la diagonale et du côté d'un pentagone régulier est donc infinie : $1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots$

Les deux premières propositions du livre X des ELEMENTS, livre consacré à l'étude des grandeurs irrationnelles sont les suivantes :

PROPOSITION I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

PROPOSITION II.

Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables.[5]

La première utilise le principe qu'il est toujours possible de partager une grandeur en deux pour obtenir par retranchements successifs un reste plus petit qu'une grandeur donnée (aussi peite soit-elle, pourrait-on ajouter). Il est donc possible qu'une anthyphérèse soit sans fin, et la proposition 2 montre précisément que dans ce cas les deux grandeurs considérées sont incommensurables. La diagonale et le côté d'un pentagone régulier sont donc incommensurables.

Pourtant nous n'avons pas connaissance de document de l'antiquité Grecque ou l'incommensurabilité de deux grandeurs soit prouvée par anthyphérèse. Si l'on en croit Aristote, l'archétype de démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré relève de l'arithmétique et non de la géométrie :

"On prouve, par exemple l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable ; on tire alors la conclusion que les nombres impairs deviennent égaux aux nombres pairs, et on prouve hypothétiquement l'incommensurabilité de la diagonale par ce qu'une conclusion fausse découle de la proposition contradictoire." [6]

La plupart des auteurs s'accordent pour faire remonter au Pythagoriciens du Vème siècle avant notre ère la première preuve d'incommensurabilité. Le peu que nous avons dit de la philosophie pythagoricienne suffit pour imaginer la crise qu'une telle découverte a pu provoquer dans leur système de pensée. Pour les mathématiques, l'existence de grandeurs incommensurables lance un défi : si on ne peut pas ramener tous les rapports de grandeurs géométriques à des rapports de nombres (entiers), il faut rebâtir l'édifice et en premier lieu

[5] EUCLIDE, *Eléments*, traduit par PEYRARD, BLANCHARD, Paris, 1966, pages 258-259.

[6] ARISTOTE, *Premiers analytiques*, I.23 41a. Traduction J. TRICOT, p. 121-122, VRIN, 1983.

trouver une définition pour la proportionnalité des grandeurs géométriques.

II - COMMENT CARACTERISE LA PROPORTIONNALITE DES GRANDEURS ? D'EUDOXE DE CNIDE A OMAR AL KHAYYAM.

Nous allons observer deux types de réponse qui correspondent à des approches radicalement différentes.

La première, que l'on attribue généralement à EUDOXE DE CNIDE (env. 406-355), consiste à détacher complètement la théorie des rapports de grandeurs géométriques de l'arithmétique. C'est elle qui est reprise au livre V des ELEMENTS D'EUCLIDE. La séparation est telle qu'au livre VII qui traite des nombres, toutes les propriétés des proportions sont redémontrées, sans aucune référence aux propriétés analogues obtenues au livre V pour les grandeurs. Observons les définitions de la proportionalité des grandeurs (livre V définition 6) et de celle des nombres (livre VII définition 21) :

textes	interprétation
"Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles." [7]	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lorsque, quels que soient les naturels non nuls m et n : $ma > nb$ et $mc > nd$ (1) ou $ma = nb$ et $mc = nd$ (2) ou $ma < nb$ et $mc < nd$ (3) Notons que le relation (2) n'est possible que lorsque a et b d'une part, c et d d'autre part, sont commensurable.

[7] EUCLIDE, livre V, déf 6-7, traduction PEYRARD, opus cité page 113.

"Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième."[8]

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lorsque :

il existe un naturel n tel que

$a = nb$ et $c = nd$

ou

il existe un naturel n tel que

$na = b$ et $nc = d$

ou

il existe deux naturels n et p tels que

$pa = nb$ et $pc = nd$

Il semble qu'il y ait eu, antérieurement aux ELEMENTS d'EUCLIDE, une autre école, utilisant l'anthyphérèse pour fonder l'égalité des raisons (des grandeurs comme des nombres). ARISTOTE s'en fait l'écho, notamment dans ce passage :

Il semble aussi en mathématiques que la difficulté de certaines preuves sur les figures soit liée au manque de définition ; par exemple s'il s'agit d'établir que la ligne qui coupe le parallélogramme parallèlement à son côté divise la ligne et l'aire dans la même raison ; mais, dès qu'on s'est accordé sur la définition, la proposition est évidente ; car les aires subissent le même retranchement alterné que les lignes ; et c'est bien cela la définition de ***la même raison****.*[9]

Commençons par un exemple numérique : comparons les rapports de 48 à 18 et 56 à 21,

$48 = 18 \times 2 + 12$	$56 = 21 \times 2 + 14$
$18 = 12 \times 1 + 6$	$21 = 14 \times 1 + 7$
$12 = 6 \times 2$	$14 = 7 \times 2$

On peut retrancher autant de fois 18 de 48 que 21 de 56, autant de fois 12 de 18 que 14 de 21 ...., les "retranchements alternés sont les

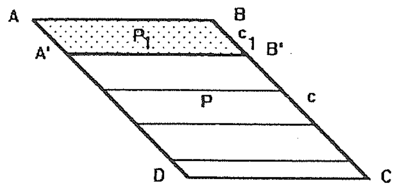
[8] EUCLIDE, *Eléments*, livre VII, déf 21 - Traduction ITARD - Hermann, Paris 1961, page 84.

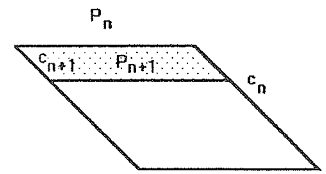
[9] ARISTOTE - TOPIQUES 158b 29-35, traduction JL GARDIES in *L'héritage épistémologique d'EUDOXE DE CNIDE*, VRIN, Paris, 1988 p. 21.

mêmes et on peut conclure : 48/18 = 56/21 (ou encore, 48/18 et 56/21 ont le même développement en fraction continue : $2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2}$).

Mais lorsqu'il s'agit de comparer des rapports de grandeurs, nous avons vu que l'anthyphérèse peut être sans fin (grandeurs incommensurables). Ne pouvant réaliser en acte l'infinité de soustractions, comment peut-on affirmer que les grandeurs subissent le même retranchement alterné ?

Reprenons l'exemple évoqué par ARISTOTE :





La ligne A'B', parallèle à AB découpe le segment BC en c et c_1, le parallèlogramme ABCD en deux parallélogramme P et P_1. Il s'agit de montrer que $P/P_1 = c/c_1$. Si l'on peut retrancher exactement trois fois le côté c_1 de c, on pourra retrancher exactement trois fois P_1 de P. Il reste un parallélogramme P_2 de côté c_2, il faut retrancher maintenant c_2 de c_1 et P_2 de P_1. En général, après n soustractions, il reste un parallèlogramme P_{n+1} de côté c_{n+1}. Retrancher ce parallèlogramme de P_n, de côté c_n laisse un parallélogramme de côté $c_n - c_{n+1}$ Par conséquent, "les aires subissent le même retranchement que les lignes" se vérifie pour un moment quelconque (fini !) de l'anthyphérèse, et on peut conclure l'égalité des rapports.

Omar AL KHAYYAM (1048-1123), dans ses "Commentaires des difficultés se trouvant dans les introductions du livre d'Euclide" (1077), reprend la définition par anthyphérèse de l'égalité des rapports. (voir le texe en annexe n° 1). Il procède en deux temps :

- lorsque le rapport est "numérique", c'est à dire dans le cas où les grandeurs de chaque rapport sont commensurables, il traite l'égalité des rapports comme EUCLIDE traite l'égalité des rapports de nombres et reprend presque mot pour mot la définition 21 du livre VII des Eléments.

- pour les rapports du "type géométrique", c'est à dire lorsque les critères précédents sont inopérants (grandeurs incommensurables), Omar AL KHAYYAM met en oeuvre l'algorithme d'EUCLIDE : l'égalité des rapports est acquise lorsque tous les quotients partiels de même rang sont égaux (nous pouvons dire aujourd'hui lorsque les développements en fraction continue sont identiques).

Le fossé introduit par EUDOXE entre la théorie des grandeurs géométriques et celle des nombres n'est guère satisfaisant pour les algébristes qui commencent à l'époque d'Omar AL KHAYYAM à travailler aussi bien avec des entiers qu'avec leurs rapports (rationnels) ou des rapports de grandeurs incommensurables (quantités irrationnelles). Cette préoccupation conduit Omar AL KHAYYAM à englober toutes ces quantités dans un domaine numérique plus vaste. Il introduit en effet, pour exprimer le rapport de deux grandeurs A et B, une nouvelle grandeur G conçue "*non comme une ligne, une surface, un corps ou un temps, mais comme une grandeur que l'esprit abstrait de tout et qui appartient aux nombres, mais non aux nombres absolus et véritables, car le rapport de A à B peut souvent ne pas être mesurable numériquement, c'est à dire qu'on ne pourra pas trouver deux nombres dont le rapport soit égal à ce rapport*"[10].

Les mathématiciens vont s'accoutumer peu à peu à traiter les grandeurs, rationnelles ou pas, comme des nombres, y adjoignant pour les commodités de l'algèbre les négatifs ou les imaginaires. Mais ce n'est qu'à la fin du XIXème siècle, avec notamment les travaux de DEDEKIND qui sera fondé à partir de l'arithmétique l'ensemble des nombres réels.

Au XVIIème siècle l'algorithme d'EUCLIDE reprend vigueur avec les débuts de la théorie des fractions continues. On peut citer HUYGENS (1629-1695) qui les utilise pour construire des automates, Lord BROUNKER (1620-1684), homme politique britannique féru des mathématiques qui donne $\frac{\pi}{4} = \frac{1|}{|1} + \frac{1^2|}{|2} + \frac{3^2|}{|2} + \frac{5^2|}{|2} + \dots$

Mais ce sont surtout EULER (1707-1783) et LAGRANGE (1736-1813) qui vont développer considérablement la théorie des fractions continue.

[10] in YOUSCHKEVITCH, "*Les Mathématiques Arabes*", VRIN Paris, 1976, p 88.

III - EULER : "DE FRACTIONIBUS CONTINUIS DISSERTATIO".

Cet ouvrage, publié en 1737, est le premier traité sur les fractions continues. EULER s'y consacre autant à des généralités sur le sujet qu'à développer en fraction continue un certain nombre d'irrationnels, et en particulier e et ses puissances.

EULER appelle "*fraction continue*" toute expression de la forme :

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d} + \dots}}$$

ou a, b, c, d,..., α, β, γ,... sont des entiers. Il écrit ensuite les fractions successives (que nous appelons "*réduites*") :

a , $a + \frac{\alpha}{b}$, $a + \cfrac{a}{b + \frac{\beta}{c}}$, ... ce qui, affirme-t-il "*permet d'approcher d'aussi près que l'on veut de la vraie valeur de la fraction continue*" (p 190)

Laissons de côté ce type de fractions continues (qu'on appelle aujourd'hui "*fractions continues généralisées*") et abordons, avec EULER, celles pour lesquelles $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \dots = 1$. Il montre que l'on peut développer tout rapport en fraction continue en utilisant l'algorithme d'EUCLIDE, puis retrouve les résultats du livre X : la fraction est finie lorsque le rapport est rationnel, infinie lorsqu'il est irrationnel (ou transcendant, ajoute EULER).

Un résultat important est une relation de récurrence concernant les numérateurs et les dénominateurs des réduites successives :

notons la fraction continue $a_1 + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \dots$ et posons

$\frac{P_n}{Q_n} = a_1 + \frac{1|}{|a_2} + \dots + \frac{1|}{|a_n}$, alors, pour tout $n \geq 1$ on a

$P_{n+1} = a_{n+1}P_n + P_{n-1}$ et $Q_{n+1} = a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}$ et, pour premiers termes : $P_o = 1$, $P_1 = a_1$, $Q_o = o$ et $Q_1 = 1$ (EULER écrit en fait que les premières fractions sont $\frac{1}{0}$ et $\frac{a_1}{1}$).

Comme conséquence, EULER note que $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}$, ce qui prouve que les réduites permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut de la "*vraie valeur*" de la fraction continue. On peut ajouter aujourd'hui que $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel x ("*la vraie valeur*"), que les réduites sont des fractions irréductibles et que chacune est la meilleure approximation de x au sens de : toute fraction $\frac{p}{q}$ telle que $0 < q < Q_n$ est plus éloignée de x que $\frac{P_n}{Q}$.

Nous avons pu observer que le rapport de la diagonale au côté d'un pentagone régulier (nombre d'or) a un développement en fraction continue périodique : $= 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots$ on peut vérifier qu'il en est de même pour $\sqrt{2}$ qui donne $1 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \ldots$

EULER démontre que toute fraction continue périodique est racine d'une équation quadratique, c'est à dire d'une équation du second degré à coefficients entiers (voir le texte de la démonstration en annexe n° 2). Il procède par itération, avec des fractions continues dont la période est formée d'un seul nombre, puis de deux, puis de trois :

avec $x = a + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|b} + \ldots$, on a $x - a = \frac{1}{b + (x-a)}$

puis $x^2 - 2ax + bx + a^2 - ab = 1$, équation du second degré dont x est la racine $a - \frac{b}{2} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{4}}$ (a étant la partie entière de x, il faut que le reste soit compris entre 0 et 1) ;

avec $x = a + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \ldots$ on a $x - a = \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c + (x-a)}$

puis $bx^2 + bcx - 2abx = abc - a^2b + c$;

avec $x = a + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \frac{1|}{|d} + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \frac{1|}{|d} + \ldots$

on a $x - a = \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \frac{1|}{|d + (x-a)}$

puis

$(bc+1)x^2 + (bcd+b+d-c-2abc-2a)x$

$- abcd + a^2bc - ab - ad + a^2 - cd + ac - 1 = 0$

EULER considère alors que l'analogie des calculs est suffisamment forte dans ces trois cas pour permettre de conclure en général.

IV - LAGRANGE : "*toute racine d'une équation du second degré se réduit toujours nécessairement en une fraction continue périodique*".

Joseph-Louis LAGRANGE (1736-1813) pense que "la théorie des fractions continues est une des plus utiles de l'arithmétique (...) mais elle est d'un plus grand usage encore dans la solution des problèmes indéterminés lorsqu'on ne demande que des nombres entiers" Il s'agit de la résolution d'équations à coefficents entiers. Se situant explicitement dans la lignée d'EULER il publie ses travaux en 1774 à la suite de la traduction en français de l'Algèbre d'EULER par Jean BERNOUILLI sous le titre "*Additions à l'analyse indéterminée d'Euler*". Avant cette publication il avait déjà présenté à l'Académie de Berlin, en 1769, une démonstration de la réciproque du théorème d'EULER, énoncée dans le titre de ce paragraphe.

Le texte complet se trouve en annexe 3, nous nous contenterons d'en donner ici les principales articulations.

LAGRANGE considère l'équation du second degré

$E_1x^2 - 2\,\varepsilon\, x - E = 0$ où E_1, ε et E sont des entiers tels que

$\varepsilon^2 + EE_1 > 0$. Choisissant une des deux racines : $x = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + EE_1}}{E_1}$,

il la développe en fraction continue $\lambda_1 + \frac{1|}{|\lambda_2} + \frac{1|}{|\lambda_3} + \ldots + \frac{1|}{|\lambda_n} + \ldots$

(la seconde racine s'exprime de la même façon à condition de changer les signes des coefficients de l'équation).

Il s'intéresse ensuite aux fractions continues incomplètes :

$x_n = \lambda_{n+1} + \frac{1|}{|\lambda_{n+2}} + \ldots$, que l'on peut caractériser par $x = \lambda_1 + \frac{1}{x_1}$ et pour tout $n \geq 1$, $x_n = \lambda_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}$. Ces x_n sont solutions d'équations du second degré que LAGRANGE appelle "*transformées*", $E_{n+1}x_n^2 - 2\varepsilon_n\, x_n - E_n = 0$ dont le disciminant est constant (pour rour $n \geq 1$, $\varepsilon_n^2 + E_nE_{n+1} = B$), et dont les coefficients E_n, ε_n, ainsi que les quotients partiels λ_n se calculent successivement à partir de ε , E et E_1 à l'aide des relations :

$\lambda_n = E\,[\frac{\varepsilon_{n-1} + \sqrt{B}}{E_n}]$ où E désigne la partie entière, $\varepsilon_n = \lambda_n E_n - \varepsilon_{n-1}$

et $E_{n+1} = E_{n-1} + 2\varepsilon_{n-1}\,\lambda_n - E_n\lambda_n^2$, avec $n \geq 1$, $E_o = E$ et $\varepsilon_o = \varepsilon$.

Etant donnée la façon dont sont engendrées ces équations, elles ont au moins une racine, x_n, supérieure à 1. LAGRANGE a déjà utilisé des équations transformées selon le même principe (pour obtenir des approximations rationnelles d'une racine positive d'une équation de degré m) et a démontré dans son *"Mémoire sur la résolution des équations numériques"* présenté à l'Académie de Berlin l'année précédente, qu'à partir d'un certain rang les transformées n'ont qu'une racine supérieure à 1 (voir annexe n° 4).

Mais si x_n est la seule racine supérieure à 1 de l'équation

$E_{n+1}x^2 - 2\varepsilon_n\, x - E_n = 0$, sa partie entière λ_{n+1} est comprise entre les deux racines et $E_{n+1}\,\lambda_{n+1}^2 - 2\,\varepsilon_n\lambda_{n+1} - E_n$, qui vaut $-E_{n+2}$ et E_{n+1} sont des signes contraires .

Il existe donc un rang k à partir duquel E_kE_{k+1} est un entier positif inférieur à B (toutes les transformées ont le même discriminant B) : il y a donc un nombre fini de couples (E_k, E_{k+1}), des triplets $(E_k, E_{k+1}, \varepsilon_k)$, et donc d'équations transformées.

On retrouve donc à partir d'un certain rang les mêmes équations, les mêmes racines et les mêmes quotients partiels λ, la fraction continue qui exprime l'une ou l'autre des racines de l'équation de départ est donc périodique à partir d'un certain rang.

Après LAGRANGE, on peut affirmer : un développement en fraction continue est périodique si et seulement si il provient d'un irrationnel quadratique.

ET CE N'EST PAS FINI !

La fécondité des fractions continues, qui avait frappé LAGRANGE, ne s'est pas démentie par la suite. On a pu, par exemple, appliquer la même méthode aux fonctions, et le développement de $\tan x = \frac{x|}{|1} - \frac{x^2|}{|3} - \frac{x^2|}{|5} - \frac{x^2|}{|7} - \ldots$ est au départ de la démonstration de l'irrationnalité de π par LAMBERT (1761), reprise par LEGENDRE (1795) qui soupçonne la transcendance de π. Auparavant, EULER avait obtenu le developpement en fraction continue de e, prouvant par là l'irrationnalité de e :

$$e = 2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|1} + \ldots\ldots$$

Une généralisation des fractions continues est également au départ des démonstrations de transcendance de e (HERMITE 1873) et de π (LINDEMANN 1882). Et nous n'avons cité que des résultats se rattachant à notre sujet, l'irrationnalité.

Signalons pour terminer qu'on ne connaît toujours pas le développement en fraction continue de π. Avis aux amateurs !

BIBLIOGRAPHIE

BREZINSKI Claude : History of Continued Fractions and PADE Approximanti - Springer Verlag 1991.

CAVEING Maurice : la constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque - Lille 1982.

DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne : Pour une histoire des Mathématiques - Point Seuil 1986.

DHOMBRES Jean : Nombre, mesure et continu - Epistémologie et histoire - CEDIC 1978.

DIEUDONNE Jean : Abrègé d'histoire des mathématiques - Hermann 1978.

GARDIES Jean-Louis : l'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide- Vrin 1988.

IREM Groupe Epistémologie et Histoire : Mathématiques au fil des âges. Gauthier-Villars 1987.

JABOEUF François : les fraction continues - IREM Montpellier 1985.

SERFATI Michel : Quadrature du cercle - Fractions continues et autres contes. Fragments d'histoire des mathématiques. APMEP 1992.

SZABO Arpad : Les débuts des mathématiques grecques - VRIN 1977.

YOUSCHKEVITCH : Les mathématiques arabes - VRIN 1976.

Sources des textes cités :

ARISTOTE :

Topiques. Les premiers analytiques. Traduction J. Tricot - VRIN 1983.

Métaphysique. Traduction J. Tricot - Vrin 1986.

EUCLIDE. Livre V et X. Traduction Peyrard - Blanchard 1966.

Livre VII Traduction Jean Itard. Les livres arithmétiques d'Euclide - Hermann 1961.

Omar Al KHAYYAM. Traduction Ahmed Djebbar in *algorithme au fil des âges* (à paraître).

EULERI Léonhardi : Commentationes Analyticae - Teubner 1925.

LAGRANGE Joseph-Louis : Oeuvres - Gauthier-Villars 1868.

Annexe 1

OMAR AL KHAYYAM

Extrait de la Seconde Epître sur l'Evocation de la Proportion, de l'Idée de Proportionalité et de leur (sens) véritable.

Edition A. I. Sabra, Alexandrie, 1961, pp. 44-47. Traduction Ahmed DJebbar.

Les titres ne sont pas dans le texte. Les mots entre parenthèses ont été ajoutés pour faciliter la compréhension.

I - (DEFINITION DE L'EGALITE DE DEUX RAPPORTS)

Etant (donné) quatre grandeurs (telles que) la première soit égale à la seconde et la troisième égale à la quatrième, ou bien (telle que) la première soit une partie de la seconde et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien (telle que) la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est, nécessairement, comme le rapport de la troisième à la quatrième, et ce rapport est numérique.

Si les (grandeurs) ne sont pas selon ces trois formes et que, lorsqu'on retranche de la seconde tous les multiples de la première (contenus dans la seconde) jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la première, et si , de la même manière, lorsqu'on retranche de la quatrième tous les multiples de la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au troisième et qu'alors le nombre de multiples de la première (contenu) dans la seconde est égal au nombre de multiples de la troisième (contenu) dans la quatrième. Et si, après (cela), on retranche (de la première) tous les multiples du résidu de la seconde par rapport à la première, de telle sorte qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la seconde et que, de la même (manière) on retranche (de la troisième) tous les multiples du résidu de la quatrième par rapport à la troisième, jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la quatrième, et qu'alors le nombre des multiples du résidu de la seconde est égal au nombre de multiples du résidu de la quatrième, et si, (après cela) lorsqu'on retranche, de la même (manière) , du résidu de la seconde, tous les multiples du résidu de la troisième, leur nombre est le même ; et si, lorsque de la même (manière), on retranche tous les multiples des résidus successivement les uns des autres, comme nous l'avons montré, le nombre des résidus de la première et de la seconde est égal au nombre des résidus correspondant de la troisième et de la quatrième, (et ce) indéfiniment, alors le rapport de la première à la seconde sera, nécessairement, comme le rapport de la troisième à la quatrième. Et c'est cela le rapport véritable pour le type géométrique (des grandeurs).

Annexe 2

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES ANALYTICAE ad Théoriam serierum infinitarum pertinentes.

Edition Carl BOEHM et Georg FABER, TEUBNER, LIEPZIG et BERLIN 1925

19[a].) Soit donc la fraction continue suivante

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\text{etc....}}}}}$$

que l'on pose = x, il s'ensuit que

$$x-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\text{etc}}}}}=\frac{1}{b+x-a};$$

d'où on a

$$x^2-2ax+bx+a^2-ab=1$$

et

$$x=a-\frac{b}{2}+\sqrt{1+\frac{bb}{4}}.$$

C'est pourquoi, si l'on prend b=2 et a=1 on a

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc}}}}}=\sqrt{2}$$

donc, si l'on prend b=2a, on obtient

$$\sqrt{a^2+1}=a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\text{etc}}}}}$$

Il est donc possible de donner aisément une approximation de la racine carrée de tout nombre qui dépasse un carré d'une unité ; en posant a = 2, les fractions suivantes permettent d'approcher de plus en plus près de $\sqrt{5}$:

2	4	4	4	4	4	4	
$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{38}{17}$	$\frac{161}{72}$	$\frac{682}{305}$	$\frac{2889}{1292}$	etc.
	$\frac{1}{1}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{29}{13}$	$\frac{123}{55}$	$\frac{521}{233}$	$\frac{2207}{987}$	
		$\frac{5}{2}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{85}{38}$	$\frac{360}{161}$	$\frac{1525}{682}$	
		$\frac{3}{1}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{47}{21}$	$\frac{199}{89}$	$\frac{843}{377}$	

20. Soit maintenant la fraction continue suivante

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc}}}}}}}$$

que l'on pose = x ; on retrouve encore x lui-même de la façon suivante

$$x-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\text{etc}}}}}}=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x-a}}$$

on a donc

$$x-a=\frac{x+c-a}{bx+bc-ab+1}$$

soit

$$bxx=aab+bcx-2abx=abc-a^2b+c\ ;$$

donc si l'on prend c=2a, on a

$$bxx=aab+2a \text{ et } x=\sqrt{a^2+\frac{2a}{b}}$$

De la même manière, si l'on pose

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc}}}}}}}$$

on aura

$$x\quad a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+x-a}}}$$

il s'ensuit

$$(bc+1)x^2+(bcd+b+d-c-2abc-2a)x-abcd+a^2bc-ab-ad+aa-cd+ac-1=0.$$

Et de cette façon toutes les fractions continues dont les dénominateurs sont égaux, soit tous, soit deux par deux, soit trois par trois, soit quatre par quatre, etc., peuvent s'effectuer. Mais le résultat, c'est à dire la valeur x, est toujours racine d'une équation quadratique.

Extrait de "*De Fractionibus continuis Dissertatio*", pages 201-203, traduction Denis DAUMAS.

Annexe 3.

LAGRANGE

Additions au Mémoire sur la Résolution des Equations Numériques, pages 603 à 609.

Extrait de SERRET,J.-A., *OEUVRES DE LAGRANGE*, tome 2, GAUTHIER-VILLARS, PARIS, 1868.

Remarque II.

Où l'on donne une manière très-simple de réduire en fractions continues les racines des équations du second degré.

32. Considérons l'équation générale du second degré

$$E_1 x^2 - 2\varepsilon x - E = 0,$$

dans laquelle E, E_1 et ε sont supposés des nombres entiers, tels que $\varepsilon^2 + EE_1 > 0$, pour que les racines soient réelles; cette équation, étant résolue, donne

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + EE_1}}{E_1},$$

où le radical peut être pris positivement ou négativement. Supposons que la racine cherchée soit positive, et soit λ_1 le nombre entier qui sera immédiatement plus petit que la valeur de x; on fera donc

$$x = \lambda_1 + \frac{1}{x_1},$$

et, substituant cette valeur dans l'équation proposée, on aura une équation transformée dont l'inconnue sera x_1; or si, après avoir fait la substitution, on multiplie toute l'équation par x_1^2, qu'ensuite on change les signes et qu'on suppose, pour abréger,

$$\varepsilon_1 = \lambda_1 E_1 - \varepsilon,$$
$$E_2 = E + 2\varepsilon\lambda_1 - E_1\lambda_1^2,$$

on aura la transformée

$$E_2 x_1^2 - 2\varepsilon_1 x_1 - E_1 = 0,$$

laquelle donnera

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + E_1E_2}}{E_2}:$$

on cherchera donc le nombre entier λ_2, qui sera immédiatement plus petit que cette valeur de x_1, et l'on fera

$$x_1 = \lambda_2 + \frac{1}{x_2},$$

et ainsi de suite.

Maintenant, je remarque que la quantité $\varepsilon_1^2 + E_1E_2$, qui est sous le signe dans l'expression de x_1, devient, en substituant les valeurs de ε_1 et de E_2, et ôtant ce qui se détruit, celle-ci : $\varepsilon^2 + EE_1$, qui est la même que celle qui est sous le signe dans l'expression de x; d'où il est facile de conclure que la quantité radicale sera toujours la même dans les expressions de x, x_1, x_2,....

33. Donc si l'on fait, pour abréger,

$$B = \varepsilon^2 + EE_1,$$

et qu'on prenne (le signe $<$ dénote qu'il faut prendre le nombre entier qui est immédiatement moindre)

$$\begin{array}{lll} & \lambda_1 < \dfrac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E_1}, & \varepsilon_1 = \lambda_1 E_1 - \varepsilon, \\ E_2 = E + 2\varepsilon\lambda_1 - E_1\lambda_1^2, & \lambda_2 < \dfrac{\varepsilon_1 + \sqrt{B}}{E_2}, & \varepsilon_2 = \lambda_2 E_2 - \varepsilon_1, \\ E_3 = E_1 + 2\varepsilon_1\lambda_2 - E_2\lambda_2^2, & \lambda_3 < \dfrac{\varepsilon_2 + \sqrt{B}}{E_3}, & \varepsilon_3 = \lambda_3 E_3 - \varepsilon_2, \\ E_4 = E_2 + 2\varepsilon_2\lambda_3 - E_3\lambda_3^2, & \lambda_4 < \dfrac{\varepsilon_3 + \sqrt{B}}{E_4}, & \varepsilon_4 = \lambda_4 E_4 - \varepsilon_3, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \end{array}$$

on aura

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E_1} = \lambda_1 + \frac{1}{x_1},$$
$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{B}}{E_2} = \lambda_2 + \frac{1}{x_2},$$
$$x_2 = \frac{\varepsilon_2 + \sqrt{B}}{E_3} = \lambda_3 + \frac{1}{x_3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

d'où

$$x = \lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\lambda_3 + \dots}}$$

Quant au radical $\sqrt{B}$, il faudra toujours lui donner le même signe qu'on lui a supposé dans la valeur de la racine cherchée x.

On peut observer encore que, comme on a trouvé

$$\varepsilon_1^2 + E_1 E_2 = \varepsilon^2 + E E_1 = B,$$

on aura

$$E_2 = \frac{B - \varepsilon_1^2}{E_1},$$

et, de même,

$$E_3 = \frac{B - \varepsilon_2^2}{E_2}, \quad E_4 = \frac{B - \varepsilon_3^2}{E_3}, \ldots.$$

Ainsi l'on pourra, si on le juge plus commode, employer ces formules à la place de celles qu'on a données plus haut pour avoir les valeurs de E_2, E_3, ...

34. Maintenant je dis que la fraction continue qui exprime la valeur de x sera toujours nécessairement périodique.

Pour pouvoir démontrer ce théorème, nous commencerons par démontrer en général que, quelle que soit l'équation proposée, on doit toujours nécessairement arriver à des équations transformées dont le premier et le dernier terme soient de signes différents. En effet, nous avons vu, dans le n° 19 du *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, qu'on doit toujours nécessairement arriver à une équation transformée qui n'ait qu'une seule racine plus grande que l'unité, après quoi chacune des transformées suivantes n'aura aussi qu'une seule racine plus grande que l'unité; soit donc

$$au^m + bu^{m-1} + cu^{m-2} + \ldots + k = 0,$$

une de ces transformées qui n'ont qu'une seule racine plus grande que l'unité, et soit s la valeur entière approchée de u : on fera, pour avoir la transformée suivante, $u = s + \frac{1}{u'}$, ce qui, étant substitué, donnera cette transformée, dans laquelle il est aisé de voir que le premier terme sera

$$(as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \ldots + k)u'^m,$$

et que le dernier sera a. Or, puisque la vraie valeur de u dans la transformée précédente tombe entre ces deux-ci : $u = s$ et $u = \infty$, entre lesquelles il ne se trouve aucune autre valeur de u (hypothèse), il s'ensuit qu'en faisant ces deux substitutions dans l'équation en u on aura nécessairement des résultats de signe contraire; car il est facile de concevoir qu'il n'y aura en ce cas qu'un seul des facteurs de cette équation qui pourra changer de signe en passant d'une valeur de u à l'autre (n° 5, Mémoire cité). Mais la supposition de $u = \infty$ donne le résultat au^m (tous les autres termes devenant nuls vis-à-vis de celui-ci), lequel est de même signe que le coefficient a; donc il faudra que la supposition de $u = s$ donne un résultat de signe contraire à a; mais ce résultat est égal à

$$as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \ldots + k;$$

donc, puisque cette quantité est en même temps le coefficient du premier terme de l'équation transformée en u', dont le dernier terme est a, il s'ensuit que cette transformée aura nécessairement ses deux termes extrêmes de signes différents.

Et l'on peut prouver de la même manière que cela aura lieu à plus forte raison dans toutes les transformées suivantes.

35. Cela posé, puisque l'équation proposée

$$E_1 x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

donne les transformées (32)

$$\begin{gathered} E_2 x_1^2 - 2\varepsilon_1 x_1 - E_1 = 0, \\ E_3 x_2^2 - 2\varepsilon_2 x_2 - E_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

il s'ensuit de ce que nous venons de démontrer dans le numéro précédent qu'on parviendra nécessairement à des transformées comme

$$\begin{gathered} E_{\gamma+1} x_\gamma^2 - 2\varepsilon_\gamma x_\gamma - E_\gamma = 0, \\ E_{\gamma+2} x_{\gamma+1}^2 - 2\varepsilon_{\gamma+1} x_{\gamma+1} - E_{\gamma+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

dont les premiers et derniers termes seront de signes différents; de sorte que les nombres

$$E_\gamma, \quad E_{\gamma+1}, \quad E_{\gamma+2}, \ldots$$

seront tous de même signe. Or, on a (33)

$$B = \varepsilon_\gamma^2 + E_\gamma E_{\gamma+1} = \varepsilon_{\gamma+1}^2 + E_{\gamma+1} E_{\gamma+2} = \ldots;$$

donc, puisque E_γ, $E_{\gamma+1}$, $E_{\gamma+2}$, ... sont de même signe, les produits $E_\gamma E_{\gamma+1}$, $E_{\gamma+1} E_{\gamma+2}$, ... seront nécessairement positifs; d'où il s'ensuit :

1° Que l'on aura

$$\varepsilon_\gamma^2 < B, \quad \varepsilon_{\gamma+1}^2 < B, \ldots,$$

c'est-à-dire (en faisant abstraction du signe)

$$\varepsilon_\gamma < \sqrt{B}, \quad \varepsilon_{\gamma+1} < \sqrt{B},$$

et ainsi de suite à l'infini;

2° Que l'on aura aussi, à cause que les nombres E, E_1, E_2, ... sont tous entiers,

$$E_\gamma < B, \quad E_{\gamma+1} < B, \quad E_{\gamma+2} < B,$$

et ainsi de suite. Donc, comme B est donné, il est clair qu'il n'y aura qu'un certain nombre de nombres entiers qui pourront être moindres que B ou que $\sqrt{B}$; de sorte que les nombres

$$E_\gamma,\ E_{\gamma+1},\ E_{\gamma+2},\dots,\quad \varepsilon_\gamma,\ \varepsilon_{\gamma+1},\ \varepsilon_{\gamma+2},\dots,$$

ne pourront avoir qu'un certain nombre de valeurs différentes, et qu'ainsi dans l'une et l'autre de ces séries, si on les pousse à l'infini, il faudra nécessairement que les mêmes termes reviennent une infinité de fois; et, par la même raison, il faudra aussi qu'une même combinaison de termes correspondants dans les deux séries revienne une infinité de fois; d'où il s'ensuit qu'on aura nécessairement, par exemple,

$$E_{\gamma+\delta+\nu} = E_{\gamma+\delta} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\gamma+\delta+\nu} = \varepsilon_{\gamma+\delta},$$

ou bien, en faisant $\gamma + \delta = \mu$,

$$E_{\mu+\nu} = E_\mu \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\mu+\nu} = \varepsilon_\mu;$$

donc, à cause de

$$B = \varepsilon_\mu^2 + E_\mu E_{\mu+1} = \varepsilon_{\mu+\nu}^2 + E_{\mu+\nu} E_{\mu+\nu+1},$$

on aura aussi

$$E_{\mu+\nu+1} = E_{\mu+1};$$

mais on a

$$x_\mu = \frac{\varepsilon_\mu + \sqrt{B}}{E_{\mu+1}} \quad \text{et} \quad x_{\mu+\nu} = \frac{\varepsilon_{\mu+\nu} + \sqrt{B}}{E_{\mu+\nu+1}};$$

donc $x_{\mu+\nu} = x_\mu$; donc la fraction continue sera nécessairement périodique (24).

36. En effet, on voit, par les formules du n° 33, que si l'on a

$$E_{\mu+\nu} = E_\mu \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\mu+\nu} = \varepsilon_\mu,$$

on aura

$$E_{\mu+\nu+1} = E_{\mu+1},\quad \lambda_{\mu+\nu+1} = \lambda_{\mu+1},\quad \varepsilon_{\mu+\nu+1} = \varepsilon_{\mu+1},$$

et ainsi de suite; de sorte qu'en général les termes des trois séries

$$E,\ E_1,\ E_2,\dots,\quad \varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\dots,\quad \lambda_1,\ \lambda_2,\dots,$$

qui auront pour exposant $\mu + n\nu + \varpi$, seront les mêmes que les termes précédents dont les exposants seront $\mu + \varpi$, en prenant pour n un nombre quelconque entier positif.

Ainsi, chacune de ces trois séries deviendra périodique, à commencer par les termes E_μ, ε_μ, $\lambda_{\mu+1}$, et leurs périodes seront de ν termes, après lesquels les mêmes termes reviendront dans le même ordre, à l'infini.

L'infini n'est pas programmable....

Marianne Guillemot

En 1982, les programmes des lycées, après ceux des collèges, s'établirent en réaction contre les "mathématiques modernes" :

"Les actuels programmes de Mathématiques ont entrepris de lutter contre un formalisme qui, maltraitant l'acquis intuitif des élèves, isolerait la démarche pédagogique des réalités de l'expérience et de l'action ..."

"On évacuerait à tort cette diversité par un exposé théorique hâtif et parcimonieux."

"L'important est, répétons le, d'aider l'élève à organiser la synthèse de ses connaissances pour les réinvestir de lui même dans des domaines a priori éloignés."

Lutte contre le formalisme, méfiance envers la théorie, mise en valeur du concret, de l'actif, de l'utile, intérêt prioritaire pour les applications; tout cela est exprimé clairement, dès 1981, dans les paragraphes "objectifs" et "introduction au programme" des programmes officiels(1).

Le contenu des programmes évolue dans ce sens, en plusieurs étapes; dès 1982, on note la disparition, sans commentaires, de l'arithmétique en terminale C; est-ce parce que cette discipline est trop "formelle", ou bien ne serait elle pas assez utile aux applications? D'autres changements - l'effacement des probabilités tandis qu'est introduite la statistique descriptive; le retour de la géométrie, mais limitée à l'étude des déplacements et des similitudes et au calcul vectoriel - semblent refléter les mêmes préoccupations.

En analyse, c'est plus tard qu'arrivent d'importantes modifications, avec les programmes de 1986 et de 1991. L'analyse a bien sûr une place très importante dans les programmes, car la connaissance de certaines fonctions est nécessaire pour les applications, en particulier en physique. Mais l'étude des fonctions exige le calcul des dérivées, donc la notion de limite, et on ne peut pas éviter l'intervention de l'infini...

L'infini : cette notion est mal accueillie, et semble inquiéter. A partir de 1986, la définition rigoureuse de la limite (par ε , η) est chassée des programmes. Et comme il faut bien parler des limites, à cause des dérivées, on donne des règles de calcul, des critères de comparaison avec des fonctions "simples" dont on admet les propriétés après les avoir "observées" (mais comment ? Cela pose d'autres problèmes, comme nous le verrons) .

Quelle que soit la façon dont on l'aborde, même muni d'un attirail mathématique adéquat (ce qui n'est pas le cas ici), le rôle fondamental de la notion de limite aussi bien que sa difficulté conceptuelle intrinsèque méritent qu'on lui accorde le temps de la réflexion. Ce n'est pas le point de vue du programme actuel. A quatre reprises - en première parce qu'on la reverra en terminale, en terminale parce qu'on l'a déjà vue en première, dans l'étude des suites parce qu'on l'a peut-être déjà vue pour les fonctions, et inversement - on nous dit qu' "il n'y a pas lieu de s'y attarder".

En répétant avec tant d'insistance qu'il "ne faut pas s'attarder" à l'examen de ces problèmes, on ne fait que les rendre plus obscurs...

Simultanément, on nous recommande d' "éviter de multiplier les exemples posés a priori; il convient d'exploiter les situations mentionnées dans les travaux pratiques" .

Que sont les travaux pratiques en analyse ? Essentiellement, des exercices à l'aide de la calculatrice.

Programmes scolaires, programmes de calculatrice.

Dans le contexte des programmes actuels, la calculatrice est bien accueillie; elle représente une activité; c'est un objet concret, qui est utile, qui est destiné par construction aux applications. Son usage est donc très vivement reccommandé .

"L'utilisation systématique des calculatrices", dit l'introduction aux programmes de seconde de 1982, "constitue une nouveauté du programme de Mathématiques. Dès le début de l'annnée, il sera bon de vérifier que chacun sait utiliser son propre instrument, et ce sera une occasion de préciser l'usage des parenthèses et de réviser les propriétés de $\mathbb{R}$ ".

Malheureusement, la calculatrice n'opère pas sur $\mathbb{R}$. Son domaine n'est pas l'ensemble des nombres réels, ni celui des rationnels, ni celui des décimaux, et ne contient pas l'ensemble des entiers. C'est un ensemble, très grand mais fini, d'entiers et de décimaux, et l'utilisateur, même débutant, doit en être conscient .

Les "propriétés de $\mathbb{R}$" ne sont donc pas celles de l'ensemble des nombres sur lesquels travaille la machine, qui a sa propre arithmétique et sa propre algèbre, différentes de celles des réels, plus compliquées qu'elles, et qui ne coïncident avec elles que si l'on n'est pas trop près des bornes de son domaine. Pour en donner un exemple simple, on peut vérifier que la machine ne donne pas la même valeur à

$1 - (1 - X)$ et à $(1 - 1) + X$ si $X = 10^{-15}$

car elle peut accepter 10^{-15}, mais pas $1 - 10^{-15}$, qu'elle remplace par 1.

Les professeurs, le plus souvent, et certains manuels attirent l'attention des élèves sur ces comportements inattendus des calculatrices; les programmes les signalent à peine .

Les nombres qu'on observe le mieux à l'aide de la calculatrice sont les entiers, à condition qu'ils ne soient pas trop grands et, bien entendu, qu'on étudie l'arithmétique. Des algorithmes classiques, comme le calcul du plus grand commun diviseur d'après Euclide, la recherche des nombres premiers avec le crible d'Eratosthène, la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, peuvent être très aisément convertis en programmes de calculatrice; et le résultat, obtenu avec une rapidité prodigieuse, est exact si les nombres donnés ne sont pas trop grands, et peut en tous cas être facilement contrôlé.

Pour les nombres non entiers, l'observation est plus difficile. D'un nombre rationnel, comme des autres nombres, on ne voit que les premiers chiffres du développement décimal. Une programmation de la division euclidienne, faisant apparaître l'un après l'autre les chiffres du quotient, peut mettre en évidence leur périodicité; la boucle du programme permet d'obtenir une suite "qui ne s'arrête pas", un développement décimal illimité; une des rares façons qu'a la calculatrice de nous donner une idée de l'infini.

Les nombres irrationnels, comme les rationnels, n'apparaissent sur la calculatrice que sous forme de décimaux à douze décimales au plus. D'ailleurs, comment s'intéresser aux nombres irrationnels si on ne connait pas les rationnels ? Si on n'a jamais étudié la divisibilité des entiers, on ne peut pas démontrer que, par exemple, $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction, ni en faire un calcul approché à l'aide de l'équation de Pell, équation à solutions entières dont la calculatrice peut donner des solutions exactes dans certaines limites .

La calculatrice ne connaît pas les nombres réels. Que veut dire 0,999 . . . 9 . . . (avec une suite infinie de décimales égales à 9) ? La calculatrice ignore cette expression. L'élève de terminale, le plus souvent, ne comprend pas ce qu'elle signifie. Mais comment s'en étonner? Donner un sens à cette expression, c'est définir la limite .

La limite, finie ou infinie, ne peut pas, avec les programmes actuels, être connue par une définition. On suggère qu'elle soit "observée", mais comment? Sur la machine, une suite ne peut manifester sa convergence et suggérer sa limite, dans les meilleurs des cas, qu'en apparaissant comme stationnaire .

Mais on peut voir certaines suites convergentes, pourtant très "classiques", devenir stationnaires en montrant des valeurs qui ne sont pas leurs limites, ni "proches" de leurs limites(2). Des phénomènes plus étranges encore peuvent apparaître: une suite convergente se manifeste, à partir d'un certain rang, comme une suite apparemment aléatoire de 1 et de 0...(3)

La calculatrice, son utilité, ses "limites".

Le calcul approché, principale utilisation de la calculatrice, ne peut être fait qu'avec une précision limitée à l'avance, et qui ne dépend que de la machine elle même. C'est donc un calcul approché pour physiciens, avec une approximation plus ou moins bonne, selon les instruments dont on dispose. Ce n'est pas l'approximation des mathématiciens, qui doit pouvoir être faite avec une précision aussi grande qu'on veut, comme dans le cas de la limite d'une suite ou de la somme d'une série; et qui est une notion tout à fait indépendante de la possibilité effective d'un calcul numérique.

La lutte contre le formalisme, l'encouragement à l'activité sont, rappelons-le, les principaux objectifs des programmes actuels. Or la calculatrice exige de ses utilisateurs, à tous les niveaux, un formalisme extrêmement rigoureux.

Certes il n'y a pas de mathématiques sans une part de formalisme, même quand on fait à la main une multiplication ou une division.

Il faut, bien sûr, éviter d'enseigner des mathématiques où la partie formelle serait la plus accessible, encadrant un contenu trop pauvre, ou riche mais mal maîtrisé. Or cette situation peut se produire avec l'usage des calculatrices, que l'on peut manipuler en ne sachant absolument pas ce qu'on fait, les doigts s'habituant au formalisme en même temps que le cerveau à la passivité.

La calculatrice est un objet utile; ce n'est pas un outil pédagogique. Elle a été construite pour aider le comptable dans ses opérations, pour donner à l'ingénieur l'intégrale dont il a besoin; par ses très nombreuses possibilités, par sa prodigieuse rapidité, elle apporte aux utilisateurs les plus divers une aide considérable. Mais elle n'a pas été construite pour apprendre à l'écolier à faire des additions ou des multiplications, ni pour apprendre au lycéen à calculer une intégrale ou à résoudre une équation, ni, bien sûr, pour les dispenser de ces apprentissages .

Cependant la calculatrice peut apporter une grande aide à l'élève ou à l'étudiant, pourvu qu'il ait une certaine compréhension de ce que la machine sait faire bien plus rapidement que lui; et les professeurs, à défaut des programmes, le savent, et en tiennent compte le plus souvent .

De même que, connaissant le principe de la multiplication et de la division et disposant de la table de multiplication à un chiffre (sur le papier ou dans sa tête), on peut effectuer à la main n'importe quelle multiplication et une division avec une précision aussi grande qu'on veut, de même il existe, à chaque niveau(4), des connaissances mathématiques de base qui permettent de tirer meilleur parti de la calculatrice, de faire reculer ses limites, d'aller "plus loin " .

NOTES

1- Arrêté du 26 Janvier 1981, annexe 1, B.O. spécial 1 du 5 Mars 1981, p.59; ou la brochure "mathématiques: classes de seconde, première et terminale" (CNDP, 1982, p. 21,22, 25)
2- Voir ci-dessous, Annexe .
3- Voir ci-dessous l'article de François Parisot: "Un comportement étrange des calculatrices".
4- Demandez à des collégiens d'effectuer, en s'aidant de la calculatrice, la multiplication suivante:
1164153218269348l4453125 × 8589934592
(proposé par "Math et Malices", n°1)

ANNEXE

Le nombre e : calcul d'une limite (?)

$e = \lim_{x \to \infty} (1 + 1/x)^x$ (calculatrice HP 42 S)

```
01  LBL "NE"
02  1
03  STO 01
04  LBL "E"
05  RCL 01
06  1/X
07  1
08  +
09  RCL 01
10  Y↑X
11  STO O2
12  VIEW O2
13  PSE
14  RCL 01
15  2
16  x
17  STO 01
18  GTO E
19  END
```

On calcule la suite $(1 + 1/x_n)^{x_n}$ avec $x_n = 2^n$. Elle semble converger rapidement vers 2 , 71828... puis s'en éloigner, et, après quelques errances, devenir stationnaire en prenant la valeur 1.

Explication: les décimales de rang supérieur à 12 ne sont pas prises en compte par la calculatrice; donc pour $x_n > 10^{12}$, $1 + 1/x_n$ est remplacé par 1, et $(1 + 1/x_n)^{x_n}$ aussi.

Un comportement étrange des calculatrices

François Parisot
IREM de Brest

Introduction : énoncé du problème

Enoncé

Pour étudier la limite à l'infini de la fonction f définie par

$f(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2}$, on souhaite observer des valeurs numériques des nombres $f(x_n)$, pour $x_n = 2^n$.

Ce qui a motivé mes recherches

La réalisation d'un programme pour la calculatrice HP 42S par Marianne Guillemot lui a fait apparaître à partir d'un certain rang une étrange suite apparemment aléatoire de 0 et de 1.

Programme "LI" : un comportement étrange de la calculatrice

Programme
01 LBL "LI"
02 1
03 STO 01
04 LBL "L"
05 2
06 STO×01
07 RCL 01
08 $\frac{1}{x}$
09 SIN
10 RCL 01
11 ×
12 RCL 01
13 x↑2
14 y↑x
15 STO 02
16 VIEW 02
17 PSE
18 GTO "L"
19 END

limite de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ quand $x \to 0$ =limite de $\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ quand $x \to +\infty$.

Calcul direct : $f(x)=\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}$

$$x\sin\frac{1}{x} = x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = 1-\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right) \propto x^2\frac{-1}{6x^2} \to -\frac{1}{6}$$

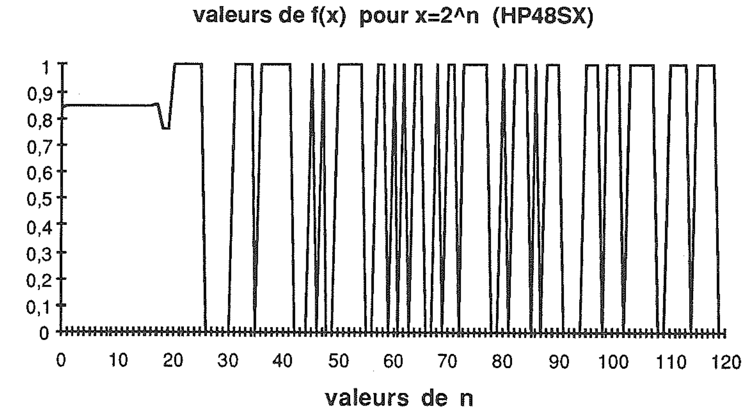
f(x) tend vers $\underline{e^{-\frac{1}{6}} \approx 0,84648172489}$

On calcule $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ pour $x_n = 2^n$.

La suite semble converger vers 0,8464817 puis s'en éloigner ; puis on voit une suite de 1 et de 0 répartis de façon apparemment aléatoire ...

A sa demande, j'ai étudié le comportement de la machine pour expliquer les résultats observés, puis j'ai expérimenté à l'aide d'autres outils : calculatrice Casio, tableurs (quatro et Excel), langages de programmation (Scheme, UBasic et C++), logiciel de calcul formel (Derive).

Cas des calculatrices Hewlett-Packard (HP48SX par exemple)



Elimination du sinus

La valeur de $\frac{1}{x}$ décroissant très rapidement vers 0, la différence entre $\frac{1}{x}$ et $\sin\frac{1}{x}$ (de l'ordre de $\frac{1}{6x^3}$) doit devenir négligeable pour la calculatrice. Un petit programme le confirme : pour la calculatrice HP48 travaillant avec 12 chiffres, dès 2^{19}, $\frac{1}{x}-\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ vaut 0. A partir de n=19, la calculatrice effectue en fait $\left(x\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ et ne trouve pas toujours 1 !

n	f(x)	n	f(x)	n	f(x)	n	f(x)
1	0,845287879959	31	1	61	0	91	0
2	0,846186687247	32	1	62	1	92	0
3	0,846408175689	33	1	63	0	93	0
4	0,846463350686	34	1	64	1	94	0
5	0,846477131784	35	0	65	1	95	1
6	0,846480581836	36	1	66	0	96	1
7	0,846481437828	37	1	67	0	97	1
8	0,846481629288	38	1	68	1	98	0
9	0,846482096683	39	1	69	0	99	1
10	0,846482352220	40	1	70	1	100	1
11	0,846479697829	41	1	71	1	101	1
12	0,846497452084	42	0	72	0	102	0
13	0,846568464941	43	0	73	1	103	1
14	0,846454848201	44	0	74	1	104	1
15	0,847591703460	45	1	75	1	105	1
16	0,845773467160	46	0	76	1	106	1
17	0,856741685771	47	1	77	1	107	1
18	0,759664867368	48	0	78	0	108	0
19	0,759664867368	49	0	79	0	109	0
20	1	50	1	80	1	110	1
21	1	51	1	81	0	111	1
22	1	52	1	82	1	112	1
23	1	53	1	83	1	113	1
24	1	54	1	84	1	114	0
25	1	55	0	85	0	115	1
26	0	56	0	86	1	116	1
27	0	57	1	87	0	117	1
28	0	58	1	88	1	118	1
29	0	59	0	89	1	119	0
30	0	60	1	90	1	120	0

Le produit d'un nombre par son "inverse" ne vaut pas toujours 1

La calculatrice arrondit en effet $\frac{1}{x}$ pour ne conserver que 12 chiffres significatifs et commet donc une erreur majorée par $0,5\ 10^{-12-\mathrm{int}(\log(x))}$ qui après multiplication par x donne pour le produit une erreur majorée par $5\ 10^{-12}$ (la démonstration est laissée au lecteur).

C'est là que la valeur 1 du résultat exact joue un rôle fondamental :

— quand l'erreur est commise par excès, elle porte sur le $13^{\text{ième}}$ chiffre et ne modifie pas le résultat 1,

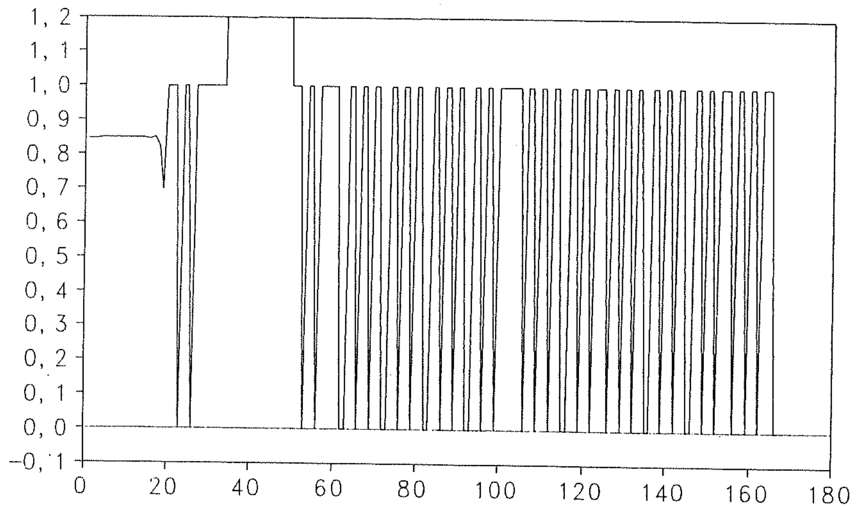
— quand l'erreur est commise par défaut, elle porte sur le $12^{\text{ième}}$ chiffre puisque le chiffre des unités devient 0 ($1-3\ 10^{-12}$ est effectivement affiché 0.999999999997).

Explication des résultats 0 et 1

Quand le résultat de $x\sin\frac{1}{x}$ est 1, $f(x)$ vaut évidemment également 1, mais quand le résultat est strictement inférieur à 1, l'exposant x^2 est assez grand pour que la machine confonde $f(x)$ avec la limite de la suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, c'est-à-dire 0. C.Q.F.D.

Cas de la calculatrice Casio fx-8000G

valeurs de f(x) pour x=2^n (Casio fx-8000G)



valeurs de n

n	f(x)	n	f(x)	n	f(x)	n	f(x)
0	0,84147098481	43	infini	86	0	129	0
1	0,84528787996	44	infini	87	1	130	1
2	0,84618668722	45	infini	88	1	131	1
3	0,84640817573	46	infini	89	0	132	0
4	0,84646335066	47	infini	90	1	133	1
5	0,84647713196	48	infini	91	1	134	1
6	0,84648057591	49	infini	92	0	135	0
7	0,84648144060	50	1	93	0	136	0
8	0,84648163484	51	1	94	1	137	1
9	0,84648171945	52	1	95	1	138	1
10	0,84648173090	53	0	96	0	139	0
11	0,84648147303	54	1	97	1	140	1
12	0,84648325033	55	1	98	1	141	1
13	0,84646620907	56	0	99	0	142	0
14	0,84654574048	57	1	100	1	143	1
15	0,84640940576	58	1	101	1	144	1
16	0,84468439812	59	1	102	1	145	0
17	0,85087438472	60	1	103	1	146	0
18	0,81931514023	61	1	104	1	147	1
19	0,69953372080	62	0	105	1	148	1
20	1	63	0	106	0	149	0
21	1	64	1	107	1	150	1
22	1	65	1	108	1	151	1
23	0	66	0	109	0	152	0
24	1	67	1	110	1	153	1
25	1	68	1	111	1	154	1
26	0	69	0	112	0	155	1
27	1	70	1	113	1	156	0
28	1	71	1	114	1	157	1
29	1	72	0	115	0	158	1
30	1	73	0	116	0	159	0
31	1	74	1	117	1	160	1
32	1	75	1	118	1	161	1
33	1	76	0	119	0	162	0
34	1	77	1	120	1	163	1
35	infini	78	1	121	1	164	1
36	infini	79	0	122	0	165	1
37	infini	80	1	123	1	166	0
38	infini	81	1	124	1	167	x^2 trop grand
39	infini	82	0	125	1		
40	infini	83	0	126	0		
41	infini	84	1	127	1		
42	infini	85	1	128	1		

Astuce utilisée pour que le produit d'un nombre et de son inverse soit toujours 1

Contrairement aux calculatrices Hewlett-Packard qui affichent tous les chiffres des résultats, la fx-8000G fait ses calculs avec 13 chiffres pour n'en afficher que 10. Ces 3 chiffres de réserve sont un avantage et un inconvénient.

L'avantage est de pouvoir compenser l'erreur commise sur le calcul de l'inverse d'un nombre connu exactement. En effet, les chiffres de réserve sont systématiquement remis à 0 et le résultat arrondi à 10 chiffres significatifs quand la réserve est soit supérieure à 992.5, soit inférieure à 007.5.

Imprécision dans le calcul du sinus

L'inconvénient est que, puisque seuls 10 chiffres sont affichés, le calcul des fonctions transcendantes n'a pas besoin d'être poussé jusqu'à la précision interne de la calculatrice. C'est en effet le cas pour la fonction sinus : par exemple 2^{-23}-sin(2^{-23}) vaut 10^{-19} ce qui fait une erreur relative de 8 10^{-13}, mais plus grave est le résultat pour 2^{-40}-sin(2^{-40}), qui est -3.02 10^{-23}, provoquant une erreur relative de -3 10^{-11} (le signe est pour le moins surprenant !).

Explication des résultats 0, 1 et 'infini'

Comme pour les calculatrices HP, l'exposant x^2 est suffisamment grand pour que la calculatrice confonde la valeur de f(x) avec la limite de la suite géométrique de raison $\left(x \sin \frac{1}{x}\right)$ ce qui provoque un affichage "normal" de 0 ou de 1, mais aussi, quand l'erreur dans le calcul du sinus est dans le mauvais sens, un affichage d'erreur pour dépassement de capacité, l'infini étant trop grand pour ces machines.

Utilisation d'un tableur

Elimination du sinus

L'algorithme de calcul du sinus semble efficace pour les "petits"' nombres et les résultats pour $\frac{1}{x}$ et $\sin\frac{1}{x}$ sont rapidement identiques.

La représentation binaire explique les résultats 1

Contrairement aux calculatrices étudiées précédemment, le tableur montre une suite stationnaire de limite 1. Ceci s'explique car le tableur utilise une représentation binaire des nombres (mantisse et exposant de 2) ce qui fait que x et $\frac{1}{x}$ sont connus exactement par l'ordinateur quand $x = 2^n$. La valeur de $f(x)$ obtenue est donc 1 dès que la machine identifie le sinus et son argument.

Remarque : on retrouvera une alternance de 0 et 1 si on observe la suite $f(10^n)$, les puissances de 10 étant approchées dans ce cas.

Peut-on obtenir une précision infinie ?

Impossible en un temps fini avec un matériel limité

Toutes les expériences précédentes ont affiné notre connaissance du fonctionnement des calculs en machine, mais n'ont guère fait progresser notre approche de la limite cherchée.

Pour supprimer l'influence des arrondis et voir notre suite converger comme elle le devrait, il faudrait que la machine manipule une infinité de décimales de chaque nombre. Il lui faudrait donc une éternité pour calculer le premier sinus, et une mémoire infinie pour le stocker, c'est donc impensable.

Possibilité de concevoir un algorithme énumérant les décimales de la limite

Ce qui est par contre faisable avec nos moyens limités, c'est de concevoir un programme qui, demandant un entier N, donnera les N premières décimales de la limite. Ceci est possible par exemple avec le langage UBasic (dans le domaine public) qui permet de choisir le nombre de mots-machine utilisés pour stocker les décimales des nombres.

Programme UBASIC :

```
10  point 40
15  print "calcul de y=(x*sin(1/x))^(x^2) pour x=2^n"
16  print "affichage de 50 décimales"
17  print "calculs avec 192 chiffres"
20  X=2:N=1
30  X=X*2:N=N+1
40  Y=1/X
50  Z=sin(Y)
55  print "n = ";N;
60  print "y = ";using(1,50),(X*Z)^(X*X)
120 if N<82 then goto 30
130 print:print:print "e^(-1/6) = ";using(1,50),exp(-1/6)
```

Exécution :

```
calcul de y=(x*sin(1/x))^(x^2) pour x=2^n
affichage de 50 décimales
calculs avec 192 chiffres

n =  2  y =  0.84618668722072633734553777079134106104504414529651
n =  3  y =  0.84640817578798917416558971316837758770064587996294
n =  4  y =  0.84646335070359336697383764855281646013802358079243
n =  5  y =  0.84647713216102720455913084184372209016822434012080
n =  6  y =  0.84648057675927677657399977371126962150121853499023
n =  7  y =  0.84648143786097075099627354257734285694920242347526
n =  8  y =  0.84648165313340267754631500887095832017849065502979
n =  9  y =  0.84648170695132368950988262896208559563458326468921
n =  10  y =  0.84648172040579225694719944098557697306993268437004
n =  11  y =  0.84648172376940866846022779574012839240429408269228
n =  12  y =  0.84648172461031272569185354382095101259493808083316
n =  13  y =  0.84648172482053873714684571677823318254236346644575
n =  14  y =  0.84648172487309523983228662155619991938742891143424
n =  15  y =  0.84648172488623436549250265164439728535848372125056
n =  16  y =  0.84648172488951914690686014691054604906107497010375
n =  17  y =  0.84648172489034034226040598871110106039200843008379
n =  18  y =  0.84648172489054564109878972841024110835190289852741
n =  19  y =  0.84648172489059696580838549328808870412094643987254
n =  20  y =  0.84648172489060979698578442387961701459367454477373
n =  21  y =  0.84648172489061300478013415586325324293320257455464
n =  22  y =  0.84648172489061380672872158881764693443817951663355
n =  23  y =  0.84648172489061400721586844705365064696567985446493
n =  24  y =  0.84648172489061405733765516161248940570075844795627
n =  25  y =  0.84648172489061406986810184025218895979722831568494
n =  26  y =  0.84648172489061407300071350991211321484713954632749
```

```
n = 27  y = 0.84648172489061407378386642732709423901747946422003
n = 28  y = 0.84648172489061407397965465668083949258555582558266
n = 29  y = 0.84648172489061407402860171401927580582291812729142
n = 30  y = 0.84648172489061407404083847835388488412259265342911
n = 31  y = 0.84648172489061407404389766943753715369690715688294
n = 32  y = 0.84648172489061407404466246720845022109044802474136
n = 33  y = 0.84648172489061407404485366665117848793883088183065
n = 34  y = 0.84648172489061407404490146651186055465092644861077
n = 35  y = 0.84648172489061407404491341647703107132895033108753
n = 36  y = 0.84648172489061407404491640396832370049845630113058
n = 37  y = 0.84648172489061407404491715084114685779083279360533
n = 38  y = 0.84648172489061407404491733755935264711392691672177
n = 39  y = 0.84648172489061407404491738423890409444470044750074
n = 40  y = 0.84648172489061407404491739590879195627739383019547
n = 41  y = 0.84648172489061407404491739882626392173556717586916
n = 42  y = 0.84648172489061407404491739955563191310011051228758
n = 43  y = 0.84648172489061407404491739973797391094124634639218
n = 44  y = 0.84648172489061407404491739978355941040153030491833
n = 45  y = 0.84648172489061407404491739979495578526660129454987
n = 46  y = 0.84648172489061407404491739979780487898286904195776
n = 47  y = 0.84648172489061407404491739979851715241193597880973
n = 48  y = 0.84648172489061407404491739979869522076920271302272
n = 49  y = 0.84648172489061407404491739979873973785851939657597
n = 50  y = 0.84648172489061407404491739979875086713084856746428
n = 51  y = 0.84648172489061407404491739979875364944893086018636
n = 52  y = 0.84648172489061407404491739979875434502845143336688
n = 53  y = 0.84648172489061407404491739979875451892333157666201
n = 54  y = 0.84648172489061407404491739979875456239705161248579
n = 55  y = 0.84648172489061407404491739979875457326548162144174
n = 56  y = 0.84648172489061407404491739979875457598258912368072
n = 57  y = 0.84648172489061407404491739979875457666186599924047
n = 58  y = 0.84648172489061407404491739979875457683168521813041
n = 59  y = 0.84648172489061407404491739979875457687414002285289
n = 60  y = 0.84648172489061407404491739979875457688475372403351
n = 61  y = 0.84648172489061407404491739979875457688740714932867
n = 62  y = 0.84648172489061407404491739979875457688807050565246
n = 63  y = 0.84648172489061407404491739979875457688823634473340
n = 64  y = 0.84648172489061407404491739979875457688827780450364
n = 65  y = 0.84648172489061407404491739979875457688828816944620
n = 66  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829076068184
n = 67  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829140849075
n = 68  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829157044298
n = 69  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829161093103
n = 70  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162105305
n = 71  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162358355
n = 72  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162421618
n = 73  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162437433
n = 74  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162441387
n = 75  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162442376
n = 76  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162442623
n = 77  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162442685
n = 78  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162442700
n = 79  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162442704
n = 80  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162442705
n = 81  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162442705
n = 82  y = 0.84648172489061407404491739979875457688829162442705

e^(-1/6) = 0.84648172489061407404491739979875457688829162442705
OK
```

Ceci conduit au problème de mathématique intéressant suivant : déterminer le nombre de décimales à utiliser dans les calculs pour obtenir N décimales de la limite ainsi que la valeur de x pour laquelle f(x) sera le plus proche de cette limite.

Autres pistes

Avec Scheme

Je ne vois qu'une seule solution pour pouvoir tirer d'un outil de calcul numérique une information fiable : c'est d'effectuer toutes les opérations, non plus sur des valeurs approchées dont on ne connaît pas la précision, mais sur des intervalles dont on contrôle systématiquement les bornes inférieures et supérieures. Le langage Scheme est un dialecte de Lisp qui permet de représenter les intervalles comme listes de deux nombres et de définir des opérations sur de tels objets. Les calculs effectués montrent qu'en prenant pour précision des calculs-machine 10^{-12}, dès $x = 2^{18}$, l'amplitude de l'intervalle obtenu est supérieure à 0,1 et qu'il est inutile de continuer à calculer.

Scheme permet également de représenter les rationnels comme liste de 2 entiers, les polynômes comme liste de coefficients rationnels et donc de calculer à n'importe quel ordre raisonnable un développement limité de $\ln(f(x))$ à partir de ceux des fonctions sin et ln :

$$\ln(f(x)) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{180x^2} - \dots$$

Exemple de calcul de développements limités avec Scheme.

imprimer-p est une procédure pour imprimer des polynômes et **(fdex n)** est le développement à l'ordre n de . $\ln(f(x))$

```
[6] (imprimer-p (fdex 1))
[ - 1/6.X^2 ]
[7] (imprimer-p (fdex 2))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 ]
[8] (imprimer-p (fdex 3))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 - 1/2835.X^6 ]
[9] (imprimer-p (fdex 4))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 - 1/2835.X^6 - 1/37800.X^8 ]
[10] (imprimer-p (fdex 5))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 - 1/2835.X^6 - 1/37800.X^8 -
```

```
1/467775.X^10 ]
[11] (imprimer-p (fdex 6))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 - 1/2835.X^6 - 1/37800.X^8 -
1/467775.X^10 - 691/3831077250.X^12 ]
[12] (imprimer-p (fdex 7))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 - 1/2835.X^6 - 1/37800.X^8 -
1/467775.X^10 - 691/3831077250.X^12 -
2/127702575.X^14 ]
```

L'intérêt de Scheme par rapport aux 2 outils cités ci-dessous est que, étant obligé de construire la représentation des objets mathématiques ainsi que les opérations pour les manipuler, l'utilisateur améliore sa compréhension des concepts, chaque procédure écrite en Scheme pouvant être considérée comme une concrétisation d'une abstraction mathématique.

Avec UBasic

Ici, les opérations sur les rationnels et les polynômes sont inclus dans le langage par son auteur et un petit programme suffit pour obtenir un développement de $\ln(f(x))$

Programme :

```
1   ' utilisation de UBasic
5   'essai de calculs de développements limités ....
10  A=_X
20  K=1:P=A:S=1
30  for I=1 to 3
40  K=K+1:A=A*_X^2//(K*(K+1))
50  P=P-S*A
60  K=K+1:S=-S
70  next I
80  P=P\_X
90  P=P-1
97  lprint P
100 A=_X:K=1
105 Q=_X
110 for I=1 to 3
120 K=K+1:A=-A*_X
130 Q=Q+A//K
140 next I
145 lprint Q
150 Q=val(Q,P)@_X^8
155 Q=Q\_X^2
160 lprint Q
161 end
```


Exécution :

```
run
-(1//5040)*X^6 + (1//120)*X^4 - (1//6)*X^2
-(1//4)*X^4 + (1//3)*X^3 - (1//2)*X^2 + X
-(1//2835)*X^4 - (1//180)*X^2 - 1//6
```

Avec Derive

Ce logiciel sachant calculer formellement les limites, est le premier de mes outils qui me donne directement la réponse $e^{-\frac{1}{6}}$.

Utilisation de Derive :

Calcul de la limite de $F(x)$

1: $F(x):=\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

2: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

3: $e^{-\frac{1}{6}}$

Il permet également d'effectuer les calculs polynomiaux et rationnels décrit précédemment.

Conclusion

Aucun des outils que j'ai cités dans cet article ne peut directement apporter en même temps qu'un résultat la preuve de ce résultat. Je pense qu'il est important de rester conscient de ce fait. L'utilisation de calculatrices, langages de programmation ou logiciels de calcul formel ne peut donc intervenir que dans la partie "expérimentation" de la recherche et ne peut déboucher que sur des conjectures. On ne pourra énoncer de résultats définitifs qu'après une démonstration mathématique.

L'émergence du concept de fractal

François Parisot et Vincent Langlet
I.R.E.M. de Brest

Nous voulons retracer l'évolution qui a conduit à l'émergence, et à la diffusion du concept d'objet Fractal. Nous partirons du début du XIXè siècle et examinerons d'abord les précurseurs du concept, ceux dont les travaux inspireront plus tard les fondateurs. Situons le contexte à l'aide de deux citations. L'une est bien connue : «une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, seraient présents à ses yeux» de Pierre Laplace.

La seconde citation est de Marcellin BERTHELOT : «Le monde est aujourd'hui sans mystère, la conception rationnelle prétend tout éclairer et tout comprendre, elle s'efforce de donner de toutes choses une explication positive et logique, elle étend son déterminisme fatal jusqu'au monde moral».

I - LES PRÉCURSEURS DU CONCEPT

I.1 - Pierre-François VERHULST (Belgique 1844) et l'équation logistique.

Pour étudier une population, on mesure son effectif à intervalles réguliers : $X_0, X_1, \ldots X_n$, et le taux de croissance démographique durant chaque intervalle est défini par $\tau = \dfrac{\left(X_{n+1} - X_n\right)}{X_n}$.

Si celui-ci est constant, on tire de cette équation : $X_{n+1} = (1+\tau)X_n$ où on reconnaît une suite géométrique,

qui n'est autre que la suite des itérés de la fonction $f(x) = (1+\tau)x$, avec $X_{n+1} = f\left(X_n\right)$.

On sait que $X_{n+1} = (1+\tau)^n X_n$, formule explicite permettant de computer X_n pour tout n à partir des conditions initiales τ, X_0. Ce modèle est trop rudimentaire pour le biologiste car :

- si $\tau > 0$ (X_n) tend vers $+\infty$
- si $\tau > 0$ (X_n) tend vers 0
- si $\tau = 0$ (X_n) est constante, et aucun de ces comportements n'est réaliste.

P.F. VERHULST améliore le modèle. Il suppose que l'environnement est protégé (par exemple : bactéries dans un tube) et permet à la population d'atteindre une taille optimum T. Si la population est inférieure à T, elle va s'accroître ; si elle est supérieure à T, elle va décroître, ces variations étant d'autant plus rapides que la population est loin de T. Il pose que le taux de (dé)croissance démographique est proportionnel à l'écart avec T, avec un certain cœfficient de couplage k positif. Ce qui donne successivement :

$$\tau_n = k\left(T - X_n\right)$$

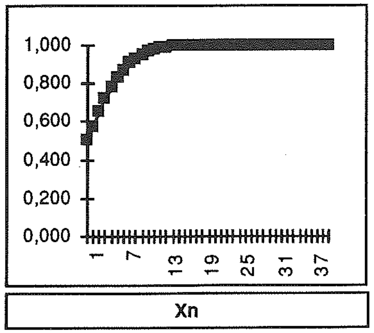
$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} = k\left(T - X_n\right)$$

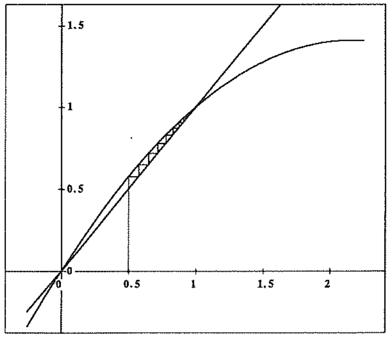
$$X_{n+1} = X_n + kX_n\left(T - X_n\right)$$

qui est la suite des itérés de la fonction $f_k(x) = x + kx(T-x)$. On peut normaliser en posant T = 1. Le modèle obtenu est bien meilleur :

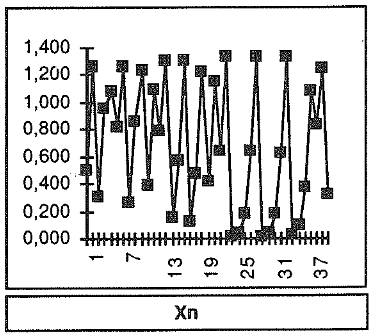
- si X_n est petit, τ_n est assez grand et la croissance aux périodes suivantes sera forte
- si X_n est inférieur à 1 et proche de 1, τ_n est petit et positif, la croissance ralentit
- si X_n est supérieur à 1 et proche de 1, τ_n est négatif, il y a décroissance.

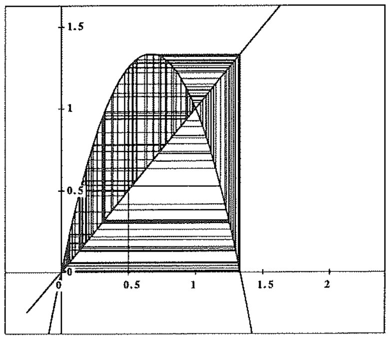
Voyons cela pour k=0,3 et X_0 = 0,5 : on a une croissance régulière vers l'optimum de population. A gauche les points de coordonnées (n , X_n), à droite les points de coordonnées (X_n , $f(X_n)$) et (X_n, X_n), et la courbe représentative de f.





Voyons l'effet de coefficient de couplage k. Pour k=3 et X_0 = 0,5 , on a des oscillations désordonnées autour l'optimum de population.





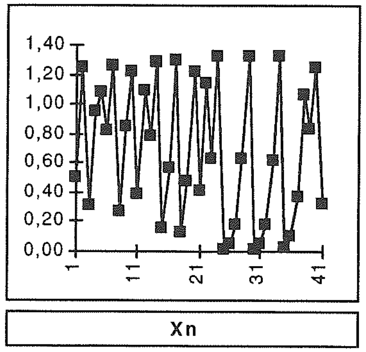
Il faut noter que le modèle est *déterministe* : bien qu'on ne puisse pas calculer explicitement X_n en fonction des conditions initiales X_0, k ; on peut calculer X_n en *itérant* la formule.

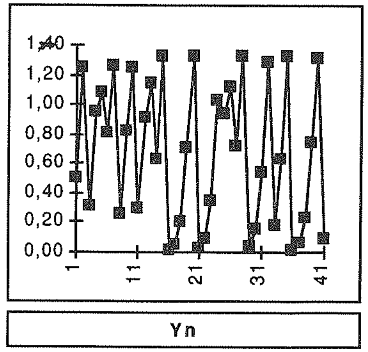
Voyons maintenant l'influence du choix de la valeur initiale X_0 : pour un cœfficient de couplage assez fort k=3 et en prenant deux valeurs très peu différentes du premier terme comme 0,5000 et 0,5001 , on s'attend à trouver deux suites dont les comportements sont très voisins. Mais à partir du terme d'indice 15 environ, elles s'écartent l'une de l'autre, et ceci de plus en plus, et à partir du terme d'indice 20 l'écart présentant lui-même des oscillations très désordonnées. On peut voir sur la figure ci-dessous les deux suites et la suite des différences :

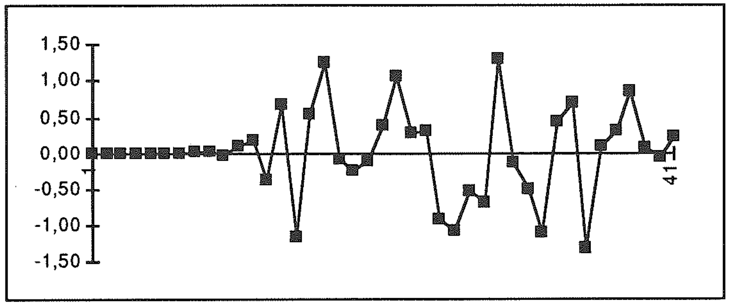
Pierre François VERHULST : Tau = k (1 - Xn)
ITERATIONS DE LA FONCTION f(x) = x+k x (1 - x)
Sensibilité aux conditions Initiales

k =	3,0000
X0 =	0,5000
Y0 =	0,5001

Suite Xn+1 = f(Xn) = Xn + k Xn (1 - Xn)
Suite Yn+1 = f(Yn) = Yn + k Yn (1 - Yn)







Xn - Yn

Il faut noter que le modèle est *sensible aux conditions initiales*. Une conséquence importante est que tout calcul informatisé des termes de cette suite, ou toute représentation graphique informatisée, nécessairement approchés, deviennent donc complètement et *énormément* faux au delà d'un certain nombre d'itérations. Vérifiez que la valeur absolue de l'écart atteint ou dépasse parfois 1, et est donc sensiblement égal aux valeurs de la suite elle-même ! Pour la même raison, deux calculatrices différentes donneront des termes de la suite des valeurs approchées énormément différentes !

I.2 - Les Courbes Pathologiques

Naïvement nous concevons une courbe comme un objet de dimension 1, une surface comme un objet de dimension 2. A la fin du XIXe, deux mathématiciens montrèrent les limites de cette conception en exhibant des courbes surprenantes maintenant bien connues.

I.2.1 La courbe de HELGE VON KOCH (Suède , 1906)

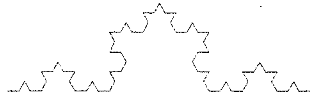
Il construit une suite de «courbes» selon l'algorithme ci-dessous:

- Partir d'un segment K_0.
- Pour chaque segment de la courbe K_n : en enlever le tiers central, et le remplacer par les 2 côtés d'un triangle équilatéral construit sur ce tiers central,
- On obtient ainsi K_{n+1} et on peut itérer le processus.

Chacun des quatre quarts de la courbe K_n est l'image réduite au tiers de la courbe K_{n-1}. En passant à la limite, obtient une «courbe» continue, ne contenant aucun segment de droite, et sans tangente en aucun point! Elle est de

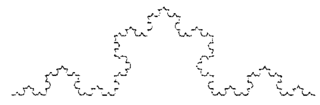
longueur infinie, la longueur de K_n est en effet $(4/3)^n$, suite géométrique divergente.

ordre 1



ordre 3

ordre 2



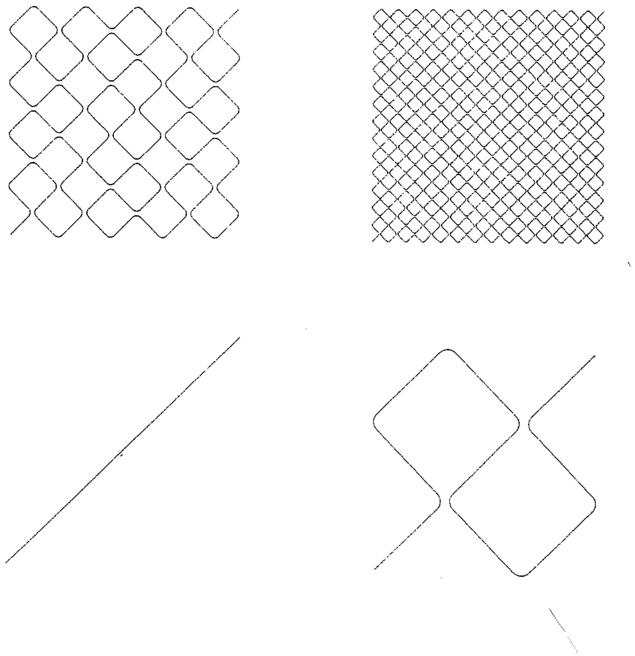
ordre 4

2.2 Courbe de Giuseppe PEANO (1858 - 1932)

Il construit une suite de «courbes» selon l'algorithme ci-dessous:

- Partir d'un segment P_0.
- Pour chaque segment de la courbe P_n: en enlever le tiers central, et le remplacer par un «huit» formé de 7 segments de même longueur que ce tiers central, en effectuant des rotations de +90°, -90°, -90°, -90°, +90°, +90°, +90°
- On obtient ainsi P_{n+1}, et on peut itérer le processus.

Chacun des neuf parties de la courbe P_n est l'image réduite au tiers de la courbe P_{n-1}. En passant à la limite, obtient une «courbe» continue, ne contenant aucun segment de droite, et sans tangente en aucun point! Et elle semble plutôt ressembler à une partie du plan !



I.3 - Ensembles de Gaston JULIA (France 1893 - 1978)

Gaston JULIA étudie les itérations de la fonction f du corps des complexes vers lui-même définie par $f(z) = z^2 + c$ où c est un complexe fixé. Ayant choisi la valeur initiale z_0, on obtient la suite :

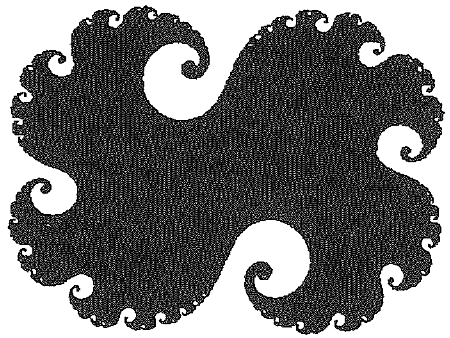
$$z_1 = z_0^2 + c$$
$$z_2 = z_1^2 + c = (z_0^2 + c)^2 + c$$
$$z_3 = z_2^2 + c = ((z_0^2 + c)^2 + c)^2 + c$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

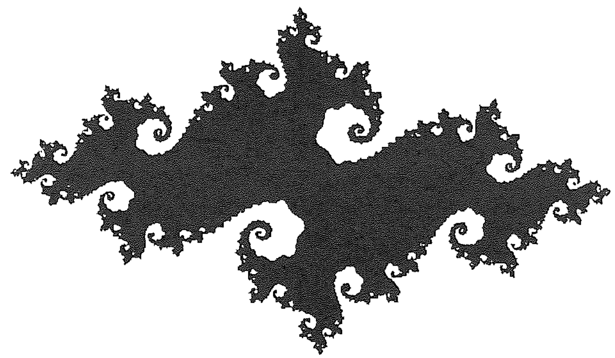
Selon la valeur z_0 ou bien la suite est bornée (et la suite des points associés dans le plan complexe reste enfermée dans un cercle centré en 0) ou bien elle est non bornée (et elle sort de tout cercle de centre 0)

Par définition, l'ensemble de Julia associé à c, noté J_c est l'ensemble des z_0 tels que la suite des itérés de f est bornée.

Cet ensemble est non vide : si on choisit pour z_0 une solution ζ de l'équation $z = z^2 + c$, c'est à dire un des deux points fixes de f, on obtiendra une suite stationnaire, donc bornée et donc $\zeta \in J_c$.

Selon le choix initial de c, on s'attend naturellement à obtenir des formes diverses de J_c. L'étonnant est l'extrême diversité de ces formes, certains Julia sont bien gras, d'autres sont ténus, beaucoup ont des plumes, ou des queues d'hippocampes. Ils peuvent être partitionnés en deux classes : ceux qui sont connexes, et les autres qui sont des nuages de points analogues à l'ensemble de Cantor , explosant en une poussière d'étoiles...





I.4 - La stabilité des orbites planétaires

Par anthropocentrisme, nous pensons que le système solaire est le parangon de la stabilité et de la permanence. Les grecs anciens expliquaient qu'on avait là affaire à des compositions de mouvements parfaits, c'est à dire circulaires.

Johannes KEPLER énonce entre 1604 et 1618 ses fameuses lois, dont la première d'entre elles dit : les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil est un foyer.

Isaac Newton publie en 1687 la loi de la gravitation, qui lui permet d'une part de retrouver la loi de Kepler, mais montre son imprécision si on l'applique à l'ensemble du système. Il faudrait énoncer ainsi la première loi : si *une* planète tourne autour d'*un* soleil, son orbite est une ellipse. Toute seconde planète a une influence non négligeable sur la première, et inversement. C'est le problème des trois corps, ou pire, des n corps. Newton pense que la stabilité du système solaire est le résultat de l'action d'un Être intelligent et tout puissant qui, de temps à autre, remet les orbites à leur place.

Lagrange, puis Laplace, formulent et étudient des équations différentielles permettant de calculer les perturbations de l'orbite d'une planète dues à ses consœurs. Laplace parvient ainsi à retrouver par le calcul les variations déjà observées par Ptolémée dans les mouvements de Saturne et Jupiter.

En 1846, Le Verrier, à la tête d'une armée d'esclaves salariés et calculateurs, reprend les opérations avec des termes d'ordre supérieur. Il annonce que les calculs de Laplace « ne peuvent s'appliquer pendant un temps infini », et il pose la question : pourra t-on trouver un jour des solutions exactes ?

C'est enfin entre 1892 et 1899 que Poincaré démontre l'impossibilité d'intégrer les équations différentielles gouvernant le problème des 3 corps.

On ignore donc si le système solaire est stable ! Rien n'exclut que la trajectoire de la Lune, jusqu'ici considérée comme périodique, et suffisamment bien connue pour qu'on puisse établir les annuaires des marées ou prévoir les éclipses des prochains siècles, ne file un jour vers l'infini.

Les concepts de la statistique, jusque là considérés par certains comme une malpropreté nécessaire, et dont il valait mieux laisser l'usage à d'autres, ne sont donc plus une approximation de la réalité objective, mais deviennent le seul outil théoriquement concevable.

Le lecteur sera sans doute rassuré de savoir que le théorème de KAM - comme Kolmogorov, qui en a l'intuition en 1954, et Arnold et Moser qui le démontrent en 1962 - a remis en cause l'interprétation des conclusions de Poincaré : malgré l'absence de lois de conservation, les orbites stables peuvent exister. Bien plus : sous certaines conditions, la grande majorité des orbites sont stables...

II - LES FONDATEURS DU CONCEPT

II.1 - Benoît MANDELBROT

Né en Pologne en 1924, il arrive en France à 12 ans, étudie les Julia avec son oncle, est à Polytechnique de 1945 à 1947. Il émigre aux USA en 1958, et y devient IBM Fellow.

En 1965, il fait une première publication sur le concept d'*auto-similarité* : dans la distribution des erreurs dans les transmissions téléphoniques, et en analyse spectrale, dans les fonctions où intervient le hasard.

En 1967, il fait paraître le célèbre article de la revue Science : « Quelle est donc la longueur de la côte de la Bretagne ? » L'équation de la courbe nous étant inconnue, la seule méthode possible est la mesure, au sens du navigateur : étaler une carte sur la table du carré, et avec une ouverture de compas fixée, compter le nombre de reports nécessaires pour faire le tour du pays en suivant la côte. Le navigateur débutant peut s'entraîner avec un pseudo continent formé d'un grand cercle tracé au verso d'une carte périmée. En faisant varier son ouverture de compas, il aura la satisfaction de retrouver un résultat connu et de vérifier ainsi son habileté manuelle et la justesse de ses calculs...

Mesure de la circonférence d'un cercle de diamètre 1000 Km par report d'un compas d'ouverture r

r	n = Nb entier de Cotes	DIAMETRE ESTIME : r*n
500,000Km	6	3 000,00Km
250,000Km	12	3 000,00Km
125,000Km	25	3 125,00Km
62,500Km	50	3 125,00Km
31,250Km	100	3 125,00Km
15,625Km	201	3 140,63Km
7,813Km	402	3 140,63Km
3,906Km	804	3 140,63Km
1,953Km	1608	3 140,63Km
0,977Km	3216	3 140,63Km
0,488Km	6433	3 141,11Km
0,244Km	12867	3 141,36Km
0,122Km	25735	3 141,48Km
0,061Km	51471	3 141,54Km
0,031Km	102943	3 141,57Km
0,015Km	205887	3 141,59Km

Loi de formation : on divise r par 2 à chaque ligne

Il est clair qu'à chaque division par deux de l'ouverture du compas, le nombre de reports est doublé, aux erreurs d'expérience près !

Passons alors à l'exercice suivant, après nous être approvisionné en cartes de la Bretagne à diverses échelles. Voici les résultats de Mandelbrot pour la Grande Bretagne :

Mesure de la côte de la Grande Bretagne par report d'un compas d'ouverture r

r	n = Nb entier de Cotes	Longueur estimée : r * n
500,000Km	5	2 600,00Km
100,000Km	38	3 800,00Km
54,000Km	107	5 770,00Km
17,000Km	508	8 640,00Km

Cette fois, la division par deux de l'ouverture du compas fait beaucoup plus que doubler le nombre de reports ! En effet le compas peut suivre de beaucoup plus près les méandres de la côte, s'engager dans les baies, visiter les rades, pénétrer les abers, raser les cailloux au passage des pointes et des caps. La question « quelle est donc la longueur… » reste donc posée !

En 1972, Mandelbrot publie un article sur les phénomènes turbulents : ayant mélangé à des données réelles sur les crues de rivière les résultats fournis par un modèle simulé, les spécialistes en hydrologie s'avèrent incapables de discerner le vrai du faux.

Enfin en 1975, c'est la sortie de l'ouvrage fondateur : Les objets Fractals, forme, hasard et dimension (Flammarion)

II.2 - Les objets fractals

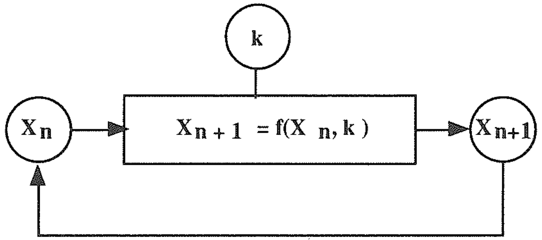
Benoît Mandelbrot dit page 160 : « je renonce à définir le concept d'ensemble fractal », après avoir cependant étudié de nombreux exemples :

- erreurs de transmission téléphoniques
- distribution des cratères de la lune
- modèles du relief
- turbulence
- structure des cellules du savon de Marseille (sphères d'Apollonius quatre à quatre tangentes)
- la répartition des trous dans le fromage de Gruyère…

Il dégage clairement 2 concepts :

- l'auto-similarité (ou homothétie interne) : chaque partie est une réduction homothétique du tout. Par exemple un quart de la courbe de Von Koch d'ordre n est une réduction dans le rapport 1/3 de la courbe de Von Koch d'ordre n-1. Donc il en est de même de la courbe obtenue en passant à la limite ! Il y a invariance d'échelle : quelle que soit l'échelle d'observation, on retrouve la même forme ou la même structure.
- Le feed back : un signal (input) subit un traitement produisant un résultat (output), qui influence plus ou moins directement le signal d'entrée. Bien des exemples précédemment évoqués, basés sur l'itération d'une même action, mettent en œuvre ce concept. Ainsi la courbe K_n sert d'objet initial à l'algorithme du I.2.1, et on obtient en sortie la courbe

K_{n+1}, qui peut à son tour servir d'objet initial à l'étape suivante. De même une simple suite géométrique ou arithmétique, ou la suite de Verhulst, sont engendrées de cette façon :



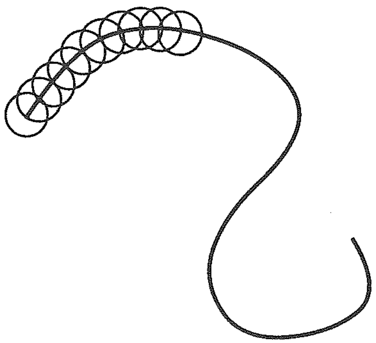
Puis il introduit la notion de dimension fractale.

II.3 - La dimension fractale

Benoît Mandelbrot suggère plusieurs façons de déterminer la dimension fractale d'un objet : dimension d'auto-similarité, dimension de contenu (de Hausdorff-Besicovitch), et dimension de recouvrement qui coïncident le plus souvent, mais pas tout le temps.

Examinons la seconde, qui est celle décrite par Mandelbrot pour la longueur de la côte bretonne. D'abord pour une ligne courbe, *r* désignant le rayon du cercle, N(*r*) le nombre de reports du compas :

Mesure d'une Ligne Courbe

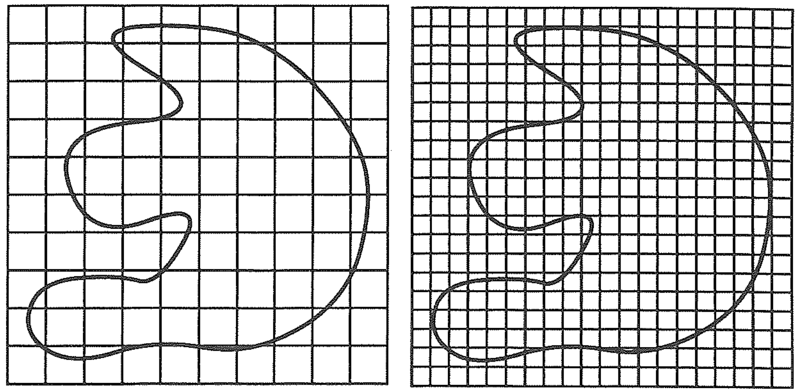


r	N(r)	r x N(r)
10,00	50	500,00
5,00	100	500,00
2,50	201	502,50
1,25	403	503,75

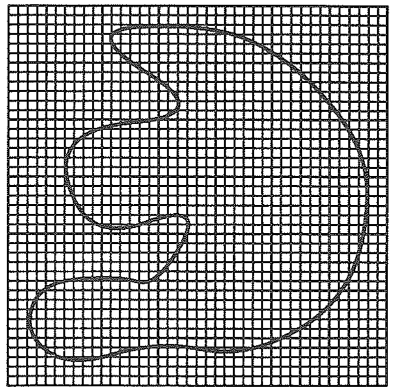
$$\lim_{r \to 0} r \times N(r) = \text{Ctte} = \text{Longueur de la courbe}$$

Puis pour l'aire d'une surface, ou le volume d'un solide, *r* désignant cette fois le côté du carré ou du cube servant à paver la surface ou le volume :

Mesure d'une Surface



r	N(r)	r x r x N(r)
1,00	76	76,00
0,50	247	61,75
0,25	903	56,44
0,12	3604	51,90



$$\lim_{r \to 0} r^2 \times N(r) = \text{Ctte} = \text{Aire de la surface}$$

$$\lim_{r \to 0} r^3 \times N(r) = \text{Ctte} = \text{Volume du solide}$$

Dans les expressions des limites ci-dessus, on voit que l'exposant de *r* donne la dimension de l'objet étudié: 1

pour une ligne courbe, 2 pour une surface, 3 pour un volume. La dimension D d'un objet est telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{r \to 0} r^{D} \times N(r) = Ctte \\ \text{si } d < D, \ \lim\limits_{r \to 0} r^{d} \times N(r) = \infty \\ \text{si } d > D, \ \lim\limits_{r \to 0} r^{d} \times N(r) = 0 \end{cases}$$

Si on procède de même avec la courbe de VON KOCH, en divisant cette fois par 3 l'ouverture du compas, ce qui multiplie par 4 le nombre de reports, on cherchera :

$$\exists D \in R \ ? \ ; \ \lim_{p \to \infty} \left(\frac{1}{3^p}\right)^D \times 4^p = Ctte$$

$$\exists D \in R \ ? \ ; \ \lim_{p \to \infty} \left(\frac{4}{3^D}\right)^p = Ctte$$

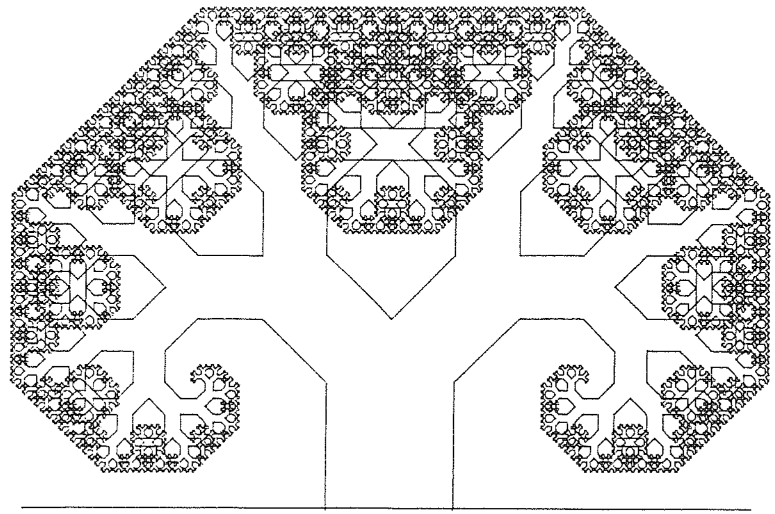
ce qui impose $D = \dfrac{Ln(4)}{Ln(3)} = 1{,}26\ldots$ et donne à cette « courbe » une dimension fractale non entière, strictement entre 1 et 2. Il est remarquable, et conforme à l'intuition, que cette méthode donne une dimension fractale de 2 pour la courbe de Peano !

Concernant la dimension d'auto similarité, ou d'homothétie interne, elle donne pour la courbe de VON KOCH la même valeur irrationnelle. Si un objet contient N copies de lui même dans un rapport d'homothétie r, la dimension d'homothétie interne est le nombre D tel que : $N = \dfrac{1}{r^D}$ d'où $D = \dfrac{Ln\left(\frac{1}{N}\right)}{Ln(r)} = \dfrac{Ln(N)}{Ln\left(\frac{1}{r}\right)}$. Pour le simple segment, qui contient 43 copies de lui même dans un rapport 1/43, on obtient une dimension d'auto similarité de 1, de même que la dimension d'homothétie interne d'un carré sera de 2 puisqu'il contient 1849 petits carrés 43 fois plus petits. Et pour la courbe de VON KOCH, qui est formée de quatre parties homothétiques d'elle même dans un rapport 1/3 on a N=4 et r=1/3, et on retrouve bien :

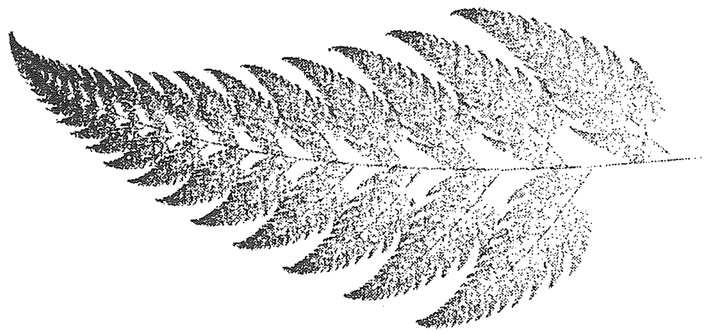
$$D = \frac{Ln(4)}{Ln(3)}$$

II.4 - Modélisation de la nature

Les objets fractals artificiels (construits par algorithme) modélisent très bien les objets naturels. Voici une modélisation Pythagoricienne du chou fleur de St Pol de Léon

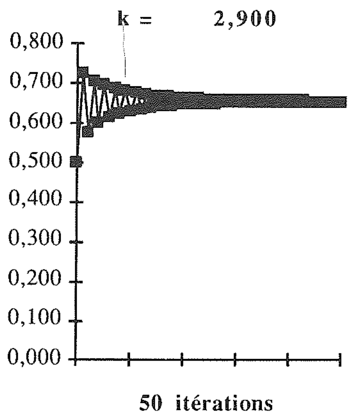


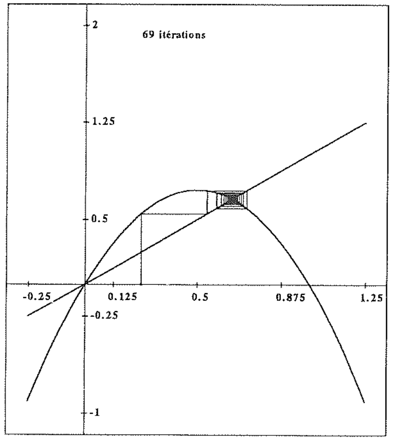
Voici une fougère obtenue par itération d'applications affines à un motif fait de quatre rectangles, un pour la queue, deux pour les folioles latérales et un pour la grande feuille centrale.



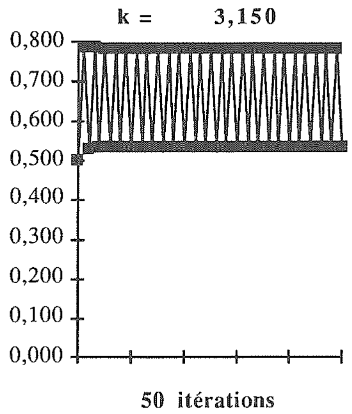
II.5 - Mitchell FEIGENBAUM et les bifurcations

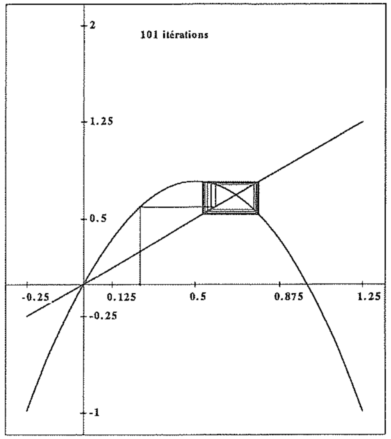
En 1979 **Mitchell FEIGENBAUM** publie son article « Quantitative universality for a class of non linear transformations ». Il y étudie les itérations de la fonction $f(x) = kx\ (1-x)$, c'est à dire quasiment la même que l'équation logistique de Verhulst, et il s'intéresse à l'influence du cœfficient de couplage k. Il observe que pour des valeurs de k inférieures à 3, on a une bonne convergence de la suite des itérés vers le point fixe de f.



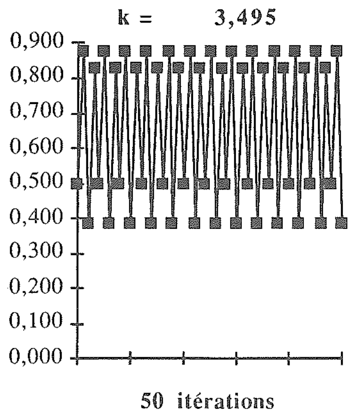


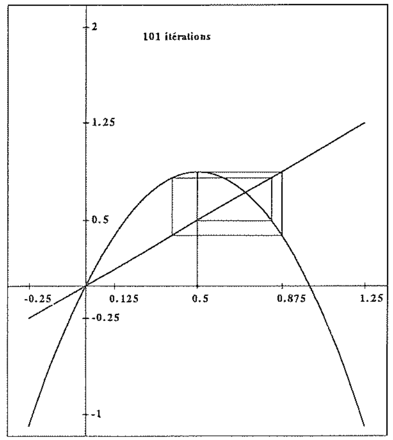
Mais pour k supérieur à 3, le point fixe devient répulsif: la suite des itérés ne peut converger qu'en étant stationnaire à partir d'un certain rang, c'est à dire en prenant comme point initial un des ascendants du point fixe. Par contre il apparaît dans les autres cas deux points attractifs, (correspondants à des points fixes de l'application f^2), autres que le point fixe de f :



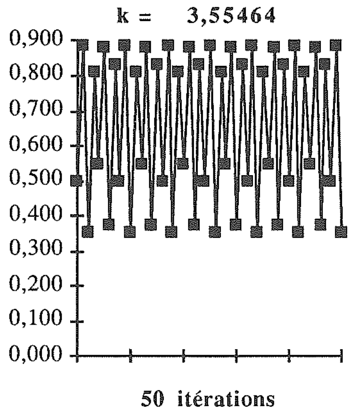


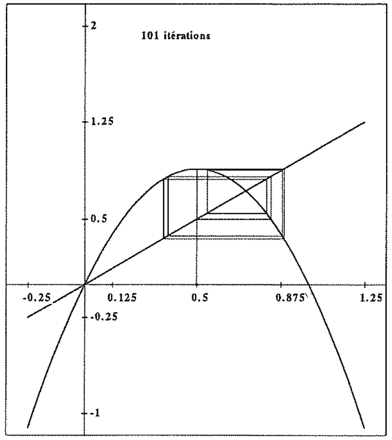
En augmentant encore les valeurs de k, Feigenbaum constate que les deux points de l'attracteur deviennent à leur tour répulsifs, et qu'on a ensuite quatre points attractifs :





puis huit points attractifs...



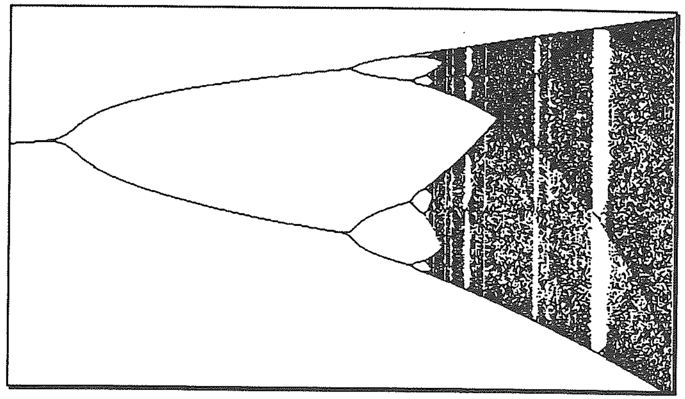


Si on note Λ_n la valeur de k pour laquelle le nombre de points de l'attracteur double pour la $n^{\text{ième}}$ fois, Feigenbaum observe que la suite formée des différences de deux termes Λ_n consécutifs, c'est à dire la longueur $\left(\Lambda_n - \Lambda_{n+1}\right)$ de l'intervalle sur lequel la période 2^n est stable, suit une loi de division par un facteur qui tend vers 4,669201609103... Mieux, il pense que ce nombre a un caractère universel ! Et en effet il le retrouve en étudiant les itérés d'une fonction sinusoïdale.

Par ailleurs, P.Collet (École Polytechnique), J.P. Eckmann (Université de Genève) & O. Lanford (Berkeley) ont montré qu'on retrouvait ce nombre dans l'attracteur lié à l'algorithme d'itération chaque fois que la variation du paramètre k induisait un doublement du nombre de points de l'attracteur. Ce nombre est appelé aujourd'hui nombre de Feigenbaum. On le retrouve dans bien des phénomènes physiques, en particulier dans les courants de convection apparaissant dans des fluides chauffés.

Le raccourcissement rapide des intervalles de stabilité de chaque période conduit rapidement à une situation inextricable, pour laquelle le terme de *chaos*, introduit par Jim Yorke en 1975 semble approprié, ainsi que celui d'*attracteur étrange*. Pour s'en faire une idée, on peut tracer le diagramme de bifurcation : porter en abscisse la valeur de k, pour cette valeur de k, calculer la suite des itérés de f jusqu'à ce qu'elle entre dans un cycle périodique pour

l'ordinateur ; on a obtenu les valeurs appochées des points de l'attracteur, qu'on porte en ordonnée. La figure obtenue, appelée figuier de Feigenbaum, permet de visualiser les résultats précédents : pour de faibles valeurs de k, la suite des itérés converge - un seul point dans l'attracteur - puis on obtient une suite de période 2, puis 4, puis 8 etc...



Des agrandissements de cette figure, par exemple au voisinage de la bifurcation Λ_3 montrent qu'elle jouit de la propriété d'auto-similarité.

II.6 - L'étrange attracteur de LORENZ

A la fin des années 50, E.N. Lorenz, un météréologue du MIT, pour tester les méthodes de prévision alors considérées comme les meilleures, mit au point un petit système de douze équations répondant à quelques critères simples : il devrait simuler de façon rudimentaire un modèle d'atmosphère, les solutions ne devaient pas être périodiques, mais être indéfiniment irrégulières. Après avoir fait tourner le modèle sur son calculateur et imprimé les résultats de nombreuses itérations, il décida de réutiliser des résultats intermédiaires comme nouvelles valeurs initiales. Il découvrit que la solution ainsi obtenue différait notablement de la première. Après avoir suspecté une erreur de programmation, il se rendit compte que la raison était l'infime écart entre les valeurs originales contenues dans l'ordinateur et celles qu'il avait tapées depuis le listing où les nombres avaient été troncaturés à l'impression. Après quelques itérations, la différence s'amplifiait jusqu'à devenir aussi importante que le signal lui-même.

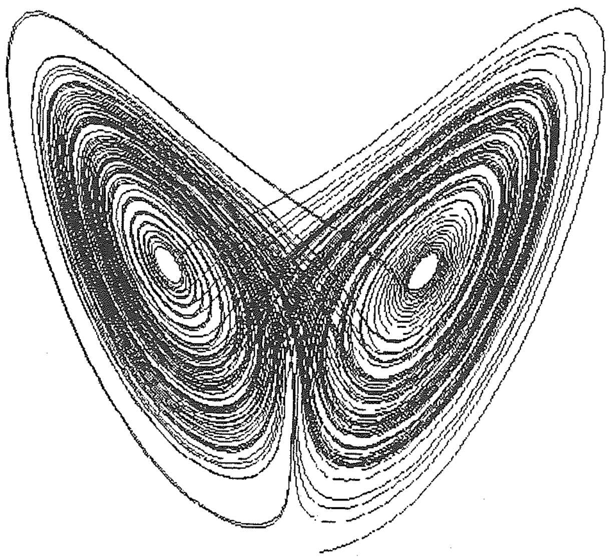
Une situation analogue a été rencontrée au paragraphe I.1 pour la suite de P.F. VERHULST : si on remplace la valeur initiale 0,5 par la valeur 0,5001 on obtient deux suites au comportement complètement différent, l'écart entre les deux étant du même ordre de grandeur que les termes de la suite !

Lorenz en conclut que même si l'on disposait d'un modèle parfaitement correct de l'atmosphère et de ses interactions avec l'océan, et d'ordinateurs infiniment puissants et précis, toute prédiction à long terme serait pourtant impossible : la mesure des paramètres (température, pression, hygrométrie etc...) nécessaires pour initialiser les calculs fournit des résultats nécessairement imprécis, et ces petites erreurs en produiront de plus grandes au fur et à mesure des itérations, et elles deviendront telles que les résultats imprimés seront complètement et *certainement* faux. Il résuma ce point de vue en une métaphore aujourd'hui célèbre : «le battement d'aile d'un papillon peut-il entraîner un ouragan sur le Texas ?». Les instituts de météorologie font aujourd'hui des prévisions à cinq jours, et pensent arriver d'ici quelques années à des prévisions à huit jours. Mais ils sont convaincus qu'il sera impossible d'aller au delà, en raison de trop nombreux papillons.

Plus tard, Lorenz détermine et étudie un système d'équations différentielles à trois variables

$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 10y \\ \dot{y} = 28x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \dfrac{8}{3}z \end{cases}$$

Le tracé des courbes solutions issues d'un point initial fait apparaître une structure enroulée comme un feuilleté en deux nappes : c'est l'attracteur de Lorenz.



Deux points initiaux très voisins suivraient au début des trajectoires proches, mais rapidement elles vont devenir très différentes l'une de l'autre : l'un des points va s'engager vers la première nappe et l'autre vers la seconde. Là encore on retrouve, illustrée de manière frappante, la sensibilité aux conditions initiales.

III - L'ENSEMBLE DE MANDELBROT

Découvert en 1980 par Benoît Mandelbrot, c'est sans aucun doute l'objet mathématique le plus beau et le plus complexe de ce siècle, malgré la simplicité de sa définition !

On considère la fonction complexe de la variable complexe qui à z associe $f(z) = z^2 + c$ où c est une constante complexe fixée. On calcule la suite des itérés de cette fonction à partir de 0 :

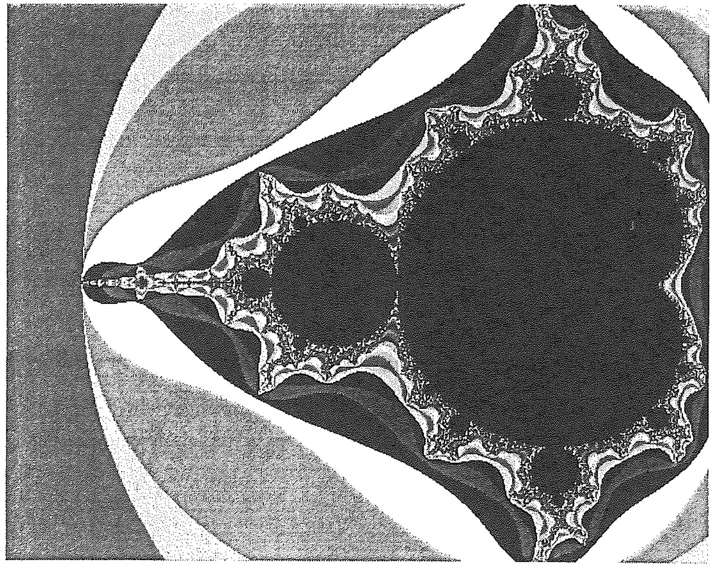
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c \end{cases}$$ obtenant ainsi successivement :

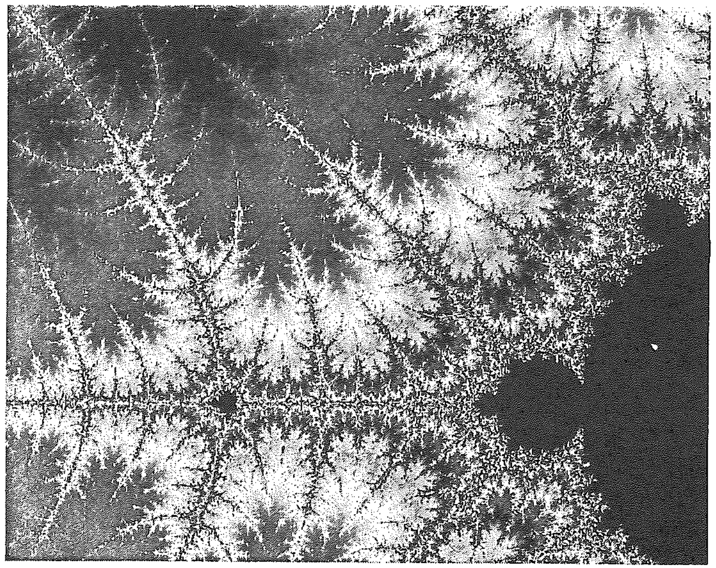
$$z_0 = 0$$
$$z_1 = c$$
$$z_2 = c^2 + c$$
$$z_3 = (c^2 + c)^2 + c$$
$$z_4 = ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c$$
$$z_5 = (((c^2 + c)^2 + c)^2 + c)^2 + c \ \ldots$$

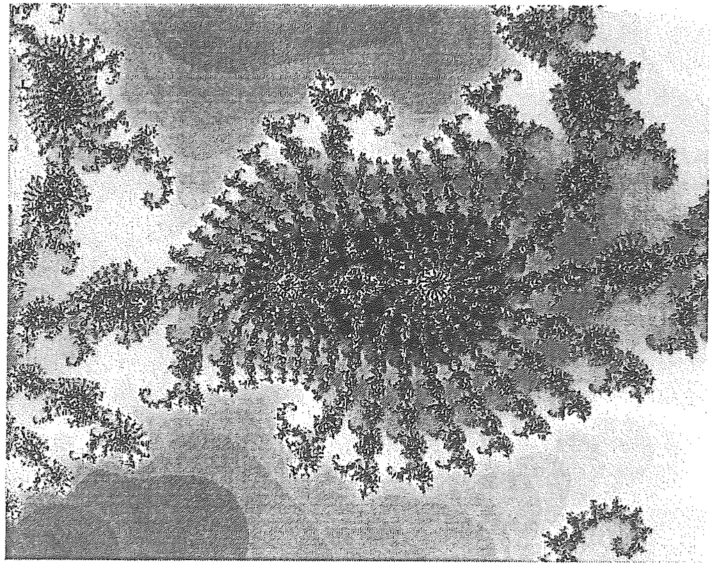
Selon la valeur de c, ou bien la suite est bornée, ou bien elle est non bornée, et l'ensemble M de Mandelbrot est justement formé de tous les complexes c pour laquelle la suite des itérés de f est bornée. Cet ensemble est évidemment non vide car il contient 0, et ne contient pas tous les complexes, puisqu'il n'y a pas 1. On démontre qu'il est borné, et par exemple inclus dans le disque de centre 0 et de rayon 2. Cela permet d'établir un algorithme très simple qui traite un complexe c donné :

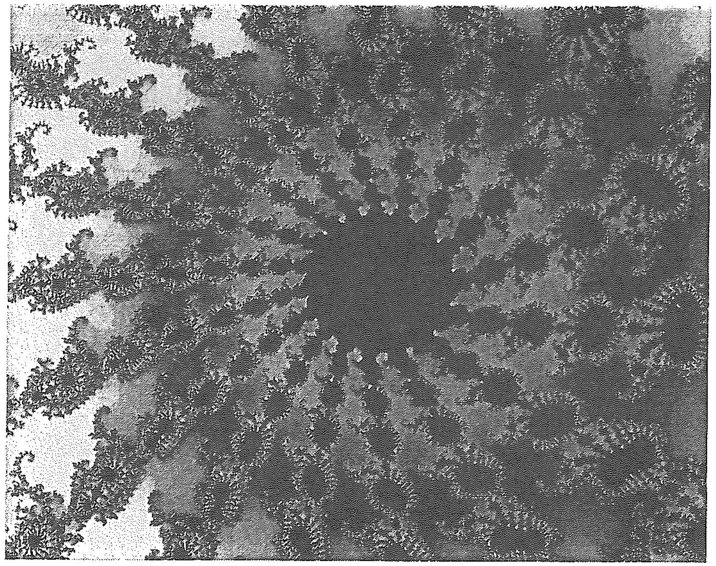
```
max_itérations:= 500
nb_itérations:=0
lire(c)
tant que (
          (module de c <= 2)
          et
          (nb_itérations  < max_itérations)
         )
    c:=c*c + c
    nb_itérations := nb_itérations+1
fin tant que
```

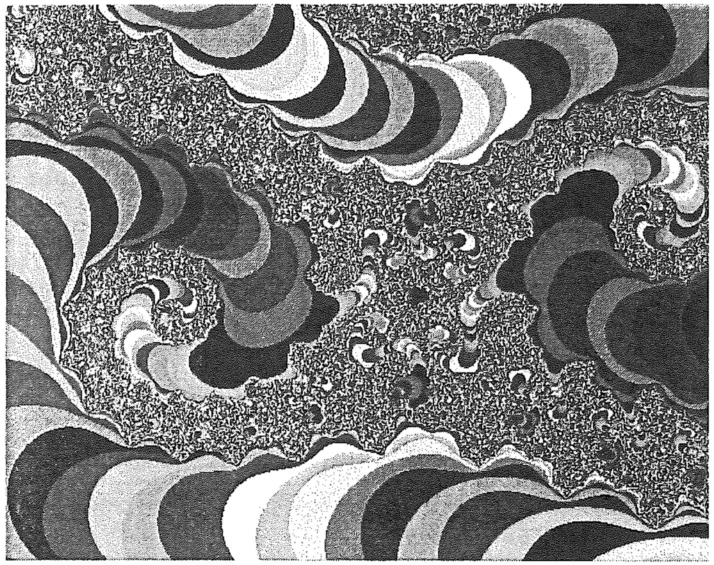
à la suite de quoi, ou bien le module de c dépasse 2 et il est certain que la valeur initiale de c n'est pas dans M, ou bien on a fait 500 répétitions et il est fortement probable que celle ci soit dans M. Pour visualiser M, un programme d'affichage peindra le pixel correspondant au second cas en noir, et le pixel correspondant au premier cas en couleur, puis passera au pixel voisin. Le nombre d'itérations faites avant que le module ne dépasse 2 est une bonne indication de la «proximité» de c avec M, et on pourra fixer la couleur plus ou moins sombre selon que c est plus ou moins proche de M.











En raison de la diffusion rapide de programmes affichant M sur des écrans couleurs, des milliers de personnes dans le monde ont voyagé alentour de l'ensemble de Mandelbrot, et on peut dire qu'aucun d'eux n'a fait le même voyage. Certains ont découvert des régions d'une surprenante beauté, et comme les navigateurs au mouillage d'îles nouvelles, les ont baptisées de noms évocateurs : «vallée des hippocampes», «confins de l'Ouest», «Love Canal»... Tous ont remarqué la présence obsédante de motifs répétitifs tels que disques portant sur leur frontière de nombreux autres disques plus petits portant sur leur frontière de nombreux autres disques plus petits, des spirales enchevêtrées (les queues d'hippocampes), et des images réduites de l'ensemble M lui-même.

De nombreux résultats ont été publiés concernant l'ensemble M. Par exemple sa connexité, (A.Douady et J.H. Hubbard 1982) : ainsi les copies réduites de M qui semblent en être séparées, y sont en fait connectées par de minces filaments dont la ténuité échappe aux grossiers pixels de nos écrans. Par ailleurs, M n'est pas auto-similaire, contrairement à l'impression première. Enfin le lien étroit qui unit M et les ensembles de Julia, puisque M est l'ensemble de tous les complexes c pour lesquels le Julia J_c associé est connexe. Si vous observez M avec un microscope visant le point c, ce que vous voyez ressemble à ce que vous aurez en observant le Julia J_c, avec le même microscope visant le même point c, la ressemblance étant d'autant plus forte que le grossissement est important.

IV - LES RECHERCHES ET APPLICATIONS RÉCENTES

Dans les 15 dernières années, la géométrie fractale est devenue un outil important dans la plupart des sciences « naturelles », et les domaines d'utilisation sont nombreux en physique, chimie, biologie, géologie, météorologie... :

- percolation (diffusion d'une épidémie, d'un incendie de forêt) ;
- prise en gel du yaourt bulgare ;
- structure de la boue ;
- forme des nuages ;
- cycles des glaciations terrestres ;
- structure des vaisseaux du rein ; bronchioles des poumons ;
- périodicité des vols de criquets migrateurs ;
- anomalies dans les cardiogrammes ;
- désordres boursiers ...

En mathématiques, la géométrie fractale a profondément renouvelé l'attrait de l'expérience, dont c'est la renaissance après les décennies Bourbaki.

Elle permet la synthèse d'images de fougères, arbres ou plantes monstrueuses, de paysages de montagne, donnant aux simulations un réalisme très fort. Elle suscite des créations artistiques utilisées dans de nombreux films ou spots publicitaires. Elle autorise la compression et la décompression des données bitmap avec une très grande rapidité ...

V - UNE MUTATION ÉPISTÉMOLOGIQUE

Un point mérite d'être souligné, c'est la ***rapidité de la diffusion*** de ce nouveau concept. En moins de 15 ans, il a donné lieu à de nombreuses avancées dans des disciplines variées, théoriques autant qu'appliquées.

Des phénomènes jusque là délaissés car «trop compliqués» ont été remis à l'étude, comme si les chercheurs avaient le sentiment d'avoir enfin un outil de modélisation du désordre.

Ce concept est aujourd'hui devenu «grand public», suscitant de nombreux articles dans des revues de vulgarisation scientifique ou publications techniques.

Un second point à noter est ***l'universalité du concept*** : il est utilisé dans de nombreuses disciplines et modélise des phénomènes à toutes les échelles micro-, normalo- ou macroscopiques.

Les résultats obtenus, en particulier dans l'étude des phénomènes turbulents, ont signé la mort définitive du déterminisme. La conception du siècle dernier, faisant croire que derrière tel désordre apparent se cache un ordre inébranlable (d'essence divine ?) que la Science élucidera un jour semble aujourd'hui complètement ridicule.

Au contraire on peut se demander si l'ordre apparent de la nature ne masque pas, à une échelle plus petite ou plus grande, un véritable chaos, que l'on pourra peut-être un jour approximer par des modèles itératifs simples. C'était l'intuition d'ILYA PRIGOGINE dans La Nouvelle Alliance (1979) : «Nous sommes dans un monde irréductiblement aléatoire, où le déterminisme fait figure de cas particulier, et où l'irréversibilité et l'indétermination microscopique sont la règle...»

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARNSLEY M.
Fractals Everywhere — Academic Press 1988

[2] DEVANEY R.
Chaos, fractals and Dynamics — Addison Wesley 1989

[3] DOUADY A.
Julia sets and Mandelbrot Sets, in [8] — Springer-Verlag 1986

[4] ESCHER M.
L'œuvre graphique — Bibliothèque Pour La Science BELIN

[5] GLEICK J.
Chaos, Making a New Science — VIKING, New York 1987

[6] MANDELBROT B.
Les objets fractals, forme, hasard et dimension FLAMMARION 1975

[7] PEITGEN H.O. & SAUPE D.
The Science of fractal Images — Springer-Verlag 1988

[8] PEITGEN H.O. & RICHTER P.H.
The Beauty of Fractals — Springer-Verlag 1986

[9] PEITGEN H.O., JÜRGENS H., & SAUPE D.
Fractals for the Classroom — Springer-Verlag 1992

[10] PRIGOGINE & STENGERS
La Nouvelle Alliance — NRF 1979

[11] RUELLE David
Hasard et Chaos — Odile Jacob 1991

[12] STEWART Ian
Does God Play Dice ? — Penguin Books 1989
Dieu joue-t-il aux dés — Flammarion 1992

[13] YOUNG W.H. & YOUNG G.C.
The Theory of Sets Of Points — Cambridge University Press 1906
Chelsea 1972

[14] Nombreux numéros de Pour la Science, en particulier les articles de A.K. DEWDNEY dans les n° 161, 167, 170,173 ou de La Recherche en particulier le n° spécial 232, La Science du désordre.

[15] Cassette video «Nothing but Zooms» ; Société Art Matrix, PO Box 881-I, ITHACA, NY 14851

[16] Cassette video par PEITGEN JÜRGENS, SAUPE & ZAHLTEN ; «Fractals, an animated discussion», Freeman 1990

"Les élèves de collège doivent-ils ignorer les algorithmes de calcul ou de constructions où un nombre fini d'étapes ne suffit pas pour trouver un résultat ?"

Ruben Rodriguez
IREM de Basse Normandie

I - INTRODUCTION

(Quelques sujets de rencontre avec l'infini au collége).

Ce qui a d'abord attiré notre attention c'est l'utilisation de plus en plus fréquente de la calculatrice tant à l'école qu'au collége. Il est évident que ceci comporte des conséquences sur l'acquisition des notions qui sont à la base des divers concepts mathématiques abordés dans cette période (surtout dans la mesure où la calculatrice donne l'impression que tous les résultats des opérations sont obtenus avec un nombre fini de chiffres).

Un autre fait qui a attiré notre attention lors du déroulement des activités géométriques (au niveau de la 5ème), où nous avons conçu des reproductions de figures récurrentes [1] est celui de l'algorithme de construction qui contient de façon naturelle l'infini potentiel (au sens de Hilbert) ; là encore on ne peut pas rester dans le cadre d'un nombre fini d'étapes sous peine d'occulter des questions mathématiques fondamentales et que d'ailleurs les élèves découvrent sans peine.

Voilà les deux domaines d'observations que nous avons retenus pour notre article.

Nous sommes convaincus depuis bien longtemps que dans les premières années du collège les enfants ont une curiosité trés forte. Ils s'interrogent bien plus que les adultes de façon trés ouverte sans les conventions de l'univers adulte qui occulte souvent les questions clés qui sont à l'origine des connaissances nouvelles..

[1] Voir Annexe : article sur les activités de reproduction des figures qui suivent un algorithme recurrent de construction.

Nous finirons cette introduction par un avertissement qui concerne le présent travail. Il s'agit, plus que d'un travail d'aide didactique possible (comme nous vous le proposons dans nos publications du groupe IREM Raisonnement Déductif et Démonstration), d'un écrit sur des interrogations plus ou moins spontanées sur la notion d'infini au collège. N'oublions pas que toute production didactique comporte un temps d'interrogations, d'expérimentations, et de conclusions provisoires.

II - QUELQUES OBSERVATIONS AU COLLEGE.

a) En sixième.

Bien que notre principal but dans nos classes de sixième soit celui de fonder les bases méthodologiques pour pouvoir aborder les problèmes d'arithmétique et les constructions géométriques, (avec tout ce que cela comporte au niveau du sens des opérations, de la connaissance des figures usuelles et de l'utilisation rigoureuse des instruments de dessin), nous n'avons pas pu laisser de côté certaines questions pédagogiques concernant l'infini.

Premier exemple : Les divisions qui ne s'arrêtent pas.

A propos d'un problème d'arithmétique nous avons discuté avec les élèves sur l'existence des solutions en fonction des nombres donnés au départ. Ceci nous a conduit à étudier des divisions où le diviseur est 3. Les élèves se sont engagés sur des discussions portant sur le résultat affiché par les calculatrices et les résultats obtenus par une division faite "à la main". En premier lieu une division comme 1:3 faite à la calculatrice donne une idée fausse du résultat car on obtient un nombre fini de chiffres, mais si on observe le schéma de l'opération "faite à la main" on voit que les élèves parlent aussitôt d'une division **qui ne finit jamais**, ils disent par exemple : "ça continuera toujours comme ça et ça ne s'arrêtera pas".

L'intérêt des élèves de sixième vers des nombres comme O,333.... est éveillé. C'est ainsi qu'ils n'ont aucune peine à se lancer, calculatrice en main, **à conjecturer** sur certaines divisions qui ne finiront jamais. Mais seul, le schéma de division "à la main" constitue pour eux une **preuve** pour **argumenter** que la division ne s'arrêtera pas.

C'est ainsi que parmi certains "décimaux illimités" ils font connaissance avec 0,111.... ; 0,222...; 0,333...; 0,444...; etc et ils sont vite intrigués par 0,999 ... car ils peuvent écrire des divisions 1 : 9 ; 2 : 9 ; 3 : 9 etc jusqu'à 8 : 9 mais 9 : 9 est égal à 1; et on ne peut pas obtenir 0,999.... Ceci nous à permis de signaler la différence entre les divisions ; comme 3333333 :100000000 = 0,3333333 qui s'arrête (on le voit avec le schéma "à la main") mais qui à la calculatrice donne un affichage identique à la division 1 : 3. Ceci nous a servi à poser les premiers jalons sur la notion de quotient approché, d'approximation, d'encadrement et des dangers d'une lecture non critique des résultats affichés par la calculatrice.

Cette recherche suscitait donc un grand intérêt chez les élèves et nous avons relevé alors quelques unes de leurs idées qui allaient dans une bonne direction : par exemple il y a eu des élèves qui nous ont proposé d'inventer un symbole pour les quotients du type
(1 : 3) ; (2 : 3) ; (1 : 7) etc, (qui ne finissent pas) ;
nous avons proposé d'écrire $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{7}$

Les élèves étaient trés attirés par l'idée de fabriquer des nombres par un simple jeu d'écriture décimale. C'est ainsi qu'on s'est amusé à écrire des nombres comme :
0,1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ....nombre qui à suscité beaucoup d'admiration et de commentaires.

C'est là que nous avons profité de l'occasion pour nous lancer sur la représentation des décimaux par un axe gradué.

Deuxième exemple : "L'infinité des points d'un segment".

Une fois donnés les mécanismes de représentation des nombres sur un axe gradué nous avons observé que l'idée d'assimiler un point à l'endroit géométrique où on représente un nombre, conduit naturellement à parler d'un "nombre d'infini" de points dans le segment [OI] (correspondant à l'intervalle [0,1]. Les argumentations étaient de nature arithmétique du type :"entre deux nombres par exemple 0,3 et 0,4 on peut placer toujours d'autres nombres et comme ceci correspond aux points, alors on peut dire que entre deux points il y a d'autres points". Bien entendu c'est encore sous une forme potentielle que l'infini (dénombrable) est soujacent aux discours des élèves.

Troisième exemple : "La mise en correspondance de deux suites des numérateurs et dénominateurs des fractions.

Dans le cadre de l'apprentissage des fractions et aussi ultérieurement, de la correspondance proportionnelle, nous avons travaillé autour d'une situation avec des billes de deux types et des équilibres dans une balance de Roverbal . Quand ils ont conjecturé sur le nombre de billes du prochain couple de billes "bleues-rouges" en équilibre l'idée d'infini qui commençait à s'intégrer dans l'univers des concepts des élèves leur est venue spontanément. Il y a eu des élèves qui disaient qu'à partir de la "base" $\frac{3}{4}$ on pouvait obtenir d'autres couples $\frac{6}{8}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{12}{16}$ etc "jusqu'à l'infini", mais qu'il fallait respecter la relation. C'est ainsi que la quotient 0,75 prend toute sa valeur d'invariant mathématique qui exprime numériquement le phénomène des équilibres successifs et son invariance de la relation proportionnelle.

b) En cinquième

A propos d'une des activités qui s'inscrit dans notre stratégie à long terme (de la sixième à la troisième) pour l'apprentissage de la démonstration où il fallait reproduire une figure par un algorithme récurrent (cf note 1), nous avons eu encore à faire à l'infini potentiel et à une notion de convergence dans le plan géométrique.

En effet à propos de la deuxième phase de cette activité où on rentre directement dans la jusitification des propriétés de la figure par des argumentations très proches de celles utilisées dans une démonstration nous avons observé un prolongement des conjectures à propos d'une convergence des figures successives vers un des sommets du carré (voir figure). Les élèves ont avancé des arguments qui allaient vers une distinction entre un "point de vue visuel" où les figures deviennent de plus en plus petites en se rapprochant du sommet et un "point de vue plus raisonné où ils disaient que bien que les triangles deviennent de plus en plus petits ils continuent à être des triangles et ils ne seront jamais confondus à un point.

Nous arrêtons nos observations pour effectuer quelques réflexions "à chaud".

III - QUELQUES REFLEXIONS

Comme nous pouvons le constater à travers le récit des observations présentées ici, l'enseignement des mathématiques au collège ne peut pas ignorer les infinis sous peine de cacher aux élèves des notions indispensables à la compréhension des concepts concernant par exemple les fractions, les quotients, les approximations, les points d'un segment et les limitations des calculs à la calculatrice.

Nous constatons aussi que les élèves n'ont aucun mal à intégrer l'infini potentiel dans son discours.

Ceci confirme une fois de plus qu'ils sont bien capables d'effectuer des raisonnements qui portent sur un univers des possibles. C'est-à-dire sur des processus qui "se répètent à l'infini". Une autre réflexion qui nous paraît importante est celle qui concerne l'utilisation des supports qui facilitent l'apparition des infinis (par exemple "les divisions" faites à la main ") ou bien qui l'empêchent comme la calculatrice dans les divisions. De même nous pensons que les nombres décimaux et leur représentation sur un axe permettant d'affiner la notion de point géométrique sur un segment, mais on a vu aussi que les élèves distinguent le point considéré comme un objet physique que serait la limite de la perception "à l'oeil nu" et le point comme "objet idéal" que seuls des raisonnements nous permettent de manipuler.

ANNEXE

Activités géométriques de reproduction des figures qui suivent un algorithme récurrent de constructions

Le groupe "RAISONNEMENT DEDUCTIF ET DEMONSTRATION de l'I.R.E.M de Basse-Normandie présente ici une activité centrée sur la reproduction d'un dessin complexe qui suit un algorithme récurrent de construction.[2]

OBJECTIFS :

Provoquer une rupture entre la notion des données purement perçues à partir du dessin et les instruments utilisés pour observer et la notion des données formulées explicitement en dehors du dessin afin de pouvoir justifier les conjectures géométriques.

Première phase : "Objet physique"

Pratique de l'observation des propriétés géométriques et de l'utilisation rigoureuse des instruments de dessin.

Plan de construction "Film" de la construction. Formulation de conjectures.

Conflit entre des conjectures. Impossibilité de justifier à partir des données expérimentales.

Deuxième phase : "Objet idéal"

Formulation de données explicites.

Justification des conjectures avec des argumentations qui utilisent des propriétés simples du cours. Discours de formulation proche des démonstrations.

---

[2] Il s'agit d'une des recherches du groupe que j'ai expérimenté dans le cadre de nos travaux sur l'apprentissage de la démonstration.

I - PRESENTATION DE L'ACTIVITE.

Dans nos objectifs à long terme sur l'apprentissage de la géométrie et de la démonstration nous sollicitons les élèves de niveau cinquième à aller encore plus loin dans l'apprentissage de la géométrie.

En effet nous avons d'abord bien mis en place en sixième des activités de reproduction de dessins complexes avec les apprentissages sur les propriétés des figures usuelles, sur la rigueur de l'utilisation des instruments, sur la forme d'écriture d'un plan de construction, sur la notion d'étapes de construction dessinées à l'aide d'un "film" (où les élèves expliquent à chaque étape le pourquoi de tel ou tel tracé, la propriété utilisée et l'instrument choisi)[3] .

Nous proposons de fixer maintenant l'idée d'objet physique et d'objet idéal à l'aide d'une activité qui se déroule en deux phases : premièrement il s'agit de reproduire une figure (voir annexe), soit à la même échelle ou soit dans une autre échelle. Dans cette partie les élèves réinvestissent les acquis, à savoir : la capacité d'observation en vue de la recherche d'invariants géométriques dans le suite de figures, utilisation rigoureuse des instruments de géométrie, connaissance des propriétés des figures usuelles, rigueur dans l'écriture du plan de construction.

Deuxièmement après avoir constaté qu'il est impossible d'avoir des certitudes sur les conjectures faites sur le dessin (qui est seulement un objet physique) soumis à des vérifications expérimentales tachées d'incertitude) on montre aux élèves la structure (à partir d'un carré) qui a servi à élaborer l'algorithme de construction (on passe à l'objet idéal sur lequel on peut avoir des certitudes). On prend conscience du fait que toutes les conjectures ne peuvent pas avoir de justification si on ne dit pas explicitement les données du départ.

---

[3] Voir article : Géométrie 6ème-4ème IREM de Basse-Normandie Groupe Raisonnement déductif et démonstration (Janvier 1992)

II - OBSERVATIONS SUR LA PRODUCTION DES ELEVES.

La production des élèves dans la première phase est en général trés convergente. Ils utilisent des invariants d'une étape à la suivante pour suivre un algorithme itéré. Il y a eu cependant certains élèves, notamment un élève qui a une très bonne capacité de raisonnement, qui ont fait la construction par un transport de mesures du modèle et qui n'ont fait allusion à aucun invariant dans son plan de construction. Ce dernier élève argumentait que comme il n'avait aucune structure géométrique donnée explicitement il fallait se contenter de reproduire la figure à partir des données expérimentales.

A partir des propriétés conjecturées par les élèves on a réussi à faire comprendre qu'aucune conjecture ne pouvais être prouvée par la simple observation empirique du modèle.

C'est ainsi que la transition vers la deuxième phase est apparue.

Dans la deuxième phase nous analysons la figure mais cette fois elle est construite à partir d'un cadre qui est le carré ABCD et c'est ainsi qu'on s'aperçoit de la structure géométrique sous-jacente aux constructions itérées.

C'est par l'utilisation successive des diagonales du carré et des médianes de ce même carré qu'on construit la figure. Dans cette phase on peut alors justifier certaines des propriétés remarquées dans la phase 1. Par exemple la plupart des élèves avaient conjecturé sur quelques familles de droites parallèles, et ici ils l'ont justifié par la propriété des diagonales d'un carré qui sont perpendiculaires et par la propriété des droites perpendiculaires à une même droite d'être parallèles entre elles.

Il s'agit donc d'utiliser des propriétés connues du cours de géométrie pour valider les conjectures.

Le discours argumentatif a une forme analogue à celui qu'on utilisera en quatrième pour les démonstrations mais bien entendu il ne s'agit pas encore de dire qu'on fait des démonstrations à la manière dont on entend cette activité spécifique de la quatrième.

III - RESUME DE L'ACTIVITE.

Phase 1 :

Observation du modèle. Structuration de celui-ci autour des conjectures personnelles. Utilisation rigoureuse des instruments pour effectuer une reproduction à l'échelle libre. Ecriture d'un plan de construction. Mise en commun d'une liste des conjectures sur des propriétés géométriques remarquables (parallélisme, perpendicularités, angles, relations des distances, etc.........). Statut de l' "objet physique" expérimental. Impossibilité d'avoir des certitudes sur cet "objet physique".

Phase 2 :

Structuration de la figure autour du carré. Argumentation pour justifier certaines conjectures de la phase 1. Utilisation d'un discours qui s'appui sur les propriétés du cours. La mise en forme du discours est de même style que celui utilisé en quatrième pour les activités de démonstration.

Statut de "l'objet idéal".

LISTE NON EXHAUSTIVE DES PROPRIETES UTILISABLES :

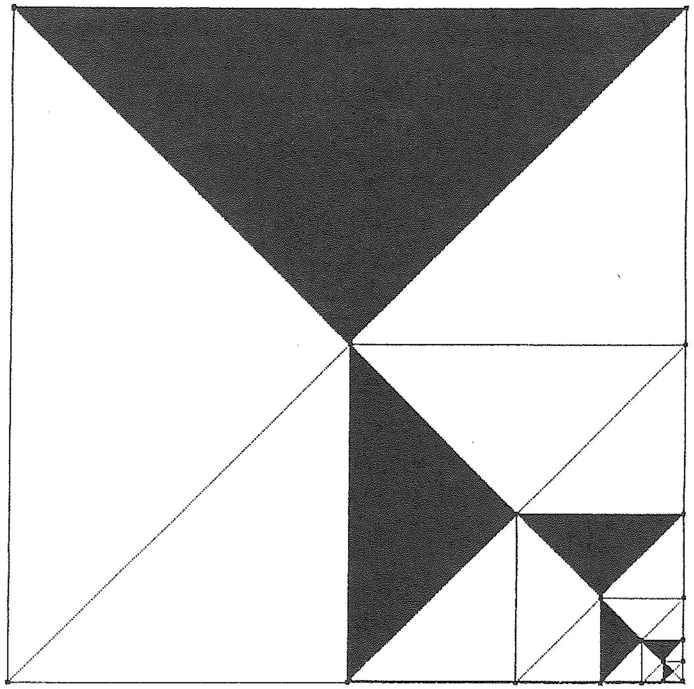
"Les diagonales d'un carré se coupent perpendiculairement dans son milieu".

"La somme des mesures en degrés des trois angles d'un triangle vaut 180".

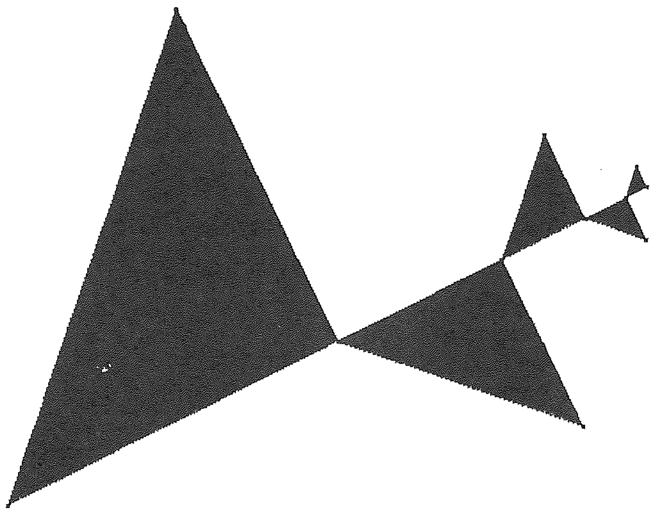
"Un triangle ayant deux côtés de même mesure est isocèle et alors il a deux angles égaux".

"Toutes les droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles".

"Si les mesures des angles internes sont égales alors les deux droites coupées par la droite sécante sont parallèles".



Deuxième phase
(à partir d'un carré)
Justification de l'algorithme récurrent
Utilisation des propriétés du cours



Première phase
(le dessin)
Activité expérimentale.
Rigueur des instruments, conjectures.

COMMISSION INTER-IREM
HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

GEOMETRIE PROJECTIVE ET INFINI

Actes du 9ème colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

Le projectif ou la fin de l'infini [1]

Remarques sur l'ontologie des objets mathématiques

Rudolf Bkouche
IREM de Lille

"la construction des concepts dépend de la façon de poser les problèmes, laquelle varie à son tour avec le contenu même de la civilisation"[2]

Max Weber

Introduction

"Pourquoi la droite a-t-elle deux points à l'infini en analyse et un seul point à l'infini en géométrie ?"

Cette question qui me fut posée il y a quelques années par une étudiante en licence de mathématique soulève le caractère problématique des concepts mathématiques, lequel caractère problématique implique que l'on ne peut comprendre un concept mathématique qu'à travers les problématiques qui ont conduit à le construire (que ce soient les problématiques originelles ou des problématiques ultérieures nous importe peu ici).

La question de l'infini n'échappe pas à ce caractère problématique, d'autant que la notion d'infini se présente sous de multiples aspects et que les diverses constructions des mathématiciens autour de cette notion se relient à ces divers aspects. Nous nous proposons ici de montrer la spécificité de cet infini géométrique qui se met en place avec la

---

1 Ce texte qui reprend, en le développant, mon exposé au colloque de Brest, peut être considéré comme une suite de mon exposé au colloque de Lyon sur *"La Figure et l'Espace"* (cf. Rudolf Bkouche, "De la géométrie sans figure" in *La Figure et l'Espace*, Actes du colloque Inter-IREM Epistémologie, Lyon 1991, IREM de Lyon 1993).

2 Max Weber, *Essai sur la théorie de la science (*traduit de l'allemand par Julien Freund), Plon, Paris 1965; p. 203

naissance du projectif et qui conduit, comme nous le verrons, à l'élimination de l'infini, ou plutôt à sa *banalisation.*

Nous pourrons alors revenir à la question posée ci-dessus, après avoir essayé d'expliciter les raisons qui ont conduit à introduire la droite numérique achevée en analyse réelle[3] d'une part et d'autre part celles qui ont conduit à imaginer le point de vue projectif[4].

Le point infiniment éloigné (Kepler)

Il est dit dans certains ouvrages d'histoire des mathématiques, que la notion de point à l'infini a été introduite pour la première fois par Kepler; en fait nous verrons qu'il s'agit bien plus d'un point infiniment éloigné que du point à l'infini tel qu'il apparaît aujourd'hui dans la géométrie projective.

En 1604, Kepler publie les *Paralipomènes à Vitellion*[5], première partie d'un traité d'optique *Astronomiae Pars Optica* (pour une étude de cet ouvrage nous renvoyons à la présentation de Catherine Chevalley).

Pour les besoins de l'optique, Kepler introduit par deux fois, et de deux façons différentes, la notion de point à l'infini, ou plutôt comme je l'ai dit ci-dessus, la notion de point infiniment éloigné.

Au chapitre II, étudiant un problème d'ombre au soleil, Kepler énonce le postulat (que nous citons dans la traduction de Catherine Chevalley)

> *"Deux droites lumineuses issues d'une même source ponctuelle de lumière sont considérées du point de vue de la sensation comme équivalentes à des parallèles si elles sont à une distance immensément grande de la base à laquelle elles sont toutes deux reliées, bien qu'en réalité elles soient concourantes à leur origine".*[6]

Ainsi, il s'agit bien plus d'une approximation (justifiée *"du point de vue de la sensation"*) permettant de représenter l'ombre lorsque la

---

[3] Nicolas Bourbaki, *Topologie générale, Ch. IV: Les nombres réels (*deuxième édition), Paris, Hermann 1960
[4] Rudolf Bkouche, "La naissance du projectif" *in Mathématiques et Philosophie* (édité par Roschdi Rasched), CNRS Paris 1991; p. 239-285
[5] Kepler, *Paralipomènes à Vitellion* (traduction et notes par Catherine Chevalley), Vrin, Paris 1980. Le texte original latin *Ad Vitellionem Paralipomena* a été réédité par Culture et Civilisation, Bruxelles 1968
[6], Kepler, *Paralipomènes à Vitellion* p. 154

source est *"immensément"* éloignée, que du point de concours de deux droites parallèles.

Par contre, au chapitre IV, Kepler va beaucoup plus loin lorsqu'il considère une parabole comme une section conique dont les foyers sont séparés par une *"distance infinie"*[7]. En fait, toujours pour les besoins de l'optique, Kepler veut présenter les propriétés des sections coniques *"d'une manière méchanique, analogique et populaire"*.

Considérant cinq espèces de sections coniques: la droite, le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse, Kepler écrit:

> *"Entre ces lignes -et pour parler plutôt analytiquement que selon la Géométrie- il y a un ordre, dépendant de leurs propriétés, qui est le passage de la ligne droite à la parabole par l'intermédiaire d'une infinité d'hyperboles, puis de là au cercle par l'intermédiaire d'une infinité d'ellipses."*[8]

La parabole a ainsi une position intermédiaire entre l'hyperbole et l'ellipse, la ligne droite et le cercle étant les courbes extrêmes; Kepler le précise après avoir introduit les foyers.

Kepler, comparant la position des foyers dans les cinq espèces de coniques, remarque que le cercle possède un foyer unique situé en son centre, que l'ellipse possède deux foyers situés à l'intérieur d'icelle, également éloignés du centre; la parabole quant à elle, possède un foyer situé à l'intérieur et *"un autre foyer doit être imaginé sur l'axe, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur, éloigné du premier foyer par une distance infinie"*[9], enfin l'hyperbole possède deux foyers, l'un intérieur, l'autre extérieur. Pour être complet, Kepler remarque que, *"par analogie"*, pour la ligne droite *"les deux foyers coïncident avec la droite elle même et qu'ils sont un seul et même point"*[10].

On obtient ainsi les différentes espèces de sections coniques en faisant varier la distance entre les foyers; pour plus de détails, nous renvoyons à l'ouvrage de Kepler.

Ainsi la notion képlérienne de point à l'infini est liée, soit à une approximation (des droites concourant en un point immensément éloigné pouvant être considérées, *du point de vue de la sensation*,

---

[7] ibid, p. 222-223; le terme latin est *"infinito intervallo"*.
[8] ibid, p. 220
[9] ibid, p. 222
[10] ibid, p. 223

comme parallèles), soit au mouvement (le point à l'infini comme point infiniment éloigné): ce n'est pas encore le point à l'infini de la géométrie projective, point de concours d'une famille de droites parallèles, point inconcevable pour Kepler partisan d'un monde fini et pour lequel la distance infinie dont il parle dans les *Paralipomènes à Vitellion* relève de l'infini en puissance et non de l'infini en acte.

Pour une discussion de la position de Kepler et des arguments qu'il développe contre les partisans d'un monde infini, nous renvoyons à l'ouvrage de Koyré *Du monde clos à l'univers infini*[11].

Le point à distance infini (Desargues)

Toute autre est la démarche de Desargues. Celui-ci publie en 1639 le *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan*[12]; après avoir précisé:

> *"Icy toute ligne droite est entendue alongée au besoin à l'infiny d'une part et de l'autre"*.[13]

Desargues définit ce qu'il appelle une ordonnance de droites,

> *"Pour donner à entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre elles ou bien parallèles, ou bien inclinées à mesme poinct, il est icy dit, que toutes ces droictes sont d'une mesme ordonnance entre elles, par où l'on concevra de ces plusieurs droictes, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, elles tendent comme toutes à un mesme endroict.*
>
> *L'endroict auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droictes en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, est icy nommé, but de l'ordonnance de ces droictes."*[14]

Desargues précise alors que si les droites sont parallèles, le but est dit *"à distance infinie"*, si les droites sont concourantes, le but est dit *"à distance finie"*.

Ici la définition est en quelque sorte *relationnelle*, un point est

[11] Alexandre Koyré, *Du monde clos à l'univers infini* (traduit de l'anglais par Taïssa Tarr), Gallimard, Paris 1973; chapitre III.
[12] Girard Desargues, *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan* (1639), in René Taton, *L'oeuvre mathématique de Desargues*, Vrin, Paris 1981.
[13] ibid, p. 99
[14] ibid, p. 100

déterminé par les droites qui concourent en ce point, cela est vrai pour une famille de droites parallèles comme pour une famille de droites concourantes. Ainsi, et cela se précise dans le développement de l'ouvrage, points à l'infini et points à distance finie participent des mêmes propriétés et jouent le même rôle; c'est ainsi que Desargues réunit cônes et cylindres sous l'appellation commune de *rouleaux*. Cette analogie explicite renvoie aux constructions perspectivistes, comme nous l'expliquons dans la suite.

On sait depuis les premiers traités de perspective que les perspectives des perpendiculaires au plan du tableau convergent au point de fuite principal (la projection de l'oeil sur le plan du tableau). D'autre part Piero della Francesca dans son traité de perspective *De Prospectiva Pingendi* (écrit vraisemblablement entre 1472 et 1475 mais imprimé pour la première fois en 1899) a remarqué que les droites horizontales inclinées à 45 degrés sur la direction perpendiculaire au plan du tableau (les diagonales d'un dallage) convergent vers ce qu'on appelle les points de distance, points de la ligne d'horizon (la ligne horizontale du tableau passant par le point de fuite principal) situés de part et d'autre du point de fuite principal à une distance égale à la distance de l'oeil au tableau[15]. La convergence des diagonales était connue empiriquement des peintres de l'Europe du Nord et elle sera systématisée par Jean Pélerin dit Viator dans son *De Artificiali Perspectiva*[16] publié en 1505, mais le texte peu explicite qui accompagne les dessins de Viator ne donne aucune indication sur le statut des points de convergence que l'auteur appelle les *tiers-points*.

Cependant la notion générale de point de fuite d'une famille de droites parallèles sera définie et légitimée seulement au début du XVIIème siècle, d'abord par Guido Ubaldo del Monte qui publie en 1600 les *Perspectivae Libri Sex* (les six livres de perspective)[17], puis par Simon Stevin qui publie en 1605 *De sciagraphia* (littéralement: du dessin des ombres), ouvrage qui sera publié en français par Girard en 1634 sous le titre *De la Scénographie, dite vulgairement Perspective*[18].

Ainsi on sait au début du XVIIème siècle qu'une famille de droites

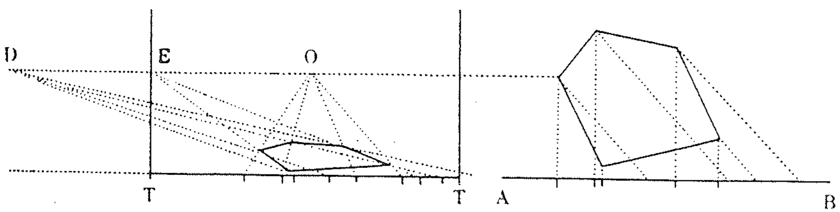
[15] Jean-Pierre Legoff, "Une oeuvre aux confins de l'Art et de la Science: "De Perspectiva Pingendi" de Piero della Francesca", *Les Cahiers de la Perspective* n°4, 1987
[16] Jean Pélerin dit Viator, *De Artificiali Perspectiva* (2ème édition 1509), Librairie des Arts et Métiers, Nogent-le-Roi 1978
[17] Guido Ubaldo del Monte, *Les Six Livres de Perspective* (traduction française et notes par Christian Guipaud), thèse Paris 1991 (à paraître).
[18] Simon Stevin, *De Sciagrafia* (1605), traduction française par Albert Girard in *Les Oeuvres mathématiques* de Simon Stevin, Leyde 1634

parallèles est représentée en perspective par une famille de droites concourantes si les droites de la famille ne sont pas parallèles au plan du tableau, par une famille de droites parallèles si les droites de la famille sont parallèles au plan du tableau.

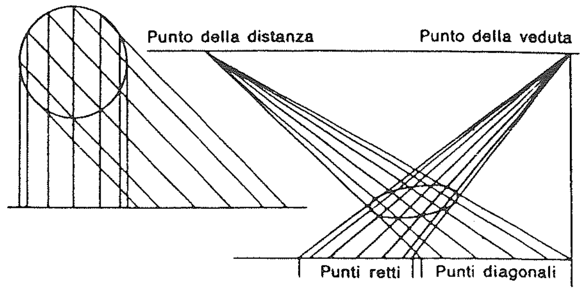
Mais ce qui nous importe ici, c'est la façon dont on utilise ces droites parallèles devenues concourantes pour *construire l'espace dans le tableau*, c'est-à-dire mettre en place sur le tableau la représentation des différents points de l'objet que l'on dessine.

Ainsi Vignola dans son ouvrage *Le due regole della prospettiva pratica* (les deux règles de la perspective pratique)[19] publié après sa mort par Danti en 1582, montre comment la représentation perspective de deux familles de droites parallèles permet de construire la perspective de l'objet; il suffit de dessiner les perspectives des droites de chacune des familles, lesquelles passent par les points de fuite (ici le point de fuite principal et un point de distance), la correspondance étant assurée par les points des droites situées sur la ligne de terre (la ligne d'intersection du tableau avec le plan horizontal de référence), lesquels points coïncident avec leurs représentations perspectives.

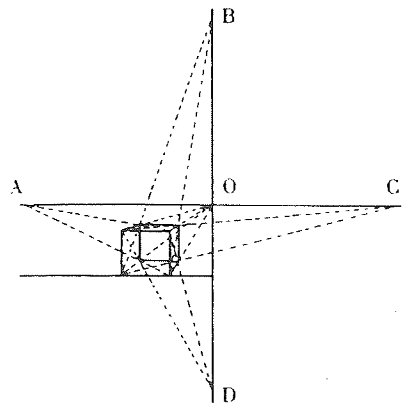
Nous reproduisons ici deux figures du traité de Vignola- Danti, la première indique la construction de la perspective d'un polygone situé dans le plan horizontal, la seconde indique la construction de la perspective d'un cercle; dans chacune des figures on représente l'objet donné dans son plan horizontal quadrillé par les deux familles de droites parallèles, la représentation perspective est alors obtenue en représentant le quadrillage en perspective à partir des points de fuite et des points de la ligne de terre qu'on a reportés à partir du dessin dans le plan horizontal.



19 Jacomo Barozzi da Vignola, *Le due regole della prospettiva pratica* (commentaires de E.Danti), Bologne 1582



Notons que Vignola utilise aussi les points de distance situés sur la verticale du point de fuite principal ce qui lui permet de construire la perspective d'un cube.



On a ainsi la mise en place de ce qu'on appelle aujourd'hui *un système de lignes coordonnées*, permettant à la fois de structurer l'espace et de le représenter sur le plan du tableau.

C'est une telle *réticulation* du plan horizontal qu'utilise Desargues en 1636 dans un opuscule de douze pages *Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective...*[20] pour construire la représentation d'un objet.

Desargues termine en énonçant, *"pour les contemplatifs"*, les principes généraux de la représentation perspectiviste; il remarque alors que des droites parallèles deviendront, en perspective, des droites concourantes ou parallèles suivant qu'elles ne sont pas ou sont parallèles au plan du tableau, et de même que des droites concourantes devien-

20 Girard Desargues, *Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective...* (1636), réédité par Abraham Bosse in *Manière universelle de Mr Desargues de pratiques la perspective...* (1647); un fac-simile est publié in J.V. Field and J.J. Gray, *The Geometrical Work of Girard Desargues*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1987

dront, en perspective, concourantes ou parallèles selon que la droite joignant l'oeil au point de concours de ces droites rencontre ou ne rencontre pas le plan du tableau.

Ainsi, sans que cela soit dit explicitement, familles de droites parallèles et familles de droites concourantes apparaissent analogues du point de vue de la perspective. Cette analogie sera explicitée et exploitée dans le *Brouillon Project* de 1639.

La démarche de Desargues s'appuie sur la mise en évidence d'une relation point-droite *invariante* par perspective (pour employer un langage d'aujourd'hui). C'est cette invariance qui permet de considérer points à l'infini et points à distance finie comme analogues, de *désinfinitiser* l'infini en quelque sorte. C'est la différence essentielle entre la démarche de Desargues et celle de Kepler; celui-ci en considérant, par analogie avec l'ellipse, que la parabole a un second foyer à distance infinie, définit un premier mode d'unification des coniques via une famille de courbes qui se déduisent les unes des autres par déformation, mais les difficultés à appréhender l'infini ne lui permettent pas de penser un point à distance infinie comme un point ordinaire et par conséquent de penser les coniques comme une seule et même courbe. Desargues par contre, en éliminant l'infini en quelque sorte, remarque que les sections coniques (les *coupes de rouleau*[21] comme il les appelle dans le *Brouillon Project*) définies comme perspectives de cercles participent des mêmes propriétés, qui ne sont que les propriétés du cercle transformées par perspective; ceci lui permet de considérer les sections coniques comme une seule et même courbe que l'on peut étudier *"par une seule et mesme énonciation, construction et préparation ou pour dire mieux par un seul et mesme discours et sous de mesmes paroles"*[22].

Cette unification du fini et de l'infini géométrique posera problème, ainsi Descartes qui a senti l'importance de l'oeuvre de Desargues même s'il n'en a pas compris toute la signification, écrit à Desargues :

> *"Pour votre façon de considérer les lignes parallèles, comme si elles s'assemblaient à un but à distance infinie, afin de les comprendre sous le même genre que celles qui tendent à un point, elle est fort bonne, pourvu que vous vous*

[21]Un *rouleau* est la surface engendrée par une droite passant par un point fixe et s'appuyant sur un cercle; si le point est à distance finie, la surface est un cône, si le point est à distance infinie, la surface est un cylindre. Ainsi Desargues ne distingue pas cône et cylindre.

[22]"Lettre de Desargues à Mersenne", in René Taton, o.c. p. 83.

> *en serviez, comme je m'assure que vous le faites, pour donner à entendre ce qui est obscur en l'une de ces espèces, par le moyen de l'autre où il est plus clair, et non au contraire."*[23]

autrement dit cette analogie acceptable sur le plan de la métaphore, si elle peut en un certain sens éclairer la recherche, ne saurait intervenir dans le raisonnement mathématique.

Ici apparaît un obstacle à la compréhension de la pensée de Desargues, bien plus profond que son style ou le caractère botanique de son vocabulaire. Issue d'une certaine lecture des constructions perspectives, la notion arguésienne qui contient à la fois la définition des points à l'infini et l'élimination de leur spécificité pour en faire des points ordinaires, posait un problème d'ordre épistémologique (quel est leur statut mathématique?), problème qui ne sera résolu que par les mathématiciens du XIXème siècle avec le développement de la géométrie projective moderne.

Cet obstacle n'empêchera pas quelques géomètres de continuer l'oeuvre arguésienne tout au long des XVIIème et XVIIIème siècles.

Ainsi, après Desargues qui dans le *Brouillon Project* décrivait les asymptotes de l'hyperbole comme *les touchantes de ses bords à distance infinie*[24], Pascal, dans le premier livre de son *Traité des Coniques*[25] (ouvrage perdu dont on a retrouvé un manuscrit de la première partie, *Generatio conisectionum*, dans les papiers de Leibniz), définissant les propriétés élémentaires des coniques à partir du cercle par perspective et remarquant que la tangente en un point d'une conique est la perspective de la tangente au point correspondant du cercle, explique que, dans le cas de la parabole et de l'hyperbole, il y a des points du cercle qui n'ont pas d'images perspectives, et considérant ce que deviennent les tangentes à ces points sans images, écrit, en ce qui concerne la parabole

> *"Il y a donc sur la parabole une droite manquante qui joue vraiment le rôle d'une tangente, puisqu'elle est l'image d'une tangente"*[26]

et en ce qui concerne l'hyperbole

[23] *"Lettre du 19 juin 1639"*, in René Taton, o.c. p.186.

[24] René Taton, o.c. p.159

[25] Blaise Pascal, *"Traité des Coniques"* in *Oeuvres Complètes* (présentation et notes de Louis Lafuma), Le Seuil, Paris 1963

[26] ibid, p. 41

"... les asymptotes jouent le rôle de tangentes à distance infinie et doivent compter comme telles."[27]

Quant à Newton, dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis*[28] (Enumération des lignes du troisième ordre) publié en 1704 mais vraisemblablement écrit beaucoup plus tôt, dans lequel il se propose de déterminer toutes les courbes du troisième degré, il écrit à propos des branches infinies d'une courbe:

"The asymptote to any branch is, therefore, found by seeking for the tangent to a point in that branch at an infinite distance."[29]

Il faut remarquer que les méthodes perspectivistes ne sont pas étrangères à Newton; c'est ainsi qu'il explique dans l'article cité que toutes les cubiques planes s'obtiennent à partir de cinq d'entre elles par perspective comme les lignes du second ordre (les sections coniques) s'obtiennent à partir du cercle.

En fait c'est au moment où le projectif (au sens littéral: ce qui a rapport avec les projections) acquiert un statut reconnu par les mathématiciens, c'est-à-dire dans la première moitié du XIXème siècle, que le concept arguésien de point à l'infini est enfin accepté.

C'est par des considérations d'invariance que Poncelet justifie, dans son *Traité des Propriétés Projectives des Figures*[30] publié en 1822, la notion de point à l'infini, c'est ainsi qu'il écrit,

"Les lignes parallèles concourent en un point unique à l'infini"[31]

précisant pour justifier cette assertion

"On voit, en effet, que les points de concours à distance infinie et à distance donnée s'échangent réciproquement par

27 ibid, p. 41
28 Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1701), english translation in D.J. Struick, *A source-book in Mathematics* 1200-1800, Princeton University Press 1986
29 ibid, p. 171
30 Jean-Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures* (2 volumes), Gauthier-Villars, Paris 1865 (le premier volume a été publié en 1822)
31 ibid, tome I, p. 51

l'effet de la projection."[32]

et à cette notion, dont il rappelle qu'elle est généralement admise, il ajoute la notion de droite à l'infini, écrivant

"Tous les points situés à l'infini sur un plan peuvent être considérés idéalement distribués sur une ligne unique, située elle-méme à l'infini sur ce plan."[33]

notion *métaphysique* (c'est le terme utilisé par Poncelet) qu'il justifie en remarquant que

"tous ces points sont représentés, en projection, par ceux d'une ligne droite unique située, en général, à distance donnée et finie."[34]

Ainsi Poncelet se place dans la même problématique que Desargues , savoir, l'invariance par projection. Si Poncelet, à l'époque où il rédigeait son ouvrage, n'a pu lire le *Brouillon Project* (texte alors perdu dont une copie écrite par Philippe de La Hire sera retrouvée ultérieurement par Chasles; quant au manuscrit original, il sera retrouvé en 1959, ainsi que le raconte René Taton qui le publiera en 1961[35]), il connaissait ce texte à travers les commentaires contemporains; c'est ainsi qu'il savait par la lettre de Descartes citée plus haut que Desargues considérait un système de droites parallèles comme concourant à l'infini[36] et qu'il connaissait l'interprétation des asymptotes à une courbe comme tangentes en ses points à l'infini, interprétation qu'il justifiait par l'invariance projective.

Un objet "non-ontologique"

Nous avons déjà parlé de l'incompréhension que rencontrait Desargues, y compris de la part de ceux qui reconnaissait l'importance de ses conceptions, comme cela fut le cas de Descartes[37]. C'est que Desargues, avec l'introduction du point à l'infini, bousculait la tradition géométrique.

32 ibid, p. 51
33 ibid, p. 52
34 ibid, p. 52
35 René Taton, o.c. p. 5
36 Jean-Victor Poncelet, o.c. tome II, p. xxvii
37 Rudolf Bkouche, "Desargues au XIXème siècle, l'influence d'un livre non lu" in *Actes du Colloque Desargues* (Paris-Lyon 1991), à paraître in *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences.*

Qu'est-ce que ce point qui n'existe pas et dont on use cependant comme d'un point ordinaire. Le souci d'unifier les propriétés des droites concourantes et celles des droites parallèles peut-il suffire à introduire un concept qui ne semble s'appuyer sur rien d'autre que l'unification des mots, *"cette seule et même énonciation"* dont parle Desargues dans sa lettre à Mersenne citée ci-dessus.

Pour les Anciens (c'est-à-dire les géomètres grecs) le raisonnement s'appuie sur des objets; que ceux-ci participent des idées platoniciennes ou relèvent de la connaissance sensible, ces objets ont une existence propre, indépendante des relations qu'ils ont entre eux et que l'homme s'attache à découvrir par le raisonnement. La logique formelle d'Aristote suppose les objets, si elle est formelle au sens qu'elle édicte des règles de raisonnements indépendantes des objets sur lesquels porte le raisonnement (définissant ainsi les formes de raisonnement que décrit Aristote dans les *Premiers Analytiques*[38]), le raisonnement ne se conçoit qu'autant qu'il se rapporte à des objets. En ce sens la logique formelle d'Aristote n'est pas formaliste au sens moderne du terme[39].

Si l'introduction du point à l'infini marque une rupture avec la pensée géométrique grecque, c'est bien parce que, dans le raisonnement, cet objet n'a d'autre référence que sa définition; en ce sens il est sa propre référence, c'est en cela qu'il peut être considéré comme un point ordinaire, moins par une analogie de l'ordre de l'être que par une identification de forme (points ordinaires et points à distance infinie satisfont aux mêmes relations). Cette rupture n'empêche pas Desargues d'user des lourds raisonnements *à la grecque* dans le *Brouillon Project*,

---

38 Aristote, *Premiers Analytiques* (traduction Tricot), Vrin, Paris

39 Les méthodes formalistes s'appuient sur des signes (lesquels peuvent être des mots comme cela est le cas de l'axiomatique hilbertienne de la géométrie, cf. David Hilbert, *Les Fondements de la Géométrie* (1899) (traduction et notes de Paul Rossier) Dunod, Paris 1971), lesquels ne renvoient, en principe, à aucune signification ; la logique se réduit ainsi à un calcul sur ces signes indépendamment de toute référence extérieure au calcul lui-même. Pour la distinction entre logique formelle au sens d'Aristote et logique formaliste (la logique mathématique d'aujourd'hui) nous renvoyons à un article de René Thom: "Les mathématiques modernes, une erreur pédagogique et philosophique" in *Pourquoi la Mathématique ?* UGE, Paris 1974, p. 72-73

ce qui souligne une certaine ambivalence du texte arguésien[40]; d'une part la mise en place d'une nouvelle forme de pensée géométrique (le point à l'infini, la méthode des projections), d'autre part un mode de raisonnement traditionnel même si Desargues le transgresse quelquefois pour y intégrer la notion de point à l'infini: ainsi lorsqu'il annonce sans autre précaution que dans une division harmonique (la donnée de quatre points en involution dans le langage de Desargues), si l'un des points est à distance infinie, le point correspondant dans l'involution est le milieu du segment défini par les deux autres points[41].

On retrouve l'effet de cette rupture de façon plus ou moins explicitée chez les successeurs de Desargues[42].

Un exemple significatif est donné par Newton dans les *Principia*[43] lorsque, pour construire une conique tangente à quatre droites et passant par un point, l'auteur se ramène au cas où les quatre droites forment un parallélogramme via une transformation convenable[44].

C'est le caractère d'irréalité du point à l'infini (ce que j'appellerai son caractère *non-ontologique*) qui permet de le considérer comme un point ordinaire, et par là même, via des transformations qui échangent point ordinaire et point à l'infini, de considérer points ordinaires et

---

40 On peut supposer que cette ambivalence tient à la question de la légitimité de la démonstration, légitimité qui reste pour Desargues la légitimité euclidienne; c'est en cela qu'on peut tenter d'expliquer l'écart (pour le géomètre d'aujourd'hui) entre le renouveau conceptuel apporté par Desargues et le respect de la tradition *démonstrative*. En ce qui concerne la mise en place de la démonstration projective, nous renvoyons à notre article cité "La Naissance du Projectif".

41 René Taton, o.c. p. 120. Notons que cette remarque de Desargues renvoie à l'idée intuitive d'un point infiniment éloigné; on peut considérer que si M est un point infiniment éloigné sur la droite AB, alors MA = MB.

42 Denis Lanier et Jean Pierre Le Goff, "L'héritage arguésien", Colloque *La Naissance du Projectif,* Lille 1989 (à paraître in *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences)* et *Scholie* n° 7 et 8 (Lycée Malherbe, Caen).

43 Isaac Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World* (1687), (english traduction by Andrew Motte in 1729, revised by Florian Cajori), University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London, 1962; *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* (traduction de la Marquise du Chastellet augmentée des Commentaires de Clairaut, Paris 1756), réédition Gabay, Paris 1991.

44 Isaac Newton, Mathematical Principles, p. 90-94

points à l'infini comme participant d'un même concept[45].

Les points manquants (*puncta deficientia*) du texte de Pascal[46] ont ainsi acquis un statut moins par leur existence (ils n'existent pas) que par les relations qu'ils vérifient. C'est cela qui permet à Pascal de décrire la droite manquante (*recta deficientia*) comme *"jouant vraiment le rôle d'une tangente parce qu'elle est l'image d'une tangente"*[47]

Le point à l'infini n'est pas le seul objet non-ontologique apparu dans l'histoire de mathématiques, et ce non-ontologique posera problème aux mathématiciens même si certains d'entre eux sauront utiliser ces objets dans leurs modes de raisonnement comme dans leurs calculs avant même que le statut de ces objets soit complètement élucidé.

On pourrait citer par exemple les nombres imaginaires (ainsi nommés par Descartes pour rappeler leur non-existence[48]). On peut noter que lorsque ces nombres, inventés au XVIème siècle et utilisés pendant trois siècles sans que leur mode d'existence soit défini autrement que par les règles de calculs auxquels ils obéissent, acquerront une existence de droit avec la représentation géométrique, ce sera au moment même où, avec le développement de l'algèbre et de l'analyse, la géométrie perdra son caractère de lieu privilégié de la rigueur mathématique[49]. C'est aussi à cette époque que Cauchy, après avoir utilisé formellement les nombres imaginaires décrira le calcul sur ces nombres comme un calcul sur les polynômes modulo $x^2 + 1$. [50]

---

[45] C'est l'utilisation explicite des transformations qui justifie la construction arguésienne; on peut considérer que si Desargues a dépassé le point de vue ontologique, sa construction s'appuie sur une représentation (ici la représentation perspectiviste); en ce sens, si elle a un caractère formel, elle n'est pas formaliste. Si Desargues recherche une unité du langage (*"la seule et même énonciation"*), celle-ci découle de sa construction, elle en est la conséquence,non la cause.
[46] Blaise Pascal, o.c. p. 41
[47] ibid, p. 41
[48] René Descartes, "*La Géométrie*" in *Discours de la Méthode* (1637), réédition Fayard, Paris 1986; p. 404
[49] Pour une histoire des nombres complexes, on renvoie à l'article de Eduard Study et Elie Cartan, "*Nombres complexes*" in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées* (édition française), I, 1, Gauthier- Villars, Paris et Teubner, Leipzig, réédition Gabay, Paris 1991, p. 329-353; le texte de Cartan-Study a été publié en 1908. Ce texte est reproduit in Elie Cartan, *Oeuvres Complètes* (deuxième édition), Editions du CNRS, Paris 1984, tome II, p. 107-131
[50] Augustin Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, Paris 1847; *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tome 24, p. 1120 et tome 25, p. 129

Mathématiques des objets et mathématiques des relations

On peut considérer que cette *désontologisation* marque l'histoire récente des mathématiques; c'est ainsi que Dieudonné écrit :

> *"Il apparaît impossible d'éluder la notion de l'infini, tant qu'on considère que l'essentiel d'une proposition est son* ***contenu****, c'est-à-dire la représentation mentale dont elle est le symbole; mais la difficulté s'évanouit si on admet au contraire que l'essentiel de la proposition est sa forme, autrement dit,* ***qu'il est inutile qu'une proposition évoque une représentation mentale autre que la perception des signes avec lesquels elle est écrite****. (souligné par l'auteur)"*[51]

C'est ce refus de la prise en compte des contenus (des représentations mentales, précise Dieudonné[52]) qui marque la rupture avec la pensée mathématique grecque et qui réduit (au moins d'un point de vue méthodologique!) l'activité mathématique à son seul aspect formel.

Cette élimination des contenus ne signifie pas que les mathématiques se réduisent à leur seul discours ou à une simple manipulation de signes. Il faut comprendre cette élimination des contenus[53] comme un déplacement du statut des objets mathématiques, déplacement qui conduit d'une *mathématique des objets* à une *mathématique des relations*[54].

Ce déplacement du statut des objets mathématiques apparaît à la lecture comparée des deux grandes axiomatiques qui ont fondé, chacune à leur époque, la pensée mathématique: l'axiomatique euclidienne d'une

---

[51] Jean Dieudonné, *"Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques"* in *Les grands courants de la pensée mathématique* (présentés par François Le Lionnais), nouvelle édition augmentée, Blanchard, Paris 1962; p. 550
[52] Contrairement à Dieudonné, nous distinguerons *contenu et représentation mentale*. Si le terme "*contenu*" présente un caractère d'objectivité en ce sens qu'il désigne une réalité extérieure au sujet connaissant, la "*représentation mentale*" désigne une construction du sujet; on peut considérer que c'est via les représentations mentales que le sujet connaissant accède aux contenus de savoir; en éliminant les représentations mentales du discours mathématique, on élimine ainsi toute référence à des contenus; c'est en ce sens que l'on peut entendre l'assertion de Dieudonné.
[53] laquelle conduit à l'élimination du sens; cf. Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des mathématiques, le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991; chapitre 4
[54] Rudolf Bkouche, *Les enjeux de la démonstration*, IREM de Lille (à paraître)

part, l'axiomatique hilbertienne d'autre part.

Dans la géométrie euclidienne (c'est-à-dire celle des géomètres grecs et de leurs successeurs), on peut parler du *primat des objets sur les relations*, c'est-à-dire que les objets ont une existence propre (on peut alors parler de l'*ontologie* des objets mathématiques); que cette existence relève du monde des idées platoniciennes ou du monde sensible, que nous connaissons ces objets par le seul exercice de la raison (*rationalisme*) ou qu'ils relèvent de l'expérience sensible (*empirisme*), les objets ont une réalité et l'objet de la science géométrique est la connaissance des propriétés de ces objets et des relations qu'ils entretiennent entre eux. Ces propriétés et ces relations sont autant de vérités du monde et le but de la science est d'accéder à ces vérités.

Cette conception *ontologique* de la géométrie sera remise en cause au début du XIXème siècle avec la découverte (l'invention!) des géométries non-euclidiennes, suivie dans le cours du siècle par la naissance de la théorie des ensembles et ce qu'on a appelé la *crise* des fondements, crise qui remet en cause les principes mêmes du raisonnement mathématique et oblige à repenser de nouvelles formes de légitimation du raisonnement[55].

C'est pour répondre à cette crise que s'est mise en place la conception formaliste des mathématiques dont le principal initiateur est Hilbert. Dans la conception hilbertienne, les objets n'existent plus en tant que tels et l'on peut parler du *primat des relations sur les objets*; les objets ne sont définis qu'à travers un réseau de relations, réseau de relations lui-même défini par des axiomes énoncés *a priori*. Les axiomes et les objets qu'ils définissent sont indépendants de *toutes significations extérieures* (pour reprendre une expression de Gonseth). L'objet de la géométrie est alors d'étudier les conséquences logiques des axiomes, conséquences logiques qui s'obtiennent à partir des seules règles du raisonnement, règles purement syntaxiques. On ne parle plus de vérité, mais de validité à l'intérieur d'un système axiomatique donné. Le problème de la validité d'une telle construction se pose alors différemment de la conception ontologique, pour n'être plus, *en principe*, qu'un problème logique.

Mais les mathématiques ne se réduisent pas à la seule logique et Hilbert explique comment, d'un point de vue formaliste, se redéfinit la notion d'objet mathématique; c'est ainsi qu'il déclare :

55 Nous verrons ci-dessous le rôle joué par la géométrie projective dans l'émergence des conceptions formalistes.

> *"Comme toute science, la mathématique ne peut être construite sur la seule logique. Une donnée est indispensable, composée d'objets concrets, résultant d'une expérience extérieure à la pensée. Pour assurer la validité des déductions, ces objets doivent pouvoir être examinés sur toutes leurs faces. Leur présentation, leur discrimination, leur ordonnance, leur relation de voisinage doivent être données immédiatement et intuitivement et cela de façon irréductible à d'autres relations. Telle est ma position philosophique devant les mathématiques ou toute pensée scientifique; elle me paraît indispensable.* ***En mathématiques, les objets que nous examinons sont des signes qui pour nous sont clairs et reconnaissables****.(souligné par nous)"*[56]

C'est ce point de vue que Dieudonné reprend lorsqu'il réduit la compréhension d'une proposition mathématique à la *"perception des signes avec lesquels elle est écrite"*"[57].

De la problématique arguésienne à la notion d'invariant

La conception arguésienne du point à l'infini est, il est vrai, bien éloignée de la conception hilbertienne[58] et ce serait recourir à la trop classique conception téléologique de l'histoire que de ne voir dans le point à l'infini de Desargues qu'un simple jalon vers la conception moderne (non-ontologique) des mathématiques, l'oeuvre de Desargues préfigurant, dans un contexte encore proche des conceptions grecques, le concept d'espace projectif.

Cela nous conduit à poser un double problème; d'abord un problème que l'on pourrait appeler local (*synchronique*), celui des raisons de l'invention d'un *concept-limite* (concept-limite au sens qu'il est inconcevable pour la plupart des contemporains) et de la façon dont

56 David Hilbert, "Les fondements des mathématiques" conférence prononcée en 1927, publiée dans l'édition citée de l'ouvrage *Les Fondements de la Géométrie*, p. 261

57 Il faut entendre cette réduction des mathématiques au simple usage réglé de signes d'un point de vue méthodologique. Nous avons exposé par ailleurs l'ambiguïté d'une telle réduction et l'illusion d'une mathématique *in-sensée* qu'elle peut engendrer (cf, Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, o.c.) mais ce n'est pas le lieu de parler ici des dérapages de l'idéologie formaliste.

58 pour éviter toute ambiguïté, rappelons que tout au long de son oeuvre géométrique, Desargues s'appuie sur l'axiomatique euclidienne qu'il ne remet nullement en cause comme le montre ses méthodes de démonstration.

il a été utilisé par Desargues et ses successeurs proches, ensuite un problème global (*diachronique*), celui de la place de cette invention dans l'évolution historique.

Nous noterons d'abord que le concept de point à l'infini est né de ce que l'on peut appeler la *géométrisation* d'une problématique d'ordre technique (la représentation perspectiviste des peintres), géométrisation qui se situe dans le cadre d'une problématique euclidienne: *comment déterminer les règles de constructions perspectivistes en usant des méthodes de la géométrie grecque*[59].

Comment alors expliquer que cet effort de géométrisation *à la grecque* ait pu conduire à ce renouvellement du paysage géométrique que constitue la naissance du projectif.

L'analogie remarquée par les perspectivistes entre droites parallèles et droites concourantes relève somme toute du contingent, elle indique tout au plus une méthode de construction.

Mais c'est moins le problème de la correspondance entre l'objet à représenter et sa représentation qui va jouer un rôle dans la mise en place du projectif que celui des constructions directes sur le tableau, lequel se pose dès les premières représentations perspectivistes, ne serait-ce que parce que le tableau représente un objet imaginaire. Le développement des méthodes perspectivistes va conduire à la mise en place d'une géométrie propre du tableau (ce que Lambert appellera plus tard la *géométrie perspective*[60]), c'est la comparaison de cette géométrie du tableau et de la géométrie des objets que l'on représente (laquelle relève du cadre euclidien classique) qui conduira à passer de la simple analogie à l'identification des notions de droites concourantes et de droites parallèles.

Cette comparaison des constructions géométriques directes dans le tableau et des constructions dans le géométral (le plan des objets que l'on représente) est exposé dans le chapitre *"Aux théoriciens"* d'un ouvrage d'Abraham Bosse consacré aux méthodes perspectivistes de Desargues[61]. Le texte de ce chapitre publié pour la première fois en 1643, donc après le *Brouillon Project*, nous éclaire sur la démarche de Desargues quant à l'identification du concours et du parallélisme, identification déjà entrevue mais non explicitée dans l'opuscule de 1636,

---

59 ainsi les ouvrages théoriques cités de Piero della Francesca et de Vignola

60 Jean-Henri Lambert, *La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral* (1759), réédition Alain Brieux, Paris 1977

61 Abraham Bosse, *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer le perspective par petit-pied*... Paris, 1647/1648

identification complètement explicitée et utilisée dans le *Brouillon Project*.[62]..

C'est cette identification de la géométrie usuelle (laquelle relève de la géométrie grecque) et de la géométrie du tableau qui permet le dépassement de l'ontologie. En ce sens, ce dépassement de l'ontologie pourrait être considéré comme une systématisation de la lecture picturale, laquelle demande de *confondre* l'objet et son image, ou si l'on préfère, de *voir* l'objet dans l'image.

On est encore loin de l'élimination des représentations mentales dont parle Dieudonné, on pourrait plutôt parler de la lecture d'une certaine situation à travers une autre[63], un *transfert* de représentations mentales pourrait-on dire. C'est ainsi qu'il faut comprendre le *Brouillon Project* moins comme la simple déduction des propriétés des coniques à partir de celles du cercle par la méthode des projections que la lecture des propriétés des coniques à travers les propriétés du cercle, ce qu'on peut exprimer sous la forme schématique *"toute conique est un cercle"*. Cette unification des coniques est bien plus forte que la définition d'un genre de courbes dont les différentes espèces seraient les différentes coniques (c'est ainsi qu'on pourrait lire l'unification *à la Kepler*), l'unification arguésienne définit les coniques comme une seule et même courbe via ce qu'il a défini comme *"une seule et même énonciation"* En terme moderne, l'objet conique est un *invariant*, et c'est en ce sens qu'il perd son caractère ontologique.

L'apport de la perspective à la géométrie est alors moins la méthode des transformations en tant que telles que la mise en place de la notion d'invariance. La géométrie devient ainsi moins l'étude des propriétés d'un objet ou d'un type d'objet que de cet invariant qui apparaît sous diverses formes liées entre elles par une *énonciation commune*.

Une conception langagière des mathématiques

On peut considérer la notion d'*invariant* comme fondamentale dans l'élaboration de toute connaissance scientifique, un invariant étant

---

62 On peut se demander si c'est la construction théorique (celle de 1639) qui a précédé, auquel cas les constructions développées dans *"Aux théoriciens"* ne seraient qu'une *application* des concepts théoriques à la perspective, ou si ce sont les constructions perspectivistes qui ont conduit à la mise en place des concepts théoriques. Cette question me semble secondaire dans la mesure où l'invention mathématique n'est jamais transparente, ce qui importe, c'est la *concommitance* des constructions théoriques et techniques, chacune d'elles soutenant l'autre.

63 Rudolf Bkouche, "La naissance du projectif" p. 271

ce qui permet de reconnaître dans les objets des propriétés communes, et ce sont moins les objets eux-mêmes que ces propriétés communes que la science se propose d'étudier Dans le cadre de la géométrie euclidienne, ces propriétés communes se définissent via *les relations d'égalité et de similitude*[64]. La géométrie arguésienne apparaît alors comme la construction de nouveaux invariants (les invariants projectifs d'aujourd'hui) et l'on sait que ces géométries participent d'une théorie géométrique commune comme l'explique *Le Programme d'Erlangen* de Felix Klein[65], ce qui explique la tentation moderniste de réécrire la construction de ses invariants via cette théorie commune[66]. Si cette construction *à la Erlangen* a sa place dans un *exposé logique de la géométrie*, elle est cependant inadéquate pour comprendre comment se sont construits historiquement ces divers invariants[67].

L'égalité et la similitude des géomètres grecs s'appuient essentiellement sur l'ontologie des objets. La construction de la géométrie se présente alors comme une représentation langagière de ces objets, mais cette représentation langagière doit permettre via le seul raisonnement déductif la connaissance *a priori* (c'est à dire indépendamment de l'expérience) des vérités géométriques; c'est alors le rôle de la logique d'énoncer les règles langagières du raisonnement, mais comme nous l'avons déjà expliqué, ces règles, si elles sont indépendantes des objets, ne se définissent que par rapport à ces objets (cf. note 38). La rationalité de la géométrie grecque se présente ainsi comme adéquation (*idonéïté* dirait Gonseth[68]) de la représentation langagière aux situations géométriques.

C'est cela qu'explique Paul Valéry lorsqu'il écrit, à propos de la géométrie grecque:

> *"Songez à la subtilité et à la volonté qu'il leur a fallu pour accomplir l'ajustement si délicat, si improbable, du langage commun au raisonnement précis; songez aux analyses qu'ils ont faites d'opérations motrices et visuelles

64 Rudolf Bkouche, *"De la géométrie et des transformations"*, Repères-IREM n° 4, juillet 1991

65 Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen*, (1872) (traduction Padé), Gauthier-Villars, Paris 1874

66 Cette réécriture apparaît dans l'ambiguïté de l'expression " *géométrie euclidienne*" qui désigne à la fois la géométrie des *Eléments* d'Euclide et la théorie des invariants du groupe des similitudes.

67 inadéquate aussi dans un premier enseignement de la géométrie, cf. Rudolf Bkouche, *"De la géométrie et des transformations"* o.c.

68 Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité*, Blanchard, Paris 1934/1974)

> *très composées; et comme ils ont bien réussi dans la correspondance avec les propriétés linguistiques et grammaticales. Ils se sont fiés à la parole et à ses combinaisons pour les conduire sûrement dans l'espace"*.[69]

Ce que l'on appelle le *miracle grec* tient ainsi, en ce qui concerne la géométrie, à la construction d'une représentation langagière adéquate des situations géométriques. C'est cet *adéquation* qui permet le développement de la géométrie et qui autorise la substitution du langage (celui de la science) aux choses dans le développement de la connaissance. Mais cette substitution n'est fondée que parce qu'elle renvoie aux objets; c'est en ce sens que l'on peut parler du *réalisme* de la géométrie grecque, que ce réalisme soit le réalisme des idées[70] ou le réalisme des choses. Le langage, en tant que tel, s'il ouvre la perspective d'une connaissance *a priori* via le raisonnent déductif, reste lié au réel dont il n'est qu'une forme d'expression des propriétés. L'idée d'un pur développement langagier reste étrangère à la science grecque, l'on peut y voir la raison de l'élimination de tout lieu où l'ajustement dont parle Valéry se révèle impossible, c'est le cas de l'infini soigneusement évité dans le développement de la géométrie, c'est aussi le cas du numérique dès que l'on se heurte au problème des irrationnels (lequel problème se heurte aussi au problème de l'infini)[71].

Avec la géométrie arguésienne le problème de l'ajustement se déplace dans la mesure où Desargues élargit le rôle du langage avec la recherche d'*une seule et même énonciation*. Mais celle-ci ne relève pas, même si elle en ouvre la possibilité, d'une conception langagière des mathématiques. L'invariance arguésienne se définit via des constructions géométriques effectives, les coniques s'unifient parce qu'elles s'échangent par projections et ce sont ces constructions géométriques qui justifient la seule et même énonciation. Ce sont les remarques *"pour les contemplatifs"* de 1636 qui justifient l'analogie entre droites parallèles et droites concourantes et par cela même la notion de point à l'infini telle que Desargues la mettra en place quelques années plus tard.

De même, dans les *Principia*, c'est en faisant une transformation effective que Newton ramène le problème de la construction d'une conique tangente à quatre droites et passant par un point au cas où ces quatre droites forment un parallélogramme.

69 Paul Valéry, "La crise de l'esprit" in *Variété I*, Gallimard, Paris 1924

70 en ce sens le platonisme est un réalisme

71 Rappelons que la théorie d'Eudoxe-Euclide (Euclide, *Eléments*, livre V) a pour objectif de construire une théorie des grandeurs indépendantes de tout recours au numérique, les seuls nombres y intervenant étant les nombres entiers.

Il faudra que l'on compare des énoncés correspondants *d'un point de vue purement linguistique* pour que la seule et même énonciation prenne le pas sur la diversité des situations, ce que fera Gergonne en 1826 à propos de la dualité[72]. Encore aura-t-il fallu passer par la transformation par polaire réciproque par rapport à une conique (resp. une quadrique), c'est-à-dire une transformation qui change la nature des objets, un point se transformant en une droite (resp. un plan) et une droite (resp. un plan) se transformant en un point. C'est la comparaison de divers lieux où apparaît une telle correspondance aujourd'hui connue comme *dualité*[73] (sphère, polyèdres, transformations par polaires réciproque) qui conduira Gergonne à s'intéresser à l'aspect linguistique de la géométrie et à remarquer les correspondances entre énoncés indépendamment des contenus; il remarquera ainsi que la démonstration de la proposition duale d'une proposition donnée s'obtient en dualisant la démonstration de la proposition initiale, ce qui l'amènera à la présentation des propositions et des démonstrations en deux colonnes. Ainsi, les remarques de Gergonne vont permettre de situer la théorie des transformations dans un cadre purement langagier ; la *seule et même énonciation* de Desargues devient ainsi indépendante de tout contenu[74].

Cette conception langagière de la géométrie se heurtera à ce qu'on pourrait appeler l'*obstacle ontologique*, lequel participe de la notion générale d'obstacle épistémologique introduite par Bachelard[75]. On retrouve cet obstacle ontologique tout au long de l'histoire des mathématiques. C'est ainsi que l'on peut comprendre la polémique

[72] Gergonne, "Considérations philosophiques sur la science de l'étendue" *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome XVI, 1826 p. 209-231

[73] le terme de dualité a été introduit par Gergonne. Pour une étude historique de la notion de dualité, nous renvoyons à deux articles de Karine Chemla, *"Préhistoire de la dualité"* in *Sciences à l'époque de la Révolution française* (édité par Roshdi Rashed), Blanchard, Paris 1988, p. 151-201; *"Sur la construction de l'idée de dualité en géométrie"* Actes de la Quatrième Université d'Eté d'Histoire des Mathématiques (Lille 1990), IREM de Lille 1994

[74] Le point de vue de Gergonne sera conforté, en ce qui concerne les propriétés de l'espace lorsque l'on aura mis en évidence une nouvelle dualité échangeant points et plans liées à des phénomèmes mécaniques (distribution des vitesses d'un solide, systèmes de forces) (cf. Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), réédition Jacques Gabay, Paris 1989-1993; p.411-416 et 674-679

[75] Gaston Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique* (1938), Vrin, Paris 1972. Notons que, contrairement à Bachelard, nous ne réduisons pas ici l'obstacle épistémologique à ce qui opposerait des conceptions pré-scientifiques (ou de moindre scientificité) à l'émergence des conceptions scientifiques, les obstacles épistémologiques se situent aussi dans les conflits internes aux modes de pensée scientifique, c'est à l'intérieur de la pensée scientifique elle-même qu'il faut comprendre l'obstacle ontologique.

Poncelet-Gergonne[76] (indépendamment de la part de polémique personnelle), Poncelet ne pouvant admettre que la géométrie se ramène à de simples jeux de langage. Si Poncelet signale dans un article publié en 1857[77] l'aspect linguistique de la transformation des énoncés géométriques par la transformation par polaires réciproques par rapport à une conique ou une surface du second degré, cette transformation se situe dans la situation géométrique elle-même et non dans le langage. L'aspect linguistique n'est pour Poncelet que l'expérience d'un *"pur mécanisme"*, une *"simple substitution de noms et de lettres"* qui simplifie la transformation des énoncés. Dans sa réponse[78], Gergonne insiste au contraire sur le rôle de la langue dans la constitution de la Science et la nécessité, pour développer cette nouvelle géométrie, de *"créer une langue à sa taille"*.

C'est cet obstacle ontologique qui explique les réticences de Descartes par rapport à la notion de point à l'infini (cf. ci-dessus) ou les critiques de Beaugrand, lequel montre dans un texte polémique comment la relation d'involution définie sur une sécante par une conique et un quadrilatère inscrit dans cette conique peut être démontrée par des méthodes s'appuyant sur des théorèmes d'Apollonius, ce qui élimine la notion de point à l'infini et l'invariance projective, autrement dit l'aspect essentiel du texte de Desargues[79].

C'est encore cet obstacle ontologique que l'on rencontre chez Frege lorsqu'il reproche à Hilbert d'énoncer des axiomes sans avoir défini préalablement les objets sur lesquels portent ces axiomes;*"c'est demander aux axiomes de jouer le rôle qui incombe aux définitions"* écrit-il, précisant plus loin:

> *"Les propositions non définitionnelles (axiomes, principes fondamentaux, théorèmes) ne doivent contenir aucun mot ou signe dont le sens et la référence (ou la contribution à l'expression de la pensée) ne soit pas déjà*

[76] Sur la polémique Poncelet-Gergonne on peut lire les articles publiés par chacun des deux auteurs dans les *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*. Certains de ces articles ont été publiés dans le tome II du *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, o.c. p. 363-396.

[77] Jean-Victor Poncelet, "Analyse d'un mémoire présenté à l'Académie Royale des Sciences" *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, tome XVII, 1826/1827, p. 265-272

[78] Gergonne, "Réflexion sur le précédent article" ibid, p. 272-276

[79] Rudolf Bkouche, *"Desargues au XIXème siècle, l'influence d'un livre non lu"* o. c.; le texte de Beaugrand est publié dans l'édition des oeuvres de Desargues par Poudra (Poudra, *Oeuvres de Desargues* (2 volumes), Paris 1876, tome II, p. 355-378)

pleinement établis, en sorte qu'il n'y ait aucun doute sur le sens de la proposition, sur la pensée qui y est exprimée.... Les axiomes et les théorèmes ne peuvent donc jamais établir la référence d'un signe ou d'un mot qui y figure; ***cette référence doit être déjà établie****." (souligné par nous)*[80]

C'est en fait l'autonomie d'un langage sans autre référence que lui-même qui pose problème: *"de quoi parle ce langage?"*, pourrait-on demander, et la réponse aujourd'hui canonique *"de lui-même"* c'est-à-dire *"de rien"* n'est pas satisfaisante telle quelle. Cette autonomie ne devient signifiante que lorsqu'elle s'inscrit dans une problématique; la conception langagière des mathématiques représente ainsi le troisième moment de l'activité mathématique, le premier étant celui de ce que nous avons appelé l'*adéquation* du langage aux choses et le second celui de *la seule et même énonciation* ; c'est ce second moment qui permet d'unifier les objets participant d'une même énonciation, rendant inutile (du moins sur le plan méthodologique) toute référence à ces objets[81].

C'est donc dans ce second moment que l'on peut comprendre comment se constitue cette conception langagière des mathématiques qui, d'une certaine manière, *libère les mathématiques de toute ontologie.*

Notons cependant que cette libération n'est jamais complète dans la mesure où l'ontologie reste présente dans toute activité mathématique, d'abord par les *significations extérieures* qui guident toute construction langagière quelque peu consistante, ensuite parce que ces constructions langagières engendrent ce que l'on pourrait appeler de nouvelles ontologies, *ontologies artificielles* si l'on veut, qui participe de ce que j'ai appelé par ailleurs un enrichissement de l'intuition[82]. En ce sens l'aspect intuitif de la connaissance au sens que dit Gonseth[83] est en perpétuelle transformation, enrichi des constructions de l'esprit humain.

---

80 *Logique et fondements des mathématiques*, Anthologie (1850 - 1914) (publié sous la direction de François Rivenc et Philippe de Rouillant), Payot, Paris 1992; p. 222-223

81 On pourrait rapprocher ces trois moments des trois synthèses dialectiques proposées par Gonseth pour expliquer les divers modes d'articulation des trois aspects de la connaissance géométrique (cf. Frédéric Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Neufchâtel 1945/1955 et Houria Sinaceur, "La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth" in *La Figure et l'Espace*, o.c.

82 cf, Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, o.c. p. 163

83 Ferdinand Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace* (6 volumes), Editions du Griffon, Neuchâtel 1945/1955, volume II *"Les trois aspects de la géométrie"*.

On pourrait alors dire que *les mathématiques du primat des relations sur les objets* conduisent à de nouvelles formes d'intuition, lesquelles permettent une appréhension globale de ces nouveaux objets construits par l'esprit humain.

Si nous nous restreignons, dans cet article, à la contribution des idées projectives à l'émergence du non-ontologique et de la conception langagière des mathématiques, on ne saurait réduire cette émergence aux seules raisons projectives. Il faudrait aussi parler de la *réduction au calcul*; la mise en place du calcul littéral avec Viète conduit Fermat à considérer le calcul comme manipulation réglée de lettres indépendamment de toute signification de ces lettres[84]; cette conception formelle du calcul et les succès des mathématiques calculatoires dans le développement de la physique au XVIIIème siècle amèneront Lagrange à ce qu'on pourrait appeler la *réduction analytique*, c'est ainsi qu'il écrit dans la préface de sa *Mécanique Analytique*:

> *"On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnement géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu le domaine"*[85]

Paradoxe de l'oeuvre de Lagrange, les constructions lagrangiennes ont conduit à une reformulation géométrique de la mécanique analytique aujourd'hui en plein développement[86], exemple remarquable de reconstruction de l'ontologie dont nous avons parlé ci-dessus.

Le projectif et la conception langagière des mathématiques

Si la *"seule et même énonciation"* de Desargues ouvre le second moment au sens que nous avons dit, il faudra, pour arriver à la conception langagière proprement dite que les objets usuels de la géométrie que sont les figures s'effacent devant ce nouvel objet qu'est l'invariant, les figures n'apparaissant plus que comme des formes

---

84 Pierre de Fermat, *"Dissertation en trois parties"*, in *Oeuvres* (publiées par Paul Tannery et Charles Henry), GauthierVillars, Paris 1896 p. 109-120

85 Jean-Louis Lagrange, *Mécanique Analytique* (1788), réédition Blanchard, Paris 1965/ Jacques Gabay, Paris 1989; préface

86 Vladimir Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, (traduit du russe par Djilali Embarek), Editions de Moscou, Moscou 1976; A.M. Vinogradov and B.A. Kuperschmidt, *"The structure of Hamiltonian Mechanics"* in *Integrable Systems*, Cambridge University Press, Cambridge 1981

particulières d'icelui.

C'est ainsi que l'on peut lire l'histoire de la géométrie projective du XIXème siècle depuis les figures corrélatives de Lazare Carnot[87] jusqu'au *Programme d'Erlangen* de Felix Klein[88].

Deux figures sont en *corrélation* lorsque l'on peut passer de la première à la seconde par certaines modifications laissant invariantes certaines relations de position; cette notion a été introduite par Carnot pour ramener l'étude d'une figure à celle d'une autre figure mieux connue ou pour comparer les propriétés de deux figures proches, les modifications considérées sont ainsi liées au type de propriétés que l'on étudie. Poncelet reprendra cette définition dans un texte de 1818 sur le principe de continuité, publié dans son ouvrage *Applications d'Analyse et de Géométrie*[89]. Il y distinguera alors trois types de corrélation:

> *"Nous dirons que la corrélation est directe toutes les fois que les figures corrélatives seront composées d'un même nombre de parties semblables quant à leur nature, se correspondant chacun à chacune, et disposées absolument dans le même ordre à l'égard les unes des autres: dans cette situation, elles ne différeraient évidemment que par la grandeur absolue de ces parties, et nullement par leur nature et leur position relative.*
>
> *Nous dirons que la corrélation est au contraire indirecte ou inverse toutes les fois que le déplacement nécessaire à opérer dans l'une des figures, pour la rendre identique avec sa corrélative, changerait l'ordre, la disposition de quelques-unes des parties dont elle se compose, sans toutefois en changer la nature.*
>
> *Enfin la corrélation pourrait être telle que, en vertu du déplacement toujours réel de certaines parties de la figure primitive, une ou plusieurs autres parties devinssent dans la corrélative, imaginaires de réelles qu'elles étaient, ou réciproquement; c'est-à-dire telles que certaines distances,*

87 Lazare Carnot, *De La Corrélation des figures géométriques*, Paris 1801 et *Géométrie de Position*, Paris 1806; pour une étude de la notion de figures corrélatives chez Carnot, cf. Karine Chemla, Lazare Carnot et la généralité en géométrie, Actes du Colloque *La Naissance du Projectif*, Lille 1989 (à paraître in Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences)
88 Felix Klein, o.c.
89 Jean-Victor Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie* (2 volumes), Gauthier-Villars, Paris 1862-1864

> *certains points cessassent d'exister d'une manière géométrique: nous nommerons cet état de deux figures corrélation idéale."* [90]

Ce dernier type de corrélation est lié au *principe de continuité*, autre forme d'unification des figures géométriques dans la construction projective.

On peut alors considérer deux figures corrélatives comme définissant le même objet géométrique; c'est en ce sens que la figure s'efface derrière l'objet géométrique. On comprend alors pourquoi l'un des plus important ouvrage de géométrie de l'époque, l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*[91] de Michel Chasles ne contient pas une seule figure[92].

Nous pouvons remarquer ici que ce nouvel objet géométrique n'est pas sans relation avec le point de vue de la réduction au calcul cité ci-dessus; mais si les adeptes de la réduction au calcul, comme l'explique Lagrange, voient la puissance de leur méthode dans l'autonomie du calcul par rapport aux objets, les géomètres projectifs cherchent au contraire à construire un calcul sur les objets eux-même, les objets ayant été convenablement transformés dans le cadre de la nouvelle géométrie. C'est ainsi que l'on peut comprendre la polémique entre géométrie analytique et géométrie synthétique.

D'une certaine manière c'est la conception langagière qui permettra de dépasser cette polémique en explicitant les liens entre les deux modes de *"calcul"* représentés par chacun des points de vue. mais cela demandera une nouvelle façon de penser l'invariance projective en introduisant le point de vue *"structural"*. Ce sera le *Programme d'Erlangen* reliant l'invariance géométrique à la théorie des groupes.

Lorsque Klein écrit:

> *"La géométrie projective n'a pris naissance que quand on s'est accoutumé à considérer comme entièrement identiques la figure primitive et toutes celles qui s'en peuvent déduire par projection, et à énoncer les propriétés projectives de façon à mettre en évidence leur indépendance vis-à-vis des modifications apportées par la projection"*

90 ibid, tome II p. 301
91 Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), réédition Jacques Gabay, Paris 1989
92 Rudolf Bkouche, "De la géométrie sans figure" o. c.

il s'inscrit dans la tradition arguésienne de la seule et même énonciation mais avec l'introduction du point de vue global que permet la notion de groupe de transformation, il ajoute une dimension nouvelle, *une géométrie* devenant la donnée d'un espace sur lequel opère un groupe de transformation (le groupe principal de la géométrie dans la terminologie de Klein), l'action du groupe *structurant*, c'est-à-dire organisant, la relation entre transformations et invariants; un invariant est alors défini par le sous-groupe des transformations qui le conserve. On explicite ainsi une correspondance entre sous-groupes du groupe principal et systèmes d'invariants; ce sont ces derniers qui définissent les objets géométriques. Klein explique à la fin du *Programme d'Erlangen* comment son point de vue participe des idées de Galois[93].

Si Felix Klein ne s'inscrit pas dans le courant formaliste, il a fourni au courant formaliste l'un de ses principaux instruments dans la mesure où le point de vue du *Programme d'Erlangen* s'inscrit dans une conception langagière des mathématiques (même s'il est loin de se réduire à celle-ci[94]), que ce soit avec les reconstructions structurales de la géométrie élémentaire (telle, aujourd'hui, le monumental ouvrage de Marcel Berger[95]) ou la théorie des catégories que l'on peut considérer aujourd'hui comme la forme la plus générale du *Programme d'Erlangen*.

Des éléments à l'infini

Pour Desargues l'introduction du point à l'infini est essentiellement une façon de dire que droites parallèles et droites concourantes ont les mêmes propriétés et le fait que par projection des droites parallèles puissent devenir concourantes justifie que le point à l'infini satisfasse aux mêmes propriétés que les points ordinaires.

Cela permet une unification des méthodes de démonstration et Desargues comme ses successeurs proches ou plus lointains ont su en faire largement usage

S'introduiront alors, d'une part les droites à l'infini, à la fois ensemble des points à l'infini d'un plan et intersection d'une famille de plans parallèles, d'autre part le plan à l'infini ensemble des points à

93 Felix Klein, o.c. p. 35-37
94 Rappelons que pour Felix Klein la connaissance n'est acquise que lorsqu'elle est devenue *intuitivement évidente*, cf. *Programme d'Erlangen*, o.c. p. 38
95 Marcel Berger, *Géométrie* (5 volumes), Cedic/Nathan, Paris 1979; réédition (2 volumes), Nathan, Paris 1990

l'infini[96]. Ici encore ce sont les transformations projectives qui justifient l'usage de ces objets *idéaux* (idéaux en ce sens qu'ils n'ont pas d'existence, objets non-ontologiques au sens que nous avons dit ci-dessus)[97].

Une figure, au sens de la géométrie usuelle, peut alors être *complétée* en lui ajoutant ses éléments idéaux, ainsi les cercles d'un plan ont tous en commun deux points imaginaires à l'infini (les points cycliques) et toute conique passant par ces deux points est un cercle[98]. Les propriétés d'une figure sont ainsi les propriétés projectives (invariantes par les transformations homographiques) de la figure obtenue en ajoutant à la figure initiale ses éléments idéaux[99].

La géométrie élémentaire (la géométrie grecque) devient ainsi une partie de cette géométrie générale qu'est la géométrie projective. Cela pose un double problème: d'une part, le problème de la reconstruction de la géométrie usuelle à partir de la géométrie projective, d'autre part, celui d'une construction autonome de la géométrie projective. Ce dernier problème allait se montrer difficile: si la géométrie projective est construite en ajoutant les éléments idéaux à la géométrie usuelle comme cela se fait depuis Desargues, elle n'en est pas indépendante; le problème de l'autonomie du projectif se situait ainsi aux limites du second moment de la construction géométrique (au sens que nous avons dit ci-dessus). On peut comprendre ainsi l'échec relatif de la première tentative d'une telle construction autonome de la géométrie projective, celle de von Staudt qui, s'il a mis en place dans son ouvrage *Die Geometrie der Lage*[100], les éléments d'une construction indépendante de toute notion métrique s'est heurté à certaines difficultés (définition du point à l'infini indépendante de toute notion de parallélisme, définition de la correspondance numérique-géométrique à partir du birapport

96 Jean-Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, o.c. tome I, p. 52 et p. 361
97 en fait, les objets idéaux sont les éléments à l'infini et les éléments imaginaires, ces derniers définis par le principe de continuité.
98 Jean-Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, o.c. tome I, p. 47-48; Michel Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, Gauthier-Villars, Paris 1852/1880, p. 424-425
99 Arthur Cayley, *"A sixth memoir upon quantics"* Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. CXLIX, 1859, p. 61-90; n° 158 in Arthur Cayley, *Collected Mathematical Papers*, Cambridge University Press, vol. II, p. 561-592
100 Carl Von Staudt, *Die Geometrie der Lage*, Nuremberg 1847; pour une critique de l'ouvrage de Von Staudt, cf. Felix Klein, *Developments of Mathematics in the XIX° Century* (1928) (translated by M. Ackermann) Math. Sci. Press, Brookline 1979, p. 121-125 et Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972, p. 850-853.

indépendante de toute notions métriques).

C'est que la géométrie projective du XIXème siècle, dans son dépassement de l'ontologie, s'arrête à mi-chemin; l'invariance permet de considérer les éléments à l'infini comme des points ordinaires, la seule et même énonciation se présentant alors comme la possibilité pour les objets idéaux de se comporter comme les objets ordinaires, c'est-à-dire que l'on peut travailler comme s'ils étaient des objets ordinaires. La solution viendra de l'inversion du problème, il s'agit moins de travailler comme si les objets idéaux relevaient d'une ontologie (ce qui était le *coup de force épistémologique* de Desargues, pourrait-on dire) que d'*oublier* l'ontologie des objets réels, c'est ce passage à la *désontologisation* des objets mathématiques qui inaugure le troisième moment, conduisant à la conception langagière, *la substitution des mots aux choses* si l'on veut[101].

C'est un point de vue analytique qui permettra cette désontologisation. La géométrie projective a trouvé sa représentation analytique avec les coordonnées homogènes de Plucker[102], représentation analytique qui conduira à la définition des espaces numériques (de dimension quelconque) que Cayley définit ainsi dans un article de 1870[103]:

> *"Postulate. We may conceive a m-dimensional space, the indetermination of the ratio of m + 1 coordinates, and* ***locus in quo*** *of the point, the unique determination of these ratios. More generally. More generally we may conceive any number of spaces, each of its own dimensionality, and existing apart by itself.*
>
> *Conversely, any m + 1 quantities may be taken as the coordinates of a point in a m-dimensional space"*[104]

Ainsi un espace numérique de dimension *n* est l'ensemble des systèmes de *m* + 1 nombres défini à un facteur près.

Dans ce cadre, les points à l'infini peuvent être définis comme les

101 C'est cette désontologisation qu'accomplit Hilbert lorsqu'il écrit que l'objet mathématique est le signe (cf. ci-dessus)
102 Julius Plucker, *Analytisch-geometrische Entwickelungen* (2 vol.) Nuremberg 1828-1831 et *System des analytische Geometrie*, Berlin 1835
103 Arthur Cayley, "A memoir on abstract geometry" *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. CLX, 1870, p. 51-63; n° 413 in Arthur Cayley, *Collected Mathematical Papers*, o.c. vol. VI p. 456- 469
104 ibid p. 458

points dont la dernière coordonnée est nulle[105], cette condition permet de considérer les points à l'infini comme les points d'un plan, le plan à l'infini. Les transformations projectives qui s'expriment comme des transformations linéaires des coordonnées homogènes permettent alors de transformer les éléments à l'infini en des éléments à distance finie et par conséquent de ne plus les distinguer du point de vue projectif.

Ainsi le point de vue analytique permettait la construction d'une géométrie projective autonome; la géométrie usuelle s'obtenant en choisissant arbitrairement le plan à l'infini. Dans ce cadre, l'infini n'est donc plus qu'une façon de nommer certains éléments et le choix de ces éléments relève de la libre décision du géomètre; en fait cette liberté signifie que ce choix s'inscrit dans le type de problème que l'on veut résoudre et en cela participe de la problématique arguésienne, mais au lieu de transformer la figure, il suffit simplement de la lire dans le contexte le plus favorable à la résolution du problème posé; c'est en ce sens que la *"seule et même énonciation"* s'inscrit dans une pure conception langagière.

On retrouve ici cette lecture multiple des situations géométriques qui caractérise la modernité mathématique, mais cette lecture multiple a un double aspect, d'une part elle relève de la seule forme, d'autre part elle permet de *"voir"* une situation à travers une autre, se traduisant par ce que l'on peut appeler un *transfert d'intuition* conduisant à cet enrichissement de l'intuition dont j'ai déjà parlé [106].

Cette lecture multiple marque ainsi les limites de la seule réduction au calcul. La réduction au calcul met en avant la seule forme et c'est sur cette seule forme qu'elle invite le mathématicien à travailler,

105 Nous rappelons l'introduction des coordonnées homogènes à partir des coordonnées cartésiennes telle qu'on la trouve dans les traités classiques de géométrie analytique: A tout point de coordonnés (x, y, z), on associe un quadruplet (**X**, **Y**, **Z**, **T**) tel que l'on ait les relations

$$\mathbf{X} = x\mathbf{T} \qquad \mathbf{Y} = y\mathbf{T} \qquad \mathbf{Z} = z\mathbf{T}$$

Ainsi on associe à tout point un quadruplet défini à un facteur près et réciproquement un quadruplet non nul définit un point, deux quadruplets proportionnels définissant le même point.

Si l'on considère une droite déterminée par deux points (a, b, c, d) et (a', b', c', d'), et si l'on note (**X**, **Y**, **Z**, **T**) les coordonnées d'un point variable de la droite, on montre aisément que la coordonnée **T** tend vers 0 lorsque le point s'éloigne à l'infini.

Les points à l'infini sont ainsi définis par l'équation **T** = 0 ce qui permet de considérer l'ensemble des points à l'infini comme un plan.

106 Rudolf Bkouche, "De la géométrie sans figure" o.c.

point de vue nécessaire sur le plan de la méthode comme le laisse entendre une lecture *à la lettre* du texte de Dieudonné cité ci-dessus, mais point de vue intenable autant sur le plan de la construction de la connaissance (quel est l'objet de la connaissance?) que sur le plan de l'activité mathématique.

Si la conception langagière permet une lecture multiple, c'est que la *seule et même énonciation* ne relève pas de la seule forme mais s'appuie tout autant sur la diversité des significations; parler d'infini, c'est, en donnant un nom à certains éléments de l'objet géométrique que l'on étudie, se référer à des situations géométriques particulières et jouer entre ces diverses situations particulières (l'infini renvoie ainsi aux représentations mentales). Si toute conique est un cercle c'est aussi que toute conique est une parabole, ou une hyperbole équilatère; on peut lire ainsi non seulement les propriétés des coniques à travers les coniques particulières que sont le cercle, la parabole ou l'hyperbole équilatère, mais aussi les propriétés d'une conique particulière donnée à travers une autre conique particulière.

La *seule et même énonciation* fournit ainsi un dictionnaire et la conception langagière lui apporte alors un fondement logique indépendant de la méthode des transformations; c'est cela qui marque l'émergence du troisième moment défini ci-dessus.

Si la réduction au calcul proposée par les méthodes analytiques assure ce fondement logique, elle oublie les objets en tant que tels[107]; c'est cet oubli des objets en tant que tels que critiqueront les adeptes de la géométrie synthétique lesquels chercheront à construire *un calcul géométrique*, c'est-à-dire un calcul portant sur les objets eux-mêmes comme l'explique, de façon souvent confuse, Poncelet fasciné par la puissance et la généralité des méthodes analytiques[108].

C'est le point de vue structural du *Programme d'Erlangen* qui unifiera les deux points de vue, l'*analytique* et le *synthétique* en introduisant, comme on l'a vu ci-dessus, ce nouvel objet qu'est le couple formé par un espace et un groupe de transformations (le groupe principal) opérant sur cet espace; les éléments à l'infini sont alors définis comme les invariants d'un sous groupe du groupe principal ce qui redéfinit le cadre géométrique de ces éléments à l'infini. Dans ce cadre, la géométrie euclidienne plane n'est plus que la géométrie *subordonnée* à la géométrie projective plane définie par le sous groupe des

107 c'est cependant cet oubli qui en fait la puissance comme l'explique Lagrange dans la préface de sa *Mécanique Analytique* (cf. ci-dessus)

108 Jean-Victor Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie* o.c. tome II, Quatrième Cahier, p. 296-364

transformations homographiques laissant invariants une droite et deux points imaginaires conjugués de cette droite, un cercle étant une conique passant par ces deux points.

Reste alors à construire la géométrie projective de façon autonome.

Reconstruction axiomatique de la géométrie projective

Nous rappellons ici les deux grands types de construction de la géométrie projective, le premier type que nous pourrions appeler *synthétique* (pour reprendre une terminologie classique) s'inscrit dans une axiomatique *à la Hilbert*; le second type s'inscrit dans le cadre de l'algèbre linéaire[109].

Le plan projectif (l'espace projectif) est d'abord défini comme le plan (l'espace) de la géométrie usuelle auquel on ajoute les éléments idéaux que sont les points à l'infini; cette construction *non homogène* exige la mise en place d'un principe d'homogénéïté; c'est la détermination des transformations projectives qui permet la mise en place de ce principe justifiant ainsi la *"seule et même énonciation"* arguésienne.

Cette homogénéïté pose alors le problème d'une construction directe du plan ou de l'espace projectif mais une telle construction se heurte à *l'intuition journalière* comme l'explique Enriques dans son article sur les *Principes de la Géométrie*[110]. Enriques après avoir remarqué que la droite projective (la droite usuelle complétée par son point à l'infini) *"apparaît plutôt comme une ligne **fermée** que come une ligne **ouverte**"*[111] écrit:

> *"Notre intuition journalière de l'espace se trouve ainsi modifiée; le concept de l'espace ordinaire est remplacé par celui de l'**espace projectif**"*[112]

109 Rudolf Bkouche, "Historique" in Daniel Lehmann-Rudolf Bkouche, *Initiation à la géométrie*, PUF, Paris 1988; p. 484-486

110 Federigo Enriques,"Principes de la Géométrie" in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées* (édition française), o.c. III, 1, ; le texte français de l'aricle d'Enriques (traduit de l'allemend par son auteur) a été publié en 1909.

111 Cette conception de la ligne droite comme ligne fermée apparaît dans le *Brouillon Project* avec l'analogie entre la droite (munie de son point à l'infini) et le cercle, *"deux espèces d'un mesme genre, dont on peut énoncer le tracement en mesmes paroles"* (René Taton, o.c; p. 102)

112 Federigo Enriques, o.c. p. 82

Enriques rejoint ainsi Felix Klein quant au rôle de l'intuition dans la connaissance géométrique, mais cette modification de l'intuition, pour être fondée, doit s'appuyer sur des principes rigoureux qui ressortissent d'une construction logique; ainsi peut-on comprendre la philosophie générale de l'article cité de Enriques, une dialectique entre la logique et l'intuition qui permette à la fois de connaître et de fonder cette connaissance.

La seule intuition ne suffit pas à fonder la connaissance, d'autant que l'intuition journalière (pour reprendre l'expression de Enriques) constitue un obstacle à la modification de l'intuition que demande Enriques. C'est une axiomatique *à la Hilbert* qui permettra la construction d'une géométrie projective autonome en éliminant tout recours à l'intuition; comme dans l'axiomatique hilbertienne, les objets géométriques ne sont plus définis que par les axiomes énoncés *a priori*, les axiomes eux-mêmes ne renvoyant, en principe, à aucune représentation mentale.

Nous ne pouvons, dans le cadre de cet article, développer l'histoire des différentes axiomatiques proposées, renvoyant à l'article cité de Enriques[113] et à l'appendice historique de l'*Initiation à la géométrie* de Lehmann[114]. Pour un exposé moderne de l'axiomatique de la géométrie projective, nous renvoyons à l'ouvrace de Coxeter, *Introduction to Geometry*[115] et à celui de Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry*[116]

Un autre problème se posera dans la mise en place d'une axiomatique de la géométrie projective, celui des éléments imaginaires d'autant que ceux-ci ont un rôle essentiel dans la reconstruction projective de la géométrie euclidienne.

Si l'on veut échapper à la difficulté du principe de continuité, on a besoin de donner une construction rigoureuse des éléments imaginaires; on peut lire une telle construction dans le *Traité de Géométrie supérieure* de Chasles. Chasles remarque qu'un couple de points peut être déterminé par le milieu du segment qu'il détermine et par le produit des distances de ces deux points à un point de la droite qu'ils définissent, cette détermination conduit à une équation du second degré;

---

113 Federigo Enriques, o. c. p. 78-95 et *Leçons de géométrie projective* (traduit de l'italien par P. Labérenne), Gauthier-Villars, Paris 1930, p. 397-399

114 Rudolf Bkouche, "Historique" o. c. p. 484-486

115 H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, New York 1961/1969/

116 Robin Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry*, Benjamin, New York, 1967

cette équation peut avoir des solutions imaginaires; on dit alors que les points sont *imaginaires*[117] (ils sont nécessairement imaginaires conjugués, ceci explique pourquoi les points imaginaires se présentent toujours par couple). L'introduction des points imaginaires permet une étude générale des points doubles d'une homographie sur une droite, ces points doubles pouvant être réels, distincts ou confondus, ou bien imaginaires[118]. Un cas important est celui d'une involution (une homographie identique à son inverse), dans ce cas les points doubles sont nécessairement distincts et l'involution est déterminée par ses points doubles, deux points étant en involution (c'est-à-dire transformés l'un de l'autre par l'involution) si et seulement s'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points doubles[119], ceux-ci peuvent être soit réels soit imaginaires ce qui conduit à distinguer deux types d'involution, les involutions *hyperboliques* (les points doubles sont réels) et les involutions *elliptiques* (les points doubles sont imaginaires conjugués). Un couple de points imaginaires conjugués est ainsi défini par une involution elliptique ce qui donne une définition *réelle* des couples de points imaginaires conjugués et plus généralement des éléments imaginaires[120]; on peut alors reconstruire la géométrie euclidienne plane en choisissant une droite particulière (laquelle sera la droite de l'infini) et une involution elliptique sur cette droite, le groupe principal de cette géométrie étant le sous-groupe des transformations projectives laissant invariant la droite de l'infini et compatible avec l'involution (c'est-à-dire telles que deux points à l'infini en involution se transforment en deux points à l'infini en involution)[121].

Le second type de construction de la géométrie projective s'exprime en termes d'algèbre linéaire.

Les coordonnées homogènes de Plücker permettent de représenter une transformation projective comme une transformation linéaire des coordonnées, cette remarque a conduit à la définition moderne de l'espace projectif comme l'ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel[122], une transformation projective est alors déterminée par la donnée, à un facteur multiplicatif près, d'une transformation linéaire (en

---

117 Michel Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, o. c. p. 54-55

118 ibid, p. 100-101

119 ibid, p. 128

120 John Wesley Young, *Projective Geometry* (1930), The Mathematical Association of America and The Open Court Publishing Company, Chicago 1971, p. 131

121 ibid, chapter VI (dans son ouvrage, Young expose la construction dans l'espace, mais le principe en est le même)

122 on peut considérer que cette construction n'est autre que celle de Cayley libérée de l'utilisation de coordonnées.

termes modernes, le goupe projectif est le quotient du groupe linéaire par la sous-groupe des homothéties vectorielles).

La construction linéaire de la géométrie projective permet de définir celle-ci sur un corps quelconque; on définit ainsi la géométrie projective réelle (sur le corps des nombres compexes) et la géométrie projective complexe (sur le corps des nombres complexes), on peut alors, en considérant le groupe linéaire réel comme sous-groupe du groupe linéaire compexe, définir la géométrie réelle comme géométrie subordonnée (au sens du *Programme d'Erlangen*) de la géométrie complexe. La géométrie euclidienne est alors définie par un sous groupe convenable de ce groupe projectif réel.

La construction linéaire s'appuie sur la donnée d'un *corps de scalaires* et la géométrie est ainsi subordonnée au numérique alors que la construction axiomatique *à la Hilbert* est indépendante de tout recours au numérique. La question se pose alors de la compatibilité entre entre ces deux types de construction ; on aborde ainsi, d'une façon indépendante de toute notion de mesure des grandeurs, la relation générale entre le géométrique et le numérique[123].

L'étude axiomatique de la relation entre géométrique et numérique a montré le rôle du théorème de Desargues sur les triangles homologiques que l'on peut énoncer ainsi:

> *"Soient deux triangles **ABC** et **A'B'C'** tels que les droites **AA'**, **BB'**, **CC'** soient concourantes, alors, si l'on note a, b, c les points d'intersection respectifs des couples de droites (**BC**, **B'C'**), (**CA**, **C'A'**) et (**AB**, **A'B'**), les points a, b, c sont alignés"*

Ce théorème est publié dans l'ouvrage cité de Bosse[124] et reproduit dans l'ouvrage de Taton sur Desargues[125]. La démonstration est triviale lorsque les triangles ne sont pas dans un même plan; lorsque les triangles sont dans un même plan, on peut soit montrer que les triangles sont les perspectives de deux trianges non coplanaires satisfaisant la même propriété, soit utiliser des relations numériques, que ce soit le théorème de Menelaus comme le fait Desargues, soit utiliser des coordonnées (cette dernière démonstration montre qu'un plan projectif sur un corps satisfait le théorème de Desargues). Notons le rôle de ce

[123]Rudolf Bkouche, *Autour du théorème de Thalès*, IREM de Lille, 1994 (à paraître)
[124]Abraham Bosse, o.c. p. 340
[125]René Taton, o.c. p. 206-207

théorème dans la construction axiomatique: c'est lui qui permet de définir la division harmonique de façon purement graphique (c'est-à-dire indépendamment de toute relation numérique)[126]. Hilbert a montré que le théorème de Desargues est indépendant des relations d'incidence[127], il faut donc le poser comme axiome dans la construction axiomatique du plan projectif; on démontre alors qu'un plan projectif satisfaisant à l'axiome de Desargues peut être défini comme plan projectif sur un corps[128].

Le théorème de Desargues assure ainsi l'équivalence des deux constructions de la géométrie projective.

Le point à l'infini du plan complexe

Nous avons rappelé ci-dessus comment la représentation géométrique des nombres complexes a donné un statut à ces derniers, un nombre complexe s'identifiant, d'une part à un point du plan, d'autre part à une opération du plan[129].

Cette représentation géométrique a conduit à la définition de ce qu'on a appelé *le plan complexe* et à relier les opérations sur les nombres complexes à certaines transformations du plan (translations, rotations, similitudes).

C'est cette représentation géométrique qui a permis à Riemann de développer une théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe à valeurs complexes, une telle fonction définissant une application d'un domaine du plan dans le plan[130]. L'étude du comportement d'une fonction pour des valeurs infiniment grande de la variable complexe a conduit à introduire la valeur ∞ de cette variable, valeur qu'on peut ramener *à distance finie* par la transformation $z \to \frac{1}{z}$. Ainsi, via une transformation convenable, l'étude du comportement d'une fonction *au voisinage de l'infini* est analogue à l'étude au voisinage d'un point à distance finie. On peut alors aussi bien, suivant le type de problème que l'on étudie et la façon dont on l'étudie, ramener le

[126]John Wesley Young, o. c. p. 36-39
[127]David Hilbert, o. c. p.
[128]Emil Artin, *Algèbre géométrique*, (traduction Michel Lazard), Gauthier-Villars, Paris 1962, chapitre II et Pierre Samuel, *Géométrie projective*, PUF, Paris 1986; p. 46-49
[129]Eduard Study, Elie Cartan, o.c.
[130]Bernhard Riemann, "Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur complexe" in *Oeuvres mathématiques* (traduites par Laugel) (1897), Blanchard, Paris 1968 et Jacques Gabay, Paris 19..

point à l'infini à distance finie ou envoyer un point à distance finie à l'infini[131].

On a ainsi *homogénéisé* le plan complexe complété par l'introduction du point à l'infini; cette homogénéisation prend une nouvelle signification géométrique avec la *sphère de Riemann*, la projection stéréographique établissant une correspondance entre points du plan et points de la sphère[132].

De façon précise, on considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\mathbf{O}xyz$ la sphère unité de centre $\mathbf{O}$, la projection stéréographique de centre le pôle nord $\mathbf{N}$ (le point de coordonnées (0,0,1)) envoie un point $\mathbf{M}$ de la sphère sur le point m intersection de la droite $\mathbf{NM}$ et du plan $\mathbf{O}xy$. Si l'on note ξ, η, ζ, les coordonnées du point $\mathbf{M}$, le point m a pour coordonnées dans le plan $\mathbf{O}xy$:

$$x = \frac{\xi}{1-\xi} \qquad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

et on lui associe le nombre complexe $z = x + iy = \dfrac{\xi + i\eta}{1-\zeta}$.

Cette correspondance qui envoie bijectivement la sphère privée du point $\mathbf{N}$ sur la plan peut être étendue à la sphère toute entière si l'on ajoute au plan le point ∞, et si l'on considère ce point ∞ comme l'image de $\mathbf{N}$ par la projection stéréographique, un voisinage du point ∞ n'étant autre que l'image d'un voisinage de $\mathbf{N}$ par la projection stéréographique. La projection stéréographique permet ainsi de transporter sur la sphère de Riemann la notion de fonction analytique d'une variable complexe[133].

On pourra remarquer l'analogie entre la correspondance "sphère-plan" introduite ici et la correspondance "cercle-droite" déjà remarquée par Desargues dans son *Brouillon Project*[134].

Mais si analogie il y a, on est en présence de deux constructions

[131]Bernhard Riemann, "Théorie des fonctions représentables par la série de Gauss" in *Oeuvres mathématiques*, o.c.

[132]Felix Klein, *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals* (1881) (translated from the german by Frances Hardcastle), Dover Publications, New York 1963, p. 15-16; *Lectures on Icosahedron* (1884) (English translation G.G. Morrice), Dover Publications, New York 1956, chapter 2

[133]Hermann Weyl, *The concept of a Riemann Surface* (1913) (translated from the german by G.R. Mac Lane) Addison-Wesley, Reading Mass. 1955, p. 37; Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions d'une variable complexe*, Hermann, Paris 1961, p. 90-92

[134]René Taton, o.c. p. 102

apparemment incohérente (si l'on se place du seul point de vue des objets); dans un cas, pour des raisons géométriques, on ajoute au plan une droite à l'infini, ensemble des points à l'infini des diverses directions du plan, dans le second cas, pour des raisons liées à l'étude des fonctions, on ajoute au plan un seul point à l'infini.

Cette apparente incohérence disparaît si l'on prend en considération, d'une part le caractère problématique des concepts, d'autre part le point de vue structural, lequel assure la cohérence de ces deux *complétions* du plan.

Nous nous intéresserons d'abord au point de vue structural, renvoyant à plus tard le point de vue problématique.

C'est l'étude analytique des homographies qui permet d'expliciter l'analogie entre la droite d'une part et le plan complexe d'autre part. Si l'on représente un point par sa coordonnée x (abscisse réelle ou affixe complexe selon que l'on étudie la droite ou le plan complexe), une homographie est définie par la relation

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

a, b, c, d étant quatre nombres (réels ou complexes) tels que

$$ad - bc \neq 0.$$

Cette analogie analytique devient intrinsèque (c'est-à-dire indépendante de tout recours aux coordonnées) si l'on se place dans le cadre de l'algèbre linéaire. La droite projective sur un corps (l'espace projectif unidimensionnel) n'est autre que l'ensemble des droites vectorielles du plan vectoriel sur ce corps (espace vectoriel de dimension 2), une homographie étant déterminée par la donnée d'une transformation linéaire définie à une homothétie près (cf. ci-dessus). Ce point de vue nous conduit à considérer le "bien mal-nommé" plan complexe comme une droite sur le corps des nombres complexes, le plan complexe complété par le point à l'infini n'étant autre que la droite projective complexe.

Notons cependant que, via la représentation sur la sphère de Riemann, la géométrie du plan complexe est susceptible d'une interprétation *réelle*.

On remarque d'abord que dans le plan complexe complété par le point à l'infini, on peut considérer une droite comme un cercle passant par le point à l'infini: il suffit de remarquer que l'image d'une droite par une homographie est une droite ou un cercle selon que le point à l'infini est invariant ou non par l'homographie et que l'image d'un cercle est un cercle en général et une droite lorsque l'un des points du cercle est envoyé au point à l'infini. On peut ainsi considérer droites et cercles comme une même espèce de courbe (les cercles au sens large); on peut ainsi, conformément à la méthode arguésienne, étudier les droites et les cercles *par une seule et même énonciation.*

Une homographie conserve ainsi l'ensembles des cercles (au sens large), d'autre part une homographie conserve l'orientation et on montre que la conservation de l'ensemble des cercles (au sens large) et de l'orientation caractérise les homographies.

Notons que l'on connaît depuis Möbius[135] des transformations qui conserve l'ensemble des cercles (au sens large) mais non l'orientation, ce sont les inversions; on montre aisément que le groupe des transformations qui conservent l'ensemble des cercles (au sens large) est engendré par les homographies et les inversions (une seule inversion suffit). On définit ainsi une géométrie (au sens du *Programme d'Erlangen*): *la géométrie anallagmatique.*

La projection stéréographique permet de définir la géométrie correspondante sur la sphère, une homographie étant une transformation de la sphère sur elle-même conservant l'ensemble des cercles et l'orientation; je laisse au lecteur le plaisir de définir ce que devient l'inversion sur la sphère.

On peut alors situer la géométrie anallagmatique dans le cadre de la géométrie projective réelle (c'est l'interprétation réelle annoncée).

On montre aisément que le groupe des transformations de la sphère sur elle-même qui conservent l'ensemble des cercles n'est autre que le groupe des transformations projectives de l'espace qui conserve la sphère, une telle transformation conservant l'orientation si et seulement si elle conserve l'intérieur de la sphère.

Remplaçant la sphère par une surface du second degré non

[135]Julian L. Coolidge, *A history of geometrical methods*, Dover Publications, New York 1963, p. 278-280

dégénérée et non réglée[136], on montre que la géométrie anallagmatique est équivalente, au sens du *Programme d'Erlangen*, à la géométrie des transformations de l'espace projectif réel de dimension 3 conservant une quadrique non réglée[137]. On laisse au lecteur le plaisir d'étudier la géométrie conservant une quadrique réglée.

La droite numérique achevée

Le corps des nombres réels est aussi appelé *droite numérique*, ce qui marque le lien entre le géométrique et le numérique. On définit alors la droite numérique achevée (notée $\overline{\mathbf{R}}$) en ajoutant deux bouts à la droite numérique, savoir, le nombre $+\infty$ supérieur à tout nombre réel et le nombre $-\infty$ inférieur à tout nombre réel; un élément de $\mathbf{R}$ est alors appelé un *nombre réel fini*. On définit de façon évidente une base de voisinages de $+\infty$ (resp. de $-\infty$), les éléments d'icelle étant les intervalles $]a, +\infty]$ (resp. $[-\infty, a[$) où a est un nombre réel fini quelconque[138]. La droite numérique achevé devient ainsi un espace compact[139].

On prolonge à $\overline{\mathbf{R}}$ les opérations arithmétiques de la façon suivante:

si $a \neq -\infty$	$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$
si $a \neq +\infty$	$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$
si $a > 0$	$a. (+\infty) = (+\infty). a = +\infty$
	$a. (-\infty) = (-\infty).a = -\infty$
si $a < 0$	$a. (+\infty) = (+\infty). a = -\infty$
	$a. (-\infty) = (-\infty). a = +\infty$

On vérifie aisément que ces opérations sont continues pour la

[136] On rappelle que l'on peut distinguer dans l'espace projectif réel de dimension 3 deux types de quadriques non dégénérée, les quadriques réglées (hyperboloïdes à une nappe, paraboloïdes hyperboliques) et les quadriques non réglées (ellipsoïdes réels, hyperboloïdes à deux nappes, paraboloïdes elliptiques), deux quadriques de même type étant projectivement équivalentes (c'est-à-dire qu'elles peuvent s'échanger par une transformation projective).

[137]Felix Klein, *Programme d'Erlangen*, o.c. p. 18-21

[138]On rappelle que dans un espace topologique $\mathbf{X}$, une base de voisinages V d'un point x est un ensemble de voisinages de x tel qu'un voisinage de x est caractérisé par la propriété de contenir un élément de V.

[139]Nicolas Bourbaki, *Les Nombres réels*, o.c. §4

topologie de $\overline{\mathbb{R}}$.

A quoi bon une telle définition? Disons d'abord que l'introduction de la droite numérique achevé permet de rendre convergente toute série à termes réels positifs, une telle série étant convergente ou divergente (au sens usuel) selon que sa somme est un nombre réel fini ou le nombre $+\infty$. L'introduction de la droite numérique achevée conduit ainsi à la *seule et même énonciation* en ce qui concerne certaines propriétés.

Le rôle de cette *même et seule énonciation* apparaît dans la théorie de la mesure; nous nous appuyons ici sur l'exposé de Rudin[140].

Rappelons qu'une σ-algèbre $\mathfrak{M}$ dans un ensemble $\mathbf{X}$ est un ensemble de parties de $\mathbf{X}$ satisfaisant aux propriétés suivantes:

i: $\mathbf{X}$ est un élément de $\mathfrak{M}$

ii: si $\mathbf{Y}$ est une partie de $\mathbf{X}$ appartenant à $\mathfrak{M}$, son complémentaire $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ appartient à $\mathfrak{M}$

iii: la réunion d'une famille dénombrable de parties de $\mathbf{X}$ appartenant à $\mathfrak{M}$ appartient à $\mathfrak{M}$

Lorsque $\mathbf{X}$ est un espace topologique, on lui associe la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ engendrée par les ouverts de $\mathbf{X}$, les éléments de $\mathfrak{B}$ sont appelés les parties boréliennes de $\mathbf{X}$.

Une mesure positive sur $\mathbf{X}$ est une application croissante
$\mu: \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes:

i: μ est additive, c'est-à-dire que si $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Z}$ sont deux parties boréliennes disjointes de $\mathbf{X}$, alors

$$\mu(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) = \mu(\mathbf{Y}) + \mu(\mathbf{Z})$$

ii: μ est σ-additive, c'est-à-dire que si $(\mathbf{Y}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de parties boréliennes deux à deux disjointes de X, alors

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in N} \mathbf{Y}_n\Big) = \sum_{n\in N} \mu(\mathbf{Y}_n)$$

On voit ainsi que l'introduction de l'élément $+\infty$ comme plus grand

[140] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill, New York 1966, chapter 1

élément de l'ensemble des nombres réels positifs permet une définition unifiée de la mesure d'une partie borélienne prenant en compte les parties de mesure finie et les parties de mesure infinie. Une définition de la mesure utilisant seulement les seuls nombres réels finis obligerait à distinguer parties de mesure finie et parties de mesure infinie et par conséquent à distinguer les *cas de figures*. La *seule et même énonciation* permet ainsi, comme en géométrie projective, d'ignorer les cas de figures.

Remarquons cependant la différence entre les deux situations, la géométrie projective d'une part, la théorie de la mesure d'autre part. Il faut en effet distinguer les deux types d'infini considérés ici par la façon même dont se met en place la *seule et même énonciation*, ce qui nous conduit à considérer les deux points de vue, le structural et le problématique. On peut alors revenir sur l'assertion de Dieudonné sur l'élimination des contenus et des représentations mentales.

C'est sur ce dernier point que nous terminerons cet article.

Des divers modes d'existence de l'idée d'infini et de leurs représentations

Dans la construction arguésienne, le point à l'infini n'est qu'une forme dont l'usage se révèle identique à celui d'un point ordinaire; c'est en ce sens que l'on peut parler de *désinfinitisation* (cf. ci-dessus) et que l'on peut dire que le point de vue projectif marque la fin de l'infini.

Le problème est tout différent avec la droite numérique achevée. L'élément $+\infty$ a une fonction spécifique et n'est pas réductible, ni dans sa définition formelle, ni dans son usage, aux nombres réels finis. Ainsi, en ce qui concerne la notion de mesure, la distinction entre parties de de mesure finie et parties de mesure infinie reste essentielle; cette distinction marque la limite de *la seule et même énonciation*, celle-ci pouvant être considérée moins comme unification des objets que comme économie de langage. C'est que l'élément $+\infty$ intervient en tant que grandeur infinie (au sens que $+\infty$ est plus grand que tout nombre réel) et c'est ce caractère de grandeur infinie qui est au coeur des problématiques de l'analyse, ce qui n'est pas le cas de la géométrie projective.

Ces remarques nous amènent à revenir sur la phrase citée de Dieudonné quant à l'élimination des contenus et des représentations mentales. Si une première lecture peut inciter à mettre en avant l'aspect langagier, une seconde lecture, prenant en compte les contenus et la façon dont le langage en rend compte, nous renvoie encore une fois au caractère problématique des constructions théoriques.

C'est le caractère problématique (et par cela même la façon dont les mathématiciens abordent les problèmes) qui conduit les mathématiciens à définir leur choix théoriques. C'est en ce sens que le théorique n'est jamais autonome, dans la mesure où il porte la marque des problèmes qui ont conduit les mathématiciens à le construire, lors même qu'il se libère des problématiques originelles et qu'il s'enrichit des divers lieux où il intervient. C'est en ce sens que l'on peut lire l'assertion de Max Weber placée en exergue de cet article.

Le point de vue structural, s'il apparaît comme une façon de se libérer du caractère problématique dans sa tentative de mettre en place une nécessité interne des constructions théoriques, reste en fin de compte lié à ce caractère problématique. C'est ainsi que l'on peut comprendre l'efficacité des constructions langagières et c'est peut-être en ce sens que l'on peut lire le texte de Dieudonné dans *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique* d'où nous avons extrait l'assertion sur l'élimination des contenus et des représentations mentales.

Si la conception langagière s'inscrit dans une telle conception qui relève d'une épistémologie des problématiques[141], elle est alors marquée, y compris dans sa forme même, par la façon dont le théorique s'est construit; autrement dit, non seulement le théorique s'inscrit dans une histoire, mais à chacun des moments de cette histoire, la signification du théorique (c'est-à-dire la signification que le sujet théorisant donne au théorique) se définit dans cette histoire.

Ce serait alors la conception langagière, telle qu'elle apparaît dans ce troisième moment de l'activité mathématique dont nous avons parlé ci-dessus, qui aurait conduit à distinguer les diverses formes d'infini: un infini spatial[142] qui participe de l'homogénéité de l'espace (en ce sens que points à l'infini et points à distance finie s'équivalent), un infini de grandeur qui, tout en s'inscrivant dans une construction formelle (et la droite numérique achevée est une construction formelle), est marqué par son rôle spécifique dans le développement de l'analyse mathématique.

[141]Rudolf Bkouche, "La place de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement d'icelle" Université d'Eté Européenne d'Histoire des Mathématiques, Montpellier 1993. (à paraître). La notion d'une épistémologie des problématiques s'inscrit dans ce que Gonseth appelle une stratégie d'engagement in Ferdinand Gonseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation*, Editions l'Age d'Homme, Lausanne 1975, p. 13-17.

[142]Il faut évidemment distinguer cet infini spatial de celui qui est lié au problème de la divisibilité infinie de l'espace.

En cela, comme l'explique Gonseth, *"le discours n'est pas simplement surajouté à des significations extérieures qui sans lui resteraient ce qu'elles sont. Sa participation à ce qu'il énonce est une participation active organiquement opérante"*[143]. Autrement dit, l'élimination du contenu permet de reconstruire un contenu plus riche, l'élimination des représentations mentales conduit à de nouvelles représentations mentales et plus généralement l'élimination du sens est porteuse de sens.

C'est dans cette reconstruction permanente du sens que se situe la réponse, si réponse il y a, à la question posée au début de cet article.

Lille le 6 octobre 1993

[143]Ferdinand Gonseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation*, o.c. p. 15

Sur la robe de la Mélancolie II

LA NOTION DE « POINT DE FUITE » COMME OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE

Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine

Jacob, quittant Bersabée, prit la route de Haran. Il arriva dans un endroit où il passa la nuit parce que le soleil était couché. Il se servit d'une des pierres qui étaient là pour en faire son chevet, et il s'endormit sur place. Il eut un songe : il voyait une échelle posée à terre, dont le sommet touchait le ciel ; le long de cette échelle, les anges de Dieu montaient et descendaient.

Genèse 28. 10-12.

Les colloques d'histoire et d'épistémologie des mathématiques ont un charme très particulier que vous avez sans doute remarqué vous aussi : on n'y trouve jamais vraiment ce que l'on y est venu chercher...

Le risque est grand, en effet, d'en repartir avec de tout autres centres d'intérêts que ceux qui vous y auront amenés et vous auront guidés dans le choix des différents exposés ou ateliers. Ici, au vu d'un titre alléchant, vous vous attendrez à une réflexion philosophique et vous vous trouverez confrontés à d'inextricables questions d'éditions anciennes que vous auriez voulu croire réservées aux spécialistes... Là, vous espérerez au contraire un éclairage historique sur une question élémentaire et vous vous verrez asséner un impitoyable exposé mathématique de tous les arcanes de la théorie... ; Ailleurs, goûtant par avance l'occasion d'apprendre — et de comprendre — un point délicat de doctrine, vous sentirez peu à peu s'obscurcir vos certitudes les mieux établies dans les méandres forcément imprévisibles d'une genèse progressive.

C'est que l'*histoire*, l'*épistémologie* et les *mathématiques* constituent un "coquetèle de drogues dures" particulièrement difficile à réussir ! Et encore : à la condition de s'entendre sur ce que doit recouvrir exactement chacun de ces trois termes. Car — on l'aura compris — si rien n'est plus simple que de tomber d'accord sans trop d'ambiguïtés sur les champs respectifs accordés à l'*histoire* et aux *mathématiques* en matière d'histoire des mathématiques, il est loin d'en aller pareillement dès qu'il s'agit d'*épistémologie des mathématiques*. Comme si le champ dévolu à l'*épistémologie* était par lui-même condamné, pour longtemps encore, à échapper à toute définition satisfaisante.

Si l'on en croit les dictionnaires, le problème est pourtant simple : chargée de préciser l'*origine*, la *portée* et la *valeur* des connaissances, l'épistémologie n'est rien moins que *théorie de la connaissance*... Autant dire : *connaissance de la connaissance*.

Peut-être y a-t-il là de quoi réjouir le philosophe ? L'ennui pour le mathématicien réside précisément dans cette définition impossible, de laquelle il ne saurait manquer longtemps de rapprocher la kyrielle de paradoxes attachés depuis belle lurette à l'idée d'un ensemble qui devrait se contenir lui-même, ou à celle de l'*ensemble des ensembles* ; donc à cette notion d'une connaissance chargée de s'expliquer elle-même !

Prisonnier d'une telle contradiction, l'épistémologie n'a plus qu'à réduire ses ambitions, qu'à relativiser son propos. Il ne lui reste qu'à fustiger les errements de jadis au nom des certitudes d'aujourd'hui, à s'attendrir sur les balbutiements de l'histoire, à s'extasier devant la clairvoyance ou la modernité de quelques grands hommes.

En suivant un invisible fil d'Ariane qui — pour lui — donne un sens au progrès, l'épistémologue est condamné à survoler en dilettante les œuvres du passé...

Là où l'historien traquera les subtilités de traduction, il ne remarquera le plus souvent que des images isolées, *convulsives*, qui font affleurer — à la manière d'un célèbre *point de capiton* — les manifestations d'un *contenu latent* de la science d'une époque. Là où l'historien s'inquiétera surtout de cerner des priorités dans les diverses découvertes, il ne retiendra que les grandes lignes d'un *inconscient scientifique* dont l'*unité* seule lui paraît importante.

Quitte donc, à décevoir les férus d'histoire ou de rigueur mathématique — s'ils se souviennent encore de ce qu'ils y sont venus chercher... — cet exposé vous propose une flânerie aux sources de la géométrie de l'espace... A l'époque où on ne la considère pas encore comme projective ; dans le court laps de temps, qui va de 1400 à 1600, où elle peut encore paraître réservée aux architectes et aux peintres ; avant Viète, avant Descartes, avant Copernic, avant la Renaissance proprement scientifique qui va ensuite bouleverser la pensée occidentale.

Et comme il convient aussi de faire ici un peu d'épistémologie, je commencerai par rappeler succinctement les bases d'une modélisation possible de la notion d'obstacle épistémologique, puis je reviendrai sur quelques points d'histoire qui ont marqué la découverte de la perspective fuyante. Je m'intéresserai enfin à la nature de l'obstacle constitué par ce qu'il est désormais convenu de regarder comme une "actualisation de l'infini" et qui est entré dans les mœurs sous le nom de *point de fuite*.

PREMIERE PARTIE : éléments d'une épistémologie structurale

Lors d'un exposé au colloque de Lyon intitulé "la représentation en perspective comme obstacle épistémologique", j'ai présenté les grandes lignes d'une *modélisation* de certains obstacles rencontrés dans l'élaboration des connaissances mathématiques[1]. On peut dire, pour simplifier, que l'idée directrice est fondée sur la notion de *singularité*, ou — si l'on préfère — sur une certaine interprétation du concept de *catastrophe*. Je vais en décrire ici le principe avant de l'illustrer sur un exemple qui touche de près à notre sujet, puis d'en développer certaines conséquences qui me seront utiles dans la suite.

a. Un germe d'obstacle

Pour comprendre l'idée de base qui pourrait à mon sens structurer ce que l'on a l'habitude de considérer comme un *obstacle à la vision claire d'une situation*, le mieux est sans doute de partir d'un exemple simple. En voici un, choisi — ce n'est pas complètement un hasard... — en géométrie.

Imaginez la configuration suivante (cf. fig 1) : on se donne une équerre ABC, isocèle et rectangle en B , que l'on suppose mobile dans l'espace. On s'intéresse à sa projection parallèle sur un plan quelconque ℘ fixé. De façon plus précise, on cherche à déterminer l'angle $\widehat{abc}$, projeté de $\widehat{ABC}$, en fonction de la position de l'équerre dans l'espace.

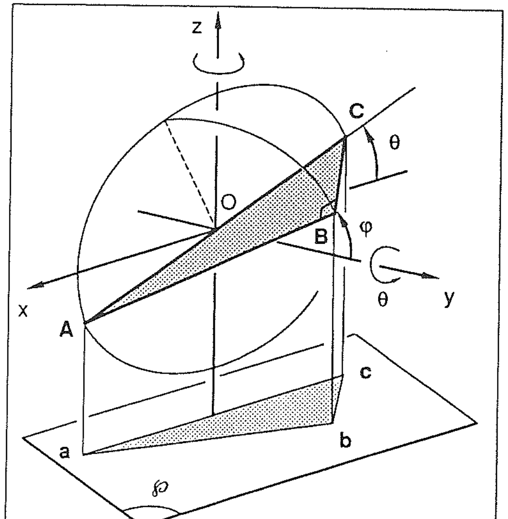


fig. 1

Une analyse rapide vous convaincra vite que certains paramètres ont une influence triviale sur le résultat : les translations de l'équerre dans l'espace, ainsi que les rotations de celle-ci autour d'un axe perpendiculaire au plan ℘ se traduisent de façon simple sans changer l'angle en b. En revanche, cet angle projeté dépendra essentiellement des rotations de l'équerre autour d'un axe horizontal ou autour de son hypoténuse AC.

Vous en viendrez donc, par exemple, à traduire la position de ABC dans un repère analogue à celui de la figure 1 et à paramètrer les positions de l'équerre par deux angles φ et θ exprimant les deux rotations successives qu'il suffit d'effectuer pour la faire passer d'une position horizontale à sa position la plus générale : rotation d'un angle φ autour de AC et rotation d'un angle θ autour d'un axe Oy perpendiculaire à AC et parallèle à ℘.

Après ces considérations, vous calculerez l'angle en b (ou plus simplement son cosinus) en fonction des coordonnées des projections a , b , c de A , B , C ; c'est-à-dire en fonction de θ et φ.

Un calcul facile montre qu'en supposant AC = 2, on a :

$$\cos b = \frac{\sin^2\theta - \sin^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi}{[\,(1 + \cos^2\theta \cos^2\varphi)^2 - \sin^2 2\theta \sin^2\varphi\,]^{1/2}}.$$

Bref, avec peu de patience et en vous bornant à des valeurs de θ et φ pas trop importantes (comprises par exemple entre $-\pi/4$ et $+\pi/4$) vous pourrez représenter la quantité cos b en fonction de θ et φ par une surface telle que celle de la figure 2. Il est clair que ce schéma *rend entièrement compte* de la situation, pour peu que l'on oublie les paramètres inutiles et que l'on ait limité les amplitudes θ et φ du mouvement de l'équerre ABC. On peut dire notamment que la pro-

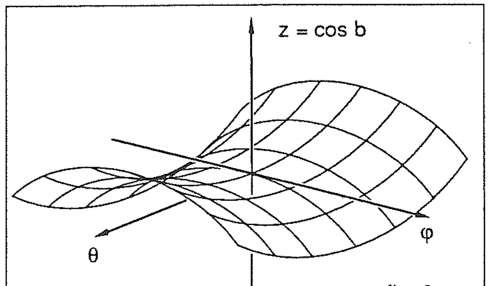


fig. 2

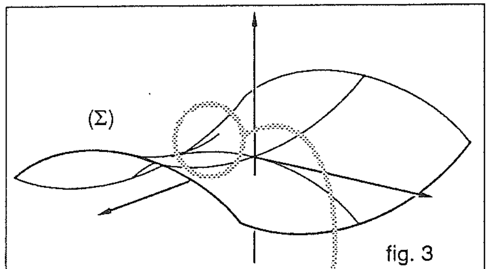


fig. 3

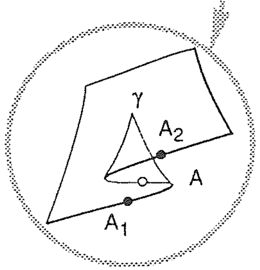


fig. 4

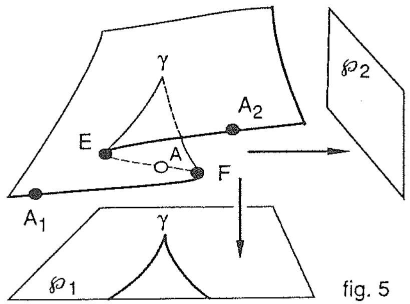


fig. 5

jection seule de la surface de la figure 2 sur le plan θOφ caractérise les paramètres importants de la configuration.

Supposez maintenant que vous *ne disposiez pas* de tous ces paramètres. Supposez par exemple que vous ne sachiez pas grand chose d'autre sur la position de l'équerre que *ce que vous pouvez observez sur la position de sa projection abc...*

Les points représentatifs de la situation (surface (Σ) de la figure 3) vous apparaîtront d'une façon qui dépendra des paramètres que vous pourrez alors affecter à la vision dont vous disposez, et il y a peu de chances que des considérations directes sur abc vous permettent d'établir l'existence et les valeurs des variables θ et φ... Une façon simple d'imaginer les phénomènes qui peuvent alors se produire et de considérer que vous *regardiez simplement* l'ensemble (Σ) de la figure 3, mais ceci *au sens littéral du terme*, c'est-à-dire que vous n'en connaissiez plus que la projection sur le plan de la feuille de papier où je l'ai dessinée. En d'autres termes vous vous seriez alors construit deux paramètres nouveaux, dépendants de θ, φ et cos b. Ce ne serait déjà pas si mal, mais cela ne vous permettrait pas de déduire exactement la position de l'équerre ABC... Ceci à cause d'un phénomène du type de celui que j'ai entouré sur la figure 3 et grossi sur la figure 4 : la surface (Σ) *fait désormais des plis !*

Ces recouvrements vous interdisent de déterminer de façon biunivoque les positions de l'équerre : celles-ci correspondent toujours — en théorie — à des valeurs de θ et de φ ; certains points de la surface (Σ) (tels que A_1 et A_2 sur la figure 5) permettent encore de retrouver des situations non ambigües ; mais là où *plusieurs feuillets* se superposent, ce qui est pour vous une

même configuration est attaché en réalité à *trois possibilités* de fixation du couple (θ,φ).

Allons plus loin : partant d'un point tel que A_2 bien déterminé, vous pourrez *— par continuité —* suivre le feuillet "supérieur" en conservant une certaine interprétation de la situation globale, mais arrivé en E, vous serez obligé de passer sur le feuillet "inférieur" sur lequel l'interprétation précédente deviendra fautive. Vous pourrez cependant revenir vers le point F en maintenant l'interprétation du second feuillet..., pour retomber ensuite sur le premier, etc., etc. Vous *n'atteindrez jamais* de cette façon l'état de la configuration globale qui correspond au point A ! Le *seul moyen d'y parvenir* serait d'aller passer au point γ (s'il existe), ce qui suppose en particulier de se dégager d'une analyse cantonnée aux chemins voisins de la route menant de A_1 à A_2.

Cet "archétype" d'obstacle est donc résumé fig. 5 : une situation analysable théoriquement à partir d'un point de vue ($\wp_2$) (dans une "projection" qui permet de la traduire de façon biunivoque) peut être apréhendée incomplètement d'un point de vue ($\wp_1$) et donner naissance à des "plis" interdisant d'accéder à toute la réalité.

Cela induit, d'une part, une *dynamique d'erreurs* qui sont dues aux "changements de feuillets" et, d'autre part, la nécessité de réinventer de véritables paramètres à la situation, en parcourant la surface à partir du "point de passage" obligé (γ sur les figures 4 et 5) ; point que j'appellerai dans la suite le "point cusp", ou le point "fronce" de la situation étudiée.

C'est sur la base de ce "fil d'Ariane" épistémologique que j'ai détaillé quelques exemples dans l'exposé cité plus haut. J'ai notamment tenté d'expliquer comment pouvait être interprété dans ce cadre le fonctionnement d'un exercice comme celui de la figure 6 ; qui peut être modélisé par le schéma de la figure 7... Disons simplement ici qu'une analyse du problème en "déformation" ne permet pas d'atteindre le point solution (S), alors que le passage par γ — qui correspond en l'occurrence à la règle "les milieux sont conservés" — suppose au contraire de raisonner en "démontage" et en "remontage" de la figure, il fournit alors un cheminement qui aboutit au dessin cherché.

Je vais développer un peu plus longuement un autre exemple.

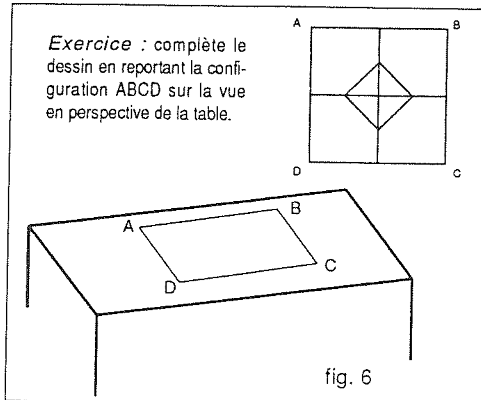


fig. 6

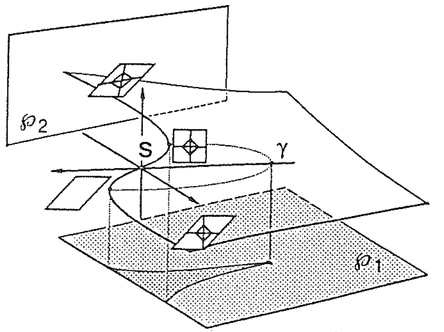


fig. 7

b. Le cas Zénon

Il est difficile de trouver une illustration du problème de l'infini plus classique que celle qui tourne autour des paradoxes de Zénon d'Elée : ils auront fait couler plus d'encre épistémologique en quelques deux millénaires et demi que n'importe laquelle des grandes questions mathématiques.

Rappelons les faits. Zénon, sophiste grec, c'est-à-dire en réalité enquiquineur patenté spécialiste du "logos", aurait soumis timidement à ses contemporains la remarque suivante :

« Pour aller d'un point A à un point B, une tortue doit d'abord effectuer le chemin qui va de A au milieu de AB, etc., etc. »

L'observation serait aussi pertinente qu'anodine s'il ne fallait comprendre que tout est contenu dans le « etc. »... Ce que s'empressèrent de faire les exégètes de l'époque, qui traduisirent immédiatement le propos comme vous le feriez vous-même, si un spécialiste actuel du "logo" vous annonçait :

« Si, pour aller de A à B, vous programmez votre tortue en lui disant : "va de A au milieu de AB, etc.", ... alors l'ordinateur se plante ! »

En d'autres termes : le mouvement est impossible à cause de l'infinité d'étapes qu'il suppose accomplies... Bien qu'ébranlés, les contemporains de Zénon n'en continuèrent pas moins — semble-t-il — de se déplacer comme vous et moi pour aller d'un point à un autre ; cependant ils brodèrent sur cette remarque quantité de variantes, connues aujourd'hui sous le nom de "paradoxes de Zénon" et destinées à prouver l'impossibilité de tout déplacement, soit parce qu'il ne peut aboutir, soit parce qu'il ne peut commencer.

Le plus connu de ces paradoxes est certainement celui qui affirme qu'Achille ne pourra jamais rattraper une tortue, dans la mesure où il devrait pour cela commencer à réduire l'écart de moitié, etc, etc. Pour changer un peu, je partirai d'une version plus moderne et plus sophistiquée :

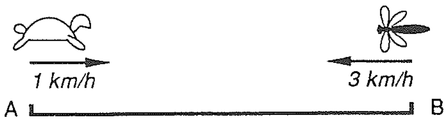
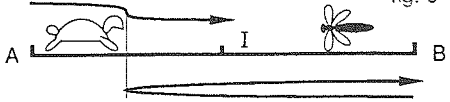


fig. 8

« Supposons (fig.8) deux points A et B distants d'un kilomètre. Au même instant une tortue et une mouche quittent A et B pour aller l'une vers l'autre à des vitesses respectives de 1 km/h et 3 km/h. Arrivée sur la tortue, la mouche — d'humeur badine — repart illico vers B pendant que la tortue poursuit son petit bonhomme de chemin. Arrivée en B, la mouche repart dare-dare vers la tortue, puis retourne en B, puis vers la tortue, etc. Quelle est la distance parcourue par la mouche lorsque la tortue arrive en B ? »

Vous vous apercevrez vite que la mouche parcourt les 3/4 du chemin BA pendant que la tortue en effectue 1/4 ; puis que la mouche a exactement le temps de retourner en B pendant que la tortue achève de rallier le point I milieu de AB (fig. 9).

fig. 9


A cet instant, l'histoire peut recommencer et l'étape suivante est analogue, à la

seule condition de remplacer la distance initiale AB par la *distance moitié* IB. On trouve donc sans trop de peine les distances parcourues par la mouche :

1ère étape :	$3/2 \times$	1 km
2ème étape :	$3/2 \times$	1/2 km
3ème étape :	$3/2 \times$	1/4 km
etc., etc.		

Dès lors, *si vous admettez que le problème relève simplement de l'addition* de ces distances successives, vous trouverez :

distance totale =
$= (3/2 \times 1) + (3/2 \times 1/2) + (3/2 \times 1/4) + \dots$
$= 3/2 \times (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots)$
$= 3/2 \times 2$ km $=$ 3 km .

Est-il besoin de préciser que ces 3 km ne sont rien d'autre que les 3 km parcourus *en une heure* par la mouche ?... puisqu'elle vole exactement pendant le temps que met la tortue pour épuiser la distance AB, ... à la vitesse de 1 km/h !

Simplement un peu accentués dans ce scénario, tous les ingrédients des paradoxes de Zénon sont en place, et pour en comprendre les ressorts, le plus simple est d'essayer de modéliser la situation sous la forme d'un pli (cf. fig.10). Je considérerai pour cela la courbe "en S" αDJROω chargée de représenter le piège mis en place par Zénon. Les "images" situées sur la branche supérieure αJ correspondront aux *faits géométriques* décrits par l'énoncé. Les "images" situées sur la branche inférieure Oω seront attachées aux *sentiments du temps* que le problème fait naître.

De façon plus précise, la figure 10 fonctionne de la façon suivante :

1 — l'énoncé vous place tout d'abord en D_1 (première étape), puis en D_2 (deuxième étape), puis il vous amène à envisager l'*infinité des aller et retour* que la mouche devra accomplir. Ce faisant, vous êtes attiré par un "attracteur" situé au point "J" et qui correspond à l'*image de cette infinité (de comptage)* attachée aux zig-zag de la mouche. Cet attracteur pourrait correspondre à ce que vous pouvez avoir aujourd'hui comme "idée de ℕ". Je l'appellerai (parce que c'est plus joli...) l'attracteur "échelle de Jacob", en souvenir du passage de la Bible cité en exergue.

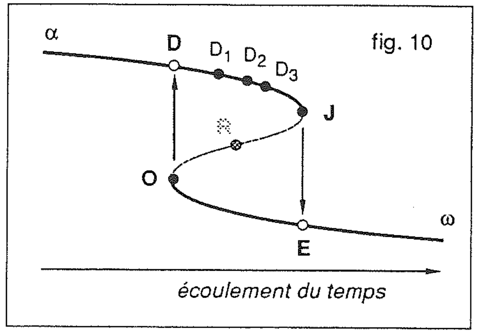


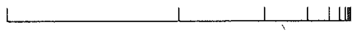
fig. 10

2 — arrivé au point "J" (à cette image de l'infinité du dénombrement à accomplir) vous êtes précipité sur le feuillet Oω du temps ; et cette image se transfère en un sentiment de durée immense (pas d'éternité,... mais presque !). Vous voyez certainement défiler brutalement tous les grains de l'univers dans le sablier du destin, vous êtes submergés par les eaux de la création qui vont s'écouler dans la clepsydre de Chronos, vous êtes assourdis par tous les tic-tac à venir de la pendule d'argent qui ronronne au salon,... Bref, vous êtes au point "E" de la figure 10, parce que vous venez de dire sans même vous en rendre compte : *« il faut un temps bien trop long à la mouche pour accomplir ses aller et retour ! »*.

3 — vous vous rendez alors compte que cette réponse ne tient pas : pris d'un remords (mais coincés sur le feuillet inférieur) vous revenez en arrière... et vous êtes attirés par le seul autre attracteur un peu intéressant sur le feuillet Oω : c'est celui qui est situé au point O et qui correspond au *temps nul*. Ce faisant vous serez précipité en "D" sur le premier feuillet, et vous aurez dit : « *le mouvement est impossible, il ne commence même pas !* ».

C'est évidemment là le paradoxe de Zénon : il fonctionne dans le cadre de la figure 10, parce que dans ce cadre votre "curseur" ne peut aller que vers la droite ou vers la gauche et que la configuration du pli vous interdit d'atteindre le point R où réside la réponse. Vous avez suivi Zénon sur un axe de réflexion que j'ai appelé *écoulement du temps* et qui consiste simplement, de façon naïve, à égrener, instant après instant, l'accumulation du *temps qui passe*...

Au contraire, pour atteindre la réponse "R", il faut passer par le point γ de la figure 11, attracteur qui pourrait correspondre à l'image mentale d'une limite du type :



Mais cela nécessite de *quitter* l'axe écoulement du temps pour *effectuer les calculs* que je vous ai présentés pour commencer. Ce qui suppose une "modélisation du temps" par un ensemble du type de celui des nombres réels. Vous noterez aussi que je vous ai en fait raconté deux *cusp* γ possibles : l'un avec le calcul global très simple (γ_1) et l'autre avec la sommation de la série géométrique (γ_2). On pourrait donc très bien représenter cela par la figure 12 à deux fronces... C'est là, bien entendu, une vision "moderne" du problème et elle n'explique pas l'intérêt accordé jusqu'ici au paradoxe de Zénon. J'y reviendrai au paragraphe suivant.

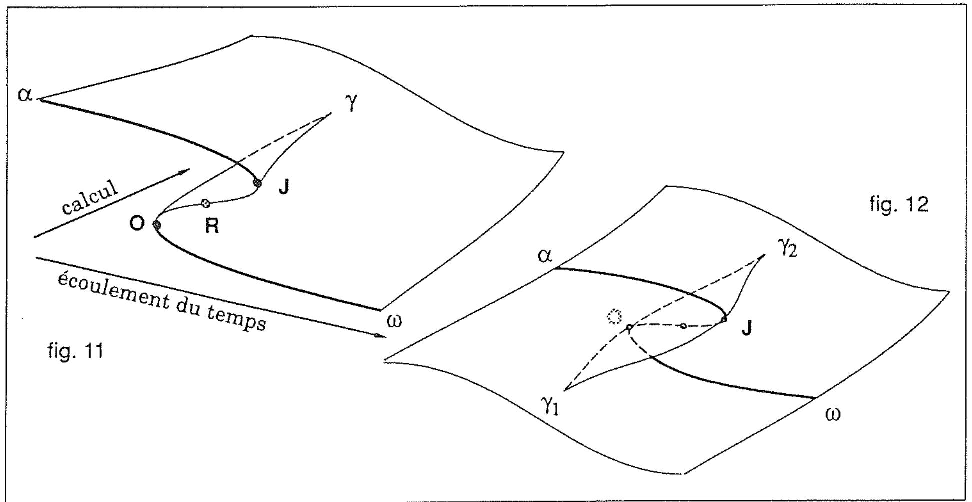


fig. 11

fig. 12

c. La question du sens

Ces deux exemples vont me permettre de m'arrêter un peu plus longuement sur quelques questions complémentaires suscitées par une telle modélisation.

Sous forme spontanée (cf. [1]), on peut tout d'abord considérer que les réactions premières sont de nature "sentimentale". C'est sans doute le lot d'une façon de présenter les choses qui s'apparente très fortement à ce qu'il est convenu d'appeler la "théorie des catastrophes". Or le modèle évoqué ici, malgré quelques variantes qui résultent d'un point de vue moins *dynamique* ou *métabolique* et plus *statique* ou *descriptif*, peut légitimement être considéré comme un avatar des idées introduites par Thom. Y compris dans le double aspect que lui affectent désormais certains philosophes : d'une part sous l'angle de lecture illustré par l'exemple de la projection de l'équerre (où l'on pourrait postuler que les "images" sont susceptibles d'une mise en équations effective), et d'autre part dans un parti-pris beaucoup plus abstrait (et moins justifiable *a priori*) d'envisager l'épistémologie des mathématiques tout entière comme l'étude d'une (énorme) variété — la "robe de la mélancolie" de [1] — dont il s'agirait d'étudier les "plis" et leur évolution dans l'histoire ou dans l'apprentissage...

Cela dit, un point d'achoppement non négligeable me semble relever de l'éternel débat entre *constructivisme* et *idéalisme* dans la mesure où la modélisation présente oblige les deux points de vue à cohabiter de façon relativement complémentaire et contradictoire : *idéalisme* — voire mysticisme forcené — à considérer d'entrée de jeu un ensemble des images mentales, préexistant quelque peu aux savoirs eux-mêmes ; *mécanisme* — voire "mécanicisme" — des processus de découverte et de compréhension, qui pourraient presque se résumer à un balayage aléatoire de la *variété des savoirs*.

C'est sans doute sur la question du *sens* que se cristallise alors ce genre de difficulté, car le modèle ne prend pas vraiment parti sur cet aspect des obstacles. Il consiste en effet seulement à détecter des *singularités* qui peuvent apparaître entre plusieurs façons de "paramétrer une surface" (ou une variété de dimension supérieure) et cela sans fixer nécessairement de règles régissant la *vérité*. Ce qui compte, ainsi, dans l'exemple de l'équerre, c'est le pli entrainé par la différence de point de vue sur l'ensemble des états possibles ; c'est le *décalage* entre les projections sur $\wp_1$ et $\wp_2$ dans la fig. 5. Dès lors, chacune de ces deux projections peut être regardée comme une *façon de lire* la variété des états, c'est-à-dire de lui *donner un sens*. Mais ce "sens" est, en quelque sorte, *second* et, surtout, il est *libre* ; dans la mesure où de multiples projections peuvent rendre le même service. Un peu comme s'il s'agissait simplement de choisir d'autres paramètres pour déterminer la position de l'équerre à la place des angles θ et φ.

Vous noterez cependant que les "variables d'interprétation" ne sont pas complètement neutres. C'est ainsi que sur l'exemple de la fig. 7 "déformation-démontage" permettent — à l'observation — de décrire le mécanisme de l'obstacle en ce qui concerne l'analogue de la projection $\wp_1$ de la fig. 5. En revanche le pendant de la projection sur $\wp_2$ laisse libre le choix de la variable "verticale"... Or c'est dans ce choix que résidera le sens que l'on veut attribuer à *une* lecture du problème dans laquelle l'obstacle est inexistant (ou surmonté !). On pourrait par exemple ne voir dans l'exercice de la fig. 6 qu'un champ correct de transformations appliqué à la figure. Le seul paramètre interdit est celui de la *déformation* ; mais n'en déplaise aux adeptes du "plaisir du sens"... il est connu depuis longtemps que les transformations géométriques *ne déforment pas*, puisque leur étude revient pratiquement à celle de leurs invariants.

Cette question philosophique mise à part, il convient de préciser quelques aspects du *fonctionnement* d'une singularité d'un point de vue épistémologique, et ceci sur deux points : la *compréhension* et la *conceptualisation*. Reprenons pour cela l'exemple du paradoxe de Zénon (fig. 10 - 11 - 12).

Utilisons le *cusp* γ_1 (cf. fig. 12) pour atteindre la réponse située au point R : cela revient schématiquement à utiliser le savoir "distance = vitesse x temps" en aller et retour. C'est-à-dire à calculer le temps à partir de la vitesse de la tortue, puis à appliquer cette valeur à partir de la vitesse de la mouche.

Un tel aller-retour au savoir qui recèle la solution est analogue à celui que constitue le "démontage-remontage" de la figure dans l'exercice de la fig. 6. Il ne nécessite pas à proprement parler une vision différente de la surface qui constitue le pli, mais il permet d'en parcourir tous les feuillets et, principalement, d'accéder au feuillet caché... Je dirai que la pratique approfondie et répétée de tels cheminements constitue le *premier stade de la compréhension* : il permet de parcourir tous les points de la surface des états malgré le mauvais paramètrage ($\wp_1$ de la fig. 5) dont on dispose initialement. On peut alors imaginer un processus de compréhension face à une famille de problèmes analogue relevant d'une même fronce : les chemins en seront d'autant mieux explorés et pratiqués qu'ils seront susceptibles de mener à des points proches du *cusp* ; de là une différence naturelle évidente entre des situations (ou des exercices) plus ou moins complexes, mais dont la solution demande de mettre en jeu la même démarche.

A ce stade de la compréhension (que l'on pourrait qualifier de *procédural* ou de *mécanique*) devrait succèder, de par la familiarisation acquise avec les points de la surface des états, une nouvelle *cartographie* de celle-ci. Cartographie (ou *paramètrage*) qui sera ressentie peu à peu comme incompatible avec la projection ($\wp_1$ fig. 5) entachée d'un pli. C'est un *deuxième stade* de la compréhension : une nouvelle "projection", une nouvelle façon de voir va succèder à la première. Un peu comme si le plan de projection $\wp_1$ de la fig. 5 tournait peu à peu vers la position $\wp_2$ en *dégageant* lentement le voisinage du *cusp*...

Appliquez ce principe à la fig. 12 en admettant que les fronces γ_1 et γ_2 soient explorées simultanément ; c'est l'ensemble du pli qui disparaît peu à peu et qui peut, *a posteriori*, être considéré comme un "faux pli" dû à l'invention malicieuse d'un Zénon. C'est en tout cas cette interprétation qu'il convient de garder actuellement à l'esprit si l'on désire proposer l'exercice de la fig. 8 à des étudiants, afin (par exemple) d'illustrer le côté "naturel" d'un passage à la limite destiné à obtenir la somme d'une série...

Cependant le problème spécifique au paradoxe de Zénon n'est peut-être pas aussi simple (ne serait-ce que si l'on en croit le succès qu'il faut bien lui accorder depuis quelques siècles) et cela tient (à mon avis) à plusieurs raisons qui invitent à réfléchir plus profondément sur l'aspect épistémologique du modèle et à la nature des cusp γ_1 et γ_2 de la fig. 12.

D'abord il n'est pas sûr que l'on puisse parler du point cusp γ_2 comme d'un savoir anodin, n'ayant posé aucun problème à ses *découvreurs*. Au contraire. Et ceci, pourrait-on dire, à toutes les périodes de l'histoire. Pour s'en tenir à Zénon, on pense depuis Tannery que l'objet même de son paradoxe était de mettre en évidence la contradiction fondamentale qui ruinait le point de vue (attribué aux pythagoniciens) selon lequel le monde géométrique aurait pu être une réunion de points "matériels", d'une dimension très petite certes, mais susceptible de servir de commune mesure à toute longueur. Dès lors, la mise en lumière par Zénon de "l'attracteur γ_2", que l'on peut schématiser par l'image d'une suite géométrique comme celle de la fig. 14, aurait rendu la vie aussi impossible aux tenants de cette théorie que la découverte de l'incommensurabilité du côté du carré avec sa diagonale.

Cette interprétation me paraît à la fois juste et fausse. Elle est en effet particulièrement séduisante parce qu'elle montre bien le *conflit psychologique* qui a pu se manifester entre ce que j'ai appelé l'axe du "comptage" et l'axe du "calcul", entre le sempiternel retour à l'unité et les techniques sophistiquées d'un calcul capable d'englober le cas des nombres irrationnels. C'est là sans doute un des obstacles originels que la science a eu à surmonter. C'est aussi un obstacle "didactique", toujours présent dans l'apprentissage, que les pédagogues ont particulièrement tendance à oublier... Et il n'est donc pas interdit de penser avec Tannery que le "paradoxe de Zénon" symbolise en grande partie cette étape.

Cependant cet aspect des choses laisse de côté une composante non négligeable du paradoxe, qui réside dans l'importance attribuée au *mouvement*, c'est-à-dire au *temps*. Or s'il semble légitime de penser que la science grecque a parfaitement maîtrisé assez tôt l'attracteur γ_2 (fig. 14) sur *le feuillet supérieur* de la fig. 13, autrement dit dans le *domaine géométrique*, il n'en va

fig. 13

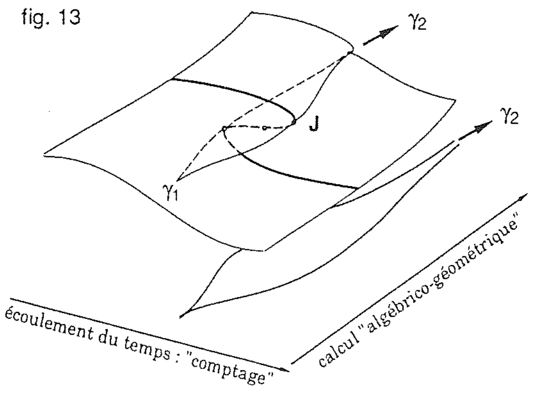
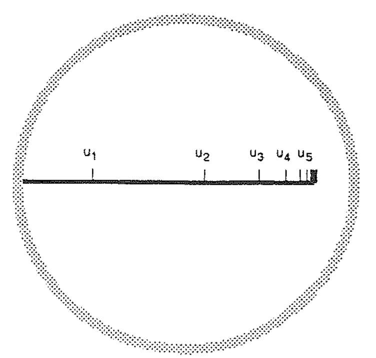


fig. 14



pas du tout de même en ce qui concerne le *feuillet inférieur* qui correspond au *domaine du temps.* Alors que la perversité de la situation choisie par Zénon (ou ses exégètes) est justement d'obliger à faire subir au temps le *même découpage* que celui du segment AB parcouru par la tortue ; puisque c'est le seul moyen de rejoindre le point γ_2, sur le feuillet inférieur.

En d'autres termes, il faut accepter d'affecter au paramètre temps la modélisation que nous lui connaissons actuellement : celle d'un point sur une droite, c'est-à-dire une modélisation géométrique analogue à celle qui prévaut sur le feuillet supérieur ! Et je ne suis pas sûr qu'une telle vision des choses n'ait pas dû attendre le début du XVIIè siècle (et Galilée) pour rentrer pleinement dans les mœurs. Je pense au contraire que c'est l'*inexistence de la fronce* γ_2 (dans toute l'acception qu'il faut mettre à cette notion), qui caractérise les mathématiques grecques.

Un deuxième aspect de la double fronce γ_1, γ_2 des fig. 12 et 13 résulte du problème de leur *stabilité*. Je le relierai à un autre des problèmes cruciaux des mathématiques, que vous aurez sans doute reconnu caché derrière "l'attracteur J", et que l'on appelle classiquement le problème de "l'infini potentiel".

Notez tout d'abord que ce que j'ai dit précédemment du processus de "compréhension" ne saurait épuiser le comportement du mathématicien confronté à une fronce, mais recouvre seulement son attitude de face à un type limité de problèmes nécessitant le recours au point cusp. L'activité mathématique est en réalité — par nature — *généralisante*. Cela signifie, en termes du modèle qui nous intéresse ici, que la surface des états que je considère pour décrire un problème particulier ne saurait être isolée du contexte formé par les problèmes environnants. Le champ d'étude de celui qui cherche ne se restreint évidemment pas à cette surface qui, bien au contraire, est comme "noyée" dans un espace à trois dimensions, ou même dans un espace de plus grande dimension encore. J'appellerai "conceptualisation" la phase qui complète la compréhension d'une fronce (au niveau d'une strate) pour l'étendre aux strates environnantes en *regroupant au problème originel* les situations susceptibles de s'y amalgamer.

Considérer une fronce comme "stable", c'est alors supposer qu'elle est capable de traverser cette épreuve de la *conceptualisation*. Ou, si l'on préfère, qu'elle survive à l'exploration d'un champ suffisant de problèmes analogues, effectivement susceptibles d'être résolu par recours à un cusp qui se déduirait du cusp initial par une variation simple des données. C'est admettre qu'une figure comme la fig. 5 n'est en fait qu'un résumé (un "quotient") pertinent pour tout un ensemble de problèmes.

En vérité, il y a sans doute peu de cusp stables si on les rapporte à l'ambition "universalisante" des mathématiques, et on pourrait même, sans trop se tromper, regarder l'activité mathématiques comme marquée par une fatalité : déstabiliser un jour ou l'autre les cusp les mieux assurés par souci de généralisation croissante... Mais ceci nous emmènerait sans doute trop loin ; nous nous contenterons d'envisager ici la stabilité de la fig. 12 !

L'attracteur γ_2 (ou si l'on préfère "l'image mentale" de la fig. 14) a un privilège particulier en mathématiques, qui lui vaut d'ailleurs l'insigne honneur d'être le sujet même du présent colloque : il s'est toujours révélé *très*

acrobatiquement stable... Revenons en effet à la fig. 12 comme illustration du problème de Zénon, et relisons la solution passant par γ_2. Le chemin qui mène de l'énoncé à γ_2 résulte d'une "violence" : celui qui réfléchit doit se détourner de l'attracteur "J" pour en maîtriser "l'infinité potentielle" et pour mettre en place un "passage à la limite" qui peut être illustré par la fig. 14. Il n'y a là rien d'autre qu'une forme "d'actualisation de l'infini", autorisée ici par le recours à la série géométrique, mais qui est bien loin de ne pas soulever une foule de questions dont l'histoire des mathématiques vous régalera à l'envi... Pour peu que vous pensiez au moindre exemple tiré de l'analyse : du calcul des indivisibles à l'analyse non-standard, en passant par tous les balbutiements possibles de la notion de "filtre". Pour peu, même, que vous remarquiez le simple fait suivant : l'importance donnée ici à la *suite géométrique* comme critère de convergence. Cette importance n'est pas neutre si l'on se souvient de l'omniprésence de cette suite dans la plupart des passages à la limite effectués par les grecs, et c'est là une raison supplémentaire d'instabilité vis-à-vis de nombre de questions d'analyse qui réclament une "image de la convergence" plus souple que celle que j'ai illustrée par la fig. 14.

Ce simple "enrichissement de l'image" devra attendre des siècle et, pour tout dire, c'est un des buts de cet exposé d'en mettre en évidence une étape importante, mais je voudrais terminer cette première partie en vous signalant au passage une bizarrerie de l'histoire qui devrait fasciner les épistémologues qui méditeraient sur la fig. 12 : la fronce cusp γ_1 *n'est guère plus stable* que la fronce γ_2 ! Revenez en effet à la solution que je lui ai attachée... et supposez que dans le problème de la mouche et de la tortue les vitesses soient données par des nombres incommensurables... La simple opération résumée par le retour à γ_1 nécessite alors des prouesses... Or ce sont précisément toutes ces prouesses qui ont été en grande partie accomplies par les Grecs (notamment par ceux que l'on rattache à la tradition d'Eudoxe) ; à tel point que γ_1 peut *paraître* plus stable que γ_2, alors même que les difficultés sous-jacentes sont à peu près les mêmes.

Malgré cela le mathématicien préfèrera toujours passer par γ_1 plutôt que par γ_2 pour s'éviter un problème de "passage à la limite" ! Ainsi le "paradoxe de Zénon" symbolise une singulière "claudication" de l'histoire dont nous rencontrerons les effets, une fois encore, dans la suite.

DEUXIEME PARTIE : la perspective entre 1400 et 1500

Vous l'avez sans doute remarqué vous aussi. L'histoire des mathématiques a un charme très particulier : c'est que l'on n'y trouve jamais vraiment ce que l'on y peut chercher... L'histoire de la géométrie de l'espace, de la géométrie projective et de la perspective sont très frappantes à cet égard, car les habitudes actuelles dans notre façon d'envisager l'espace induisent des questions envers le passé qui sont vite dénuées de sens. Les réflexes adoptés depuis quelques quatre siècles pour raisonner dans une géométrie à trois dimensions semblent si naturels que l'on a souvent peine à comprendre les véritables problématiques qui conduisirent les "primitifs" dans leur exploration de terres vierges.

C'est ainsi que l'invention de la notion de "point de fuite" pourrait presque passer aujourd'hui pour un renversement total de démarche par rapport à une présentation moderne de la question. On ne peut d'ailleurs guère suivre l'évolution historique sans connaitre un aspect relativement négligé actuellement dans les rudiments de perspective : les propriétés du "point de distance".

a. La notion de point de distance

Si l'on s'avise, en effet, d'expliquer à notre époque les propriétés fondamentales de la perspective fuyante, il paraît généralement assez naturel d'en résumer d'abord le principe à l'aide d'un schéma comme celui de la figure 15, montrant un *objet*, un *observateur*, et une sorte d'*écran* transparent sur lequel viendra se fixer l'image de l'objet considéré. Chacun est censé aujourd'hui retrouver dans une telle figure un cas particulier de ce que nous appelons désormais une "projection centrale".Cela étant, la propriété essentielle qui structure l'image de l'objet choisi dans la fig. 15 tient dans une règle fondamentale : "les familles de droites parallèles apparaissent à l'observateur sous forme de famille de droites concourantes". C'est la notion de "point de fuite" ; elle peut aisément (aujourd'hui !) être jusitifiée par un raisonnement du type de celui qui accompagne la fig. 16 de l'encadré 1. Je ne rentrerai pas dans les détails, sinon pour rappeler, d'une part une évidence : *les parallèles au plan de l'écran restent parallèles* ; d'autre part un fait général : pour que les familles de droites parallèles donnent des images concourantes, il n'est pas indispensable qu'elles soient contenues dans le plan horizontal des fig. 15-16 ... (Ce dernier point revient simplement à signaler à ceux qui l'auraient oublié que les points de fuite ne sont pas obligatoirement situés sur la "ligne d'horizon", et qu'ils ne le sont en fait que s'ils correspondent à des directions du plan horizontal.)

Jointes à un peu de pratique, ces règles du jeu constituent un bagage estimable en perspective, suffisant en tout cas pour résoudre un exercice comme celui qui était

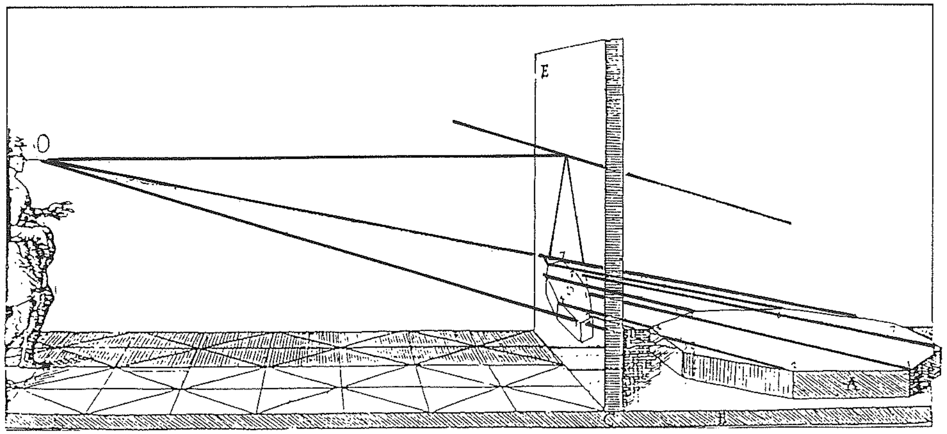


figure 15 *(Vignola)*

Encadré 1. Le principe du point de fuite.

Vues de **O** , les images des droites parallèles (D) et (D') sur le plan vertical ***P*** , apparaissent comme concourantes en un point ***o*** appelé "point de fuite".

En effet, les "rayons visuels" OM joignant **O** à un point M de (D) sont contenus dans le plan déterminé par **O** et (D) qui coupe ***P*** selon une droite d , droite qui n'est autre que l'image de (D). Or il en va de même pour (D') , dont l'image d' sur ***P*** coupe d en un point ***o*** tel que **O*o*** soit la droite (horizontale) d'intersection de ces deux "plans visuels".

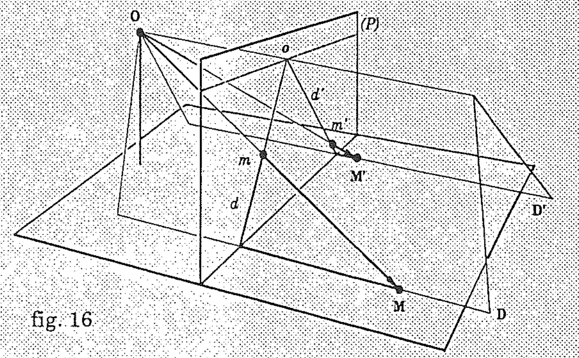


fig. 16

évoqué précédemment dans la fig. 6, mais transposé au cas de la perspective fuyante (cf. fig. 17). De la même façon, il n'est pas indispensable de posséder d'autres connaissances pour réaliser une belle illustration comme celle qui est reproduite sur la fig. 18. On notera seulement au passage que l'exercice de la fig. 17 ne relève plus exactement du modèle épistémologique résumé par la fig. 7 : il met en jeu *deux* savoirs qui demandent à être utilisés simultanément et indépendamment l'un de l'autre (l'appel aux deux points de fuite de la figure). Ici, la formule rituelle : "je laisse le soin au lecteur de compléter la fig. 17 à titre d'application", pourrait être agrémentée d'une phrase comme : "le lecteur en profitera pour modéliser l'obstacle à l'aide des deux fronces convenables" ! ... (Le lecteur en question pourra s'inspirer du § III.a du présent exposé.)

Faut-il penser que ce "bagage estimable" dont je viens de faire l'inventaire (et qui est celui d'un étudiant d'aujourd'hui ayant eu la chance de recontrer un peu de perspective au cours de ses études) est suffisant pour surmonter les obstacles liés à la perspectives ? Je voudrais vous convaincre que non, et même vous faire sentir que les raisons peuvent en être rattachées aux deux aspects épistémologiques que j'ai distingués au paragraphe précédent : la *compréhension* et la *conceptualisation* (cf. § I.c).

Une façon simple de mesurer la *compréhension* que l'on peut avoir de la perspective — et notamment de la notion de point de fuite — est de se confronter à des exercices plus ou moins élaborés, comme (par exemple) ceux qui sont résumés par les fig. 19-20. Ces problèmes ne nécessitent qu'*un seul* point de fuite et on peut estimer

Exercice : complète le dessin en reportant la configuration ABCD sur la vue en perspective de la table.

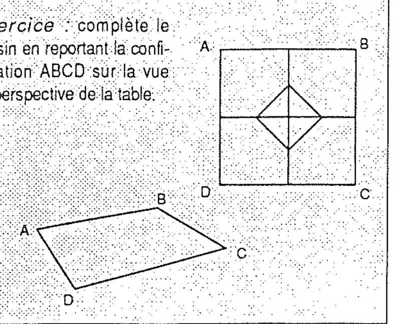


fig. 17

que leur "modélisation" se réduit d'abord à une simple "fronce". Ils demandent en revanche une excellente *compréhension* (c'est-à-dire un large aplanissement du cusp correspondant au point de fuite) afin d'éviter les erreurs classiques dues à la prégnance de l'idée de déformation, ou si l'on préfère, à la force de l'"attracteur" constitué par l'idée de parallélisme. On peut légitimement penser qu'une pratique suffisante de ce genre de problèmes aide à "domestiquer" le passage par le *cusp* ...

La question de la *conceptualisation* est plus délicate. Je vais essayer de l'illustrer à partir du problème suivant relatif à la fig. 18 : est-il possible de trouver :

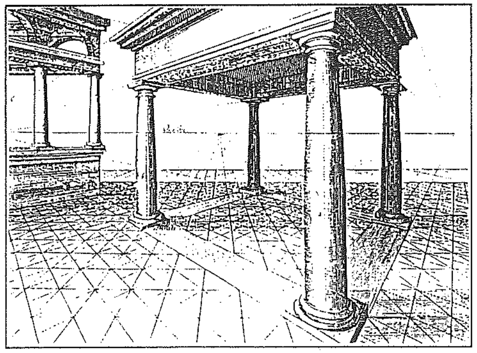
1 — le point où celui qui regarde cette figure doit placer son œil, pour que l'image qu'il aperçoit soit celle de l'observateur ayant dessiné ce "paysage" ?

2 — la place de cet observateur originel par rapport aux objets situés dans ce paysage ?

La solution de ces *deux problèmes* passe en fait par une seule construction : celle des points de fuite des diagonales du carrelage, et ce sont ces points qu'il est convenu d'appeler les "points de distance" du tableau (cf. encadré 2). On notera que j'ai précisément choisi la fig. 18 pour simplifier la question, et que la solution d'un problème analogue à propos de la fig. 17 serait plus délicate : elle a sans doute attendu 1639 et Desargnes... Il n'est cependant pas inutile de s'arrêter un instant sur l'utilisation des *points de distance*.

Alors que la réponse à la première des deux questions précédentes demande "d'opacifier" l'écran et de ne considérer que l'*observateur* et le *dessin* (cf. fig. 22), la réponse à la deuxième question amène à *lire sur le dessin*, considéré comme "transparent", les informations concernant le *paysage* et l'*observateur* (cf. fig. 23). Le lec-

Fig. 18 *(V. de Vries)*



Exercice : complète le dessin en reportant la *parabole* sur la vue en perspective de la table.

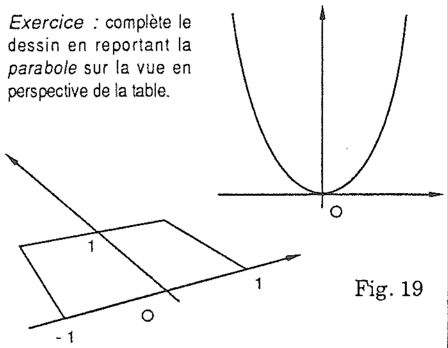
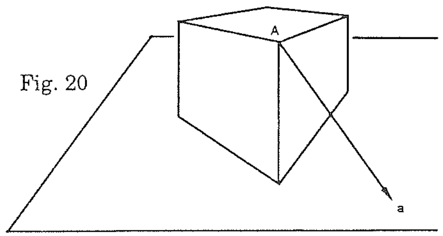


Fig. 19

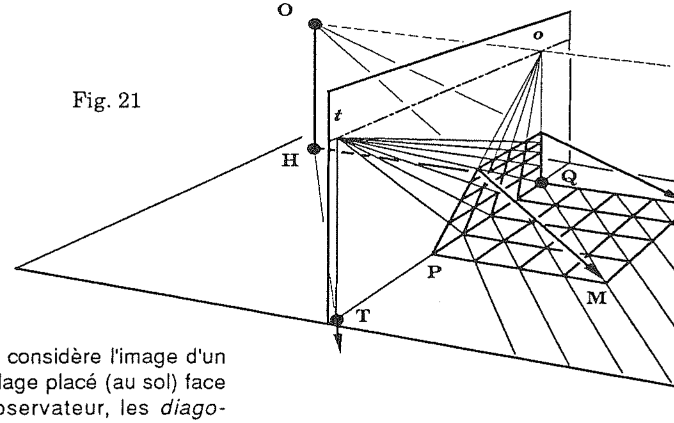
Exercice : complète le dessin en dessinant l'*ombre du cube au soleil*, sachant que a est l'ombre du sommet A .

Fig. 20



Encadré 2. Le point de distance.

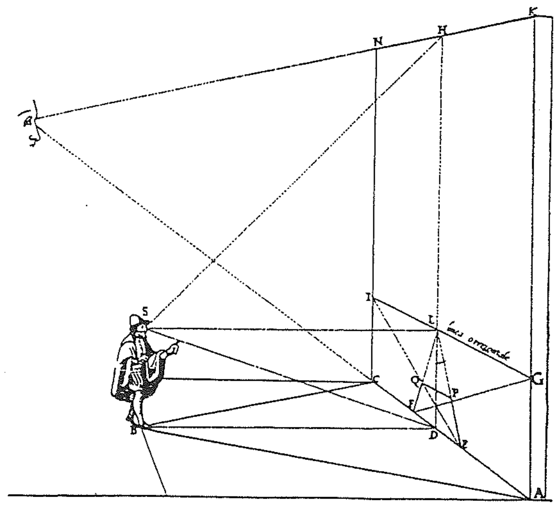
Fig. 21



Si on considère l'image d'un carrelage placé (au sol) face à l'observateur, les *diagonales* des carrés élémentaires sont parallèles et leurs images convergent en un point *t* de la ligne d'horizon. Mais alors la verticale T*t* est l'image d'une parallèle particulière à toutes ces diagonales : celle qui passe par le point H , projection de l'œil sur le plan de base.
Ainsi les droites HT et O*t* sont inclinées de 45° sur le plan de l'écran. En d'autres termes, les triangles HQT et O*ot* sont des triangles isocèles rectangles (en Q et *o*), si bien que la *distance* O*o* est égale à la distance *ot*.

De ce fait, le point *t* s'appelle le *point de distance* ; c'est le point de fuite du dessin qui correspond aux horizontales inclinées à 45° sur la ligne de base (noter qu'il y a évidemment deux tels points, symétriques par rapport à *o*).

Fig. 21 bis



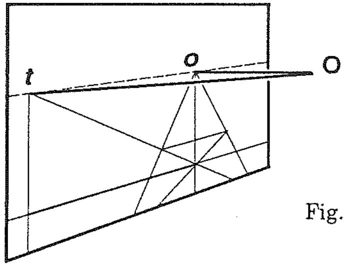


Fig. 22

Utilisation du point de distance pour déterminer la position de l'œil par rapport au tableau : comme le triangle Oot est isocèle rectangle en O (cf. encadré 2), on doit avoir Oo = *ot* (avec évidemment *o* projection de O sur le tableau).

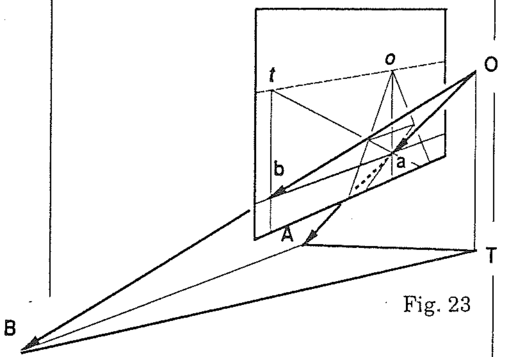


Fig. 23

Utilisation du point de distance pour déterminer la position de l'œil par rapport au sujet : soit ab l'image du segment AB situé dans le plan horizontal ; comme le triangle BAT est isocèle rectangle en A (cf. encadré 2), on doit avoir AT = AB . En d'autres termes, l'observateur est tel que T soit à une distance de l'objet représenté par a égale à la longueur qui correspond, dans la réalité à la distance séparant les objets représentés par a et b.

teur qui ferait l'effort nécessaire ressentirait aisément le conflit qui s'instaure immédiatement entre les deux démarches. Il en serait plus convaincu encore s'il cherchait à retrouver, à partir des fig. 22-23, les explications données dans l'encadré 2...

L'explication de ce phénomène tient à ceci : le *cusp* constitué par la notion de point de fuite n'est pas *stable*, au sens où des variations légères du problème, qui touche aux positions relatives de l'observateur, du décor et du dessin suffisent à perturber la compréhension. On le verra immédiatement si l'on mesure l'importance, pour la clarté des fig. 16-21-22, du choix *d'un écran solidaire du plan horizontal*. Désolidarisez ces deux éléments, vous perdrez vite pied sur des questions analogues aux deux précédentes : le raisonnement se complique énormément... En termes de modélisation épistémologique, on peut dire que le cas particulier retenu ramène l'obstacle à une sorte de fronce (cf. §§III.b-c), mais qu'il s'agit là d'une simplification abusive : les problèmes voisins débouchent immédiatement sur une singularité plus complexe (comme sous le nom d'aile de papillon) qui traduit la difficulté d'exploration du problème général. Cette analyse fera l'objet d'un exposé ultérieur. Le but de la présente étude est uniquement de montrer comment la démarche historique constitue une résolution *partielle* de l'obstacle qui vient d'être évoqué. Cela va nous amener à un voyage en Italie, entre 1400 et 1500, dans un lieu que, pour simplifier, nous pourrons imaginer être Florence...

b. Les deux règles de la perspective

Même si les historiens ne sont pas toujours d'accord pour savoir à *qui* attribuer exactement l'invention de la perspective, il est incontestable que celle-ci est une des

grandes conquêtes de la Renaissance italienne. La plupart des éléments en ont pris corps au XVème siècle, à la suite d'un problème posé (et résolu) par des peintres. Dans un monde où les traditions picturales ont subi un véritable bouleversement ; à la mesure, sans aucun doute, du bouleversement intellectuel constitué par ce qu'il est aujourd'hui convenu d'appeler la "naissance de l'humanisme". Sans entrer dans les détails qui intéressaient le plus les historiens, il me semble possible de dresser un tableau général de la question et de présenter succinctement les grandes lignes d'une découverte que j'analyserai sous un angle épistémologique au cours de la troisième partie de cet exposé.

1°) L'émergence d'une problématique.

Il suffit de comparer un vitrail de cathédrale ou une fresque byzantine à un tableau de Léonard de Vinci pour être frappé par une différence structurelle essentielle : l'importance, à l'intérieur même du sujet représenté, de l'*espace* modelé par les éléments du décor, autour des personnages principaux. Indépendamment de toute approche esthétique ou symbolique ; en s'affranchissant même de toute polémique sur les questions généralement liées au *réalisme*, c'est là un fait objectif indéniable de l'histoire de l'art à la charnière entre XIVe et XVème siècles : la composition d'un tableau a fait progressivement une place de plus en plus grande à l'agencement des volumes, à la disposition relative des lieux, à l'influence des éloignements sur la taille des objets ou des personnages. A cet égard les fig. 24-25 rappellent la différence entre un sujet traité "sans relief" et un sujet où les volumes trouvent leur importance, ... même si l'observation attentive du personnage de la fig. 25 amène à classer cette œuvre dans une phase de transition !

Fig. 24

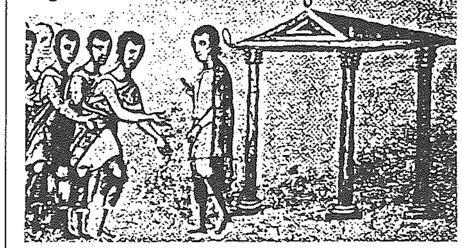


Fig. 25

Ce sont deux "hiérarchies dans une vision du monde" qui se sont succédées. La base même de l'iconographie du Moyen Age, fondée sur des rapports sacrés entre les différents objets, adaptant le plus souvent la taille d'un personnage à son importance morale ou religieuse, va céder le pas à une "logique interne" complètement différente, *commandée par la géométrie* et à laquelle le peintre devra subordonner toute la scène ou la composition. En ce sens, on peut dire que le problème de l'artiste n'est plus uniquement *subjectif* et qu'il doit désormais prendre en compte une sorte d'*espace objectif*, d'espace de nature géométrique qu'il a la charge de traduire sur la surface du tableau. Il serait faux de croire que le problème puisse avoir une solution unique et que celle-ci soit entièrement détenue par ce que l'on appelle aujourd'hui la technique de la perspective fuyante. Quoi qu'il en soit, les peintres du début du quattrocento en ont adopté le principe de base (connu depuis lors sous le nom de "fenêtre albertienne" et sans doute inventé par l'architecte Brunelleschi) : le "meilleur" moyen pour que celui qui regarde un tableau retrouve la sensation du relief est de se conformer au schéma de la fig. 15. A condition que l'observateur place son œil à l'endroit précis où le peintre regardait le sujet initial... En d'autres termes : le dessin est le "fantôme" laissé par le sujet sur une vitre placée entre l'artiste et la scène, le peintre doit donc déterminer sa composition en cherchant l'intersection des "rayons visuels" issus de son œil avec un plan vertical. Cette problématique clairement exprimée n'est rien d'autre que celle de la "projection centrale" dont j'ai rappelé les propriétés au paragraphe précédent.

2°) La méthode d'Alberti

Le premier à publier un ensemble de règles permettant de résoudre pratiquement le problème fut Alberti dans son *De Pittura* [2]. Sa solution a guidé le travail des peintres de tout le Quattrocento, elle repose essentiellement sur le parti pris de la "mise aux carreaux", c'est-à-dire de la construction préalable de l'image d'un "carrelage" placé sur le sol horizontal, face à l'observateur et parallèle au plan du tableau (c'est le problème de la fig. 16). De là, on peut construire l'image de n'importe quel point de l'espace : ce n'est rien d'autre que la technique des coordonnées cartésienne bien connue aujourd'hui. Il est important de comprendre la démarche d'Alberti pour aboutir à une représentation correcte du *quadrillage fondamental* ; elle repose sur deux idées.

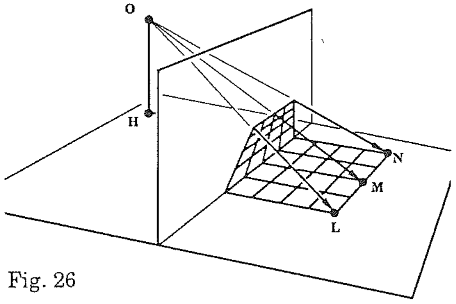


Fig. 26

La *première* consiste à remarquer (cf. fig. 26) que les segments égaux du carrelage qui sont situés sur une même droite *parallèle à l'écran* ont des images parallèles à la ligne constituant la base de cet écran et sont *égales* entre elles. La justification invoquée par Alberti est celle qui est schématisée sur la fig. 26 : elle repose sur la *similitude* entre les triangles ayant l'œil de l'observateur comme sommet commun et des bases déterminées respectivement par un segment du carrelage et par son image sur le plan de l'écran. J'appellerai cette première règle le "principe de transversalité".

La *seconce* remarque (cf. fig. 27) – que j'appellerai le "principe de profondeur" – concerne *l'étagement* des images des transversales précédentes au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'écran. Sans entrer dans un calcul donnant les hauteurs successives des droites d_1, d_2, ... , de la fig. 27, Alberti note que ces hauteurs sont simplement données par une *construction intermédiaire* : on peut en effet se placer dans le plan vertical Q

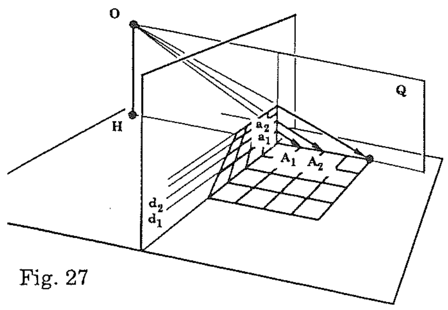


Fig. 27

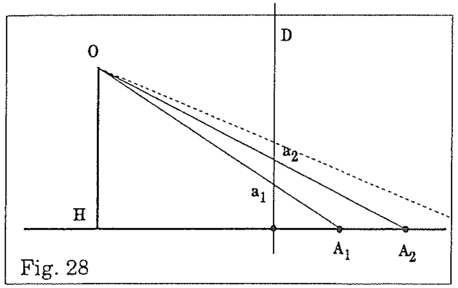
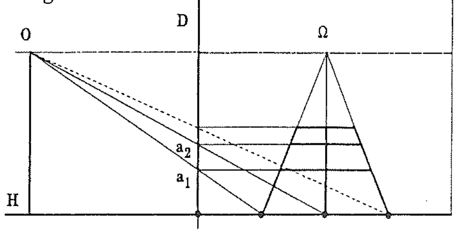


Fig. 28

Fig. 29



Construction d'Alberti de l'image du carrelage fondamental : elle repose sur trois données : 1) choix de Ω comme projection de l'œil sur le tableau, 2) positionnement des mailles régulières au bas du tableau, 3) utilisation d'un point O et d'une droite D intermédiaires, tels que sur la fig. 28, pour trouver les hauteurs des mailles.

mené par l'œil de l'observateur et perpendiculaire à l'écran (cf. fig. 28). En plaçant le point O représentant l'emplacement de l'œil et une verticale D correspondant à la trace de l'écran sur Q, il suffit de considérer les points A_1, A_2, ... , et de construire leurs images a_1, a_2, ... , qui ne sont autres que les intersections de D avec OA_1, OA_2, ...

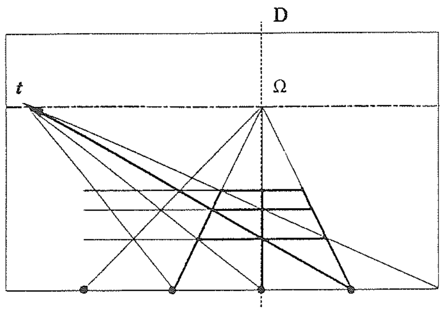
Il reste alors à combiner ces deux principes sur une même figure pour obtenir l'image du carrelage. Je laisse le lecteur en retrouver les éléments sur la fig. 29. Il en conclura (avec Alberti) que les mailles du réseau obtenu "tendent vers zéro" avec l'éloignement, et donc que les droites du carrelage convergent vers un point W qui est situé *à la même hauteur* que le point O. Il suffit pour cela (comme le fait Alberti) de "prolonger indéfiniment" le carrelage A_1, A_2, ... , et d'observer la suite a_1, a_2, ... , de la fig. 28. Comme la limite de a_1, a_2, ... est située sur D, nous venons de constater que les droites du carrelage admettent un point de fuite qui n'est autre que la projection de l'œil dur l'écran ...

3°) Le problème de la diagonale.

L'économie de moyens avec laquelle Alberti résoud finalement le problème est fascinante. On peut considérer légitimement que ses successeurs n'ont pas ajouté d'idée nouvelle à cette approche de la situation avant 1600, date à laquelle commencera à s'imposer une interprétation du type de celle que j'ai utilisée pour les rappels du paragraphe précédent. Ainsi l'œuvre de Pierro della Francesca qui domine largement le XVème siècle sur la perspective est entièrement fondée sur la double construction albertienne, à ceci près que Pierro évite les considérations de "passage à la limite" pour préciser la position du point de fuite principal et remplace le raisonnement d'Alberti par une astucieuse construction faisant appel au théorème de Thales (cf. la proposition XIII de [3]).

On ne peut guère, cependant, résumer les savoirs de l'époque aux seuls écrits de Pierro et il faut admettre que les constructions effectuées sur la base de la méthode d'Alberti se simplifièrent peu à peu autour de quelques remarques sur les propriétés des diagonales du carrelage. Il est clair en effet que les deux principes qui fondent la méthode et fournissent la construction résumée sur la fig. 29 sont d'une mise en œuvre particulièrement pénible dès que l'on veut, par exemple, obtenir une figure comme la fig. 18... ! Alberti avait toutefois déjà remarqué que *les points situés sur les diagonales* devaient être alignés à partir du moment où la construction était correcte, et on peut imaginer que les utilisateurs ne tardèrent pas à utiliser cette propriété d'alignement pour économiser la construction du carrelage complet, c'est-à-dire pour remplacer la détermination des points a_1, a_2, ... de la fig. 29, par une *méthode mixte* (cf. fig. 30) où il suffit d'en construire un seul et de compléter la figure à l'aide des intersections des diagonales avec les droites qui passent par la base du carrelage et rejoignent le point de fuite...

Fig. 30



Un lecteur moderne pourrait aisément vérifier (par exemple en appliquant le théorème de Desargnes...) que la concourance des diagonales en un "point de fuite" t situé sur la "ligne d'horizon" est une conséquence *interne* des propriétés de la fig. 30. Il ne lui resterait plus qu'à démontrer que la longueur Ωt correspond à la distance de l'observateur au tableau. J'espère que le "lecteur moderne" sèchera un peu sur cette deuxième assertion...

Pourtant, malgré la difficulté de cette question – et l'absence du théorème de Desargnes ! – tout porte à croire que les peintres de la Renaissance *connaissaient* les propriétés de la diagonale dès avant 1500 (notamment Pierro della Francesca ; comme l'a montré Le Goff dans [3]). Mais en vérité il est possible de retrouver de façon élémentaire les propriétés du "point de distance" t à partir de la fig. 30 : il suffit de placer la "construction intermédiaire" d'Alberti (fig. 28-29) de telle sorte que la droite D passe par Ω pour s'apercevoir que les diagonales coupent nécessairement la "ligne d'horizon" en un point qui correspond alors au point O de la fig. 28...). Et cette méthode apparaît chez Dürer vers 1500. Cependant, au niveau des principes, le raisonnement ne peut suffire, car cette "preuve" ne marche plus lorsque Ω n'est pas exactement situé à la verticale d'un nœud (ou d'une fraction de nœud) du carrelage. Cela pourrait d'ailleurs expliquer que Pierro della Francesca n'en fasse pas état : il est nécessaire, en effet, de faire alors appel à un "passage à la limite" pour envisager le cas où Ω est placé dans un rapport irrationnel vis-à-vis des nœuds de la ligne de base... Il faudra attendre les alentours de 1535 et Vignola (cf. [4]) pour en trouver une démonstration simple, qui a sans doute échappé à Pierro.

TROISIEME PARTIE : une interprétation épistémologique

Comme on le voit, l'approche historique de la perspective n'a pas grand chose de commun avec celle que l'on peut en donner aujourd'hui, et qui n'apparaîtra en fait que vers 1600 avec Guidobaldo del Monte. Avant cette date, les éléments théoriques se réduisent essentiellement à une lecture "transversale" et "en profondeur" du sujet, qui permettent de mettre en évidence le "point de fuite principal". Puis une évolution progressive dans l'utilisation des diagonales révèle de façon quelque peu miraculeuse deux nouveaux points de fuite qui correspondent aux points de distance. On ne voit guère comment aurait pu être abordée dans ce contexte la notion générale de point de fuite, *même lorsqu'il s'agit simplement de ceux qui sont situés sur la ligne d'horizon.*

On aurait cependant tort de croire qu'il ait fallu attendre 1600 pour connaître et utiliser de tels points et on est par exemple, surpris de voir la façon dont ils apparaissent dès 1504 chez un auteur comme Viator ([5]). Bien que nous quittions ici Florence pour rallier ce qui était sans doute déjà le plus grand centre intellectuel de l'Europe du Nord – je veux parler de la Lorraine ! –, il est plus que probable que Viator expose (sans démonstrations) des savoirs pratiques issus d'une tradition orale où l'école italienne tenait la plus grande place. Or il faut bien constater qu'il utilise sans grand détour (et qu'il est le premier à décrire) les notions de *point de distance* et de *ligne d'horizon.*

Il y a donc dans cette genèse historique de la perspective une sorte de "mystère épistémologique" que je vais tenter d'éclairer à partir du modèle fondé sur la notion de singularité ...

a. Les deux fronces d'Alberti

Simplifié à l'extrême, le problème d'Alberti aurait pu être ramené à la résolution d'un exercice du type de ceux que j'ai évoqués précédemment par les fig. 6 ou 17, mais où le but est de préciser la déformation du carrelage originel qui l'amène à apparaître sous une forme plus ou moins trapézoïdale (cf. fig. 31).

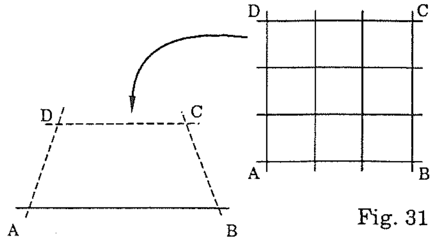
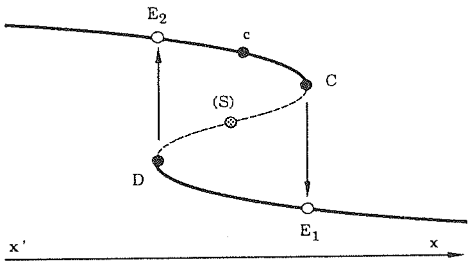


Fig. 31

On peut considérer en effet que la tradition picturale de l'époque admettait souvent de tels schémas globaux de représentations, sans pour autant maîtriser géométriquement la "logique interne" qui devait régir les diminutions (ou "dégradations") des longueurs en fonction de l'éloignement par rapport à l'observateur. Comme je l'ai dit plus haut, une fois posé le "principe de la fenêtre", la solution passe par un double démontage de la figure qui consiste à prendre en compte séparément les régularités transversales (sur AB ou DC dans la fig. 31) et les régularités en profondeurs (sur DA et CB). En termes épistémologiques, cela revient à dire qu'Alberti est amené à surmonter *deux plis* en mettant en jeu *deux fronces* distinctes, et qu'il convient de comprendre l'agencement mutuel de ces deux fronces.

Interprétons tout d'abord le problème "transversal", c'est-à-dire celui du transfert des nœuds du carrelage situés sur une parallèle à l'écran. Conformément aux analyses que j'ai déjà évoquées, l'obstacle est modélisé (fig 32) par une courbe à trois branches, et le chemin vers la solution (S) est court-circuité par deux types d'erreurs (E_1 et E_2) qui sont commandées par deux attracteurs (C et D) représentant des "images mentales" suffisamment prégnantes pour cacher la vérité... Sans vraiment disposer d'une liste exhaustive des erreurs possibles, il me semble crédible d'admettre un schéma du type suivant pour faire fonctionner la fig. 32.

Fig. 32



1 — le point représentatif de "l'état psychique" est commandé par un paramètre représentant *l'éloignement* sur un axe x'x qui suivrait la direction des lignes considérées du carrelage.

2 — les branches supérieure et inférieure de la courbe décrites par les points représentatifs sont distinguées par un "paramètre caché" : la branche supérieure correspond à des "états" où la pensée parcourt *effectivement* le carrelage réel (comme, par exemple, si l'observateur imagine qu'il marche sur la ligne considérée), la branche inférieure correspond à des états où la pensée s'attache à ce que *voit* le peintre (comme, par exemple, lorsque l'artiste se sert du pinceau tenu à bras tendu pour viser le sujet et en reporter la taille apparente sur le tableau).

3 — sur la branche *supérieure* le parcours mental *sur le carrelage* aboutit à un attracteur C qui correspond à ce que l'on peut regarder comme la "structure apparente" du carrelage et qui peut résulter de n'importe quelle règle conjoncturelle induite par le sujet (cf. par exemple la fig. 33). Cette "structure" peut aussi être attachée à ce que j'ai appelé plus haut "l'échelle de Jacob" : ce sera le cas lorsque le peintre cherche à imaginer une succession indéfinie de carreaux vers la droite (ou vers la gauche) ; il aboutit alors à une erreur (E_1) qui traduit l'idée personnelle qu'il est susceptible d'avoir d'une succession infinie, en cherchant éventuellement à "sortir le plus tôt possible" du champ du tableau, quitte à adopter un grossissement progressif de la taille des carreaux ...

4 — sur la branche *inférieure*, l'attracteur D correspond à une fausse règle bien connue ; c'est l'idée de reporter sur le tableau le phénomène observé de diminution apparente des carreaux au fur et à mesure que l'on s'éloigne vers la droite ou vers la gauche : le retour à l'observateur (déplacement vers x' sur l'axe x) s'effectue sur la branche inférieure car le peintre pense à *ce qu'il voit*, mais il ne prend alors en compte que les *angles de vision* sous lesquels sont perçus les carreaux du carrelage. Il aboutit ainsi à une diminution progressive des écarts entre nœuds du carrelage (erreur E_2) et se comporte comme si le tableau n'était pas plan mais sphérique (cf. fig. 34).

Comme on l'a vu sur la fig. 26, la fronce d'Alberti (c'est-à-dire la règle de conservation des carreaux qui permet d'aboutir à la solution S) repose sur une mise en jeu de *la variable de profondeur* et sur la considération de triangles dont le sommet est situé à l'emplacement de l'œil de l'observateur. Je la schématiserai par la fig. 35 en introduisant l'axe y'y pour paramétrer le déplacement "en profondeur" (perpendiculaire à l'écran) sur lequel le sens allant de y' à y correspondra *au retour à l'observateur* traduit par la fig. 26.

Fig. 33

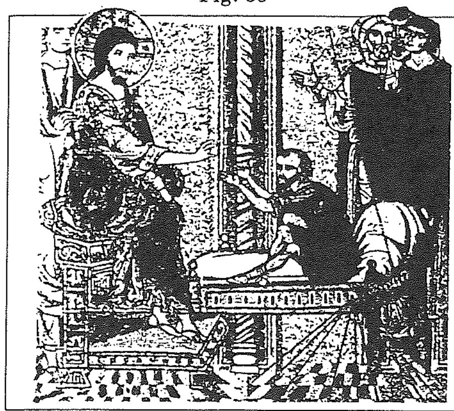
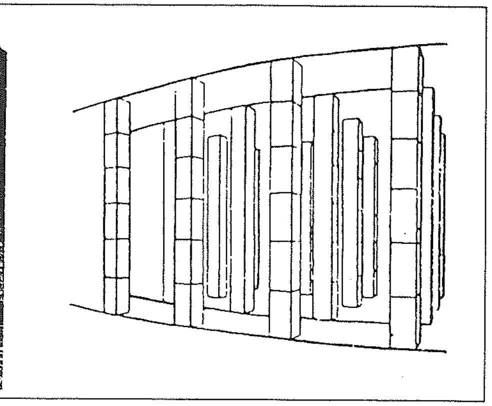


Fig. 34



Du point c de la fig. 35, qui correspond à une vision du carrelage "en situation", l'exploration "en profondeur" va se traduire par un déplacement dans la direction de y' (éloignement perpendiculairement au tableau). Mais dans la mesure où le peintre est obligé de parcourir *toute la profondeur possible*, il va nécessairement se heurter à un attracteur de type "échelle de Jacob"...

Fig. 35

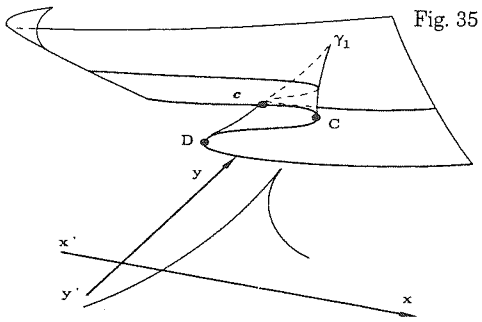
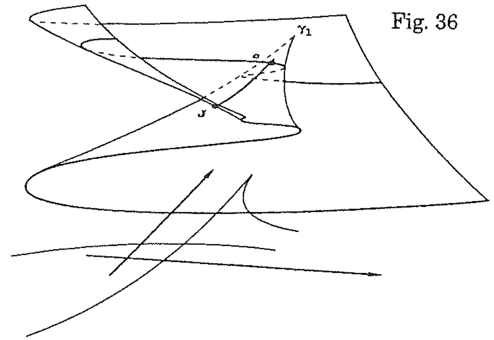


Fig. 36

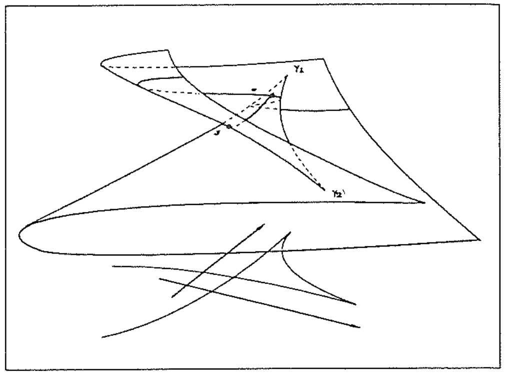


C'est sur ce schéma qu'il nous faut désormais greffer l'analyse du second aspect du problème d'Alberti, c'est-à-dire de la recherche d'une règle de diminution de la taille des carreaux en profondeur.

C'est ce que j'ai représenté par la présence d'un nouveau pli (cf. fig. 36) que le point représentatif rencontrera en un point J. Cette rencontre donnera naissance (par chute sur la nappe inférieure) à une erreur

Fig. 37

Fig. 38



produite par la traduction spontanée de "l'idée d'infini" propre à l'artiste. On peut rencontrer à cette occasion des figures "convergentes" aussi bien que "divergentes" (cf. fig. 37) et il n'est pas rare que la représentation mentale de "l'échelle de Jacob" fasse appel à des archétypes propres à la culture environnante : ainsi de nombreux peintres, avant Alberti, avaient admis une loi de dégradation des longueurs calquée sur l'image de la fig. 14, c'est-à-dire sur une progression géométrique.

Le second principe d'Alberti consiste, comme je l'ai indiqué plus haut, en un *changement de regard* qui permet de s'appuyer sur une construction intermédiaire représentant la situation *de profil*. Il y a là un phénomène particulièrement intéressant : c'est celui de l'*échange des axes* y'y et x'x, et cet échange est même effectué explicitement sur la construction, puisque ce sont les nœuds du carrelage transversal qui *vont être lus* comme les images de la section frontale de celui-ci. En d'autres termes (fig. 38) Alberti fait opèrer une *bifurcation* au point représentatif c, non plus dans la direction de y' mais dans la direction de x, de façon à trouver la fronce γ_2 qui fournit la solution.

Dès lors le transfert d'une figure du type de celle du carrelage choisi suppose une séparation en deux types d'éléments : d'une part ceux qui vont relever du principe transversal et nécessiter un passage par le cusp γ_1, d'autre part ceux que l'on doit associer au principe de profondeur et qui vont devoir être gérés *via* le cusp γ_2.

b. condensation et "queue d'aronde"

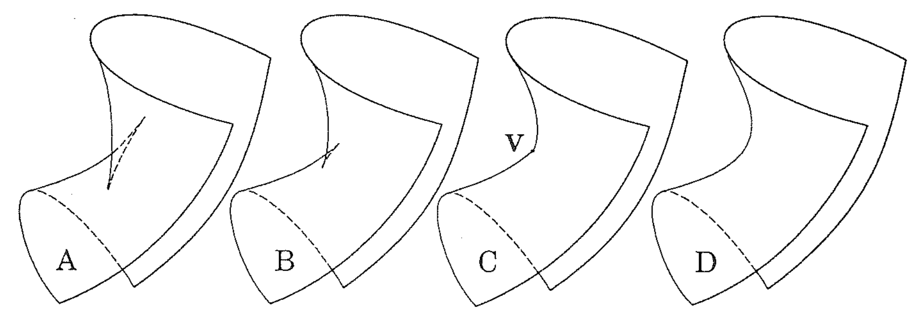
Pour faire comprendre le phénomène que je voudrais décrire maintenant, je commencerai par une remarque sur la méthode d'Alberti, pour parler d'une "dimension" que j'ai systématiquement laissée dans l'ombre jusqu'ici : le problème de la *représentation des verticales*. Envisageons par exemple la question de la représentation d'une colonne posée verticalement en un point donné du carrelage (que nous savons "transférer sur le tableau" par la méthode Alberti). La représentation de cette colonne est évidemment susceptible d'induire des erreurs supplémentaires par rapport à l'étude que je viens de faire et peut relever à son tour de phénomènes d'obstacles. Cela dit, la solution cherchée relève d'une démarche analogue à celle qui aboutit au "principe transversal" et sur laquelle je ne m'étendrai pas ici.

Une fois opéré le lien entre la représentation du carrelage et le principe vertical, il devient possible, d'abord de s'intéresser aux problèmes de transfert de figures situées dans *d'autres plans horizontaux*, parallèles à celui du carrelage mais situés à des hauteurs différentes (pensez par exemple à la représentation d'un plafond), et il devient surtout possible de regarder le principe vertical comme *un liant* qui permet de coordonner de façon cohérente une famille des modélisations (fig. 38) attachées à chacun des plans horizontaux possibles. Epistémologiquement parlant, on peut donc dire que le problème d'Alberti correspond à un *champ de surfaces* du type de la fig. 38, champ *paramétré par la hauteur* du plan considéré et, en quelque sorte *"connecté"* par la loi de représentation des verticales. Comme on le voit, le problème de la *modélisation* se complique légèrement : il faut en toute rigueur faire appel à une superposition de "feuilles" semblables, c'est-à-dire parler d'une singularité affectant une "hypersurface" de *dimension trois*. Cependant le phénomène n'est pas plus compliqué lorsque l'on passe d'une feuille à l'autre, puisqu'il n'est pas plus compliqué lorsque l'on étudie un plan horizontal ou un autre... Il n'y a là qu'une illustration de ce que j'ai rattaché à la notion de *conceptualisation* au § I et l'on peut légitimement considérer que le "squelette" important réside simplement dans le schéma de la fig. 38.

Nous allons devoir en revanche envisager maintenant une évolution de la figure 38 qui est liée à la *compréhension* (cf. § 1) et ceci va nous obliger à considérer un "champ" plus compliqué de "feuilles" de dimension deux ...

Comme je l'ai précisé en effet, la *compréhension* recouvrirait le phénomène de "recul des fronces", c'est-à-dire d'aplatissement (ou de "repassage"), repoussant les *cusp* à force de fréquentation des chemins qui passent par ceux-ci. On aura une idée intuitive du phénomène en considérant (cf. fig. 39) la rotation d'un pli A, dont le flan apparaît *d'abord* selon une configuration à deux fronces (fig. 38) pour évoluer peu à peu vers un bord simple de pli standard. Le "film" constitué par les images successives de cette transformation donne un *champ de surfaces* qui peut faire penser au champ précédent mais qui est struturellement très différent. Il traduit d'une part la transition entre la fig. 38 et une configuration de pli simple et d'autre part une "condensation" des deux cusp en un point V à l'instant du passage entre les deux états A et D de la fig. 39.

Fig. 39



Ce champ un peu complexe doit mathématiquement être regardé comme une singularité de dimension trois. Cela consiste (en simplifiant) à s'attacher au point V de la figure 39, et à considérer les "feuilles" A, B, C, D, etc. comme des éléments d'un voisinage du point singulier. C'est ce que l'on appelle classiquement une "queue d'aronde" et ceci va nous permettre de compléter de la façon suivante la modélisation épistémologique que nous avons entreprise au paragraphe précédent :

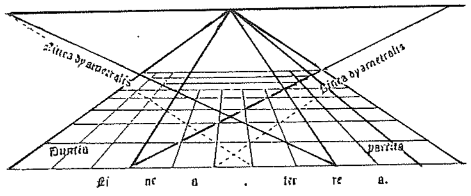
1 — en termes "d'images mentales", le point V (centre de la queue d'aronde) correspond au point de "l'espace des états" résumé par la fig. 30. Il contient tous les savoirs conquis par le quattrocento et les condense sur deux corollaires de la méthode d'Alberti : *position* du point de fuite principal à la hauteur de l'observateur, lien entre distance et point de *convergence des diagonales*.

2 — entre Alberti et Vignola, l'accès complet au point V aura nécessité un siècle mais cela ne signifie pas que le champ menant de A à C (fig. 39) ait véritablement eu une telle vitesse de déroulement. On peut au contraire imaginer que chacun des auteurs a atteint son propre "point V" comme résultat de sa "compréhension" et que l'on a donc plutôt affaire à divers champ, liés à des "queues d'arondes" voisines.

Ainsi Alberti "condense" lui-même ses deux fronces sur une image qui contient la propriété du point de fuite principal et l'intuition de l'importance de la diagonale, toutefois il ne parvient à la propriété de hauteur du point principal qu'à travers un "passage à la limite" : c'est, d'une certaine façon, une jonction comme celle que j'ai évoquée à propos du cusp γ_2 de la fig. 14. C'est à Pierro della Francesca qu'il reviendra d'effectuer cette jonction en "termes finis", c'est-à-dire grâce au théorème de Thales ; et on peut d'autre part considérer (cf [3]) que Pierro avait compris toute la propriété des diagonales et du point de distance mais qu'ici, à son tour, il ne disposait pas de jonction évitant le "passage à la limite"... ce qui sera réservé à Vignola.

3 — On peut admettre (cf. fig. 40) que Viator (sans en donner les clés), disposait déjà d'une "queue d'aronde" centrée sur un point V très proche de la fig. 30.

Fig. 40



Mais indépendamment d'une relation quelconque du cheminement qu'il a pu effectuer, ou si l'on préfère, en l'absence d'indications sur le "champ" voisin de V, il y a chez Viator un condensé fascinant de ce qui s'est passé au quattrocento : la *rotation* de la double fronce A de la figure 39. En effet, on aura sans doute remarqué que celle-ci comporte (ou "suppose", ou "entraîne"...) deux aspects ; le premier concerne le "changement de repère" indispensable à la rotation, le second touche à l'apparition d'un *bord de pli* à partir du stade C. Le mot "fascinant" n'est peut-être pas trop fort si l'on se laisse aller aux deux remarques suivantes :

Première remarque : entre le stade A de la fig. 39 (qui correspond à la fig. 38 paramétrée suivant les axes de transversalité et de profondeur) et le stade C, le repère à trois dimensions qui est attaché à la feuille A a

tourné de façon à faire apparaître deux nouveaux axes. Les deux nouveaux paramètres qui correspondent à ces axes sont de deux origines différentes : l'un provient de l'apparition (grâce à la rotation) de l'axe "de bout" dans A qui pourrait très bien correspondre à un *déplacement vertical* comme troisième coordonnée dans la fig. 38, l'autre provient de la "superposition" des axes y'y et x'x de profondeur et de tranversalité qui, au cours de la rotation, met en évidence l'importance des axes diagonaux... Si l'on se rapporte à l'exposé [1] on pourra rapprocher cela de ce qui est dit du "savoir déclaratif" porté par l'espace tangent au point singulier : c'est précisément dans ce couple "hauteur-diagonale" que réside en définitive le savoir, plutôt que dans le couple "profondeur et transversalité" ...

Deuxième remarque : sans doute parce qu'il ne s'arrête pas aux antécédents du stade C de la fig. 39, Viator présente une originalité par rapport aux autres auteurs : il s'attache à préciser le mieux possible le stade C lui-même. Or, comme je l'ai laissé entendre plus haut, le stade C ne contient pas uniquement le point V (privilégié parce que c'est lui le centre du phénomène d'éclatement en deux cusp) mais il fait apparaître toute une ligne *de points singuliers* qui appellent une forme d'interprétation en termes d'attracteurs. C'est évidemment l'occasion de revenir sur le problème des points de fuite en général... et force est bien de constater que Viator est sans doute le premier à en faire état (fig. 41) et à les utiliser systématiquement dans ses constructions au même titre que le point de fuite principal ou que le point de distance ! Ce pourrait être une "explication" au hiatus entre les possibilités théoriques du quattrocento, cantonnées en quelque sorte à une atteinte du point V, et *l'extrapolation* surprenante de ce savoir au sein d'un "champ de savoirs" intuitifs. Non pas accessibles mathématiquement, mais *nécessaires*, parce que partie intégrante de la configuration à laquelle aboutit le processus mental...

c. Stade du miroir et mise en abîme

Les progrès sur la question, c'est-à-dire l'intégration de tous les savoirs étalés par Viator à un savoir supérieur, devront attendre un siècle et vont être *subordonnés à un changement d'approche*, qui fait apparaître historiquement ce que l'on ressent forcément sur la schématisation de la queue d'aronde : celle-ci débouche en fait sur une sorte d'*impasse*, dans la mesure où

Fig. 41

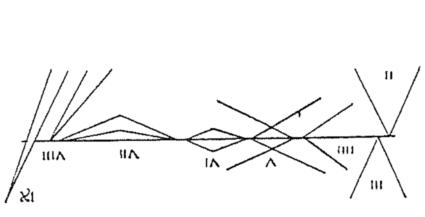
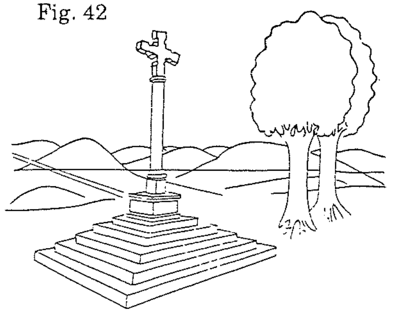


Fig. 42



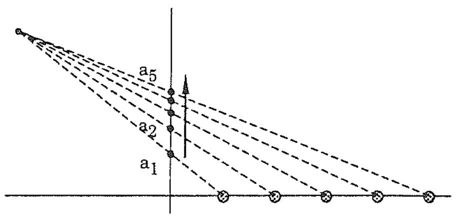
le point V et le pli qui l'englobe marquent l'aboutissement (et la fin) d'un processus ... Ce n'est que vers 1600 que des considérations du type de celles que l'on utilise aujourd'hui (cf. § II.a) commencent à constituer des éléments de justification, de clarification ou de conviction.

L'état de la perspective entre 1400 et 1500, et même entre 1500 et 1600, c'est avant tout l'état de la *géométrie de l'espace* à une époque et il faut bien prendre conscience que l'économie de moyens d'un Alberti (ou d'un Vignola) reflète en réalité l'impossibilité de manipuler d'autres éléments proprement géométriques que ceux que j'ai décrits jusqu'à présent. En ce sens, le modèle constitué par la fig. 39 me semble, à tout le moins, montrer la miraculeuse puissance d'une approche qui trahit avant tout ses limites. Il n'en est que plus intéressant de chercher à situer cette période dans le mouvement plus large des idées qui nous apparaît aujourd'hui.

Les "peintres-géomètres" du quattrocento ont dû souvent penser qu'il leur revenait simplement de "redécouvrir" les arcanes perdus de la perspective des Anciens. Ce faisant, il se sont largement inspirés de leurs méthodes de raisonnement et l'œuvre d'un Pierro della Francesca n'a pas grand chose à envier à la rigueur des traités d'Euclide. Mais il serait sans doute faux de croire que sur le problème qu'ils se sont posé – et qu'ils ont probablement été les premiers à *bien* poser – la science grecque ait vraiment dépassé le stade des erreurs modélisées par la fig. 32. Au contraire, Alberti (ou ses contemporains) ont non seulement résolu le problème de façon magistrale mais ils ont, en plus, dégagé des méthodes aussi originales que celle de la projection centrale sur un plan, ou que celle de la "mise aux carreaux", dans laquelle il faut bien voir les prémices de la toute puissance du repérage cartésien.

Et s'il convenait d'insister sur l'apport particulier du quattrocento en ce qui concerne la notion de "point de fuite" (ne serait-ce que parce qu'il s'agit là de rien moins que de la première "actualisation de l'infini" qu'il soit possible d'étudier épistémologiquement de façon approfondie), il suffirait de considérer la situation que j'ai rapportée à la notion "d'échelle de Jacob" à propos du paradoxe de Zénon. Après Alberti, les "images" qu'il devient possible d'attacher à ce type d'attracteur auront profondément changé sur au moins deux plans et vont constituer sur chacun de ces deux plans une base particulièrement propice aux évolutions futures de l'analyse et de la géométrie.

Fig. 43



Comme on l'a vu, en effet, la clé de la compréhension du phénomène de point de fuite réside d'abord dans un passage à la limite original : celui de la suite a_1, a_2, ... de la fig. 43. En l'introduisant, Alberti aura su se dégager de l'idée envahissante que les phénomènes de convergence étaient plus ou moins commandés par une suite géométrique et il aura ainsi montré que des phénomènes plus complexes peuvent, eux aussi, être maîtrisés mathématiquement. Par ailleurs il serait dommage de ne pas

mesurer l'importance intrinsèque de la résolution d'une forme nouvelle à deux dimensions de l'attracteur "échelle de Jacob" : celle de l'image d'un carrelage *prolongé indéfiniment en profondeur*. La fig. 18 (comme beaucoup de tableaux de la Renaissance) donne une idée du caractère surprenant du résultat qui préfigure, on le sait, les images que l'on peut attacher depuis le XVIIème siècle au concept de plan projectif, mais ce que l'on a sans doute moins à l'esprit c'est sans doute le côté "révolutionnaire" du problème posé : d'une approche de l'idée de parallèles cultivée par les Grecs, que l'on pourrait qualifier de "locale" et qui consistait à ramener systématiquement le problème du parallélisme "à distance finie" par des considérations d'angles, on va pouvoir passer à une vision "globale" et traiter le problème en termes de propriétés de concourrance, ou de non-concourrance "à l'infini"...

Mais nous rejoignons là, paradoxalement, les obstacles qu'il restait à franchir au quattrocento en matière de géométrisation de l'espace. Car ce n'est pas le moindre paradoxe de constater que les "géomètres-peintres" sont parvenus à *représenter l'espace* sans géométrie dans l'espace : ils ont *vu* (et largement maîtrisé), mais pendant deux siècles ils ont accumulé des savoirs sans trouver le véritable recul qui permettait de "comprendre" ces savoirs. Car s'il faut retenir une chose des méthodes de la Renaissance c'est avant tout une *absence* : celle des obliques ! Qu'il s'agisse même des obliques contenues dans un plan horizontal... La géométrie du quattrocento ne permet pas de gérer d'autres plans que les plans horizontaux ou frontaux.

Cela témoigne d'une *position du peintre vis-à-vis de l'espace qui l'entoure* qu'il serait certes tentant de rapprocher de celle d'un enfant dans le cadre d'une "épistémologie génétique", mais que je me contenterai de décrire pour elle-même avant de conclure cet exposé.

Je voudrais en effet attirer l'attention sur un rapprochement intéressant entre cette genèse de la géométrie de l'espace et le procédé que l'on désigne sous le nom de "mise en abîme" et qui consiste généralement à concevoir des images emboitées qui donnent l'impression, à la limite, de se contenir indéfiniment elles-mêmes, comme dans le cas où l'on se regarde dans un système de deux miroirs parallèles et opposés, ou comme dans la situation d'une émission de télévision où l'on peut apercevoir, sur un écran de contrôle, une image réduite identique à celle que l'on reçoit sur son propre téléviseur et qui offre, à son tour, l'occasion d'imaginer une cascade d'écrans de plus en plus petits répétant la même image.

En première analyse, on a tendance à penser qu'en inventant une méthode "réaliste" pour représenter l'espace, les artistes du quattrocento ont pu se trouver placés, d'entrée de jeu, face à un phénomène de "mise en abîme" ; et il n'est effectivement pas difficile de constater que le plus souvent un tableau représentant, par exemple, une scène se déroulant à l'intérieur d'une église était tout simplement destiné à être placé... face à des spectateurs assis eux-mêmes dans une église. Or il ne semble pas que cet "emboîtement" puisse mener réellement à un processus de mise en abîme ; bien au contraire. Il est frappant en effet de constater à quel point les œuvres picturales du XVème siècle, sous prétexte d'une mise en scène de l'espace, offrent en réalité un *miroir* de la subjectivité des artistes. Sans entrer dans de trop longs développements, il suffit d'observer le rôle presque mystique attribué à des points comme le point de fuite central ou comme le point de distance dans la majorité des compositions : l'absence de recul théorique a très souvent conduit à les assimiler purement et simplement à la place de l'observateur *à l'intérieur du tableau ;* et aujourd'hui encore la plupart des historiens de l'art n'hésitent pas à parler d'une composition "à deux points de vue" lorsqu'ils ont affaire à un tableau qui fait apparaître deux points de fuite sur le schéma de la fig. 42 ! Et s'il fallait une preuve supplémentaire de ce que l'on pourrait appeler un "stade du miroir", je renvoie le lecteur à la fig. 21 où il serait bien en peine d'expliquer autrement la présence quelque peu étrange de l'œil qui apparaît en haut à gauche, à l'emplacement du point de fuite principal...

Cette gravure est pourtant extraite d'un traité de perspective ([4]) édité par Danti vers 1585 et, même s'il faut l'attribuer à Vignola, la date n'en remonte guère qu'aux alentours de 1535. C'est comme je l'ai dit une époque où les savoirs se résument à la constitution d'un "pli" et sont loin d'englober une vision stabilisée de la géométrie de l'espace. Epistémologiquement parlant, la situation pourrait se ramener à un pli du type de la fig. 44 où le pli supérieur ne serait rien d'autre que le pli simple dont nous avons étudié la constitution au paragraphe précédent (cf. fig. 39).

Jusqu'aux alentours de 1600 on rencontre (cf. fig. 45) des erreurs fréquentes qui sont manifestement le résultat d'un attracteur "les points de fuite sont situés sur la ligne d'horizon" et d'une dynamique du type de celles que j'ai déjà décrites.

Le "sens de l'histoire" invite donc les mathématiciens à surmonter ce pli, c'est-à-dire à lui trouver une "fronce". C'est cette

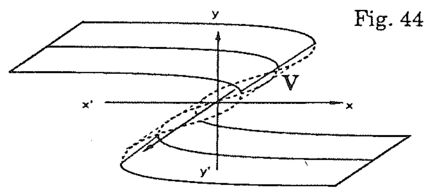


Fig. 44

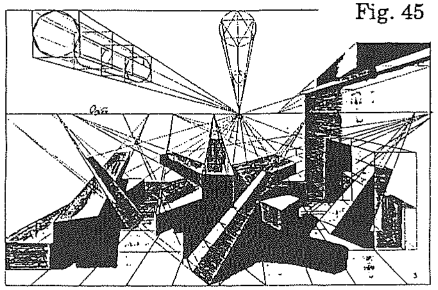
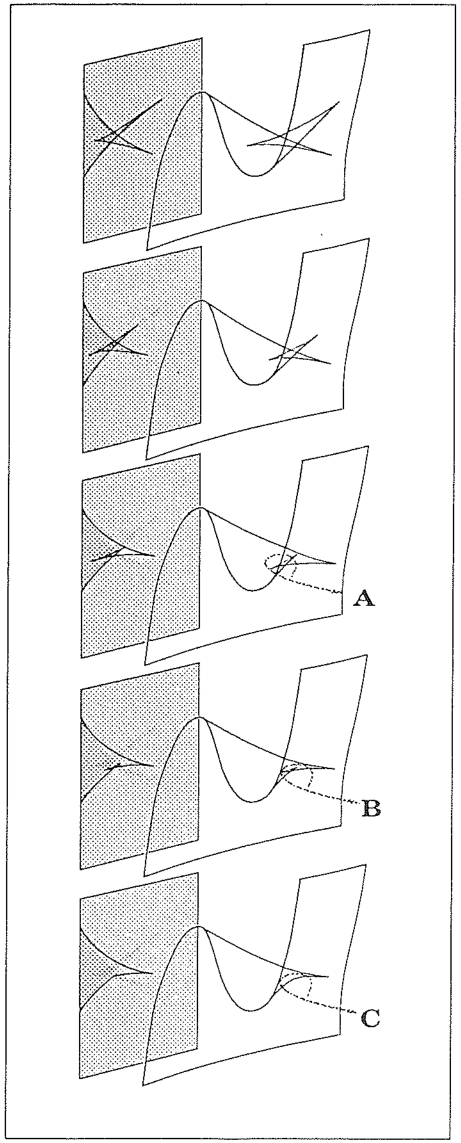


Fig. 45

"fronce" qui détient la clé de la géométrie dans l'espace et qui sera maîtrisée à partir du début du XVIIème siècle. Je tâcherai d'en expliquer la complexité dans un futur exposé, car (je l'ai déjà signalé au § II.a) il ne s'agit pas là d'une fronce simple, mais d'une singularité de dimension 4 connue sous le nom "d'aile de papillon".

Pour le dire sur un dessin (cf. fig. 46) le pli de la figure 44 (dont la partie supérieure résulte de la transformation résumée sur la fig. 39) doit être regardé comme la dernière phase du schéma d'évolution représenté par la fig. 46 et constitue une approche trop partielle de la singularité totale pour suffire à sa résolution... On peut cependant se faire une idée du genre de problèmes qui doivent être modélisés pour aboutir à la singularité en question en revenant aux explications que j'ai dû donner lorsqu'il s'est agi de résumer les principes de la perspective.

Fig. 46



En effet, les figures 16, 20, 22 ou 23 constituent ce qu'il faut cette fois regarder comme une réelle *mise en abîme* géométrique de l'espace. Il ne s'agit plus de dessiner une scène quelconque, mais de représenter une scène où un observateur regarde un objet et (surtout) de figurer de façon *précise et cohérente* l'image observée sur l'écran en l'intégrant au dessin global. Pour peu qu'on y réfléchisse un peu, cet emboîtement supplémentaire dans la "mise en abîme" fait appel de façon inévitable à toutes les ressources d'une géométrie dans l'espace très sophistiquée... De même par exemple que les problèmes d'éclairages et d'ombres, que les peintres se gardaient bien d'aborder géométriquement dans cette période de la Renaissance.

On peut considérer, si l'on veut, que cette transition nécessite un nouveau "changement de point de vue" analogue à celui qui marque la révolution copernicienne, où il ne s'agit plus d'être capable de rapporter à la position de la terre les orbites apparentes des planètes mais aussi de concevoir un modèle cohérent englobant dans une même chorégraphie non seulement le mouvement des planètes mais aussi celui de la terre elle-même.

Faut-il dès lors s'étonner de l'absence de progrès manifestée en matière de perspective entre 1500 et 1600 ? Il me semble au contraire qu'il faille rechercher dans cette longue période de maturation les signes de gestation d'une telle révolution... J'en ai en fait donné deux au cours de cet exposé car j'ai utilisé au § II.a les deux seules figures que je connaisse (et qui soient antérieures à 1600) susceptibles d'expliquer la perspective à travers une réelle tentative de *mise en abîme* : Ce sont les fig. 15 et 21 bis, extraites du traité de Vignola et Danti ([4]).

Malgré leurs imperfections, elles témoignent à elles seules de la naissance d'une nouvelle problématique et de la révolution qui s'opère au XVIème siècle. C'est la genèse de *notre* espace et je pense avoir montré en quoi *notre idée* de l'espace n'est, au fond, pas si évidente que l'on a tendance désormais à le croire ...

On me permettra, je l'espère, de faire appel pour conclure à tous ceux qui, de Stekel à André Breton en passant par Freud, se sont penchés sur une question qui n'est peut-être pas si différente : celle de l'identité entre *l'espace et le temps réels* et l'espace et le temps perçus dans son sommeil par *un sujet en train de rêver*. Tous ont été saisis par le processus de mise en abîme qui transparaît souvent lorsque le rêveur intègre à son rêve un évènement *qui lui semble rêvé...*

Ne pourraît-on pas tranposer à la géométrie de l'espace l'explication communément admise pour le "rêve dans le rêve" et qui lui confère avant tout le rôle de *rendre plus crédible* le contenu du rêve lui-même ?

Il est bien difficile de se défendre de l'idée que la réussite de la géométrie est précisément dans cette capacité magique à se mettre elle-même en abîme, afin d'intégrer l'image du "réel".

A moins qu'il ne s'agisse que d'un rêve : le rêve d'une ambition condamnée, par essence, à se faire géométrie de la géométrie, science de la science, connaissance de la connaissance, ...

Pour être à son tour une "magie qui réussit"...

Bibliographie

[1] *Comptes rendus du colloque Inter-Irem d'histoire et d'épistémologie des mathématiques de Lyon 1991.* Publications de l'Irem de Lyon.

[2] Alberti, *De Pictura*, 1435.

[3] *Aux confins de l'art et de la science : le* de prospectiva pingendi *de Piero della Francesca,* Jean Pierre Le Goff, *in* Destins de l'art desseins de la science, actes du colloque Aderhem de Caen 1986.

[4] Vignola et Danti, *Les deux règles de la perspective*, Bologne 1582

[5] *Jean Pélerin Viator* ... , Liliane Brion-Guerry, Ed. Les Belles Lettres, Paris 1962.

On trouvera aussi d'intéressants éléments historiques dans :

[6] *La perspective en première scientifique* ... , Jean Pierre Le Goff, *in* Repères-Irem n°7, Avril 1992.

J'en profite pour remercier cet auteur pour la grande patience avec laquelle il sait répondre aux questions les plus saugrenues sur l'histoire de la perspective ...

COMMISSION INTER-IREM
HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

PROBABILITE ET INFINI

Actes du 9ème colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

Huygens : L'espérance et l'infini

Denis Lanier
IREM de Basse Normandie

"*Il faudrait une nouvelle espèce de logique, qui traiterait des degrés de probabilité* (et nous donnerait) *une balance nécessaire pour peser les apparences et pour former là-dessus un jugement solide* ". Leibniz[1]

La nouvelle espèce de logique, la logique de l'incertain que Leibniz appelle de ses voeux, c'est le calcul des probabilités, ou plus exactement celui des **espérances**. En effet la théorie du hasard s'est construite, dans la deuxième moitié du 17ème siècle, avec les travaux de Fermat, Pascal et Huygens, autour du concept fondamental d'espérance. On sait ce que la naissance de ce calcul doit aux problèmes de répartition des enjeux dans les jeux de hasard. C'est ce point de vue juridique, celui du contrat, qui prévaut dans les premiers travaux à ce sujet. Cet article souhaite étudier l'apport de Christian Huygens à la nouvelle théorie, et comment l'infini y fait une timide apparition. Huygens est, en fait, le premier, à publier en 1656 un véritable traité mathématique sur les jeux de hasard, où l'espérance joue un rôle central. Après Pascal, Huygens donne ainsi une définition précise - sinon limpide - de l'espérance de gain d'un joueur - qu'il nomme la valeur de sa chance -, ainsi que des règles d'utilisation pratique. Pendant le demi-siècle qui suit, c'est dans ce traité que les mathématiciens apprendront la théorie du hasard, au point que Bernoulli dans son célèbre *Ars conjectandi* reprendra, en le commentant le texte de Huygens.

Huygens est aussi le premier à envisager l'idée d'un jeu éventuellement infini. Un jeu potentiellement infini ne pose pas de problème philosophique particulier, mais l'évaluation du gain que l'on peut attendre dans un tel jeu oblige à la considération, actuelle, d'une infinité de parties. L'apparition de l'infini dans les débuts de la théorie du hasard est étonnante, d'une part, car ses initiateurs avaient déjà

[1] Leibniz, *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, 1704.

beaucoup de mal à mettre en place les concepts de base du nouveau calcul, sans se mettre sur le dos des problèmes liés à l'infini. D'autre part, les problèmes étudiés de Pacioli à Pascal et Fermat sont tous des situations finies, et, donc, l'idée de considérer un jeu éventuellement infini est tout à fait nouvelle chez Huygens. Dans le cadre encore trouble d'une théorie, où les concepts sont mal fixés, où se posent des problèmes de langage et de traduction, où la matière elle-même est une fiction, on comprendra que l'infini fasse une apparition fugitive, masquée, comme si de rien n'était. Alors que ce sera pour la suite du développement de la théorie un élément central.

Après avoir rappelé rapidement les travaux antérieurs à Huygens, nous étudierons d'abord la genèse et le contenu du traité de Huygens, en particulier ce qui concerne la mise en place du concept d'espérance. Puis nous détaillerons les dernières propositions du traité, et un autre problème traité dans la correspondance, où l'infini fait son apparition.

I. LES PROBABILITES AVANT HUYGENS.

Il ne s'agit pas ici de faire une histoire exhaustive de la préhistoire du calcul des probabilités[2], mais il est important pour comprendre la portée du texte de Huygens, de marquer les points forts de ces premiers travaux. Ils se sont cristallisés d'abord autour de deux types de problèmes : les partis et les dés.

1. **Les partis**.

Les problèmes des partis remontent au moins aux algébristes italiens de la Renaissance, du 15ème et 16ème siècles : Luca Pacioli, Nicolo Tartaglia, qui posent la question du partage de la mise entre les participants à un jeu de hasard interrompu avant la fin. Ce problème est posé alors de façon purement algébrique, en termes de proportions. C'est Cardan qui énonce peut-être le premier la question en termes probabilistes en affirmant le principe suivant : " *Si la division une fois faite, le jeu recommençait à nouveau, les parties en présence devraient miser la même somme que celle qu'elles ont reçue à condition de s'arrêter de jouer"* . On a ici une formulation claire du problème avec son critère de projection dans l'avenir, et donc la fiction d'un jeu qui continue alors qu'il s'est arrêté.

---

2 On peut, par exemple, consulter notre article *La géométrie du hasard*, SCHOLIES n°16, janvier 1993.

2. **Les dés.**

Les paris sur les lancers de dés sont pratiqués depuis encore plus longtemps. Mais le calcul, la théorie, n'a pas d'intérêt pour le joueur, qui ne cherche pas l'égalité, ou la répartition juste, mais qui veut gagner en forçant le hasard. Là aussi, c'est Cardan qui décrit les probabilités d'apparition de faces d'un dé honnête, en indiquant : "*Par exemple, je peux aussi aisément lancer 1, 3 ou 5 que 2, 4 ou 6. Les gains sont alors mis en accord avec l'égalité, si le dé est honnête* ". Et il ajoute : "*Ces faits sont d'une grande importance pour la compréhension, mais vraiment d'aucune pour la pratique du jeu* ". Les outils mathématiques sont disponibles, les relevés d'observations statistiques aussi, mais il n'y a pas de problématique, donc pas de mathématique. Ces problèmes vont se formuler peu à peu. Par exemple, le traité de Galilée, au début du 17ème siècle, répond à la célèbre question du Grand-Duc de Toscane : "*on lance 3 dés. Comparer les cas où la somme est 9 et celle où elle est 10* ". Galilée montre que pour pouvoir travailler en équiprobabilité, donc faire seulement des dénombrements, il faut distinguer les deux dés. On a alors une différence de probabilité entre les deux événements de l'ordre de 1%. Il est d'autant plus remarquable que les joueurs de l'époque pouvaient observer une telle différence de fréquences ! Ce type de problème sera renouvelé avec la fameuse question posée par le Chevalier de Méré à Pascal : comparer les événements "*avoir au moins un six en lançant un dé*", et "*avoir au moins un double six en lançant deux dés*".

Les deux types de situations vont être le champ de travail et d'exploration de la célèbre correspondance entre Fermat et Pascal de 1654, principalement consacrée au problème des partis.

Rappelons que Pascal évalue le gain possible d'un joueur à un moment donné de la partie, en faisant une partition des deux éventualités pour le coup suivant. Ce qui donne une équation récurrente, qu'il résout avec une grande virtuosité technique et son fameux triangle arithmétique. Le principe de fonctionnement de la récurrence est le suivant : dans une situation à deux issues équiprobables, si dans un cas le joueur gagne a et dans l'autre b, il lui revient, dans le cas du partage, (a+b)/2. L'argumentation est d'ordre juridique.

Fermat fait intervenir des parties fictives, qui permettent de décrire entièrement l'ensemble de tous les cas. En supposant l'équiprobabilité de ces cas, il reste à faire un dénombrement des cas favorables à l'un des joueurs. Il s'agit donc d'un raisonnement très proche d'une méthode probabiliste finie moderne. Cette idée des parties fictives n'est pas acceptée facilement, ni par Roberval, qui y voit un paralogisme, ni finalement par Pascal. En effet, le jeu s'est effectivement arrêté.

Les deux concepts centraux qui se mettent peu à peu en place lors de ces premiers travaux sont ceux d'équiprobabilité - ou plutôt d'équité, de justice - et d'espérance. E. Coumet a montré[3] comment ces problèmes de partage d'enjeu, avaient été traités d'un point de vue juridique, celui du contrat : il s'agit d'établir ce qui doit revenir à chaque joueur en toute justice. C'est donc initialement un esprit d'équité qui prévaut plutôt qu'une recherche d'égalité mathématique. E. Coumet a aussi montré ce que ces travaux devaient à un type d'accords juridiques devenus de plus en plus importants aux 17ème et 18ème siècles : les contrats aléatoires. Il s'agit d'organiser, dans un cadre commercial ou de navigation, l'échange d'une valeur présente et certaine contre une valeur incertaine dans l'avenir. Le problème est d'arriver à la proportion "*entre le péril et ce qui est reçu*". La quantification de cette proportion conduit à l'idée d'espérance, en tant que critère de décision, de choix raisonnable dans une situation incertaine, qui reste soumise au hasard. Pour illustrer cet état d'esprit nouveau, il suffit d'opposer la "sagesse populaire" du "un tiens vaut mieux que deux tu l'auras", à la définition de Pascal : "*L'incertitude de gagner est proportionnée à la certitude de ce qu'on hasarde selon la proportion des hasards de gain et de perte* ".

II. LA GENESE DU TRAITE DE HUYGENS.

En 1654, date de la célèbre correspondance entre Pascal et Fermat, Christian Huygens a 25 ans, il vient de terminer ses études. Commencées avec son père, puis avec un mathématicien d'Amsterdam, Stampisen, il les poursuit à Leyde, où il étudie le droit, et surtout à la nouvelle université de Breda, où il travaille sous la férule de Francis van Schooten. Huygens a publié déjà deux petits opuscules sur les quadratures, en particulier une réfutation de Grégoire de Saint Vincent, mais ce sont encore là travaux d'étudiant. En 1655, il visite la France pour recevoir son doctorat de droit à l'université protestante d'Angers. A l'aller, comme au retour, il

[3] Cf. bibliographie.

séjourne quelques mois à Paris et se lie avec les milieux mondains et savants. Il n'y rencontre ni Pascal - ce qu'il regrette -, ni Fermat - toujours à Toulouse -, ni Carcavi, mais se lie avec Mylon et rencontre Roberval. C'est sans doute à ce moment qu'il est informé du problème des partis et de l'existence des travaux des mathématiciens français, mais c'est sûrement une connaissance très partielle, puisqu'aucune publication n'a eu lieu. De retour en Hollande, il travaille sur le sujet, et, en 1656, écrit à van Schooten qu'il a un manuscrit sur les jeux de hasard.

Van Schooten projette alors la publication d'un recueil d'exercices, applications de l'analyse cartésienne à divers sujets. Il propose, donc, à Huygens d'y insérer son traité. Le recueil devant paraître en latin, puis en hollandais, il faut donc traduire le texte de Huygens en latin, ce qui est fait par van Schooten. Ceci ne semble pas aisé, car sur une matière aussi nouvelle, les mots et les usages ne sont pas encore fixés.

Parallèlement à ces problèmes de traduction, Huygens poursuit une abondante correspondance avec des mathématiciens français : Roberval, Carcavi, Mylon. Il s'agit principalement d'un échange de problèmes et de solutions, plus qu'une comparaison de méthodes. Une des questions qui préoccupent Huygens est l'avantage de la primauté : quand deux joueurs jouent tour à tour suivant certaines règles, quel est l'avantage de celui qui commence ? Vers juin 1656, le problème arrive finalement à la connaissance de Pascal et de Fermat, par le biais de Carcavi. Par le même canal, Fermat communique ses résultats que Huygens est bien heureux de trouver conformes aux siens. Fermat en profite pour proposer d'autres questions plus difficiles, que Huygens adjoindra à son traité, après les avoir résolus "*en un après-midi*". Pascal s'accorde aussi avec les résultats de Huygens, qui peut donc apporter les dernières corrections à son manuscrit. L'ouvrage paraît en août ou septembre 1657, en latin. L'édition hollandaise paraît trois ans plus tard.

Nous utiliserons, dans la suite, la traduction française[4] parue

[4] Il existe une autre traduction française, plus ancienne. Elle paraît en 1801, sous le titre *L'art de conjecturer*, traduit du latin de Jacques Bernoulli, avec des Observations, Eclaircissements et Additions, par L.G.F. VASTEL, Membre du Lycée et de la Société d'Agriculture et de Commerce de Caen. De fait, on ne trouve que la première partie, qui n'est autre que le traité de Huygens. Mais la traduction est faite à partir du texte latin de van Schooten, et semble donc moins fiable.

dans les *Oeuvres Complètes* [5], commentées par D.J. Kortweg, parues entre 1888 et 1950. Cette traduction, bien qu'imparfaite, a été réalisée à la fois à partir du texte latin - du en fait à van Schooten - et du texte hollandais - original.

III. LE TRAITE.

1. Introduction.

Le traité, intitulé en latin *De rationiciis in aleae ludo,* en hollandais *Van rekeningh in spelen van geluck,* est traduit en français sous le titre *Du calcul dans les jeux de hasard* . Il est précédé d'une adresse au lecteur de van Schooten, où il présente le travail de Huygens comme une application de l'algèbre et plus généralement de l'analyse cartésienne :

"*Je présume que son écrit te plaira d'autant mieux que les considérations de l'auteur te paraîtront plus subtiles et plus extraordinaires ; surtout parce qu'il y emploie la même* Analyse *dont je me suis servi et dont je lui ai enseigné jadis les fondements, et qu'ainsi il indique à ceux qui ont étudié cet art une méthode pour analyser de pareils problèmes* ".

Suit une lettre-préface adressée à van Schooten, où Huygens présente son ouvrage dont la matière n'est pas si frivole qu'il y paraît :

"*Car si quelques lecteurs pourraient bien s'imaginer que j'ai travaillé sur des sujets de faible importance, ils ne condamneront néanmoins pas comme complètement inutile et indigne de toute louange ce que vous voulez bien adopter de cette façon comme si c'était votre propre ouvrage, après l'avoir traduit, non sans quelque labeur, de notre langue en latin. Toutefois je veux croire qu'en considérant ces choses plus attentivement, le lecteur apercevra bientôt qu'il ne s'agit pas ici d'un simple jeu d'esprit, mais qu'on y jette les fondements d'une spéculation fort intéressante et profonde.*"

[5] Toutes les citations qui suivent sont donc tirées du tome XIV des *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences*, La Haye, Martinus Nijhoff, 1920. Un copieux avertissement et de nombreuses notes encadrent le texte du traité de Huygens (pp.54-91), ainsi que les autres travaux de Huygens sur le sujet, regroupés en 9 appendices.

Huygens rend grâce, de manière allusive, à ses prédécesseurs, Pascal et Fermat :

"*Il faut savoir d'ailleurs qu'il y a déjà un certain temps que quelques uns des plus célèbres mathématiciens de toute la France se sont occupés de ce genre de calcul, afin que personne ne m'attribue l'honneur de la première invention qui ne m'appartient pas. Mais ces savants, quoiqu'ils se missent à l'épreuve l'un l'autre en se proposant beaucoup de questions difficiles à résoudre, ont cependant caché leurs méthodes. J'ai donc dû examiner et approfondir moi-même toute cette matière à commencer par les éléments, et il m'est impossible pour la raison que je viens de mentionner d'affirmer que nous sommes partis d'un même premier principe. Mais pour ce qui est du résultat, j'ai constaté en bien des cas que mes solutions ne diffèrent nullement des leurs.*"

Ces remarques sont représentatives de la communication scientifique, au milieu du 17ème siècle. Beaucoup se passe par correspondance directe, et l'on cherche plus - sauf demande explicite - à échanger des énoncés et des résultats, plutôt que des principes et des méthodes. Il n'y a pas encore de support périodique aux publications, ni de style scientifique codifié.

Enfin, Huygens indique que son traité se termine par des exercices pour le lecteur :

"*Vous trouverez qu'à la fin de ce traité j'ai proposé encore quelques questions du même genre sans indiquer la manière de les résoudre, premièrement parce que je voyais qu'il me coûterait trop de travail d'exposer convenablement les raisonnements conduisant aux réponses, et en second lieu parce qu'il me semblait utile de laisser quelque chose à chercher à nos lecteurs (s'il s'en trouve quelques-uns), afin que cela leur servît d'exercice et de passe-temps.*"

Le traité, lui-même, commence ensuite. Il débute par une courte introduction, fixant les "éléments" sur lesquels s'est fondé Huygens, puis comporte 14 propositions et les cinq exercices terminaux. On peut y distinguer quatre parties :

* les règles du calcul qui regroupe l'introduction et les propositions I, II et III ;
* le problème des partis, propositions IV à IX ;
* les problèmes de dés, propositions X à XIV ;
* les cinq exercices.

2. Les fondements.

Avant d'aborder la première partie, il convient de souligner les problèmes de traduction, qui ont été étudiés par Hans Freudenthal[6]. En particulier, le mot "chance" apparaît dans la traduction française avec des occurrences diverses, alors que Huygens a utilisé des mots différents en hollandais. On peut distinguer, en première approche, deux occurrences principales :

* Huygens utilise le mot "kansse" pour désigner la situation globale d'un jeu, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les issues possibles, avec leurs probabilités. C'est la liste des gains possibles, accompagnés du nombre de cas où ces gains sont obtenus. Huygens parle alors de la "valeur de la chance" d'un joueur pour désigner la valeur moyenne de cette liste, c'est notre espérance moderne. Van Schooten traduit dans ce cas en latin par *sors seu expectatio* ou *expectatio*. C'est de là que vient notre "espérance".

* Huygens utilise le mot "kans" pour désigner les cas où un événement se produit. Il s'agit alors de l'utilisation classique, comme dans l'expression : trois chances sur quatre. Huygens utilise d'ailleurs le même mot dans le cas de "chances égales" et dans les cas où il n'y a pas équiprobabilité. Van Schooten traduit alors par des expressions variées comme *aeque facile*, *pari facilitate*, *aequa sors*, *simili expectatio*. La situation se complique quand on sait que les deux mots utilisés par Huygens "kansse" et "kans" ont le même pluriel "kanssen".

L'introduction comporte les deux définitions qui vont fonder la méthode. La première est la suivante :

"*la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a une valeur déterminée.*"

Il s'agit là d'une affirmation d'existence de la valeur de la chance d'un joueur, de son espérance de gain, dont nous savons qu'elle peut être sujette à démonstration, dans le cas d'un jeu éventuellement infini. Huygens l'illustre avec deux exemples de jeux classiques : d'abord, "*si quelqu'un parie de jeter avec un dé six points au premier coup* ", où il s'agit de savoir de combien la chance de perdre surpasse celle de gagner. Ensuite, "*si je joue avec une autre personne à qui*

[6] Cf. bibliographie.

gagnera le premier trois parties et que j'en aie déjà gagné une ", où il s'agit de savoir quelle part de l'enjeu me revient si on interrompt le jeu, ou bien à quel prix je dois raisonnablement céder mon jeu à quelqu'un qui désire continuer à ma place.

La deuxième définition est celle qui permettra les calculs, c'est la plus importante :

"*Dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire par un jeu qui ne vise au détriment de personne* "[7]

Huygens donne un exemple pour éclairer ce principe, qui ne sera en fait "démontré" qu'après la première proposition. Si dans une main j'ai 3 écus, et dans l'autre 7 écus, choisir "au hasard" l'une des deux mains revient à être certain d'obtenir 5 écus, c'est-à-dire de jouer au même jeu avec 5 écus dans les deux mains.

La proposition I est la suivante :

"*Avoir des chances égales d'obtenir* a *ou* b *me vaut* (a+b)/2."[8]

En voici la démonstration in-extenso :

"*Afin de non seulement démontrer cette règle mais aussi de la découvrir, appelons x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x, je puisse me procurer de nouveau la même chance par un jeu équitable. Supposons que ce jeu soit le suivant. Je joue x contre une autre personne, dont l'enjeu est également x ; il est convenu que celui qui gagne donnera a à celui qui perd. Ce jeu est équitable, et il appert que j'ai ainsi une chance égale d'avoir a en perdant, ou 2x-a en gagnant le jeu ; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu 2x, duquel je dois donner a à l'autre joueur. Si 2x-a était égal à b, j'aurais donc une chance égale d'avoir a ou d'avoir b. Je pose*

[7] Dans le texte hollandais : "*In het speelen de kansse, die yemant ergens toe heeft, even soo veel weerdt is als het geen, het welck hebbende hy werder tot deselfde kansse kan geraecken met rechtmatigh spel.*" Dans le texte latin : "*In aleae ludo tanti aestimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem seu expectationem pervenire, aequa conditione certans.*"

[8] Dans le texte hollandais : "*Als ick gelijcke kans hebbe om a of b te hebben, dit is my so weel weerdt als (a+b)/2.*" Dans le texte latin : "*Si a vel b expectem, quorum utrumvis aeque facile mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere (a+b)/2.*"

donc 2x-a = b, d'où je tire la valeur de ma chance x = (a+b)/2. La preuve en est aisée. En effet, possédant (a+b)/2, je puis hasarder cette somme contre un autre joueur qui mettra également (a+b)/2, et convenir avec lui que le gagnant donnera a à l'autre. J'aurai de sorte une chance égale d'avoir a si je perds, ou b si je gagne ; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu a+b et je lui en donne a.

En chiffres. Lorsque j'ai une chance égale d'avoir 3 ou d'avoir 7, la valeur de ma chance est 5 d'après cette proposition ; et il est certain qu'ayant 5 je puis me procurer de nouveau la même chance. En effet, si je joue 5 contre une autre personne dont la mise est également 5, à condition que le gagnant donnera 3 à l'autre, c'est là un jeu équitable, et il est évident que j'ai la même chance d'avoir 3 en perdant, ou d'avoir 7 en gagnant ; car en ce cas j'obtiens 10, dont je lui en donne 3. "

On voit ici à l'oeuvre le principe de réversibilité de Huygens : il faut inventer un autre jeu, équitable, dont la mise doit être telle qu'elle donne la même "chance", c'est-à-dire le même catalogue des gains possibles que le jeu initial. Huygens procède en trois temps : il fait d'abord l'analyse algébrique, en posant x la valeur recherchée de la chance, puis en écrivant une équation permettant de calculer x ; il fait la synthèse en vérifiant que la valeur trouvée par l'analyse convient ; enfin il donne un exemple "en chiffres". On peut noter ici que, si l'énoncé est tout à fait semblable à celui de Pascal dans son *Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties*, la démonstration est algébrique, donc plus générale, comme on le voit avec les deux propositions suivantes. Il reste que le principe fondamental de Huygens est que l'espérance de gain dans un jeu est la mise que l'on doit payer pour entrer dans un jeu équitable, donnant les mêmes résultats[9]

La proposition II formule que :

[9] Ce principe est à la fois simple et obscur - car très puissant. En témoigne le désir de Bernoulli de l'éclaircir dans l'Ars conjectandi : "*je tâcherai de le démontrer par un raisonnement plus familier et plus à la portée de tout le monde, en partant seulement de cet axiome ou de cette définition : que chacun doit attendre ou est supposé devoir attendre ce qu'il obtiendra infailliblement.*" Bernoulli ajoute, plus loin : "*le mot attente ne doit pas se prendre ici dans le sens ordinaire, selon lequel attendre ou espérer se rapporte à l'événement le plus favorable, quoique le contraire puisse arriver ; mais on doit entendre par ce mot l'espérance que nous avons d'obtenir le meilleur, tempérée et diminuée par la crainte du pire ; de sorte que la valeur de notre attente signifie toujours quelque chose d'intermédiaire entre le meilleur que nous espérons et le pire que nous craignons.*"

"*Avoir des chances égales d'obtenir a, b ou c me vaut (a+b+c)/3.* "

La démonstration est du même type que la précédente, en faisant intervenir deux autres adversaires. Elle se termine par une généralisation à n issues équiprobables, dont l'espérance est la moyenne arithmétique des gains associés.

La proposition III est la suivante :

"*Avoir p chances d'obtenir a et q d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut (pa+qb)/(p+q).* "[10]

En voici la démonstration :

"*Pour découvrir cette règle, appelons de nouveau* x *la valeur de ma chance. Il faut donc que possédant x, je puisse rentrer dans mon premier état par un jeu équitable. A cet effet je prends un nombre de joueurs tel qu'avec moi il y en a p+q en tout, dont chacun met x, de sorte que l'enjeu total sera px+qx ; chacun joue pour son propre compte avec une même chance de gagner. Supposons en outre qu'avec q joueurs, c'est-à-dire avec chacun d'eux en particulier, je fasse cette convention que si l'un d'eux gagne la partie, il me donnera la somme b, et que si moi je gagne, je lui donnerai la même somme. Supposons enfin qu'avec les p-1 joueurs qui restent, ou plutôt avec chacun d'eux en particulier, je fasse la convention que si l'un d'eux gagne la partie, il me donnera la somme a, et que je lui donnerai également la somme a si c'est moi qui gagne la partie. Il est évident qu'à ces conditions le jeu est équitable, attendu que les intérêts d'aucun joueur ne se trouve lésés. On voit de plus que j'ai maintenant q chances d'obtenir b, p-1 d'obtenir a et une chance (au cas où c'est moi qui gagne) d'avoir px+qx-bq-ap+a ; en effet, dans ce dernier cas je reçois l'enjeu px+qx dont je dois céder b à chacun des q joueurs et a à chacun des p-1 joueurs, ce qui fait en tout qb+pa-a. Or, si px+qx-bq-ap+a était égal à a, j'aurais p chances d'avoir a (car j'avais déjà p-1 chances d'obtenir cette somme) et q chances d'avoir b ; je serais donc revenu à mes chances premières. Je pose donc px+qx-bq-ap+a = a, et je trouve x = (ap+bq)/(p+q) pour la valeur de ma chance, conformément à l'énoncé.*"

[10] Dans le texte hollandais : "*Als het getal der kanssen die ick hebbe tot a is p, ende het getal der kanssen die ick tot b heb is q ; nemende altijdt dat ieder kans even licht kan gebeuren : Het is my weerdt (pa+qb)/(p+q).*"

Suit un exemple "en chiffres" : si l'on a la "chance" (au sens de liste des résultats) d'avoir 3 chances de gagner 13 et 2 chances de gagner 8, la valeur de cette chance est 11 d'après la proposition. En effet, soit un jeu à 5 (avec donc 4 autres joueurs), chacun misant 11, le gagnant équiprobable ramassant la mise, je conviens avec chacun des deux premiers joueurs que, si lui gagne il me donnera 8, et si je gagne je lui donnerai 8 ; je conviens avec chacun des deux autres joueurs que, s'il gagne il me donnera 13 et si je gagne je lui donnerai 13. Ce jeu sera équitable. J'ai 2 chances d'obtenir 8, 2 chances d'obtenir 13, et une chance (quand je gagne) d'obtenir l'enjeu 55-16-26 = 13. J'ai donc le même tableau de résultats qu'avec le jeu initial, dans lequel la valeur de ma chance est la mise du deuxième jeu, soit 11.

La règle de Huygens est donc tout à fait générale et peut être présentée de la manière suivante : un individu est dans une situation de jeu indéterminé - il n'y a pas d'adversaire désigné, ce peut être une loterie. La situation est interprétée comme un jeu à n personnes (n étant le nombre total de chances du jeu initial), chacun misant la même somme, avec une règle du jeu - d'échanges entre les joueurs - telle que la table des gains du nouveau jeu soit la même que celle du premier jeu. Si la règle est symétrique, le jeu est déclaré équitable, et la valeur de la chance du premier jeu, l'espérance de gain, est la valeur de la mise pour entrer dans le deuxième jeu. On en déduit une équation, permettant de calculer cette valeur.

Muni de ces propositions de base, Huygens peut maintenant aborder les problèmes de partis et ceux des dés.

3. **Les partis.**

La deuxième partie du traité est consacrée aux problèmes de partis. La méthode est fondée sur les propositions précédentes (essentiellement I et II). Huygens remarque d'abord que ce sont les parties manquantes qui importent, puis qu'il faut commencer par les cas les plus simples, enfin qu'il faut regarder à un moment donné de la partie ce qui se passerait au coup suivant. Le point crucial est l'affirmation que le partage de l'enjeu doit se faire dans le rapport des valeurs des chances - des espérances - de chacun des joueurs, puisque ce sont les valeurs de reprise du jeu par quelqu'un d'autre. D'autre part, Huygens étend le champ d'application des propositions initiales aux cas où l'on connaît non les gains effectifs dans les différentes éventualités, mais les espérances de gain de ces diverses possibilités. La méthode de Huygens est donc essentiellement la

première méthode de Pascal, indiquée dans la correspondance avec Fermat, ou au début de l'*Usage*.... L'avantage de Huygens vient d'une définition plus opérante de l'espérance, et des règles de calcul, ainsi que de la possibilité de l'étendre à plus de deux joueurs. En revanche, Huygens, qui ne connaît pas le *Traité du triangle arithmétique*, n'envisage pas de chercher une formule générale.

L'argumentation, dans chacun des cas évoqués, peut être décrite ainsi : si on note A(p,q) la valeur de la chance du premier joueur, quand il lui manque p parties et qu'il en manque q à son adversaire, on a d'après la proposition I, A(p,q) = (A(p-1,q)+A(p,q-1))/2. Cette formule de récurrence permet de se ramener à des cas simples comme A(0,q) = a et A(p,p) = a/2, si a est l'enjeu total.

Dans le cas de trois joueurs, on a, d'après la proposition II, et en reprenant les mêmes notations,

A(p,q,r) = (A(p-1,q,r)+A(p,q-1,r)+A(p,q,r-1))/3.

La proposition IV donne ainsi : A(1,2) = 3a/4. La proposition V donne : A(1,3) = 7a/8 et A(1,4) = 15a/16[11]. La proposition VI donne : A(2,3) = 11a/16. La proposition VII donne : A(2,4) = 13a/16.

La proposition VIII aborde le cas de trois joueurs et donne : A(1,1,2) = 4a/9. Enfin la proposition IX décrit la méthode générale. En voici l'énoncé :

"Pour calculer la part de chacun d'un nombre donné de joueurs, auxquels manquent des parties en nombres donnés pour chacun d'eux séparément, il faut d'abord se rendre compte de ce qui reviendrait à celui dont on veut savoir la part dans le cas où lui et dans ceux où chacun des autres à son tour aurait gagné la première partie suivante. En ajoutant toutes ces parts et en divisant la somme par le nombre des joueurs on trouve la part cherchée du joueur considéré."

En suivant cette méthode, Huygens construit, de proche en proche, un tableau, où l'on peut retrouver le cas étudié par Fermat et Pascal en 1654 (1.2.2 avec le parti 17.5.5).

4. **Les dés.**

La troisième partie du traité est consacré aux problèmes de dés. Dans une courte introduction, Huygens décrit le nombre d'issues

[11] Il s'agit de l'exemple proposé par Pacioli.

possibles en lançant un dé (6), deux dés (36) et trois dés (216). Il indique enfin le nombre de coups différents qui permettent d'obtenir une somme donnée, pour le lancer de deux dés, puis de trois. Les propositions X à XII consistent à chercher combien de lancers il faut faire pour avoir un avantage - c'est-à-dire une probabilité supérieure ou égale à 0,5 - dans la recherche d'un événement donné. Cela revient à calculer l'espérance de gain dans différents cas, en augmentant le nombre de lancers, et en réutilisant les résultats précédents à l'aide de la proposition III.

La proposition X étudie ainsi "*en combien de fois on peut accepter de jeter un six avec un dé* ". Huygens trouve ainsi, qu'en un lancer, le rapport des espérances est de 1 contre 5, en deux lancers, de 11 contre 25, en trois lancers, de 91 contre 125, en quatre lancers, de 671 contre 625 - c'est donc à partir de quatre lancers qu'on a l'avantage -, etc...

La proposition XI étudie le même problème dans la recherche de deux six en lançant deux dés. En un lancer, le rapport des espérances est de 1 contre 35, en deux lancers, de 71 à 1225. Puis Huygens saute au cas de quatre lancers, avec un rapport de 178991 à 1500625, de huit, puis seize, puis vingt-quatre, où il trouve finalement qu'il y encore un léger désavantage, "*et qu'on ne peut accepter la partie avec avantage qu'en jouant en 25 coups au moins* ". On retrouve là, exactement, la situation proposée par le Chevalier de Méré à Pascal.

La proposition XII recherche, maintenant, "*le nombre de dés avec lequel on peut accepter de jeter 2 six du premier coup* ". Cela revient à chercher combien de fois il faut lancer un dé, pour avoir un avantage d'obtenir au moins 2 six. Huygens étudie successivement le cas de deux lancers, où le résultat est de 1 contre 35 d'après la proposition XI, puis le cas de trois lancers, où l'on a, en étudiant le résultat du dernier lancer, 5 chances de ne pas avoir un six, et donc de se retrouver dans le cas précédent, et 1 chance d'avoir un six, et donc de rechercher au moins un six sur les deux premiers lancers, ce qui a été étudié à la proposition X. En appliquant la proposition III, Huygens trouve ainsi une espérance de gain de 2a/27, c'est-à-dire un rapport de 2 à 25. En " *prenant ainsi chaque fois un coup de plus, on trouve qu'on peut accepter avec avantage de jeter 2 six avec un dé en 10 coups ou avec 10 dés en un coup* ".[12]

[12] Le rapport des chances est en effet dans ce cas de 31169301 à 29296875.

Les deux dernières propositions abordent, enfin, le problème de la primauté. La proposition XIII étudie d'abord un cas simple, fini :

"*Dans l'hypothèse que je joue un coup de deux dés contre une autre personne à condition que s'il vient 7 points, j'aurai gagné, mais qu'elle aura gagné s'il en vient 10, et que nous partagerons l'enjeu en parties égales s'il vient autre chose, trouver la part qui revient à chacun de nous*".

D'après le préliminaire de cette partie, on sait qu'en lançant deux dés, 6 coups donnent une somme égale à 7, 3 coups donnent une somme égale à 10 et 27 coups donnent une somme différente. Il y a donc trois issues, dont on connaît le nombre de chances et qui rapportent respectivement a, 0, a/2, où a est l'enjeu. Huygens peut alors conclure en appliquant deux fois la proposition III :

"*j'ai 6 chances de gagner, c'est-à-dire d'avoir* a, *et 3 chances de perdre, c'est-à-dire d'avoir 0 ; ce qui d'après la troisième proposition me vaut* 2a/3 *pour ce cas. J'ai donc au commencement 27 chances d'avoir* a/2 *et 9 chances d'avoir* 2a/3 *; ce qui d'après la troisième proposition me vaut* 13a/24. *Et il reste* 11a/24 *pour l'autre joueur.*"

La proposition XIV est fort intéressante, puisqu'elle envisage, pour la première fois, un jeu éventuellement infini. En voici l'énoncé et la démonstration :

"*Si un autre joueur et moi jettent tour à tour 2 dés à condition que j'aurai gagné dès que j'aurai jeté 7 points et lui dès qu'il en aura jeté 6, tandis que je lui laisse le premier coup, trouver le rapport de ma chance à la sienne.*

Soit x la valeur de ma chance, et a l'enjeu. La chance de l'autre joueur a donc la valeur a-x. Il est évident aussi que chaque fois que c'est son tour de jeter, ma chance aura de nouveau la valeur x. Mais chaque fois que c'est mon tour de jeter, ma chance doit avoir une valeur supérieure, mettons y. Or, attendu que parmi les 36 coups qu'on peut faire avec 2 dés, il y en a 5 qui peuvent donner 6 points à mon adversaire et lui faire gagner la partie, et 31 coups à son désavantage, c'est-à-dire qui amènent mon tour de jeter, j'ai 5 chances d'avoir 0 lorsqu'il jette la première fois, et 31 chances d'avoir y ; ce qui d'après la troisième proposition, me vaut 31y/36. Mais nous avons posé que ma chance valait x au commencement du jeu. De sorte que 31y/36 = x, partant y = 36x/31. Nous avons posé en outre que ma chance vaut y, lorsque c'est mon tour de jeter. Mais *lorsque je jette, j'ai 6 chances d'avoir a, attendu qu'il y a 6 coups de 7 points qui me font gagner ; et j'ai 30 chances de faire revenir le tour à mon adversaire, c'est-à-dire d'avoir ma part x. La valeur y est donc équivalente à 6 chances d'avoir a et 30 chances d'avoir x ; ce qui, d'après la troisième proposition, me vaut (6a+30x)/36. Cette expression étant donc égale à y, et y d'après ce qui précède à 36x/31, il faut que (30x+6a)/36 soit égal à 36x/31, d'où l'on tire x = 31a/61 ; valeur de ma chance. Par conséquent, la chance de mon adversaire vaudra 30a/61. Le rapport de nos chances est donc de 31 à 30."*

Comme on le voit, l'infinité éventuelle du jeu n'apparaît pas, elle est masquée par une démonstration qui revient en fait à n'étudier que les deux premiers coups, en admettant qu'on se retrouve après dans la situation antérieure. Cela suppose l'indépendance des tirages et donc l'absence de mémoire de la situation. Huygens peut faire son calcul en faisant l'hypothèse de l'existence de l'espérance (qui mérite, ici, démonstration) d'après son premier principe. L'hypothèse suivante - l'espérance de l'autre joueur en fonction de la mienne - suppose que la probabilité que le jeu ne finisse pas est nulle. Néanmoins, c'est par commodité que Huygens pose cette hypothèse. En effet, il pourrait faire un calcul semblable au sien pour le deuxième joueur. Tout le calcul repose donc sur cette unique hypothèse que "la valeur de ma chance a une valeur déterminée"[13].

Cette proposition avait l'objet d'une correspondance entre Huygens et Roberval. Huygens avait posé la question dans une lettre du 18 avril 1656. En l'absence d'une réponse, Huygens pose le même problème à Mylon en mai 1656. Ce dernier transmet l'énoncé à Fermat et Pascal. Le 22 juin 1656, Carcavi fait part à Huygens du

13 En termes modernes, une démonstration pourrait être la suivante : on note A_n l'événement "je gagne à mon nième coup". Vu l'indépendance des tirages, la probabilité de A_n est $p(A_n) = (31/36)^n.(30/36)^{n-1}.(6/36)$. En effet, si je gagne à mon nième coup, c'est que mon adversaire a perdu ses n premiers coups, que j'ai perdu à mes n-1 coups précédents et que j'ai gagné à mon nième coup. L'événement A : "je gagne" est la réunion disjointe et dénombrable des événements A_n, pour n allant de 1 à l'infini. La probabilité de A est donc, si elle existe, la somme de la série de terme général $p(A_n)$. Or il s'agit d'une série géométrique de raison $(31.30)/36^2$, qui converge donc. D'où $p(A) = (6/36).(31/36).1/(1 - 31.30/36^2) = 31/61$. Ce qu'il fallait démontrer. On comparera cette démonstration avec celle de Huygens, plus élégante, même si elle est moins rigoureuse.

résultat trouvé par Fermat, que Huygens a le bonheur de trouver conforme au sien. Dans le même temps, Fermat transmet à Huygens des énoncés plus difficiles, qui feront l'objet des exercices I et III.

5. **Les exercices.**

Le premier des exercices laissés par Huygens à la sagacité de ses lecteurs est issu du dernier problème étudié. Il s'agit d'étudier la correction possible par le premier coup de l'avantage de la primauté, en ne faisant jouer au premier coup qu'un seul lancer, puis deux à tous les suivants :

"A et B jouent ensemble avec 2 dés à la condition suivante : A aura gagné s'il jette 6 points, B s'il en jette 7. A fera le premier en un seul coup ; ensuite B 2 coups successifs ; puis de nouveau A 2 coups, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un ou l'autre aura gagné. On demande le rapport de la chance de A à celle de B ? Réponse : comme 10355 est à 12276."

La solution, ici relativement facile à trouver, peut se conduire exactement comme Huygens a traitée la dernière proposition. Ce problème, comme les suivants, suscitera un certain nombre de solutions avant la fin du siècle, ou au tout début du suivant : Montmort, Bernoulli[14], Struyck et aussi Spinoza - dans un court opuscule[15] publié en 1687 avec le *Traité de l'Arc en ciel.*

Le deuxième problème est plus difficile à interpréter :

"Trois joueurs A, B et C prennent 12 jetons dont 4 blancs et 8 noirs ; ils jouent à cette condition que celui gagnera qui aura le premier, en choisissant à l'aveuglette, tiré un jeton blanc, et que A choisira le premier, B ensuite, puis C, puis de nouveau A et, ainsi de suite, à tour de rôle. On demande le rapport de leurs chances " ?

Comme le remarquera Bernoulli, on peut interpréter l'énoncé avec des tirages avec ou sans remise, et une seule urne commune ou bien une urne personnelle par joueur (cette dernière distinction n'apporte pas de différence dans le cas de tirages avec remise). D'après sa correspondance avec Hudde, on peut penser que Huygens avait en tête des tirages répétés avec remise du jeton tiré dans l'urne.

14 Bernoulli donne, comme pour la proposition XIV, la méthode "algébrique" de Huygens, et une méthode "sans analyse" qui consiste à sommer une série géométrique.

15 SPINOZA Baruch, Calcul des chances, in Les écrits scientifiques de Spinoza, Cahiers Spinoza, 1985.

En suivant, par exemple, la méthode "algébrique" de Huygens, on trouve dans ce cas que les "chances" des trois joueurs sont respectivement proportionnelles à 9, 6 et 4[16].

Le troisième problème, dû à Fermat, aborde un contexte ludique différent, celui des cartes à jouer :

"A parie contre B, que de 40 cartes, dont dix de chaque couleur, il en tirera 4 de manière à en avoir une de chaque couleur. On trouve dans ce cas que la chance de A est à celle de B comme 1000 est à 8139. "

Le quatrième problème peut, comme le deuxième, être interprété de deux manières, suivant que les tirages se font avec ou sans remise :

"On prend comme plus haut 12 jetons dont 4 blancs et 8 noirs. A parie contre B que parmi 7 jetons qu'il en tirera à l'aveuglette, il se trouvera 3 blancs. On demande le rapport de la chance de A à celle de B."

Dans sa correspondance avec Hudde sur ce problème, Huygens précisera son énoncé en complétant la condition "3 blancs" par "et pas plus". Il donne alors la solution suivante pour le rapport des "chances" de A et B : comme 35 est à 64. Ce qui indique qu'il envisageait un tirage sans remise ou simultané[17].

Le dernier problème, enfin, présente la particularité d'aborder, pour la première fois les recherches sur la durée d'une partie, et la ruine éventuelle d'un joueur. Il avait été proposé par Pascal à Fermat, et Huygens en avait eu connaissance par Carcavi. En voici l'énoncé :

"Ayant pris chacun 12 jetons, A et B jouent avec 3 dés à cette condition qu'à chaque coup de 11 points, A doit donner un jeton à B, mais que B en doit donner 1 à A à chaque coup de 14 points, et que celui-là gagnera qui sera le premier en possession de tous les jetons. On trouve dans ce cas que la chance de A est à celle de B comme 2441406625 est à 282429536481. "

---

16 Bernoulli démontre que dans le cas où les tirages se font sans remise, dans une urne commune, le rapport est 77, 53, 35. Si les tirages se font sans remise, dans une urne personnelle par joueur, il trouve un rapport de 26851, 11270, 4754.

17 Dans le cas du tirage avec remise, le rapport est de 560 à 1627.

Il s'agit là d'un problème plus délicat. Huygens explicitera sa solution dans une réponse[18] à Dierkens en 1676. Le raisonnement de Huygens peut être modernisé ainsi : on décrit la situation à un moment du jeu par un couple (a,b), a et b représentant des points attribués à chaque joueur de la manière suivante. A chaque coup favorable, le joueur retire un point à son adversaire s'il en a, sinon il s'en marque un de plus. Les joueurs commencent à (0,0) et le gagnant est le premier à obtenir un total donné n (ici n = 12). On note c le nombre de chances qui font gagner A (ici c=15) et d le nombre de chances qui font gagner B (ici d=27). A partir de la situation (a,b), on a donc trois possibilités :

* ou bien A gagne (c chances) et on arrive à la situation (a,b-1), si b est différent de 0, ou à (a+1,b) si b = 0.
* ou bien B gagne (d chances) et on arrive à la situation (a-1,b), si a est différent de 0, ou à (b+1,a) si a = 0.
* ou bien personne ne gagne et on reste dans la même situation.

Dans le cas où il faut 2 points pour gagner, Huygens note x, y et z les espérances de gain du joueur A respectivement dans les cas suivants (0,0), (1,0) et (0,1). Par les règles, maintenant connues du lecteur, du calcul des chances, on a : $y = (c+dx)/(c+d)$, $z = cx/(c+d)$ et $x = (cy+dz)/(c+d)$ (on a supposé l'enjeu égal à 1). D'où l'on tire $x = c^2/(c^2+d^2)$. Les chances des deux joueurs sont donc dans le rapport de c^2 à d^2. Huygens passe ensuite au cas où il faut 4 points pour gagner. En utilisant le résultat précédent, on trouve[19] que les chances sont dans le rapport de c^4 à d^4. Par un calcul un peu plus compliqué, mais du même type, il trouve[20] aussi le résultat dans le cas où il faut 3 points pour gagner : c^3 à d^3. En combinant tous ces cas, on arrive évidemment à un rapport de c^{12} à d^{12}, dans le cas proposé où il faut 12 points pour gagner. Ce qui permet de trouver le résultat annoncé, dans le cas où c = 15 et d = 27.

---

18 Ce texte figure, en latin, dans les *Oeuvres complètes* de Huygens comme l'appendice VI au traité sur les jeux de hasard.

19 On a donc, en deux coups, c^2 cas qui font passer de (0,0) (avec une espérance notée x) à (2,0) (avec y comme espérance), et d^2 cas qui amènent (0,2) (espérance z). A partir de (2,0), toujours en deux coups, c^2 cas donnent (4,0) donc le gain, et d^2 cas donnent (0,0) donc x. De même pour (0,2). D'où : $y = (c^2+d^2x)/(c^2+d^2)$, $z = c^2x/(c^2+d^2)$ et enfin $x = (c^2y+d^2z)/(c^2+d^2)$. D'où l'on tire : $x = c^4/(c^4+d^4)$.

20 En un coup, à partir de (0,0) (espérance x), on c cas pour (1,0) (espérance y), et d cas pour (0,1) (espérance z). En deux coups, à partir de (1,0), on a c^2 cas qui donnent (3,0) (gain) et d^2 cas qui donnent (0,1) (z). De même, à partir de (0,1), c^2 cas pour (1,0) (y) et d^2 cas pour (0,3) (perte). D'où les équations suivantes : $y = (c^2+d^2z)/(c^2+d^2)$, $z = c^2y/(c^2+d^2)$, $x = (cy+dz)/(c+d)$. Finalement : $x = c^3/(c^3+d^3)$.

Huygens a évidemment l'idée inductive de la généralisation à p jetons : rapport c^p à d^p. Mais il n'en trouve pas de démonstration. Montmort traite le problème donné à l'aide de 22 équations linéaires. De Moivre a l'idée ingénieuse d'affecter une valeur aux jetons pour que le jeu devienne équitable, ce qui lui permet un calcul plus simple. Enfin, Struyck donne en 1716 une démonstration "moderne" en considérant la relation de récurrence portant sur la suite des espérances de gain du joueur possédant un nombre donné de jetons[21].

6. Croix ou pile.

Avant de conclure, il peut être utile d'étudier un autre exemple tiré de sa correspondance, où Huygens utilise plus explicitement le recours à l'infini. En effet, à propos des cinq derniers exercices comme sur d'autres problèmes, Huygens a continué à travailler dans le domaine des probabilités, mais sans publication officielle. Il s'agit de lettres échangées, souvent avec Hudde, ou bien avec son frère Louis.

Le problème suivant a été posé par Huygens à Hudde dans une lettre du 4 avril 1665. Après divers échanges, la solution de Huygens date de juillet 1665. Elle est reproduite dans les *Oeuvres Complètes* en appendice V au traité de Huygens. L'énoncé est le suivant :

"*A joue croix ou pile contre B ; les deux joueurs jettent tour à tour à condition que celui qui amène pile mettra chaque fois un ducat, mais qui jette croix prendra tout ce qui est mis ; et A jettera le premier, alors qu'on n'a encore rien mis. Et il est entendu que le jeu ne finira pas avant que quelque chose ait été mise, et enlevée.* "

[21] Cette démonstration peut être présentée ainsi : soit E_n l'espérance de gain du joueur quand il possède n jetons. S'il possède p jetons, au début du jeu, on a : $E_0 = 0$, $E_{2p} = 1$, et on cherche E_p. On trouve, comme Huygens que : $(c+d).E_n = c.E_{n+1} + d.E_{n-1}$, avec les mêmes notations que dans les notes précédentes. La suite des E_n est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique : $c.r^2 - (c+d).r + d = 0$, admet comme racines r = 1 et r = d/c, racines distinctes si c est différent de d. On a alors : $E_n = u + v.(d/c)^n$. u et v sont calculés à partir des conditions : $E_0 = 0$, $E_{2p} = 1$ d'où $u = c^{2p}/(c^{2p}-d^{2p})$ et v = -u. Finalement, l'espérance cherchée, $E_p = c^p/(c^p+d^p)$. Ce qui permet de conclure.

La difficulté vient ici du fait que, d'une part, le jeu ne peut s'arrêter que si la mise est différente de 0, autrement dit il faut que quelqu'un ait perdu avant de pouvoir gagner. D'autre part, le gain du gagnant dépend du nombre de parties perdues auparavant. Il s'agit donc ici d'un "vrai" calcul d'espérance, et non de l'évaluation de la probabilité de gain d'un enjeu fixe au cours de la partie. Huygens note a l'espérance de perte du joueur qui doit jeter la pièce alors que l'enjeu est encore nul - on peut penser, en effet, que l'espérance de gain du premier joueur est négative. On note (p,q) la situation : le premier joueur a mis p, et le second a mis q - c'est-à-dire le premier a perdu p fois, et le second q fois. -a est donc l'espérance dans le cas (0,0). De même, Huygens note respectivement b, c, d, e, f, g, h, i, k les espérances du premier joueur dans les situations (0,1), (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,5). Par symétrie du jeu, on a ainsi les espérances de l'autre joueur au même moment, ou dans les cas (p,q) avec p > q. Par exemple, l'espérance du premier joueur en (1,0) est -b. A partir de (0,0), on a 1 chance de rester à (0,0) et 1 chance d'avoir (1,0). Donc -a = (a-b)/2. De même : b = (1-c)/2, c = (1-d)/2, d = (2-e)/2, e = (2-f)/2, f = (3-g)/2, g = (3-h)/2, h = (4-i)/2, i = (4-k)/2. En combinant toutes ces équations, on a :

$$-a = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{2}{16} + \frac{2}{32} - \frac{3}{64} + \frac{3}{128} - \frac{4}{256} + \frac{4}{512} - \frac{k}{512}.$$

Huygens signale ici que la dernière quantité de cette somme (k/512) tend vers zéro, car on a successivement b < 1, d < 2, f < 3, k < 5, mais que les dénominateurs sont respectivement 2, 4, 8, 16, etc... En effet, Huygens veut montrer qu'il faut continuer la somme jusqu'à l'infini, et qu'on a donc :

$$-a = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{2}{16} + \frac{2}{32} - \frac{3}{64} + \frac{3}{128} - \frac{4}{256} + \frac{4}{512} - \frac{5}{1024} \text{ etc...}$$

Huygens sépare ensuite cette somme infinie en deux sommes suivant le signe des termes. D'abord la somme des termes affectés d'un signe positif est la moitié de la somme des termes affectés d'un signe négatif. Ensuite il présente cette dernière somme sous la forme :

$$\begin{array}{r} 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024 + \dots \\ 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024 + \dots \\ 1/64 + 1/256 + 1/1024 + \dots \\ 1/256 + 1/1024 + \dots \\ 1/1024 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Les lignes sont des sommes de séries géométriques de raison 1/4, et sont respectivement égales à (1/4).(4/3), (1/16).(4/3), (1/64).(4/3), etc... La somme de toutes ces lignes vaut donc (1/4 + 1/16 + 1/64 + ...).(4/3) c'est-à-dire 4/9, pour les mêmes raisons. Finalement, on a :
-a = a/2 - 4/9 + (1/2).(4/9), d'où a = 4/27. *"Il s'ensuit que A, qui jette le premier, perd 4/27 d'un ducat. "*

Aux débuts du calcul des probabilités, l'apparition de l'infini paraît donc très discrète dans ces premières études d'espaces probabilisés infinis. Le fait que les jeux puissent se perpétuer un nombre infini de fois, ne paraît pas poser de réels problèmes, même si les objections sur la fiction de telles suppositions peuvent ressembler aux argumentations contemporaines contre les fictions infinitésimales. L'infini, chez Huygens, n'apparaît réellement que dans les calculs de sommation de sommes géométriques, ou dérivées. C'est dans cette voie que vont s'engager les successeurs de Huygens au début du 18ème siècle entraînés par le calcul infinitésimal vers la loi des grands nombres. On connaît par ailleurs l'importance des sommations dans le renouveau de l'analyse, un siècle plus tard.

Par ailleurs, on peut noter que le concept opératoire d'espérance, que Huygens a défini et explicité, va se trouver confronté à une application délicate : celle des calculs de durées de vie, où Huygens sera amené à faire la différence entre espérance-moyenne et médiane-valeur d'égale probabilité[22].

Nous conclurons, comme nous avons commencé, avec Leibniz, qui avait bien compris l'importance du nouveau calcul. La confiance dans ses méthodes et ses résultats, à peine ébauchés, est telle qu'il convoque la théorie du hasard, au secours de l'algèbre défaillante, pour régler le cas de la série divergente 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... Les sommes partielles avec un nombre pair de termes valent 0, et celles qui ont un nombre impair de termes valent 1. D'après Leibniz, cette série doit, en toute justice, valoir 1/2, puisque *"les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent (0+1)/2 = 1/2"* [23].

---

22 Cf. notre article *L'espérance du Hollandais*, SCHOLIES n°16, 1993 et MEUSNIER Norbert, *Un modèle mathématique de calcul de la valeur des événements incertains*, Actes du colloque inter-IREM, Les mathématiques dans la culture d'une époque, Strasbourg 1987.

23 G.W. LEIBNIZ, *Epistola ad V. Cl. Christianum Wolfium*, professorem matheseos halensem, circa scientiam infiniti, Acta eruditorum 1713, traduction française, Lettre au célèbre Christian Wolff, Professeur de mathématiques à Halle, sur la science de l'infini, in Naissance du calcul différentiel, trad. M. Parmentier, Vrin, 1989.

BIBLIOGRAPHIE

COUMET Ernest, *La théorie du hasard est-elle née par hasard ?*, Annales ESC, mai-juin 1970.

COUMET Ernest, *Sur "Le calcul ès jeux de hasard" de Huygens : dialogues avec les mathématiciens français (1655-1657)*, in Huygens et la France, Vrin, 1981.

DASTON Lorraine, *L'interprétation classique du calcul des probabilités*, Annales ESC, mai-juin 1989.

DAVID F.N., *Games, gods and gambling*, Londres, 1962.

FREUDENTHAL Hans, *Huygens'foudations of probability*, Historia mathematica, 7, 1980.

HUYGENS Christian, *Oeuvres Complètes Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences*, La Haye, Martinus Nijhoff, 1888-1950, principalement tomes IV et XIV.

PASCAL Blaise, *Oeuvres complètes*, L'Intégrale, Seuil.

*****

Adresse des auteurs

BKOUCHE Rudolf
UFR de Mathématiques Pures et Appliquées
Université des Sciences et Technologie
59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX

BLAY Michel
Directeur de Recherche au CNRS
Laboratoire d'Histoire des Sciences et des Techniques
27 rue Damesme
75013 PARIS

CHEVALIER Anne
15 rue de l'Eau Vive
B 1420 BRAINE L'ALLEUD

DAUMAS Denis
Lycée Climatique
65400 ARGELES GAZOST

DELATTRE Joëlle
Centre IUFM de Villeneuve d'Ascq
365 rue J. Guesde
59650 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

DELEDICQ André
IREM de l'Université de Paris VII
2 Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05

DHOMBRES Jean
Faculté des Sciences et Techniques
2 rue de la Houssinière
44072 NANTES CEDEX 03

DURAND-RICHARD Marie-José
Collège Paul Gauguin
35 rue Milton
75009 PARIS

FERREOL Gilles
Institut de Sociologie
Faculté des Sciences Economiques et Sociales
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

FRIEDELMEYER Jean-Pierre
IREM de Strasbourg
10 rue Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM)
2 Chemin du cyclotron
B 1348 Louvain la Neuve

Groupe M:A.T.H.
IREM de l'Université de Paris VII
2 Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05

GUILLEMOT Marianne
2 rue du Val de Grâce
75005 PARIS

LANGLET Vincent
Faculté des lettres et Sciences Sociales
Victor Ségalen
20 rue Duquesne - BP 814
29285 BREST CEDEX

LANIER Denis
IREM de Basse Normandie
IUT, Boulevard du Maréchal Juin
14000 CAEN

LEVARD Michel
Collège D. Huet
14200 HEROUVILLE SAINT CLAIR

LEVY Tony
CNRS 1085
27 rue Damesme
75013 PARIS

LOMBARD Philippe
IREM de Lorraine
Université de Nancy I
Faculté des Sciences - BP 239
54506 VANDOEUVRE les NANCY CEDEX

LOMBARDI Henri
Labo de Math.
URA CNRS 741
UFR Sciences et Techniques
Université Franche Comté
25030 BESANCON CEDEX

PARISOT François
Lycée du Léon
BP 150
29406 LANDIVISIAU CEDEX

PERRIN Patrik
Lycée Clémenceau
46 Avenue G. Clémenceau
51100 REIMS

RODRIGUEZ Ruben
Collège Jean Castel
14370 ARGENCES

SCHUBRING Gert
Institut für Didaktik der Mathematik,
Universität Biedefeld
Postfach 100131
D 33501 BIEDEFELD

SEIDENGART Jean
Université de Paris X-Nanterre
15 Avenue Général De Gaulle
78230 LE PECQ

ZERNER Martin
Equipe REHSEIS
27 rue Damesme
75013 PARIS

IREM
UFR Sciences et Technique
6 Avenue V. le Gorgeu
BP 809 - 29285 BREST cedex

9ème COLLOQUE INTER-I.R.E.M.
EPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE
DES MATHEMATIQUES

LANDERNEAU
22 et 23 mai 1992

HISTOIRE D'INFINIS

PROGRAMME

Vendredi 22 Mai

8 h 30	Accueil des participants
9 h 30	Ouverture du Colloque
10 h - 11 h	Conférence : *Tony LEVY* : "L'idée d'infini : quelle histoire ..."
11 h - 12 h	Conférence : *Jean-Pierre FRIEDELMEYER* : "Eclairages historiques pour l'enseignement de l'analyse"

14h30 - 16h30 Ateliers en parallèle :

A1 *Denis DAUMAS* : "Une approche de l'irrationalité : algorithme d'Euclide et fractions continues"

A2 *Joëlle DELATTRE* : "Géométrie, Astronomie et Infini dans l'Antiquité"

A3 *Marie-Josée DURAND-RICHARD* : "Comment les *Eléments* d'Euclide traitent du continu sans recourir à l'infini"

A4 *Thérèse GILBERT, Benoît JADIN* : "Faire une droite avec des points?"

A5 *Marianne GUILLEMOT* : "La calculatrice et l'infini"

A6 *M : A.T.H.* : " Séries infinies et quadratures chez Leibniz"

A7 *Claude MERKER* : "Pascal, l'infini, les mathématiques et l'apologétique".

A8 *Patrick PERRIN* : " Le calcul des tangentes en classe de 1ère et terminale".

16h30 - 17h00 Pause

17h00 - 18h00 Exposés en parallèle :

E1 *Henri LOMBARDI* : "Difficultés d'interprétation de l'infini actuel ou De la difficulté d'être omniscient"

E2 *Françoise MONNOYEUR* : "Infini des mathématiciens, infini des Philosophes

E3 *Rudolf BKOUCHE* : "Le point de vue projectif ou la fin de l'infini"

E4 *André DELEDICQ* : "(Re) lectures infinitésimales"

E5 *Martin ZERNER* : L"enseignement du calcul infinitésimal dans la France du 19ème siècle.

18h15 - 19h45 Exposés en parallèle :

E6 *Sion ELBAZ* : "L'indécidabilité de l'infini"

E7 *Gilles FERREOL* : "Statut du nombre et définition de l'infini"

E8 *Vincent LANGLET et Francois PARISOT*: "L'évolution du concept d'objet fractal"

E9 *Philippe LOMBARD* : "La notion de point de fuite comme obstacle épistémologique"

E10 *Gert SCHUBRING* : "Evolution du concept d'infiniment petit aux 18ème et 19ème siècles"

Samedi 23 Mai

8h30 - 9h30 Conférence :

Jean DHOMBRES : "Une algébrisation de l'infini : les progressions géométriques"

9h30 - 10h30 Conférence

Jean SEIDENGART : "La philosophie de l'infini dans l'oeuvre de Giordano Bruno"

10h30 - 11h Pause

11h - 12h Conférence :

Michel BLAY : "Le fondement du calcul différentiel dans les *Elemens de la géométrie de l'infini* (1727) de Fontenelle"

14h - 16h Ateliers en parallèle :

A9 *Jacques BOROWCZYK* : "Développements infinis d'irrationnels"

A10 *Anne BOYE* : "Des indivisibles aux infiniments petits"

A11 *Anne CHEVALIER* : "Les quadratures chez John Wallis"

A12 *Maryvonne HALLEZ et Annie HUPE* : "Cantor : la notion de nombre et son *principe absolument infini d'extension nécessaire*"

A13 *Denis LANIER* : "Huygens, l'espérance et l'infini"

A14 *Michel LEVARD* : " Le volume de la pyramide, sans recours à l'infini, d'après Eudoxe de Cnide"

A15 *M : A.T.H.* : "Les infiniment petits au 17ème siècle : sont-ils actuels, fictifs ou inacceptables?"

A16 *Ruben RODRIGUEZ* : Les élèves de collège doivent-ils ignorer les algorithmes de calcul ou de construction où un nombre fini d'étapes ne suffit pas pour trouver le résultat ?

16h - 17h Réunion de la Commission Inter IREM "Epistémologie et Histoire des Mathématiques"

Présentation de l'ouvrage

La question de l'infini intervient dans l'histoire des mathématiques comme un élément à la fois perturbateur et moteur. Au cours d'une longue histoire, les mathématiciens rencontrent l'infini, essayant de l'éviter ou osant l'affronter. Depuis les géomètres grecs qui ne veulent pas faire usage de l'infini dans leurs démonstrations, jusqu'aux mathématiciens qui considéreront, comme H. Weyl, que « les mathématiques sont la science de l'infini », la lutte pour saisir l'infini est longue et passionnante. Les difficultés et les obstacles sont souvent mal repérés dans nos classes de collèges et de lycées, mais la question de l'infini rarement explicitée est parfois là, tapie dans nos salles de cours.

Les Actes du 9ème colloque inter-IREM « Epistémologie et Histoire des Mathématiques » proposent quelques moments de l'histoire de l'infini, ou plutôt des infinis, tant il faudra de temps pour appréhender toutes les facettes du monstre que l'on croit enfin maîtrisé. Nombre, continu, grandeur, dérivée ou intégrale, algorithme, géométrie perspective ou géométrie du hasard : comment éviter de penser l'infini ? comment ne pas vouloir l'éclairer ? Tous les articles de ces Actes sont autant d'invitations à une réflexion sur l'infini, réflexion nécessaire à celui qui enseigne les mathématiques.

L'auteur

La Commission inter-IREM **« Epistémologie et Histoire des Mathématiques »** est composée de professeurs de collège, de lycée, d'universitaires enseignant les mathématiques, la philosophie, les sciences physiques et l'histoire, et de chercheurs en histoire des sciences. Elle organise, à l'échelon national et international, des colloques et des universités d'été interdisciplinaires sur l'histoire des mathématiques, et elle a publié de nombreux ouvrages consacrés à l'histoire et à l'enseignement des mathématiques.

ISBN : 2-908887-32-0

Mise en page intérieure : IREM BREST
Maquette couverture : SUR UBO
Imprimerie : BUREAU 2000 - Plougastel - Tél. 98 40 26 94