Le problème des trois cercles d'Apollonius

Jacques BOROWCZYK, Anne BOYÉ

Ce problème provient du Traité des contacts d'Apollonius. Mathématicien grec de l'école d'Alexandrie, Apollonius est né probablement vingt-cinq ans après Archimède (i.e. vers 262 avant J.-C.) à Perge, petite ville d'Asie mineure ; il est mort sous le règne de Ptolémée IV entre 222 et 205 avant notre ère.

C'est à Pergame qu'il a rencontré le mathématicien Eudème auquel il adressera plus tard son *Traité des sections coniques*. La renommée de cet ouvrage lui valut le surnom de Grand Géomètre. Avec Euclide et Archimède, Apollonius a marqué la géométrie pour près de vingt siècles. Ce fut aussi un très grand théoricien de l'astronomie.

Le traité des sections coniques se compose de huit livres : les livres I à IV sont connus dans la version originale écrite en grec ; les livres V à VII restèrent inconnus du monde européen jusqu'à la découverte au milieu du XVII^e^ siècle d'une traduction arabe datant de 1250. Le livre VIII n'a pas été retrouvé.

C'est Apollonius qui introduit les termes d'*ellipse*, d'*hyperbole* et de *parabole*.

On ne sait pratiquement rien des autres ouvrages d'Apollonius dont seuls les titres et quelques commentaires nous sont parvenus surtout grâce Pappus, qui vécut à Alexandrie à la fin du III^e^ siècle et au début du IV^e^ siècle de notre ère, dont l'ouvrage *La Collection mathématique* cite :
- deux livres de *la section déterminée ;*
- deux livres *sur les contacts ;*
- deux livres *sur des Inclinaisons ;* restitués dans l'édition de Marino Ghetaldi *Apollonius redivivus*, Venise, 1607 ;
- deux livres *sur les Lieux plans ;* restitués respectivement par Fermat, Schooten et Simpson ;
- deux livres *sur les Sections de rapport ;* traduit de l'arabe en latin par Halley et publié en 1706.

Le traité *des contacts* était divisé en deux livres et se composait de 21 lemmes, 60 théorèmes et 11 problèmes : trois éléments quelconques d'entre des points, des lignes droites et des cercles étant donnés, il s'agit de mener un cercle passant par les points dans le cas des points donnés ou tangents aux droites et aux cercles donnés.

Les cas les plus simples figurent dans les *Eléments* d'Euclide lorsqu'il est question de tracer un cercle inscrit ou circonscrit à un triangle.

La résolution des six premiers cas était l'objet du livre I du *Traité des contacts*, alors que le cas de deux droites et un cercle ainsi que celui des trois cercles étaient traités dans le livre II.
Les données déterminent 10 problèmes :

1	(p1, p2, p3)	
2	(d1, d2, d3)	Eléments, IV, 4, 5
3	(p1, p2, d1)	
4	(d1, d2, p1)	Sinam
5	(d1, d2, c1)	Sinam
6	(p1, d1, c1)	
7	(d1, c1, c2)	
8	(p1, p2, c1)	Sinam
9	(p1, c2, c3)	
10	(c1, c2, c3)	

Le problème le plus remarquable et le plus difficile est celui de mener un cercle qui soit tangent à trois cercles donnés. La reconstitution de sa solution, déjà inconnue à l'époque de Pappus a provoqué l'intérêt des plus grands géomètres.
Au XVI^{e} et au XVII^{e} siècle les solution des 9 premiers cas avaient pu, d'après les renseignements fournis par Pappus, être reconstituées alors que le 10^{e} cas résistait encore ; certains étaients enclins à penser qu'Apollonius n'avait pas résolu ce problème.

Au milieu du XV^{e} siècle, avec la chute de Constantinople en 1453, commence une Renaissance des sciences dont les débuts peuvent s'identifier à la vie et l'oeuvre de Johann MÜLLER (1436-1476) né en Franconie à Königsberg et qui, selon la mode du temps se fit connaître en latinisant son lieu de naissance sous le nom de REGIOMONTANUS (de Montroyal).

Elève à Vienne de Georg PEUERBACH (1423-1469) il fut de ceux qui relevèrent l'erreur commise par le cardinal Nicolas de Cuse (1401-1464) dans son essai de quadrature du cercle. Regiomontanus accomplit un important travail de traduction d'œuvres mathématiques et astronomiques grecques (Ptolemée, Théon, Archimède, Apollonius) et fut invité par le pape Sixte IV à participer aux travaux de réforme du calendrier.
Il introduit le terme de *sinus* dans un traité de trigonométrie plane et sphérique publié en 1533, *De triangulus omnimodes*.
Régiomontanus a essayé de résoudre le problème d'Apollonius et a suggéré qu'on ne pouvait le résoudre qu'en ayant recours aux sections coniques.

Regiomontanus qui mourut de la peste à Rome ne put achever l'édition des *Coniques* d'Apollonius en latin qui ne parut qu'en 1537 dans une traduction de Memmius.

Commandino donna en 1556 une édition en latin des quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonius accompagnés des commentaires d'Eutocius et des lemmes de Pappus.

ADRIEN ROMAIN Adriaen Van Roomen[1] (Louvain 1561-Mayence 1615) enseigna les mathématiques à l'Université de Louvain et la médecine à l'Université de Wurzbourg. A l'occasion d'un séjour à la cour du roi Henri IV à Fontainebleau, en octobre 1594, l'ambassadeur des Provinces Unies signala l'un de ses ouvrages[2]. Tallemant des Réaux a rapporté dans l'historiette 46 cette entrevue célèbre[3]. Romain avait établi en 1590 une liste de problèmes proposés à tous les mathématiciens dont il avait dressé une liste contenue dans *Indeae mathematicae* publié à Louvain en 1593.
A l'ambassadeur qui prétendait que la France n'avait pas de géomètre capable de résoudre un problème proposé par A. Romain, Henri IV présenta son conseiller François Viète.
Le problème de Romain exigeait la résolution d'une équation du 45e degré. Viète sut en corriger l'énoncé pour écrire ce que nous appelons désormais le polygône de Tchebychev de degré 45. Viète montra alors que l'équation était satisfaite par la corde d'un cercle de rayon unité qui sous-tend un angle au centre de 8° (soit $\frac{2\pi}{45}$).
En peu de temps, Viète proposa donc au roi cette solution du problème et, le jour suivant, il en donna les 22 autres solutions positives ; Viète ayant toujours exclu les quantités négatives comme solution des équations algébriques.

Viète fit imprimer sa réponse en 1595 sous le titre *Ad problema, quad omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum* (réponse au problème qu'Adrien Romain proposa à tous les mathématiciens du monde à résoudre).

Dans l'introduction on peut lire (dans la traduction de Grisard):

> «Si Adrien Romain ne s'égare pas dans tout le globe terrestre tandis qu'il dénombre à peine les mathématiciens de tout le globe terrestre aptes à résoudre son unique problème, mais du moins pas celui des Gaules, car Appolon des Gaules n'est pas proportionné à son ouverture de compas.

---

1 Sur sa biographie, voir l'article de H. Bosmant, *Biographie nationale de Belgique*, tome XIX, col. 848-889.

2 *Indeae mathematicae* publié à Louvain en 1593.

3 Tallemant des Réaux, *Historiettes*, col. «Bibliothèque de la Pléiade», Gallimard, tome I, p. 462.

> Que le Belge cède au Romain, que le Romain cède au Belge, à peine un Gaulois laissera son renom à un Romain ou à un Belge, je te l'ai déjà ravi.
> Moi qui ne me targue pas d'être mathématicien, mais que, si toutefois cela m'est permis, les travaux mathématiques ravissent dès que j'ai lu le problème d'Adrien je l'ai résolu et une erreur malheureuse ne me l'a pas dérobé.
> Ainsi en trois heures je me suis révélé un grand géomètre. Et aucune expression étrangère ne me plaît par exemple en Algèbre.
> La géométrie sera traitée par la Géomètrie et l'Analyse par l'Analyse. Toutefois je prendrai soin que le peuple des Algébristes me comprenne suffisamment, soit comme Géomètre, soit comme nouvel Analyste».

A la fin de sa réponse, Viète proposa à Adrien Romain le dernier problème du *Traité des contacts* d'Apollonius «Tracer un cercle qui soit tangent à trois cercles donnés» :

> «Pour exercer l'intelligence des esprits studieux et non pour la mettre à la torture, je leur propose de construire le Problème : décrire un cercle tangent à trois cercles donnés. Apollonius l'a proposé dans son livre "des Contacts" qui a péri sous les caprices du temps. Si la Belgique ne met pas en avant ses Apollonius, la France produira le sien.
> «Je ne doute pas que les Algébristes ne le résolve en l'énonçant pour eux sous cette autre forme :
> Etant donnés les demi-diamètres de trois cercles quelconques et les distances de leurs centres, donner le demi-diamètre d'un quatrième cercle qui leur sera tangent et la distance de son centre aux trois autres centres des cercles donnés.
> Régiomontanus qui a résolu le problème par l'algèbre, déclare qu'il ne peut être construit par la géométrie. Ne serait-ce pas parce que jusqu'à ce jour, l'algèbre n'a été traitée que d'une manière corrompue ? Acceptez ma nouvelle algèbre, vous qui aimez les sciences et sur ce, Salut et prospérité.
>
> Viète »

Viète connaissait la traduction latine de Commandino des *Collections* de Pappus (Pesara, 1588). Adrien Romain qui lui aussi connaissait les travaux de Régiomontanus, ne parvint pas à résoudre ce problème à l'aide de la règle et du compas seulement.
Adrien Romain fit transmettre une solution qui déterminait le centre du cercle tangent à trois cercles donnés au point d'intersection de deux hyperboles.
La solution transmise par Adrien Romain fut publiée en 1596 à Wurzbourg sous le titre *Problema Apolloniacum quo datis tribus circulis*[4] .

---

4 cf. H. Bosmant, *Annales de la Société Scientifique*, Bruxelles, tome XXIX, 1905.

Ce recours aux coniques ne fut pas jugé conforme aux méthodes des anciens qui dans la résolution des problèmes plans n'admettaient que l'usage de la règle et du compas. Viète fit connaître sa solution euclidienne par une lettre manuscrite adressée dès 1597 au géomètre belge qui résidait alors à Wurzbourg. Cette réponse fut imprimée à Paris, en 1600 par l'imprimeur David Le Clerc, grâce aux soins vraisemblablement de Marino Ghetaldi.
Dans l'édition originale de 1600, une dédicace en grec adressée à Viète précède le texte latin, repris dans l'*Opéra mathematica* publié à Leyde en 1646 (page 325) avec quelques modifications (p. 553).

Le texte de Viète occupe les folios 1 à 13 : dans les 7 premiers (dont la traduction figure en annexe) les dix problèmes sont traités à la mode euclidienne ; ce sont, dans l'ordre :

Construire un cercle :

Passant par deux points donnés et tangent à une droite donnée ;

Passant par trois points donnés, non co-linéaires ;

Tangent à trois droites données, non parallèles ;

Passant par un point donné et tangent à deux droites données ;

Tangent à deux droites et un cercle donnés ;

Passant par un point et tangent à une droite et un cercle donnés ;

Tangent à deux cercles et une droite donnés ;

Passant par deux points et tangent à un cercle donné ;

Passant par un point et tangent à deux cercles donnés ;

Tangent à trois cercles donnés.

Premier petit Appendice : des problèmes que Regiomontanus déclare n'avoir pas pu résoudre par la Géométrie.

Construire un triangle connaissant la base, la hauteur correspondante et le produit des côtés ;

Même problème, mais avec le rapport des côtés ;

Même problème, mais avec la somme des côtés ;

Même problème, mais avec la différence des côtés ;

Construire un triangle connaissant la base, la hauteur et l'angle au sommet ;

l'Ecole polytechnique en 1798, qui devait devenir professeur de géométrie descriptive au Conservatoire des Arts et Métiers. CAUCHY (1789-1857) devait aussi s'intéresser à ce problème.
Plus tard GERGONNE (1771-1859) et PONCELET (1788-1867) devaient développer des travaux à l'origine de la géométrie synthétique.
La traduction manuscrite de Gergonne des folios 1 à 7 de l'œuvre de Viète est déposée à la bibliothèque de Turin ; celle-ci adopte le genre inauguré en 1639 par Pierre HÉRIGONE en faisant usage de symboles dans les démonstrations. Un ingénieur des Ponts et Chaussées Frédéric RITTER a traduit pratiquement toute l'œuvre mathématique de Viète dans la seconde moitié du XIXème siècle ; ses manuscrits sont déposés à la Bibliothèque de l'Institut de France (Ms 2008).

On trouvera une étude critique de l'ouvrage de Viète dans un ouvrage en latin publié par W. L. Christmann à Tübingen en 1821.
Pour terminer signalons que l'on peut lire une solution du problème d'Apollonius dans l'ouvrage de Catalan *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, 6ème édition, Paris, 1879, p. 206 et une discussion de la méthode de Gergonne dans la note C *Sur le problème des cercles tangents* de l'ouvrage d'Hadamard *Leçons de géométrie élémentaires*, 13ème édition, Paris 1947 (cf. la figure, 223 bis de cet ouvrage).

---

sphère déterminée par quatre conditions, où il traite ce problème «avec une généralité nouvelle et tout à fait satisfaisante» Charles, 1837, c'est Louis Gaultier qui introduit le terme d'axe radical pour un faisceau de cercle (Charles, 1837, p. 206).

RÉFERÉNCES

Apollonius de Perge, 1959. *Les Coniques*, traduction française par Paul Ver Eecke, réédité en 1963, Paris, Blanhard.

Audirac (J.-L.) 1990. *Vie et œuvre des grands mathématiciens*, Paris, Magnard.

Becker and Hofmann, 1951. *Geschichte der Mathematik*, Athenäum-Verlag, Bonn.

Boyer (Carl B.) 1968. *A history of mathematics*, John Wiley & Sons.

Busard (H.L.L.), 1976. Viète, In *Dictionary of scientific biography*, C. C. Gillipsie, Ed., Vol. 20, New-York: Scribner's.

Camerer (Joanne Guilielmo) 1795. *Apollonii de Tactionibus quae supersunt, ac maxime lemmata Pappi in hos libros, graece nune primum edita, ... cum Vietae librorum Appollonii restitutione, adjectis observationibus computationibus, ac problematis Apollo niani historia,* Gothae, apud C.G. Ettinger.

Cassinet (Jean) 1990. Le fonds d'anciens manuscrits arabes de la Bibliothèque laurencienne de Florence, *3ème symposium magrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, Alger.

Catalan (E. C.) 1879. *Théorèmes et Problèmes de géométrie élémentaire*, Paris, 6ème édition (problème XXVIII)

Caveing (Maurice) 1990. Introduction générale In Euclide *Les éléments*, édition de Bernard Vitrac, volume 1, Paris, PUF.

Chasles (M.) 1837. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Paris, Gauthier-Villars.

Christmann (G. L.) 1821. *Apollonius suevus, sive tactionum problema nunc demun restitutum, accedente censura in Vietam*, Tubingue.

Cifoletti (Giovanna) 1991. *Subtilior arithmetica ou une science briefve et claire les algébristes français du XVIème siècle*, catalogue de exposition de la Bibliothèque nationale, Paris 24 avril-31 mai 1991. [Voir aussi les *Actes de l'Université d'été sur l'histoire des mathématiques, juillet 1990* IREM de Lille].

Dedron (P.) Itard (J.) 1959. *Mathématiques et mathématiciens*, Paris, Magnard.

Djebbar (A). 1988. Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe (IXe-XVe s.), *Actes de l'Université d'été sur l'histoire des mathématiques, 6-12 juillet 1986*, IREM de Toulouse.

Dunoyer de Ségonzac (J.-M.) 1976. Deux hommes de sciences dans les pays de la Loire aux XVIe et XVIIe siècles : François Viète et René Descartes, *comptes rendus du 97e congrès national des Sociétés savantes, Nantes, 1972*. Paris, CTHS, pp. 123-138.

Fourier (Joseph) 1901. Viète (notice biographique), *La Grande Encyclopédie*, vol 31, Paris, Société anonyme de La Grande Encyclopédie, 972. [voir aussi *Biographie ancienne et moderne*, 48, Paris]

Grisard (J.) 1969. *François Viète, mathématicien de la fin du seizième siècle, Essai bio-bibliographique*, thèse de 3ème cycle, E.P.H.E. VIème section, Paris.

Hadamard (Jacques) 1947. *Leçons de géométrie élémentaire*, Paris, A. Colin.

Hofmann (Joseph E.) 1970. Introduction dans Viète (F.) *Opera Mathematica*, reprint Georg Olms Verlag, Hildesheim.

Jaouiche (K.) 1990. Le problème des trois cercles : histoire de la circulation d'un problème de géométrie, *3ème symposium magrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, Alger. (à paraître)

Lawson (J.) 1764. *The two books of Apollonius Pergaeus concerning tangencies as they have been restored by Fr. Vieta and Marinus Ghetaldus with a supplement* , Cambridge.

Lawson (J.) 1773. *The two books of Apollonius Pergaeus concerning determinate sections as they have been restored by Willebroidus Snellius*, London.

Newton (I.) 1725. Philosophiæ naturalis principia mathematica. Londini : cf traduction française de Mme du Chastelet, Paris, 1759, 2 vol. in-4°. (Livre I lemme XVI)

Newton (I.) 1707. *Arithmetica universalis. cum commentariis*, cf traduction française de N. Beaudeux, 1802. 2 vol. in-4°. (Problèmes XLII et XLVII)

Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, Livre VII, traduction française par Paul Ver Eecke, réédition, Paris, Blanhard, 1933.

Parshall (Karen Hunger) 1988 The art of algebra from al-Khwarizmi to Viète : a study in the natural selection of ideas, *Hist. Sci*, XXXVI 129-164.

Poncelet (J.V.) 1864. *Applications d'analyse et de géométrie*, Paris, Gauthier-Villars.

Rashed (Roshdi) 1984. *Entre arithmétique et algèbre : Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris, Les Belles Lettres.

Rashed (Roshdi) *Œuvres mathématiques d'Ibn al-Haytham*, Paris, Les Belles Lettres.

Ritter (F.) 1868. Introduction à l'Art analytique, *Bulletino di Bibliographa e di Storia delle Scienze Matematische e Fisiche*, Rome, vol. I, 228.

Ritter (F.) 1895. François Viète, inventeur de l'Algèbre moderne, 1540-1603. Essai sur sa vie et son œuvre, *Revue occidentale philosophique, sociale et politique*, 2nde série, 10, 234-274, 354-415.

Rosen (Edward) 1987. Regiomontanus In *Dictionary of scientific biography*, C. C. Gillipsie, Ed., Vol. 20, pp. 348-352. New-York : Scribner's.

Sabra (A. I.) 1976. Ibn al-Haytham In *Dictionary of scientific biography*, C. C. Gillipsie, Ed., Vol. 10, pp. 189-210. New-York : Scribner's.

Snellius (W.) 1608. *Appolonius Batavus, seu exsuscitata Apollonii Pergæi geometria,* Lugduni Batavorum.

Toomer (G. J.) 1970. Apollonius of Perga In *Dictionary of scientific biography,* C. C. Gillipsie, Ed., Vol. 1, pp. 179-193. New-York : Scribner'sons.

Vallezard (Jean-Louis) 1631. *Introduction en l'art analytic ou Nouvelle Algèbre de François Viète,* Paris, Julian Jacquin. réédition 1986 Paris, Fayard, Corpus des œuvres de philosophie en langue française.

Viète (F.) 1646. *Opera mathematica,* In unum Volumen congesta ac recognita, operâ atque studio Francisci a Schooten, Leydensis, Mathesos Professoris. Lugduni Batavorium Ex Officinâ Bonaventure & Abrabim Elzeviriorum ; 1970, Reproduction Georg Olms Verlag, Hildesheim.

Viète (F.) 1991 *Œuvres mathématiques. Première partie : œuvres mathématiques, suivies du dénombrement des réalisations géométriques et du supplément de géométrie.* traduction en français de Jean Peyroux, librairie A. Blanchard, 9, rue de Médicis, 75006 Paris.

Witmer (T. R) 1983. Translator introduction in *The analytic Art Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry from the Opus Restituae Mathematicæ Analyseos, seu Algebrâ Novâ,* The Kent State University Press, Kent, traduction en français de l'introduction, *PLOT* n° 53, 1990, pp. 23-28.

Youschkevitch (A.P.) 1976. *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe s.),* Paris, Vrin.