UTILISATION DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES DANS LA FORMATION DES MAÎTRES.

Françoise CERQUETTI-ABERKANE & Anne RODRIGUEZ.

Introduction.

Depuis une dizaine d'années environ, nous utilisons des activités de type historique avec les maîtres et futurs maîtres en formation. Nous avons constaté de façon empirique, d'une part, que cela semblait améliorer la relation des stagiaires aux mathématiques, et, d'autre part, que cela modifiait également leur rapport au savoir. Nous avons entrepris cette année une recherche sous la direction d'Évelyne Barbin, afin de vérifier de façon plus systématique nos premières constatations.

Objectifs de la recherche.

Nous voulions étudier l'apport de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques dans la formation initiale et continue des maîtres du primaire au niveau :

- 1°) du rapport personnel aux mathématiques du public concerné,
- 2°) du rapport épistémique au savoir de ce même public,
- 3°) de la compréhension des notions mathématiques proposées.

Objectifs pédagogiques.

Ces activités avaient aussi pour objet d'amener les enseignants à découvrir les différents types de numération, de comprendre les difficultés rencontrées par les enfants lors de l'apprentissage de la numération, enfin de faire le lien entre les numérations existantes ou ayant existé et notre propre numération tant écrite et qu'orale. Enfin nous voulions les faire réfléchir sur les moyens et les outils qu'on peut utiliser pour aider les enfants à franchir les différents obstacles au cours de leur apprentissage.

Public concerné.

Ce sont des maîtres du primaire en formation initiale (groupe G1 : 16 personnes) ou continue (groupe G2 : 16 personnes, groupe G3 : 20 personnes, groupe G4 : 20 personnes). Ce sont en général des gens dont le rapport aux mathématiques n'est pas très bon, et dont la formation n'est pas scientifique. Avec le groupe G3 nous avons travaillé uniquement la numération, avec le groupe G1 uniquement les décimaux et rationnels, avec les deux autres groupes nous avons mené les deux activités successivement. Nous ne présenterons ici que les activités concernant la numération.

Méthodologie.

Nous avons proposé un questionnaire (annexe 1) avant et après l'activité afin de vérifier les niveaux 1 et 2, en étudiant les modifications survenues dans les réponses. Pour le niveau 3 nous avons utilisé un pré-test et un post-test portant sur les mêmes notions mais utilisant des données numériques différentes (annexe 2 : exercices sur des codages et décodages en base deux ou trois, exercices de codage et décodage avec une numération de type additive et enfin des exercices de décodage utilisant diverses numération : la numération égyptienne dans le pré-test et la numération sumérienne puis babylonienne dans le post-test). En fait, cette dernière partie a posé un problème pour l'interprétation des résultats. Les difficultés mathématiques n'étaient pas équivalentes et nous n'avons pas pu réellement vérifier le niveau d'acquisition des stagiaires à ce sujet. Il faut préciser que le pré-test n'a pas été corrigé avec les stagiaires afin de vérifier l'impact des activités intermédiaires proposées sur l'acquisition des savoirs. Tous les tests et les questionnaires ont été faits anonymement par les stagiaires. Un code apposé par eux sur les copies nous a permis de faire les corrélations entre les différents éléments composant l'activité.

Difficultés rencontrées.

Étant donné la lourdeur du dispositif et le temps nécessaire à une telle expérimentation, nous avons eu quelques difficultés avec les futurs maîtres en formation initiale. Ils ont été plus réticents que les stagiaires de formation continue. En effet, ils devaient effectuer un stage en responsabilité dans une classe de l'école élémentaire et avaient l'impression de perdre du temps ne voyant pas l'application immédiate qu'ils pourraient en faire. A cause des contraintes d'emploi du temps et des échéances du concours, il n'a pratiquement pas été possible d'utiliser ce dispositif avec des étudiants de première année. Nous leur avons cependant proposé des activités similaires mais sans y adjoindre les questionnaires et les tests.

Déroulement des activités.

Pendant le travail spécifique sur les activités historiques proposées aux stagiaires, nous avons utilisé un certain nombre de documents sur la numération romaine et l'utilisation de bouliers romains. Après un exercice de décodage et de comparaison (avantages et inconvénients) de différentes écritures, nous leur avons demandé de mettre en relation l'utilisation des bouliers romains et des bouliers japonais, ainsi que des abaques pédagogiques. Les exemples proposés étaient tirés des livres : *"Histoire universelle des chiffres"* de G. Ifrah[1] et *"Histoires de comptes"* de F. Cerquetti-Aberkane[2].

Les stagiaires ont pris conscience, à ce propos, de l'intérêt des bouliers et ont été très surpris de découvrir que les Romains les utilisaient déjà.

Nous leur avons aussi demandé d'expliquer le fonctionnement du système actuel de numération écrite sino-japonaise. Ce système a le grand avantage d'être très proche de notre système de numération orale et peut donc facilement être utilisé avec des enfants de cycle 3 (8-11 ans) pour les aider dans cet apprentissage. Comme pour le travail précédent cette activité n'a pas posé de problèmes aux stagiaires et ils s'en sont acquitté avec plaisir. Ils ont aussi été très étonnés de découvrir qu'on utilise actuellement dans le monde un autre système de numération que le nôtre. Là encore ils se sont rendu compte de la difficulté d'effectuer des calculs et des comparaisons de nombre avec un tel système.

Enfin, la dernière partie de l'activité a consisté en un décodage de la numération maya. Le document utilisé provenait du livre de G. Ifrah précédemment cité.

Les recherches ont été beaucoup plus laborieuses car la plupart des stagiaires essayaient d'abord un décodage de type additif et ne parvenaient pas à comprendre le système. De plus la notation de bas en haut les a déroutés. D'autre part le choix de la base vingt et l'irrégularité du 3ème ordre les ont complètement désarçonnés. Ils se sont alors rendu compte de l'importance que peut avoir la connaissance de l'histoire d'une civilisation pour comprendre son système de numération entre autres. Ils ont aussi réellement pris conscience des difficultés que pouvaient éprouver les enfants lors de leur premier contact avec notre système de numération positionnel, système qui n'est pas naturel comme peut l'être le système additif.

---

1 Ifrah, G. : *Histoire universelle des Chiffres*. Éd. Seghers. Paris, 1981.
2 Cerquetti-Aberkane, F. : *Histoire de comptes*. Éd. Épigones. Paris, 1990.

Après ces différentes activités nous avons proposé aux enseignants la découverte des cartons Montessori. Ce matériel permet de faire le lien entre numération écrite et numération orale. Il se présente ainsi :

- les nombres de 0 à 9 sont écrits sur des cartons à une place,
- les nombres 10, 20, 30, ... 90 écrits sur des cartons à deux places,
- les nombres 100, 200 ... 900 écrits sur des cartons à 3 places etc.

En superposant par la droite ces cartons, en commençant par le plus long, ou, suivant le cas, en les mettant l'un au-dessous de l'autre, on passe de la numération orale à l'écriture en chiffres d'un nombre ou réciproquement.

Exemple : deux mille	2 0 0 0
six cent	6 0 0
trente	3 0
quatre	4
	2 6 3 4

Quelques résultats.

Au sujet des savoirs.

On constate que les stagiaires ont beaucoup plus confiance en eux et font un travail individuel dans le post-test, ce qui n'était pas le cas dans le pré-test. Les non-réponses diminuent considérablement. Cependant le nombre de réponses justes augmente peu. Interrogés les stagiaires ont dit être en cours d'acquisition et avoir besoin de temps pour assimiler les différentes notions. Du fait du choix inadéquat des exercices de type historique, il nous a été difficile de tirer parti des réponses données. Cependant, dans le pré-test, les exercices sur la numération égyptienne sont très bien réussis par la grande majorité des stagiaires. Dans le post-test, la numération sumérienne de type additif et multiplicatif est beaucoup mieux comprise que la numération sumérienne de type positionnel et de base soixante. La difficulté rencontrée dans le décodage de la numération maya se retrouve ici. Il semble que cette activité n'a pas permis de généraliser les principes permettant le décodage d'une numération positionnelle inhabituelle.

Au sujet des questionnaires.

Les modifications sont très perceptibles et plus nettes dans les groupes qui ont travaillé sur deux activités différentes de type historique (numération et décimaux).

L'histoire des mathématiques ne concerne plus un savoir savant mais des méthodes d'enseignement. C'est une ouverture pour le maître, et une motivation pour l'élève.

Les conceptions de l'enseignement des mathématiques subissent les plus grandes modifications : ce n'est plus donner à savoir, à retenir, donner des modèles, donner à appliquer, donner à suivre une démarche, imposer des méthodes, mais cela devient donner à créer, à imaginer.

Dans le premier questionnaire dix personnes ayant suivi les deux activités avaient répondu que pour elles l'enseignement des mathématiques était "imposer des méthodes". Au deuxième questionnaire, elles ont répondu l'inverse.

* * * * *

Conclusion.

L'entrée historique dans l'apprentissage des mathématiques pour des maîtres et futurs maîtres peut se faire par la résolution de problèmes à partir de textes, d'outils de techniques (bouliers, tables à poussière, unités de mesures etc.). Cela permet de modifier le rapport au savoir des enseignants. Ils sont plus à même de comprendre et d'analyser leurs propres difficultés et celles de leurs élèves. Cela relativise l'évaluation instantanée des acquis. Ce n'est plus "je sais ou je ne sais pas" mais "je suis en train d'apprendre et de construire un savoir". D'autre part on comprend mieux à quoi servent les mathématiques et pourquoi elles ont été créées.

L'étape suivante de ce travail sera l'expérimentation d'activités similaires avec des élèves du primaire.

*
* *

ANNEXE 1. - QUESTIONNAIRE.

A) L'histoire des Mathématiques concerne :

A1 - Les savoirs savants (notions, définitions, théorèmes) ;	oui/non
A2 - Des savoirs faire (techniques opératoires des démonstrations ;	oui/non
A3 - Le langage, les notations ;	oui/non
A4 - Les méthodes d'enseignement (structures, types de situations d'outils, d'exercices, de problèmes.	oui/non

L'étude de l'histoire des maths vous parait-elle être :
(entourer les codes des réponses qui vous conviennent)

- pour l'enseignant :

Q1 - un luxe ;
Q2 - une ouverture ;
Q3 - un complément de formation ;
U - utile ;
F - facultative ;
I - indispensable ;
S - superflue ?

- pour l'élève :

Q4 - une motivation pour l'activité mathématique ;
Q5 - une situation problème ;
Q6 - un divertissement ;
FE - facultative ;
IE - indispensable ;
SE - superflue ?

B) L'histoire des Mathématiques nécessite :

B1 - Des pré-requis ;	oui/non
B2 - Des connaissances (savoirs mathématiques) ;	oui/non
B3 - Des savoir-faire (démonstration) ;	oui/non
B4 - Des savoir-être (entrée dans la pensée d'autrui).	oui/non

Q7 - Cela vous parait-il être accessible dès :
P le primaire ;
S le secondaire ;
U l'université ?

C) L'histoire des Mathématiques développe :

C1 - La culture générale en termes de connaissances ;	oui/non
C2 - La compréhension des notions mathématiques ;	oui/non
C3 - La mémorisation des notions ;	oui/non
C4 - Le repérage des concepts dans le temps ;	oui/non
C5 - Les compétences d'interprétation ;	oui/non
C6 - Le raisonnement ;	oui/non
C7 - L'analyse ;	oui/non
C8 - Les capacités de comparaison.	oui/non

Q8 - Qu'est-ce qui vous parait primordial ?

D) Représentation des mathématiques :
(barrer les mots sans rapport avec les mathématiques)

D1 - Difficile ;
D2 - Accessible à une élite ;

D3 - Abordable avec différents niveaux de complexité et d'abstraction ;
D4 - Objet de savoir ;
D5 - Outil ;
D6 - Efficace ;
D7 - Rigueur ;
D8 - Exactitude ;
D9 - Unicité des définitions et démonstrations ;
D10 - Pluralité des définitions et démonstrations ;
D11 - Universalité ;
D12 - Abstraction ;
D13 - Création ;
D14 - Idéalisation ;
D15 - Évolution ;
D16 - Recherche ;
D17 - Confrontation ;
D18 - Relativité des savoirs ;
D19 - Résolution de problème ;
D20 - Raisonnement ;
D21 - Formulation ;
D22 - Reproduction ;

Noter les cinq mots les plus importants pour vous, pour caractériser la discipline.

E) Activités mathématiques et conceptions pédagogiques :

Dans la liste suivante, barrer ce qui ne correspond pas à votre conception de l'enseignement des mathématiques.

E1 - Donner à savoir ;
E2 - Donner à retenir ;
E3 - Donner à lire ;
E4 - Donner à analyser ;
E5 - Donner à comparer ;
E6 - Donner à confronter ;
E7 - Donner à justifier ;
E8 - Donner des modèles ;
E9 - Donner à chercher ;
E10 - Donner à résoudre ;
E11 - Donner à appliquer ;
E12 - Donner à reproduire ;
E13 - Donner à suivre une démarche ;
E14 - Donner à valider ;
E15 - Donner à utiliser ;
E16 - Donner à valider ;
E17 - Donner à créer ;
E18 - Donner à construire ;
E19 - Donner à imaginer ;
E20 - Expliciter ;
E21 - Concrétiser ;
E22 - Humaniser ;
E23 - Démystifier ;
E24 - Contextualiser ;
E25 - Synthétiser ;
E26 - Diversifier les formulations ;
E27 - Unifier le langage ;
E28 - Proposer des techniques ;
E29 - Imposer des méthodes.

Préciser les cinq activités essentielles.

*

* *

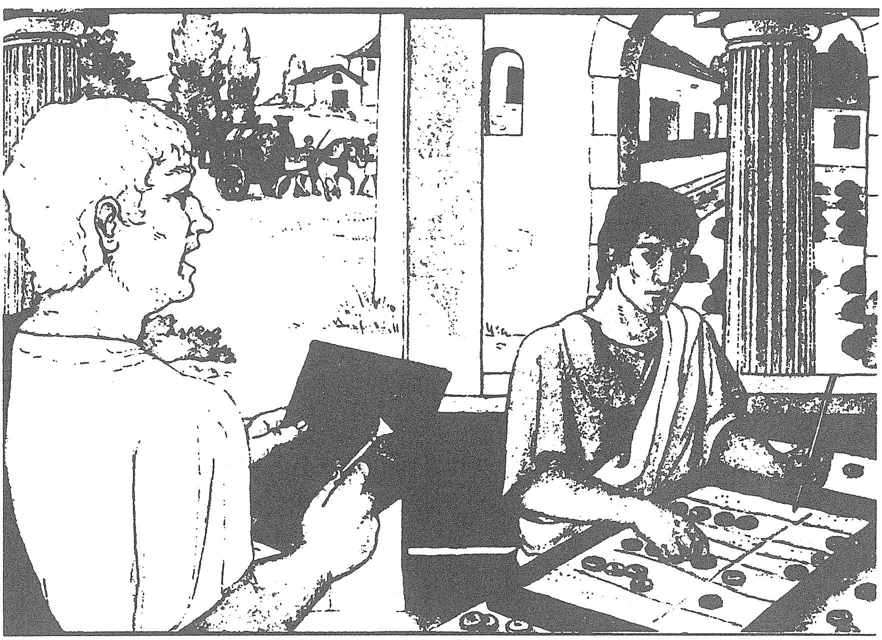
ANNEXE 2. - EXERCICES ET TESTS.

A) EXERCICES DE NUMÉRATION.

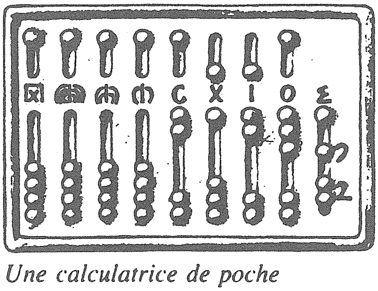
I. - Chez les Romains.

DES MACHINES POUR CALCULER.

Document 1. Extrait de : *Histoires de comptes.*

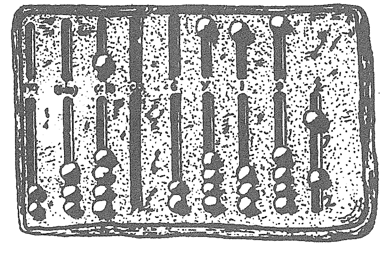


Document 2. Extrait de : *Histoires de comptes.*



▲ *Une calculatrice de poche*

Document 3. Extrait de : *Histoire universelle des Chiffres.*



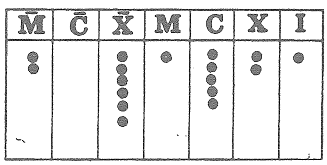
Légende du document 3 : *"Abaque romain « de poche ». Cabinet des Médailles, B. N. Paris, br. 1925"*[3].

Commentaire du document 3 : *"Les Romains de l'Antiquité comptaient, on le sait, avec des bouliers. Moins connu : certains de leurs « calculatori » utilisaient une véritable calculatrice portative. Ce curieux abaque « de poche » consistait en une petite plaquette métallique munie de rainures parallèles, le long desquelles glissaient des boutons mobiles"*.

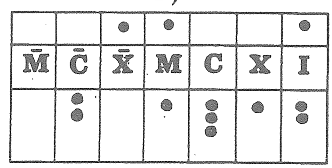
Document 4A. Extrait de : *Histoire universelle des Chiffres.*

Document 4B. Extrait de : *Histoire universelle des Chiffres.*

A)



B)



"Le principe de l'abaque romain à « calculi » :
A : l'abaque primitif ; B : l'abaque simplifié"[4].

Document 5.

CHEZ LES ROMAINS

Au I^er^ s. avant N. E., les Romains utilisent une notation encore utilisée de nos jours, comprenant sept lettres. En plus de la base 10, le système attribue un signe pour 5, 50, 500 [la moitié des puissances de 10].

I	1	C	100	$\overline{M}$	$1\,000^2 = 1\,000\,000$
V	5	D	500	$\overline{\overline{M}}$	$1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$
X	10	M	1 000		
L	50				

Comme dans le système attique, cela permet d'économiser des signes. Il faut signaler également une innovation : la valeur d'un chiffre s'additionne à celle d'un chiffre supérieur s'il est à sa gauche mais se soustrait s'il est à sa droite :

IV se lit un ôté de cinq, soit quatre — alors que VI signifie six
IX se lit un ôté de dix, soit neuf — XI signifie onze
XL se lit dix ôté de cinquante, soit quarante — LX signifie soixante

MCMLXXXIV **Pour écrire ce nombre il faut 9 signes.**

---

3 Ifrah, G. : *op. cit.*, p. 121, Pl. 24.
4 Ifrah, G. : *op. cit.*, p. 116, Fig. 59.

1) Quels sont les nombres affichés en A ? en B ? (document 4).
Expliquer le fonctionnement de ces abaques pour l'écriture des nombres ; pour compter (ajouter un ou passer au nombre suivant).
Différencier A et B pour ces deux usages.

2) En déduire un usage
- des abaques "pédagogiques" actuels ;
- du boulier japonais.

3) Comparer les écritures usuelles des nombres romains avec les lettres (I=>1, V=>5, X=>10, L=>50, C=>100, D=>500, M=>1 000, $\overline{M}$=>1 000 000, $\overline{\overline{M}}$=>1 000 000 000), et les écritures sur abaques romains. Précisez en particulier les avantages et les inconvénients de ces écritures et leurs usages prévisibles.

* * * * *

II. - En Chine et au Japon d'aujourd'hui.

Document 6.

三百二十四	千九百八十五	三百三十三	四百十二	七百五十一
324	1985	333	412	751

四千五百	万三	八百五
4 500	10 003	805

十二	二十	百四	十八
12	20	104	18

九千九百九十九

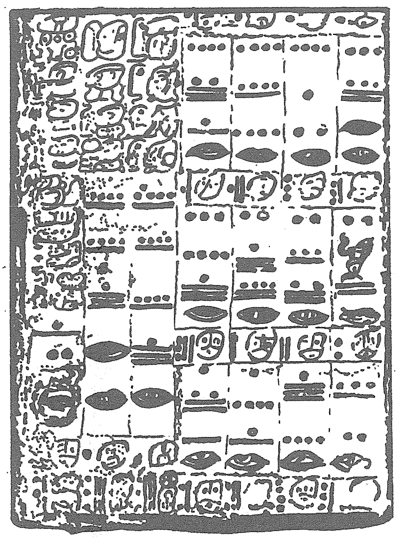
9 999

Expliquer le fonctionnement du système de numération sino-japonaise actuelle, d'après les écritures du tableau.

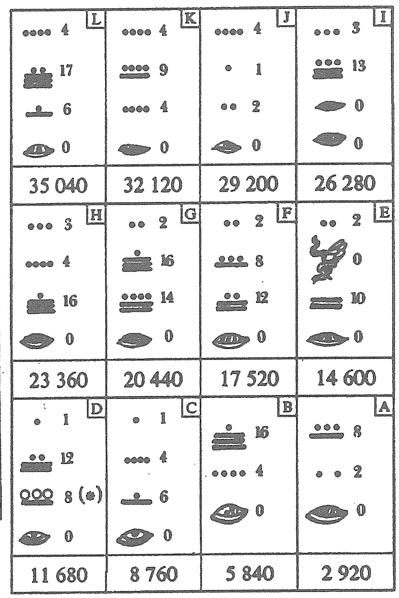
* * * * *

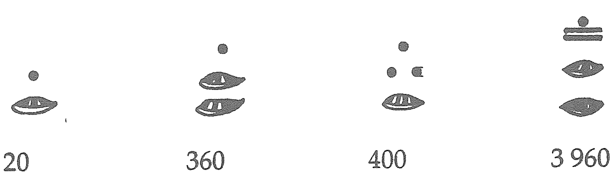
III. - La numération Maya (IIIème siècle après J.-C.).

Document 7. Extraits de : *Histoire universelle des Chiffres*[5].
Détails de stèles. Traductions numériques et Interprétations.



Pl. 130. – Page 24 du Codex de Dresde (détail).
Sächsische Landesbibliothek. Dresden.





1) Expliquer le fonctionnement de la numération Maya.

2) Raconter votre recherche, pas à pas.

* * * * *

5 Ifrah, G. : *op. cit.*, p. 452, Pl. 130.

B) PRÉ-TEST.

1) Écrire en base dix les nombres suivants, qui sont écrits en base deux :

101 ; 10 ; 111 ; 1 000.

Expliquez vos calculs.

2) Écrire en base deux les nombres suivants, qui sont écrits en base dix :

10 ; 15 ; 21 ; 32.

Expliquez vos calculs.

3) Sachant que ❑ vaut 1, ▲ vaut 2, ✱ vaut 8, ∼ vaut 20, ♣ vaut 100, écrire les nombres suivants, écrits en base dix, dans ce système de numération 10 ; 53 ; 127.

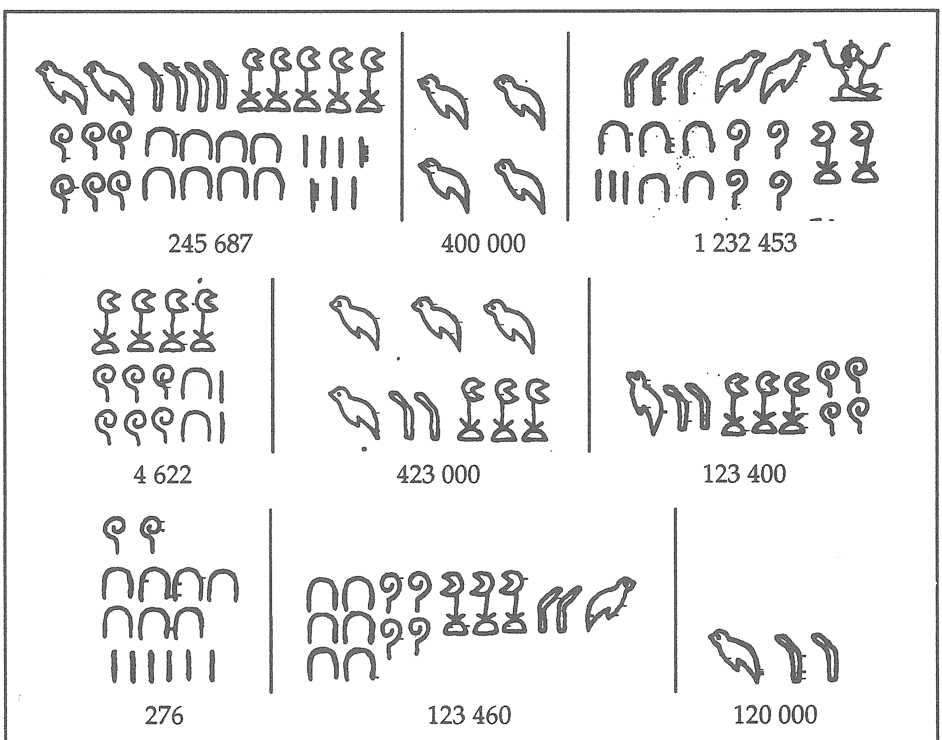
Expliquez vos calculs.

4) Décoder les nombres suivants, écrits dans le même système :

♣ ♣ ∼ ∼ ✱ ; ∼ ∼ ∼ ✱ ▲ ▲ ▲ ❑ ; ♣ ∼ ∼ ✱ ▲ ▲ ❑.

Expliquez vos calculs.

5) Expliquez le “fonctionnement” de cette numération égyptienne :

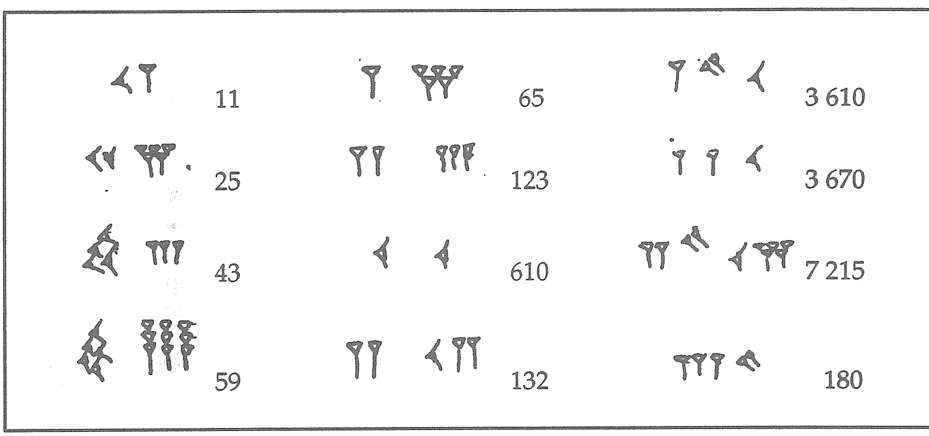


C) POST-TEST.

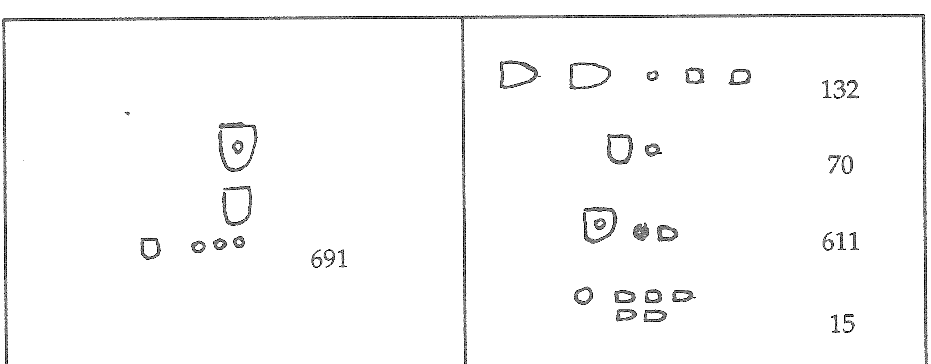
1) Écrire en base dix les nombres suivants, qui sont écrits en base trois :
201 ; 10 ; 2 000 ; 212.
Expliquez vos calculs.

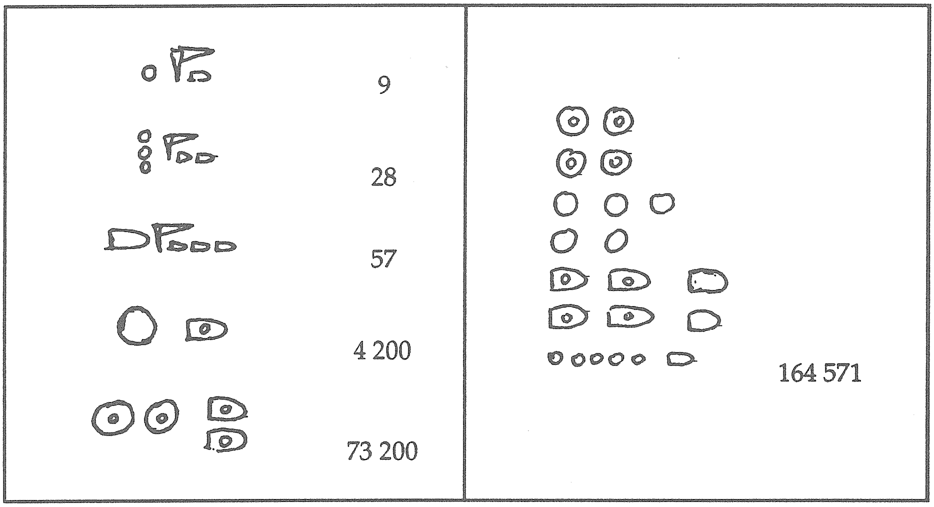
2) Écrire en base trois les nombres suivants, qui sont écrits en base dix :
10 ; 27 ; 15 ; 21.
Expliquez vos calculs.

3) Expliquez le "fonctionnement" du système suivant (valeurs et usages des symboles). Il s'agit d'un système de numération babylonien, utilisé depuis le IIème millénaire av. J.-C. :



4) Expliquez le "fonctionnement" du système suivant (valeurs et usages des symboles). Il s'agit d'un système de numération sumérien, utilisé depuis le XXVIIIème siècle av. J.-C. (tableau ci-dessous et page suivante) :




9
28
57
4 200
73 200
164 571

* * * *