I) "Circuit" ou les règles du débat mathématique

Présentation d'une activité de confrontation des rudiments de la logique mathématique avec les habitudes héritées de la gestion du quotidien

Marc Legrand

0) Objet de l'activité

Aborder franchement avec les élèves ou les étudiants le problème du sens qu'ils accordent au vrai et au faux en mathématiques. Il s'agit de provoquer chez l'étudiant une prise de conscience de l'obligation de distinguer très clairement la signification que les mathématiciens ont convenu de donner aux assertions "c'est faux!", "c'est vrai!", des éventuelles autres significations plus spontanées qu'il est communément admis d'accorder à ces jugements dans une culture donnée.

Cette activité ne donne pas de justification interne aux choix épistémologiques de la communauté mathématique à propos du vrai et du faux (cette justification relevant à notre sens essentiellement de la pratique), par contre la dynamique de Circuit suscite le besoin d'explications à ce sujet. Elle montre la nécessité incontournable pour toute communauté scientifique de faire des choix explicites sur le sens accordé au vrai et au faux.

Nous justifions alors les choix épistémologiques de la communauté mathématique par la considération externe suivante : les mathématiciens, de par les critères de vérité qu'ils ont choisis pour établir leurs théorèmes, construisent des outils intellectuels universels, c'est-à-dire qui se veulent fiables quand ils sont exploités de façon pertinente dans les autres sciences. Nous pensons que cet objectif d'universalité est susceptible d'aider certains élèves ou étudiants (notamment ceux qui sont idéologiquement hostiles à l'abstraction) à entrer dans le jeu mathématique; en effet, il ne s'agirait plus dans ce cas d'être rigoureux pour "le seul plaisir" du professeur de mathématiques, mais aussi et surtout pour pouvoir se servir efficacement des mathématiques dans les applications.

La confrontation de trois pôles de signification

Comme il s'agit de discuter de la signification du vrai et du faux en mathématiques dans le cadre de l'institution scolaire (nos interlocuteurs ne sont ici ni des chercheurs en train d'élaborer un nouveau savoir mathématique, ni des ingénieurs en train de mettre en œuvre les savoirs établis par les chercheurs, mais des personnes qui apprennent), **il nous paraît indispensable au moins pour l'analyse de distinguer très nettement trois attitudes de l'apprenant face à un problème mathématique. En pratique, ces attitudes s'imbriquent et se superposent** souvent sans qu'on puisse toujours trancher pour savoir laquelle est principalement à l'œuvre, et c'est précisément cette imbrication qui fait toute la complexité de la situation d'enseignement. En effet, nous allons voir que si parfois ces attitudes se corroborent et se renforcent, bien souvent par contre (notamment pour décider du vrai et du faux) elles s'opposent profondément et font alors apparaître chez l'apprenant un comportement qui peut sembler parfois incohérent, illogique et paradoxal.

1) Trois attitudes de l'étudiant face à un probleme de nature scientifique

- L'attitude scientifique:

Elle se caractérise par la démarche suivante : face à un problème, qu'il se pose éventuellement de lui-même, l'acteur (élève, étudiant, etc.) imagine des actions directes ou détournées pour le résoudre, mais sauf s'il s'agit d'une trivialité, il ne se lance pas immédiatement dans l'action technique (faire des calculs ou des expériences); au cœur de cette action, il n'hésite pas non plus à faire un pas de côté pour en sortir, lorsque survient une difficulté ou un fait inattendu.

Ces temps de réflexion que l'acteur s'accorde avant ou au cours de la résolution technique lui permettent donc d'échafauder ou de réviser sa stratégie: par des raisonnements essentiellement simplificateurs et qualitatifs (fondés ou non), il interprète les résultats déjà obtenus et/ou anticipe sur les issues raisonnables des actions à venir.

Ceux qui ont adopté cette attitude acceptent donc une sorte de dialectique permanente entre les idées, et les faits qui apparaissent dans la mise en application de ces idées, ils ne se lancent ou ne se relancent véritablement dans le dédale des actions techniques que lorsqu'ils ont pu interpréter grosso modo les issues envisagées en termes de "solution complète" ou de "solution partielle" du problème scientifique.

Pour eux, le terme "solution d'un problème scientifique" intègre, le cas échéant, la conclusion négative en un certain sens : "il n'y a pas de solutions du type qu'on cherchait!".

En clair, lorsqu'un élève manifeste de telles attitudes, on peut penser que son épistémologie personnelle est en bonne adéquation avec celle de la communauté scientifique.

- L'attitude scolaire:

Face à un problème (qu'il n'aurait pas forcément l'idée de se poser), l'élève engage une action ou un discours (adapté ou non), principalement par habitude, par imitation, parce qu'il a reconnu certains indices dans le texte qui lui indiquent ce qu'on attend de lui; il n'a pas confiance en son intuition personnelle et par suite ne la sollicite que très peu. Cette attitude se révèle souvent dans le fait qu'il ne consacre pas beaucoup de temps à déterminer sa stratégie, il n'anticipe pratiquement pas sur ce qui risque de se produire, et **quand un fait survient, il l'enregistre sans véritablement chercher à en donner une interprétation du type "ça va dans le sens voulu !" ou au contraire "c'est mauvais signe !".**

Il semble que pour les apprenants qui ont adopté cette attitude, résoudre un problème scientifique consiste principalement à faire fonctionner les méthodes enseignées. Pour cela il font soigneusement ce qui leur semble devoir être fait, mais ils ne considèrent pas comme nécessaire d'interagir en permanence avec les nouvelles informations que leur apportent les opérations qu'ils effectuent ; ils pensent que si la méthode est bonne, le résultat "tombera" automatiquement à la fin.

Si l'un d'entre eux est arrêté dans ses calculs et que vous lui demandez ce qu'il cherche exactement, ce qui le gêne, ce qui pourrait l'arranger (en modifiant éventuellement certains éléments), il ne comprend pas le sens de vos questions et il vous demande s'il a fait une erreur ou s'il s'est trompé de méthode.

De façon générale, on observe que cette attitude[1] caractérise l'élève qui n'engage aucune conviction personnelle dans la résolution d'un problème scientifique, **ne se pose pratiquement jamais les questions en termes vrai/faux, mais en termes de droit ou d'erreur,** car pour lui l'école et son système d'évaluation sont omniprésents dans la résolution d'un problème scientifique.

Dans cette conception, résoudre une équation pour cet élève, c'est donner une réponse du type "$x_0 = 5$" s'il est en premier cycle du Secondaire, puis "$x_0 = 5 +/- 7$" s'il est en second cycle, puis c'est trouver une formule du type " $y = x^2 \sin(x) + k$ " s'il s'agit d'une équation différentielle $y'=F(x,y)$ en premier cycle du Supérieur ; peu importe donc pour ces élèves ou pour ces étudiants de savoir ce qui se passe dans une certaine réalité et si la solution proposée en est une (" la valeur x_0 obtenue au moyen d'un algorithme est-elle un zéro de la fonction P qui a permis de définir l'équation $P(x) = 0$? la fonction $x^2 \sin(x)$ obtenue par quadrature a-t-elle pour dérivée $F(x, x^2 \sin(x))$ et sur quel intervalle?")

A l'occasion (quand ils discutent à l'extérieur de l'école), ces élèves reconnaissent que s'ils n'étaient pas en milieu scolaire ou universitaire, ils ne traiteraient pas du tout les problèmes comme ils le font là, et ils sont bien conscients qu'ils réalisent souvent des actions auxquelles ils n'accordent personnellement aucun crédit. Ils le font parce que c'est à leur avis "ce qu'on attend d'eux en milieu scolaire !" [2]

---

1) Il semble que les élèves ou les étudiants très scolaires qui n'échouent pas, deviennent d'année en année de plus en plus scolaires, ce qui s'explique par le fait qu'ils vérifient chaque jour la non-obligation pour réussir de se poser des questions de nature épistémologique.

2) On peut penser qu'il s'agit là de faits secondaires! Nous faisons l'hypothèse que si progressivement l'apprenant ne comprend pas la nécessité d'une certaine économie scientifique (quand on voit qu'une opération revient souvent, il vaut la peine de passer du temps à comprendre ce qui fait réellement "marcher les choses"), il risque, malgré une réussite prometteuse dans le cadre scolaire (où l'enseignant a effectué tout un travail écologique en ne mettant dans les données du problème que les renseignements utiles) de s'effondrer devant la résolution du moindre problème réel où la difficulté principale consistera le plus souvent à distinguer ce qui est pertinent de ce qui ne l'est pas !

Par exemple :

- ils développent systématiquement les expressions polynomiales ou au contraire les factorisent (sans intention d'en tirer quelque chose !)

- ils calculent systématiquement la dérivée d'une fonction numérique pour voir si elle est croissante, et ce même s'il s'agit de $x \mapsto x^3 + \exp(x)$ (ils savent que la somme de deux fonctions croissantes est croissante, mais ils ne savent pas s'ils ont le droit de s'en contenter :"c'est peut-être plus rigoureux de faire le calcul de la dérivée!")

- ils affirment que l'expression $\sin[\log(x+1) + \exp(x)]$ est majorée par 1 sur [0,1] parce que c'est une fonction continue sur le compact [0,1]. (Interrogés personnellement, ils disent que c'est parce que sin(x) est toujours inférieur ou égal à 1, mais ils ont considéré que c'était plus sûr d'utiliser un théorème important du cours ; dès lors ils sont tout surpris si on leur fait remarquer que ce n'est pas un bon argument, car ce théorème général ne nous donnera jamais le résultat borné par 1!)

- L'attitude du quotidien:

L'élève ou l'étudiant réagit face à un problème scientifique comme s'il s'agissait d'une situation de la vie quotidienne; il raconte ce qu'il sait et ce qu'il voit comme il le ressent immédiatement. Cela le conduit à affirmer dans certains cas ou à interpréter comme une affirmation, beaucoup plus qu'il n'est scientifiquement convenu de faire et, simultanément, à passer sous silence ou à ne pas tenir compte d'informations qu'il devrait considérer comme fondamentales s'il se situait dans une perspective de généralité :

- Dans la vie quotidienne, fonctionne un **principe du maximum d'information: "celui qui est de bonne foi doit dire tout ce qu'il sait, sinon il ment"**; ce principe est tellement important qu'une personne peut être reconnue pénalement responsable, si elle retient une information.

Ce principe peut devenir diamétralement opposé **au principe d'économie scientifique, i.e. "faire intervenir dans la résolution d'un problème tous les faits pertinents et ne faire intervenir que ceux-là".**

En effet "pertinent" pour le scientifique signifie le plus souvent "qui a valeur de généralité, qui restera stable quand on fera tout varier, ou inversement qui fera tout varier si on le modifie"; par contre "pertinent" dans le langage courant, c'est plutôt repérer ce qui est très particulier, ce qui saute aux yeux, ce qui distingue d'autres objets. Par exemple, un rectangle est souvent décrit par les élèves comme une figure ayant quatre angles droits, deux grands côtés et deux côtés plus petits. Ils ont donc tendance à rajouter l'information non pertinente mathématiquement "ce n'est pas un carré" ("car sinon on l'aurait dit!"). De même ils considèrent qu'un losange ne peut avoir d'angle droit; plus tard ce sont les fonctions monotones qui "n'ont pas le droit" d'être constantes, les fonctions linéaires qui "n'ont pas le droit" d'être la fonction nulle, les fonctions en général qui doivent toujours s'écrire au moyen d'une seule formule explicite, les intervalles de R qui ne peuvent être ni R, ni réduits à un point, ni vides, etc.

- En fait ce principe d'économie scientifique est doublement opposé aux pratiques quotidiennes, où d'une part **on ne limite pas les arguments du discours à ceux qui sont logiquement utiles à la conclusion** (on en rajoute un peu pour donner du brillant, on donne aussi des détails très particuliers pour "faire vrai"); d'autre part, **on ne précise pas ou très peu ce qui relève du contexte** et paraît évident à tous les présents.

Ainsi dans la vie courante, les hypothèses de travail et le contexte précis dans lequel se situent les actions, les explications, les affirmations générales restent le plus souvent du domaine de l'implicite; cet implicite existe aussi partiellement en sciences, mais comme il conduit très rapidement à dénaturer le sens et la portée des propositions générales, on s'en méfie et on le réglemente très fortement.

En mathématiques, la plupart des implicites sont des implicites fortement convenus, ce qui permet par exemple à des chercheurs d'échanger entre eux dans un vocabulaire apparemment flou, mais qui ne laisse en fait que très peu de place aux interprétations personnelles; le plus souvent une simple question, une petite remarque supplémentaire leur suffit pour supprimer totalement l'éventuelle ambiguïté.

L'élève qui adopte l'attitude du quotidien agit apparemment de même, mais d'une part il ignore les codes implicites (ce qui n'est pas à notre sens le plus grave), et surtout **il n'est pas conscient qu'il faudrait convenir d'une façon ou d'une autre de ces implicites**, il est persuadé que tel qu'il s'exprime, c'est clair : il n'y a qu'une seule interprétation possible, celle du "bon sens", c'est-à-dire la sienne !

Ainsi les élèves qui éprouveront le besoin de préciser qu'un rectangle a une longueur plus grande que la largeur ne penseront jamais à dire qu'un rectangle est **d'abord un quadrilatère**, ceux qui voudront qu'une fonction soit donnée par une unique formule **ne se soucieront guère de son ensemble de définition** ou d'une éventuelle double définition contradictoire si d'aventure la fonction est définie au moyen de deux formules, ceux qui vérifieront bien que la dérivée d'une fonction est nulle pour affirmer qu'elle est constante ne se soucieront pas de savoir si **on est sur un intervalle** ou sur **R*** etc. etc.

- Enfin et surtout, il faut bien voir qu'**en "bonne logique" le principe du maximum d'information conduit tout simplement à considérer que toute implication est une équivalence,** parce que sinon "ils l'auraient dit!"

En effet si on a dit "$A \Rightarrow B$" et qu'il s'avère après coup que B peut avoir lieu sans A, il ne fallait pas (suivant ce principe du maximum d'information) donner seulement l'information $A \Rightarrow B$, il aurait fallu dire "$A \Rightarrow B$ et de plus B peut aussi être vrai dans tel autre cas où A n'a pas lieu".

En particulier, si B est toujours vrai, écrire $A \Rightarrow B$ est une véritable perversion dans le langage courant (par exemple dans le contexte d'un groupe de singes normalement constitués, tout le monde déclarera absurde l'implication $A \Rightarrow B$, si A = être un mâle, B = avoir deux oreilles).

- **Au niveau des critères de vérité des énoncés généraux**, on constate que ceux qui sont empruntés à la vie quotidienne sont plutôt de type statistico-utilitaire : c'est vrai si "ça marche" dans un grand nombre de cas particuliers, tout au moins dans les cas particuliers les plus fréquemment rencontrés, ou encore dans ceux que l'on considère comme cruciaux. **La preuve de cette vérité se fait donc à partir d'une explication tendant à rendre la thèse crédible, plutôt que logiquement reliée aux hypothèses** (qui ne sont en général, comme nous l'avons déjà signalé, que très partiellement explicitées). Si les enjeux de l'assertion ne sont pas trop considérables, la certitude de la vérité est acquise dès qu'on n'a plus de raisons évidentes d'en douter et qu'on a constaté le résultat sur quelques expériences consécutives ou sur un cas particulier vu comme une expérience cruciale.

A ce niveau, deux dysfonctionnements majeurs:

Lorsque l'élève ou l'étudiant se réfère principalement aux pratiques du raisonnement quotidien[1], on assiste aux deux dysfonctionnements logiques suivants :

* **Le syllogisme mathématique le plus pur** (modus ponens : si "$A \Rightarrow B$" est un théorème, et si de plus A est vrai, alors B ne peut être que vrai) est un raisonnement que les élèves ne contestent pas formellement, mais qui **"ne fait pas le poids" quand il entre en conflit avec le "bon sens"**, i.e. si le résultat obtenu B est naïvement invraisemblable ou non conforme aux habitudes. (Voir exemple 2) ii) dans la deuxième partie, ou encore celui où des élèves placés face au paradoxe de l'incommensurabilité de la diagonale du carré se mettent à déclarer tout net : "c'est Pythagore qui est faux!")

Ce comportement est lié en partie à la méfiance populaire: "avec des si, on peut montrer n'importe quoi!"; cela tient surtout à ce que chez beaucoup d'élèves et aussi chez des étudiants, **"la réalité mathématique n'est pas très réelle"** une contradiction flagrante pour nous, enseignants de mathématiques, (par exemple quand dans un raisonnement un même nombre inférieur à 3 devient

1) Si, sans négociation préalable sur ce changement assez radical de règle du jeu (entre les mathématiques et la vie quotidienne), le professeur de mathématiques fait remarquer à ces élèves ou étudiants qui persistent dans une attitude du quotidien qu'ils ne tiennent pas compte des contre-exemples, ces interventions sont le plus souvent mal interprétées : ces élèves sont persuadés que le professeur est de mauvaise foi, puisqu'il considère comme faux ce qui est pour eux essentiellement vrai, c'est (se disent-il) un moyen qu'il se donne pour exercer une autorité pointilleuse; même s'ils se conforment à cette volonté magistrale pour éviter les ennuis scolaires, sur le fond ils sont persuadés avoir raison, ils n'ont donc aucune raison véritable de changer de point de vue, et ils ne progressent pas.

supérieur à 4 , ou encore que la somme des angles d'un triangle ne fait plus 180°, que sinus(x) devient inférieur à -2 , ou que l'exponentielle s'annule, etc.) n'est pas forcément ressentie par eux comme un fait insupportable.

En clair, ces élèves n'ont pas compris que si on ne prend pas très au sérieux de tels paradoxes en mathématiques, ce qu'on racontera par la suite ne sera plus seulement "approximativement vrai" (ce qui leur suffirait largement), mais deviendra totalement incohérent[1] pour représenter une quelconque réalité (10^{-8} est "petit" mais pas toujours, car $10^{-8} \times 10^{17}$ est "plutôt grand" !).

**** La règle fondamentale du mathématicien "un contre-exemple suffit pour montrer qu'une propriété générale est fausse"** est le plus souvent remplacée dans le quotidien par **"si c'est vrai dans la plupart des cas particuliers utiles, c'est vrai!"**

Dans la vie courante, si le nombre et la gravité des contre-exemples sont trop importants, ils nous dissuadent d'extrapoler une déclaration générale à partir d'exemples particuliers; mais inversement, si le nombre et surtout l'intérêt (subjectif) des cas où la règle s'applique s'accroissent notablement, nous sommes amenés à considérer (à partir d'un certain seuil toujours très subjectif) qu'il est utile, valable et raisonnable de transformer cette régularité apparente en règle générale.

Cette élévation au rang de règle, dans la pratique quotidienne, n'a donc pas une valeur absolue, il suffit pour que cette opération soit utile que la règle obtenue ne souffre pas de trop d'exceptions (exceptions qui ....confirment la règle !)

Il nous faut donc convenir avec nos élèves ou étudiants (et contrairement à une pratique scolaire où on n'aime pas mettre en avant les oppositions) qu'il y a là une différence irréductible entre le choix épistémologique de la communauté mathématique et celui de la vie de tous les jours.

Ainsi, par exemple, il est bien normal que la proposition : "Si a.c = b.c, alors a = b" (sans donner aucune précision sur la nature du paramètre c) ne soit pas considérée comme fausse par

1) Par exemple, pour donner une certaine réalité aux ordres de grandeur dans le calcul infinitésimal, nous faisons calculer aux étudiants de DEUG A, à partir d'une mise en équation intégrale cavalière (i.e. sans trop se soucier de l'ordre de grandeur des infiniment petits négligés dans les calculs), le volume et l'aire latérale d'un cône. Avec la même procédure (identifier une tranche de cône d'épaisseur dh à une tranche de cylindre de même base et de hauteur dh), ils obtiennent le résultat exact "le volume du cône est égal au tiers du volume du cylindre droit de même base et même hauteur" et le résultat erroné "la surface latérale du cône est égale à la moitié de la surface latérale du cylindre correspondant".

Arrivés à ce stade nous croyons avoir gagné, car ils savent que cette formule n'est pas "la bonne"; nous espérons donc qu'ils vont s'écrier :"mais pourquoi donc la procédure classique se met-elle à donner des résultats aléatoires ?"

Eh bien, si tel est le cas, nous nous trompons encore! La majorité des étudiants ne demandent rien du tout! La surface des cônes n'intervient pas quotidiennement dans leur vie, et pour des cônes "normaux" cette erreur est vraisemblable (on est intuitivement persuadé que l'aire latérale diminue quand on transforme un cylindre en cône et le coefficient 1/2 correspond précisément au cas limite du cône "infiniment haut"); de toutes façons cette erreur est beaucoup moins "insupportable" à certains étudiants que le fait d'aller regarder si des termes sont de la forme $x.\varepsilon(x)$ (opération à laquelle seul le professeur de mathématiques a l'air de s'intéresser; le professeur de physique sait par habitude ou par instinct ce qu'il faut garder et ce qu'il faut négliger dans une mise en équation infinitésimale, mais le plus souvent il ne confie pas aux étudiants les critères de ces choix implicites qui le conduisent néanmoins toujours au bon résultat).

Si donc nous voulons vraiment atteindre notre objectif didactique (montrer que le critère "ces termes sont infiniment petits" n'est pas suffisant pour décider de façon pertinente ce qu'il faut négliger dans les calculs), il nous faut transformer cette légère contradiction en un paradoxe insoutenable!

Pour les amener à cette caricature, nous provoquons ces étudiants sur leur terrain : "puisque l'erreur ne semble pas bien grave, majorez-la! c'est-à-dire faites des paris sur un encadrement raisonnable du coefficient qui devrait remplacer 1/2 dans le rapport entre les deux surfaces!"

Quand ils constatent après coup que le seul encadrement qui tient ici est $[1/2, +\infty)$ (1/2 correspondant aux cônes infiniment hauts et $+\infty$ aux cônes infiniment plats), ils ne peuvent plus aussi facilement légitimer leur légèreté sur le traitement des infinitésimaux, ils doivent reconnaître qu'elle les conduit à un résultat non pas seulement deux fois, mais mille, dix mille ou cent mille fois trop petit.

Cette caricature ne suffit pas pour emporter l'adhésion de tous, mais il semble néanmoins qu'elle permette à certains étudiants de donner un début de réalité à ces infiniment petits qui jusque là n'étaient pour eux qu'un magma à négliger. Dans cette affaire, il semble que le mécanisme de prise de conscience d'une sorte de réalité d'un concept élaboré (comme le sont la plupart des concepts mathématiques) est le suivant : l'apprenant découvre que ce concept rend compte de faits pertinents appréhendables dans un raisonnement du quotidien et qui avaient néanmoins initialement échappé au traitement de son simple "bon sens"! (dans cette optique nous considérons que le faux paradoxe du cône est un bon paradigme pour de telles prises de conscience).

l'élève ou l'étudiant qui reste dans l'attitude du quotidien; et nous pensons qu'on ne peut pas négocier la fausseté de cette assertion si on reste au stade de la rationalité usuelle (en faisant appel au seul bon sens!) ou au stade purement scolaire.

En effet, dans la vie ordinaire, on ne va certainement pas décréter faux quelque chose qui est une infinité de fois vrai et une seule fois faux, et si on se place au seul niveau scolaire, nos élèves vont considérer que nous ergotons négativement: "ces profs ne veulent jamais reconnaître ce qu'on fait de positif puisqu'ils mettent en exergue l'unique cas qui ne marche pas, alors que ce qu'on a proposé marche presque toujours !"

Il nous semble donc que le professeur ne peut en début d'année négocier avantageusement cette affaire qu'au niveau de la règle du jeu mathématique; jeu dans lequel le sens qui est donné au vrai et au faux n'est pas comme ailleurs affaire d'appréciation conjoncturelle ou personnelle[1] : Si un mathématicien déclare en tant que tel qu'une conjecture est vraie c'est qu'à sa connaissance elle n'admet aucun contre-exemple. En d'autre termes, dès qu'il sait qu'une conjecture admet un contre-exemple, même si ce dernier lui paraît insignifiant et sans danger dans son travail présent, il la déclarera fausse !

L'expérience montre que rarissimes sont les élèves qui, connaissant explicitement cette règle du jeu mathématique, la refusent; nombreux sont par contre ceux qui, en terminale, en DEUG, en licence même l'ignorent, et nous soutenons que la non-reconnaissance de la différence de traitement des contre-exemples en mathématiques par rapport aux usages du quotidien est une source d'erreur et d'échec majeure, tant dans le Secondaire que dans le Supérieur.

En fait, même si cette carence est beaucoup plus simple à traiter directement que le dysfonctionnement évoqué précédemment (celui de l'absence de réalité des concepts mathématiques), il nous semble qu'en abordant franchement ce deuxième problème, on s'attaque avec une certaine efficacité au premier : en institutionnalisant fortement la règle "un contre-exemple suffit", on crée les conditions d'une plus grande réalité des assertions générales. En effet, nous constatons régulièrement dans les débats des élèves et des étudiants que l'effectivité du contre-exemple oblige l'apprenant au questionnement scientifique : que veut dire cet énoncé au juste ? n'est-il pas en contradiction flagrante avec tel ou tel exemple particulier que je connais bien ? La réalité de l'énoncé mathématique vient alors pour l'apprenant de sa fiabilité totale : contrairement aux énoncés du quotidien plus vagues, il n'est jamais mis en défaut par les cas particuliers auxquels on le soumet!

En définitive, bien que les trois attitudes précédentes n'apparaissent pas systématiquement de façon aussi tranchée que cette analyse le laisse entendre, et même si un individu peut en changer suivant les moments et les sujets abordés nous constatons néanmoins que chaque élève ou étudiant a tendance, à partir de ses expériences antérieures, à s'installer dans une attitude dominante.

Si donc nous recherchons des formes d'enseignement tendant à provoquer une évolution de l'apprenant vers une attitude plus scientifique, il nous faut, pour pouvoir agir individuellement ou collectivement, repérer des situations où les épistémologies personnelles se dévoilent sans ambiguïté.

Pour ne pas rester dans un discours vague, regardons ce qui se passe sur un exemple classique: celui des opérations algébriques effectuées en vue de résoudre les **équations polynomiales.**

Etude d'un exemple révélateur de l'attitude dominante de l'élève ou de l'étudiant:

Ayant à résoudre une équation q(x)=1, l'élève sait progressivement à partir de la quatrième (tout au moins s'il a vécu consciemment ses expériences antérieures, i.e. s'il a pu développer une

1) C'est sur des points comme celui-ci qu'on peut concrètement mesurer l'économie didactique que représente le fait de passer du temps en début d'année sur des activités comme Circuit. En effet, s'il est tentant et facile pour le jeune élève, mais aussi pour l'étudiant en échec en mathématiques, de "discutailler" tout au long de l'année la mise en application d'une règle fondamentale comme celle-là à chaque fois qu'il se trouvera pris en défaut d'application, il lui est par contre beaucoup plus difficile de la rejeter globalement ici bien qu'il ait de fortes raisons de le souhaiter (l'activité permet en effet d'insister sur la nouvelle exigence intellectuelle que la mise en application de cette règle va imposer à tous ceux qui veulent faire des mathématiques ou les utiliser convenablement). Le rejet global de la règle est ici quasiment impossible, car comme elle est solennellement déclarée "règle cruciale" en mathématiques, notre interlocuteur mesure facilement qu'en la rejetant il s'exclue lui-même totalement du jeu mathématique.

réflexion méta-mathématique sur le calcul algébrique) que s'il transforme l'écriture q(x)=1 en p(x)=0, puis parvient à factoriser p, il va très certainement remplacer la recherche des solutions d'une équation complexe en la recherche de solutions d'équations "plus simples". Il peut donc s'engager, à cette intention, dans une suite de manipulations algébriques utilisant des identités remarquables pour pouvoir faire apparaître des facteurs communs.

A ce stade du travail, on ne peut clairement distinguer s'il s'agit d'une attitude fondamentalement scientifique ou d'une attitude beaucoup plus scolaire (notre élève n'appliquerait-il pas tout simplement la procédure "recette pour résoudre les équations" sans trop savoir ce qu'il fait et pourquoi ?)

Par contre, si en cours d'opération cet élève éprouve des difficultés à réaliser la factorisation convoitée, mais constate que les transformations algébriques effectuées dans un autre but font par chance apparaître p(x) comme la somme de quantités toutes positives dont certaines ne sont manifestement pas nulles (les constantes non nulles, par exemple), un choix crucial s'offre à lui :

- Ou bien, il arrête sa recherche de factorisation, car il la considère dorénavant comme inutile, puisqu'il peut répondre avec certitude "q(x)=1 n'a aucune solution dans le champ considéré"!

Cet élève montre alors qu'il y a déjà une très grande adéquation entre son épistémologie propre et celle en vigueur dans la communauté mathématique, et nous gageons qu'il va pouvoir attaquer avec succès des questions assez complexes sans éprouver de véritables difficultés pour distinguer le vrai et le faux du mathématicien de ceux qu'il utilise dans sa vie extra-scientifique !

- Ou bien, au contraire, il ne peut interpréter la découverte de la positivité stricte de p(x) comme une "solution" du problème scientifique: "déterminez les solutions de p(x)=0".

Devant l'échec de la procédure factorisation, il abandonne le problème, non pas en affirmant "l'équation q(x)=1 n'a pas de solution", mais en déclarant "ce problème est impossible à résoudre" ou "je ne sais pas faire!"

On découvre alors qu'il ne sait pas très bien ce qu'il cherche quand il applique la procédure classique de factorisation, car le moyen est devenu pour lui une fin en soi.

Nous aurons tendance à dire par opposition à la démarche précédente que cet élève adopte ici une attitude scolaire, et il y a fort à craindre que pour lui le critère essentiel de vérité scientifique soit du type "c'est vrai parce que le prof l'a dit ou parce que c'est écrit dans le livre".

Si cette attitude se reproduit, on peut penser que cet élève ne s'est forgé aucun critère sémantique lui permettant de prévoir ce qui "aurait des chances d'être vrai et ce qui serait certainement faux"! On peut donc parier que tant que cet élève ou étudiant n'aura pu aborder explicitement ces problèmes de fond, il sera plus ou moins condamné à ne s'intéresser qu'à la partie mécanisée et répétitive des connaissances du programme, et plus il aura vieilli en l'absence de cette réflexion de fond, plus il sera réticent à l'aborder significativement, car sans le reconnaître explicitement, il sera conscient que son savoir scientifique est extrêmement fragile et il ne souhaitera pas le recevoir en "pleine figure"[1].

- Ou bien, se situant sur un autre registre, il "comprend" que le constat fortuit "p(x) > 0" n'est pas de très bon augure pour la découverte des solutions de l'équation initiale "q(x)=1", et cependant il poursuit sa tentative de résolution par factorisation de p(x) ou par la mise en œuvre d'une nouvelle procédure, au cas où .....!

En clair, notre apprenti scientifique fait ici plus confiance à son intuition et à son bon sens qu'aux faits qui vont contre son désir : il ne peut pas accepter la réponse "q(x)=1 n'a pas de solution" comme une réponse satisfaisante, puisque le problème initialement posé était de trouver les solutions de "q(x)=1" (il s'était mis dans la tête qu'il y aurait des solutions, éventuellement cette équation intervenait dans un problème "concret" plus vaste et une solution de "q(x)=1" aurait été bien utile pour le résoudre).

Notre apprenti refuse donc de se soumettre à la contradiction et au démenti que lui infligent ici ses propres calculs, il ne met pas en cause l'exactitude du calcul, mais sa pertinence à prédire qu'il ne

1) C'est pourquoi la dénaïvation épistémologique à laquelle une activité comme Circuit tente d'aboutir est d'autant plus indispensable qu'il s'agit d'un élève de deuxième cycle du secondaire ou a fortiori d'un étudiant qui n'a pas effectué spontanément les constatations de fond indispensables, mais simultanément c'est de fait une opération psychologiquement et socialement délicate à réaliser auprès de ceux qui en ont le plus besoin. A notre sens, il faut pour y réussir négocier préalablement un contrat très clair sur la signification positive et l'utilité didactique des naïvetés qui vont être produites par les intervenants; nous y reviendrons dans la description de l'activité Circuit.

peut y avoir de solutions, il repart donc à la recherche de solutions, éventuellement par une autre procédure.

Sur le plan épistémologique, cette démarche de "non soumission aux faits", bien qu'elle soit contraire à la démarche scientifique, nous paraît plus facile à faire évoluer que la démarche scolaire précédente, ne serait-ce que parce que ce comportement manifeste une volonté de résoudre effectivement le problème et que, contrairement à l'attitude scolaire, il va provoquer un échec que l'élève ne pourra se cacher (ce qui peut bien entendu dans certains cas inhiber son désir de progresser, mais peut ausi être un puissant stimulant pour l'aider à surmonter l'obstacle).

Pour conclure sur la signification de ces différentes attitudes:

Il est clair qu'à tous les niveaux, on peut multiplier les exemples de situations où il est assez facile de déceler si l'élève ou l'étudiant est ou non en train d'adopter une attitude prioritairement scientifique ou au contraire très scolaire, ou s'il reste enfermé dans la logique du quotidien, en particulier :

- lorsque (à l'inverse du problème précédent) face à une expression polynomiale complexe dont il veut déterminer le comportement à l'infini, l'élève continue à "mettre en produit de facteurs" ou au contraire développe les produits existants et ne s'intéresse alors dans les opérations intermédiaires qu'aux facteurs qui vont déterminer le coefficient des termes de plus haut degré, ou bien encore calcule scrupuleusement tous les facteurs !
- de même lorsque l'élève en phase de recherche,
  * simplifie ou non les calculs en faisant des arrondis ou des majorations grossières afin d'obtenir des ordres de grandeur,
  * calcule ou non la primitive d'une fonction positive pour savoir si son intégrale dépendant de la borne supérieure est ou non croissante,
  * rajoute ou non des hypothèses simplificatrices ou teste directement la propriété sur les exemples qu'il connaît bien pour voir, avant de s'engager plus loin, si la conjecture a des chances d'être vraie etc. etc.
  * supporte ou non la coprésence d'énoncés franchement contradictoires, etc.

La place de Circuit dans le traitement didactique de ces dysfonctionnements:

Autant il nous semble relativement aisé de repérer les situations classiques où les apprenants manifestent très clairement leurs (dys)fonctionnements épistémologiques, autant par contre il nous est toujours apparu très difficile de provoquer, au cours d'actions purement mathématiques, une prise de conscience de ces dysfonctionnements susceptible d'amorcer un changement significatif d'attitude.

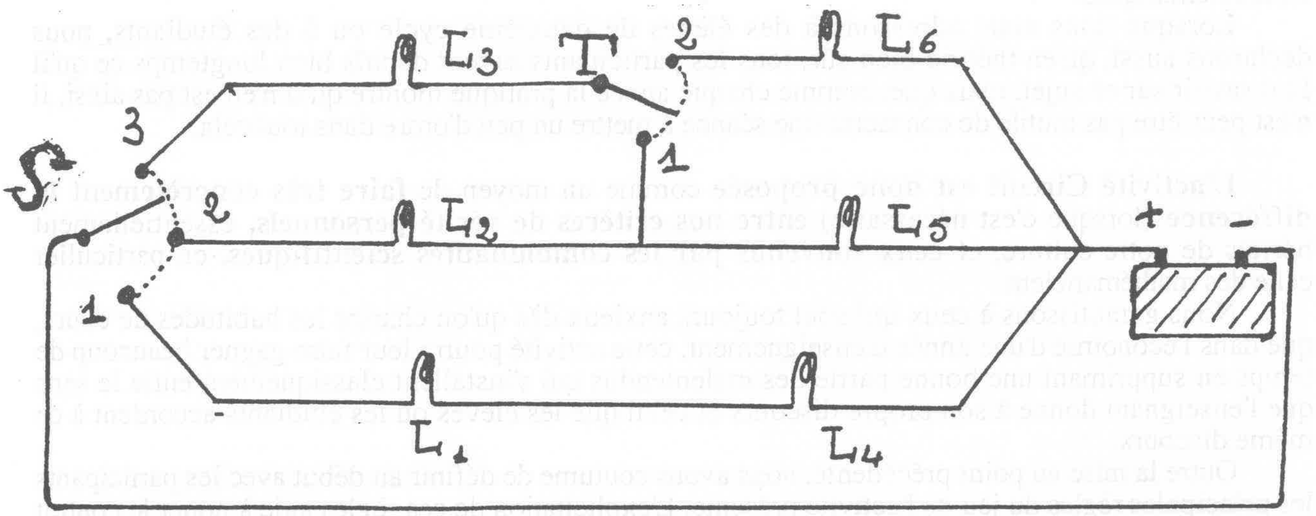
En effet, soit la situation est trop complexe, et l'élève ou l'étudiant en difficulté risque de se méprendre sur le sens de notre explication (il croit qu'on discute d'un problème d'arithmétique, d'analyse ou de géométrie, alors que c'est d'abord d'un problème de conventions logiques), ou bien la situation est suffisamment simple et dépouillée pour que l'explication du dysfonctionnement logique soit identifiable, mais alors beaucoup de participants ne s'étant pas trompés vont considérer à tort que la discussion ne les concerne pas; de ce fait, les autres auront le sentiment de s'être laissés piéger sur une trivialité. Se sentant coupables et ridicules, ces derniers vont probablement mettre en place des mécanismes de défense dont la mauvaise foi ne sera pas exclue, ce qui interdira d'aller au fond du problème.

La teneur même de l'activité Circuit et la façon dont nous vous suggérons de la conduire permettent, semble-t-il, de dépasser cet obstacle didactique[1], en ce sens que la situation légitime d'emblée l'apparition des trois attitudes précédentes et oblige les intervenants à se démasquer. Ces différences épistémologiques engendrent **des conflits irréductibles, sans qu'aucun des points de vue n'apparaisse comme une vérité absolue ou au contraire comme totalement méprisable** : les participants arrivent à des conclusions très opposées, mais honorablement défendables, et ce sur des faits apparemment élémentaires. Les oppositions sont ainsi suffisamment simples et déterminées pour que personne ne puisse ignorer le point de vue adverse.

1) Il est bien évident que le débat de fond qui s'instaure facilement dans une classe ou un amphi à partir de Circuit ne règle à lui seul et définitivement aucun problème, mais il amorce un changement d'attitude dans le traitement de ce type d'erreurs : il montre clairement qu'il peut y avoir des malentendus profonds sur ces sujets en apparence très évidents, il légitime donc qu'on puisse se tromper à ce niveau quand on résoud un problème mathématique et qu'il soit alors nécessaire de faire un pas de côté pour mettre en évidence le malentendu de type logique qui fait écran à la compréhension d'un concept précis ou à la résolution d'un problème technique.

Ainsi chacun est tenu d'argumenter en prenant en compte les points de vues contraires, et devant l'inefficacité (orchestrée en sous-main par la neutralité de l'enseignant) des affirmations péremptoires "c'est vrai parce qu'on le sait!", chacun doit pour convaincre puiser dans son épistémologie personnelle, c'est-à-dire doit peu à peu dévoiler les critères auxquels il se réfère implicitement pour déclarer telle ou telle position vraie ou fausse, ou bien doit reconnaître qu'il n'a pas véritablement de critères pour prendre une telle décision.

2) DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ CIRCUIT



Ce circuit comporte six lampes notées $L_1, L_2,... L_6$ et deux commutateurs S et T. S peut prendre trois positions S_1, S_2 ou S_3, et T peut en prendre deux T_1 ou T_2.

Le circuit ci-dessus est dessiné au tableau ou obtenu en rétroprojection et chaque participant en possède un exemplaire personnel.

Explicitation du contrat didactique et de la règle du jeu:

Nous décrivons ici la pratique à laquelle nous avons progressivement abouti au terme de dix ans d'expérimentations de cette activité dans nos classes et nos amphis. D'autres conduites sont certainement envisageables (la meilleure conduite pour chaque enseignant, à un moment donné, étant toujours celle qu'il "sent" bien); il faut cependant noter que d'éventuels changements peuvent provoquer des apprentissages très différents.

En effet, sur des activités d'enseignement à contenu mathématique pauvre (comme c'est le cas ici) la connaissance perçue par l'apprenant est très sensible au climat épistémologique que saura entretenir l'enseignant[1] (le problème ne serait pas du tout le même s'il s'agissait de traiter de l'introduction du principe de Pythagore ou de Thalès ou du concept de limite ou d'intégrale etc.)

Ainsi, après avoir **précisé qu'une conjecture** est une phrase qui se veut de portée générale et dont le locuteur pense qu'elle est vraie sans pour autant en avoir la certitude, nous affirmons que les conjectures étant le moyen privilégié utilisé par les scientifiques pour consolider leurs intuitions et produire de nouvelles connaissances, il est indispensable pour tous ceux qui veulent apprendre ou

---

1) Nos expérimentations nous ont montré d'une part que cette activité est très robuste : les effets les plus importants se reproduisent d'année en année, même en changeant de niveau ou de professeurs; elle est néanmoins très sensible au respect de certaines règles du jeu qui déterminent la signification que les participants vont donner aux actions dans lesquelles on leur demande de s'investir.
C'est la raison pour laquelle nous nous permettons de préciser quelques détails d'apparence un peu futile : il ne s'agit pas de contraindre la marge de manœuvre du professeur et de limiter son autonomie pédagogique (qui est ici, plus que partout ailleurs, indispensable). Il s'agit seulement de désigner des points sensibles qui ne nous sont apparus comme tels qu'après bien des années d'analyse et d'expérimentation.

utiliser ces connaissances (donc pour nous) de savoir sur quels critères ils décident que telle conjecture est vraie et telle autre fausse. Les conjectures vraies seront, suivant les disciplines et les situations, appelées des principes ou des lois, des propriétés, des axiomes, des lemmes ou des théorèmes.

Pour nouer le contrat didactique nécessaire à la réussite de cette activité, nous avons coutume d'affirmer d'emblée qu'à notre avis ces critères, notamment en mathématiques, ne sont pas toujours ceux qui sont utilisés spontanément dans la vie quotidienne, ce qui peut conduire à des oppositions voire à des paradoxes logiques insurmontables pour celui qui ignore les choix effectués en mathématiques.

Lorsque nous nous adressons à des élèves de deuxième cycle ou à des étudiants, nous déclarons aussi, qu'en théorie bien sûr, tous les participants savent depuis bien longtemps ce qu'il faut savoir sur ce sujet, mais que, comme chaque année la pratique montre qu'il n'en est pas ainsi, il n'est peut-être pas inutile de consacrer une séance à mettre un peu d'ordre dans tout cela.

L'activité Circuit est donc proposée comme un moyen de **faire très concrètement la différence** (lorsque c'est nécessaire) **entre nos critères de vérité personnels,** essentiellement hérités de notre culture, **et ceux convenus par les communautés scientifiques,** en particulier celle des mathématiciens.

Nous garantissons à ceux qui sont toujours anxieux dès qu'on change les habitudes de cours, que dans l'économie d'une année d'enseignement, cette activité pourra leur faire gagner beaucoup de temps en supprimant une bonne partie des malentendus qui s'installent classiquement entre le sens que l'enseignant donne à son propre discours et celui que les élèves ou les étudiants accordent à ce même discours.

Outre la mise au point précédente, nous avons coutume de définir au début avec les participants les principales règles du jeu de l'activité présente. L'explicitation de ces règles aide à nouer le contrat didactique : on ne va pas apprendre aujourd'hui des connaissances franchement nouvelles, mais essayer de supprimer d'éventuels malentendus profonds sur des connaissances apprises de longue date. Ceci requiert la participation des élèves, car un tel objectif de clarification ne pourrait manifestement pas être atteint par un cours magistral.

Les règles du jeu[1] sont les suivantes:

- Le professeur écrira successivement au tableau un certain nombre de conjectures (notées C_1, C_2, etc.), conjectures énoncées à propos de ce circuit électrique.

- Il demandera aux participants de prendre parti personnellement sur la véracité de ces conjectures,

* il doit être clair que l'enseignant a lui aussi un avis personnel sur ces conjectures, mais pendant tout un temps il le taira; en particulier, le fait que ce soit lui qui les ait écrites ne doit pas être interprété dans le sens "il est d'accord" ou au contraire "il les désigne à notre critique parce qu'il y a quelque chose qui ne va pas",

* prendre parti personnellement signifie ici se poser la question : "ai-je sincèrement de bonnes raisons de penser que c'est vrai ou au contraire faux ou encore de ne pas vouloir m'exprimer en terme vrai / faux"; prendre parti personnellement signifie donc qu'on ne joue surtout pas au petit jeu de deviner quelle réponse l'enseignant attend !

- Au bout de quelques minutes de réflexion individuelle ou avec les proches voisins, un vote permettra de savoir si les opinions personnelles convergent ou non, et en cas de désaccord un débat contradictoire permettra d'avoir des explications sur les raisons de ces divergences;

* dans ce débat il doit être clair que l'enseignant n'est pas l'interlocuteur à convaincre (cette règle devra être souvent rappelée dans l'action par l'enseignant, tant la coutume est forte de considérer que le "prof" est le seul interlocuteur valable en cours), ce dernier se contentera dans un premier temps de donner la parole à ceux qui la demandent et d'écrire avec la plus grande neutralité possible les principaux arguments contradictoires proposés par les participants. Les interlocuteurs du débat sont donc les pairs qu'il faut tenter de convaincre en tenant compte de leurs éventuelles objections.

- Au terme de ce débat, l'enseignant pourra proposer un nouveau vote pour voir si les arguments développés ont permis aux opinions de converger.

---

1) Ce sont celles du "débat scientifique en cours" voir II .6

- En tout état de cause, avant de passer à l'étude de la conjecture suivante, il est convenu que le professeur reprendra momentanément sa double casquette de spécialiste et d'enseignant:

* en tant que spécialiste, il signalera les points d'accord ou de désaccord flagrant entre les opinions développées par certains participants (opinions éventuellement promotionnées par un vote majoritaire) et les conventions et choix explicites de la communauté scientifique,

* en tant qu'enseignant, il désignera clairement les démarches de pensée et les résultats effectifs qu'il faudra apprendre et mémoriser : en d'autres termes, suivant un principe d'économie classique en sciences, tout le monde pourra se resservir à tout moment de ce qui aura été institutionnalisé après le débat; il ne sera donc plus nécessaire d'argumenter pour justifier une convention communément et explicitement adoptée, et a priori tout ce qui sera dit en cours devra s'interpréter avec les codes et conventions dont on est en train de récapituler la liste (ce qui n'interdira pas d'éventuelles remises en question de ce qui a été convenu, mais il faudra pour cela justifier de faits nouveaux).

En un certain sens, cette activité peut donc être vue comme la mise en place des lois qui vont régir les échanges de la communauté classe ou amphi de mathématiques; le professeur en tant que spécialiste garantit que la loi de la classe est conforme à celle de la communauté scientifique.

Nous proposons donc l'étude de la première conjecture notée C_1 :

C_1) Si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille elle aussi

suivie de la question : **"Que pensez-vous de cette affirmation?"**

Pour contraindre le style de réponse, nous dessinons au tableau trois cases Vrai / Faux / Autre, en indiquant que les avis individuels seront récoltés par un vote d'ici cinq minutes.

Suivent quelques minutes de recherche pendant lesquelles **l'enseignant s'interdit de prendre la parole afin de laisser les participants suivre le plus possible leur idée personnelle,** il évite aussi de répondre aux éventuelles demandes de précisions (qui ne sont pas toujours innocentes, certains élèves cherchant toujours plus ou moins consciemment à deviner la réponse attendue). En effet, excepté s'il est très entraîné à ce type de pratique (contraire à la coutume de surexplication propre a son rôle), le professeur risque de dévoiler involontairement son point de vue derrière une réponse qui lui paraît anodine.

Nous pensons qu'il est déterminant pour l'efficacité de cette activité que les apprenants ignorent jusqu'à la fin du débat quelle est l'opinion personnelle de l'enseignant (voir deuxième partie).

Après le vote, un débat contradictoire laisse en général entrevoir aux participants, qui se sont placés d'emblée dans un modèle simplifié, toute la complexité de la situation dès qu'on l'aborde sous l'angle d'un circuit réel; cela montre alors que, **suivant la réalité envisagée** (i.e. en fonction de l'expérience concrète de chacun), **la conjecture est soit ambiguë, soit vérifiée, soit en défaut** (voir les exemples de débats en deuxième partie).

A terme donc, la quasi totalité des participants en arrivent à réclamer des précisions, une mise au point, des choix de conventions sans lesquels il devient évident qu'aucun débat sur la véracité d'une conjecture ne pourra déboucher sur un consensus rationnel. (Nous ne donnons pas ces précisions dans la présentation de l'activité, car il nous semble que pour comprendre le fonctionnement de la science, il faut mesurer concrètement les contradictions dans lesquelles on s'enferme automatiquement, quand on essaye d'effectuer un travail scientifique sans passer par une modélisation.)

L'institutionnalisation permet donc de préciser la nécessité dans toute science de faire des hypothèses de modélisation, c'est-à-dire de convenir explicitement que le discours théorique (en particulier l'écriture et l'étude de la véracité des conjectures) ne se place pas dans une confrontation directe avec un réel qui varie trop suivant les personnes qui en parlent, mais avec un monde imaginaire explicitement convenu : un modèle scientifique (par opposition à modèle à imiter).

Le problème de l'adéquation du modèle choisi avec le réel étudié est le travail spécifique de chaque science appliquée qui s'est donné pour objet d'étude ce réel-là (c'est à notre avis ce qui signe la spécificité de cette science et en représente la difficulté fondamentale).

Pour l'heure, puisqu'il s'agit de discuter du vrai et du faux en mathématiques, nous ne nous intéresserons pas au difficile problème des différents choix de modélisations possibles pour tenir compte des différents types de circuit; nous allons prendre la modélisation la plus simple implicitement convenue dans la présentation d'un schéma dit normalisé. D'autres modélisations plus complexes pourraient prendre en compte des phénomènes électriques plus complexes, éventuellement évoqués dans le débat (nous ne les étudierons pas, c'est le travail du physicien).

Le modèle Circuit normalisé:

En général ce modèle est décidé en commun avec les participants; l'enseignant propose de faire le choix le plus simple possible, les axiomes ou les lois du modèle sont donc définis dans le vocabulaire des participants et éventuellement affinés en cours de route s'ils laissent planer quelque ambiguïté, l'important à ce moment étant de convenir de la nécessité d'une modélisation et d'accepter après coup de s'y tenir.

Il est donc explicitement convenu dans ce modèle que toutes les ampoules sont identiques, en bon état, et bien adaptées au courant délivré par la batterie; chacune d'elles ne peut être que dans deux états "allumée ou éteinte" et cette dichotomie, indépendante de l'observateur, est synonyme de : "le courant traverse l'ampoule ou ne la traverse pas".

La loi physique ou l'axiome qui régit le fonctionnement des ampoules dans ce modèle "lampes montées en série sur une batterie" est le suivant:

A) Pour qu'une ampoule s'allume, il suffit que ses deux pôles soient reliés aux deux bornes de la batterie par des conducteurs; on dira alors que le circuit comportant cette lampe est fermé, ou encore que le courant traverse cette ampoule.

A') (Réciproque de A) Si l'un au moins des deux pôles d'une ampoule n'est pas relié par un conducteur à un pôle de la batterie, la lampe ne s'allume pas; on dira alors que cette ampoule est placée sur un circuit ouvert ou encore que le courant ne la traverse pas.

Cet axiome doit être complété par quelques précisions de modélisation des composants:

B) Vis-à-vis d'une autre ampoule, une ampoule donnée se comporte exactement comme un conducteur, soit encore: "si on insère une nouvelle ampoule dans un circuit fermé, il reste fermé".

B') Une ampoule ne peut être que dans deux états : allumée ou éteinte, c'est-à-dire que dans ce modèle dichotomique on ne tient aucun compte de l'éventuelle diminution de brillance que peut occasionner l'insertion de plusieurs lampes en série dans un circuit fermé, de la position de l'observateur, de l'usure de la batterie ou du sens du courant.

B") Sur ce schéma les traits pleins représentent des conducteurs, et un commutateur est considéré comme un conducteur placé entre les deux points du circuit sur lequel il vient physiquement se positionner ; il ne peut jouer ce rôle conducteur qu'entre le point d'articulation et un seul des deux ou trois pôles notés i.

Dans cette modélisation, la conjecture 1 est trivialement vraie, car si par hypothèse la lampe 4 brille, c'est que (A') le circuit est fermé sur cette ampoule; comme la configuration du schéma incorpore la lampe 1 dans ce circuit fermé, la lampe 1 est donc (A) allumée.

Dans l'étude de la conjecture 1, **la connaissance désignée** n'est donc pas pour nous l'appropriation du modèle physique des "circuits séries" (apprentissage qui ne relève pas du cours de mathématiques, même s'il n'est pas interdit a priori de s'entraider), mais la prise de conscience de l'obligation de se situer dans un modèle pour pouvoir entrer dans l'écriture de conjectures scientifiquement discutables en terme Vrai / Faux.

Il arrive aussi qu'une fois la modélisation convenue, le débat reparte sur la question suivante : que se passe-t-il si S n'est pas sur la position 1 ? ne faut-il pas préciser la position de S dans la conjecture pour pouvoir prendre une décision sur sa véracité ?

Il s'agit alors de repréciser le rôle contraignant de l'hypothèse dans un énoncé du type "si ...alors". Cet obstacle très délicat en premier cycle du Secondaire est par contre en général assez bien dépassé (tout au moins tant que la situation n'est pas trop paradoxale, voir conjecture n°6) par la majorité des étudiants.

Ce dernier point réglé, nous convenons donc formellement qu'à partir de maintenant <u>tout</u> débat de conjecture se situera systématiquement dans un certain modèle qu'il <u>ne</u> faudra <u>pas</u> hésiter à expliciter plus que de coutume, si l'on soupçonne la présence de quelque malentendu.

Pour la poursuite de l'activité Circuit, la convention précédente s'applique, et c'est dans la modélisation Circuit normalisé que toutes les conjectures suivantes sont à regarder. Il est donc clair que quelqu'un qui n'a aucune connaissance de physique et qui n'a jamais manipulé de circuit peut maintenant totalement s'investir dans l'activité, puisque la modélisation lui donne tous les éléments pertinents pour juger de la véracité des conjectures proposées.
(Il nous faut en général un minimum d'une heure pour arriver à ce point).

C'est donc sous ces hypothèses de modélisation totalement explicites, que nous abordons suivant le même scénario la conjecture 2 :

C_2) Si la lampe 2 n'est pas allumée, alors la lampe 5 ne l'est pas non plus.

Au cours du vote ou au début du débat, il apparaît souvent nécessaire d'introduire une nouvelle case, la case **"Vrai et Faux"** qui provoque en général un fort déplacement de voix (plus d'un tiers au moment où elle est ouverte).

L'institutionnalisation se fait ici partiellement en cours de débat, car celui-ci fait immanquablement apparaître deux niveaux, celui de la conjecture en tant qu'énoncé général et celui des cas particuliers la concernant.

On distingue trois types de cas particuliers ou événements élémentaires :
- les exemples (de la conjecture), états particuliers du circuit qui vérifient l'hypothèse et la conclusion, ici il y en a trois (S_1 & T_1, S_1 & T_2, S_3 & T_2). Les exemples tendent à montrer que la conjecture est vraie et signifiante.
- les contre-exemples (de la conjecture), événements vérifiant l'hypothèse et non la conclusion, ici il n'y en a qu'un (S_3 & T_1); ils tendent à montrer que la conjecture est fausse, ce sont un peu les non-sens de la conjecture.
- les hors-sujet[1] : ce sont des événements qui ne vérifient pas l'hypothèse, il y en a deux ici (S_2 & T_1, S_2 & T_2); ils sont sans rapport avec les affirmations de la conjecture (qu'ils vérifient ou non la conclusion).

Pour cette conjecture C_2, le bilan est donc que sur les six événements possibles, figurent un contre-exemple, deux hors-sujet et trois exemples !

Et cela pose comme nous l'avons déjà dit de gros problèmes à beaucoup (un étudiant sur deux ou sur trois suivant les années).

Pour les élèves ou les étudiants, la difficulté majeure de cette conjecture ne vient plus du fait que certains font encore intervenir d'autres modèles de circuit que celui qui a été explicitement adopté; **le problème est que cette conjecture est fausse sans être "totalement fausse".** En effet trois exemples tendent à montrer qu'elle est vraie, un contre-exemple s'y oppose. Dans la vie quotidienne on ne dit pas forcément d'une telle phrase qu'elle est fausse, on évalue le poids des exemples et des contre-exemples et on applique sans remords le label faux uniquement si les contre-exemples sont fortement majoritaires, voire occupent tout le terrain !

La force didactique de la conjecture C_2 est qu'elle met ce problème au grand jour et fait éclater le conflit.

L'institutionnalisation permet de convenir de la triple règle fondamentale adoptée par les mathématiciens[2] :

---

1) Ce nom est souvent proposé par la classe pour rappeler ce qui se passe en français quand on fait une dissertation, éventuellement mauvaise ou au contraire très intéressante, mais qui ne sera pas corrigée par le professeur parce qu'elle ne traite pas le sujet proposé. La pratique nous a montré qu'il fallait donner un nom à ces cas particuliers n'intervenant pas pour juger de la vérité d'une assertion, car sinon ils étaient intégrés par beaucoup (deux élèves sur trois en quatrième-troisième, et un étudiant sur trois en DEUG A) dans la famille des contre-exemples.

2) Comme nous l'avons signalé, nous nous référons toujours à des considérations épistémologiques externes aux mathématiques pour faire accepter le bien-fondé de ce choix de la communauté mathématique (très opposé aux usages courants): si les mathématiciens n'avaient pas opéré ce choix, ils auraient "sur le dos" les scientifiques des autres disciplines à chaque fois que ces derniers, utilisant dans leurs modèles des théorèmes déclarés "abusivement vrais",

La triple convention de l'argumentation mathématique

Une conjecture donnée:

0) ne peut être simultanément considérée comme vraie et fausse,

1) est déclarée fausse dès qu'elle admet un contre-exemple

2) est déclarée vraie si on démontre que la présence d'un contre-exemple conduit inévitablement à une absurdité, i.e. met en question directement ou indirectement une des règles du jeu mathématique.

Conséquences épistémologiques de cette triple convention:

1) Le fait d'expliciter la convention (0) (moins évidente qu'elle n'en a l'air puisqu'elle marque de façon péremptoire la séparation entre mathématiques et vie courante) a un double objectif:

- offrir la possibilité de partager les responsabilités entre ceux qui "construisent" les mathématiques et ceux qui les utilisent : si un mathématicien affirme qu'une conjecture est vraie (il l'appelle alors axiome, lemme ou théorème), on n'a pas en vertu de (1) à craindre à l'usage l'accident d'un contre-exemple, et ce même si ce mathématicien ne nous explique pas pourquoi il affirme que la conjecture est vraie. (C'est pour l'utilisateur qui a confiance en la solidité de l'édifice mathématique une économie de pensée qui peut éventuellement lui permettre de concentrer son attention sur d'autres aspects du problème.)
- indiquer très clairement les chimères à ne pas poursuivre: si d'aventure on a repéré un cas particulier qui ne marche pas, on sait par cette convention qu'il est totalement illusoire (comme le font néanmoins beaucoup d'étudiants) de se lancer dans la recherche d'une démonstration au cas où.....: puisqu'on a démontré par ce cas particulier que la conjecture était fausse (1), on ne va pas (0) pouvoir trouver une démonstration miraculeuse qui la rendrait mathématiquement vraie. Il faut donc commencer par modifier l'énoncé de cette conjecture en tenant compte de ce cas particulier, et alors seulement on pourra se lancer avec quelque espoir de réussite à la recherche d'une démonstration de la conjecture modifiée.

2) Si la convention (1) précise un principe très général pour démontrer mathématiquement qu'une conjecture est fausse, l'ensemble des trois conventions ne donne par contre que peu d'indications sur les techniques utilisées par la communauté mathématique pour démontrer une conjecture, i.e. se persuader qu'elle est vraie. La conjonction de ces trois conventions impose néanmoins de grandes exigences de rigueur dans l'élaboration des démonstrations, puisqu'une fois une conjecture démontrée, personne ne devra plus pouvoir lui opposer de contre-exemple.

3) Il y a dans la convention (3) le principe de la démonstration par l'absurde, principe si délicat à justifier auprès des élèves: "Supposons qu'il y ait un contre-exemple et voyons si son existence "produit une absurdité", c'est-à-dire a pour conséquence logique une égalité du type 2=3"; si la réponse est systématiquement oui, cela signifie que l'introduction d'un tel contre-exemple est totalement incompatible avec les règles du jeu mathématique, la conjecture est donc (3) mathématiquement vraie !

4) Il y a aussi dans (3) un procédé de démonstration (la démonstration par exhaustion[1]) réalisable quand il n'y a qu'un nombre fini et petit (six par exemple dans le cas de Circuit) d'événements élémentaires ou cas particuliers possibles. Il suffit alors d'étudier un par un ces cas particuliers pour constater si l'un d'entre eux peut ou non être un contre-exemple. Dans le cas de

---

tomberaient comme par hasard sur le cas particulier qui ne "marche" pas (le contre-exemple dont on n'aurait pas voulu se soucier parce qu'on aurait focalisé toute son attention sur les exemples intéressants).

1) Il est à noter que pour beaucoup d'élèves des classe préparatoires ou d'étudiants, l'énumération exhaustive des cas particuliers (quand elle est possible) faisant apparaître qu'il n'y a pas de contre-exemple ne suffit pas à prouver que la propriété est vraie! Pour eux, par habitude scolaire, il n'y a de démonstration véritable que s'il y a référence explicite à des constructions formelles, des énumérations de théorèmes et des productions de formules (assez, mais pas trop compliquées si possible!).

Circuit on obtient ainsi la démonstration de la vérité ou de la fausseté de tous les énoncés réfutables que l'on pourrait produire dans la modélisation choisie.

La méthode "tester la conjecture sur quelques cas particuliers cruciaux pour déceler la présence d'éventuels contre-exemples avant de s'engager dans une recherche de preuve formelle" nous paraît à conseiller aux étudiants et pour deux raisons :

- d'une part, la preuve formelle d'une conjecture simple est souvent très inaccessible; si on en fait une condition préalable, la plupart des étudiants sont d'emblée privés de spontanéité. Si par exemple la conjecture est fausse, ils déclarent ne pas pouvoir répondre, alors qu'ils pourraient très simplement en donner un contre-exemple, et si elle est vraie, ils se privent de la possibilité de s'en persuader par une exhaustion facile des cas particuliers quand il n'y en a que très peu ;
- d'autre part, si le fait de pouvoir relier logiquement entre eux des concepts différents est un des aspects les plus riches des mathématiques, cela ne doit pas faire oublier un autre aspect de cette discipline : avoir une utilité externe en fournissant des règles d'action, des formules et des algorithmes qui "marchent" bien (i.e. qui n'admettent pas de contre-exemple).

Nos expériences de débat scientifique avec des élèves ou des étudiants tendent à montrer que pour bon nombre d'entre eux, l'importance de l'explication logique offerte par la démonstration qui permet souvent "d'être plus sûr", et de mieux comprendre pourquoi et comment "ça marche", n'apparaît véritablement que dans un deuxième temps, c'est-à-dire une fois qu'ils ont repéré, sur de nombreuses conjectures très vraisemblables, que l'absence de raisonnements logiques reliant les hypothèses à la conclusion ne les mettait pas à l'abri des contre-exemples (que leur "bon sens" initial ne leur laisse pas naturellement soupçonner).

Poursuite de l'activité Circuit

A partir donc de cette convention fondamentale déterminant de façon catégorique le sens du faux et du vrai en mathématiques, les conjectures suivantes seront écrites avec les conventions classiques " L_i = la lampe i est allumée, Non L_i = elle est éteinte, de même S_i = le commutateur S est dans la position i ".

En proposant la conjecture suivante :

C_3) si non L_5, alors non L_2 ,

on permet d'une part aux étudiants de mettre en application les conventions précédentes, on se donne surtout l'occasion de travailler très concrètement sur les concepts de contraposée et de réciproque.

Nous regardons alors sur les conjectures précédentes comment se transforment les exemples, les contre-exemples et les hors-sujet : la contraposée, qui sémantiquement dit la même chose en des termes différents, a les mêmes contre-exemples que l'implication directe, d'où le même caractère de vérité, alors que les contre-exemples de la réciproque sont puisés dans les hors-sujet de l'implication directe, ce qui prouve (contrairement à l'usage courant) l'indépendance totale a priori entre la vérité d'un énoncé et celle de sa réciproque.

A ce stade du déroulement de l'activité, nous avons tendance à considérer que la partie la plus urgente du travail sémantique de "Circuit" est réalisée (environ une heure trente à deux heures). Nous ne nous sentons donc pas obligés de poursuivre à la séance suivante, nous le faisons parfois plus tard ou directement sur des exemples plus mathématiques, en fonction des circonstances. Toutefois nous avons remarqué qu'il ne faut pas trop attendre, car les problèmes fondamentaux soulevés par C_6 ne peuvent être éludés longtemps.

C_4) si L_3, alors L_2.

Cette conjecture, que tout le monde déclare instantanément fausse, est l'occasion de pointer le fait qu'ici la réponse est évidente, parce qu'il n'y a aucun conflit sémantique : tout ce qui n'est pas hors-sujet est contre-exemple!

Comme il n'y a pas d'exemples, personne n'aura de résistance à déclarer que c'est (tout) faux (cette petite discussion sur le consensus facile a pour but de donner de l'élan pour mieux dépasser l'obstacle engendré par le conflit "formel-sémantique" de la conjecture 6).

C_5) si L_1 ou L_6, alors L_3 ou L_4.

C_6) si L_1 et L_3, alors L_2 et non L_5.

Outre les précisions sur les significations du "et" et du "ou" en mathématiques, la conjecture paradoxale C_6 est très efficace pour asseoir avec robustesse la règle *"en mathématiques, on ne peut déclarer une conjecture fausse que si on est en mesure de lui opposer un contre-exemple"*.

En effet, cette conjecture (dont l'hypothèse est irréalisable dans notre modèle) n'admet ni exemples (elle ne sert à rien), ni contre-exemples (elle n'est pas fausse); comme on a la preuve qu'envisager un contre-exemple conduirait à une absurdité (remettrait en cause les hypothèses de modélisation), elle est donc en vertu de la convention (3) mathématiquement vraie!

Ce jugement est très opposé à notre rationalité du quotidien, rationalité dans laquelle on a appris qu'en dehors d'une intention de tromperie, il ne faut pas parler pour ne rien dire! En d'autres termes, dans la vie quotidienne on exige implicitement, pour qu'une assertion générale soit déclarée (de bonne foi) vraie, qu'elle affirme quelque chose d'utile et d'intéressant !

Il y a, derrière le vif débat que soulève cette conjecture, matière à un approfondissement épistémologique autour de la portée d'un énoncé général : un théorème dont on ne connaît aucune application peut n'être qu'une baudruche! Et les théorèmes d'existence dont les élèves ne comprennent pas toujours l'importance sont précisément là pour nous assurer qu'on ne fabrique pas des théories vides !

La philosophie qui se dégage de la discussion de cette conjecture peut se résumer autour des règles d'action suivantes:

- *en mathématiques, ce qui est significatif et utile, ce ne sont pas les axiomes, les théorèmes ou les définitions seuls, mais les couples énoncés généraux-exemples d'applications;*
- *en mathématiques il ne faut surtout pas déclarer faux ce qui est inutile, car ce serait alors donner à cette "inutilité" une importance qu'elle n'a pas et une consistance abusive : dire qu'une conjecture est fausse, c'est apporter un renseignement qui n'est absolument pas contenu dans l'affirmation "ça ne sert à rien !"*

L'expérience montre que cette philosophie est plus facile à dégager dans un premier temps à partir de la caricature C_6 (qu'il faut "logiquement" déclarer vraie, alors qu'elle paraît "absurde") que sur des conjectures plus mathématiques. Les étudiants finissent ici[1] par se plier à cette conséquence paradoxale des règles de la logique, parce que cela n'entraîne pas en retour un jugement négatif sur leur capacité à comprendre les mathématiques (ici, comme il n'y a aucun autre enjeu, ils osent s'insurger contre la convention "c'est vrai quand ça ne dit rien!"; si par contre il y avait un enjeu plus scientifique ou scolaire derrière la résolution de cette conjecture, beaucoup tairaient leur révolte et ne pourraient de ce fait dépasser le faux problème sous-jacent : vouloir que le vrai soit toujours synonyme de significatif).

Après ce choc, l'étude d'un exemple plus mathématique comme le suivant peut montrer que, s'il est vrai que toute loi, toute règle formelle introduit toujours dans certains cas-limites une sorte d'absurdité sémantique, il faut, sans en être esclave (i.e. en étant capable de passer par dessus le formalisme quand il ne sert qu'à compliquer la situation), la respecter dans la forme et dans le fond tout en n'étant pas dupe de l'éventuelle inanité locale de notre démarche. (Le formalisme "absurde" dans certains cas-limites peut redevenir utile et signifiant dans des cas-limites de ces cas-limites).

---

1) On constate qu'après coup ils parviennent à mieux affronter ces faux paradoxes qui apparaissent, sans qu'on le veuille, dans les cas particuliers de résolution de problèmes généraux : ces cas où il n'y a pratiquement rien à démontrer parce qu'on n'affirme plus rien de substantiel, mais où les élèves et les étudiants se sentent perdus, car ils sont déstabilisés par la contradiction qu'ils relèvent avec des habitudes héritées de la logique du quotidien (voir exemple ci-après).

Un exemple de cas mathématique limite:

Soit (U_n) la suite définie par récurrence

- $U_0 = 1$
- $U_{n+1} = 2.U_n+3$ pour $n \geq 1$.

Soit H_n la propriété " $U_n \leq 10^{-5}. 2^n - 3$ ".

Question : La propriété P_{U_0} "pour tout entier n, $H_n \Rightarrow H_{n+1}$" est-elle vraie?

Comme tous les étudiants peuvent démontrer en quelques secondes que $H_n \Rightarrow H_{n+1}$, il leur serait très désagréable de dire que P est fausse, et cependant ils sont bien gênés quand ils remarquent que l'hypothèse H_n et la conclusion H_{n+1} sont toujours fausses (si $U_0 =1$).

Ils peuvent alors constater la souplesse d'utilisation du formalisme mathématique qui nous oblige ici à dire que P_{U_0} est vraie et ce, quelle que soit la valeur de la condition initiale U_0 .

En faisant varier cette condition initiale, on remarque alors que si $U_0 > -3 +10^{-5}$, la propriété P_{U_0} est vraie, mais totalement inutile puisqu'elle ne dit rien!

Si par contre $U_0 \leq -3 + 10^{-5}$, la propriété P_{U_0} toujours vraie devient utile, puisqu'elle prouve alors par récurrence que H_n est vraie pour tout n ; dans aucun de ces cas, par contre, ce formalisme ne nous conduit à une absurdité du type 1= 0 !

Variantes de l'activité "Circuit":

On peut aussi à partir de la troisième conjecture de "Circuit" intercaler des conjectures plus mathématiques, mais l'intérêt de le faire dépend essentiellement de la tournure que prennent les discussions. Si elles sont très riches et alimentées par des participants très divers, on n'a pas forcément avantage à revenir trop tôt sur des enjeux très mathématiques : les élèves ou les étudiants réputés faibles, qui (se) surprennent souvent dans cette activité par la pertinence de certaines de leurs interventions, ont alors tendance à s'investir fortement ; ils risquent, par ce changement de cap, de retourner à une attitude de défense passive.

En effet, les étudiants en difficulté savent pertinemment qu'ils ont, sur le terrain des réflexes mathématiques, un handicap considérable vis-à-vis de certains de leurs camarades ; beaucoup seront persuadés qu'il ne vaut plus la peine de donner un avis qui trahirait plus une méconnaissance qu'un malentendu. Dès lors l'activité ne va plus les passionner suffisamment pour qu'ils acceptent de faire le pas de côté qui ferait évoluer positivement leurs pratiques courantes. Il est clair que ce serait un échec pour eux, mais aussi pour les autres participants, car les contributions naïves sont souvent celles qui obligent le plus certainement à un questionnement de fond!

L'activité Fonction ci-après est, quant à elle, conçue pour se substituer à l'activité Circuit ; elle en est la transposition purement mathématique. Elle permet de traiter plus économiquement l'essentiel des aspects pris en compte par les conjectures 2 à 6 de Circuit électrique[1], mais comme elle impose une moins grande confrontation entre logique du quotidien et logique mathématique, elle perd de fait certains atouts fondamentaux. Néanmoins un tel choix peut être un biais pour aborder plus prudemment ce délicat problème didactique; il ne faut pas se cacher qu'il peut aussi être le bon moyen de repousser le moment où on l'abordera franchement.

Fonction : Soit $f: \{1,2\} \times \{ 1,2,4\} \dashrightarrow \mathbb{N}$
définie par : $f(x,y) = y^x$.

Examiner la véracité des énoncés suivants:

1. Si $x+y = 4$, alors $f(x,y) = 4$.
2. Si $f(x,y) = 1$, alors $x=y$.
3. Si $f(x,y) = 8$, alors $x=2$.
4. Négation de 3. (préciser cet énoncé)
5. Contraposée de 2.(préciser cet énoncé)
6. Si $f(x,y) = 4$ et $x>1$, alors $y = 2$.
7. Si $f(x,y) = 1$ et $x \neq 2$, alors $y = 1$.
8. Négation de 7.(préciser cet énoncé)
9. Contraposée de 7.(préciser cet énoncé)
10. Si $f(x,y) = 16$ ou $y=2$, alors $x=2$.

---

1) Elle évacue bien entendu le problème de la modélisation, qui nous paraît capital dans la compréhension du rapport positif que les mathématiques entretiennent avec les autres sciences. Ce point nous parait crucial à une époque où l'idéologie ambiante du "soyons concrets" pousse l'élève et l'étudiant à se désinvestir de tout effort théorique.

II) Compléments autour de l'activité Circuit

1) UN PEU D'HISTOIRE AUTOUR DE LA MISE EN PLACE DE CETTE ACTIVITÉ

Entre la curiosité pour une telle activité et l'intention ferme de la réaliser se situe une double interrogation: celle de sa nécessité et de sa crédibilité.

Si vous enseignez en second cycle des lycées ou dans le supérieur, vous avez probablement constaté comme nous des dysfonctionnements très importants, relevant d'une attitude trop scolaire ou trop ancrée dans une rationalité quotidienne. Si vous poursuivez cette lecture, c'est probablement aussi que vous pressentez que des activités de type Circuit permettent de s'attaquer positivement à des difficultés profondes inhérentes à l'enseignement scientifique; cela ne signifie pas pour autant que vous ayez actuellement décidé de la pratiquer dans vos classes ou dans vos amphis.

Si vous éprouvez des résistances intérieures et différez la mise en œuvre, nous croyons pouvoir comprendre, en partie au moins, vos réserves et votre prudence, car nous avons éprouvé nous-mêmes de nombreuses réticences et angoisses avant d'attaquer de front ces problèmes en deuxième cycle du secondaire et dans le supérieur, à partir d'activités d'apparences aussi naïves. C'est pourquoi il n'est peut-être pas inutile que nous vous proposions un bref aperçu historique de notre propre évolution autour de cette activité.

Des erreurs historiques dont il faut tirer la leçon:

Les abus du "tout formalisé" des années 1970 qui ont eu des conséquences pédagogiques dramatiques ont au moins eu l'avantage didactique de nous montrer clairement qu'il ne fallait pas compter sur l'enseignement formel du formalisme mathématique pour résorber (comme on l'avait espéré un peu naïvement) les incompréhensions profondes des élèves en mathématiques.

En effet, si l'apprentissage formel des tables de vérité et des rudiments de la théorie des ensembles ne posait pas de problème didactique insurmontable (c'était même parfois un réel succès), on n'en constata néanmoins pour ainsi dire jamais la moindre efficacité sémantique. En clair, suite à cet enseignement, personne ne put mettre en évidence de façon tangible un accroissement des compétences des élèves quand ils se retrouvaient aux prises avec les formalismes utiles de la science, i.e. face aux "vraies implications mathématiques" ("vraies", c'est-à-dire celles qui apparaissent à chaque instant dans les raisonnements, sans se présenter formellement sous l'aspect $A \Rightarrow B$), et face aux "vrais" quantificateurs, c'est-à-dire par exemple ceux qui sont implicitements présents dans les énoncés de géométrie ("Dans un triangle isocèle..." au lieu de "Dans tous les..." etc.) ou explicitement présents en analyse et permettent de donner un sens précis à la continuité et aux limites.

En d'autres termes, l'aventure des mathématiques modernes montrait que la logique prise comme objet d'étude s'enseignait "plutôt bien", "trop bien" même car elle devenait très naturellement un objet d'enseignement en soi qui sécrétait ses définitions, ses notations, ses exercices et ses problèmes, mais que cet enseignement qui envahissait tout ne servait qu'à lui-même puisque l'élève ne reconnaissait plus l'objet qu'il avait formellement étudié, ou ne savait plus le faire fonctionner quand il devenait outil pour faire des mathématiques.

D'où la réaction épistémologique très vive de la part de certains chercheurs en mathématiques vis-à-vis de ce qu'ils virent comme une véritable perversion didactique, ce qui entraîna le rejet et l'abandon pur et simple d'un enseignement qui avait été un peu légèrement considéré quelques années plus tôt comme la panacée.

Dès 1976, nos expérimentations nous ont progressivement persuadés qu'on avait probablement "jeté le bébé avec l'eau du bain", c'est-à-dire que si on devait bien entendu tenir le plus grand compte des effets pervers des excès de 70, on ne pouvait (pour satisfaire à l'idéologie dominante du "soyons pragmatiques et faisons concret") négliger comme on le fait actuellement d'asseoir les bases de la logique en vigueur en mathématiques.

Notre cheminement autour de cette activité:

Pour aborder ce problème avec des élèves de 6ème-5ème, nous avions à cette époque introduit en classe une activité qui avait été exploitée par Bernard Dumont dans sa thèse (L'influence du langage et du contexte dans des épreuves de type "logique". Paris VII 1980)

Nos élèves devaient d'abord donner par écrit leur opinion sur certaines affirmations faites à propos d'un circuit d'autobus; suivait une discussion en classe au cours de laquelle chaque élève défendait son point de vue.

Devant le succès didactique de cette activité en 6ème-5ème en regard des difficultés persistantes que nous rencontrions sur ce sujet en 4ème-3ème et au delà, nous pensâmes l'utiliser à ces niveaux. Le succès de l'entreprise fut mitigé: certains élèves de ces classes ne prenaient pas le problème au sérieux à cause de la connotation trop enfantine d'un circuit automobile. Nous avons donc tout simplement remplacé les autobus par de l'électicité pour "faire plus sérieux" et le circuit électrique proposé ici est isomorphe, logiquement parlant, au circuit d'autobus initial. L'électricité introduisait de fait une difficulté supplémentaire, mais comme l'investissement des élèves était plus grand, ce handicap était très largement compensé !

Au fur et à mesure que nous développions ces expérimentations en premier cycle du Secondaire, nous constations que nos étudiants de premier cycle du Supérieur souffraient apparemment et inconsciemment des mêmes difficultés. En effet, alertés précisément par les discussions que nous menions avec les élèves du Secondaire, nous devenions sensibles aux indices qui laissaient voir que très souvent nos étudiants n'étaient pas essentiellement bloqués par la spécificité des concepts abordés, mais surtout parce qu'ils faisaient les "mêmes" contresens logiques, et en un certain sens "végétaient" au "même" niveau épistémologique que nos élèves de quatrième. **Le problème était d'autant plus crucial qu'il était très difficile d'en parler avec eux, car eux "étaient censés savoir"!**

Peu à peu nous nous sommes convaincus que si nous ne trouvions pas une activité spécifique, dans laquelle il soit légitime pour un élève de terminale ou un étudiant de montrer qu'il n'a en fait pas vraiment compris les fondements sur lesquels s'appuie l'activité mathématique, toute tentative d'éclaircissement sur la logique demeurait plus ou moins vouée à l'échec, car personne n'oserait regarder en face l'ampleur du désastre.

Maintenant, nous n'hésitons pas à dire qu'un titulaire du bac C confond régulièrement dans l'action "contraposée et réciproque", n'est pas très sûr de savoir si pour démontrer qu'une propriété est fausse, il lui suffit de donner un contre-exemple ou si au contraire il doit fournir tous les contre-exemples! Nous savons que bon nombre d'entre eux se méfient des contre-exemples trop simples (ça ne fait pas sérieux), et ont compris à l'envers la leçon reçue sur la généralité des assertions scientifiques : on leur a dit maintes fois qu'on ne "démontrait" pas une proposition à partir de quelques exemples particuliers; or comme un contre-exemple est un cas particulier, pour certains, sa présence ne "démontre" donc pas la fausseté d'une conjecture!

Enfin, pour beaucoup un contre-exemple est un cas particulier utilisant les mots (pour ne pas dire les consonances) de la proposition et "ne satisfaisant pas à quelque chose" (ni à ses hypothèses, ni à ses conclusions, ni aux deux) !

Par exemple, la conjecture fausse "les fonctions continues sont dérivables" est rejetée par certains avec comme faux contre-exemple : "la fonction partie entière de x" (qui est dérivable quand elle est continue, et non continue là où elle est non dérivable). Comme elle est "contre tout", elle doit certainement prouver que c'est "tout faux" !

Nous n'interprétons pas ce dernier fait comme signifiant que de tels étudiants n'ont rien compris aux rapports continue-dérivable, nous pensons au contraire que certains "voient très bien" qu'il y a des liens et des différences entre ces deux concepts, mais ils ne disposent d'aucun outil logique pour formaliser ce qu'ils "voient", c'est-à-dire pour l'expliquer clairement à quelqu'un qui ne le saurait déjà !

Constatant donc que nos étudiants de DEUG A faisaient les mêmes erreurs de logique que nos élèves de sixième-cinquième et voyant que les explicitations que permettait l'activité Circuit en premier cycle du Secondaire allaient souvent beaucoup plus loin que les discussions que nous pouvions mener à chaud en premier cycle universitaire, nous en avons conclu que cette activité avait des vertus plus importantes que nous ne le soupçonnions, puisqu'elle permettait de mener régulièrement une discussion méta-mathématique de fond que l'on ne savait provoquer autrement.

Néanmoins, dans notre psychologie d'enseignants (on ne croit pas beaucoup à la profondeur des acquis scolaires, mais on est quand même persuadé que les élèves finissent au fil des années par apprendre et comprendre les notions les plus fondamentales qu'on utilise plus de cent fois par an) il n'était pas concevable d'utiliser avec des étudiants de DEUG A ou de classes préparatoires une activité qui avait pour unique objet de connaissance l'institutionnalisation des règles du jeu à partir desquelles sont écrits et doivent être interprétés tous les énoncés mathématiques qu'ils rencontrent depuis la classe de quatrième!

Dans nos prévisions donc, soit les étudiants n'allaient pas prendre cette activité au sérieux et ce serait la débandade, soit il allait se trouver une bonne proportion d'entre eux qui, connaissant parfaitement les bonnes réponses, "casseraient la baraque" en surmontant immédiatement la plupart des difficultés que Circuit est censé faire émerger progressivement.

Cette éventualité ruinerait l'efficacité didactique de notre entreprise, car devant ces "trop bonnes réponses" le professeur serait obligé de passer à la suite (sans que bien entendu ceux qui n'avaient rien compris aient eu le temps de s'en rendre compte), et quand on serait arrivé en vingt minutes au terme de l'activité, l'enseignant n'aurait plus qu'à s'excuser d'avoir fait perdre ce précieux temps à ceux qui savaient comme à ceux qui ne savaient pas !

Nous avons appris depuis, qu'un étudiant ne peut "casser la baraque" qu'avec la complicité de l'enseignant, quand ce dernier fait la part trop belle à ce qu'il juge un peu naïvement être "la bonne explication 1" (pour lui, mais pas nécessairement pour la classe ou l'amphi).

De fait, ces "trop bonnes" interventions, loin de régler instantannément le problème, ne font au contraire que rendre l'institutionnalisation ultérieure plus prégnante et efficace, car ceux qui n'ont pas bien compris et se trompent franchement, entendent par ce dispositif une explication à deux voix et en deux moments.

En effet, il suffit au professeur (qui ne prend pas ombrage de telles interventions puisqu'il les sollicite) de ne pas les soutenir immédiatement, mais au contraire de favoriser la contre-argumentation qui à terme mettra en valeur ce que cette "bonne argumentation" apportait de plus. Ce n'est qu'au moment de la synthèse finale qu'il apporte sa caution magistrale aux arguments les plus pertinents développés par un tel et un tel, en les réordonnant par rapport aux objections ou propositions contraires et en apportant d'éventuels compléments épistémologiques et didactiques.

Nous avons maintes fois pu constater que cette opération a le double avantage d'une part de valoriser les interventions pertinentes, puisqu'elles deviennent ostensiblement les matériaux de la connaissance institutionnalisée, et d'autre part de laisser un temps de maturation à ceux qui pensaient initialement tout le contraire. Ces derniers sont déstabilisés une première fois par un pair (quelqu'un qui n'a pas forcément raison, mais qui leur signale cependant un fait troublant); dans un deuxième temps, leurs propres arguments défendus éventuellement par un pair apparaissent de moins en moins crédibles au fur et à mesure que le débat en force l'explicitation. Dans un troisième temps, leur méprise est franchement mise en évidence par l'enseignant. Celui-ci peut néanmoins valoriser l'apport didactique de leur erreur scientifique : cette erreur (surtout lorsqu'un vote indique qu'elle est largement partagée) montre que le problème est moins naïf qu'il pouvait paraître, le fait d'avoir pu l'identifier pourra donc aider à moins la reproduire.

Après maintes hésitations donc, nous avons pris le risque d'essayer l'activité Circuit dans un amphi de DEUG A_1 (120 étudiants de première année d'université dont plus de la moitié ayant réussi le bac C) et l'activité ne fit pas sourire, loin de là ! Au bout de deux heures nous avions juste traité les deux premières conjectures, et il fallut encore deux autres heures pour traiter les quatre conjectures restantes (et ce fait s'est depuis reproduit avec une assez grande régularité en DEUG A ou en classe préparatoire).

Dans l'économie d'une année, nous pouvons affirmer que nous n'avons jamais regretté ces deux ou quatre heures, nous pouvons même par comparaison mesurer ce que nous perdons quand nous "ne les perdons pas". (Par exemple, depuis deux ans en DEUG A_2 nous ne proposons pas cette activité, parce qu'en particulier un tiers des étudiants l'ont suivie en première année; nous pouvons par comparaison entre le niveau des débats de première et de deuxième année mesurer en malentendus persistants, voire en impossibilité d'identifier ce qui ne "marche" pas, ce que coûte le fait de ne pas avoir remis les choses au point de cette façon en début d'année.)

En conclusion sur la crédibilité de cette activité : nous pouvons dire, maintenant qu'elle a été reprise par différents enseignants à différents niveaux, qu'elle est très consistante et robuste. Depuis dix ans que nous travaillons dessus, elle a toujours (du moment qu'ont été respectés certains

1) Pour nous maintenant, "la bonne" explication, c'est celle qui atteint ceux qui ne l'ont pas, c'est-à-dire celle qui prend en compte les convictions erronées des participants et trouve des arguments susceptibles de les faire évoluer vers des convictions plus adaptées; et ces "bonnes" explications-là sont d'une toute autre nature que le message codé envoyé à l'enseignant pour lui signaler qu'on sait ou qu'on a compris. Même les étudiants dits "forts" ont beaucoup à approfondir pour parvenir à de telles explications, et pour en être capables ils doivent apprendre à écouter les arguments souvent embrouillés, mais non absurdes de leurs camarades.

principes de base) permis de débloquer des malentendus profonds que nous ne savons pas traiter autrement; mais disons également, même si cela fait sourire, qu'il nous a fallu tout ce temps pour en découvrir l'épaisseur sémantique.

Aussi, pour essayer de vous faire gagner un peu de temps, nous vous soumettons ci-après la reconstitution de quelques débats de classe ou d'amphi, car ce sont eux qui nous ont montré le parti qu'on pouvait tirer d'une telle activité.

Les interprétations que nous donnons en sus s'inspirent tout autant des faits rapportés que d'autres faits analogues (non rapportés pour une question de place). Il est clair que d'autres interprétations sont possibles (nous sommes toujours extrêmement friands de toutes les remarques et observations personnelles que vous voudrez bien nous communiquer sur ces questions) et nous ne prétendons pas avoir raison; nous voulons seulement par ce biais focaliser votre attention sur certains faits, émettre des hypothèses et vous proposer les explications qui nous sont progressivement apparues comme pertinentes (c'est-à-dire celles qui, semble-t-il, nous aident à mieux comprendre certaines situations délicates et à prendre des décisions plus circonstanciées).

2) DES BRIBES DE DEBATS DE CLASSE OU D'AMPHI MONTRANT CONCRETEMENT LES PATHOLOGIES AUXQUELLES S'ATTAQUE L'ACTIVITÉ CIRCUIT

Ces bribes de débats révèlent, nous semble-t-il, une certaine incompréhension des règles du jeu mathématique.

i) Au tableau figure la double inégalité : $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$.

Un élève de 4ème réagit : "C'est faux ! on ne doit pas écrire $\leq$, mais < ! "

(A notre avis, il s'agit ici du principe du maximum d'information : chacun sait que π n'est égal ni à 3,14 , ni à 3,15 . Cet élève nous reproche de faire comme si on ne le savait pas ! Dans sa rationalité du quotidien il ne ferait pas cela, donc c'est faux !)

ii) Pour montrer que $(\pi-3{,}129)/(3{,}212-\pi) \geq 1$, l'enseignant utilise la double inégalité:

$$\text{(a)} \qquad 3{,}14 < \pi < 3{,}2$$

ce qui lui permet de minorer le numérateur par 0,01 et de majorer le dénominateur par 0,01.

Un élève de seconde s'élève contre ce procédé : "Je ne comprends pas comment vous faites?"

L'enseignant, considérant qu'il s'agit d'un raisonnement délicat qui mérite bien la remarque de l'élève, s'empresse alors de rappeler le principe:

(M) "Pour minorer une fraction de nombres positifs, il suffit de minorer le numérateur et de majorer le dénominateur".

L'élève proteste: "Ce n'est pas ça qui me gêne ! C'est l'inégalité (a) qui est fausse !"

Le professeur engage alors la discussion avec la classe, qui de fait est très partagée sur ce sujet.

Les explications données par les partisans de l'affirmation **"(a) est faux"** sont approximativement : "c'est faux, parce que vous auriez dû écrire:

$$\text{(a')} \qquad 3{,}14 < \pi < 3{,}15 \text{ "}$$

(Ces élèves précisent ainsi que la non symétrie de l'inégalité (a) les dérange, c'est pour cela qu'ils la déclarent fausse et veulent la remplacer par l'inégalité plus stricte, mais symétrique (a').)

L'enseignant fait remarquer que **$3{,}15 < 3{,}2$** et tout le monde est d'accord avec lui sur ce point, mais cela ne modifie pratiquement pas le nombre des adversaires de (a) !

Pour l'enseignant de mathématiques la situation est bloquée, car le syllogisme "(a') $\Rightarrow$ (a)" et (a') devrait persuader tous les élèves de la classe de la vérité de (a). Or pour beaucoup d'élèves de cette classe de seconde, cette logique-là n'est pas celle qui est à l'œuvre à ce moment précis!

Notre lecture de la situation est qu'ici il y a une vraie difficulté (le raisonnement (M)) et une coutume scolaire ("en sciences on fait presque toujours des encadrements décimaux symétriques"); comme certains élèves sont déstabilisés par (M), ils rejettent ce qui leur paraît bizarre : l'inégalité inhabituelle (a). A partir de là, le syllogisme que l'enseignant démonte devant eux est pratiquement sans effet sur leur opinion.

Une fois donc déstabilisés, les élèves appellent "faux" ce qui n'est pas habituel ; ce "faux" ne veut certainement pas dire que d'aucuns pensent que $\pi > 3{,}2$ ou au contraire que $\pi < 3{,}14$; "faux" veut dire, semble-t-il : "je ne pense pas qu'on ait le droit de faire cela !", "je crois qu'une telle procédure me serait reprochée dans un devoir", etc. Ce faux n'est manifestement pas celui du mathématicien!

iii) Au tableau d'un amphi de DEUG A_1 figure la conjecture C_1:

C_1) Si une suite $(x_n)_n$ de nombre réels positifs tend vers 0 , alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.

La quasi-totalité de l'amphi exprime après 5 minutes de réflexion la conviction que cette conjecture est vraie, ce qui nous semble tout à fait normal.

Après que plusieurs fausses démonstrations ont été proposées et critiquées tour à tour par des étudiants, l'un d'entre eux (E°) déclare avoir trouvé un contre-exemple:

E°) "Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_n = 1/n$ si n est pair, et $x_n = 0$ si n est impair."

L'enseignant écrit cette proposition au tableau devant un amphi devenu très silencieux, car beaucoup sont profondément persuadés que la conjecture est vraie ; mais assez rapidement un autre étudiant demande la parole pour réagir :

E') "ça ne prouve pas que C_1 est fausse, car c'est un cas particulier!"

Cet étudiant est apparemment soutenu par beaucoup d'autres étudiants qui sont soulagés de voir le danger s'écarter.

E°) a beau réaffirmer : "c'est un contre-exemple!", il n'emporte pas l'adhésion de l'amphi qui se tourne visiblement vers l'enseignant pour qu'il tranche !

A ce moment un autre étudiant tente de porter le coup de grâce à ce contre-exemple dérangeant:

E") "Pour n = 0 , x_n ne marche pas !"

Face à un fait qui va à l'encontre d'une conviction erronée très profonde (la convergence vers zéro d'une suite positive est forcément monotone à partir d'un certain rang), **l'étudiant a recours à tous les arguments de type scolaire** qu'il s'est vu opposer en tant qu'élève (et qu'il a éventuellement ressentis comme des injustices) : il s'est souvent entendu reprocher de faire des "démonstrations particulières", il se saisit donc de cet argument "magistral" pour rejeter un contre-exemple qu'il va déclarer particulier ; on lui a reproché de ne pas considérer les cas particuliers où le dénominateur s'annule, il se saisit de ce fait ici pour rejeter le contre-exemple, qui n'en est pas un formellement, mais convient sémantiquement puisque ce qui se passe sur les premiers termes de la suite n'est visiblement pas l'objet de la conjecture !

On pourrait penser que ces contradicteurs sont de mauvaise foi, car la règle "un contre-exemple suffit" n'est pas formellement ignorée par les étudiants de ce niveau, et chacun sait bien qu'il n'y a qu'à poser $x_0 = 0$ pour évacuer l'objection de E"; mais le sont-ils vraiment et si oui, pourquoi ?

Le problème à notre sens est profond : pour la plupart de ces étudiants, cette conjecture est sémantiquement vraie (elle est vraie dans l'ensemble des exemples qu'ils ont l'habitude de manipuler); ils ne peuvent donc se plier à une règle du jeu dont ils n'ont pas saisi l'utilité et qui leur commande ici (vu le contre-exemple) de déclarer une telle conjecture fausse!

L'expérience du débat nous a montré qu'une discussion de ce type ne peut que s'enliser, car vu la force des convictions scientifiques erronées de certains étudiants, ce n'est pas avec un contre-exemple aussi "minable" à leurs yeux (parce que non produit par une formule unique, mais fabriqué "sur mesure" pour que ça ne "marche" pas) qu'ils changeront de point de vue sur le fond (ici le sens s'oppose à la forme). Si donc nous voulons débloquer ce type de dysfonctionnement, il faut à notre avis que ce problème d'opposition entre le fond (la majorité des exemples connus vont dans un sens) et la forme (il y a des cas non usuels où ça ne "marche" pas) ait été antérieurement franchement abordé en soi (sans que la discussion soit brouillée par de vrais enjeux mathématiques). Dans un deuxième temps par contre, la situation présente deviendra une excellente occasion de mesurer l'effectivité du consensus sur la règle formelle "en mathématiques un contre-exemple suffit pour montrer que c'est faux !"

iiii) Nous sommes en DEUG A_2, beaucoup d'étudiants (plus de la moitié) "savent" que les fonctions continues sur [a,b] ne sont pas les seules fonctions intégrables (par exemple ils savent que les fonctions monotones bornées ou les fonctions bornées continues sauf en un nombre fini de points sont des fonctions classiques parfaitement intégrables au sens de Riemann sur [a,b]), ils savent aussi que les fonctions intégrables sur [a,b] sont bornées (nous ne sommes pas à ce moment dans le contexte des intégrales généralisées).

Plus rares (environ un quart) sont les étudiants qui ont repéré que la fonction intégrale dépendant de la borne supérieure $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est toujours continue, puisqu'elle vérifie l'inégalité lipschitzienne: $|F(x)-F(y)| \leq |x-y| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$; plus nombreux (environ la moitié) par contre, sont ceux qui savent que F est dérivable et a f(x) pour dérivée en tout point x où f est continue. Enfin, une partie non négligeable de l'amphi (un peu moins d'un quart) n'est jamais vraiment entrée dans la théorie de l'intégration et s'est contentée de la définition provisoire de l'intégrale de f sur [a,b] donnée en terminale : c'est la "variation" G(b) - G(a) d'une quelconque primitive G de f. Leurs conceptions n'ont pratiquement pas évolué depuis, et pour eux toutes ces considérations théoriques sont sans objet, puisque par définition toutes les fonctions (excepté peut-être quelques fonctions pathologiques amusant le professeur et une poignée d'étudiants) admettent une primitive. Pour ces derniers donc, F est par définition une primitive de f.

Au cours de la résolution d'un problème, un étudiant E_0 fait intervenir de façon déterminante la continuité de l'intégrale dépendant de la borne supérieure, en arguant de la continuité de l'intégrant f ; comme un autre étudiant E_1 conteste cet usage, on écrit au tableau la conjecture suivante :

Conjecture A :

Si f est continue sur l'intervalle [a,b], alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est aussi continue sur [a,b].

E_2) : "Faux !"
E_0) : "Pourquoi faux ?"
E_2) : "Parce que F n'est pas continue, elle est dérivable."
E_0) : "Et alors ?!
E_2) : "Et alors c'est faux ! il faut écrire dans la conjecture : F est dérivable!"

A notre avis, c'est le principe du maximum d'information qui pousse E_2 à dire que la conjecture est fausse. Au lieu de dire "cette conjecture est juste, mais trop pauvre ; on devrait la remplacer par une meilleure puisque avec l'hypothèse f continue, F est non seulement continue, mais aussi dérivable", cet étudiant préfère dire qu'elle est fausse parce qu'elle ne donne pas toutes les informations qu'elle pourrait légitimement donner.

Il nous semble que E_0 pense approximativement cela, mais il ne le dit pas, il se contente de rejeter les objections de ses camarades sans se laisser désarçonner.

Le professeur intervient donc pour obliger E_2 à préciser la signification de son "Faux!"

P) : "Vous avez raison : si f est continue, alors F est dérivable; mais je ne vois pas pourquoi cela prouve que la conjecture C_A est fausse !"

A ce moment E_1 intervient pour préciser la raison de son objection initiale :

E_1) : "Pour moi c'est faux pour une autre raison : il ne faut pas mettre l'hypothèse f est continue, car F est toujours continue !"

P) : "Vous avez raison si f est intégrable sur [a,b], ce que laisse entendre implicitement l'écriture $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout x dans [a,b] ; F est alors effectivement toujours continue. Nous avions même remarqué il y a un mois qu'elle était lipschitzienne, mais je ne vois toujours pas pourquoi cela prouve que la conjecture C_A est fausse."

Ici donc E_1 déclare fausse une conjecture affublée d'une hypothèse inutile, c'est en quelque sorte le prolongement du fameux malentendu des élèves de 6ème qui n'admettent pas qu'un carré soit déclaré faire partie des rectangles, et qu'un rectangle soit vu par moments seulement sous son aspect parallélogramme, etc. etc. Il va d'ailleurs préciser sa pensée :

E_1) : "Pour moi l'énoncé correct, c'est : F est toujours continue !"

L'enseignant écrit au tableau :

Conjecture B : L'intégrale dépendant de la borne supérieure $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est toujours continue

puis fait le commentaire suivant :

P) : "J'ai l'impression que vous confondez le caractère vrai ou faux d'une conjecture avec le fait d'être plus ou moins utile, d'être plus ou moins pratique; cet aspect des choses est très important effectivement, mais à mon sens il ne se place pas sur le même plan !"

Ayant le sentiment que l'amphi ne comprend plus très bien de quoi on parle, l'enseignant l'interpelle par la proposition suivante :

P) : "Pour voir un peu où nous en sommes sur ce sujet, j'affirme que ces deux conjectures A et B sont toutes les deux exactes! Ce sont donc deux théorèmes qui parlent du même sujet, qui ont des conclusions assez voisines.

Dans ces conditions, c'est-à-dire **considérant que l'on a déjà démontré qu'ils sont exacts,** je vous demande de me dire si **vous pouvez en choisir un comme étant plus intéressant, plus utile, plus puissant que l'autre,** ou si à votre avis il faut les garder tous les deux ? (dans le cas où vous en désigneriez clairement un comme meilleur, ce serait celui-là que nous garderions en mémoire dans le cours !)

Réponse de l'amphi (120 étudiants) : 45 préfèrent garder C_A , 10 préfèrent garder C_B, une bonne moitié déclarent ne pas avoir de critères pour prendre une telle décision !

Les explications données par les partisans de C_A sont essentiellement les suivantes : l'énoncé qui a le plus d'hypothèses (inutiles ou non, peu importe) est le meilleur, car "**il est plus facile à démontrer** (ce qui est souvent vrai, mais ici la démonstration n'est pas en cause car elle est supposée avoir déjà été effectuée), **il est plus sûr** (??) ! **il est plus précis**(??) ! "

Dans la suite du débat, il va être très difficile de persuader ces étudiants qui se sont visiblement placés dans l'optique scolaire (plus il y a d'hypothèses, moins on pourra nous reprocher de ne pas en avoir mis suffisamment), que si deux énoncés ont exactement les mêmes conclusions et sont simultanément vrais, le plus maniable, le plus utilisable sera celui qui réclamera le moins d'hypothèses. (Précisons que le problème ici est de savoir si on a intérêt ou non à supprimer une hypothèse superflue, il ne s'agit donc pas du problème de la recherche d'hypothèses minimales qui conduit parfois à des formulations contre nature parce que pour gagner un "chouia" sur une hypothèse simple, il faut la remplacer par vingt cinq conditions plus faibles, ce qui tue complètement le sens de l'énoncé).

On peut penser que les dix partisans de C_B sont intimement persuadés qu'en pratique c'est mieux d'avoir à manipuler des énoncés ne comportant pas trop d'hypothèses à vérifier, mais ils n'arrivent pas à décontextualiser leurs explications, c'est-à-dire qu'aucun d'entre eux n'arrive à dire à l'amphi que le fond du problème n'a ici rien à voir avec les intégrales, ni avec la continuité, ni avec les primitives.

En conclusion, ces débats tout à fait ordinaires dans des classes du Secondaire ou des amphis du Supérieur montrent à quel point la confusion est permanente auprès d'une majorité d'élèves et d'étudiants entre le vrai et le faux, l'utile et l'inutile, cette confusion étant renforcée à chaque instant par une absence de discernement entre les exigences d'origine purement scolaire et celles d'origine plus scientifique.

Pour ce qui nous concerne, et sans être des maniaques du formalisme, nous avons considéré qu'il était bien difficile d'aborder significativement des problèmes mathématiques avec une incertitude aussi grande à propos des formalismes les plus élémentaires de la logique mathématique, d'où la justification de l'introduction d'une activité comme Circuit à tous les niveaux.

3) Précisions sur quelques points sensibles de l'activité

*** Dévolution du problème**

Comme nous l'avons signalé, l'activité Circuit est proposée à la classe ou à l'amphi comme une activité méta-mathématique en vue de permettre à tous de repérer les différences et les ressemblances entre les règles du jeu qui sont en vigueur dans les raisonnements mathématiques et celles que nous utilisons spontanément dans nos raisonnements quotidiens.

Le choix d'un circuit électrique comme support d'une activité sur les mathématiques nous aide à préciser aux participants le point singulier du contrat didactique propre à cette activité : "ce qui compte ici, ce n'est pas que vous cherchiez à retrouver ce qu'il faudrait, scolairement parlant, que vous sachiez sur ce sujet, mais ce que vous considérez honnêtement comme des réponses satisfaisantes aux différentes questions qui vous sont posées."

L'expérience nous a montré que pour obtenir l'adhésion d'une masse critique d'élèves ou d'étudiants, c'est-à-dire pour qu'un nombre suffisant de participants acceptent d'engager publiquement des convictions personnelles, la chaleur de la présentation compte bien entendu, mais plus encore interviennent la brièveté avec laquelle le professeur propose explicitement le circuit, la discrétion dont il fait preuve lors de la phase de recherche et la neutralité scientifique dont il ne se départit ni au cours du vote, ni lors des premières prises de parole, notamment quand les intervenants défendent des points de vue qu'il considère personnellement comme très profondément erronés.

Par exemple, après une introduction très ouverte au cours de laquelle les élèves sont éventuellement invités à dire comment ils voient la science, les scientifiques, en particulier les mathématiciens, et après avoir précisé qu'une conjecture est une proposition générale considérée comme vraie par son locuteur, mais dont il ne prétend pas avoir la preuve, nous passons très abruptement à l'activité proprement dite :

"Il y a ci-contre un circuit représenté par ce schéma, il y a là une conjecture formulée de la façon suivante (C_1); quel est votre avis personnel sur cette conjecture ?

En clair vous avez cinq minutes pour vous faire une opinion sur la véracité de cette conjecture et éventuellement la confronter à celle de vos proches voisins; pour ma part, je n'ai aucune précision supplémentaire à ajouter, si ce n'est que je collecterai vos opinions sous la forme Vrai / Faux / Autre."

Pour matérialiser cette exigence, nous faisons figurer au tableau les trois cases Vrai / Faux / Autre et nous cherchons à nous faire oublier, c'est-à-dire que, dans la mesure du possible, nous refusons assez catégoriquement de répondre à d'éventuelles demandes de précisions supplémentaires ; pour justifier ce refus, nous disons simplement que nous souhaitons vivement ne pas intervenir tout de suite, afin de laisser chacun se faire sa propre opinion sur ce problème tel qu'il est posé. En cas d'insistance, nous soulignons qu'il sera toujours possible à ceux qui ne sont pas satisfaits par cette présentation d'adopter, au terme de leur réflexion personnelle, la position "Autre"; le débat qui suivra le vote leur donnera alors toute latitude pour préciser leur point de vue.

Pendant la période de recherche qui suit, nous évitons de nous intéresser ostensiblement aux discussions de tel ou tel petit groupe, parce que nous avons remarqué qu'alors les interlocuteurs de ces groupes ont automatiquement tendance soit à se taire parce qu'on trouble la liberté de parole qu'ils s'étaient donnée, soit au contraire à solliciter notre avis pour savoir s'ils ont raison !

La discrétion et le côté laconique des interventions de l'enseignant dans cette période nous semblent donc déterminants pour l'efficacité de l'activité, ils ont un double objectif :

- ne pas livrer inconsciemment la réponse que l'on veut faire découvrir !
- ne pas retarder le moment où enfin l'élève ou l'étudiant va se poser naïvement la question : "comment j'interprète personnellement cette situation? suis-je véritablement d'accord pour déclarer cette conjecture vraie ou fausse ?"

Nous avons observé que toute présence appuyée de l'enseignant, a fortiori toute conversation menée avec un groupe, retardent d'autant le moment où d'autres élèves ou étudiants vont enfin se placer face au problème. Comme ils voient des pairs en train de discuter avec l'enseignant, ils pensent que la "bonne solution" est en train de s'élaborer dans ce groupe et qu'elle va donc "arriver toute faite" dans quelques instants; ce n'est donc plus la peine qu'ils se fatiguent à chercher eux aussi, ils arriveront trop tard avec une moins bonne solution!

Le temps didactique est ici une variable déterminante de la situation car, contrairement à la sensation psychologique de l'enseignant, deux minutes de silence (interminables pour lui) ne suffisent pas à ceux qui cherchent effectivement (même les adultes) pour se mettre en face du problème; inversement, au delà de cinq minutes, nombreux sont ceux qui sont absolument persuadés avoir fait le tour de la question (ils attendent la correction). Une attente prolongée sans intervention magistrale va les agacer, voire les rendre hostiles. Comme, à chaque fois que l'enseignant prend la parole, un certain nombre de participants s'interrompent dans leur réflexion personnelle pour écouter, on constate que la marge de manœuvre de l'enseignant est assez étroite et que son silence est d'or !

*** Deuxième période : collecte des opinions et mise en route du débat.**

En général le débat sur la première conjecture est spontanément très riche; il peut cependant être difficile, voire impossible à amorcer, dans le cas où tous les participants sont apparemment du même avis et ont répondu comme un seul homme "Vrai" à cette conjecture. Nous avons imaginé (pour éviter au professeur l'angoisse du silence quand il a prévu de faire intervenir ses élèves) un joker (un circuit réel qui met en défaut cette conjecture). Ce joker permet à coup sûr de débloquer la situation lorsqu'elle est verrouillée par l'absence de contradictions (voir analyse d'un circuit réel).

Cependant, il nous semble que quelques précautions suffisent le plus souvent pour éviter d'avoir recours à ce subterfuge[1].

Quelques précautions pour éviter un blocage de la situation

- Lors du vote, pour éviter de se retrouver dans la situation "Vrai : presque tous les participants, Faux : zéro, Autre : zéro", qui ne facilite pas la prise de parole de ceux qui ne sont pas d'accord, mais qui n'osent pas l'exprimer par un vote "Faux" ou "Autre" car ils sont impressionnés par le très grand nombre de "Vrai", nous avons tendance à proposer le vote dans l'ordre inverse (Autre, Faux, Vrai) en facilitant la prise de position "Autre" par un commentaire du type:

"Quels sont ceux qui, faute de temps ou d'informations, ou ne se sentant pas du tout à l'aise dans l'une des positions catégoriques "Vrai" ou "Faux", choisissent la position "Autre" ?

Cet appel du pied nous paraît nécessaire pour contrebalancer une coutume scolaire très forte dans laquelle le "bon élève" doit toujours pouvoir répondre par "oui" ou par "non" aux questions du professeur ; comme cette position "Autre" est très inconfortable, nous essayons de la légitimer en faisant sentir que d'autres raisons que l'ignorance peuvent amener à la choisir.

- Nombreux sont les participants qui voudraient répondre en normand : "Vrai, mais...."

Nous avons appris à nous opposer à ce compromis qui n'oblige pas l'élève ou l'étudiant à prendre ses responsabilités et à se poser la question: "Si j'étais seul et que je devais décider, qu'est-ce que je ferais?"

Maintenant notre position est très ferme : "Si vous ne pouvez souscrire à l'un des deux jugements "c'est vrai!" ou "c'est faux!" sans commentaires, choisissez la position "Autre" et vous aurez la parole après le vote pour justifier votre refus de choix catégorique !"

La raison de ce choix est la suivante: souvent nous nous plaignons que nos élèves ou nos étudiants n'ont ni imagination ni esprit critique, qu'ils ne sont pas très combatifs dans un débat scientifique et ne disent rien quand on leur donne la parole, mais il faut bien voir que pour la prendre devant un groupe important comme une classe ou un amphi, il faut soit avoir une certaine autorité pour le faire (la position d'apprenant supprime institutionnellement cette autorité, sauf s'il s'agit de donner une réponse convenue), soit subir une forte pression intérieure qui vous pousse à prendre la parole.

Si le meneur de jeu est trop conciliant et accepte les prises de position sans risques du type "oui, mais ....., peut-être... etc.", il dégonfle cette pression ; si, par contre, il exige que les réponses "Vrai" ou "Faux" ne soient assorties d'aucune restriction (c'est-à-dire que ces réponses traduisent une adhésion sans réserves), il crée une forte insatisfaction chez certains participants: ceux qui auraient

1) Il nous paraît plus intéressant de faire intervenir ce circuit réel à la fin du débat, parce qu'alors il apporte une caution magistrale à certains arguments développés par des intervenants qui, faute d'autorité, n'ont pu se faire prendre au sérieux par leurs pairs.

voulu choisir une réponse de type "oui et non" et qui sont forcés par ce biais d'adopter la position inconfortable "Autre", alors qu'ils ont une idée sur le problème. Ces derniers vont donc avoir très envie de réagir pour expliquer leur choix : "je ne suis pas d'accord avec ceux qui disent Vrai (ou Faux), car ceci ou cela etc."

Dans ce cas, au lieu d'avoir à "tirer les vers du nez" de gens qui ne sont ni pour ni contre, l'enseignant doit gérer de fortes oppositions scientifiques qui, lorsqu'elles s'explicitent, amènent les pairs à se rendre compte que le problème est plus sérieux qu'ils ne le pensaient a priori.

4) QUELQUES INTERVENTIONS TYPIQUES DU DÉBAT SUR LA CONJECTURE 1

En général, dès qu'une première objection est soulevée et que l'enseignant l'a reçue sans prendre parti, la pression monte et ce n'est pas le manque de participants prêts à donner leurs explications qui pose problème, mais plutôt au contraire la surabondance de ceux qui voudraient intervenir pour justifier, donner leur point de vue et/ou contredire l'intervenant précédent.

On voit le plus souvent défiler dans un ordre variable les arguments et contre-arguments suivants :

- " J'ai choisi "Autre", car la lampe 1 peut être grillée.
- C'est impossible, car ça éteindrait la lampe 4 .
- Faux ! chez moi quand une ampoule est grillée, les autres ampoules ne s'éteignent pas !
- Oui, mais chez toi les ampoules ne sont pas montées en série !
- J'y connais rien en électricité, mais je dis ce que je vois !
- La lampe 1 ne peut pas être grillée, car sinon ça ouvre le circuit !
- Faudrait s'entendre sur ce que veut dire "grillé": ça coupe ou ça coupe pas?" (appel à modélisation)

- "J'ai choisi "Autre", car il faudrait préciser la position de S. Si S est par exemple sur la position 2 , ça peut pas marcher!" (on touche là à la signification de l'hypothèse en mathématiques.)

- "Dans ce cas, la lampe 4 non plus ne marche pas et comme on a dit par hypothèse qu'elle brille, c'est que S_1 ! ...C'est obligé! T'as qu'à appliquer l'hypothèse!" (Contrairement à l'intervenant précédent, la dimension épistémologique de l'hypothèse est devenue totalement naturelle à cet élève.)

- "Moi je ne suis pas d'accord ! Si on ne précise pas la position de S , la conjoncture (sic) n'est pas précise, elle est fausse. Moi je change d'avis, j'étais "Vrai" et je dis "Autre".

- Moi aussi!

- Moi je dis "Faux"!

- La lampe 1 peut ne pas être adaptée à la batterie, si par exemple c'est une lampe de 220 volts!

- C'est pas possible, tu peux pas visser une ampoule de 220 V sur les douilles de lampe de poche !

- Si ! moi j'en ai une à la maison pour la décoration.

- Et toc!" (il est à noter qu'il n'est précisé nulle part que les douilles correspondent à des lampes de poche; il est clair que les intervenants précédents sont complètement plongés dans la réalité quotidienne, l'intervenant suivant va d'ailleurs le leur faire remarquer sans nuances!)

- "Moi, je vois pas pourquoi vous dites tout ça, il y a un schéma, il faut suivre le schéma, pour moi c'est clair, c'est "Vrai" !

- Faudrait savoir où on est ! si on est en math, il n'y a pas de problème, c'est "Vrai" ; sinon c'est pas mon problème, c'est le problème des électriciens !

- Pour moi, qu'on soit en math ou pas en math, c'est la même chose, c'est logique quoi! Si L_1, alors S_1, et alors L_4 ; y a qu'à suivre le schéma et réfléchir, quoi !" (Ces trois intervenants font apparaître trois conceptions réel-modèle: pour le premier, en cours on ne peut être que dans le modèle implicitement suggéré par le schéma, pour le second il semble important de faire une distinction entre modèle et réel, pour le troisième par contre la réalité s'identifie au modèle qu'on s'en fait,"c'est logique quoi!")

- "Oui, mais si L_1 et L_4 n'ont pas la même puissance, il se peut que L_4 prenne tout le courant et qu'il ne passe plus rien dans L_1!" (Cette objection peut arriver très tôt dans le débat, et éventuellement avec des arguments plus physiques que l'épuisement du courant dans une ampoule : différence des résistances des ampoules ; mais si l'enseignant reste neutre, les auteurs de cette remarque ne convainquent pas en général leurs pairs et sont même parfois la risée de ceux qui sont totalement dans le modèle.)

- "Moi, je ne suis pas d'accord : si une ampoule ne marche pas, c'est qu'il n'y a pas de courant dedans, et dans l'autre non plus !
- Si on suit le schéma, c'est sans problème !
- Faudrait quand même qu'on précise des choses, car moi je ne peux plus travailler comme ça, j'ai mal à la tête !
- etc. etc."

En général, quand il semble que les opinions les plus tranchées se sont exprimées, il n'y a plus de place au tableau (nous écrivons synthétiquement les différents points soulevés au fur et à mesure). Nombreux sont ceux qui sont assez perturbés par un débat laissant apparaître qu'il n'existe pas de réponse toute faite comme ils l'imaginaient initialement ; il règne donc une certaine confusion, et une forte pression s'exerce pour que le professeur reprenne sa casquette d'enseignant.

Pour clore ce débat, nous avons coutume de proposer un nouveau vote basé sur la modalité suivante : "Contrairement aux vœux exprimés par certains, nous ne changeons ni le circuit ni la conjecture, je n'apporte en tant que spécialiste aucune précision supplémentaire et je ne donne aucun avis sur ce qui s'est dit; cependant, depuis vingt minutes environ, un certain nombre d'entre vous ont argumenté dans un sens ou dans un autre, ce qui a pu modifier sensiblement votre opinion initiale. Pour pouvoir estimer si ces explications ont été entendues par les uns et les autres, nous allons procéder à un deuxième vote dans lequel vous donnerez l'opinion à laquelle vous êtes parvenu au terme de ce débat."

Les variations entre le premier et le deuxième vote sont en général les suivantes : le "Vrai" peut passer de 100% à 50%, le "Faux" de 0% à 20 %, la position "Autre" passe en général de 10% à 40%!

Après avoir fait remarquer le glissement spectaculaire des opinions de la certitude vers l'incertitude, nous engageons la phase d'institutionnalisation. En fonction du débat qui a précédé, nous introduisons physiquement le circuit concret (appelé au paragraphe suivant circuit vélo) qui met la conjecture 1 en défaut, ou nous nous contentons de l'invoquer intellectuellement. Dans tous les cas, il s'agit par cette forte contradiction d'étayer la thèse suivant laquelle il est impossible de prendre une décision commune scientifiquement satisfaisante, si on se refuse à effectuer un choix de modélisation.

5) LES CIRCUITS RÉELS; LE "CIRCUIT VÉLO"

* Quelques précisions à propos des circuits réels

Comme nous venons de le montrer, le débat permet le plus souvent de faire découvrir à ceux qui se sont d'instinct placés dans le modèle circuit normalisé toute la complexité que doivent gérer ceux qui, moins scolaires ou plus concrets, n'éliminent pas d'entrée de jeu la confrontation des problèmes scolaires qu'on leur soumet avec l'expérience qu'ils ont acquise en pratique.

Contrairement donc à ce qui se produit quand on lit la conjecture 1 dans le modèle circuit normalisé, le problème général de sa véracité ne peut être traité par simple application de la logique mathématique, car la signification des termes mêmes de la conjecture dépend de la nature et de l'état des composants.

Citons donc quelques différences fondamentales entre les propriétés des circuits normalisés et celles d'autres types de circuits très réels[1] (i.e. des circuits que les élèves ont pu manipuler et qui interviennent très souvent comme modèles de référence dans les débats).

- Différence circuit série - circuit parallèle:

Dans les habitations, les ampoules n'ont pas toutes la même puissance, mais en général elles ne sont pas montées en série comme le sont les ampoules 1 et 4 , mais en parallèle, ce qui permet une indépendance totale de l'éclairage des ampoules entre elles (excepté si on fait un court-circuit sur une ampoule ou, ce qui revient au même, si on branche trop d'ampoules en parallèle; dans ces cas, suivant la puissance du générateur et la qualité des conducteurs, il se peut que l'éclairage faiblisse considérablement à tel point que toutes les lampes s'éteignent simultanément.)

---

1) Nous soutenons que, même dans des situations totalement mathématisées, il existe une interférence permanente entre les significations mathématiques des mots : racine, facteur, déterminant, discriminant, dérivée, compact, connexe, etc. et les images du quotidien qu'ils font naître.

- Les ampoules grillées:

Il est à noter que l'objection "une des lampes est grillée" qui apparaît très souvent dans le débat pose de véritables problèmes sur un circuit réel.

En effet cette objection est souvent violemment rejetée par l'argument logique : "quand une ampoule est grillée, c'est que le filament est rompu; de ce fait le circuit est ouvert, ce qui éteint toutes les autres lampes montées en série". (Comme ici la lampe 4 est supposée allumée, c'est donc que la lampe 1 n'est pas grillée).

Si on admet l'équivalence "grillée = circuit ouvert", cette dernière argumentation est loin d'être évidente pour tous, car elle fait intervenir fortement une des caractéristiques de la logique mathématique : puisqu'on discute de la véracité de la conjecture 1 , on se place "automatiquement" dans la perspective "la lampe 4 est allumée". Comme (en vertu du raisonnement précédent) elle ne peut être allumée dans le cas où la lampe 1 serait grillée, on est donc conventionnellement conduit à écarter de notre étude les cas particuliers où la lampe 1 serait grillée.

Cette élimination a priori de cas particuliers bien réels, mais "hors sujet", pose de gros problèmes notamment avec les élèves plus jeunes ou plus attirés par la pratique.

Cette conjecture 1 soulève donc éventuellement ce problème épistémologique sans vraiment le résoudre. Le débat de la conjecture 2 fournira par contre le moyen technique de dépasser cette difficulté, ce sera la règle fondamentale: "en mathématiques, pour montrer que c'est faux, il faut produire un contre-exemple, donc n'utiliser que des cas particuliers vérifiant l'hypothèse."

Physiquement parlant, il faut voir que cette argumentation n'est pas aussi absolue qu'on pourrait le croire, car "ampoule grillée" n'implique pas forcément "circuit ouvert". Par exemple, pour éviter les déboires de jour de fête, certaines guirlandes de Noël qui sont des montages séries comme notre circuit (guirlandes qui font partie du domaine expérimental de certains participants) possèdent un dispositif sophistiqué qui met automatiquement en court-circuit une ampoule qui grille (cette ampoule s'éteint, mais le reste de la guirlande continue à briller). Quelques rares élèves ont repéré cette particularité, et comme ils ne sont pas assez âgés pour avoir expérimenté des guirlandes de Noël moins sophistiquées (qui, elles, s'éteignaient dès qu'une lampe était grillée), ils ont bâti à partir de leur guirlande personnelle une théorie générale sur les ampoules grillées et affirment donc contradictoirement, et avec une certaine pertinence, qu'une ampoule grillée n'interrompt pas le passage du courant!

- La dichotomie "allumée-éteinte":

Dans un circuit réel, il n'y a plus de dichotomie systématique "allumé, éteint"; ce que l'on voit dépend éventuellement de l'observateur, du point d'observation et de l'état de la batterie, il n'y a plus d'équivalence entre d'une part "allumé = le circuit est fermé = le courant passe" et d'autre part "éteint = le circuit est ouvert = le courant ne passe pas".

En effet, si nous supposons pour simplifier que toutes les ampoules comportent un filament résistant qui émet des photons quand il est suffisamment chaud (les ampoules néon poseraient d'autres problèmes), l'observateur va déclarer l'ampoule allumée s'il reçoit suffisamment de photons pour que sa rétine en soit impressionnée. S'il est un peu plus loin que les autres, un peu plus fatigué et que l'intensité du courant est insuffisante, il déclarera la lampe éteinte, alors que des collègues plus proches la déclareront allumée.

Ainsi, la clause de base d'une conjecture mathématique, à savoir que les termes employés sont non ambigüs, c'est-à-dire ont la même signification pour tout le monde, n'est plus respectée par la conjecture 1 , puisque le mot "allumé" ne caractérisera plus l'état d'une ampoule, mais celui du couple ampoule-observateur ; de plus, pour un observateur donné,"éteint" ne signifiera pas forcément que le circuit est ouvert ou que le courant ne passe pas.

- L'objection cruciale : la puissance respective des ampoules

Supposons la batterie bien chargée, les ampoules en bon état et bien adaptées à la batterie. La conjecture 1 peut néanmoins devenir fausse pour un groupe d'observateurs, si on prend pour définition de "briller" : tout le monde voit cette ampoule éclairée. Pour obtenir un contre-exemple matériel, il suffit que les résistances des filaments ne soient pas les mêmes dans les deux ampoules et que celle de l'ampoule 4 soit beaucoup plus forte.

Par exemple, si on prend le système vendu dans le commerce "ampoule avant, ampoule arrière de vélo et pile de 4,5 V en bon état" et si, oubliant le reste du circuit qui n'intervient pas dans la conjecture 1, on prend pour lampe 4 l'ampoule arrière et pour lampe 1 l'ampoule avant, on va constater que le filament de l'ampoule arrière s'échauffe suffisamment pour émettre des photons que tout le monde, même au fond d'un amphi, reçoit avec assez d'intensité pour reconnaître qu'il brille, alors que le filament de l'ampoule 1 restera à une température très inférieure au seuil d'émission de photons perceptible à l'œil nu (tout le monde déclarera donc cette seconde ampoule éteinte). Devant la protestation "mais elle est grillée!", on pourra alors brancher seule cette ampoule aux bornes de la pile, et comme elle est dix fois plus puissante que l'autre, chacun pourra constater qu'elle n'est pas grillée puisqu'elle brillera encore plus intensément que l'ampoule arrière.

L'explication physique de ce faux paradoxe est assez simple, si on admet les quatre principes : l'intensité i est constante dans un circuit fermé, cette intensité pour un générateur donné (à V constant) est inversement proportionnelle à la résistance totale R rencontrée dans le circuit ($i=V/R$), la résistance totale dans un circuit série est la somme des résistances $R = R_1+R_4$, la puissance dissipée par effet joule dans une ampoule est proportionnelle à la résistance et au carré de l'intensité $P = R.i^2$.

Ici, pour obtenir un bon éclairage à l'avant du vélo, la résistance R_4 de l'ampoule arrière est dix fois plus forte que la résistance R_1 de l'ampoule avant (ce qui fait que la puissance P_4 de l'ampoule arrière sur un vélo est dix fois plus petite que celle, P_1, de l'ampoule avant : $P=V^2/R$).

La forte résistance de l'ampoule arrière limitera tellement à elle seule l'intensité du courant qui traverse le circuit que la résistance de l'ampoule avant deviendra (pour ce courant) nettement insuffisante pour dégager par effet joule les calories nécessaires.

Quand elle est seule dans le circuit, l'ampoule avant ayant une résistance dix fois plus faible que l'ampoule arrière laisse passer un courant onze fois plus grand, d'où une puissance calorifique plus de cent fois plus grande! Elle brille donc très fortement quand elle est seule et s'éteint quand elle est en série. Ce phénomène ne se reproduit pas avec l'ampoule arrière pour laquelle la modification de courant (suivant qu'elle est seule ou en série avec l'ampoule avant) est seulement de dix onzièmes, c'est-à-dire ne varie quasiment pas.

Lors de l'institutionnalisation, nous nous contentons de donner une explication qualitative de ce phénomène, renvoyant les élèves à leur cours de physique pour obtenir des résultats plus quantifiés.

Dans la suite de ce texte, nous appellerons ce circuit particulier le **circuit vélo,** bien qu'il ne corresponde pas, fort heureusement, au montage habituel où les ampoules sont en parallèle (il est d'ailleurs impossible de se tromper sur un vélo, car le cadre remplace un des deux conducteurs).

*** Quelle utilité voyons-nous à favoriser une forte confrontation au réel ?**

La mise en exergue de circuits particuliers comme le "circuit-vélo" nous paraît intéressante, parce que leur présence montre à quel point en sciences le "bon sens" est fragile et combien est dérisoire aussi le fait de déclarer sa propre solution évidente et celle des autres ridicule ou absurde.

Les professeurs de mathématiques ont tendance à se réjouir un peu hâtivement de pouvoir (contrairement à leurs collègues des sciences appliquées) se placer directement dans des modèles suffisamment éloignés de la réalité pour éviter les interférences fâcheuses. Notre hypothèse didactique est que cette illusion coûte très cher, car même en mathématiques l'élève qui réfléchit fait intervenir la complexité de son vécu quotidien, mais comme il sait que ce n'est pas légitime de le faire, il ne nous en parle pas. Par suite, à force de se retrouver seul face à des paradoxes inavouables et insolubles qui le gênent terriblement au niveau de l'action, soit il sécrète une aversion contre cette discipline qui ne respecte pas son réel, soit il prend l'habitude de ne plus chercher à charger de sens ses activités mathématiques, d'où la réaction : "en mathématiques, tout est possible!"

On peut, par exemple, calculer l'âge du capitaine en faisant le produit du nombre de cheminées de son bateau avec le nombre de chèvres embarquées, c'est une opération légitime car on est en train de travailler sur la multiplication, c'est donc la réponse à la question posée ! Plus tard, la lune peut tourner mille fois par seconde autour de la terre; si ce résultat est la conséquence de la résolution d'une équation différentielle classique, c'est la réponse qu'il faut produire! Et dans ce cas, qu'y a-t-il d'absurde à obtenir dans une démonstration : $2 = 3$?

Trois circonstances qui semblent indiquer l'intérêt[1] didactique d'introduire physiquement le "circuit vélo":

- Si l'opinion unanime est "la conjecture 1 est vraie", l'introduction physique du "circuit vélo" force les participants à entrer dans le débat.
- Lorsque l'on constate que des élèves ou des étudiants, qui étaient d'emblée totalement dans le modèle mathématique[2], n'ont toujours pas admis à la fin du débat que les raisonnements qu'ils effectuent pour se persuader que la conjecture 1 est exacte ne sont valables que dans une certaine modélisation, on peut penser à juste titre que seule une preuve matérielle les déstabilisera. En effet il arrive souvent que ces participants ne jouent pas vraiment le jeu du débat, estimant que toutes les considérations pratiques de leurs pairs sont des enfantillages et que leurs propres qualités logiques les mettent à l'abri de tous les ennuis.
- Lorsqu'à l'inverse du cas précédent, il se trouve un fort courant dans la classe ou l'amphi autour de l'idéologie "soyons pragmatiques et concrets", et que de ce fait un certain nombre de participants se déclarent ennemis de l'abstraction et renâclent devant la théorie qui leur paraît inutile et vainement compliquée (ce qui est un gros handicap, s'ils ont choisi des études dans lesquelles les mathématiques ne peuvent se réduire à l'application de recettes), la présence d'une contradiction matérialisée par un circuit concret rappelle à tous ces pragmatiques abusifs qu'à trop mépriser la théorie, le simple bon sens conduit aussi à des aberrations, même dans des cas très concrets.

Cette variante de l'activité Circuit nous aide donc à négocier un nouveau contrat avec les participants : "nous aussi, mathématiciens, nous nous intéressons au concret, mais pour le traiter en exploitant l'outillage mathématique, nous le modélisons très explicitement. Cet exemple montre le genre de polémique qui risque de s'engager sur le concret, si on se permet de le simplifier et de le modéliser sans le dire (i.e. sans être conscient que la science, même très appliquée, n'est jamais l'étude du réel, mais d'une modélisation du réel)."

Une dernière justification à l'introduction de cette situation un peu spectaculaire est qu'elle pourra servir de référence pour aider la classe ou l'amphi à faire un "pas de côté", lorsque dans l'action se produira le même type de confusion entre modèle et réel sur des sujets plus sophistiqués: géométrie, algèbre, intégrales, séries, limites, etc. (sujets échappant, en apparence seulement, à la confusion abusive modèle-réel, particulier-général).

Toutefois, redisons-le, si le débat a été riche et convaincant ou si l'enseignant ne se sent pas très à l'aise avec cette manipulation expérimentale, il ne faut pas faire de cette opération une nécessité, car elle ne sera efficace que si elle arrive assez naturellement dans le déroulement de la séquence et si l'enseignant se sent de la gérer avec un certain humour.

6) Quel transfert de responsabilité scientifique et quelle méthodologie de démonstration l'activité Circuit induit-elle?

Il est clair que la connaissance fondamentale sur les mathématiques que l'activité Circuit permet d'institutionnaliser très concrètement est la double règle :

- dire qu'une conjecture mathématique est fausse revient à dire qu'elle admet au moins un contre-exemple,

- prouver qu'elle est vraie, c'est montrer l'absurdité de tout contre-exemple.

---

1) Il ne s'agit absolument pas pour nous d'exploiter ce "gadget" pour faire un tour de magie dans la classe ou l'amphi ; par contre, dans certains cas, son introduction physique nous semble avoir une fonction didactique et épistémologique importante.

2) Nous avons constaté que seul un "deus ex machina" de ce type peut ébranler leur superbe et que cette déstabilisation par surprise leur est souvent très salutaire. Le choc que provoque l'exhibition du "circuit vélo" est tellement violent pour ces intellectuels, ayant une conception un peu aristocratique de la science, qu'ils veulent du coup toucher eux-mêmes les fils et les ampoules pour y croire. Certains de ces élèves sont restés après le cours, à l'heure du repas, pour vérifier s'ils ne pouvaient pas trouver une manipulation qui rendrait compte de leur conviction initiale.

A notre avis, c'est pour certains un moment décisif dans leur changement de rapport à la science, et nous faisons l'hypothèse que cette déstabilisation a des retombées d'autant plus profondes que nous ne sommes pas des professeurs de physique et que nous nous déclarons très moyennement compétents en la matière.

Il ne peut donc y avoir (par cette convention contraire aux usages de la vie ordinaire) d'énoncés mathématiques simultanément vrais et faux!

Cette convention est à notre avis très opérationnelle dans la plupart des problèmes de logique qui se posent en pratique aux élèves ou aux étudiants, même si elle ne traite pas les très délicats problèmes de la consistance et de la complétude des théories mathématiques.

Justifions l'affirmation précédente:

Mettre en exergue la convention "un contre-exemple suffit à prouver la fausseté d'une conjecture" a pour conséquence pratique l'attitude d'esprit suivante : face à une conjecture dont la preuve ne paraît pas immédiate, regardons si elle ne serait pas grossièrement fausse; les tentatives infructueuses de construction de contre-exemples nous mettront peut-être sur le chemin d'une démonstration.

Par exemple, face à l'une des deux conjectures:

-A) " Pour tous réels a, b, c, d, tels que les fractions suivantes aient du sens, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ "

-B) "Pour tous réels a, b, c, d, tels que les fractions suivantes aient du sens, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$"

dont l'une est vraie et l'autre fausse malgré une similitude de forme et une certaine résistance à se laisser démontrer directement, le questionnement: "ne seraient-elles pas fausses?" anéantit sur-le-champ B), qui n'est pratiquement "jamais vraie" pour des valeurs particulières des paramètres a, b, c, d, alors que A) résiste à tout choix de ces paramètres.

Mais précisément, pour trouver des quadruplets qui respectent l'hypothèse de A), on constate qu'on ne peut prendre les nombres a, b, c, d au hasard ; il faut donc à chaque fois qu'on veut construire un contre-exemple respecter l'égalité du rapport a/b et du rapport c/d, d'où l'idée d'introduire un cinquième paramètre k représentant ce rapport commun. L'écriture a = k.b et c = k.d démontre instantanément la propriété A) !

Bien entendu, rien ne prouve que cette procédure (recherche de contre-exemple pour induire éventuellement l'idée d'une démontration), qui s'avère très efficace dans la résolution des conjectures précédentes, va garder une telle opérationnalité dans la résolution de la plupart des autres conjectures!

En d'autres termes, ne risque-t-on pas de tomber assez souvent sur l'un des trois cas litigieux suivants:

a) On est face à une conjecture qu'on ne sait pas résoudre, i.e. qu'on ne parvient pas à démontrer (créer des liens logiques entre elle et l'axiomatique de départ par l'intermédiaire des théorèmes connus) et à laquelle on n'arrive pas non plus à opposer le moindre contre-exemple.

Nous affirmons que cette éventualité est le quotidien du chercheur et que, jusqu'à plus ample investigation, *une telle conjecture est dite non résolue ou que le problème est ouvert.* Cela signifie qu'il faut pousser plus loin la recherche pour conclure et/ou se renseigner pour savoir si d'autres personnes ne l'ont pas déjà résolue.

b) On tombe sur une conjecture indécidable, i.e. dont on peut prouver simultanément qu'elle n'a pas de contre-exemple dans la théorie axiomatique considérée, mais que si on postulait axiomatiquement l'existence d'un contre-exemple, cela ne bouleverserait pas le reste de la théorie (la théorie n'est pas complète.)

Nous affirmons que:

- *ce genre de phénomène s'est souvent produit dans la construction de la théorie mathématique* (postulat d'Euclide, axiome du choix, hypothèse du continu, sans parler des problèmes fondamentaux que soulève l'analyse non standart!) et se produira souvent encore; les travaux de Gödel entre autres montrant qu'on ne peut (contrairement à ce que semblait espérer Hilbert) simultanément obtenir une théorie axiomatique complète (i.e. ne contenant plus d'énoncés indécidables), consistante (i.e. ne conduisant pas à des paradoxes et à des contradictions) et mathématiquement utile (rendant compte de l'arithmétique des entiers).

- *ce vrai problème pour les théoriciens n'en est pas un pour nous au niveau où nous travaillons,* car nos raisonnements exacts ou erronés ne nous conduisent que très rarement sur ce type d'énoncés spécieux.

c) On est en face d'une conjecture totalement paradoxale, ou monstrueuse, i.e. certains raisonnements tendraient à prouver qu'elle est vraie et d'autres qu'elle admet néanmoins un contre-exemple.

Il s'agit là a priori du problème de la consistance absolue des théories axiomatiques. Affirmer que l'apparition d'un tel monstre est impossible dans la mathématique actuelle ou dans une mathématique idéale relève à notre sens de l'acte de foi en cette science ou d'un choix philosophique; *nous affirmons en tout cas que les mathématiciens font tout ce qui est en leur pouvoir pour qu'une telle catastrophe n'arrive pas et nous allons faire le pari qu'ils ont réussi.*

Si donc un élève ou un étudiant rencontre un énoncé mathématique qui lui semble fondamentalement vrai, mais admet néanmoins un contre-exemple, c'est donc (en vertu du pari précédent) soit que la formulation traduit mal l'idée qui lui paraît vraie (il faut alors qu'il modifie cette formulation), soit que l'idée qui lui paraît juste ne l'est pas (il faut à tout prix dans ce cas découvrir quelle est la règle ou la méta-règle erronée qui le conduit à cette contradiction).

Dans toute cette affaire, le jeu de la formulation de conjectures (d'énoncés clairs et réfutables au moyen de contre-exemples) devient pour l'élève une méthodologie de travail scientifique qui remplacera très avantageusement, et le système des énoncés "extensibles ou mous" (i.e. sous des conditions très floues on a approximativement tel résultat) dont beaucoup d'élèves et d'étudiants raffolent, et la technique du déni de responsabilité scientifique (i.e. au lieu de chercher soi-même un contre-exemple on pose la question à l'enseignant: "est-ce que j'ai le droit de....?" ou on regarde dans le manuel pour voir si c'est écrit !).

En définitive

A notre avis, on ne peut sans tricher éviter de demander aux élèves et aux étudiants de faire pendant un certain temps un acte de foi[1] dans la vigilance épistémologique de la communauté mathématique, car il faut déjà avoir été très loin dans la connaissance de différentes branches de cette science pour pouvoir se faire une opinion personnelle fondée sur la cohérence interne globale de ces théories.

Cette nécessaire délégation de responsabilité au niveau de la cohérence logique globale ne retire absolument pas à l'élève sa responsabilité au niveau de la cohérence logique locale, i.e. l'étudiant doit s'assurer que ses conjectures ne tombent pas sous le coup de contre-exemples triviaux et, dans la mesure du possible, savoir déduire les théorèmes les plus utilisés à partir de quelques propriétés fondamentales considérées comme des bases axiomatiques (éventuellement très redondantes).

---

1) Cet acte de foi est néanmoins facilité par la preuve tangible qu'apporte quotidiennement le très bon fonctionnement des techniques les plus sophistiquées, et vu la place que tiennent les considérations mathématiques dans l'élaboration de ces prouesses techniques, ce n'est pas mentir que d'affirmer que la fiabilité de ces applications est une preuve éclatante (sinon absolue) de la cohérence de cet édifice théorique.