ENSEIGNER AUTREMENT LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES EN DEUG

Michèle Artigue, IREM, Université Paris 7
Marc Rogalski, Université de Lille I

Résumé : *Dans ce texte, nous présentons une expérience d'enseignement menée à l'université de Lille 1, avec l'objectif de ne pas réduire l'enseignement des équations différentielles, même avec des débutants, à l'apprentissage de techniques de résolution algébrique. Nous analysons brièvement les résultats obtenus et leurs implications par rapport à l'extension éventuelle d'un tel enseignement.*

Ce texte se base sur les résultats d'une recherche didactique sur l'enseignement des équations différentielles qui a débuté en 1986-87, dans une section de DEUG SSM 1ère année de l'Université de Lille 1, dans le cadre d'un contrat de rénovation pédagogique et à laquelle ont participé depuis cette date les enseignants suivants : Marie Claire Ayats, Patrick Caron, Eliane Cousquer, Marie-Jeanne Delval, Régis Devoldère, André D'Hoine, Marc Rogalski, Nelly Roussignol, Carlos Sacré, Kim Sou et Fatma Zedek.
Il n'a pas pour objet de raconter l'expérience d'enseignement menée dans le cadre de cette recherche - pour plus d'informations à ce sujet, nous renvoyons le lecteur intéressé à d'autres textes (Artigue 1989, Rogalski 1989 par exemple) - mais d'essayer de présenter, à un public non nécessairement didacticien, les principaux enseignements que l'on peut tirer du travail effectué jusqu'à présent.

I - POURQUOI ENSEIGNER AUTREMENT LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ?

La théorie des équations différentielles s'est développée, à partir de la naissance du calcul infinitésimal, au XVIIème siècle, dans divers cadres(1) :
- *le cadre algébrique* de la résolution "exacte" par des formules explicites, expression finies, développements en séries, expressions intégrales,
- *le cadre numérique* de la résolution numérique approchée,
- *le cadre géométrique*, enfin, de l'étude globale, qualitative du portrait de phase de l'équation.

Le cadre algébrique a dominé pendant plusieurs siècles ce champ scientifique et le cadre géométrique n'a vu le jour qu'à la fin du siècle dernier, avec les travaux de H.Poincaré(2). Mais, depuis une vingtaine d'années, le développement rapide de la théorie des systèmes dynamiques (sur le plan mathématique), celui des moyens informatiques (sur le plan technologique) ont profondément modifié le paysage scientifique, en particulier au profit des cadres qualitatifs et numériques.

L'enseignement usuel, au niveau du premier cycle universitaire n'a pour l'instant pas suivi cette évolution scientifique. Il reste centré sur le cadre algébrique à travers l'intégration des cas classiques "intégrables en termes finis" (équations à variables séparables ou linéaires et équations s'y ramenant par des changements de variables adéquats), la résolution d'équations par séries (séries de Fourier ou séries entières) et la résolution des systèmes linéaires à coefficients constants vue comme application de la réduction des matrices.
C'est aussi en général un enseignement, en particulier en DEUG SSM, interne aux mathématiques, ne ménageant pas d'espace aux problèmes de modélisation pourtant

essentiels dans ce domaine si exploité par les autres disciplines.
C'est enfin un enseignement très mécanisé, vue la réduction opérée, plutôt facile mais sans réel enjeu.

Le décalage qui s'est ainsi créé entre l'enseignement et le fonctionnement scientifique du domaine est un facteur d'obsolescence de l'enseignement(3) et le processus d'obsolescence lui-même se trouve ici accéléré par :
- la fascination qu'exercent de plus en plus les systèmes complexes, qui échappent complètement à l'enseignement usuel, mais dont on peut maintenant visualiser facilement le comportement,
- la poussée sociale qui se manifeste vers l'utilisation de l'outil informatique dans l'enseignement : en effet, vis à vis de cette poussée, le domaine des équations différentielles, qui allie la facilité d'écriture des programmes à des productions particulièrement esthétiques, apparaît comme un domaine privilégié, et ce sont justement les cadres numériques et graphiques qui sont les plus aisément accessibles.

Une évolution ne peut donc manquer de se produire. D'où l'intérêt, à ce moment charnière, de mener des recherches permettant de guider cette évolution, en particulier en élaborant, expérimentant et évaluant des ingénieries didactiques plus adaptées à l'épistémologie du champ. C'est exactement ce que nous avons voulu faire dans la recherche qui sert de base à ce texte, en nous proposant d'étudier la possibilité de mettre en place en DEUG SSM 1ère année un enseignement :
- *qui ne se limiterait pas au seul cadre algébrique,*
- *qui ne privilégierait pas trop étroitement les équations algébriquement intégrables, quelle que soit l'approche développée, pour éviter le développement de conceptions fortement erronées du type : "tout est algébriquement intégrable, il suffit de trouver la recette",*
- *qui permettrait aux étudiants de comprendre la spécificité de chacune des approches, des méthodes et outils qui lui sont liées mais aussi leur complémentarité et de gérer cette complémentarité,*
- *qui aiderait enfin les étudiants à situer le type de problèmes, mathématiques ou issus de divers contextes, qui conduisent à l'étude d'équations différentielles.*

II - QUELQUES CHOIX QUI SEMBLENT POUVOIR ETRE DECISIFS

Pour pouvoir espérer rendre viable un autre enseignement des équations différentielles, il est nécessaire de modifier ou contourner certaines des contraintes qui pèsent sur l'enseignement actuel. C'est ce que nous avons essayé de faire en effectuant certains choix didactiques, dès le début de l'expérience ou, ultérieurement, à partir de l'analyse des premiers résultats obtenus. Après trois ans d'expérimentation, les choix suivants nous semblent avoir joué un rôle décisif :
- *le recours à l'outil informatique,*
- *le développement de capacités de traitement qualitatif et géométrique des fonctions en préalable à l'enseignement,*
- *la limitation de la complexité calculatoire dans le cadre algébrique,*
- *le transfert en travail autonome, sur la base d'un document fourni, de la majeure partie de la résolution algébrique,*
- *l'enseignement explicite de méthodes pour la résolution qualitative.*

Ces choix appellent quelques commentaires :

1) Le recours à l'outil informatique :

a) L'étude qualitative, à la main, d'une équation différentielle $y'=f(x,y)$ suppose, même pour des équations relativement simples, des capacités de traitement graphique rapide des fonctions et d'association graphique/algébrique qui sont rarement maîtrisées par nos étudiants débutants. Ils ont tendance à s'épuiser dans les activités préliminaires : tracé d'isoclines, régionement du plan suivant le signe de la dérivée... avant même d'aborder les phases cruciales que sont la prévision du portrait de phase, la validation de cette prévision et la résolution des conjectures faites. L'outil informatique, peut dénouer cette complexité en permettant d'une part de travailler sur des tracés que les étudiants ne seraient pas capables de produire à la main eux-mêmes dans un temps raisonnable, d'autre part en aidant leur production par un certain nombre d'outils : tracés de champs de tangentes, d'isoclines, de courbes d'inflexion...

b) L'outil informatique apparaît ainsi comme un instrument permettant de rendre viable l'approche qualitative. Son rôle ne se limite pas à celui-là. Il permet également dès le début de l'enseignement de faire travailler les étudiants sur des équations complexes et en particulier non algébriquement intégrables. Les situations d'association tracés-équations décrites dans la suite sont particulièrement intéressantes de ce point de vue : elles se prêtent fort bien à l'utilisation d'équations et tracés complexes et sont peu sensibles, du point de vue de la difficulté de la tâche, à cette complexité. La fiction du "tout est algébriquement intégrable" a, de ce fait, moins de chances de s'établir.

c) Enfin l'outil informatique est exploitable à un niveau plus général, dans ce domaine comme dans d'autres, pour engager les étudiants dans une pratique scientifique plus expérimentale. Dans cet enseignement, c'est un des objectifs des séances de TP sur micro-ordinateur. Il faut souligner que le domaine des équations différentielles se prête tout à fait à ce type de pratique, en particulier parce que si les tracés informatiques fournissent des quasi certitudes sur un certain nombre de points, ils sont nécessairement ambigus sur d'autres, les branches infinies qui constituent un des points clefs de l'analyse qualitative, par exemple.

Pour des raisons de disponibilité en matériel mais aussi de gestion du temps imparti à l'enseignement, l'outil informatique a été utilisé sous deux modes distincts : le mode interactif et le mode différé ou travail sur des tracés réalisés à l'avance et fournis aux étudiants.
Chacun de ces modes présente des avantages et des inconvénients :
- le mode interactif nécessite du matériel et est très coûteux en temps. En revanche, il est nécessaire au développement d'une démarche expérimentale,
- le mode différé, qui fige à l'avance les tracés utilisables, n'est pas adapté au développement d'une telle démarche. Mais il présente des avantages indéniables : en particulier, il ne nécessite qu'un équipement informatique limité et il ne bouleverse pas le fonctionnement usuel de l'enseignement. Pour certaines tâches il est tout à fait adapté. Il permet de plus de libérer l'élève des problèmes de communication avec la machine et donc de mieux focaliser son attention sur le problème mathématique considéré.

2) Le développement de capacités de traitement qualitatif et géométrique des fonctions :

Quelle que puisse être l'aide apportée par l'informatique, l'étude qualitative ne peut se développer de façon viable sans que soit consommée une rupture avec le traitement usuel des fonctions dans l'enseignement secondaire.
L'idée principale de fonction que se font les étudiants est celle de formule explicite permettant de faire correspondre à x un nombre défini et calculable ; déjà les définitions par cas (formules différentes sur deux intervalles, par exemple) les gênent beaucoup. A fortiori les obstacles apparaissent insurmontables quand la fonction n'est plus définie par une formule.

Or l'étude qualitative des équations différentielles est justement basée sur le traitement de fonctions que l'on ne connaît pas explicitement, que l'on ne connaît en

fait que par une relation les liant à leur dérivée. Il apparaît donc nécessaire, en préalable à l'enseignement, de modifier les conceptions et habitudes des élèves en matière de traitement de fonctions et de leur permettre :
- de rééquilibrer dans leurs conceptions le poids respectif des cadres algébrique et graphique,
- de développer des capacités de relations souples entre ces deux cadres,
- de travailler avec des courbes sans le support d'une formule.

3) La modification de l'enseignement dans le cadre algébrique :

Pour des raisons évidentes de contraintes de temps, il nous semble que la viabilité de l'introduction d'une approche qualitative ne peut se concevoir sans modification de la partie usuelle de l'enseignement : celle concernant la résolution algébrique. Nous avons décidé à la fois de réduire le contenu de cette partie de l'enseignement et d'en changer la gestion :
- en choisissant de limiter l'étude systématique aux deux grandes catégories d'équations élémentaires que sont les équations à variables séparables et les équations linéaires du premier et second ordre (à coefficients constants pour le second ordre), les étudiants étant munis d'un aide-mémoire présentant les cas s'y rattachant le plus facilement,
- en limitant la complexité calculatoire des exercices de ce type,
- enfin en transférant en travail autonome sur la base de fiches, l'essentiel de cette partie assez technique de l'enseignement.

4) L'enseignement explicite de méthodes pour la résolution qualitative :

L'importance d'un enseignement explicite de méthodes pour la résolution qualitative ne s'est pas imposée d'emblée. Ce sont les premières expérimentations qui ont mis en évidence les difficultés rencontrées par les étudiants au niveau de la justification qualitative, la nécessité de définir des objets permettant un fonctionnement "rigoureux" du cadre graphique, sans imposer un retour constant à des formulations d'analyse classique, et l'aide que pouvait apporter à la capitalisation une mise au point explicite sur les méthodes utilisées dans les résolutions particulières.

Il semble important de souligner que tous les choix que nous venons de mentionner s'inscrivaient dans la stratégie globale de la section où était expérimenté l'enseignement. Ils auraient peut être été difficiles à actualiser et sans doute d'une efficacité moindre si l'expérience locale sur les équations différentielles n'avait pas bénéficié de cette cohérence globale.

III - UN SCENARIO BASE SUR CES CHOIX DIDACTIQUES

Le scénario présenté dans ce paragraphe est celui qui a été utilisé la deuxième année d'expérimentation. Il tient compte des contraintes locales rencontrées, notamment au niveau du temps et de l'utilisation du matériel informatique. Ces contraintes ont conduit en particulier, pour développer un ensemble suffisamment consistant dans les cadres algébriques et géométriques, à réduire la part de la résolution numérique par rapport au premier scénario élaboré. On présente aux étudiants la méthode d'Euler utilisée dans le logiciel qu'ils manipulent en TP, ils doivent la programmer sur leur calculatrice, on s'arrange dans la première séance de TP pour proposer des équations qui les obligent à situer ce processus d'approximation de courbes par rapport à ceux auxquels ils sont habitués(4), mais il n'y a pas, comme initialement prévu, exploration de différentes méthodes, lien avec les méthodes d'intégration numérique et initiation à la notion d'ordre de méthode. Le développement de cet aspect dans l'enseignement nécessiterait au moins une séance supplémentaire de TP, complétée par exemple par un problème.

Le scénario se structure autour de treize activités

1 - Des activités préalables sur courbes et fonctions :

L'enseignement sur les équations différentielles qui occupe une trentaine d'heures est précédé, conformément aux choix effectués, par des activités préalables sur courbes et fonctions. On y demande d'associer par exemple des expressions algébriques de fonctions et des graphes, de tracer, connaissant f seulement par une représentation graphique, le graphe de fonctions comme celles qui à x associent f(-x), $f^2(x)$, f(x-1) ou encore celui de la fonction dérivée f', d'imaginer des formules compatibles avec un tracé, de régioner le plan suivant le signe de fonctions, de tracer des graphes respectant des contraintes diverses données (cf. annexe pour quelques exemples).

2 - Un cours d'introduction :

L'enseignement proprement dit débute par un cours d'introduction : présentation de quelques problèmes issus de la physique ou de la géométrie amenant à des équations differentielles, notion de solution (point de vue fonctionnel et point de vue géométrique), méthode d'Euler, théorème de Cauchy-Lipschitz (énoncé et interprété dans le cadre des situations étudiées mais non démontré).

3 - Deux séances d'initiation à l'approche géométrique :

Il s'agit de deux séances de TD d'initiation dont l'objet est :
- de donner du sens à l'idée de résolution qualitative comme détermination de l'ensemble des courbes "compatibles" avec le champ de tangentes associé à l'équation,
- d'introduire les outils de base (isoclines, régionement du plan suivant le signe de la dérivée à partir de l'isocline 0, repérage des propriétés d'invariance du champ par symétrie ou translation, repérage des solutions particulières) de l'étude qualitative dans une formulation à la fois algébrique et géométrique, pour faciliter dès le départ la mise en relation des deux cadres.

Les situations choisies comme support à cette phase sont des situations d'association : champs-équations et tracés-équations. On fournit aux étudiants un ensemble de tracés de champs ou de courbes solutions et un ensemble d'équations et ils ont à les apparier en justifiant leurs choix. La résolution se fait en petits groupes qui doivent se mettre d'accord sur les associations proposées, ceci pour permettre la résolution par les étudiants eux-mêmes dans le temps imparti et favoriser l'auto-contrôle des productions. Elle est ensuite exploitée collectivement par l'enseignant qui effectue une synthèse des critères utilisés (cf. annexe).

4 - Un cours sur la résolution algébrique :

Il s'agit d'un cours standard sur les équations à variables séparables et les équations linéaires. On insiste sur la détermination de l'intervalle de définition de la solution passant par un point et sur les équations simples de la forme $y'=x^py^q$ qui serviront par la suite d'équations de réference pour les études géometriques (sur-solutions).

5 - Une séance de TD sur la résolution algébrique :

Cette séance, elle aussi standard, est prolongée par un travail autonome des étudiants sur la base de fiches de travail qui comportent des éléments de solution, pour éviter tout blocage. Ce travail autonome des étudiants est par la suite contrôlé et valorisé au moyen d'une brève interrogation écrite.

6 - Une séance de TD consacrée aux apports respectifs des résolutions algébriques et géométriques :

Cette séance est centrée sur la prévision de l'allure des courbes intégrales d'une équation. La prévision se fait d'abord dans le cadre géométrique et la résolution algébrique est ensuite utilisée pour résoudre les problèmes que l'étude géométrique ne permet pas aisément de résoudre. Cette situation exploite les acquis de la résolution algébrique et les notions introduites dans la phase d'initiation à l'approche géométrique. Elle doit permettre de progresser dans cette approche, en amenant à poser, dans le cadre géométrique, les problèmes de branches infinies et de prolongement de solutions (absence de point d'arrêt dans l'ouvert) et en conduisant aux notions essentielles de barrière et de zone piège. La résolution s'effectue, comme dans la phase 3 et pour les mêmes raisons, en petits groupes qui doivent se mettre d'accord sur les formes proposées pour les solutions.

Les équations $y' = (x-2)(y^2-1)$ et $y' = x(y-y^2)$ sont celles qui ont été utilisées pour cette phase. Le choix effectué repose sur les raisons suivantes :
- le régionement suivant le signe de y' ne pose pas de problème,
- il y a des solutions particulières affines qui permettent de régioner le plan en zones pièges pour les courbes intégrales, et vont être asymptotes à d'autres solutions,
- l'étude géométrique, facile au départ, laisse certains points dans l'ombre,
- la résolution algébrique conduit à des formules qui permettent de résoudre sans trop de difficultés les problèmes en suspens et, en même temps, sont suffisamment complexes pour faire sentir l'intérêt de l'étude géométrique.

Mais bien sûr, ce ne sont pas les seules équations à remplir ces conditions.

7 - Une première séance de TP :

Il s'agit d'une séance de TP sur micro-ordinateurs pour laquelle les étudiants fonctionnent en binômes. L'objectif est d'étudier expérimentalement en deux heures, de 4 à 6 équations, d'identifier pour chacune d'elle les types possibles de solutions et de les représenter sur papier, de préciser le plus possible leurs caractéristiques en distinguant propriétés que l'on pense pouvoir prouver, conjectures et questions, de noter eventuellement les phénomènes aberrants observés et d'essayer de les expliquer. Enfin, pour l'équation $y'=y^2-1$, il est demandé de justifier le maximum de propriétés. Les étudiants travaillent sur un logiciel interactif élaboré par Carlos Sacré et n'ont pas à programmer.

Pour rentabiliser au mieux le temps passé devant les micro-ordinateurs, il est demandé aux étudiants d'effectuer, avant la séance, une préparation comportant, pour les équations données :
- le régionement de l'ouvert de définition de l'équation suivant le signe de y',
- une ébauche de tracé de quelques courbes solutions.

Les étudiants doivent d'autre part rédiger un compte-rendu à partir des données recueillies pendant la séance (cf. en annexe la fiche de TP).

8 - Trois cours de synthèse sur l'étude géométrique :

Ces cours ont pour objet de faire la synthèse du travail déjà réalisé en TD et TP, de mettre en forme et d'institutionnaliser les outils progressivement développés pour le besoin des études géométriques : isoclines et régionement, invariances géométriques, barrières, zones pièges, zones avec champ rentrant et sortant sur la frontière, théorème reliant limite de la dérivée et limite de la fonction pour l'étude des branches infinies, existence et unicité locales, existence et unicité de solutions maximales, comparaison d'équations et sur-solutions.

Il ne s'agit pas de donner dans de tels cours des définitions complètement en forme, et parfois un peu lourde (cas des "zones" par exemple) ou des démonstrations parfois délicates (sur les sursolutions par exemple), mais de faire sentir les grandes idées et comment les utiliser. Par contre, il convient à ce moment de bien dégager une "méthode générale d'étude qualitative" : quelles questions a-t-on à se poser, dans quel ordre raisonnable, de quels moyens dispose-t-on pour essayer de répondre ?
Un polycopié structuré dans cet esprit est distribué aux étudiants à l'issue de ces trois cours.

9 - Une séance de TD de réinvestissement :

Analogue dans ses modalités à la séance de l'activité 6, cette séance a pour objet l'étude d'une équation qui ne fait pas partie du stock des équations que les étudiants savent algébriquement intégrer et dont l'étude met en jeu les différents outils introduits. Cette étude doit être également l'occasion d'aborder le problème des singularités.
Les équations :

$$y' = y^2 + 1/x \quad \text{ou} \quad y' = 1/y^2 + 2x$$

sont celles qui ont été effectivement utilisées, mais bien sûr, là encore, bien d'autres choix sont possibles.

10 - Un ou deux devoirs sur les équations différentielles :

C'est en devoir, en particulier, que sont traitées les équations linéaires du second ordre à coefficients constant avec second membre exponentiel-polynôme.

11 - Une deuxième séance de TP sur micro-ordinateur :

Il s'agit, dans ce TP, en fonctionnant comme dans le premier TP, d'étudier une équation différentielle dépendant d'un paramètre. Les étudiants ont à déterminer eux-mêmes les différents types de portraits de phase et à choisir des valeurs significatives du paramètre pour lesquelles ils feront une étude expérimentale et théorique.
L'équation choisie est ici : $y' = (xy-a)/(x+y)$. Ce n'est pas le seul choix possible.

12 - Un atelier de modélisation :

L'objet de cet atelier est de revenir sur le problème des modélisations différentielles : à partir du travail sur quelques exemples, empruntés à la physique ou à d'autres domaines, il s'agit de faire comprendre les propriétés que doit vérifier un phénomène pour que son étude relève d'une modélisation par une équation différentielle.
Cet atelier s'appuie sur les résultats des recherches sur procédures différentielles et intégrales menées au sein du GRECO Didactique (Alibert et Al. 1986, Artigue et Al. 1989). Ces recherches ont mis en évidence la difficulté des étudiants à identifier ce qui rend nécessaire le recours au registre différentiel dans la mise en équation de problèmes. En particulier, les procédures différentielles ne sont pas vues comme un moyen de passer du local au global dans le cas de problèmes non affines, pour déterminer la loi régissant un phénomène donné.

Compte-tenu des résultats de ces recherches, il paraît important que la mise en équation différentielle ne puisse s'effectuer, pour tous les problèmes proposés, par simple lecture de certains mots de l'énoncé (tels le mot "vitesse"). Ceux qui ont été effectivement choisis dans ce scénario sont des problèmes d'absorption de lumière, de porosité de canalisations, d'évaporation, de dissolution. Là encore bien sûr, d'autres choix sont possibles.

13 - L'évaluation finale :

Ce module d'enseignement se termine par un contrôle qui porte sur l'étude qualitative des solutions d'une équation. Cette étude, après les phases préliminaires de recherche des invariances géométriques et de régionement de l'ouvert de définition de l'équation suivant le signe de y', comporte une première partie de prévision : il s'agit pour les étudiants de prévoir à priori les tracés possibles pour quelques solutions avec conditions initiales données, de formuler des conjectures et des questions à propos de ces solutions. Dans une deuxième partie, on demande ensuite un certain nombre de justifications. Ces justifications peuvent faire intervenir éventuellement une expression algébrique non explicite des solutions. Le sujet de 1987-88 proposait ainsi l'étude de l'équation de Ricatti : $y'=x^2+1-y^2$ admettant $f(x)=x$ comme solution particulière et dont la solution passant par $(0,y_0)$ peut s'écrire :

$$y = x + \exp(-x^2) / [h(x) + 1/y_0] \quad \text{avec} \quad h(x) = \int_0^x \exp(-t^2)dt .$$

Bien sûr, le scénario présenté ici n'est qu'un des multiples scénarios compatibles avec les choix didactiques qui ont été présentés dans le paragraphe II. Et, même si l'on respecte la trame globale de ce scénario, de multiples choix sont encore possibles comme nous avons essayé de le montrer, en essayant de mettre en avant plus les caractéristiques et les objectifs de chacune des activités que leur contenu précis.
Pourtant, il nous semble que l'on peut faire des résultats obtenus au cours des deux premières années d'expérimentation une analyse qui dépasse le caractère tout à fait local de l'expérimentation menée. C'est ce que nous allons essayer de faire dans le paragraphe suivant.

IV - UN TEL ENSEIGNEMENT EST-IL POSSIBLE EN DEUG A1 ?

Les résultats obtenus montrent tout d'abord, nous semble-t-il, que la résolution géométrique est accessible même à des étudiants débutants. Les premières situations d'associations champs/équations et tracés/équations sont par exemple des situations qui, compte-tenu du travail préliminaire effectué sur courbes et fonctions, fonctionnent très bien. Les étudiants, en petits groupes, parviennent à résoudre ces problèmes en un temps raisonnable et proposent, pour justifier les associations, des critères très variés(5) qui permettent une institutionnalisation riche de l'enseignant. Même si, dans la première séance de prévision sans aide informatique (activité 6), l'enseignant a davantage à intervenir, en particulier pour susciter de réelles justifications, les premiers compte-rendu de TP montrent que la grande majorité des étudiants se familiarise rapidement avec les objets introduits, est capable de lire des productions informatiques pour repérer les différents types de solutions représentés, décrire leurs caractéristiques apparentes et pointer certaines ambiguïtés des tracés. L'analyse des copies d'examen montre enfin un bon niveau de réussite au niveau des activités préliminaires et de la prévision, bien sûr dans le cadre des exemples relativement simples envisagés dans ces évaluations.
Il est intéressant de constater que ces résultats ont été obtenus dès la première année d'expérimentation et ont résisté aux conditions difficiles de la troisième année, les étudiants affectés à la section expérimentale étant ceux qui n'avaient pas obtenu la moyenne au baccalauréat en mathématiques.

Les résultats montrent également, au moins pour les deux premières années, un bon niveau de réussite au niveau de la résolution algébrique, compte-tenu des objectifs restreints visés.

Les résultats obtenus montrent enfin que le développement des capacités de justification dans la résolution qualitative, s'il n'est pas impossible, est cependant plus problématique. Il se heurte à différents obstacles de nature différente :

1) Les justifications, dans leur formulation d'analyse, font appel de façon fine à des outils que les étudiants sont en train d'apprendre à maîtriser (théorèmes des valeurs intermédiaires, des accroissements finis, majorations...). On peut estimer que le travail sur les équations différentielles va les mettre justement en condition de faire fonctionner ces outils, renforcer leur compétence dans ce domaine et que c'est l'un de ses objectifs. Mais il serait illusoire de penser que, pendant le faible temps imparti à cet enseignement, il va y avoir un saut qualitatif suffisant pour leur permettre d'accéder au niveau de maîtrise théoriquement adéquat.

2) La justification qualitative peut se développer également avec le support du registre graphique. A partir de la seconde année d'expérimentation, compte-tenu des difficultés rencontrées, un effort important a été fait dans cette direction et les résultats obtenus sont relativement encourageants : les notions de zone et de barrière sont des notions que les étudiants de ce niveau peuvent, semble-t-il, exploiter pour justifier des problèmes de croisement et de non-croisement, des études de branches infinies, idem pour les notions de solution maximale, le théorème d'existence et d'unicité, le théorème reliant limite de la dérivée et limite de la fonction.
Mais il faut souligner que ceci nécessite la mise en forme, à partir des activités des étudiants, d'outils qui permettent à la fois un fonctionnement opérationnel et un fonctionnement suffisamment rigoureux pour être acceptable dans le cadre d'un enseignement de mathématiques. Il y a là un problème d'élaboration et de limitation de l'objet d'enseignement qui n'a rien d'immédiatement évident.

La recherche montre enfin que le développement de justifications dans le registre géométrique nécessite aussi de vaincre les résistances de l'enseignement (étudiants et enseignants) à l'égard du tracé comme support de justification. En effet, le cadre graphique est dans l'enseignement usuel un cadre limité à des fonctions de représentation, au mieux lui concède-t-on une fonction heuristique. Il n'est pas un cadre admis pour la justification. Ceci constitue un obstacle réel à la transmissibilité de l'expérience menée. Une transmission "réussie" suppose en effet l'établissement d'une compatibilité de point de vue entre émetteurs et recepteurs sur le statut possible du cadre graphique et la prise de conscience par le récepteur du prix à payer pour que ce cadre puisse jouer le rôle qu'il semble nécessaire de lui faire jouer ici.

Les difficultés signalées concernant la justification qualitative sont réelles mais, et nous voudrions le souligner pour conclure, les résultats obtenus montrent que le travail didactique peut aider à les surmonter partiellement, suffisamment au moins pour permettre à des étudiants standard d'université d'acquérir des performances raisonnables.

Au delà de cette question de performance, comment les étudiants eux-mêmes ont-ils perçu cet enseignement ? Les réponses au questionnaire d'évaluation proposé aux étudiants à la fin des années 1988 et 1989 nous permettent d'en avoir une idée. En effet, dans ce questionnaire, on demandait aux étudiants, pour huit thèmes de l'enseignement : nombres réels, suites, équations différentielles, primitives, algèbre linéaire, courbes et fonctions, intégration, développements limités, de donner leur opinion sur les points suivants :
1 - L'intérêt du thème (4 niveaux de réponse)
2 - Le thème a-t-il modifié l'idée que vous vous faisiez des mathématiques ? (réponse en oui/non)
3 - La difficulté du thème (4 niveaux de réponse)
4 - Avez-vous trouvé des méthodes générales pour résoudre les problèmes relevant du thème ? (réponse en oui/non).
En ce qui concerne l'intérêt, en 1988, les équations différentielles, primitives et courbes et fonctions arrivent en tête avec des scores respectifs de 3.60, 3.64 et 3.57, pour ce qui concerne la facilité ce sont les équations différentielles et les

développements limités avec un score de 3.14 et, en ce qui concerne les deux autres questions posées, les équations différentielles sont nettement en tête. Les résultats de 1989, avec les étudiants faibles, vont dans le même sens.

Ces appréciations mettent bien en évidence l'intérêt que pourrait présenter, indépendamment d'une meilleure adéquation à l'épistémologie du champ, une rénovation de l'enseignement des équations différentielles allant dans ce sens.

Les documents correspondant à cet enseignement (logiciel de TP, fiches de TP et de TD, polycopié) peuvent être commandés à l'UFR de mathématiques de l'université de Lille 1.

Notes :

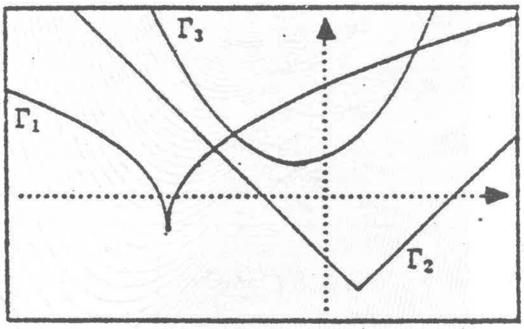
(1) Le terme de cadre est utilisé ici au sens défini par R.Douady dans sa thèse (Douady 1984). A chaque cadre est attaché un point de vue sur la résolution, un ensemble de techniques, méthodes, théories spécifiques.
(2) On fait remonter classiquement la naissance de la théorie géométrique des équations différentielles au mémoire de H.Poincaré : "Sur les courbes définies par une équation différentielle" déposé à l'Académie des Sciences en 1880.
(3) On se réfère ici à la théorie de la transposition didactique élaborée par Y.Chevallard qui met bien en évidence le rôle joué par l'accroissement de l'écart entre savoir scientifique et objets d'enseignement dans l'évolution de ces derniers.
(4) L'image associée par les étudiants débutants à l'approximation d'une courbe par une ligne polygonale est celle de ligne polygonale inscrite ou circonscrite. Ce n'est pas à ce type d'approximation que correspondent les méthodes de résolution numérique.
(5) Les étudiants, à ce moment de l'enseignement, n'ont pas une familiarité suffisante avec le domaine pour privilégier quelques critères. Ceci explique la richesse de leurs productions favorisée par ailleurs par le choix des équations et tracés.

Références :

Alibert D. et Al. (1986) : *Le thème "Différentielles" : un exemple de coopération Maths-Physique dans la recherche,* Actes du Colloque du GRECO Didactique, Sèvres, In G.Vergnaud et Al. (Eds), "Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1988.
Artigue M. et Al. (1989) : *Procédures différentielles et intégrales dans les enseignements de mathématiques et de physique de premier cycle universitaire* Brochure N° 74 , Edition IREM Paris 7.
Artigue M. (1989) : *Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire,* Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble, Edition IMAG.
Artigue M. et Gautheron V. (1983) : *Systèmes différentiels - Etude graphique,* Editions CEDIC.
Hubbard J. et West B. (1990) : *Ordinary differential equations,* Springer Verlag.
Rogalski M. (1989) : *L'étude qualitative des équations différentielles,* Polycopié de Cours, Edition Université de Lille 1.

ANNEXES : QUELQUES DOCUMENTS CORRESPONDANT A CET ENSEIGNEMENT

Annexe 1 : Quelques exercices extraits des fiches sur courbes et fonctions



Ex 4. Chacune des trois courbes Γ_i ci-contre est le graphe d'une fonction

$$y = |x - a_i|^{\alpha_i} + b_i$$

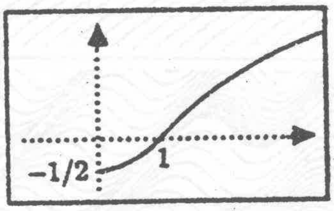
avec $\alpha_i > 0$, pour $i = 1, 2, 3$.

1) Classer les α_i par ordre croissant.

2) Classer de même les b_i .

3) Classer de même les a_i .

Ex 1. *Déduire un graphe d'un autre.* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ dont le graphe figure ci-contre.

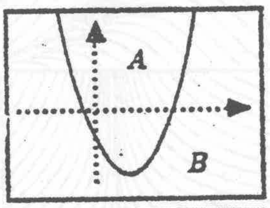


Dessiner les graphes des fonctions suivantes :

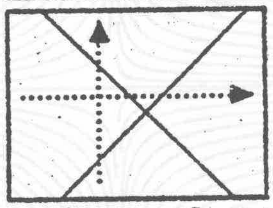
a) $x \mapsto f(-x)$ e) $x \mapsto f(x-1)$
b) $x \mapsto f^2(x)$ f) $x \mapsto 1 - f(x-1)$
c) $x \mapsto 1 - f(x)$ g) $x \mapsto f(1-x)$
d) $x \mapsto \sqrt{f(x)}$

Préciser chaque fois que possible une transformation géomé-

Ex 1. 1) Soit P la parabole d'équation $y = x^2 - 2x - 1$. Définir par des inégalités les deux régions A et B qu'elle détermine dans le plan.



2) On considère les droites $D : y = -x+1$ et $\Delta : x-y-2 = 0$. Définir par des inégalités les régions qu'elles déterminent dans le plan.



3) Même question pour les courbes $P : y = x^2 - 2x - 1$ et $\Gamma : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 8$.

4) On considère la courbe d'équation $(x+y)(x^2+y^2-1) = 0$. Combien de régions délimite-t-elle ? Les définir par des inégalités.

5) Même question pour $(x^2+y^2-4)(y^2-x^2-1) = 0$.

Ex 2. On considère une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

i) f est décroissante, et possède une dérivée f' continue ;
ii) $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$;
iii) f' est croissante sur $[0, +\infty[$;
iv) f' est décroissante sur $]-\infty, 0]$.

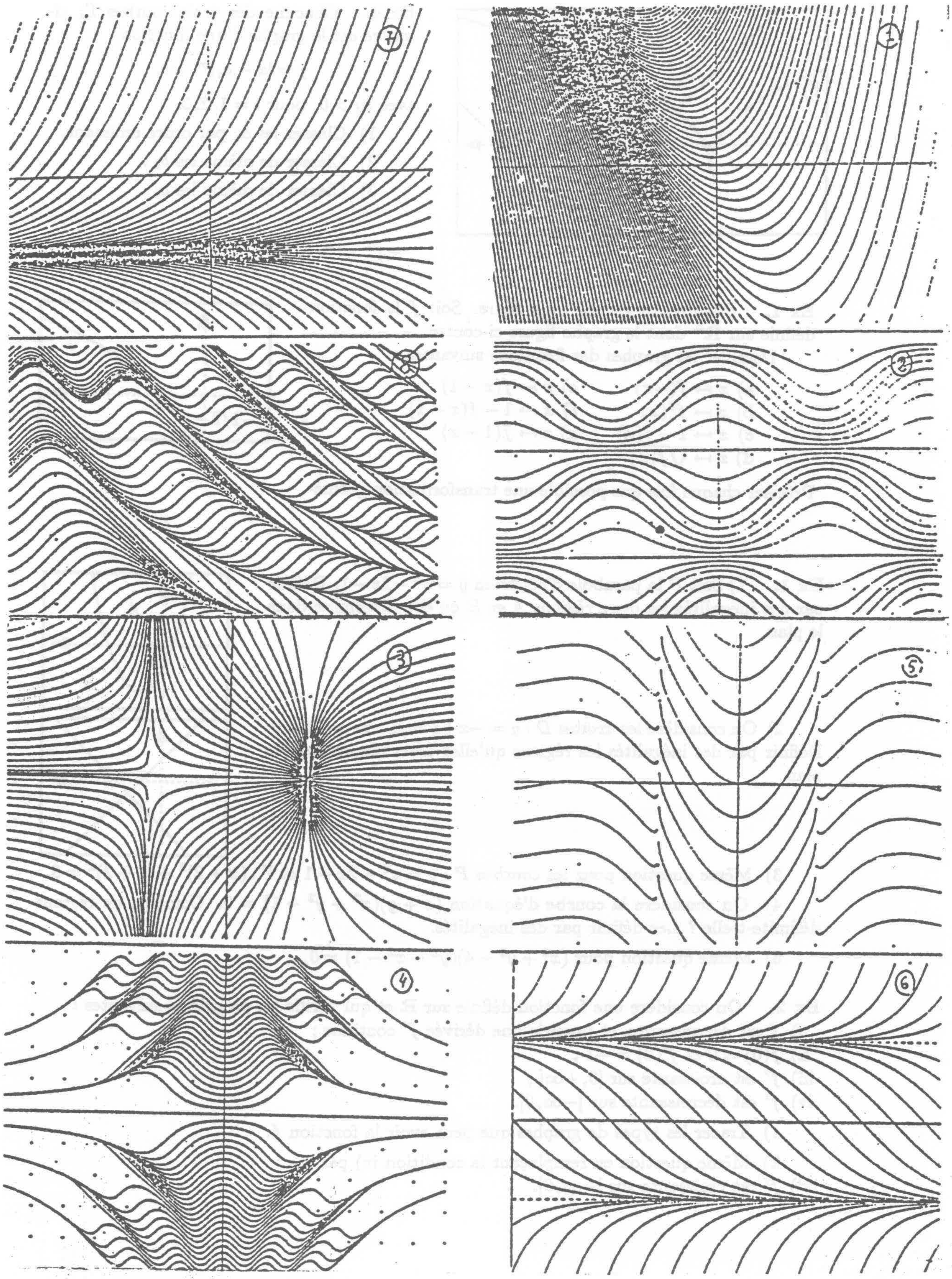
1) Tracer les types de graphes que peut avoir la fonction f.

2) Même question en remplaçant la condition iv) par :

iv') f' est croissante sur $]-\infty, 0]$.

Annexe 2 : Situation d'association entre équations et tracés

Chacun des tracés fournis ci-après correspond à une des équations suivantes : $y'=y/(x+1)(x-1)$, $y'=y^2-1$, $y'=2x+y$, $y'=\sin(xy)$, $y'=\sin(3x)/(1-x^2)$, $y'=(\sin x)(\sin y)$, $y'=y+1$.



Annexe 3 : Fiche correspondant à la première séance de travaux pratiques

Equations différentielles, premier TP

Etude des équations différentielles :

(E_0)	$y' = \operatorname{Log} x - y^2$
(E_1)	$y' = -x/y$
(E_2)	$y' = y^2 - 1$
(E_3)	$y' = (y+1)\sqrt[3]{y-1}$
(E_4)	$y' = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
(E_5)	$y' = (x-2)(y^2-1)$

Préparation du T.P.

Pour chacune des équations différentielles ci dessus, étudier le régionnement du plan selon le signe de y' ; le dessiner. Sur le même dessin, ébaucher le tracé de quelques courbes solutions. *Il est inutile dans cette préparation de recopier de justifications.*

Rendre juste avant le T.P. une copie par binôme regroupant ces dessins.
Conserver un deuxième exemplaire pour utilisation pendant le TP.

T.P. proprement dit.

Il vaut mieux traiter correctement 4 équations que bâcler les 6.

Visualiser avec le logiciel mis à disposition les régionnements et solutions des équations (E_0) à (E_5). Comparer avec le résultat du travail de préparation.

Dessiner les figures observées et prendre toutes les notes qui seront utiles pour le compte-rendu. Noter en particulier les phénomènes qui vous paraissent aberrants.

Après le T.P.

Dans un délai d'une semaine (à préciser avec l'enseignant), rendre un compte-rendu par binôme. *Lire attentivement le questionnaire suivant ; il est inutile d'en recopier plus que demandé.*

1) Pour chaque équation :

a) un dessin montrant plusieurs solutions de types aussi divers que possible.

b) les propriétés que vous pensez pouvoir démontrer (on ne demande pas de rédiger de démonstration).

c) vos conjectures à propos des solutions ou de l'ensemble des solutions.

d) vos questions à propos des solutions ou de l'ensemble des solutions.

e) vos remarques concernant les éventuels phénomènes aberrants observés, et la façon dont vous pensez qu'on pourrait les éviter.

Distinguer soigneusement par la présentation les propriétés, les conjectures, les questions et les remarques.

2) De plus, pour l'équation (E_2), justifier le maximum de résultats.

Annexe 4 : Plan du polycopié de cours

Plan

Introduction p.6
1. Le théorème d'existence et unicité locales. p.10
2. Les transformations simples conservant l'équation. p.12
3. L'utilisation de l'isocline zéro pour régionner l'ouvert. p.15
4. Le rôle de barrière joué par des solutions particulières et certaines isoclines. p.16
5. Etude des limites en $\pm\infty$: première approche. p.18
6. Le rôle de la maximalité pour les intervalles de définition des solutions. p.19
7. Utilisation de zones avec champ rentrant ou sortant sur la frontière. p.22
8. Comparaison de solutions d'équations différentes, application à l'étude des branches infinies et des intervalles de définition des solutions maximales. p.28
9. Comment démarrer l'étude des solutions d'une équation différentielle ? p.33

Appendices

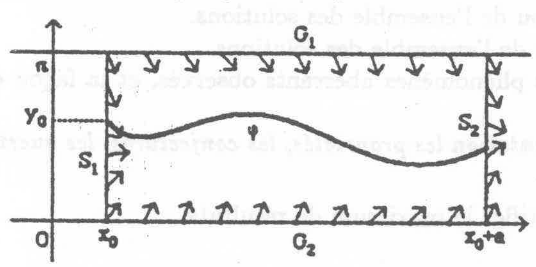
I. Ouverts, fermés, compacts du plan. p.34
II. Fonctions continues de 2 variables. p.36
III. Les limites de fonctions lipschitziennes. p.37
IV. Le lemme faible de Gronwall et l'unicité locale et globale. p.38
V. Démonstration du théorème des sursolutions. p.40
VI. L'inégalité de Gronwall et le théorème de continuité. p.41

Bibliographie p.43

Annexe 5 : Extrait du paragraphe 7 du polycopié de cours

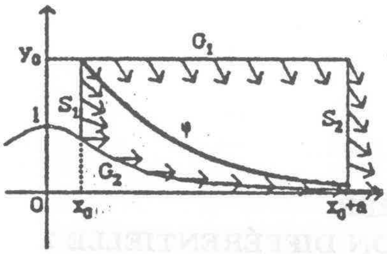
Comment utiliser le théorème de la zone ?

Donnons quelques exemples :



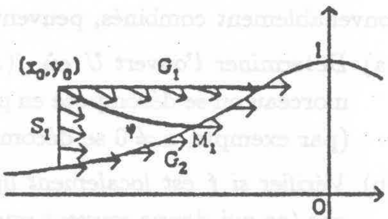
• $y' = 2\cos y - \cos x$. $U = \mathbf{R}^2$, $|f(x,y)| = |2\cos y - \cos x| \leq 3$, les solutions maximales sont définies sur $\mathbf{R}$ (cf. proposition 4). Si $y = 0$, $\cos y = 1$, et par suite $f(x,y) \geq 1$. Si $y = \pi$, $f(x,y) \leq -1$. Si (x_0, y_0) vérifie $0 < y_0 < \pi$, considérons la zone Z définie par $G_1 : y = \pi$, $G_2 : y = 0$, $S_1 : x = x_0$ et $S_2 : x = x_0 + a$, $a > 0$ arbitrairement grand. Alors le champ orienté selon $x \nearrow$ est strictement rentrant sur G_1, G_2 et S_1, et strictement sortant sur S_2. Le graphe de la solution maximale doit sortir de Z donc nécessairement la solution est définie jusqu'à $x_0 + a$, car elle ne peut sortir qu'en un point où le champ est sortant, donc en un point de S_2. Comme a est arbitraire, on conclut que

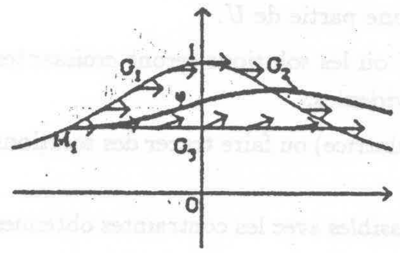
la solution maximale passant par (x_0, y_0), si $0 < y_0 < \pi$, est définie sur $[x_0, +\infty[$ (ce qu'on savait déjà), et vérifie $\forall x \geq x_0,\ 0 < \varphi(x) < \pi$.



• $y' = \frac{1}{1+x^2} - y$. Considérons, pour (x_0, y_0) tel que $x_0 > 0$ et $y_0 > \frac{1}{1+x_0^2}$, la zone Z limitée par $S_1 : x = x_0$, $S_2 : x = x_0 + a$ $(a > 0)$, $G_1 : y = y_0$, et l'isocline zéro $G_2 : y = \frac{1}{1+x^2}$. Le champ orienté selon $x \nearrow$ est strictement rentrant sur S_1, G_1 et G_2 et strictement sortant sur S_2. Donc la solution maximale passant par (x_0, y_0) est définie jusqu'à $x_0 + a$, et sur $[x_0, x_0 + a[$, on a $\varphi(x) > \frac{1}{1+x^2}$. Comme a est arbitraire, φ est définie sur $[x_0, +\infty[$, φ décroissante, et $\varphi(x) > \frac{1}{1+x^2}$ sur $[x_0, +\infty[$. On en déduit (cf. § 5, exemple après la proposition 1) que $\varphi(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Pour la même équation, si on part de (x_0, y_0) avec $y_0 < 1$, $x_0 < 0$ et $y_0 > \frac{1}{1+x_0^2}$, la considération de la zone ci-contre montre que le graphe de φ, solution maximale passant par (x_0, y_0), doit couper l'isocline zéro en un point M_1, où sa tangente sera horizontale.

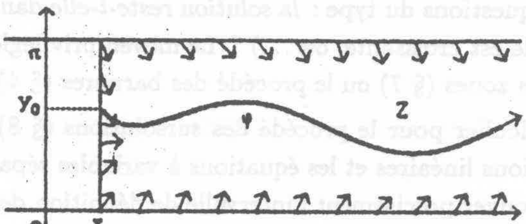


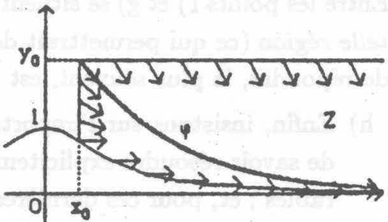


Que fait-elle après M_1 ? On considère la zone ci-contre, limitée par l'horizontale G_3, $G_1 : y = \frac{1}{1+x^2}$, $x < 0$, $G_2 : y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$. Le graphe de φ doit sortir par un point de G_2, avec tangente horizontale. Après, on se retrouve dans le premier cas étudié.

Extension à une "zone" non bornée : "zone"-piège.

Dans le premier cas de l'exemple $y' = \frac{1}{1+x^2} - y$ et dans l'exemple $y' = 2\cos y - \cos x$, le nombre a, utilisé pour définir la frontière $S_2 : x = x_0 + a$, était arbitrairement grand. Ceci signifie qu'en fait on aurait pu utiliser les "zones" non bornées Z, ci-dessous, qui sont alors des "zones"-pièges pour φ, dont le graphe ne peut sortir, car le champ est strictement rentrant sur la frontière. Alors φ est définie sur $[x_0, +\infty[$.





Annexe 6 : Paragraphe 9 du polycopié de cours

9. COMMENT DEMARRER L'ETUDE DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION DIFFÉRENTIELLE ?

Nous proposons ici une méthode pour démarrer une telle étude, ce démarrage ayant pour but d'amener au point où l'on peut circonscrire les questions qu'il faut se poser pour que la forme des divers types de solutions soit connue ; les procédés décrits antérieurement, convenablement combinés, peuvent alors permettre de donner une réponse à ces questions.

a) ***Déterminer l'ouvert U* où $f(x,y)$ est définie, repérer en particulier s'il est en un seul morceau ou se décompose en plusieurs $U_1, U_2, \ldots$ où il faudra faire l'étude successivement (par exemple, $x \neq 0$ se décompose en $x > 0$ et $x < 0$).**

b) ***Vérifier si f est localement lipschitzienne*, sinon repérer les points de U où elle ne l'est pas (ce qui donne souvent une autre décomposition de U).**

c) ***Chercher les transformations simples qui conservent l'équation*, en déduire l'effet sur les solutions. Cela permet souvent de réduire l'étude à une partie de U.**

d) ***Tracer l'isocline zéro*, et en déduire les régions de U où les solutions seront croissantes ou décroissantes. *Tracer les solutions particulières évidentes.***

e) ***Dessiner le champ de pentes* en des points de U (calculatrice) ou faire tracer des solutions par un microordinateur.**

f) ***Tracer alors toutes les allures de solutions a priori possibles* avec les contraintes obtenues par les activités précédentes.**

g) ***Repérer toutes les questions qui restent ainsi ouvertes.* La plupart du temps, il s'agit de l'intervalle de définition d'une solution maximale — avec la question des limites aux bornes : asymptote verticale si ces limites sont $\pm\infty$, limite finie, oscillations... Et il s'agit aussi, si l'intervalle est de la forme $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$, du comportement quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$: limite finie, limite infinie... Ce sont alors les procédés des § 5, 6, 7 et 8 qu'il faut utiliser, séparément ou en les combinant.**

Entre les points f) et g) se situent souvent des questions du type : *la solution reste-t-elle dans telle région* (ce qui permettrait de savoir qu'elle est croissante, ou ...) ? Le moyen privilégié de répondre, le plus souvent, est le procédé des zones (§ 7) ou le procédé des barrières (§ 4).

h) **Enfin, insistons sur l'importance, en particulier pour le procédé des sursolutions (§ 8), de savoir résoudre explicitement les équations linéaires et les équations à variables séparables ; et, pour ces dernières, de savoir trouver précisément l'intervalle de définition des solutions maximales.**