

-----  
**Etude de notions mathématiques**  
**à partir d'une approche**  
**historique et philosophique**  
 -----

Jacqueline GUICHARD (IREM POITIERS)  
 Jean-Pierre SICRE (IREM POITIERS)

**Contenu de l'atelier:**

- Présentation d'un travail interdisciplinaire mathématiques - philosophie sur l'infini en TA2 et en TD.
- Etude d'une séquence pédagogique, avec des textes utilisés par les élèves.

**Déroulement :**

- **Première partie :** Présentation générale du travail interdisciplinaire

A l'origine de ce travail, plusieurs désirs: décloisonner les disciplines, mettre en relation différents champs du savoir, renouveler chez les élèves comme chez leurs enseignants l'intérêt pour la réflexion et la recherche.

De façon plus immédiate, des objectifs plus concrets nous guidaient: en TA2, la constitution d'un dossier en vue de l'épreuve orale de mathématiques et en Terminale D, la préparation de "la question au choix", au programme du second groupe d'épreuves de philosophie.

La réflexion sur l'infini a été choisie car ce concept est riche d'une double histoire philosophique et mathématique, dans sa constitution, ses développements et ses problèmes.

Les objectifs du professeur de mathématiques ont été plus précisément d'introduire des éléments d'histoire des mathématiques, d'ouvrir sur la relation mathématiques-philosophie, de faire réfléchir les élèves sur ce qui n'est souvent pour eux qu'un symbole ( $\infty$ ), de les aider dans leur compréhension des limites, et en Terminale D, d'introduire aux leçons sur le calcul intégral.

Le professeur de philosophie a plus particulièrement insisté sur l'histoire de la philosophie et de la raison, les liens mathématiques-philosophie et bien sur, l'épistémologie des mathématiques: le concept de nombre en TA2, la crise des irrationnels (TA2, Term D) ont été particulièrement soulignés. En outre, le problème de l'infini avait été rencontré à diverses occasions (Descartes, 3<sup>ème</sup> Méditation métaphysique, la preuve ontologique de St Anselme de Canterbury en TA, le problème du temps à propos d'un texte de Bergson (la perception du changement) en TA2 et Term D).

On trouvera en annexe 1, le plan de travail.

- **Deuxième partie :**

Le travail avec les élèves a été introduit par un questionnaire. Celui-ci a été proposé dans l'ensemble de l'académie et à divers niveaux (de la sixième à la terminale). Le questionnaire et quelques résultats se trouvent en annexe 2.

Nous avons proposé aux participants de l'atelier un travail de groupe avec les consignes suivantes :

- a) Quel intérêt y a -t-il à proposer un questionnaire de ce genre aux élèves ?
- b) Quelles informations peut-on retirer des résultats quant aux représentations des élèves, quant aux activités à mettre en place ?

### - Troisième partie :

Les supports de cette partie ont été deux textes extraits de Mathématiques au fil des âges (Gauthier-Villars) : "les objections de Galilée " tiré de *Discours concernant deux sciences nouvelles* et "Cantor : puissance d'un ensemble " tiré de *Contribution à l'étude des multiplicités*. Le travail de groupe était guidé par la question : Quelles consignes de lecture donneriez-vous aux élèves ?

Cette activité nous a permis de réfléchir entre autre à l'utilisation d'un texte en classe et aux consignes de lecture à proposer aux élèves .

### - Quatrième partie :

Nous avons présenté certains dossiers élèves de terminale A2. Nous avons pu ainsi donner certains éléments d'évaluation de ce type de travail et échanger sur des activités élèves plus brèves, plus partielles qui porteraient sur le même thème.

On pourra trouver une analyse plus détaillée de ce travail interdisciplinaire dans la brochure : "Limites et infini au lycée" publiée par l'IREM de Poitiers en Mai 1993.

## ANNEXE 1 :

### PLAN de TRAVAIL

#### Première période : Le paradoxe de Zénon

I - Retour au questionnaire, discussion avec les élèves autour de leurs réponses à la première question.

II - Ce que dit le paradoxe  
(rapprochement avec l'argument de la dichotomie)

III - Les réfutations de Zénon:

- a) Les réfutations naïves : liées à la vitesse.
- b) Les réfutations savantes : elles sont liées à la nature du continu .Travail sur Aristote et ses mises au point.

IV - Les adversaires de Zénon:

- a) Pythagore.
- b) La crise des irrationnels.

V - Conclusion:

Réflexions sur la continuité et sur la crise dans l'histoire des mathématiques.

#### Deuxième période:

#### A - Développements classiques (XVII ème)

I - Introduction historique :

- a) Rappel du travail effectué.  
Aristote et la méthode d'exhaustion d'Archimède.
- b) Les transformations théologiques et métaphysiques de l'infini.  
Discussion des réponses à la question 3 du questionnaire.
- c) La naissance de la physique(mouvement, vitesse, courbes....)

II - La fécondité, deux exemples :

- a) Les infiniment petits de Cavalieri : exemple de la cycloïde (roulette de Pascal).

b) L'invention du calcul infinitésimal de Leibniz, le triangle caractéristique, les différentielles et le lien avec la tangente.

### III - La rigueur :

- a) Les objections faites à Cavalieri, les réponses et les mises au point de Galilée (le tout et la partie), discussion des réponses à la question 3 du questionnaire.
- b) Les objections et les critiques faites à Leibniz, les objections de Berkeley, les enjeux, les réponses de Leibniz et les conclusions à ce débat.
- c) Les "solutions" du XIX<sup>ème</sup> à ces problèmes furent abordées très rapidement : le concept de limite (Cauchy, Weierstrass).

## B - Développements de l'époque contemporaine (XIX<sup>ème</sup> - XX<sup>ème</sup>)

### I - La théorie des ensembles de Cantor :

- a) Les nombres transfinitis.
- b) Les appuis métaphysiques.

### II - Présentation rapide de l'analyse non standard.

Discussion des questions 8 et 9.

## ANNEXE 2 :

### LE QUESTIONNAIRE

Les réponses devront être justifiées et si possible commentées

- 1 Achille fait une course avec la tortue.  
Achille est le plus rapide, il laisse donc à la tortue 10 mètres d'avance. Rattrapera-t-il la tortue?  
**Non**: quand Achille arrive au point de départ de la tortue, la tortue a parcouru 1m. Quand Achille a parcouru ce mètre, la tortue, elle, a avancé de 10 centimètres. La tortue sera donc toujours en avance sur Achille.  
Vos commentaires
- 2 A quel moment et à quel sujet l'expérience (ou l'idée) de quelque chose lié à l'infini vous a posé problème?
- 3 Quand en avez vous entendu parler pour la première fois en mathématiques?  
Sur quel point précis cette notion vous pose t-elle le plus de difficultés(en maths)?
- 4 Que signifie infini? Trouvez des synonymes.
- 5 La notion d'infini a-t-elle le même sens dans les disciplines? (mathématiques, philosophie, physique, dessin....)
- 6 Y-a-t-il autant de nombres entiers que de nombres pairs?
- 7 "*Le tout est plus grand que la partie*" (axiome d'Euclide)  
-Que veut dire cette expression?  
-La trouvez vous justifiée?
- 8 L'infini est-il un nombre?
- 9 Existe-t-il des nombres infinis?Citez éventuellement des exemples.
- 10 Que devient une quantité qui grandit sans arrêt?

11 Une quantité positive qui diminue sans arrêt devient-elle aussi proche de 0 que l'on veut?

### LES RESULTATS (extraits)

question 1 Achille fait une course.....

	2nde	1A1	1S	TC	TD	TA1	TA2-3
accepte le raisonnement	50%	43%	22%	5%	22%	24%	34%
accepte le raisonnement mais en refuse la portée pratique	20%	17%	19%	45%	30%	12%	14%
refuse le raisonnement	25%	22%	26%	50%	22%	52%	27%

Les arguments avancés pour refuser le raisonnement sont généralement: "cela dépend de la distance" ou "Il faut tenir compte de la vitesse" ou "Achille court plus vite".

question 2 A quel moment et à quel sujet l'expérience de quelque chose lié à l'infini vous a posé problème

	2nde	1A1	1S	TC	TD	TA1	TA2-3
univers	30%	20%	19%	58%	26%	25%	25%
limite	0%	12%	11%	10%	22%	21%	14%
suite des entiers	16%	5%	0%	0%	14%	9%	0%

Les autres réponses trouvées sont: notion inimaginable, indéfinissable.

question 6 Y-a-t-il autant de nombres entiers que de nombres pairs?

	2nde	1A1	1S	TC	TD	TA1	TA2-3
oui	20%	32%	50%	23%	12%	15%	25%
non	60%	56%	30%	76%	64%	71%	52%

question 9 Existe-t-il des nombres infinis?

	2nde	1A1	1S	TC	TD	TA1	TA2-3
oui	65%	44%	45%	58%	34%	46%	29%
non	35%	44%	44%	32%	42%	36%	47%

Parmi les nombres "infinis" cités on trouve des rationnels, des irrationnels et des grands nombres.

question 11 Une quantité positive qui diminue sans arrêt devient-elle aussi proche de 0 que l'on veut?

	2nde	1A1	1S	TC	TD	TA1	TA2-3
oui	55%	53%	60%	42%	60%	79%	56%
non	30%	22%	22%	28%	23%	9%	0%