Legendre approxime π en classe de seconde ?

Frédéric MÉTIN
IREM de Dijon

Ce travail est né d'un défi : quel texte historique pouvait donner une approche différente de la notion d'approximations successives d'un nombre réel ? En quoi son utilisation pouvait-elle améliorer la compréhension des élèves ?

A l'instar du groupe M:ATH (Mathématiques: Approche par des Textes Historiques) de l'IREM de Paris VII[1], dont une des activités nous a donné l'idée de la nôtre, la lecture de la *Géométrie* de Legendre nous a révélé l'existence de très jolis textes, bien construits, mêlant géométrie et algèbre en vue de fonder sur des méthodes anciennes (du type de celles d'Euclide) et une approche purement géométrique le calcul le plus rapide d'un certain nombre de décimales de π ou de $\sqrt{2}$. Nous tenions là l'occasion de proposer une activité "culturelle"[2] donnant un fondement géométrique à une approche algorithmique. Le problème était d'en tirer la "substantifique moelle", d'expliquer certains passages difficiles sans trop alourdir le travail, de susciter l'expression des élèves sur leur vision des nombres et des approximations par des moyens détournés, et enfin de recueillir leurs impressions sur leur premier contact avec l'histoire des mathématiques sans induire de réponse juste ; il va de soi que le lecteur pourra critiquer dans cette dernière intention la recherche d'une justification de la part de l'auteur : l'évaluation d'une activité et de sa pertinence, si elle ne peut être totalement laissée aux élèves, doit néanmoins faire une place au plaisir ou au déplaisir qu'ils éprouvent, aux sentiments divers qu'elle pourrait avoir fait surgir en eux.

L'activité

Au livre IV des *Éléments de Géométrie* (une des premières éditions, non remaniée par Blanchet[3], Paris, vers 1800), Legendre s'intéresse aux polygones

[1] Deux brochures M:ATH publiées à ce jour décrivent des activités données en classe sur la base de textes anciens, qui vont d'Euclide, Archimède à Legendre, en passant par Descartes et de nombreux autres auteurs.

[2] Petit clin d'œil aux détracteurs de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe ou en stage.

[3] L'ouvrage a eu de multiples éditions (18 en France), donc un franc succès ; il est d'ailleurs souvent disponible, et à bas prix, chez les bouquinistes. Il a été remanié au 19e siècle par un certain

réguliers et à la mesure du cercle ; à la proposition XIII, il présente et démontre un algorithme permettant de passer de la longueur des côtés de deux polygones semblables inscrit et circonscrit au cercle à celle des deux polygones qui ont un nombre double de côtés. La proposition XIV met en œuvre l'algorithme en vue de l'obtention d'une approximation suffisante de π.

La lecture du texte a été faite en classe, de manière relativement rapide, puis les élèves ont du retravailler à la maison les extraits que j'avais choisis, en répondant à quelques questions d'ordre mathématique ou plus personnel *(voir texte du devoir en annexe)*. Un rappel du principe d'encadrement du cercle par des polygones est donné en début de devoir , ainsi que le résultat d'Archimède et me permet de poser la question (sournoise...) "l'encadrement est-il bon ?" : les réponses à cette question me permettront de revenir en classe sur la notion d'approximation et d'encadrement ; la dernière question et la fin du texte de Legendre occasionneront un travail plus général sur les nombres réels et leurs approximations décimales.

Voici quelques extraits des réponses des élèves aux questions non techniques ou non strictement mathématiques. Comme de bien entendu, elles apportent de précieux renseignements sur leurs conceptions.

Réactions d'élèves

1) <u>L'encadrement donné par Archimède est-il bon</u> ?

La question est volontairement ambiguë. Le fait de n'avoir pas séparé la question de l'encadrement et celle du "bon" permet de constater la diversité des préoccupations, sans toutefois mettre les élèves en échec ; il est important de dédramatiser alors la correction, en acceptant toutes les réponses comme bonnes tout en montrant la nécessité d'aller plus loin. On remarque différents degrés pour les réponses

a) L'encadrement est effectivement un encadrement, parce qu'il encadre :

3,1408451<3,1415927<3,1428571
Oui, c'est un bon encadrement car 3,141 se trouve bien entre 3,140 et 3,142

ou encore

Oui, c'est un bon encadrement car $\pi \approx 3{,}14159...$ *et* $3 + \frac{10}{71} \approx 3{,}14084...$ / $3 + \frac{1}{7} \approx 3{,}14285...$

Et 3,14159 est plus grand que 3,14084 et plus petit que 3,14285

Blanchet, ancien élève de Legendre, mais cette révision a dénaturé l'ouvrage, lui ôtant nombre de corollaires analytiques ou algorithmiques. L'exemplaire dont est extrait le texte n'a plus de page de garde, mais il est conforme à la première édition de 1794.

b) On voit même un élève se préoccuper de la position centrale de π entre les deux bornes d'encadrement, c'est assez original :

Sachant que π est égale à 3,141592654 si on fait la moyenne de $3+\frac{10}{71}$ et $3+\frac{1}{7}$ ça nous donnera alors 3,141851107.
On peut donc en conclure que ses encadrements sont relativement bien choisis.

c) Pour une majorité d'élèves, la qualité de l'encadrement dépend de son amplitude :

L'encadrement est bon car le minimum et le maximum sont des valeurs proches.

Plus précisément,

$$\left.\begin{array}{r} 3+\frac{10}{71}=3,14084507 \\ \pi=3,141592654 \\ \frac{22}{7}=3,142857143 \end{array}\right\}$$ *l'écart est de* $7,475836\times10^{-4}$ *ou de* $1,2644892\times10^{-3}$

On constate donc que les écarts sont très faibles et que les chiffres ont deux décimales exactes après la virgule. Donc c'est un bon encadrement car on ne peut certainement trouver mieux!

d) Certains vont même plus loin et déclarent avec subtilité que :

C'est un encadrement moyen car il ne donne pas de résultats précis mais il peut nous suffire.

<u>Cet encadrement est bon</u>, les centièmes sont identiques ; c'est à partir des millièmes que les nombres changent. <u>Tout dépend de l'utilité</u>.

e) Enfin, cette réponse, peut-être la plus pertinente, peut-être à côté de la question :

Mis à part que le minimum soit présenté sous forme de somme et le maximum sous forme de quotient, nous pouvons dire que l'encadrement est bon mais pas unique car à chaque changement du nombre de côtés du polygone, son encadrement change ainsi que l'écart se situant entre le minimum et le maximum.

Le côté algorithmique, voire dynamique, a tout à fait été perçu par cette élève, mais son objection ne signifie-t-elle pas une certaine gêne par rapport au caractère non définitif de l'encadrement, à son côté heuristique ?

2) <u>Qu'y aurait-il de gênant, pour nous, dans ces notations</u> ?

Les élèves sont souvent déroutés par l'apparente désinvolture des auteurs anciens, qui ne "respectent pas" les notations consacrées : *Legendre désigne A et B comme des surfaces alors que ce sont des points. De plus il ne met pas de crochet au segment.* Déroutante innocence, prégnance des modèles enseignés... Mais certains élèves dépassent la stricte conformité aux habitudes pour montrer en quoi les notations choisies rendent la lecture délicate :

> *Ce qui est gênant pour nous, dans cette notation c'est que Legendre nomme les surface des polygones par A et B qui désignent également des sommets dans la figure. On a donc tendance à confondre. De plus les surfaces des polygones ayant le double de côtés sont désignés par A' et B'. Les notations rendent le texte peu clair et difficile à suivre.*

Justement ! Il faudra donc chercher le sens des lettres, tout en lisant le texte ; c'est que Legendre nous force (deux siècles plus tard) à lire en allant au-delà des simples mots, à la recherche du sens par une lecture obligatoirement plus attentive, ce que résume parfaitement le point de vue suivant :

> *D'une part, ces lettres représentent des aires inconnues pour nous puisque l'on ne connaît pas le nombre de côtés des polygones. Ces notations servent donc pour des choses à imaginer nous-mêmes.*
>
> *D'autre part A, B désignent des aires comme ils désignent d'ailleurs aussi des points sur le dessin. Ainsi, lorsque ces lettres seront mentionnées, il faudra en premier lieu chercher à savoir ce qu'elles représentent dans ce cas précis afin de ne pas commettre d'erreur, ni de faire des confusions.*

Cela ne rappelle-t-il pas les recommandations de Blaise Pascal au sujet des définitions ? Il reste qu'on peut s'étonner de voir un élève gêné par l'utilisation de lettres pour "des choses à imaginer nous-mêmes" après quelques années d'apprentissage de l'algèbre !

Pourquoi Legendre se permet-il d'écrire "égal" ?

Un point crucial du devoir et de la lecture moderne du texte dans l'optique choisie du travail sur les nombres réels et leurs approximations décimales. Les élèves n'ont en général pas saisi l'allusion à un sens affaibli du mot "égal", même s'ils sentent bien que les valeurs sont de plus en plus précises et que leur différence devient hors d'atteinte ; aucun n'a soulevé la mésutilisation du mot, et leurs réflexions laissent voir une vision dynamique des approximations successives : c'est cette vision d'"encerclement" du cercle par des polygones qui me semble fondamentale pour <u>imaginer</u> l'approximation.

Il se permet d'écrire "égal" car si les aires des deux polygones inscrit et circonscrit sont égales alors l'aire du cercle sera aussi égale car le cercle est compris entre les deux polygones.

Legendre se permet d'écrire "égal" car ce dernier pense qu'à peu de choses près les deux résultats sont les mêmes. Il faudrait certainement beaucoup trop de temps pour les trouver égaux, il décide donc de les déclarer comme égaux.

Legendre écrit "égal" car comme le cercle doit être entre le polygone inscrit et celui circonscrit et que ces deux derniers ont alors la même valeur, le cercle ne peut avoir d'autre valeur, elle est donc la même que celle des deux polygones.
Les deux polygones sont égaux, dit-il, car leurs valeurs sont semblables jusqu'à la 7e décimale ce qui est déjà beaucoup pour cette époque sans calculatrices.

Legendre se permet d'écrire "égal" car sa liste, qui ne contient que 7 décimales, est saturée, c'est-à-dire qu'au bout de ses calculs, il obtient le même nombre pour le polygone inscrit et pour le polygone circonscrit. Il dit aussi que "arrivé à ce point" on conclura que le cercle est égal au dernier résultat car le cercle doit toujours être compris entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit.

On peut trouver particulièrement intéressants les termes de "liste saturée" et de "décision" de la part de l'auteur : on déclare des choses égales quand la précision voulue est atteinte, il y a donc une différence entre égalité et identité.

Qu'en pensez-vous ?

C'est le genre de question que l'on ne pose pas souvent, à laquelle on ne répond pas souvent non plus, d'ailleurs ! Comme il s'agit de pensées assez personnelles de mes élèves, elles ne nécessitent pas de commentaire de ma part ; on pourra constater que tous n'étaient pas très enthousiastes, même si certains l'ont dit avec gentillesse, peut-être pour me faire plaisir... Certains extraits sont particulièrement savoureux, je laisse au lecteur le soin de les interpréter.

Adrien-Marie Legendre, dû à son temps, utilise un langage soutenu et des expressions inconnues du 20e siècle. Ceci oblige le lecteur à lire le texte plusieurs fois et se concentrer deux fois plus.

Malgré cela, il utilise une véritable logique qui pour nous est difficile à comprendre car nous n'avons pas des bases comme celles-ci. Mais il faut comprendre ce qu'il dit, ces notations, la *logique pour savoir ce qu'est réellement la géométrie qui nous a permis tant de progrès jusqu'à notre époque.*

Cette étude fut intéressante mais un peu rébarbative. Toutefois je pense qu'il faut toucher à tout et que ce fut une expérience comme une autre.

[...] les polynômes auxquels son nom reste attaché. La théorie des nombres lui est redevable de la célèbre loi de réciprocité des restes quadratique. Mais son travail essentiel porte sur la théorie des transcendances elliptiques. Je trouve ce travail de recherche sur le pourquoi de π très intéressant et très instructif. J'aime comprendre le pourquoi aux choses de la vie que ce soit au niveau des mathématiques ou des autres matières.

Du fait qu'Adrien-Marie Legendre ne soit pas de notre époque, on ne peut généralement que trouver complexe sa géométrie. Elle n'utilise ni les mêmes méthodes (comme par exemple les proportions) ni la même orthographe, ce qui par conséquent oblige le lecteur à lire plusieurs fois son problème. Les 17e et 18e siècles sont des ères de progrès dans le domaine scientifique grâce à de très grands mathématiciens comme Descartes, Blaise Pascal, Pierre de Fermat ; et Legendre fait partie de ces grands scientifiques car même si sa géométrie laisse encore aujourd'hui perplexe bon nombre de personnes, elle n'en est pas pour le moins très intéressante et captivante. Et à choisir, je préférerais étudier ces mathématiques anciennes à ceux enseignées actuellement.

Adrien-Marie Legendre, mathématicien français (1752-1833) et qui, je pense, était très intelligent ! Sa géométrie est très intéressante mais pourquoi s'est-il embêté à démontrer tout cela puisque Archimède l'avait fait avant lui ?

L'idée de Legendre est quelque chose de très bien conçu mais de notre époque, ses idées en ce qui concerne les mathématiques sont beaucoup trop compliquées. Ceci est essentiellement dû au fait qu'il y a des appellations qui ont changé et c'est également dû au fait du vocabulaire de cette époque. Adrien-Marie Legendre était sans doute un mathématicien de toutes qualités mais je doute que de notre époque ce dernier soit "apprécié" d'après sa géométrie (ce n'est pas une insulte à l'homme mais une constatation sur sa géométrie). Je resterai fidèle aux mathématiques modernes.

Adrien-Marie Legendre me paraît être une personne aimant redémontrer ce que d'autres ont déjà démontré avant lui. Il aime *avoir sa démonstration personnelle. La géométrie m'a permis de comprendre d'où venait le nombre π. Dans sa géométrie, il démontre que π et π^2 sont irrationnels et soupçonne le caractère transcendant de π.*

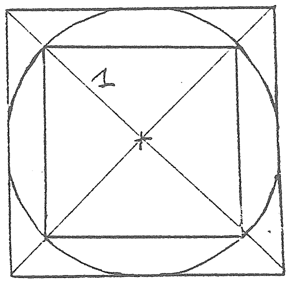
Conclusion

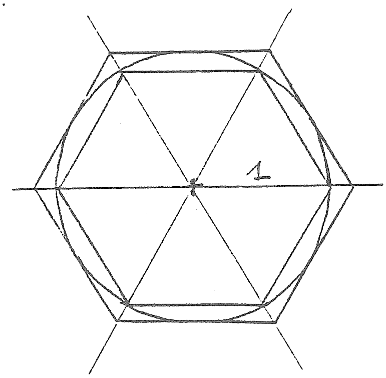
Cette activité a deux ans. Et deux ans après, il s'avère que je ne propose presque plus d'activités historiques à mes élèves. Peut-être l'enthousiasme s'est-il amenuisé ? Après de longues discussions avec les membres du groupe d'histoire des maths de l'Académie de Dijon, il nous est apparu que ce type d'activité, quand il est proposé à titre d'introduction à de nouvelles notions, ne profite qu'aux meilleurs élèves. C'est pourquoi j'essaie de trouver d'autres voies, moins en rapport avec une "utilisation" de l'histoire des maths à des fins techniques, mais plus axées sur l'introduction d'une perspective culturelle et historique dans mon cours. A quoi va servir toute cette science que j'enseigne à des élèves qui pour la plupart n'en auront plus rien à faire sitôt leur bac passé, et qui pour bon nombre d'entre eux n'y ont jamais compris grand chose ? C'est là qu'est le problème et là que se situe la solution : former un être humain, cela ne peut se ramener à enseigner des techniques vides de sens comme la dérivation (elle est vide de sens pour des élèves non-spécialistes et en échec, ce que sont souvent mes élèves de lycée technique tertiaire). Il me semble que les mathématiques ne doivent pas être réservées à une élite, mais partagées par le plus grand nombre ; il ne peut donc s'agir des mêmes mathématiques ! En outre, celles que l'on propose à nos élèves pourraient véhiculer plus souvent une dimension humaine : quand un élève critique un texte de Legendre, il parle de quelqu'un qui n'est pas son professeur, ni un être existant ici et maintenant, il déclenche sa faculté imaginative, il voyage parfois bien plus loin que notre cours de maths...

2nde 6 — pour le 4/1/94. (14 questions + 1)

Approximation de π. (par A. M. Legendre).

Il s'agit du rapport de la circonférence et du diamètre, ou bien de celui de l'aire et du carré du rayon.





Principe de l'approximation : Si l'on choisit un disque de rayon 1, sa circonférence est de 2π et son aire de π.

Tout polygone inscrit dans le cercle admet une longueur inférieure et une aire inférieure ; tout polygone circonscrit au cercle admet une longueur et une aire supérieures. (dans nos exemples, un carré et un hexagone).

I] Idée d'Archimède : (Syracuse, III^e siècle av. J.C.)

Plus le nombre de côtés des polygones est grand et plus l'encadrement du rapport est précis ; à partir du carré, on peut chercher à doubler le nombre des côtés et à calculer les nouvelles valeurs (à l'aide de la géométrie pure et de l'équivalent de notre trigonométrie) ; Dans son traité "La mesure du cercle", le célèbre Archimède réussit à calculer les côtés des polygones inscrit et circonscrit ayant 96 côtés, ce qui donnait comme valeurs :

$3 + \frac{10}{71}$ au minimum et $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ au maximum ; → est-ce un bon encadrement ?

II] Idée de Legendre : (XIX^e siècle)

Reprendre celle d'Archimède, mais avec les aires, et trouver une relation entre l'aire d'un polygone et celle du polygone ayant deux fois plus de côtés ; cette relation numérique sera à réitérer plusieurs fois jusqu'à obtention de la précision voulue.

<u>Le texte de Legendre</u> (Eléments de Géométrie, livre IV)

(la construction est à suivre sur la figure 169 de la planche 7).

Le cercle a pour centre C et passe par A, M et B.

[AB] est un côté du premier polygone inscrit, [EF] un côté du premier polygone circonscrit ; pour inscrire un polygone ayant deux fois plus de côtés, il suffit de construire le point M, point d'intersection du cercle et de la médiatrice (CD) du segment [AB] ; [AM] est un côté du nouveau polygone.

Pour circonscrire un polygone ayant deux fois plus de côtés, Legendre a auparavant démontré (prop. 6.) qu'il suffit de tracer les tangentes au cercle en A et B ; elles coupent [EF] en P et Q, et [PQ] est un côté du nouveau polygone.

[...] Cela posé, comme la même construction aura lieu dans les différents angles égaux à ACM, il suffit de considérer l'angle ACM seul, et les triangles qui y sont contenus seront entre eux comme les polygones entiers. Soit A la surface du polygone inscrit dont AB est un côté, B la surface du polygone semblable circonscrit, A′ la surface du polygone dont AM est un côté, B′ la surface du polygone semblable circonscrit; A et B sont connus, il s'agit de trouver A′ et B′.

1° Les triangles ACD, ACM, dont le sommet commun est A, sont entre eux comme leurs bases CD, CM; d'ailleurs ces triangles sont comme les polygones A et A′ dont ils font partie; donc A:A′::CD:CM. Les triangles CAM, CME, dont le sommet commun est M, sont entre eux comme leurs bases CA, CE; ces mêmes triangles sont comme les polygones A′ et B dont ils font partie; donc A′:B::CA:CE. Mais à cause des parallèles AD, ME, on a CD:CM::CA:CE; donc A:A′::A′:B; donc le polygone A′, l'un de ceux que l'on cherche, est moyen proportionnel entre les deux polygones connus A et B, et on a par conséquent $A' = \sqrt{A \times B}$.

[...]

– <u>EXPLICATIONS / QUESTIONS</u> –

} le rapport des aires des triangles sera égal au rapport des aires des polygones ; → <u>pourquoi ?</u>

} → <u>Qu'y aurait-il de gênant, pour nous, dans ces notations ?</u>

} $\dfrac{\text{Aire}(ACD)}{\text{Aire}(ACM)} = \dfrac{CD}{CM}$; → <u>pourquoi ?</u>

} A:A′::CD:CM signifie $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{CD}{CM}$.

} → <u>Ecrire cette proportion de la manière moderne.</u>

} → <u>que viennent faire les parallèles ici ?</u>

} → <u>Ecrire les deux proportions de la manière moderne.</u>

} → <u>expliquer comment on parvient à ce résultat.</u>

Le 2°), qui correspond à la recherche de B′, est plus difficile à lire, les théorèmes de géométrie que Legendre utilise étant moins évidents ; il parvient à la proportion suivante : B′ : B :: 2A : A+A′ d'où $B' = \dfrac{2AB}{A+A'}$.

Legendre arrive ensuite naturellement à l'approximation du rapport de la circonférence au diamètre (qui n'est autre que π), en rappelant qu'il est égal au rapport de l'aire au carré du rayon.

PROPOSITION XIV.

PROBLÊME.

Trouver le rapport approché de la circonférence au diametre.

Soit le rayon du cercle $=1$, le côté du quarré inscrit sera $\sqrt{2}$, celui du quarré circonscrit sera égal au diametre 2; donc la surface du quarré inscrit $=2$, et celle du quarré circonscrit $=4$. Maintenant, si on fait $A=2$ et $B=4$, on trouvera par le problême précédent l'octogone inscrit $A'=\sqrt{8}=2{,}8284271$, et l'octogone circonscrit $B'=\frac{16}{2+\sqrt{8}}=3{,}3137085$. Connaissant ainsi les octogones inscrit et circonscrit, on trouvera par leur moyen les polygones d'un nombre de côtés double; il faudra de nouveau supposer $A=2{,}8284271$, $B=3{,}3137085$, et on aura $A'=\sqrt{A\times B}=3{,}0614674$, et $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}=3{,}1825979$. Ensuite ces polygones de 16 côtés serviront à connaître ceux de 32, et on continuera ainsi jusqu'à ce que le calcul ne donne plus de différence entre les polygones inscrit et circonscrit, au moins dans l'ordre de décimales auquel on s'est arrêté, qui est le septieme dans cet exemple. Arrivé à ce point, on conclura que le cercle est égal au dernier résultat car le cercle doit toujours être compris entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit; [...]

-QUESTIONS-

→ Expliquer (à l'aide d'un dessin et de phrases) pourquoi ces nombres $\sqrt{2}$ et 2.

A quoi correspondent ces calculs? Les résultats sont-ils exacts?

Donner les calculs pour les polygones de 32 côtés

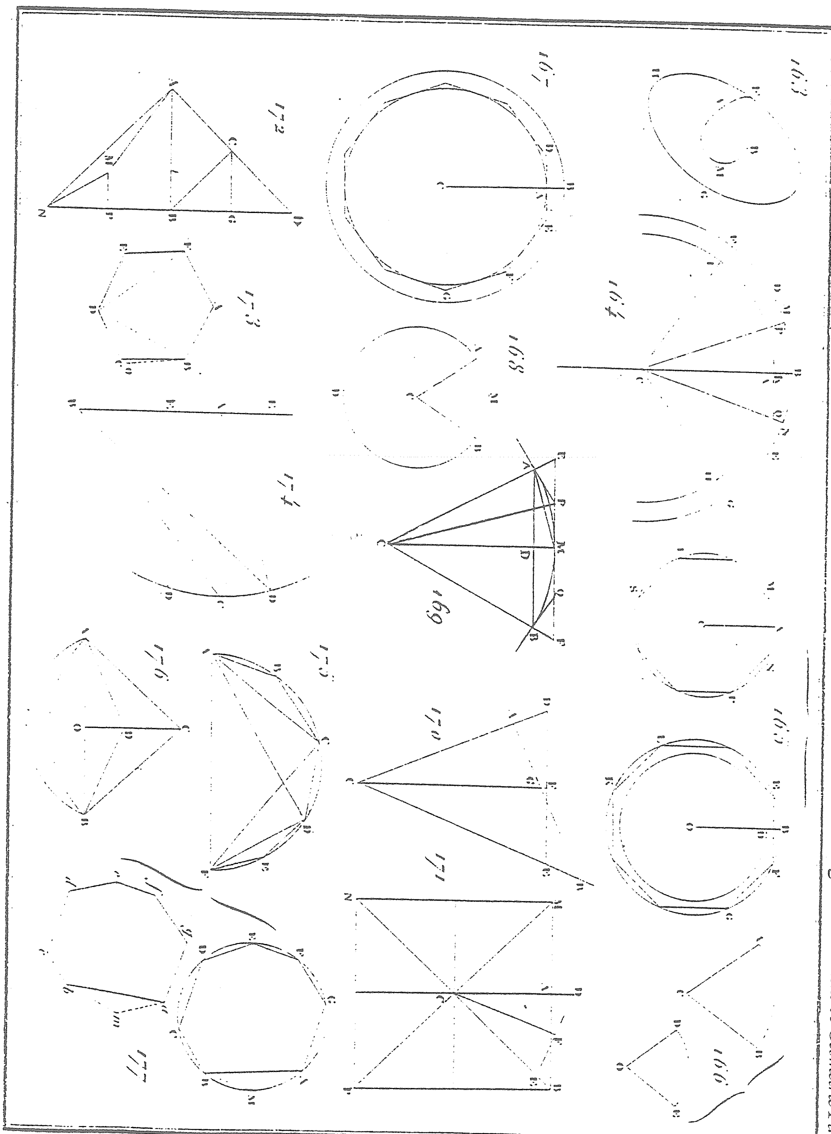
Pourquoi Legendre se permet-il d'écrire "égal"?

→ Compléter, au moins jusqu'à la ligne de 1024, le tableau donné ensuite par Legendre.

Nombre des côtés.	Polygone inscrit.	Polygone circonscrit.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	
64	3,1365485	
128	3,1403311	
256	3,1412772	
512	3,1415138	
1024	3,1415729	
2048		
4096		
8192		
16384		
32768		

QUESTION FINALE: (facultative)

Que pensez-vous d'Adrien-Marie Legendre? de sa géométrie?
(dissertation autorisée; insulte à sa mémoire interdite)



Legendre *Elémens de Géométrie* Pl. 7