CONCERTUM

Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques

En hommage à Hervé Péault

Hervé Péault était professeur de mathématiques et formateur d'enseignants au site d'Angers de l'IUFM des Pays de Loire. Il nous a quittés en 1997 des suites de ce qu'il est convenu d'appeler une longue maladie. Ses travaux sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la formation des professeurs des écoles furent nombreux et exemplaires. Son implication au sein de la COPIRELEM débuta dans les années 1980 et devint chaque année plus conséquente. Il fut un des moteurs de la dynamique de publication dans laquelle s'engagea la COPIRELEM dans les années 1990 pour prouver au monde nouveau des IUFM que la formation mathématique des professeurs des écoles avait déjà une histoire et une culture.

Préface

Guy Brousseau

La Commission Permanente des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, pour l'École Élémentaire a trente ans. Elle aurait pu s'appeler platement COPIREMEE, mais COPIRéleM évoquait mieux sa spécificité, à la condition de mettre le M final en majuscule pour signifier « Mathématiques ». Vive donc la COPIREleM, sa longévité est un indice de sa pertinence et de son utilité. Comme son nom l'indique la COPIRELEM est une commission Inter-IREM. Elle a emprunté aux IREM leur indépendance par rapport aux institutions d'enseignement, leur autorité mathématique et leurs ressources. En retour elle a montré de façon exemplaire ce que pouvaient être des rapports sains entre les protagonistes de l'éducation, en exigeant davantage d'études, en résistant au prosélytisme inconsidéré, en stimulant la réflexion et les échanges. Elle a contribué au rayonnement des IREM parmi une population importante, difficile à atteindre pour eux, à leur réputation et à leur influence aussi bien lorsqu'elle s'exprime auprès des institutions, que lorsqu'elle publie ses activités (annales, comptes-rendus du séminaire et du colloque annuels).

J'ai eu la chance d'être de ceux qui l'ont conçue, qui l'ont fait naître, et qui l'ont accompagnée dans sa jeunesse. D'autres ont pris la relève mais j'ai suivi sa progression du coin de l'œil. C'est sans doute à ce titre que ses responsables actuels me font l'honneur de me demander de préfacer cet ouvrage, témoignage de leurs travaux.

C'est donc avec fierté que je présente aux lecteurs ce recueil de textes choisis parmi les plus représentatifs de l'activité de la commission depuis dix ans. Il faut remercier Catherine TAVEAU et Yves GIRMENS qui les ont réunis et les membres de la commission qui les ont produits.

Ce témoin de la vitalité de l'institution me donne ainsi le bonheur de retrouver aujourd'hui la COPIREleM dans sa maturité, et de constater qu'elle continue sa tâche avec courage et compétence, malgré les difficultés que je soupçonne. Je les soupçonne ces difficultés, mais je ne les connais plus, ce qui me donne quelques scrupules. Mon avis peut-il être très pertinent pour un jeune chercheur formateur dans un IUFM ?
Mon avis peut être pas, mais mon témoignage ?
Je veux ici rappeler la grandeur et la difficulté de la mission de cette commission, et sa gloire, aussi car elle a accompli à petit bruit, de grandes choses.

L'histoire d'une institution ne lui est utile que dans la mesure où la vérité historique y est accompagnée de façon heureuse par une certaine composante mythique. Le mythe est constitué d'abord par les espérances des acteurs successifs - par les intentions réelles ou supposées qu'ils ont affichées, ou que leurs successeurs leur ont prêtées - ensuite par les justifications que se sont données les uns et les autres suivant les fortunes de la vie. Je laisse à d'autres le soin de faire une histoire de la COPIRELeM qui sera plus vraie et plus utile.

Je veux seulement évoquer ici quelques uns des espoirs que j'avais placés en elle. Mais rien ne se serait fait si ces espoirs n'avaient pas été partagés et enrichis par de nombreux collègues. Je vais donc parler au nom de tous ceux qui, par la COPIRELeM, ont voulu faire, dans les années 70, d'un mythe une réalité. J'espère qu'ils me pardonneront ce que je leur emprunterai ou que je leur prêterai indûment.

Officiellement la commission avait une mission de concertation entre les principaux partenaires de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire : le ministère (la direction des écoles), ses inspecteurs et ses moyens d'action (Institut Pédagogique National par exemple), les instituteurs, les formateurs en mathématiques et les mathématiciens, mais aussi les novateurs et les éditeurs qui par le biais des médias tenaient l'opinion en haleine.
Elle est pendant longtemps (et peut être encore) un exemple de coopération entre ces divers acteurs. Je veux rendre hommage ici en particulier à l'Inspecteur Général Duma qui prit part aux travaux et fut pour la commission un soutien sans faille. Mais il ne fut pas le seul.
Les vertus principales qui ont fondé la crédibilité de la commission sont sans aucun doute le sens de ses responsabilités, son réalisme et son ambition scientifique.

Trop faible pour intervenir sur les orientations et sur les programmes, elle a investi le champ des recherches, des expérimentations et du développement des réformes décidées. A l'époque, sous diverses impulsions, les « recherches » et les « expérimentations » pullulent et donnent lieu à des surenchères étonnantes. Les novateurs attendent que les IREM leur servent de caisse de résonance, les autres espèrent des conventions et des exemples pour fixer ce qui est raisonnable et rejeter le reste. La COPIRELeM débat et se débat pour faire émerger ou pour produire des aides, des commentaires, des exemples… Elle essaie en même temps de développer des recherches et de limiter la prolifération en augmentant les exigences éthiques et scientifiques à l'égard des promoteurs de recyclage.

Il apparaît bientôt à certains d'entre nous que le « bon sens » sera insuffisant pour prendre sérieusement en compte ou pour rejeter les objurgations péremptoires des « scientifiques » de divers domaines qui se pressent sur le marché de l'éducation.

La formation des instituteurs aux mathématiques et à leur enseignement devait être le creuset où les connaissances spécifiques nouvelles – appelons les « didactiques » - devaient naître et trouver leur territoire : il était impossible d'ignorer que les mathématiques enseignées dans la scolarité obligatoire doivent être aménagées en fonction de nombreux critères autres que mathématiques (tenir compte de l'âge des élèves ou de la fonction civique de l'enseignement par exemple). L'application brutale de la psychologie, même génétique, pas plus que les mathématiques elles-mêmes ne peuvent fournir une ingénierie utilisable et justifiable etc.

La formation mathématique des instituteurs devait donc inclure des savoirs spécifiques à la fois théoriques, techniques et pratiques. Lesquels ? Ce fut un travail constant de la commission que de promouvoir des recherches et de les discuter, mais aussi de lutter contre la tendance à l'émiettement, de les synthétiser et de leur donner un cadre théorique pour en tirer des éléments de formation utilisables.

Il apparaissait inéluctable à terme que la formation des instituteurs deviendrait une activité universitaire. La question du rattachement des connaissances spécifiques à une discipline se posait de façon aiguë, nous avons considéré que le rattachement aux mathématiques elles-mêmes s'imposait. On en discute encore.

En fait, la principale fonction de la commission est une fonction didactique en direction de tous ses partenaires.

- En direction des instances du ministère : leur légitimité est essentiellement politique, professionnelle et disciplinaire, mais le vocabulaire et les concepts qu'ils ont la possibilité effective d'utiliser ne sont pas ceux que les recherches pourraient leur fournir, quand bien même ils les connaîtraient. Disons que les conditions macrodidactiques qui leurs sont imposées ne s'articulent pas encore très bien avec les propositions microdidactiques que la recherche a été en mesure de leur fournir depuis trente ans. De ce fait, leur volonté et leur capacité à faire évoluer le discours des professeurs dans un sens contrôlé par des instances scientifiques sont très limitées.
- En direction des formateurs d'instituteurs puis des professeurs des écoles. C'est le travail le plus évident, celui qui a laissé le plus de traces. D'abord la formation des anciens professeurs d'écoles normales, puis celle des nouveaux formateurs, PRAG ou maîtres de conférences, ceux du moins qui pensent plus à leur travail qu'à leurs regrets de n'être pas dans une « vraie » université ! Ainsi le « séminaire des nouveaux formateurs » mis en place en 1997 réunit annuellement les membres de la COPIRELEM et une trentaine de nouveaux formateurs en IUFM.
- En direction des chercheurs en didactique des mathématiques par la même occasion.
- En direction des professeurs de mathématiques des autres niveaux. L'influence est claire, forte et durable.

En ce qui concerne les mathématiciens le bilan est plus contrasté. Après le départ d'une génération de grands mathématiciens tout dévoués à l'enseignement primaire et respectueux de ses pratiques, nous en avons connu d'autres. La COPIRElеM a refusé de cautionner leurs déclarations fracassantes, hasardeuses et finalement irresponsables. Ce n'est pas son moindre titre de gloire. Son honnêteté et son sérieux lui ont valu quelques difficultés, le recrutement des mathématiciens didacticiens s'est un instant tari, mais grâce aux IREM l'institution a survécu et poursuit sa tâche.

Aujourd'hui, la COPIRElеM poursuit sa tâche de rencontres entre les différents partenaires de l'enseignement élémentaire (enseignants, inspecteurs, formateurs, mathématiciens, et chercheurs en didactique), de modération des débats entre l'école et la noosphère, d'initiation d'expérimentations et de propagation de recherches.

Introduction

Depuis 30 ans, la COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'École Élémentaire) a mené, conformément à sa mission, une réflexion constante sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des maîtres devant assurer cet enseignement. L'engagement, dans cette commission, de formateurs émanant des IREM de diverses académies a permis le partage et la diffusion de travaux issus de recherches et d'expériences concernant l'enseignement des mathématiques à l'école.

L'action de la COPIRELEM s'est poursuivie, avec un souci de continuité, pendant la transformation des Écoles Normales en Instituts Universitaires de Formation des Maîtres. Ainsi les acquis, en matières d'expériences et de connaissances sur l'enseignement des mathématiques à l'école, élaborés conjointement dans les groupes élémentaires des IREM et au sein des Écoles Normales, ne se sont pas perdus et ont pu être actualisés afin d'alimenter les actions de formations dans le cadre des IUFM.

C'est ainsi qu'au cours de ces trente années, la COPIRELEM a organisé, sur le plan national, 30 colloques, 6 stages et 5 séminaires, réunissant des milliers de formateurs provenant, jusqu'en 1991 des Écoles Normales puis des IUFM, et aussi d'instituts de formation d'autres pays de l'espace francophone.

Les colloques et stages nationaux ont permis la mutualisation des expériences ainsi que la diffusion des travaux de recherche sur l'enseignement des mathématiques à l'école. Ils ont contribué, au fil des années, à stabiliser un corps de connaissances et à promouvoir une culture commune des formateurs pour l'enseignement des mathématiques à l'école.

Par ailleurs, depuis six ans maintenant, la COPIRELEM s'est également attachée à assurer la formation des formateurs nouvellement affectés en IUFM. Cette formation organisée, au sein de séminaires nationaux, permet à la commission de transmettre les connaissances constituées par la communauté des formateurs. Elle vise ainsi l'amélioration de la formation des professeurs des écoles.

Chacune de ces manifestations a donné lieu à la publication d'actes réunissant les réflexions, propositions de travaux, compte-rendus d'expériences et de recherches. La lecture de ces documents met en évidence la diversité des domaines de savoirs auxquels fait appel la formation des maîtres en mathématiques. Elle montre une évolution des questions didactiques et pédagogiques étudiées et des réponses qui leur ont été apportées.

Après ces trente années de travaux et de recherches, les membres de la COPIRELEM ont estimé le moment venu de faire une synthèse du capital de connaissances accumulées pendant toutes ces années.

Cette synthèse vise aussi à conserver la mémoire de l'évolution des questions de formation. Capitaliser et diffuser toutes ces connaissances sont les deux objectifs que cet ouvrage de synthèse a l'ambition de réussir.

Les membres de la COPIRELEM, à la fois animateurs IREM et professeurs en IUFM, ont sélectionné les articles issus de ses publications qui présentent un intérêt pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école. Certains articles constituent des repères intéressants sur l'histoire de la pensée didactique, d'autres restent des ressources pertinentes pour la formation. Le présent ouvrage est l'aboutissement de ce travail de sélection et de synthèse mené par les 19 formateurs, membres de la COPIRELEM.

Cet ouvrage rassemble des contributions d'auteurs venus de différents horizons. C'est ce qui en fait son originalité.

Il est composé de compte-rendus de situations d'enseignement des mathématiques à l'école primaire, et d'actions de formation développées par les différents formateurs dans le cadre de leur enseignement. Il comporte également des articles de chercheurs, issus de la didactique des mathématiques, de la psychologie cognitive ou de diverses branches des sciences de l'éducation.

Par leur participation à un colloque ou à un séminaire en tant que conférenciers, animateurs d'ateliers ou auteurs de communications de leurs travaux de recherche, tous ces auteurs ont apporté leur pierre à l'édifice des connaissances professionnelles dans le domaine de la formation des maîtres à l'enseignement des mathématiques.

La variété des travaux présentés témoigne de la fécondité de la réflexion menée depuis trente ans par les formateurs. La COPIRELEM s'est donnée pour tâche de la capitaliser.

Dans cet ouvrage, la COPIRELEM espère que tout formateur ou chercheur, s'intéressant à la formation en mathématiques des enseignants trouvera matière à nourrir sa réflexion, ses recherches et à enrichir son enseignement.

La parution de cet ouvrage marque une étape importante dans la vie de la COPIRELEM en lui permettant de renforcer le réseau des formateurs en didactique des mathématiques.

Il appartient à ce réseau, constituant une force institutionnelle non négligeable, de poursuivre sa mission première : promouvoir et améliorer l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Yves Girmens et Catherine Taveau
Responsables de la COPIRELEM

SOMMAIRE

TOME 2 - Démarches et savoirs à enseigner

TOME 3 - Outils de formation

L'enseignement de la géométrie en formation initiale

Alain Kuzniak

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Cet article présente quelques réflexions sur l'organisation et sur la structuration globales d'un enseignement de la géométrie aux étudiants PE.

Nous avons organisé ces réflexions sur l'enseignement de la géométrie autour de thèmes qui fédèrent les objectifs d'un certain nombre d'activités que l'on peut trouver aisément dans les productions destinées aux formateurs d'enseignants.
Nous avons ainsi souhaité éviter la confusion fréquente entre le but d'une activité et son titre. En effet, plus que de savoir si l'on "fait" les polyèdres ou la boite du pâtissier, il importe de connaître les objectifs et la place de ces activités en formation des maîtres.
Il s'agit ici d'un premier état de la réflexion et l'angle choisi qui épouse un plan de cours à des PE, devra par la suite être enrichi et revu par d'autres entrées que celle présentée ici et par une étude plus approfondie des activités de formation.

1. Réflexions sur la géométrie

a) Une géométrie pour les enfants ?

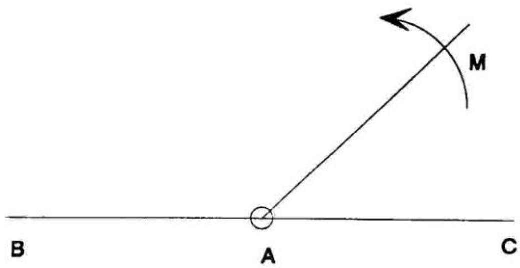
La géométrie expérimentale.

La géométrie de l'école élémentaire n'est pas celle du mathématicien pas plus que celle du lycéen. D'entrée, la géométrie élémentaire semble offrir divers visages et ce depuis longtemps contrairement au nombre.
Faisons un détour par Gonseth[1] pour tenter de voir le lien entre ces géométries. Selon Gonseth, l'activité géométrique résulte dans le meilleur des cas d'une articulation harmonieuse entre "intuition", "expérience" et "déduction".
L'expérience dont il s'agit ici est proche de celle des physiciens, elle apporte la preuve quasi matérielle de l'existence de propriétés. Ainsi Gonseth cite-t-il la "démonstration" que fait Legendre[2] du théorème suivant.

> *Par un point pris sur une droite, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une.*

[1] GONSETH F. (1926) 1974 Les fondements des mathématiques. Blanchard
[2] En fait, il s'agit d'une démonstration de Blanchet, professeur en classes préparatoires, dans sa réactualisation de la Géométrie de Legendre. Cette démonstration ne figure pas dans les éditions parues du vivant de Legendre.

Legendre (ou plutôt Blanchet) base son raisonnement sur la figure matérialisable suivante :



La droite AM d'abord couchée sur AC tourne autour du point A. L'angle MÂC d'abord petit devient grand contrairement à son angle adjacent MÂB qui devient petit pour atteindre 0. Ainsi l'angle MAC d'abord plus petit que MÂB devient plus grand que cet angle : par conséquent il y aura une position AM de la droite mobile où ces deux angles seront égaux et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Je ne sais trop quel serait le destin d'un candidat au Capes présentant actuellement cette démonstration mais il serait certainement en dehors de l'éducation nationale et non enseignant en classes préparatoires comme Blanchet.
Rien ne correspond ici à la démonstration mathématique "suite de syllogismes enchaînés avec rigueur et continuité". Nous sommes dans le monde sensible et non dans l'abstrait et plus qu'à la raison et à la logique il est fait appel à l'expérience du monde sensible. On peut parler d'une "géométrie expérimentale".
Cette preuve dynamique s'oppose aux démonstrations statiques de la géométrie "abstraite", mais elle semble par contre très proche de la perception que peut avoir l'enfant de l'espace.
Une autre preuve peut aussi résulter de l'usage du pliage. Suivant la terminologie présentée par Lebesgue[3], il s'agira d'un pliage de deuxième espèce qui permet de partager un angle en deux parties égales.
Ainsi que ce soit par pliage ou par "mouvement virtuel", la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie non déductive de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est le raisonnement de type constructif que signale également J.F. Richard[4] dans sa réflexion sur la résolution de problèmes.

[3] LEBESGUE H. (1950) 1987 Leçons sur les constructions géométriques. Editions Jacques Gabay
[4] RICHARD J.F. 1984 *La construction de la représentation du problème* Revue de Psychologie Française 1984, 29, 3/4.

Le rôle du point.

Un autre aspect important de la géométrie concerne l'unité de base qui fonde la géométrie élémentaire et plus particulièrement la nature et l'importance du point. Celui-ci peut être soit la notion de base de toute la géométrie axiomatique, soit l'aboutissement de toute la géométrie du monde sensible.

Dans cette deuxième perspective, nous retrouvons Legendre, toujours cité par Gonseth, qui définit ainsi sa géométrie à partir des volumes.

> *Tout corps occupe, dans l'espace indéfini, un lieu déterminé qu'on appelle volume.*
> *La surface d'un corps est la limite qui le sépare de l'espace environnant.*
> *Le lieu où les surfaces de deux corps se rencontrent est appelé ligne.*
> *Un point est un lieu où deux lignes se coupent.*

La notion de point n'est donc pas ici la notion la plus simple mais au contraire elle apparaît comme le résultat d'un détour qui est loin d'être évident. Notons aussi que la droite n'est pas définie dans cette approche du point. Le point devient l'aboutissement d'un cheminement complexe qui part du monde sensible pour parvenir au monde abstrait de la géométrie.

Il ne faut pas croire qu'une géométrie axiomatique conforme au modèle d'Hilbert n'est possible que basée sur le point et Whitehead a bâti une géométrie de ce type sur la notion élémentaire de volume.

Le point dans la géométrie de l'enfant (extrémité de segments ou intersection de lignes) n'est pas une notion première mais une notion construite qui suivra assez bien la genèse proposée par Legendre.

Conclusion.

La géométrie élémentaire de l'enfant n'incorpore pas la dimension déductive et semble reposer sur l'intuition et l'expérience. Elle constitue le temps préparatoire de la construction de la géométrie chez l'individu apprenant.

Cette géométrie met en avant les formes et les volumes et conduit graduellement à la notion de point. Elle privilégie une approche constructive de l'espace et d'un certain nombre d'objets géométriques.

Il s'agit de développer des images et des représentations mentales grâce à de nombreuses expériences sur les objets. Ce temps préparatoire sera suivi par l'approche de la géométrie déductive basée sur le point.

Un des enjeux de la formation sera d'articuler ces deux phases de façon harmonieuse. Or tout semble montrer (par exemple l'analyse fine d'exercices de l'évaluation de sixième faite par M. Fenichel et M. Pauvert) qu'il y a une rupture de contrat brutale dans le cursus scolaire entre ces deux conceptions.

b) Quel enseignement de géométrie pour les Professeurs d'école ?

Le futur professeur d'école, même s'il n'a pas toujours un passé mathématique glorieux ne se situe plus dans ce temps préliminaire de l'activité géométrique que nous avons défini plus haut. Il conçoit la géométrie comme l'étude déductive d'un certain nombre de propriétés d'ensembles de l'espace.

Cet espace est devenu global et homogène avec le point de vue d'un observateur extérieur. Il s'agit d'une géométrie ponctuelle où la déduction logique est reine et où le vu et l'expérimenté n'ont plus la primauté, du moins dans la forme standard de l'activité qu'est la démonstration.
Le formateur d'enseignants va devoir poursuivre au moins quatre objectifs différents :

1. amener l'étudiant à envisager l'existence de différentes formes de l'activité géométrique et notamment celle basée sur l'intuition et l'expérience.
2. développer sa connaissance et son expérience sur un certain nombre d'objets géométriques.
3. redonner du sens à l'activité déductive.
4. l'aider à planifier et à organiser son enseignement de la géométrie.

Apprendre à enseigner la géométrie et apprendre la géométrie.

Dans les faits, on constate que les formateurs d'enseignants vont tenter simultanément de modifier la perception de la géométrie qu'ont les étudiants en tentant de leur apporter des connaissances sur les objets géométriques (polyèdres, figures planes) et ceci grâce à des situations d'enseignement proches de la pratique des classes élémentaires. Dans cette conception, les stratégies d'homologie sont privilégiées comme l'illustre de manière intéressante la situation de Jean Vincent sur les polyèdres.
Ces stratégies d'homologie s'appuient sur un modèle constructiviste conscient de la part du formateur. Elles sont bien définies par deux types de ressemblance :

- la ressemblance entre la démarche pédagogique prônée par le formateur et celle qu'il met en œuvre pour enseigner à ses étudiants.
- la ressemblance entre les situations proposées aux étudiants et aux enfants.

Plusieurs choix sont possibles pour les situations proposées :

a) La situation de départ est la même pour les enfants et les futurs enseignants.

b) La situation présentée aux adultes est légèrement plus complexe mais aisément transférable.

c) La situation présentée aux étudiants n'est pas susceptible d'un transfert simple à l'école élémentaire.

En fait, le choix de ces situations dépend de l'appréciation par le formateur des difficultés liées à la notion abordée. Nous avons étudié dans notre thèse[5] les deux hypothèses suivantes.

Une situation simple permet une prise de conscience nette de la démarche pédagogique suivie, mais en contrepartie elle risque d'infantiliser l'étudiant et/ou de provoquer son rejet.

---

[5] KUZNIAK A. 1994, Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré. Thèse, Université de Paris VII.

> Une situation plus complexe transmet un savoir mathématique non trivial aux étudiants, mais la nouveauté de ce savoir peut occulter la démarche pédagogique suivie.

Lorsqu'on souhaite faire quitter son statut d'élève à l'étudiant - professeur pour lui faire acquérir le regard de l'enseignant, on rencontre les stratégies basées sur la transposition.

Ces stratégies tentent de provoquer un recul par rapport à la pratique en transposant un savoir savant de type didactique. Les supports utilisés par le formateur peuvent être les analyses d'erreurs et les analyses de documents pédagogiques.

Une autre perspective plus ambitieuse et privilégiant la démarche pédagogique semble être celle de G. Le Poche qui tente une distanciation effective en revenant sur l'activité menée par le formateur auprès des étudiants grâce à un film qui a gardé la trace de cette activité. Cela donne une réalité plus importante à ce "pas de côté" qui doit faire basculer de l'étudiant au maître.

Redonner du sens à l'activité déductive en géométrie.

Un autre aspect important de la formation est celui du sens à donner à l'activité déductive et à la démonstration en géométrie.

La place du concours en fin de première année favorise un travail sur cette approche, mais il est fondamental de bien déterminer les thèmes prétextes à la démonstration ou à la preuve.

Ceux-ci ne doivent pas être définis en fonction de leur situation scolaire (troisième ou seconde) mais en fonction de leur coté exemplaire et intéressant pour la formation professionnelle des étudiants.

Plusieurs pistes nous semblent envisageables :

- problèmes de dénombrement
- problèmes dits de l'architecte ou du géomètre souvent liés à la mesure.
- problèmes liés à la recherche de lieux géométriques.
- problèmes dérivant de constructions qui amènent à se poser la question de la validité des observations faites (cercle des neuf points, points de concours surprenants).

Certains formateurs signalent une "résistance" des étudiants à cette approche basée sur les constructions et les pliages. Ce point mériterait une analyse et une confirmation.

2. Trois grands thèmes de structuration de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres

a) Espaces(s) de la géométrie élémentaire.

Cette partie nous semble problématique dans la mesure où règne une certaine confusion provoquée par les différentes approches de l'espace que peuvent faire philosophes, psychologues et mathématiciens. Les mêmes noms sont donnés à des notions totalement différentes.

Nous ne remettons bien sûr pas en cause cette approche pluraliste d'un thème par essence pluridisciplinaire, mais nous souhaitons seulement tenter de clarifier ce qui relève des mathématiques et nous astreindre à n'employer des termes mathématiques que dans leur acception mathématique la plus courante.
Nous pensons ici plus particulièrement aux espaces affines et projectifs. Cet effort de clarification et de précision nous semble important à la fois pour les formateurs d'enseignants et pour leurs étudiants.
Les ouvrages mathématiques à tendance didactique ou pédagogique comme le ERMEL introduisent rapidement plusieurs types d'espaces géométriques. Il s'agit principalement des espaces topologiques, projectifs, affines et euclidiens. On trouve aussi l'espace cartésien et l'espace des similitudes.
Cette présentation repose sur une construction axiomatique qui ne tient pas compte de la genèse historique plutôt inverse de ces notions. Cet ordre et le choix des termes semble plutôt se référer à Piaget et à une genèse psychologique de l'espace chez l'enfant.
Il est impossible dans le cadre de la formation des PE d'ignorer l'apport piagétien, mais cela ne doit pas nous conduire à nous tromper sur le sens mathématique des mots employés.
Or la pensée mathématique moderne sur la géométrie est fondamentalement imprégnée par le programme d'Erlangen défini en 1872 par F. Klein. Dans cette conception, la géométrie n'est plus l'étude d'un espace doué de certaines propriétés mais la donnée d'un groupe de bijections d'un ensemble substrat.
L'objet de la géométrie est l'étude de sous ensembles de E "au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe". Dans cette perspective, l'idée d'invariant est fondamentale.
En formation des maîtres, cette idée d'invariant nous semble importante à préserver et ceci d'autant plus qu'elle ne semble pas contradictoire avec les apports de la psychologie génétique.
Nous allons rapidement passer en revue les différents espaces géométriques qui mettent en jeu ces invariants.

Espace topologique.

L'épistémologie[6] de cet ensemble est intéressante pour le sujet qui nous occupe. D'abord, il faut noter que contrairement à l'espace euclidien, cet espace n'est pas vu par les mathématiciens comme un espace proprement géométrique.
Ensuite, la notion fondamentale, celle d'ouvert, renvoie à une tentative de définition de la localité mais indéterminée non liée à la notion de point. Cette définition est asymétrique : la réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, par contre seule l'intersection d'une famille finie d'ouverts est encore un élément de la famille.
De ce fait au moins dans les espaces séparés, le point ne fait pas partie de la famille de base. La réflexion topologique n'a pas le point à sa base mais est bâtie

[6] SALANSKIS J.M. 1991 L'herméneutique formelle. L'infini, Le continu, L'espace. Editions du C.N.R.S.

sur la notion locale de voisinage. La globalité se définit par extension (réunion) de localités (les ouverts).
Les propriétés topologiques seront celles qui seront invariantes par les applications continues (applications qui préservent la localité). II s'agit par exemple des notions d'extérieur et d'intérieur, de voisinage (par définition même), de connexité.

Espace projectif et espace affine.

Nous renvoyons aux ouvrages classiques de géométrie de Berger ou de Frenkel pour des définitions précises et claires de ces espaces[7]. Notons simplement

- il s'agit d'espaces définis à partir d'espace vectoriel soit par opération d'un groupe (espace affine) soit par passage au quotient (espace projectif), donc d'espaces "algébrisés" pour permettre des opérations.
- les "définitions axiomatiques" propres (qui permettent de définir l'espace directement à partir des droites et des propriétés ensemblistes d'intersection) existent mais ne font plus partie de la géométrie élémentaire.
- dans la pratique usuelle élémentaire, (espace projectif est surtout "vu" comme le complété projectif de l'espace affine qui évite les problèmes de parallélisme.
- il est en effet impossible de voir $P^2(R)$ dans l'espace R^3 autrement qu'avec des plongements avec singularités comme la surface de Boy.

Les notions fondamentales qui se dégagent ici sont celle d'alignements, de parallélisme et d'intersection de droite. Compte tenu des connaissances des étudiants, le risque est grand pour le formateur de pratiquer l'effet Jourdain.
Ainsi il parlera de propriétés affines là où légitimement l'étudiant ne voit que parallélisme. Que peut, en effet. représenter la notion d'espace affine ou d'espace projectif pour un étudiant polyvalent dont la dominante n'est pas les mathématiques ?

Espace euclidien ou métrique.

En fait, il s'agit d'espace affine euclidien c'est à dire d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est euclidien. La notion fondamentale est donc celle de produit scalaire qui permet de définir une distance sur l'espace affine associé qui devient ainsi un espace métrique.
L'existence d'un produit scalaire permet de donner du sens à l'orthogonalité et à la notion d'angle par le biais du groupe orthogonal. C'est aussi cet espace qui permettra de définir toutes les transformations géométriques élémentaires. Il s'agit d'une certaine manière de l'espace paradigmatique de toute géométrie.
Là encore, la transposition que doit opérer le formateur de professeurs d'école pour passer de ce savoir savant à un savoir à la fois accessible au niveau de ses étudiants et opératoire pour leur métier futur paraît rendre pratiquement inévitable l'effet Jourdain.

---

[7] Pour une référence plus récente AUDIN M., Géométrie Belin.

La référence théorique éclaire peu les étudiants et semble plutôt les doter d'un vernis langagier inutilement pédant. Cette transposition nous paraît impossible si l'on reste dans le domaine des mathématiques, par contre elle est possible mais délicate s'il s'agit d'attirer l'attention de l'étudiant sur quelques notions fondamentales et élémentaires des mathématiques qui aident à définir l'espace de la géométrie.
En conclusion, il paraît nécessaire de dégager les invariants fondamentaux de la géométrie que nous avons vus précédemment en évitant tout formalisme inutile mais en utilisant les termes académiques lorsque ceux-ci sont facilitateurs. Notamment pour aider à l'identification de certaines classes d'invariants topologiques ou métriques. Les aspects projectifs et affines nous semblent a priori nettement moins pertinents.
Dans la formation, cela conduit le formateur d'enseignants à une institutionnalisation forte sur ces notions et à une stratégie de type transpositif sans l'appui (du moins à notre connaissance) de situation fondamentale de formation qui pourrait préparer un apport relativement magistral.
Les points qui apparaissent fondamentaux à soulever pour les étudiants sont donc les suivants :

- invariants topologiques simples.
- alignements
- parallélisme
- orthogonalité et notion d'angle mesure

De l'avis des membres de notre groupe de travail, ces aspects qui font partie des espaces de la géométrie sont parfois négligés dans leur transmission pratique à des élèves. En effet, l'idéologie dominante qui privilégie un enseignement qui part du complexe fait négliger l'enseignement direct de ces invariants

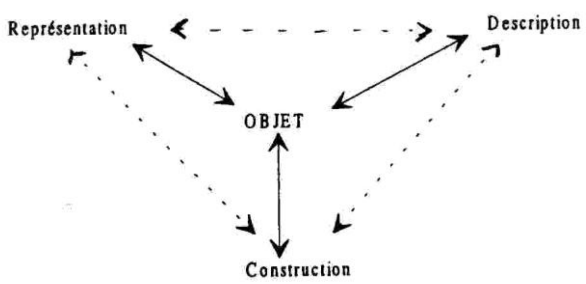
La rupture continu - discret : importance des réseaux.

Nous serons très brefs sur cette opposition fondamentale. Nous avons rappelé que le point apparaissait comme l'aboutissement d'une construction de l'espace qui partait du volume. Cette construction est commune à l'enfant et à la genèse historique mathématique de ces notions. Elle est en contradiction avec la genèse axiomatique privilégiée aujourd'hui dans l'enseignement de la géométrie.
Comme l'affirme René Thom[8] (il en tente même une démonstration), le continu précède ontologiquement le discret. C'est à dire qu'il est plus facile de concevoir le discret à partir du continu que l'inverse. Ainsi la ligne brisée se conçoit comme un accident du continu alors qu'inversement un être discret ne peut accepter un accident continu sans être lui-même localement continu.
Cette conception intuitive permet de bâtir la notion de point comme accident du continu. Cette discrétisation nécessaire de l'espace va passer selon nous par l'usage et l'enseignement de réseaux de toutes sortes (le plus important mais non

[8] THOM R 1992 "L'Antériorité Ontologique du Continu sur le Discret" in Salanskis et Sinaceur, *Le labyrinthe du continu, pp. 37-143.*

le seul étant celui à maille carrée). Le point apparaît alors lié simultanément aux notions de mailles et de nœuds du réseau.
Les réseaux vont également permettre le codage des déplacements et la représentation de l'idée de direction. Enfin, ils permettent un passage progressif du local au global en ne privilégiant aucune case du réseau.
Les formateurs utilisent les réseaux de toutes sortes en opposition aux supports vierges pour introduire la notion de variable didactique. La construction de figures sur différents supports met bien en évidence les différences d'apprentissages qui peuvent être liées à une même consigne lorsque certains paramètres de la situation varient. Les réseaux semblent surtout enseignés au cycle II, mais leur usage et surtout leur construction au cycle III pourrait permettre de remédier à la carence d'activités sur le parallélisme et l'orthogonalité que nous avons pointée plus haut.

b) Activités sur l'objet.
On peut décrire l'ensemble du processus d'étude d'un objet tel qu'il est vu par les instructions officielles par le schéma suivant :



Un des buts essentiels de la formation est de permettre aux étudiants de structurer leur enseignement d'un certain nombre d'ensembles géométriques au travers de ce prisme. Les formateurs semblent d'ailleurs (hypothèse à confirmer) retenir cet aspect de la géométrie comme début de cours de géométrie et ceci souvent à l'aide d'activités sur les objets. Nous allons en voir différents aspects.

Étude d'objets géométriques particuliers.
Différentes figures géométriques sont étudiées de manière approfondie en formation des maîtres. II s'agit pour les formateurs de présenter les différents aspects de l'approche d'un objet géométrique à l'école élémentaire. Les activités porteront donc sur la représentation, la description et la construction de différentes figures

- des activités de représentation à partir des gabarits du cube ou des vues de l'octaèdre.
- des activités de description tel le jeu du portrait.

- des activités de construction surtout de polyèdres grâce à un matériel spécifique (Polydron ou le clone de Jovo), ou encore à partir de pliage ou de constructions papier (C. Rimbault).

Ces études visent à la fois un savoir mathématique et un savoir pédagogique. Pour mieux préciser la démarche pédagogique attendue, il est possible d'insister sur deux grands types d'activités pédagogiques fréquentes en géométrie : les activités d'émission/réception et les activités de classification de corpus.

Les activités d'émetteurs/récepteurs.

Il s'agit de mettre en œuvre la description d'un objet pour le construire ou pour le reconnaître grâce à l'émission de messages écrits.
Un exemple de ces activités est celui proposé par Jeanne Bolon[9] sur les constructions de quadrilatères. Là encore l'activité d'émission-réception est mise en œuvre avec les étudiants.
Ces activités sont également une source de travaux d'élèves pouvant être analysés en formation ou lors du concours.

La classification de corpus d'objets.

II s'agit cette fois de faire redécouvrir (ou découvrir) les propriétés des figures géométriques qui permettent d'organiser la connaissance de ces figures.
L'approche privilégiée n'est pas axiomatique *a priori* mais opératoire sur des ensembles qu'elle permet d'organiser comme les solides ou les figures planes.
Un grand nombre de comptes rendus de telles activités de formation figurent dans les productions de la Copirelem. Sans doute parce que souvent ces activités sont traitées sur le mode de l'homologie, le problème de la trace écrite et de l'institutionnalisation en géométrie nous semble trop négligé. On peut simplement signaler les cartes d'identité ou les dictionnaires de géométrie.

3. Aides pour la programmation d'un cours de géométrie.

Pour conclure, nous allons aborder très rapidement un point qui nous paraît négligé du moins dans les propositions d'activités de formation produites par la Copirelem.
Il s'agit de la structuration globale de l'enseignement de la géométrie. En effet, l'objet principal de la formation des PE n'est pas ou pas seulement la transmission d'un savoir mathématique sur la géométrie. II faut aussi aider les étudiants à mettre en place et à planifier leur propre enseignement de la géométrie.
Les stratégies d'homologie misent sur une sorte de transfert automatique par imitation de la formation à l'enseignement. Elles négligent les phénomènes de transposition opérés par les étudiants.

---

[9] Voir Géométrie, dictée de figures (PLOT n° 48).
Exemple: « Donner *une consigne permettant à un groupe récepteur de construire un rectangle de 4 cm sur 3 cm. Le message ne devra pas comporter le terme* rectangle.

Selon nous, la réflexion sur la programmation de l'enseignement de cet objet complexe qu'est la géométrie doit permettre une distanciation réflexive. Trop souvent, cet aspect essentiel est laissé à l'initiative de l'étudiant qui s'en remet alors soit à la progression proposée par les manuels, soit aux propositions du *"Babin"* souvent confondues avec les instructions officielles.

Nous proposons ici notre propre approche de ce problème en formation.

Pour être clair, notre but n'est pas de transmettre le modèle d'une progression type mais de sensibiliser l'étudiant à la notion moins rigide de programmation par thèmes. La structuration proposée aux étudiants repose sur le plan du cours de géométrie qui leur a été dispensé pendant le module.

L'activité proposée est une activité de synthèse effectuée en fin de module qui doit permettre aussi de familiariser les étudiants avec une certaine forme de vision de l'enseignement de la géométrie.

Les étudiants, répartis par groupes, doivent remplir une grille très succincte obtenue à partir de l'observation de la progression de différents manuels (trois par niveau du CP au CM2). II s'agit de noter la place et l'importance réservées aux différents types d'activités géométriques dégagés dans le module de formation.

1) Activités portant sur l'espace et les différents invariants (nature de ces invariants et type de supports utilisés).

2) Activités centrées sur l'étude d'un objet particulier en précisant cet objet et le type d'approche retenue (description, représentation ...).

3) Activités sur les transformations géométriques.

Les étudiants doivent également observer les rôles respectifs du plan et de l'espace à trois dimensions, le rôle des constructions et des instruments de géométrie, l'idée du simple et du complexe.

Enfin, ils doivent retenir une activité qu'ils jugent intéressante ou problématique.

Cette activité ne consiste pas en une découverte de manuels qui sont déjà connus par les étudiants. La synthèse effectuée à l'issue de la séance permet d'insister sur l'idée d'une programmation globale de la géométrie sur l'école élémentaire et sur le côté non obligatoire des regroupements proposés par les manuels.

L'objectif de l'enseignant doit être de ne pas négliger certains aspects de la géométrie. Le choix des objets étudiés dépend du niveau des élèves et de leur passé, ceci afin d'éviter les bégaiements fréquents constatés à l'école (travaux sur le cube ou surtout reprise constante des mêmes activités sur la symétrie).

Plan d'un cours de géométrie aux PE

	Activités proposées aux étudiants.
Introduction Rôle de la géométrie. 1) Société, histoire des maths • mesure • période classique • période contemporaine 2) A l'école primaire	*Le triangle de Pascal et les fractales*
I) Espaces de la géométrie 1) Caractéristiques de l'espace en maths. 2) Différents types d'espace de représentation pour l'enfant, classification par les invariants • "topologique" • alignements • parallélisme • orthogonalité • mesure	*Les puzzles.* *Les marelles* *Étude du matériel Structuro*
3) Importance des réseaux • notion de variable didactique. • discrétisation de l'espace.	*Étude de travaux d'enfants*
II) Activités sur les objets géométriques 1) Reproduire, décrire, représenter et construire.	*Les kaléidocycles* *L'octaèdre*
2) Deux grands types de situations pédagogiques a) Les situations d'émission réception. b) Les situations de classification de corpus.	*Description de quadrilatères* *Les polyèdres.*
III)Les relations entre objets : transformations géométriques 1) Recherche d'invariants dans les transformations • alignements. • angles • isométries 2) Etude de la symétrie.	*Transformations "conchoïdales " et"cissoidales "* *Frises* *Travaux à partir de la brochure Suivi Scientifique 6ème*
IV) Aides pour mettre au point une structuration de progression en géométrie.	*Analyse de manuels*

Polyèdres réguliers : compte rendu d'activité

Marie-Claude Chevalier

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article présente des activités réalisées en formation initiale ou continu.
A travers l'activité vécue par les stagiaires, le formateur fait ressortir à la fois quelques notions de didactique (dialectique outil objet, situation didactique) et clarifie des notions de géométrie à propos des polyèdres réguliers.

Objectifs

Le principal objectif est de faire vivre une situation aux maîtres afin de conduire avec eux une réflexion sur l'activité mathématique et de pointer quelques concepts de didactique des mathématiques.

Les connaissances en géométrie sont relativement lointaines. peu disponibles, mal formalisées... Le cadre géométrique place les enseignants dans une position comparable à celle des élèves.

1-Déroulement de l'activité

Organisation et matériel
Les maîtres sont par groupes de 4 ou 5. Chaque groupe reçoit du matériel Plot[1]' (triangles équilatéraux. carrés, pentagones réguliers et hexagones réguliers).

Consigne
La consigne est donnée oralement et est écrite au tableau :
"Construire des polyèdres réguliers"

Première phase
Dans cette première phase, les maîtres construisent des polyèdres. Le matériel distribué plaît beaucoup. Chacun se lance dans des constructions. Dans certains groupes il y a coopération : un place les élastiques alors que l'autre tient les cartons, ou encore on voit une répartition des tâches d'assemblage.

Un oubli de la consigne est très net. Les gens sont pris par l'action.

[1] Plot - matériel n° 1 - APMEP - Orléans Tours

Deuxième phase
Un point est nécessaire. Le formateur choisit deux ou trois constructions réalisées, demande l'attention de tous et pose la question :
"Avons-nous des polyèdres réguliers?"

Dans le temps qui suit, les gens semblent découvrir la consigne. Ils interrogent l'animateur, en lui faisant même des reproches:
"C'est quoi un polyèdre régulier?"
"Vous nous laissez .faire des choses comme ça sans nous dire ce que vous attendez!"
…..
Des opinions sont émises à propos dos polyèdres construits. Il y a un accord rapide sur :
"Il faut que toutes les faces soient identiques. "
Le formateur se contente d'écrire cette phrase au tableau sans prendre position. Les maîtres pensent avoir trouvé là, la définition dont ils ont besoin.

Les maîtres connaissent la définition d'un polygone régulier. Ont-ils procédé par analogie, les côtés du polygone correspondant aux faces du polyèdre?

Obtient-on cette "définition" à partir de la représentation que chacun a d'un polyèdre régulier?

Troisième phase
Les enseignants reprennent le travail de construction qu'ils avaient interrompu, mais en ne recherchant cette fois ci que les polyèdres réguliers. Ils démolissent les solides obtenus en assemblant des polygones de nature différente.

Certains groupes assemblent des hexagones à n'en plus finir.

Quatrième phase
Le formateur guette la fabrication du polyèdre construit avec 10 triangles équilatéraux. Lorsqu'elle se produit, il montre le solide dans chaque groupe en demandant aux gens comment ils le trouvent. Les réactions tardent plus ou moins à se produire.

Un moment collectif est alors improvisé, souvent à l'initiative d'un stagiaire. Une vive discussion s'établit

"Toutes les faces sont égales !"
"Comment définit-on un polyèdre régulier ?"
"La définition est écrite au tableau !"

Un doute apparaît à propos de ce qui était accepté comme définition.
"Le polyèdre a un axe de symétrie ! "
" Il y a une rotation !"

Les transformations, jusque là ignorées, vont servir d'argument. Le solide est bien régulier puisqu'il peut tourner sur lui-même, ou bien puisqu'il est invariant par symétrie.

"Suivant l'endroit d'où on regarde ce solide, on ne le voit pas pareil !"
"Mais les angles ne sont pas les mêmes !"

Les isométries de l'espace apparaissent comme des connaissances peu sûres, elles sont abandonnées assez rapidement au profit de considérations sur les angles.

Le formateur fait remarquer que la notion d'angle dont on dispose est une notion de géométrie plane. Il aide à la reformulation de :
"Là, on a 5x60° alors que là on n'a que 4x60°" en suggérant de compter le nombre de faces réunies en un sommet.

A ce moment là, il y a accord à propos de la deuxième condition qui doit être réalisée :
"Chaque sommet réalise la réunion du même nombre de faces."

Cette phrase est écrite au tableau. La question sur la nature de ce que l'on est en train d'écrire se pose :
"Ce que nous avions écrit au début. ce n'était pas la définition !"
"Sommes-nous en train de donner une définition ou encore des propriétés ?"

L'animateur est sollicité en tant que détenteur du savoir mais ne donne pas son avis.

Cinquième phase
Au fur et à mesure de leur construction les polyèdres réguliers sont disposés sur un présentoir.

Le groupe qui assemble les hexagones commence à se désespérer. Bien que tous les membres du groupe coopèrent certains ont envie d'abandonner.
"De toute façon on n'aura jamais assez d'élastiques ou de cartons…"

Les autres groupes avaient codé leurs hexagones sans se poser de question mais certains enseignants commencent à s'intéresser à ce qui se passe.

"Ce n'est pas normal qu'ils n'arrivent pas à terminer !"
"Est-ce possible de construire un polyèdre régulier avec des hexagones ?"

Lorsqu'elle est formulée, la question est reprise collectivement. On arrive alors assez vite à l'idée de pavage du plan.
Avec les hexagones, vous ne sortez pas du plan !"
"On doit avoir 360°... "

Surgit une nouvelle question. II faudrait connaître la mesure d'un angle de l'hexagone Certains font appel à l'animateur, d'autres à leurs souvenirs mais devant la résistance rencontrée un stagiaire propose de calculer.
"Il suffit de trouver une méthode de calcul! "

Plusieurs stratégies pour calculer la mesure d'un angle d'un polygone régulier sont proposées par les maîtres en formation. Le polygone de n côtés est découpé en triangles :
- à partir d'un sommet : on obtient (n-2) triangles et la somme des angles est donnée par (n-2) x 180°.
- à partir d'un point intérieur : on obtient n triangles et la somme des angles du polygone est n x 180° - 360°.

Sixième phase
Des questions viennent tout naturellement :
"Y a-t-il un nombre fini de polyèdres réguliers ?"
"A-t-on construit tous les polyèdres réguliers qui existent ?"

On voit alors quelques souvenirs très confus :
"Il y a une relation entre le nombre de faces et le nombre de sommets. "
……..

En moment collectif, on cherche à vérifier si tous les polyèdres réguliers ont été construits.
En général, on découvre alors l'existence de l'icosaèdre, non réalisé jusque là. Des enseignants se lancent dans sa fabrication.

Septième phase
L'animateur distribue alors un polycopié reprenant les points importants[2] afin de répondre aux questions de plus en plus techniques qui se posent et de mettre fin à l'activité mathématique.

2 - Exploitation de l'activité

Le formateur propose aux maîtres de réfléchir à ce qui s'est passé au cours de l'activité. Pour cela il demande à chaque groupe de mettre rapidement par écrit quelques éléments de réflexion à propos des mathématiques rencontrées au cours de la situation mais aussi à propos du vécu de chacun en tant qu'apprenant.

Dans une synthèse collective, chaque phase est analysée sur le plan mathématique et sur le plan didactique.

[2] voir annexe p.26

Analyse de la 1ère phase
Dans la première phase, les enseignants utilisent des connaissances implicites sur les polyèdres réguliers.
Ces connaissances permettent des actions, des prises de décision.

La consigne n'est pas recevable par les stagiaires qui ont besoin de prendre connaissance du matériel mis à leur disposition, de manipuler en dehors de toute attente du formateur.

Cette première phase d'action permet en fait la dévolution du problème.

Analyse de la 2ème phase
Apparaît ici le problème de l'identité de l'objet mathématique "polyèdre régulier".
Les connaissances mobilisées permettent de formuler ce qui sera accepté comme une définition.
Cette "définition" reprend l'aspect le plus visible de l'objet et a un caractère fonctionnel. On peut tout de suite éliminer des solides construits en mélangeant triangles et carrés par exemple.

Dans cette deuxième phase, essentiellement de formulation, les connaissances mobilisées sont explicites, elles permettent des échanges de point de vue afin d'obtenir un consensus.
Le problème est la propriété de chacun.

Analyse de la 3ème phase
Les connaissances sont maintenant explicites, elles permettent des actions, des prises de décision.
On a une nouvelle phase d'action.

Analyse de la 4ème phase
La définition jusque là acceptée, est mise à l'épreuve des faits.

Les connaissances mobilisées lors des échanges ont pour but, soit de convaincre que le nouveau solide construit est bien un polyèdre régulier, soit au contraire de persuader qu'il n'est pas régulier.

Quel est le statut de la phrase : "Dans un polyèdre régulier, toutes les faces sont identiques" ? Une définition doit caractériser l'objet dont elle parle. Une propriété peut décrire partiellement un objet.

La définition initiale est actualisée pour rendre compte de la contingence.
Dans cette phase, les connaissances permettent des échanges d'information mais aussi des échanges de jugement.

L'appel au bon sens pour classer les solides ne suffit pas. II y a recherche d'arguments d'ordre mathématique.

Le formateur est censé détenir le savoir. On pourrait se contenter de son avis mais dans la mesure où il refuse de prendre position la nécessité de prouver apparaît.

Analyse de la 5ème phase

Lorsque le groupe qui travaille avec les hexagones commence à douter, il ne fait pas appel à des raisons mathématiques mais à des causes matérielles (nombre d'hexagones ou d'élastiques insuffisant). C'est un regard extérieur au groupe qui va permettre de replacer le problème dans son cadre.

La réponse : "on obtient un pavage du plan" parait évidente, cependant le besoin de preuve apparaît de manière très nette.

Les connaissances anciennes ne permettant pas de donner directement la mesure d'un angle d'un hexagone. Le formateur refusant à nouveau de livrer les informations, les stagiaires savent à ce moment là que ces informations sont à leur portée par le biais d'un calcul. Les mathématiques donnent un pouvoir sur les choses.

Les méthodes de calcul proposées sont pertinentes et se veulent générales. L'aspect universel des mathématiques est ici implicite.

Dans cette phase, la question d'existence de polyèdres construits à partir de polygones quelconques est posée pour la première fois. Des hypothèses sont alors formulées et validées.

Le savoir sur les polyèdres réguliers est en train de se construire.

Analyse de la 6ème phase

Dans cette phase, l'objet "polyèdre régulier" est étudié. Le souci d'exhaustivité apparaît. Les connaissances mathématiques permettent d'anticiper. L'icosaèdre est découvert théoriquement avant d'être réalisé.
Les connaissances mathématiques permettent de formuler des énoncés, des théorèmes : "il existe un polyèdre régulier dont les faces sont des triangles équilatéraux et tel que chaque sommet réalise la réunion de 5 triangles."
La réalisation de l'icosaèdre valide le théorème.

Analyse de la 7ème phase

Un point d'institutionnalisation est nécessaire pour répondre à une demande des maîtres en formation. Cela permet de dissiper toute ambiguïté : les connaissances établies au cours de la situation sont correctes.

Le formateur reprend ici sont rôle de garant du savoir mathématique.

Conclusion

La situation permet de parler des savoirs mathématiques. Ils apparaissent sous forme de connaissances implicites ou explicites dans la résolution de problèmes. On les rencontre à travers des définitions, des propriétés.
Ces savoirs sont tantôt objets d'étude, tantôt outils de résolution de problèmes.

A travers la situation, on voit un concept évoluer, s'affiner, prendre place à côté d'autres concepts. On peut parler de construction, de structuration, de réorganisation de connaissances...

La situation permet de pointer quelques caractères des mathématiques. Les connaissances donnent du pouvoir sur les objets, elles permettent des anticipations. Les énoncés mathématiques ont très souvent un caractère universel ou bien répondent à des problèmes d'existence. Enfin la nécessité de preuve, de démonstration fait partie de l'activité mathématique.

La théorie des situations de G Brousseau, donne un cadre de référence pour pointer :

- les moments où les connaissances permettent des actions ou des décisions.
- les moments où elles permettent des échanges d'informations codées dans un langage.
- les moments où elles permettent des échanges de jugement.

On a donc là une illustration des différentes fonctions des connaissances mathématiques dans les situations a-didactiques.

On voit très nettement quand le problème du formateur devient le problème des maîtres en formation. On a un exemple de situation où la consigne seule ne permet pas la dévolution de la situation a-didactique.

Les relations qui s'instaurent entre le formateur et les maîtres en formation à propos du savoir en jeu sont intéressantes à regarder à travers la notion de contrat didactique. Le fait que le formateur, qui détient le savoir, refuse de communiquer ce savoir est perçu comme une rupture de contrat. La dernière phase rétablit le contrat enseignant- enseigné dans sa forme classique.

Bibliographie

Douady R., " Jeux de cadres et dialectique outil-objet", Recherche en didactique des mathématiques, vol.7/2, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1987.
Briand J., Chevalier M.C., "Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques", Hatier, Paris, 1995.
Brouseau G., " Théorie des situations didactiques", Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 2001.

Annexe

1 - Polyèdres réguliers

A partir du matériel Plot : triangles équilatéraux, carrés, pentagones et hexagones réguliers, on construit des polyèdres réguliers.

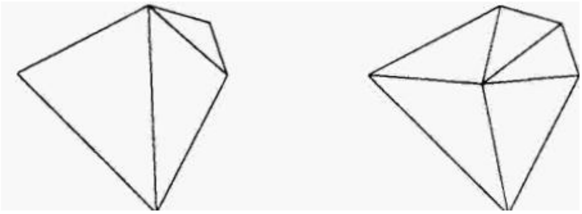
Dans un polyèdre convexe régulier :

- toutes les faces sont superposables.
- chaque sommet réalise la réunion du même nombre de faces.

2 - Mesure des angles d'un polygone régulier

La somme des angles internes d'un polygone (n côtés) est égale à :

$$(n - 2) \times 180° = n \times 180° - 360°$$



figures 1 et 2

La mesure d'un angle d'un polygone régulier de n côtés est : (n - 2) x 180° / n
Dans un pentagone régulier, un angle mesure : (5 - 2) x 180° / 5 = 108°
Dans un hexagone régulier, un angle mesure (6-2) x 180° / 6 = 120°

3 - Construction des polyèdres convexes réguliers

<u>Polyèdres dont les faces sont des triangles équilatéraux</u>

En réunissant 3 triangles autour d'un sommet (3x60° = 180°), on obtient le tétraèdre (4 faces).

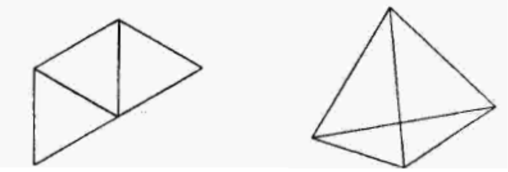


figure 3

En réunissant 4 triangles autour d'un sommet (4 x 60° = 240°), on obtient l'octaèdre (8 faces).

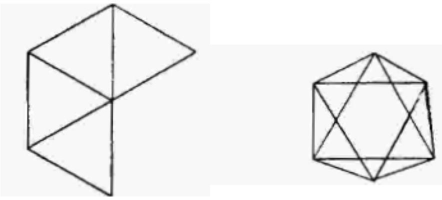


figure 4

En réunissant 5 triangles autour d'un sommet (5 x 60° = 300°), on obtient l'icosaèdre (20 faces).

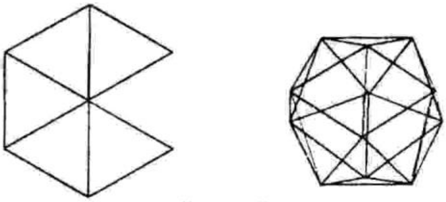


figure 5

Avec 6 triangles équilatéraux, on obtient le début d'un pavage du plan (6 x 60° = 360°).

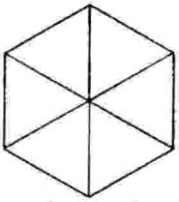


figure 6

Polyèdres dont les faces sont des carrés

En réunissant 3 carrés autour d'un sommet (3 x 90° = 270°), on obtient le cube (6 faces).

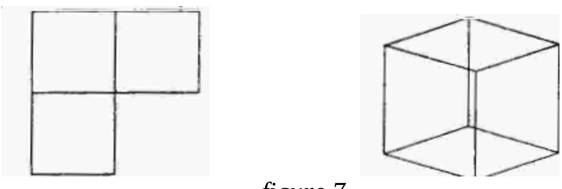


figure 7

Avec 4 carrés, on obtient le début d'un pavage du plan.

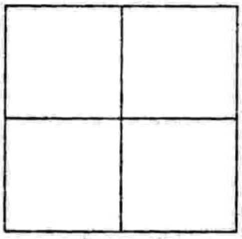


figure 8

Polyèdres dont les faces sont des pentagones réguliers

En réunissant 3 pentagones réguliers autour d'un sommet (3 x 105° = 315°), on obtient le dodécaèdre (12 faces).

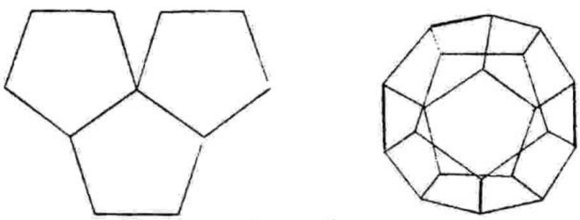


figure 9

4 x 105° > 360°

Avec les hexagones réguliers

Avec 3 hexagones réguliers. on obtient le début d'un pavage du plan.

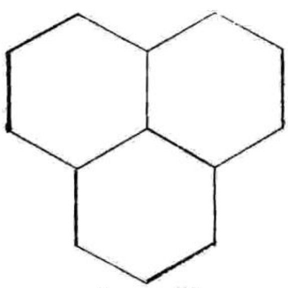


figure 10

Les polyèdres convexes réguliers ainsi construits sont les 5 solides de Platon.

4 - Des questions

Existe-t-il une relation liant le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets dans un polyèdre régulier ?

En prenant comme sommets les centres des faces d'un polyèdre régulier construit-on un nouveau polyèdre régulier?

Pyramides bizarres

Marianne Frémin

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article est un compte rendu d'activités proposées en formation initiale ou continue.
La mise en situation des stagiaires par le formateur permet d'une part une analyse de la construction géométrique de pyramides "penchées" et d'autre part une ébauche de séance élèves prenant en compte les difficultés rencontrées.

1. INTRODUCTION

a) Contexte

En formation initiale ou continue, dans le cadre d'un enseignement de géométrie, séance de trois heures dont un peu plus de deux sont consacrées à la construction et son analyse au niveau des adultes, et le reste à l'élaboration et l'analyse d'une situation analogue pour des enfants.

b) Intention

1. Faire une construction en volume présentant des difficultés inédites et consistantes pour les adultes.

2. Analyser la situation, le rôle moteur des essais ratés... puis réinvestir en…

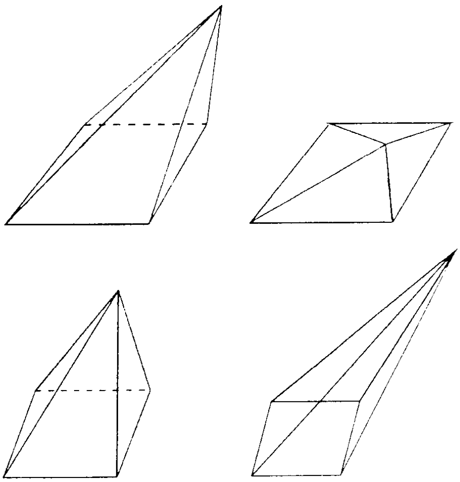
3. Comment faire faire une construction analogue à des enfants.

2. LES PYRAMIDES BIZARRES

a) Mise en place

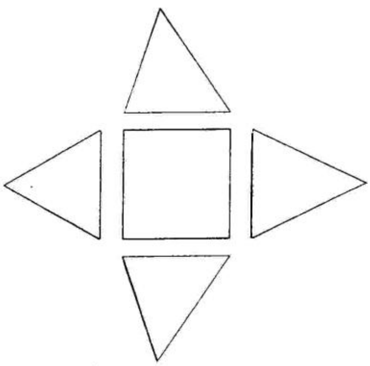
1. Consigne

Construire une pyramide, pas une belle régulière comme celle du Louvre, une vilaine comme ça (en montrer) :

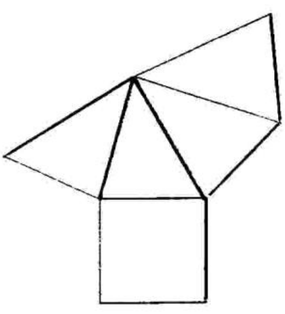


Après une petite pause, en dépecer une ou deux : elles ont une base carrée et quatre faces triangulaires.

Disposer les morceaux au tableau.



NB. Je fais attention à disposer les morceaux ainsi, pour induire un patron formé de quatre triangles bordant un carré, et éviter de me retrouver avec plusieurs personnes essayant ce genre de patron : (suite à un apprentissage récent au cours de technologie. Ce patron rend l'étude difficile).



2. Matériel animateur

Trois ou quatre pyramides à base carrée "bien asymétriques", c'est-à-dire dont le sommet ne soit visiblement pas à l'aplomb du centre ou des axes de symétrie du carré, en carton fort, à faces indépendantes scotchées (pour être démontables).

3. Matériel stagiaire

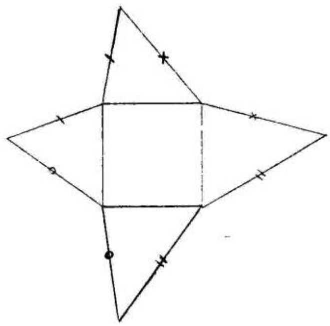
Matériel classique de géométrie (règle, équerre, compas,...), carton uni, scotch, ciseaux. Du bristol quadrillé peut faciliter la tâche à certains moments.

4. Précisions

Les stagiaires comprennent qu'il faut faire un patron. Il vaut mieux ne pas prévoir de languettes et coller bord à bord (les languettes perturbent l'analyse).

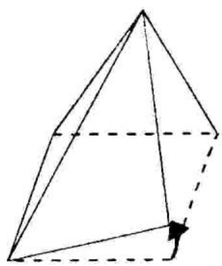
b) Premiers essais

1. Analyse technique

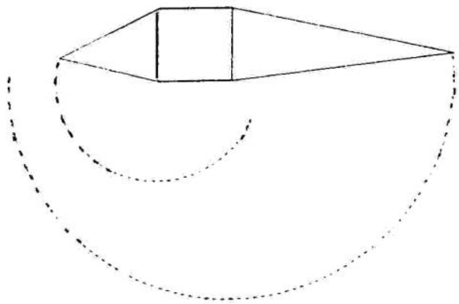


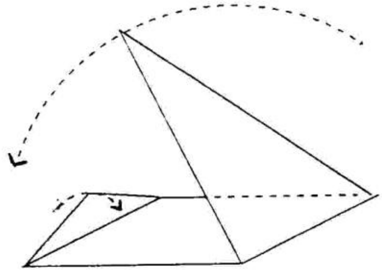
a) Contrainte sur les longueurs des arêtes: deux arêtes amenées à se coller ensemble doivent avoir même longueur.

b) Risque de "gauchissement du carré"

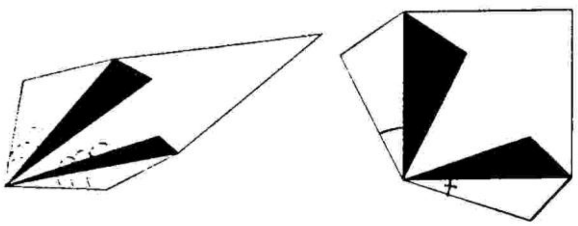


c) Inégalités triangulaires sur les longueurs





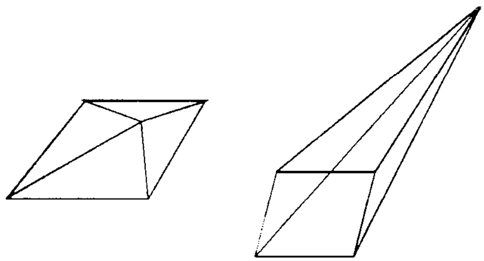
d) Inégalités triangulaires sur les angles



2. Comportements

Les stagiaires se lancent rapidement.
Les difficultés (a) et (b) apparaissent systématiquement à chaque essai, sont incontournables, et donc à traiter en priorité.

Les essais qui ne respectent pas les contraintes de longueur (a) vont pudiquement à la poubelle. Ces essais ratés permettent de réaliser où est la difficulté et de la surmonter aux essais suivants. Beaucoup de stagiaires n'ont pas besoin d'un essai raté pour penser à respecter les contraintes de longueur.
Le problème du "gauchissement" apparaît, mais n'est pas formulé (les pyramides ratées vont à la poubelle. sans que les suivantes soient meilleures).
Les difficultés (c) et (d) apparaissent sporadiquement, lorsqu'on cherche à faire une pyramide très longue et excentrée (inégalités triangulaires sur les longueurs) ou au contraire très plate : (inégalités triangulaires sur les angles), et qu'on n'a pas de chance. Quand une pyramide est ainsi ratée, il se peut que la suivante soit réussie sans que la raison de l'échec ou de la réussite soit élucidée.
C'est pourquoi je travaille d'abord sur (a) et (b), en laissant de côté les manifestations éventuelles de (c) et (d), puis quand l'élaboration de la "recette de pyramide" est bien engagée, je provoque l'apparition de (c) et (d) en proposant des pyramides longues et excentrées ou très plates, et l'on complète alors la recette.



c) Les réalisations

1. Trop régulières

Coins de cube
Symétrie par rapport à un plan médian (deux triangles isocèles se font face)
Elles sont produites par des stagiaires éludant ainsi le problème de gauchissement.

- demander une autre pyramide plus bizarre.

2. Légèrement gauche

La bascule peut passer sur le compte de l'imprécision des tracés et découpages.

- demander une autre pyramide plus soignée, ou différente.

3. Pyramide "à bascule"

- demander une autre pyramide stable.

4. Pyramide correcte

C'est rare.

- demander une autre pyramide très différente (plus pointue, ou plus plate, ou plus excentrée).

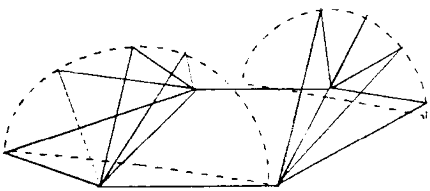
Dans le cas très improbable d'une personne ayant percé le secret des pyramides à base carrée, on peut lui proposer, pour patienter, de faire des pyramides à base quadrilatère quelconque, ou pentagonale...

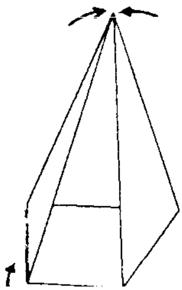
d) Première mise en commun

1. Le gauchissement est la difficulté essentielle, bien perçue, mais pas analysée. Questions: "comment éviter de faire gauche ?". "pourquoi ça gauchit ?"

Pour y répondre, on peut dépecer une pyramide "bien ratée", puis deux types de "monstration" sont possibles :

- faire tourner autour des côtés du carré les deux triangles, dont les pointes n'ont aucune chance de se rencontrer.





- tordre ostensiblement le carré pour que les sommets des triangles se rencontrent.

2. Les autres difficultés n'apparaissent pas (ou rarement): quand un stagiaire a butté sur (a), il a honte et ne s'en vante pas (inutile d'insister, on la retrouvera dans la recette), et (c) et (d) sont trop aléatoires pour être perçues.

e) Retour aux constructions

On demande à chaque stagiaire de construire une pyramide "encore plus irrégulière". C'est une phase où le formateur agit localement pour aider à formuler, pour proposer une construction très différente...

f) "Recette de pyramide"

Pendant la phase de construction. le formateur propose localement, quand la réussite s'installe, de rédiger une "recette de pyramide", sur papier affiche pour exploitation collective.

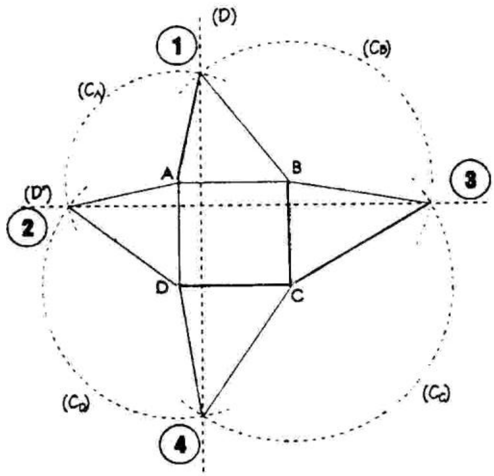
On remarque que la réponse au problème "comment ne pas faire gauche ?" est naturellement "faire attention de mettre les sommets en face".

g) Mise en commun

On exprime les dernières difficultés de construction.
On examine et compare les recettes (ce qui contribue à aider les stagiaires qui n'auraient pas réussi à construire).

Voici trois "bonnes recettes" susceptibles d'être obtenues :

Recette 1



Choisir ① (2 degrés de liberté)
Choisir ② sur (C_A) (1 degré de liberté)
Construire ③ intersection de (C_B) et (D') (0 degré de liberté)
Construire ④ intersection de (C_D) et (D) (0 degré de liberté)

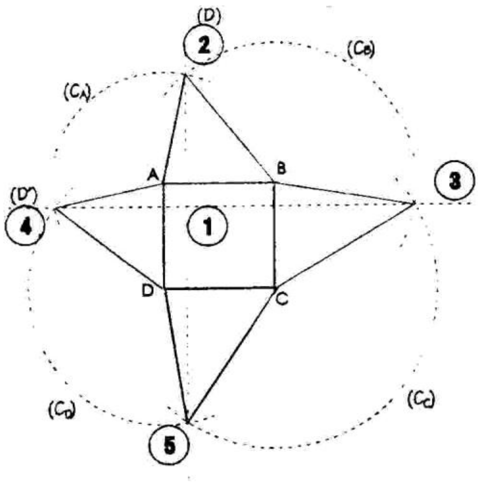
NB. La dernière égalité de longueurs est automatiquement vérifiée : ④ se trouve sur (C_C).

Recette 2 (même figure que ci dessus)

Choisir① (2 degrés de liberté)
Choisir ② sur (C_A) (1 degré de liberté)
Construire ③ intersection de (C_B) et (D') (0 degré de liberté)
Construire ④ intersection de (C_D) et (Cc) (0 degré de liberté)

NB. Le dernier face à face de sommets est automatiquement vérifié : ④ se trouve sur (D).

Recette 3



Choisir ① "aplomb du sommet" (2degrés de liberté)
Choisir ② sur (D) (1 degré de liberté)
Construire ③ intersection de (D') et (C_B) (0 degré de liberté)
Construire ④ intersection de (D') et (C_A) (0 degré de liberté)
Construire ⑤ intersection de (C_D) et (D)
(0 degré de liberté)

NB. La dernière égalité de longueurs est automatiquement vérifiée : ⑤ se trouve sur (C_C).

Degrés de liberté
Dans chaque construction, on a trois degrés de liberté. Déterminer une pyramide, c'est choisir un sommet quelque part au dessus du carré : trois degrés de liberté aussi.

Du matériel utile pour montrer (sinon démontrer)
Carrés et triangles rigides pivotant autour des côtés.
Carré et ficelles figées aux sommets.

3. TÉTRAÈDRES BIZARRES

L'activité "pyramide bizarre" qui paraissait a priori difficile aux stagiaires. est finalement réussie, et ils sont fiers et étonnés de cette réussite.

On peut leur demander de construire une activité analogue pour une classe de CM, ce qui de plus les oblige à dégager les caractéristiques intéressantes de la situation.

a) La situation
Faire construire des "tétraèdres bizarres" à des élèves de CM.

b) Caractéristiques communes avec "pyramides"
Situation de construction
Situation auto validante
Rôle moteur des essais ratés

c) Différences
Le problème du "gauchissement" ne se pose pas (Ouf!)
Ce soulagement rend les instituteurs confiants dans les possibilités de réussite des enfants.

Géométrie sur un cube

J.C. Ducorail - M.H.Salin

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991.

Cet article propose des activités de formation initiale permettant la construction de notions géométriques autour du cube (perspective cavalière, patrons et quelques propriétés de géométrie dans l'espace).

Le cube apparaît comme un volume simple et ses propriétés semblent évidentes (du moins celles que chacun croit connaître et chacun pense qu'il les connaît toutes). Objet d'étude sans mystère, il peut apparaître à l'enseignant et à l'élève comme étant un bon support de réussite immédiate ... et il ne présente plus alors le moindre intérêt. Nous allons essayer de prouver le contraire.

UTILISATION AVEC DES ENSEIGNANTS EN FORMATION INITIALE

Le cube va être étudié à partir de situations diverses qui feront appel à cinq types de représentations :
- le patron (le développement) du volume,
- le volume réalisé en "dur" (bois ou polystyrène),
- le volume réalisé à partir d'un patron,
- le volume représenté en perspective cavalière (même approximative),
- le volume représenté en dessin technique.

Ce sont les interactions entre ces cinq "écritures" du cube qui vont permettre :
- de faire des hypothèses,
- de vérifier, de valider les conjectures,
- de se familiariser avec des représentations de l'espace,
- de comprendre, dans et par l'action, la nécessité de tracés soignés et précis,
- d'anticiper les actions par un va-et-vient entre l'espace et sa représentation plane,
- d'utiliser en situation les outils du dessin géométrique.

Par exemple, la recherche de tous les patrons du cube peut être validée par la réalisation du cube construit ou par une réalisation rapide de bristol quadrillé (pour la rapidité du tracé). La dialectique du "plan" à l'espace, du "dessin" au concret doit toujours être présente dans les activités proposées.

SAVOIRS MATHÉMATIQUES VISÉS

- parallélisme de deux droites dans l'espace,
- orthogonalité d'une droite et d'un plan,

- plans perpendiculaires et section du dièdre droit.

…

CONTENUS DIDACTIQUES

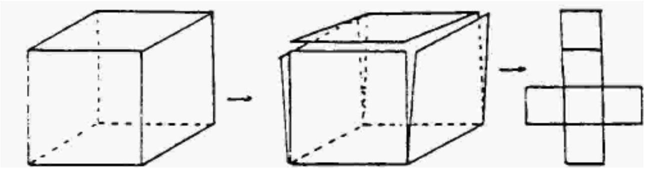
- montrer que la géométrie plane se fait dans un plan même si ce plan n'est pas celui de la feuille ou celui du tableau,
- dans le vécu des enseignants en formation, montrer que le constat d'erreur (ou de réussite) doit venir de la situation elle-même, c'est-à-dire ici de la transposition d'une "écriture" du cube dans une autre, ce qui permet de vérifier, de valider une action ou une hypothèse.
- chercher les transpositions didactiques possibles avec des élèves.

A LA RECHERCHED'UN PATRON DU CUBE

1) Situation de départ

Chaque stagiaire (ou chaque groupe de stagiaires), dispose d'un cube "en dur" (cf. paragraphe matériel). La consigne est de rechercher le développement de ce volume donné. Le développement étant réalisé, il faut alors construire un cube dont la longueur de l'arête est différente de celle du cube initial. Cette réalisation sert de validation de l'activité précédente.

On pourrait également partir de la représentation du cube en perspective cavalière. La consigne serait alors de désigner les arêtes selon lesquelles il faut couper pour "ouvrir" le cube et de passer ensuite au patron d'un cube d'arête donnée pour valider.



2) Notes sur la perspective cavalière

La perspective cavalière est un mode de représentation codée des volumes.

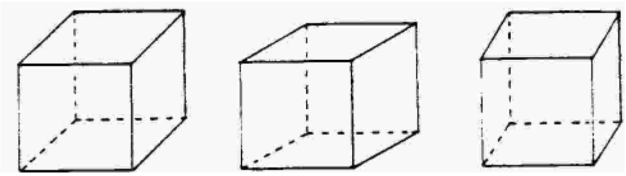
Principes :
- Toutes les figures des plans frontaux sont représentées sans déformation (conservation des propriétés angulaires et métriques) à l'échelle près.
- Contrairement au dessin habituel, le point de fuite est rejeté à l'infini. Il y a donc conservation du parallélisme. En général on choisit un "angle de fuite" par rapport à l'horizontale de 30°, 45° ou 60° à cause des instruments de dessin.
- Pour conserver à l'œil l'impression correcte du volume, on réduit les dimensions sur les fuyantes (2/3, 1/2, 3/4 ...) selon l'angle de fuite choisi. Tout dessin

en perspective cavalière devrait donc comporter l'indication de l'échelle et de la réduction sur les fuyantes.
- On représente en traits pleins ce qui est visible et en traits interrompus ce qui est caché.

Propriétés :
- Sur les tracés non déformés, toutes les propriétés de la géométrie plane sont conservées.
- Sur les autres faces sont conservées les propriétés du parallélisme et les propriétés des milieux.

Ci-dessous trois représentations d'un même cube avec 3 angles de fuite différents : 45°, 30°, 60°.

Les réductions sur les fuyantes sont respectivement 2/3, 2/3, 1/2[1]



3) Et ensuite .....

Si on en reste là, avec cette seule activité, on peut considérer que le tour du cube (au propre comme au figuré), a été fait et qu'il suffira d'ajouter la formule du volume pour que chacun sache ce qu'est réellement un cube. Malheureusement il n'en est rien et toute la richesse du cube reste inexplorée.

Ce que nous proposons ci-après est un essai d'exploitation des richesses du cube dans le but d'une approche différente de la géométrie.

4) Les patrons du cube

On peut proposer ensuite de rechercher tous les patrons possibles du cube.

On peut partir des divers patrons trouvés dans la classe lors de la situation (1) et se demander s'il existe d'autres modèles. On peut partir à nouveau du cube en "dur".

On peut se demander si tous les hexaminos sont des patrons du cube.

On peut partir de la perspective cavalière (situation difficile).

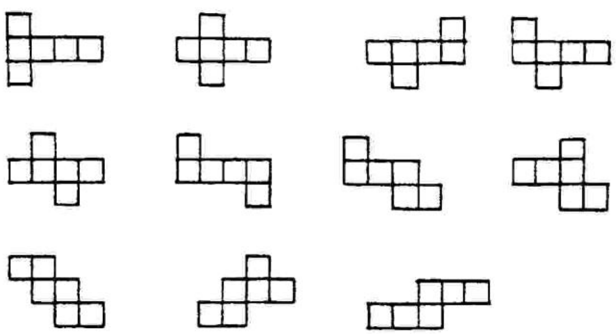
[1] NDLR : Le choix de ces coefficients est personnel aux auteurs de l'article

Quelque soit le point de départ choisi, il importe de pouvoir vérifier rapidement les hypothèses sans recourir à une réalisation soignée comme en (1). Du papier quadrillé sur lequel le tracé est facile et que l'on peut rapidement découper et plier permet cette vérification.

Ensuite il faut trier et classer les patrons trouvés. Ce tri va permettre :

- d'éliminer les patrons identiques (superposables par retournement ou par rotation),
- de vérifier s'il n'y a pas d'autre combinaison de six carrés adjacents par un moins un côté qui permette de construire un cube,
- de vérifier au moins qu'il existe des combinaisons de six carrés qui ne permettent pas de construire un cube.

Les onze patrons du cube :



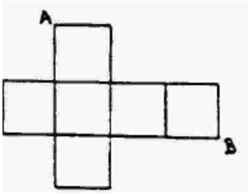
Toute cette activité ne peut se conclure que par la réalisation effective de cubes à partir des patrons ainsi trouvés.

5) D'autres exercices avec les patrons

Plusieurs exercices sont possibles. Ils conduisent tous à passer mentalement du patron au cube réalisé, de la représentation au patron.

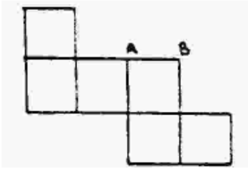
Voici quelques exemples :

- sur un patron, désigner le sommet extérieur d'un carré. Demander de désigner les autres sommets qui viennent se superposer à celui-ci lors du "montage" du cube.



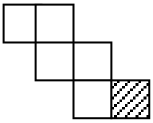
Sommets venant coïncider
avec A?
avec B?
etc...

- le même exercice peut être fait avec le côté d'un carré :



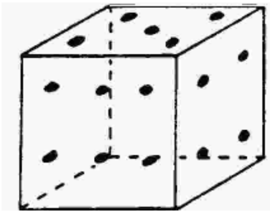
Quel côté vient se superposer sur AB?

- réaliser, sur un patron quelconque, le tracé effectué sur le cube en vraie grandeur (voir paragraphe suivant, tracés sur le cube).
- sur un cube réalisé, indiquer (en les repassant avec un feutre par exemple) les arêtes selon lesquelles, il faut couper pour "ouvrir" le cube et obtenir un patron désigné à l'avance.
- même exercice avec un carré. On peut chercher la face opposée :



Quelle est la face opposée à la face hachurée?

- un onglet (pour le collage) étant placé, indiquer où se placent les autres sur le patron.
- à partir d'un dé représenté en perspective cavalière



Sur un patron placer le 6 et le 4 ou le 6 et le 3, ou...et demander aux élèves de replacer les autres faces du dé sur le même patron.

Il faut alors considérer que le patron se plie à l'inverse des habitudes, c'est-à-dire que les faces sur lesquelles on écrit deviennent des faces extérieures du cube réalisé.

On peut recommencer avec divers patrons, avec diverses faces du dé.

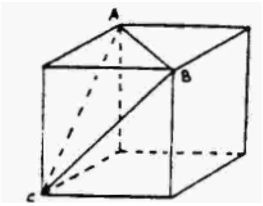
TRACÉS SUR UN CUBE

Ayant réalisé un volume, il est intéressant d'effectuer des tracés sur ses faces. C'est une première approche de la géométrie dans l'espace mais en vraie grandeur.

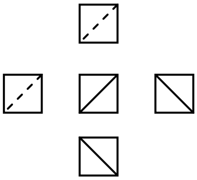
Le passage du tracé réalisé à ses représentations en perspective cavalière et en dessin technique devrait permettre :
- de se familiariser avec les représentations de l'espace.
- de rencontrer les projections orthogonales.
- de s'attacher davantage aux propriétés qu'aux représentations,
- de formuler des hypothèses à partir de figures "fausses".

Ici, dans ce document, la présentation ne peut se faire qu'avec des représentations en perspective cavalière ou en dessin technique mais il faut d'abord réaliser les tracés sur un cube réel avant de les représenter.

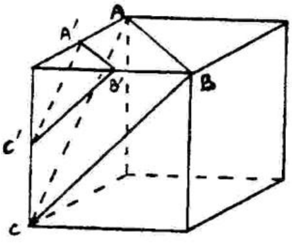
1) Quelques polygones



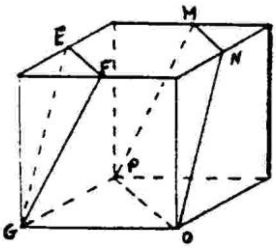
Nature du triangle ABC?
Calcul des côtés.



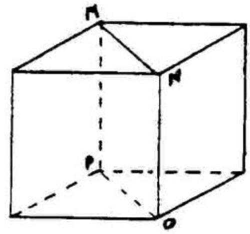
Dessin technique (projection et rabattement)

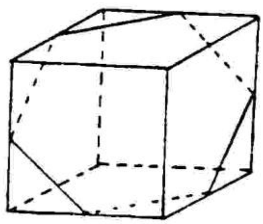


Nature du triangle A'B'C' ?
Rapport entre ABC et A'B'C'?



Nature de EFG ?
Nature de MNOP ?



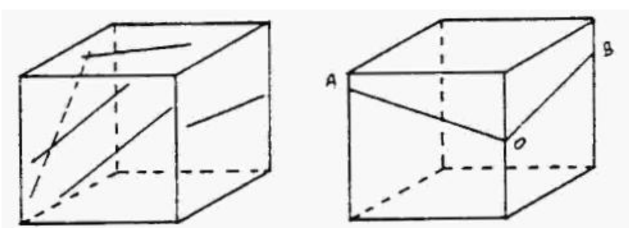


Nature du polygone construit en joignant les milieux des arêtes ?

Ces divers tracés de figures planes "dans l'espace" peuvent apporter une autre conception de la géométrie et montrer, par exemple, que la géométrie dans un plan n'existe pas uniquement sur le plan de la feuille de cahier ou sur le plan du tableau.

2) Droites sur un cube

Le tracé de droites sur les faces d'un cube peut permettre de faire découvrir la fausseté de quelques théorèmes erronés construits autour de l'orthogonalité ou du parallélisme dans l'espace.



AÔB est-il droit?

Le cube "dur" que l'on peut couper aide à prendre conscience de la fausseté de certaines intuitions. La représentation en perspective cavalière montre que des droites concourantes sur le dessin ne le sont pas dans la "réalité".

CUBES TRONQUÉS

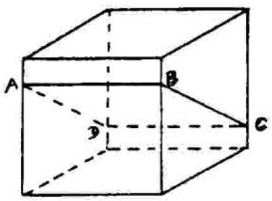
1) Sections du cube par un plan

Si un plan coupe une face du cube, combien en coupe-t-il au plus? au moins?

Dans tous les cas il serait souhaitable de partir de la représentation du cube en perspective cavalière, de demander de formuler des hypothèses, éventuellement de démontrer.

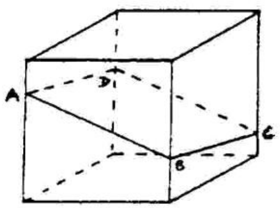
On pourra ensuite vérifier en réalisant une coupe du cube en "dur" ou en réalisant le tracé sur le cube (trace de l'intersection du plan sécant avec chacune des faces).

Vous trouverez ci-dessous quelques exemples et des pistes éventuelles de recherches à conduire.



Nature du quadrilatère ABCD ?

Nature de ABCD ?



Quelques questions à chercher :

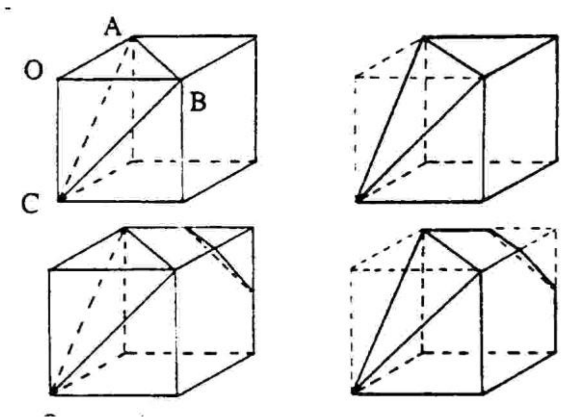
Quelles conditions doit remplir le plan sécant pour que la section soit :
- un quadrilatère ?
- un trapèze ?
- un parallélogramme ?
- un carré ?
- un rectangle ?
- un hexagone ? (pas forcément régulier)

La section du cube peut-elle être un losange ? Dans quel cas ?

2) Cubes tronqués et patrons

Certes on pourrait faire réaliser les patrons des troncs de cubes obtenus à partir de l'intersection d'un cube et d'un plan. Certains cas peuvent être délicats à réaliser. Il est plus simple de s'intéresser à des sections plus régulières.

Le point de départ pourrait être le dessin en perspective cavalière ou le tracé sur un cube complet.



On peut demander de réaliser le patron et le volume construit

- de la pyramide — en 2 groupes séparés
- du cube tronqué

- de la grande pyramide
- de la petite pyramide — en 3 groupes séparés
- du cube tronqué

Une représentation de ces volumes en dessin technique peut être un excellent exercice de projection.

On peut aussi demander de chercher combien de pyramides OABC on peut tirer d'un même cube et de faire des hypothèses sur ce qui reste à l'intérieur du cube.

3) Autres pistes

On peut aussi s'intéresser aux volumes obtenus à partir de l'octogone régulier inscrit sur chaque face du cube, à partir des centres de chacune des faces, etc.

MATÉRIEL ET MATÉRIAUX

- polystyrène et filicoupeur
- papier bristol ou à dessin
- colle
- ciseaux
- instruments du dessin géométrique
- papier ordinaire quadrillé pour les tracés rapides.

BIBLIOGRAPHIE

BOULE F., *"Espace et géométrie pour les enfants de 3 à 11ans*", 1979, Éditions CEDIC.

CUIVDY H.M., ROLLET A.P., *"Modèles mathématiques"*,Éditions CEDIC.

BALACHEFF N., KUNTZMANN J., LABORDE C., *"Formation mathématiques des Instituteurs"*,1981,Éditions CEDIC.

Brochures de l'A.P.M.E.P (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. 26, rue Duméril - 75013 PARIS)

"Aides pédagogiques pour le CM", tome I , "Géo*métrie",* 1983
"Géométrie au premier cycle", tomes 1 et 2
"Activités mathématiques en quatrième-troisième" tomes 1 et 2, 1981

"Introduction à la géométrie dans l'espace. Activités pour la 5ème (IREM de Grenoble)

La boîte cadeau

François Huguet

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991.

Cet article est un compte rendu d'activités en formation initiale.
L'objectif de l'auteur est de montrer aux stagiaires l'intérêt de penser l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire en terme « d'activités » même si cette situation se réfère aux Instructions Officielles de 1985, elle nous semble toujours pertinente et exploitable. Cette situation est proposée dans « Elem-Math VII » (publication APMEP).

"Lors de l'introduction de notions nouvelles, les élèves sont mis en situation d'apprentissage actif : ils découvrent les notions comme des réponses à des problèmes." (Instructions Officielles de 1985)

Contexte

J'ai utilisé cette situation récemment en 3 circonstances et sur une durée d'environ 2 heures avec des normaliens de 1ère et 2ème année en modifiant à chaque fois quelques variables didactiques de la situation.

Je me suis volontairement détaché de la présentation faite dans l'ouvrage cité en référence.

Cette situation me semble un bon prétexte pour convaincre les élèves en formation de l'intérêt d'une telle approche de notions mathématiques fondée sur la résolution de problèmes en « construisant du sens » et prenant le contre-pied d'une approche plus « formaliste », à base de définitions, qu'ils ont souvent mal vécue.

Matériel

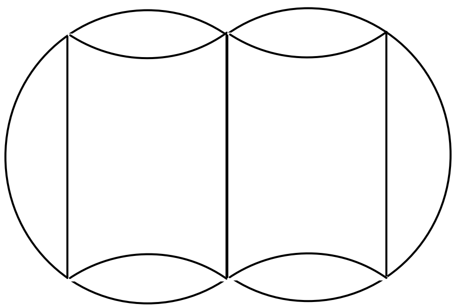
- Des feuilles de papier Canson, des ciseaux.
- Des règles, des doubles décimètres.
- Des compas, des équerres.

I - Mise en situation

1ère Phase : Appropriation du problème.

Consigne

"Nous allons tous construire des "Boîtes Cadeaux". Voici le modèle d un "patron" qui vous servira à construire différentes boîtes".



Mon rôle a consisté à répondre aux questions concernant la réalisation des patrons. Exemple: « *Je ne vous donne pas les positions des centres des cercles mais vous pouvez les trouver* ! »

Aides possibles

(voir codages sur le dessin de la page suivante)
- Coder des points particuliers A,.B, C, D, E, F.
- Les points A, B, C sont alignés.
- Les points D, E, F sont alignés.
- Tous les cercles ont même rayon.

Découverte des deux paramètres de la situation :
- R = Rayon des cercles.
- d = Distance des centres O_l O_2.

$2^{ème}$ Phase : Construction des « Patrons ».

Choix possible : fixer un paramètre (Exemple: R = 8 cm)

Proposer à différents groupes de normaliens des distances variées entre les centres. (Exemple : 3 cm ; 5 cm ; 7cm ;.. ; 15cm.).

Cela permet d'avoir une production riche, qui sera intéressante à exploiter.

3ème Phase : Analyse des difficultés rencontrées.

Par exemple pour trouver les centres des cercles :

- Utilisation des propriétés des diagonales ou des médianes du rectangle. (exemple : dans le rectangle ABED on peut déterminer ainsi la position du centre O_1)
- Utilisation des propriétés du losange. (Exemple: O_1 A O_3 B)
- Utilisation des propriétés de symétrie, etc.

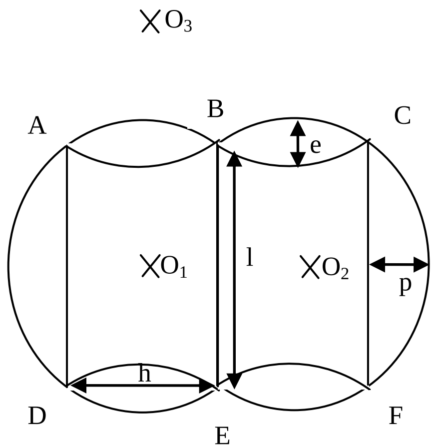
4ème Phase : Réalisation puis comparaison des boîtes obtenues.

Pour la construction, il me semble nécessaire, comme pour des enfants, d'être exigeant et attentif à la bonne utilisation des instruments tout en laissant un libre choix en ce domaine.

Pour faciliter la comparaison des boîtes obtenues, il est possible de s'accorder sur quelques dénominations utiles.

Par exemple :

- p = poignée.
- e = épaisseur de la boîte.
- 1 = largeur de la boîte.
- h = hauteur de la boîte.



5ème Phase : Premiers prolongements possibles.

Remarque : ces propositions de travail sont à la limite des possibilités d'enfants de CM.

1) Faire constater que pour un rayon fixé (Exemple : R = 8 cm), si « d » augmente alors « p » diminue, « e » augmente, « t » diminue, et « h » augmente.
   Bien sûr, la justification mathématique est du niveau du collège et peut être l'occasion d'utiliser le théorème de Pythagore.

   Pour justifier ces résultats constatés, certains de mes normaliens ont eu des difficultés à argumenter ! Cela a produit une intéressante confrontation permettant de montrer l'utilité des démonstrations et des connaissances mathématiques.

2) Poser le problème de l'adaptation des dimensions de la boîte à la forme d'un objet donné. Par exemple pour un objet de faible épaisseur et de forme « carrée », il faudra prévoir une boite telle que « l » = « h ». Dans ce cas, la figure O_1 B O_2 E est un carré.

   C'est alors l'occasion de redécouvrir de nombreuses propriétés de cette figure simple.

Autres prolongements pour un niveau plus élevé

Poser le problème des contraintes de construction. La construction d'une telle boîte est-elle toujours possible ?

Ceux qui ont choisi R = 8 cm et d = 15 cm ont constaté que la construction n'est pas possible !

La contrainte évidente $0 < d < 2R$ est donc trop large !

Une analyse plus fine, niveau Lycée ou fin de 3ème, permet de découvrir :

$p = R - d/2$

$e = 2 (R - \sqrt{R^2 - d^2/4}$

$1 = 2\sqrt{R^2 - d^2/4}$

$h = d.$

L'étude de ces fonctions confirme les constats précédents.

La position « limite » correspondant à « 1 = e » peut être étudiée simplement en constatant que, dans ce cas, le triangle O_1 B E est équilatéral. Ceci confirme la solution algébrique qui donne le résultat suivant :

$$0 < d < R\sqrt{3}$$

II - Regard sur l'expérience vécue

Afin de faciliter l'analyse critique de l'activité proposée, je demande alors aux normaliens de comparer notre démarche avec celle indiquée dans un manuel scolaire.

Cette comparaison permet bien sûr d'identifier quelques « variables de commande » de la situation et de commencer une « analyse a priori » des procédures qui pourraient être utilisées par des enfants de CM.

Au cours de ces 3 expériences, les normaliens en très grande majorité ont « joué le jeu » et adhéré à la démarche proposée.

Ils semblent convaincus de l'intérêt d'une telle approche de la géométrie à partir d'une réelle situation-problème pour l'école élémentaire mais ils posent aussi deux types de questions :

- *"Quelles sont les limites de ces activités avec des enfants de CM ?"*
- *"Qu'ont appris les enfants et que faut-il « institutionnaliser »" ?*

Aux questions du premier type j'ai eu tendance à répondre: *« Vous essaierez ! »*

Pour répondre aux autres questions et relancer le débat, j'ai proposé que l'on fasse ensemble l'inventaires des propriétés géométriques concernant des figures simples et des notions mathématiques relevant du niveau de l'école élémentaire qui peuvent être évoquées ou utilisées au cours de ce type d'activité.

Comme vous pouvez le deviner, c'est très riche !

- On peut retrouver par exemple, pour le rectangle, le losange, le carré, les propriétés des diagonales et des médianes.
- On peut utiliser la symétrie et construire des médiatrices pour trouver la position des centres des cercles.
- On peut aussi rencontrer des parallélogrammes, des triangles équilatéraux, des triangles rectangles inscrits dans des demi-cercles.
- On pourrait même utiliser des propriétés liées à la proportionnalité !

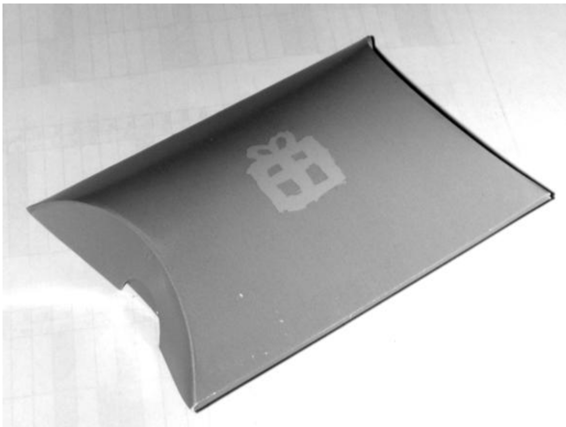
Je me suis permis enfin d'évoquer quelques notions didactiques concernant les situations d'apprentissage.

En effet, au cours de ce type d'activité les enfants sont mis en situation d'action puis de formulation et de validation avec la possibilité de confronter leurs méthodes de recherche.
Cette situation, ouverte pour l'élève, l'amène à faire des choix, tout en lui donnant des possibilités de contrôle, la validation n'étant pas nécessairement de la responsabilité du maître.

Enfin, même si les acquisitions de connaissances peuvent ne pas être négligeables, le plus important c'est :

- de construire du "sens" à travers des activités mathématiques.
- de permettre à l'enfant d'accumuler des expériences en développant son autonomie.
- de lui donner l'occasion d'argumenter et de communiquer.

Ce sont bien là les points forts et l'esprit des instructions officielles actuelles concernant l'Ecole Elémentaire.

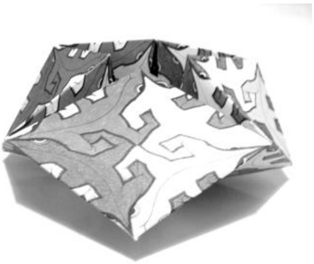


Des kaléidocycles

Gérard Ozan - Claudine Hervieu - François Huguet

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Les trois parties qui suivent sont trois articles présentant des compte-rendus d'activité en formation initiale ou continue ; ils abordent de façon différente l'étude des kaléidocycles.
L'activité du premier article propose au stagiaire de reproduire un objet donné, puis analyse les démarches et les difficultés rencontrées.
Dans l'article suivant, le choix est porté sur l'analyse géométrique de patron et permet ainsi l'étude d'autres kaléidocycles.
Quant au dernier article, les démarches proposées en formation permettent un réinvestissement immédiat en classe de cycle 3.



A - Des Kaléidocycles - Gérard Ozan

Introduction

Un kaléidocycle est un anneau à trois dimensions, constitué de tétraèdres identiques dont les faces sont quatre triangles isométriques. La jonction au niveau des arêtes communes à deux tétraèdres voisins est souple et on peut le faire tourner indéfiniment sur son centre.
J'ai utilisé pour cette séance les patrons fournis avec le livre M.C. Escher, Kaléidocycles de Doris Schattschneider et Wallace Walker aux éditions Taschen Ktiln (1992).

Ces kaléidocycles présentent la particularité d'être composés de six ou huit tétraèdres à faces isocèles et leur trou central est presque réduit à un point. (voir figures 1 et 2)

Ils sont en outre décorés par des motifs périodiques adaptés de dessins d'Escher, ce qui leur donne un aspect esthétique qui plaît beaucoup et permet d'annoncer un travail ultérieur sur les pavages.

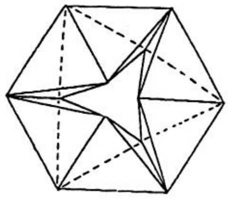


Figure 1

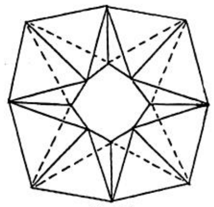


Figure 2

Contexte

J'ai utilisé cette situation en formation initiale avec des PE2 et en formation continue avec des instituteurs de cycle 3, dans des séances de 3 heures.

L'ACTIVITÉ

Objectifs
Aborder une démarche de reproduction d'un objet complexe mais motivant, posant de réels problèmes aux adultes en formation leur permettant de faire le point sur leurs savoirs et savoir-faire, puis de réfléchir à la mise en place d'une suite d'activités géométriques en classe :

- revenir sur leurs connaissances des solides,
- découvrir la variété des méthodes possibles.

Matériel
Un kaléidocycle par groupe de 4 ou 5 stagiaires, pouvant être manipulé sans l'endommager.
Double décimètre, équerre, compas, papier Canson, scotch, ciseaux, feuille format affiche.

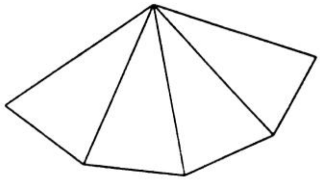
Consignes

1. *Reproduisez et décrivez ce solide.*
2. *Cherchez-en un patron.*

Déroulement
En général les stagiaires s'engagent rapidement dans une première analyse de l'objet (comptage des tétraèdres et des faces, mesure d'arêtes) puis tracent (au compas ou avec des gabarits), découpent et assemblent des figures planes (triangles quelquefois équilatéraux, losanges) puis essaient d'assembler leurs tétraèdres, pour vérifier enfin la bonne rotation de l'engin sur lui-même.

Certaines difficultés apparaissent :

- pour assembler des triangles, l'assemblage ne donnant pas toujours un tétraèdre,



- pour réunir les tétraèdres lorsque ne sont pas identifiées les deux arêtes opposées aux longueurs différentes des quatre autres,
- pour regrouper des losanges qui ne sont pas perçus "à cheval" sur deux tétraèdres,
- pour faire tourner le kaléidocycle constitué uniquement de triangles équilatéraux (figure 1) ou qui laisse un grand trou central (figure 2).

Certains groupes rédigent leur recherche au fur et à mesure de leur construction, mais les plus nombreux s'occupent de la description dans un deuxième temps.

Il arrive quelquefois que soient tracés directement des patrons de tétraèdres (un triangle central, les autres autour) ou encore un assemblage de triangles et de losanges donnant deux tétraèdres articulés... mais le plus souvent les PE2 ne démarrent la recherche du patron qu'après une première réalisation, comme l'ordre des consignes peut le laisser supposer. Par contre il est arrivé qu'un groupe de maîtres de cycle 3 s'obstine à chercher directement le patron pendant plus d'une heure avant d'accepter un premier objectif plus modeste : n'y a-t-il pas là un effet de leurs représentations ou de leurs habitudes ?

Mise en commun

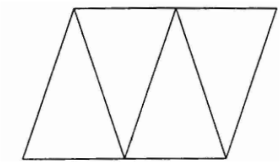
Après 1 h 45 environ, quand chaque groupe peut présenter une description, nous affichons les différentes productions, expliquons les démarches, analysons les erreurs et les blocages observés pendant la recherche, puis en synthèse nous rédigeons collectivement une description ayant l'accord de tous et utilisant un vocabulaire minimum, mais précis.

Institutionnalisation mathématique

Les notions de polyèdre, sommet, arête, face, côté sont redéfinies, celles de tétraèdre et de pyramide sont distinguées. Le nombre et la disposition des faces autour des sommets permet une description claire.
Les propriétés des triangles isocèles et équilatéraux sont rappelées et mises en relation avec des méthodes de construction.
Différentes méthodes de traçage et de construction sont passées en revue : empreinte, piquetage, gabarit, calque, papier quadrillé, patrons partiels...

Fin de l'activité

Il s'agit de relancer ensuite la recherche du patron : soit en partant des différents patrons possibles du tétraèdre et des façons de les assembler, soit en retirant le scotch de certaines arêtes pour mettre à plat toutes les faces... Je suis souvent obligé d'aider les groupes pour obtenir un résultat. Puis je distribue un document où figurent plusieurs patrons de kaléidocycles, construits en juxtaposant des bandes de quatre triangles.



Conclusion

La synthèse sur les contenus géométriques ayant été faite précédemment, je réserve le dernier quart d'heure pour faire une analyse pédagogique et didactique :

- il s'agit bien d'une séance de mathématiques avec les aller-retour entre l'action et la réflexion ;
- rappel de la nature des activités géométriques en référence aux instructions complémentaires parues en 1986 à la suite des programmes de 1985... : après lecture des programmes de 1995, elles semblent encore d'actualité ;
- comment on peut mener une activité en classe au cycle 3 à partir du modèle qui vient effectivement d'être vécu : j'aime à présenter le kaléidocycle comme un des objets terminaux d'une progression de cycle dont certaines étapes pourraient être des polyèdres réguliers ou semi-réguliers ou étoilés, d'autres des boîtes de formes diverses ;
- tout cela permettant aux élèves de travailler (articulation espace-plan avec des patrons pas toujours possibles, à partir d'instruments et de supports variés favorisant (évolution de leurs procédures de construction et de dessin en lien avec la technologie et les arts plastiques ;
- enfin ce que peut être une analyse a priori (d'après les exemples de démarches et d'erreurs qui ont été précédemment analysées) et son utilité pour la préparation de classe.

B - **Différents types de kaléidocycles** - Claudine Hervieu

I- Présentation de l'activité

I.1. Travail sur les patrons

Des patrons de solides déformables sont donnés en dimension réduite sur une feuille A4.

Dans un premier temps, il s'agit, uniquement par la perception visuelle, de les comparer (ressemblances, différences) et de faire des hypothèses sur les propriétés perçues en l'absence d'autres informations.

Dans un deuxième temps, où de nouvelles informations sont données, il s'agit d'affiner la perception visuelle, de rectifier le cas échéant et de compléter les hypothèses précédentes, afin de conclure sur les propriétés des figures et sur des stratégies de construction de ces patrons agrandis.

I.2. Kaléidocycles

Le travail porte sur des kaléidocycles de type hexagone, carré ou étoile pentagonale.

Réaliser des solides, à une taille convenable, avec un matériel adéquat ; utilisation liée à leur particularité (flexibilité).

Comprendre les contraintes mathématiques imposées pour la construction des 3 patrons.

Prévoir, éventuellement, des patrons d'autres types de kaléidocycles.

II. - Déroulement succinct

Organisation

Toujours par groupes de 3, sauf au moment des synthèses.

II.1. Travail sur les patrons

II.1.1. Observation

matériel

Une feuille A4 par personne avec les figures n°l, n°2, n°3 (cf. p.65).

consigne 1

Analysez ces 3 figures, patrons de solides déformables, dont les languettes pour le collage sont les surfaces ayant des signes + ; écrivez les hypothèses sur les propriétés des figures, leurs ressemblances, leurs différences.

Attention, il manque des informations.

quelques formulations obtenues
"..nombre pair variable (par la suite appelé 2n) de bandes de 4 triangles de même taille (2n = 6 ou 8 ou 10) .. rectangles .. droites parallèles .. parallélogrammes .. hexagones réguliers.. "

II.1.2. Informations et agrandissement

a) Informations

matériel
Le même que précédemment

consigne 2
Tous les petits triangles (sans signe +) de la figure n° 1 sont isocèles et isométriques, leurs bases ayant toutes la même direction (PS); il en est de même pour les figures n° 2 et n° 3. Enfin PQRS est un rectangle. Quelles conclusions en tirez-vous ?
Attention, il manque encore des informations.

quelques formulations obtenues
" .. on a bien des rectangles puisque toutes les bases de même longueur des triangles envisagés sont perpendiculaires à (PQ) .. losanges (4 côtés de même longueur) .. triangles isocèles mais aussi équilatéraux!"

consigne 3
Dernière information: on pose PA = x et PB = y (longueurs en mm); les rapports x/y ont pour valeurs 1, $\sqrt{2}$ *, (1+*$\sqrt{5}$ *)/2 respectivement pour les figures n° 1, n° 2, n° 3. Conclusions ?*

formulations obtenues
" .. d'une figure à l'autre, triangles de formes différentes mais non équilatéraux .. et donc pas d'hexagones réguliers.. "

conclusion
Les propriétés minimales pour l'agrandissement sont perçues.

b) agrandissement

matériel
Feuille A3 par personne et outils.

consigne 4
Toujours par groupes de 3, construire les 3 figures pour x = 40 (une seule sur un A3 dont les bords peuvent être astucieusement utilisés)

procédure la plus utilisée
Calculs de y à 1/10 près (40 ; 56,5 ; 64,7) puis construction d'un rectangle de dimensions 2nx sur 3y dans lequel on trace un quadrillage de mailles x sur y. On obtient aussi un quadrillage de mailles 2x sur y ; on trace les diagonales de ces dernières mailles. Il reste à bien délimiter le contour du patron et à gommer 2 lignes de construction.
Dans chaque groupe se fait à nouveau la comparaison des 3 figures avec des essais vains de superposition pour contrôler, d'une figure à l'autre, les différences de formes des petits triangles.

II.2. Travail sur les kaléidocycles (hexagone, carré et étoile pentagonale)

II.2.1. Réalisation
(si possible en temps libre)

matériel conseillé
Bristol fin (550 mm sur 600 mm) pour faire des bandes de largeur 3y

construction des patrons
Si x = 50 les valeurs approchées de y sont 50, 60, 70.

découpage

pliage
Plis (très bien faits) en crête pour toutes les bases y et en creux pour les côtés de même longueur des triangles isocèles (ainsi les lignes de construction seront cachées). Ceci permet d'obtenir une chaîne de 2n tétraèdres reliés par des arêtes de longueur y.

collage
Languettes (triangles avec signes +) sous les faces des tétraèdres; puis on ferme la chaîne avec les 2 autres languettes (situées à une extrémité des patrons).

II.2.2. Justification des choix
Il s'agit de justifier les choix des valeurs des rapports y/x en liaison avec les types hexagone, carre, étoile pentagonale.

a) rotation

L'utilisation de ces objets déformables par rotation fait apparaître une position particulière où tous les tétraèdres ont un sommet commun O, n arêtes de sommet O de longueur y sont dans un même plan (par exemple horizontal noté (P1)) et enfin n autres arêtes de longueur y sont verticales.

b) section par (P1)

consigne
Il s'agit d'étudier la section de chaque kaléidocycle par le plan (P1), plan qui est d'ailleurs un plan de symétrie, et de conclure sur y/x.

résultats
Dans chaque cas, la section est un polygone formé de 2n triangles d'angle 360°/2n en O, de côtés x, x, y.

c) étude détaillée

figure n ° 4
La section est un hexagone régulier si x = y (6 triangles isocèles d'angle 60° en O, de côtés x, x, y).

figure n ° 5
La section est un carré si $y = x\sqrt{2}$ (8 triangles isocèles d'angle 45° en O, de côtés x, x, y).

figure n° 6
La section est une étoile pentagonale (10 triangles isocèles d'angle 36° en O, de côtés x, x, y) ; on retrouve là la *divine proportion*. Cela nécessite une étude complémentaire (ci-dessous).

figure n ° 7
Étude complémentaire sur ces triangles d'or et sur la "divine proportion":
I, J, L étant alignés, dans les triangles 1JK et IKL on a :
(y + x)/y = y/x = k ce qui donne k * k - k = 1 puis 4(k*k) - 4k + 1 = 4+1
d'où (2k - 1) * (2k - 1) = 5.
On trouve pour k le nombre d'or : $(1 + \sqrt{5})/2$.

II.2.3. Autres kaléidocycles

Si 2n = 12, pour avoir un point O, la section par (P 1) doit être formée de 12 triangles isocèles d'angles 30° en O, de côtés x, x, y (figure non faite) ; 3 triangles comme ceux-ci donnent un triangle équilatéral de côté y, de hauteur(3/2)x, ce qui donne $(3/2)x = (\sqrt{3}/2)x$ d'où $y/x = \sqrt{3}$.

Remarque : si 2n ≥ 8, on peut faire des anneaux de tétraèdres réguliers mais le point O ne peut exister.

Figures

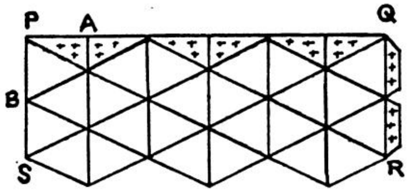


Figure n° 1

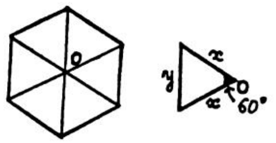


Figure n° 4

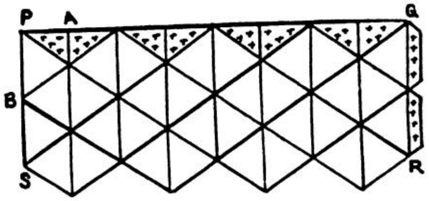


Figure n° 2

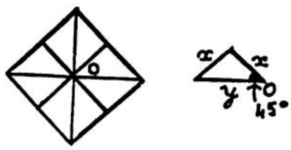


Figure n° 5

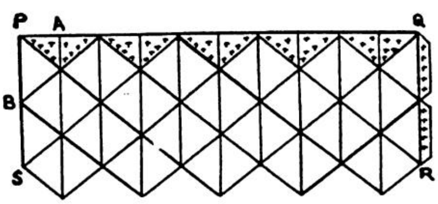


Figure n° 3

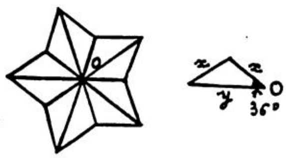


Figure n° 6

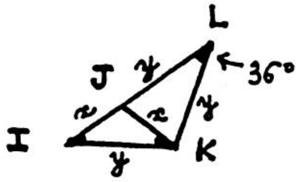


Figure n° 7

C - Le Kaléidocycle - François Huguet

"Lors de l'introduction de notions nouvelles, les élèves sont mis en situation d'apprentissage actif : ils découvrent les notions comme des réponses à des problèmes. " (I. 0.1985)

Contexte

J'ai utilisé cette situation plusieurs fois en Formation Initiale. Les étudiants doivent tout d'abord chercher à résoudre ce problème de construction de solide, puis après analyse des difficultés rencontrées nous essayons de concevoir ensemble une séquence d'une heure qu'ils pourront expérimenter au niveau d'un CM 1 ou d'un CM2.

Certains étudiants pensent qu'il serait intéressant de montrer l'objet fini à réaliser afin de motiver davantage l'activité des enfants.

Tout en respectant leur liberté de choix des variables didactiques de la situation, j'essaie tout de même de les convaincre d'expérimenter aussi une démarche inductive permettant de confronter l'enfant à une suite d'obstacles qu'il devra franchir avec l'aide ou la collaboration de ses camarades.

Travail possible en formation initiale ou continue

1. Faire vivre la situation en respectant la même démarche et organisation de travail
    - Résolution d'une suite de problèmes de construction
    - Travail individuel puis par groupes de deux...
    - Phase de validation

2. Faire une analyse a priori des procédures et des difficultés des enfants de CM
    - Réfléchir au problème de l'auto -validation
    - Envisager des aides pour faciliter la compréhension et la réalisation pratique.
    - Prévoir un déroulement possible dans une classe de CM, si possible ne dépassant pas une heure.

3. Analyser le problème de construction d'un point de vue mathématique.
    - Voir l'incidence de la contrainte de départ
      Base = Hauteur du triangle isocèle
    - Retrouver la propriété "Côté de l'hexagone = Rayon du cercle circonscrit".
    - Éventuellement s'intéresser au problème du patron du Kaléidocycle.
    - Faire découvrir qu'il existe d'autres modèles de Kaléidocycles. (Voir document annexe)

4. Faire une analyse de l'activité en relation avec les connaissances en jeu pour des enfants de CM.

- Recenser les notions abordées, voir le vocabulaire utilisable
- S'intéresser aux techniques et sa voir-faire mis en place
- Réfléchir à la « phase d'institutionnalisation »

Chronique d'une des séquences réalisées au CM

Matériel

• Des feuilles de papier Casson ou de carton fin mais rigide.
• Des règles, des doubles décimètres.
• Des ciseaux, des équerres et des rouleaux de scotch.

1ère phase : appropriation du 1er problème de construction en grand groupe

Consigne

Cette consigne est écrite au tableau.

Nous allons construire des triangles isocèles ABC dont la hauteur [AH] mesure 8 cm et le côté [BC] mesure 8 cm.

Lecture et questions à propos des mots inconnus "isocèle" "hauteur".

Les explications fournies par le maître ne vont pas reposer sur des définitions ! Par exemple, il montre un grand triangle construit en carton, fait constater par pliage que deux côtés ont même longueur et dit : "ce triangle est isocèle".

2ème phase : construction individuelle

Consigne

Choisis les instruments nécessaires pour la construction. Réalise 2 triangles isocèles comme indiqué précédemment. Compare les avec ceux construits par ton voisin.

Une validation peut être rapidement effectuée par diverses procédures :

- Comparaison avec un modèle donné
- Mesurage
- Retournement.

Remarques à propos des difficultés constatées.

- Certains enfants construisent [BC] puis [AH] sans placer H au milieu de [BC]. Ils constatent alors que les triangles ainsi construits ne sont pas isocèles. Ce type d'erreur va favoriser la découverte de cette propriété caractéristique de tous les triangles isocèles !
- Nous avons constaté aussi que peu d'enfants utilisent le compas !

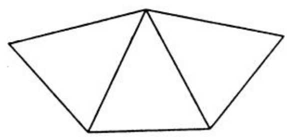
3ème phase : nouveau problème d'agencement (travail par équipe de deux).

Consigne

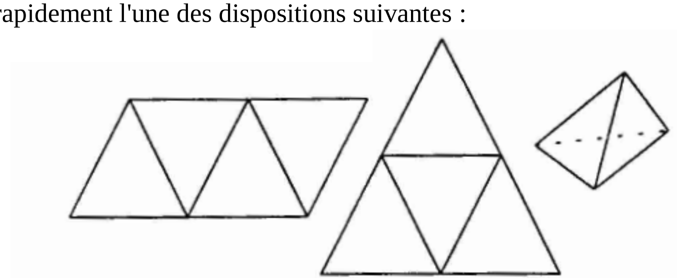
Avec 4 de vos triangles essayez de construire un solide " bien fermé". (Tétraèdre)

Remarques à propos des difficultés rencontrées.

• Le maître peut indiquer une technique pratique à deux pour l'assemblage à l'aide de scotch.
Par exemple l'un des enfants place et maintient tendu le scotch à l'envers contre la table, l'autre enfant peut alors aisément juxtaposer les côtés des triangles qu'il souhaite assembler.
• Certaines équipes essaient sans réfléchir d'assembler 3 triangles ainsi :



• Les enfants constatent alors que le 4ème triangle ne peut être placé pour "fermer" le solide !
• Certains enfants pensent alors à l'idée de "patron" et adoptent assez rapidement l'une des dispositions suivantes :

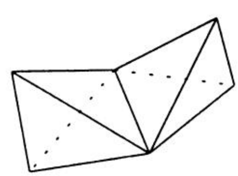


4ème phase : assemblage des solides réalisés (travail "Inter - Equipes").

Consigne

Essayez d'assembler les solides en juxtaposant les arêtes de 8 cm.

Remarques à propos des réalisations.



• Les enfants vont constater qu'après avoir assemblé 6 tétraèdres "en chaîne", il est possible de former une sorte de couronne en reliant, comme précédemment par l'arête de 8 cm, le 6ème solide au 1er solide !

• Ce nouvel assemblage possède des propriétés curieuses
Par un mouvement de rotation perpétuelle, les différentes faces vont apparaître les unes après les autres un peu comme dans un Kaléidoscope ! D'où son nom "Kaléidocycle" !
• Bien naturellement les groupes les plus rapides ont eu l'idée de colorier ou de décorer les différentes faces permettant ainsi de mieux mettre en valeur le phénomène.
• Beaucoup d'enfants ont reconstruit ensuite chez eux d'autres Kaléidocycles afin d'en avoir un personnellement.

5ème phase : institutionnalisation

Après analyse des productions et des difficultés rencontrées, nous avons pu constater la bonne compréhension par l'ensemble de la classe de termes géométriques utilisés lors de cette séquence (par exemple : face, arête, sommet, triangle isocèle ...)
Il aurait été possible aussi d'institutionnaliser certains "savoir-faire" concernant les techniques d'assemblage, l'usage du compas ...

Conclusion

Ce type d'activité a évidemment l'inconvénient de son caractère trop ponctuel par rapport à la vie d'une classe.

Cependant, les étudiants qui ont réalisé cette expérience, l'ont jugée fort intéressante et ont apprécié plus particulièrement la démarche consistant à faire résoudre individuellement ou collectivement une suite de problèmes.

Lors des diverses expériences réalisées, les enfants sont toujours restés motivés, actifs et coopérants. Bien évidemment s'est posé le problème de l'hétérogénéité car tous les enfants ne sont pas capables de travailler au même rythme et avec le même soin.

L'intérêt de cette forme de travail a été de permettre aux plus lents de travailler à leur rythme tandis que les autres pouvaient :
- soit construire d'autres kaléidocycles en partant directement de patrons de tétraèdres
- soit dessiner des motifs sur les faces des solides permettant de faire apparaître par rotation huit dessins différents !

Mais nous avons pu voir également les difficultés de gestion et aussi les techniques permettant de passer du travail individuel au travail en équipes. (voir l'avantage et le rôle des consignes écrites ...)

Nous avons pu enfin constater le niveau d'habileté manuelle des enfants et réfléchir aux activités à mettre en place pour les faire progresser dans ce domaine.

Remarque d'ordre mathématique
La contrainte AH = BC imposée au départ de ce problème a en fait une grande utilité ! En effet, c'est grâce à elle que le Kaléidocycle peut "juste" pivoter sur lui même.
Cela peut également servir pour la validation de ce travail. Par exemple avec 6 tétraèdres réguliers cela ne marcherait pas !
Mais cette contrainte est-elle "large" ou "précise" ? A vous de le démontrer !

Bibliographie

- Revue Pentamino - n° 6 et n° 8, année 1979 « La ronde des berlingots »

- M.C.Escher, « Kaléidocycles », Edition Taschen, 1992
De nombreux kaléidocycles constructibles à partir de patrons déjà faits

- Fénichel M., Dubois C.,.Pauvert M., « Se former pour enseigner les mathématiques », Tome 1, pp. 154 - 161, A.Colin, 1993
  Séances de classe autour des kaléidocycles

Représentations de solides

Dominique Beaufort

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991.

Cet article présente des activités menées en formation initiale pour sensibiliser les stagiaires aux différents types d'objets géométriques (différentes perspectives, le dessin technique et les vues).

Comment représenter un objet de l'espace sur une feuille de papier? Les solutions à ce problème ne sont pas simples, même si nos habitudes culturelles nous ont rendu familières certaines représentations. Depuis les Grottes de Lascaux jusqu'aux images de synthèse, les tentatives sont multiples : perspective centrale (Peintres de la Renaissance), perspectives cylindriques (géométrie projective), projections orthogonales sur plusieurs plans (dessin technique), topologie, anamorphoses,... II s'agit toujours d'un point de vue particulier sur un objet choisi en fonction de l'information (l'émotion) que l'on souhaite communiquer.

I - Objectifs

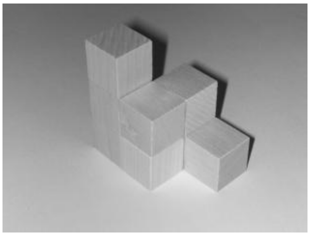
Placer les étudiants en situation de produire une représentation plane d'un solide. Les caractéristiques de celui-ci sont telles qu'une représentation en perspective est insuffisante pour rendre compte entièrement de l'objet; de plus, la validation des productions sera effectuée par la construction d'un solide semblable.

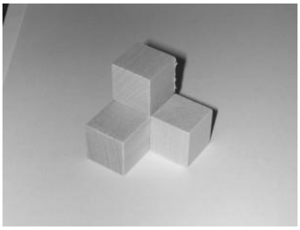
Placer les étudiants en situation de lire une représentation pour construire un solide.

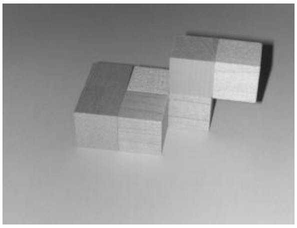
Les sensibiliser à la variété des systèmes de représentations et à leurs intérêts respectifs selon l'objectif de communication visé (toute représentation est une perte d'information).

Faire analyser ces activités et préciser à cette occasion quelques concepts de didactique.

Informer sur les principaux systèmes de représentation conventionnels: dessin technique, perspectives.







II - Déroulement des activités

Durée
6 heures

Matériel
- 5 solides tous différents construits à l’aide de tasseaux de section carrée.
- cubes emboîtables (matériel de numération)
- feuilles format A3

1ère phase : élaboration d’une représentation
L’ensemble des stagiaires est divisé en groupes de 4 ou 5. Chaque groupe reçoit un solide et une grande feuille de papier.

Consigne: *"Élaborez un message sous forme d'un ou plusieurs dessins permettant à un autre groupe de construire un solide analogue. »* **On précisera en cours de travail qu'on ne s'attachera pas aux dimensions réelles de l'objet.**

Chaque groupe analyse le solide, le pose sur la table dans la position qui lui semble la plus appropriée (ce point de vue n'est pas identique pour tous les membres du groupe), se met d'accord sur un moyen de le représenter : perspective(s), sections. vues géométrales
Selon le système choisi, les étudiants collaborent à la réalisation, essaient au brouillon, exécutent une vue particulière.

2ème phase : construction d'un solide à l'aide d'un message
Les productions sont échangées d'un groupe à l'autre, et chaque groupe reçoit une collection de cubes emboîtables . Ils doivent construire, à l'aide de ce matériel, un solide selon les indications fournies par le message.

Remarque : les cubes emboîtables ne sont fournis qu'à ce moment de l'activité, afin de ne pas induire des modes de représentations trop particuliers dans la première étape.

3ème phase : comparaison des solides construits avec les originaux
La non conformité peut provenir :
- soit d'une lecture erronée de la représentation : codage mal interprété, lecture fausse.
- soit d'une représentation ambiguë, insuffisante.

4ème phase : confrontation des systèmes utilisés
Chaque groupe présente à l'ensemble de la classe, le mode de représentation qu'il a utilisé, tandis que le groupe récepteur indique la plus ou moins grande facilité avec laquelle il a construit le solide. Cette phase permet de prendre conscience de

la variété des solutions au problème, d'en mesurer pour chacune d'elles l'adéquation au problème de construction et de rechercher les causes d'erreur.

Une première classification des systèmes de représentations est établie : perspectives, projections orthogonales sur plusieurs plans, coupes,…..

5ème phase : analyse de l'activité

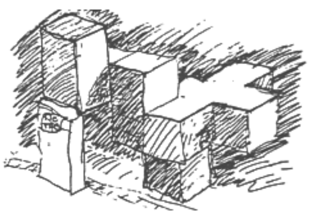
Elle est menée de manière collective et porte sur les objectifs, ainsi que sur les caractéristiques de la situation. Le débat autour de ces questions permet d'éclairer quelques concepts de didactique : situation, problème, variables didactiques, validation, institutionnalisation, communication-formulation,...

6ème phase : information sur les principaux modes conventionnels de représentation

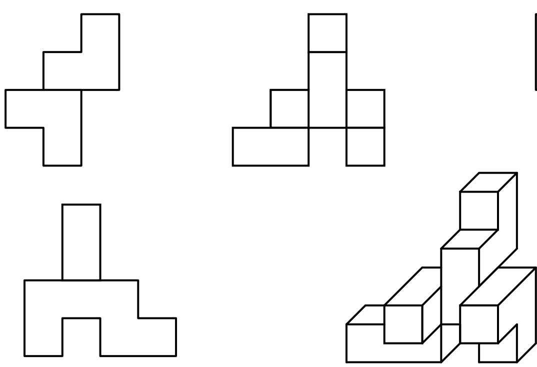
Voir paragraphe IV

III - Exemples de productions

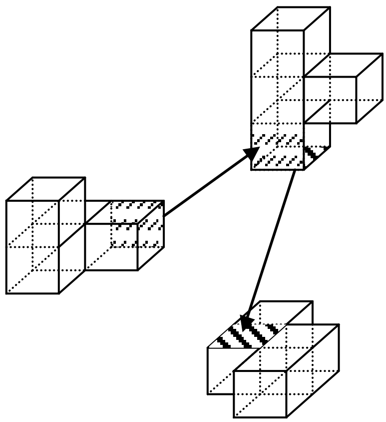
- Perspective : ces représentations (parfois mal maîtrisées) ne permettent pas, seules, de fournir toutes les informations nécessaires à la construction. Elles donnent par contre une vue globale du solide.



- Projections orthogonales et perspectives : les conventions de disposition de ces vues ne sont en général pas respectées. Reproduction aisée du solide.

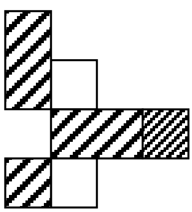


- Vues éclatées en perspective avec schéma de montage : on trouve parfois le plan de montage en différentes étapes à la manière des plans de constructions de jeux d'assemblage.

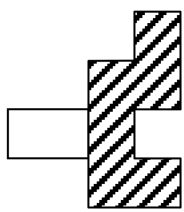


- Projections orthogonales sur plusieurs plans et indications des différents niveaux.

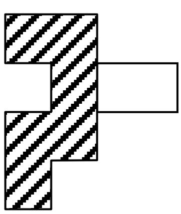
Vue de face



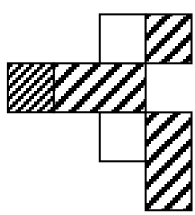
Vue de dos



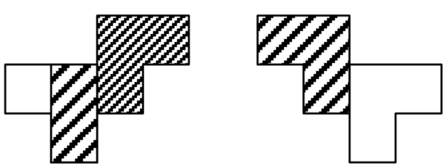
Vue de dessus



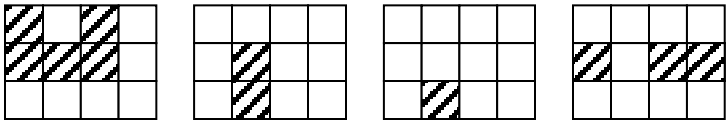
Vue de dessous



Vues de côté

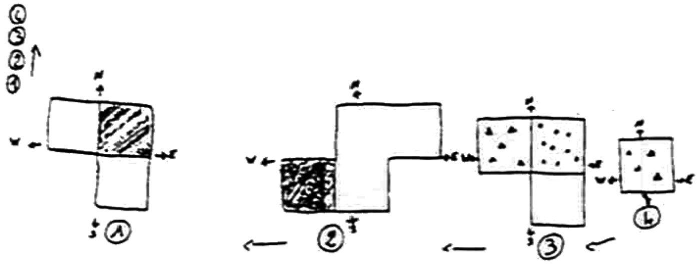


- Sections du solide en surimpression de la vue de dessus

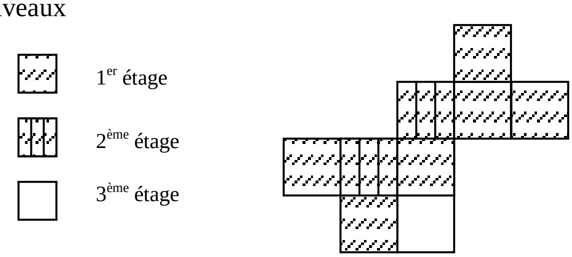


2ème étage 3ème étage 4ème étage base

- Sections et plan de montage



- Section sur un seul dessin avec légende des différents niveaux



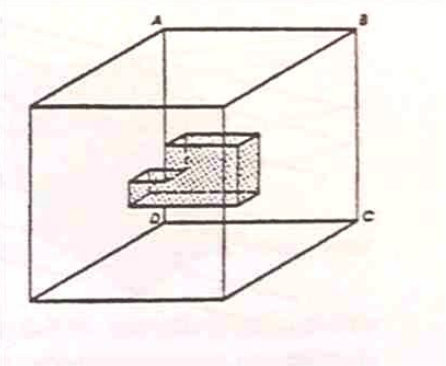
IV - Principaux systèmes de représentations

1) Classification des méthodes de projection

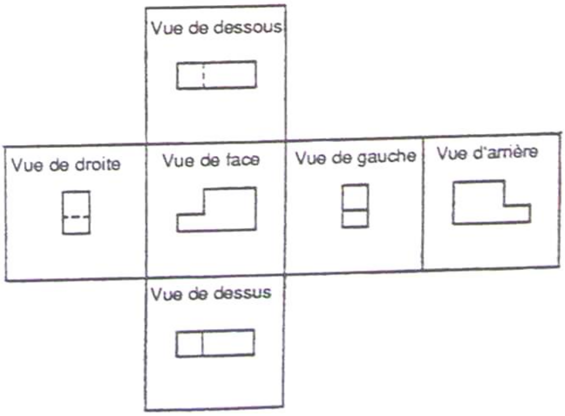
- projections cylindriques (ou parallèles)
  - projection orthogonale de l'objet sur plusieurs plans orthogonaux : dessin technique, géométrie descriptive
  - projection de l'objet sur un seul plan :
    - *projection oblique : perspective cavalière, perspective "militaire"
    - *projection orthogonale : perspective axonométrique
- projection conique : perspective centrale

2) Dessin technique

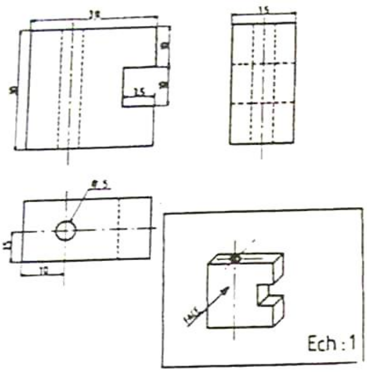
On imagine l'objet dans un parallélépipède rectangle et l'on projette cet objet sur les 6 faces de celui-ci. Ces projections peuvent être assimilées aux images perçues par un observateur placé à différents endroits : face à l'objet, à droite, à gauche, au-dessus, ... D'où la terminologie utilisée: vue de face (ou parfois élévation), vue de gauche, etc.



La disposition des différentes vues sur la feuille de dessin résulte d'un développement du parallélépipède : c'est le système européen où la vue de gauche est placée à droite de la vue de face.



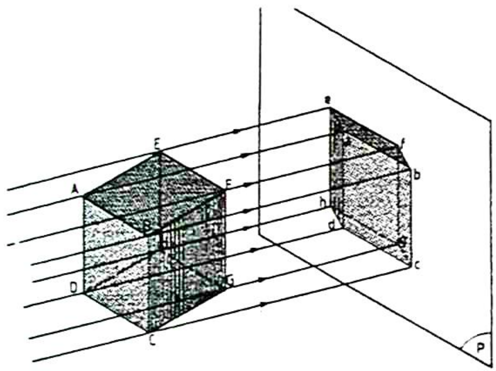
En fait on ne représente le plus souvent que 2 ou 3 vues. celles qui donnent le maximum d'informations.



Conventionnellement, les arêtes vues sont représentées en traits pleins alors que les arêtes cachées le sont en traits pointillés.

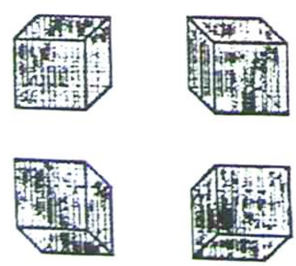
3) Perspective cavalière

(du nom d'un ouvrage de fortification appelé "cavalier")

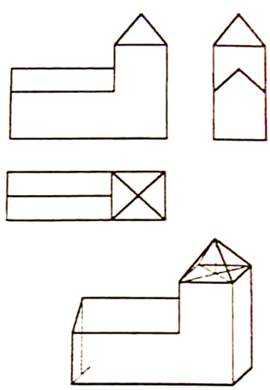


Il s'agit d'une projection oblique sur un plan (le plus souvent vertical) parallèle à l'un des plans principaux de l'objet.
Les éléments situés dans des plans parallèles au tableau (plan de projection) se projettent sans déformation et en vraie grandeur (à une échelle prés) : les distances et les angles sont conservés.

Les droites perpendiculaires au tableau se projettent selon une même direction, dite *direction des fuyantes*, faisant un angle donné avec l'horizontale. Cet angle est le plus souvent égal à 45°. Les distances sur cette direction des fuyantes sont multipliées par un coefficient de réduction : 0,5 en général.

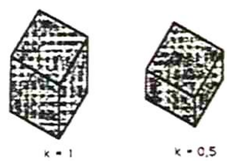


Perspective cavalière du cube

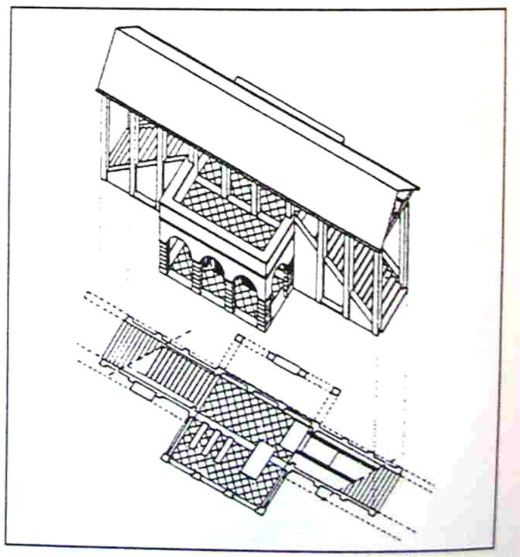


Perspective cavalière construite à partir des projections orthogonales

Remarque : en architecture, on utilise une perspective qui suit un principe semblable : mais cette fois, le plan de projection est horizontal (sol). Les éléments situés dans les plans horizontaux sont projetés en vraie grandeur : on peut donc partir du plan de l'édifice pour construire en perspective. Dans ce contexte, cette technique est appelée, selon les auteurs, *« perspective axonométrique* » ou encore « *perspective militaire* ».

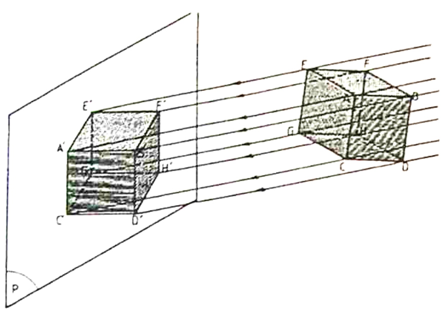


Perspective militaire du cube



4) Perspective axonométrique

Il s'agit d'une projection orthogonale de l'objet sur un plan parallèle à l'un des plans principaux de l'objet.



Elle se caractérise par les angles formés par les projections des 3 directions du repère associé à l'objet, ainsi que par les coefficient de réduction sur chacune de ces directions :

Perspective isométrique : 3 angles égaux (120°) ; $k_x = k_y = k_z = 0{,}82$

Perspective dimétrique : 2 angles égaux (a = b= 131°30' ; c = 97°)

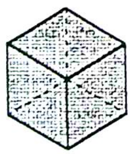
$k_x = k_y = 0{,}94$; $k_z = 0{,}47$

Perspective trimétrique : les 3 angles sont différents

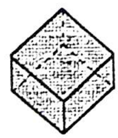
a= 105° $k_x = 0{,}65$

b= 120° $k_y = 0{,}86$

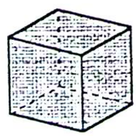
c= 135° $k_z = 0{,}92$



Perspective Isométrique



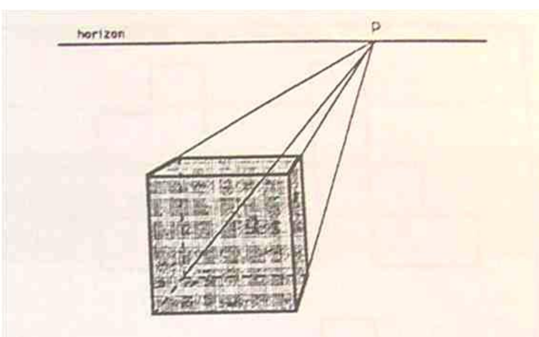
Perspective dimétrique



Perspective trimétrique

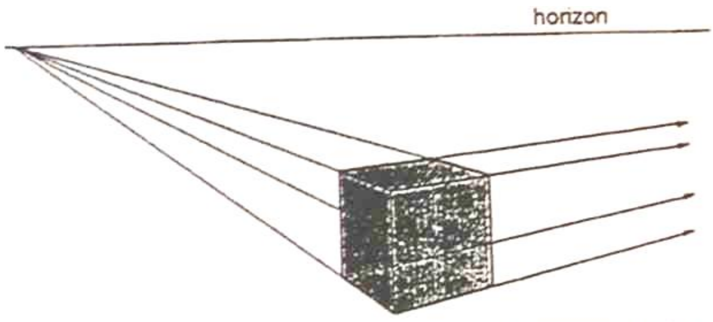
5) Perspective centrale

Ce procédé mis au point par les peintres et architectes de la Renaissance (Alberti, Brunelleschi, Dürer,..) est un système de représentation de l'espace visant à produire une image identique à celle que perçoit un observateur.



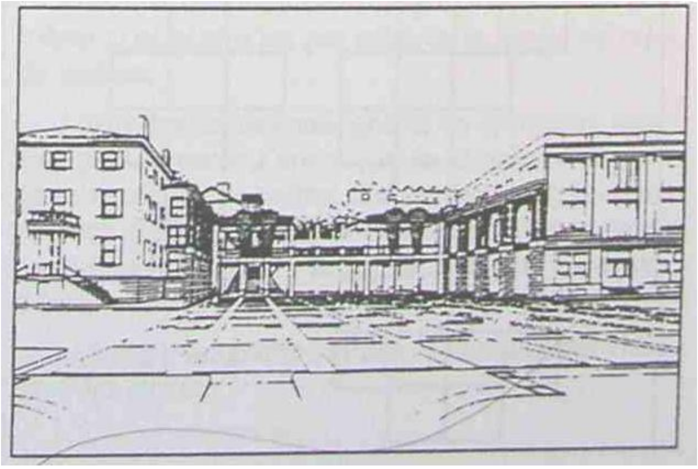
Une face du cube est parallèle au tableau

Tous les plans de même direction (elle- même non parallèle au tableau) convergent vers une ligne de fuite : ainsi ligne d’horizon est la « fuite » des plans horizontaux.



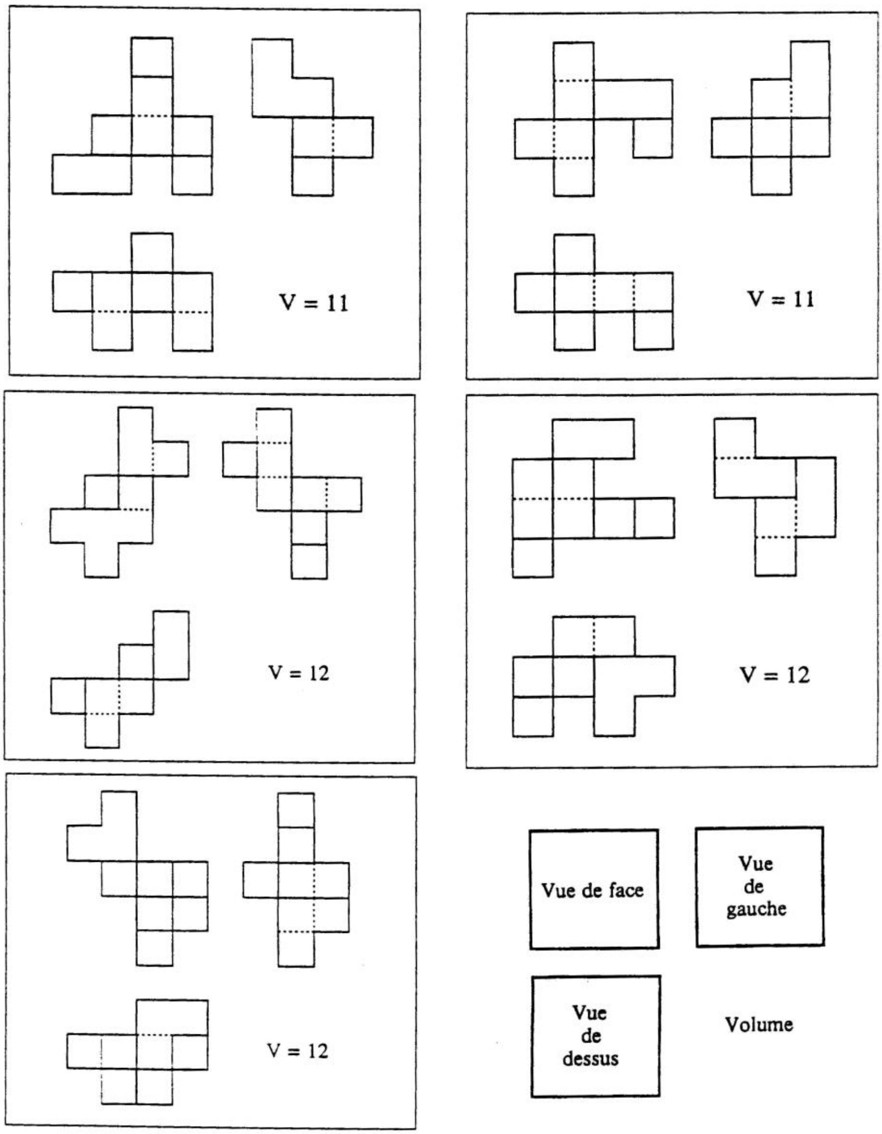
Les horizontales des 2 directions principales fuient vers 2 points

Toutes les droites de même direction (elle- même non parallèle au tableau) convergent vers un point de fuite : toutes les droites horizontales ont un point de fuite sur la ligne de l’horizon, le point principal étant le point de fuite des horizontales perpendiculaires au tableau.
Enfin toute droite parallèle au tableau se projette dans la même direction.



Annexe

Vues des solides utilisés (cf. II et III)



Les objets de l'école : l'octomobile[1]

Nicole Bonnet

Extrait des actes du XXVIIème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres - Tours 2001.

Cet article présente le compte rendu d'un atelier du colloque.
A partir d'un objet, les participants sont invités à mettre en œuvre une démarche scientifique pour le fabriquer. Il s'agira ensuite d'exploiter ses propriétés intrinsèques qui sont prétextes à travailler des concepts de géométrie plane.
Cette activité est directement exploitable en formation initiale et continue des professeurs des écoles.

1. Introduction

Dans ce qui suit, il y a lieu de distinguer deux niveaux. Le premier consiste en l'étude, en vue de la fabrication, d'un objet non plan nommé octomobile. Il peut être considéré comme une sorte de "solide". C'est un objet technologique. En second lieu, cet objet est considéré comme producteurs d'objets aplatis variés sur lesquels un regard géométrique va être porté.

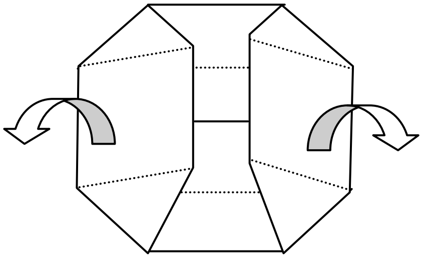
2. Mise en oeuvre et consigne

L'objet est présenté de façon rapide en faisant remarquer qu'il est fabriqué en bristol blanc donc peu coûteux, peu volumineux, facile à transporter, à conserver et réutilisable.
Il est très peu manipulé par le responsable de l'atelier qui en laisse la découverte aux participants. La consigne orale s'avère très stricte : "vous pouvez le tourner et le retourner dans tous les sens, mais vous n'avez pas le droit de le démonter, d'écrire dessus. Il devra m'être rendu intact. Dans un premier temps, vous devez l'observer afin d'en fabriquer un qui soit pareil. Vous noterez tout ce qui semble vous poser problème ou ce qui vous questionne. Puis, vous allez réfléchir à de possibles utilisations en classe".

Un octomobile est distribué par personne.

---

[1] Pour une meilleure compréhension de l'octomobile le lecteur pourra se reporter à la brochure du même nom éditée par l'IREM de Dijon en septembre 2000.Université de Bourgogne. UFR Sciences et Techniques IREM. 9 rue Savary BP 47870 – 21078 DIJON Cedex au prix de 30 F soit 4,60 euros plus frais de port. Il pourra également se reporter à l'annexe 1.

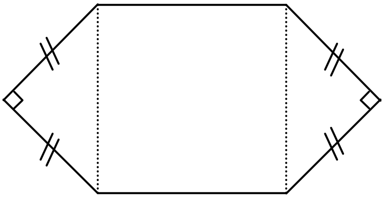


Pendant le temps de première appropriation de l'objet, du matériel est disposé sur une table, sans commentaire : bristol blanc et bristol quadrillé, règles, ciseaux, compas, colle.

3. Procédures de construction

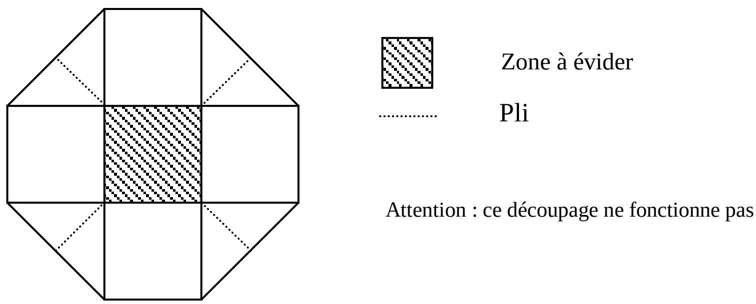
Le temps de construction est approximativement de trois quarts d'heure.
Un stagiaire a utilisé du bristol quadrillé et du bristol blanc uniquement pour la différence de couleur. Cela lui a permis de découvrir certaines symétries axiales des différentes figures que prend l'octomobile plat lorsqu'on le manipule. Une des difficultés réside en la distinction de l'objet manipulé en trois dimensions et de l'objet considéré "à plat" (voir les remarques du groupe 2)
Il a également fabriqué des octomobiles de dimensions différentes. En général, lorsqu' après une première construction maladroite, les élèves me demandent l'autorisation d'en fabriquer un autre, ma réponse est : "oui, mais un plus grand".
D'autres stagiaires ont choisi le bristol blanc et ont fait des tracés au compas ou ont utilisé le modèle comme gabarit.
Deux collègues ont préféré le bristol quadrillé "pour aller plus vite".
A la fin de la construction une personne a décoré l'octomobile avec des petites images issues des brochures touristiques. Elle a tenté de chercher si certains agencements permettaient des décompositions/recompositions d'images intéressantes après les rotations successives.

Les pièces de base sont rapidement apparues sur les brouillons



Un stagiaire a cherché s'il pouvait réaliser l'octomobile sans collage. Cela a induit l'idée qu'il pouvait se fabriquer d'un seul morceau. Cette réaction se

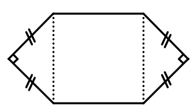
présente avec certains PE2[2] (à peine un quart d'entre eux) mais jamais spontanément chez les enfants de CM1 ou de CM2. ce qui tend à montrer que l'idée de "patron" (développement en un seul morceau) n'est pas naturelle.
Une erreur fréquente chez les PE2 est de tracer la pièce suivante, qui ne fonctionne pas :



Tous les participants sont conscients qu'il est nécessaire de soigner les tracés et les découpages, sinon l'octomobile fonctionne mal. Cet exercice finalise donc une demande de soin que nous avons souvent en géométrie avec les élèves.
Dans une phase collective, chaque représentant a proposé le fruit des réflexions de groupe.

4. Productions et remarques des différents groupes

<u>Groupe 1</u> :
Les participants ont observé et décrit les "sous" figures présentes par le jeu des épaisseurs dans l'octomobile posé à plat : carré, triangle rectangle isocèle, hexagone, octogone, croix, diagonale. La figure qui sera ultérieurement nommée "figure ou pièce de base" est celle-ci :



En fin de cycle III, le travail de rappel du vocabulaire géométrique semble souvent opportun.
Des variables didactiques leur sont apparues rapidement. Nature du support utilisé : bristol quadrillé ou blanc ; instruments de tracé : compas, équerre…
Des observations quant aux symétries (retournement) ont été faites.
Ils ont finalement trouvé un développement en un seul morceau puis ils ont cherché s'il était possible de ne pas ou peu coller.

---

[2] Stagiaire Professeur des Ecoles deuxième année

Une dernière question les a interpellés : "Quelle doit être la taille de l'hexagone pour que le développement soit possible dans une feuille donnée ?" Une réponse est donnée page 4, mais il n'est pas sûr qu'elle soit du niveau du cycle III.

Groupe 2 :
Les participants se sont demandés s'il s'agissait d'un objet mathématique pour en conclure que l'appellation serait plus sûrement celle d'objet technologique. Il va induire un travail mathématique qui semble tout à fait pertinent : description, recherche des propriétés de l'objet aplati ou non, reproduction, etc.
Ils ont cherché s'il était possible d'associer des ribambelles d'octomobiles collés, fonctionnant de telle façon que l'action sur l'un déclenche des actions sur les autres.
Note de l'auteur : je n'ai pas trouvé de pistes intéressantes en ce sens, par contre, je me suis demandée ce que l'objet devenait lorsqu'on utilisait 5, 6, 7, 8, … pièces de base. Implicitement, je me suis fixée une épaisseur au maximum si on considère que les deux collées comptent pour une.

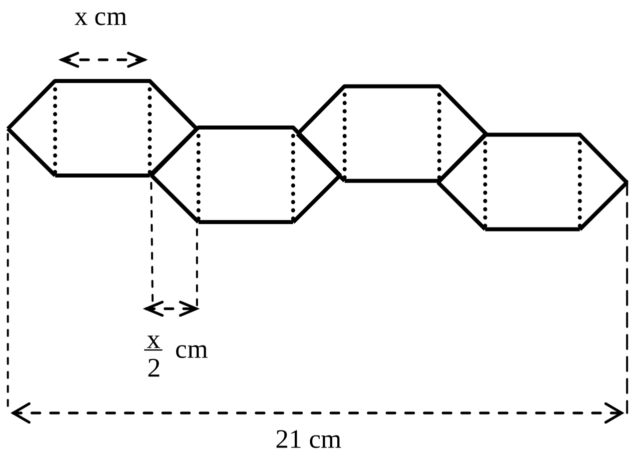
Le groupe a proposé les utilisations suivantes :
Le changement d'échelle s'accompagne des deux problèmes suivants :
construire un triangle rectangle isocèle connaissant son hypoténuse.
construire un octomobile dont le carré de la "pièce de base" possède un côté de longueur 6 cm.
La construction d'un octomobile en un minimum de coups de ciseaux (ce problème rejoint celui du groupe qui cherchait un "patron" en un seul morceau).
Les compétences visée peuvent se décliner en anticipation et création d'images mentales. Une fiche de fabrication (annexe 1) utilisée en classe a été distribuée aux stagiaires (il s'agit pour les enfants de remplir les cadres vides qui sont écrits ici en italiques).
L'étude des symétries axiales des figures que l'on obtient après manipulations de l'objet et positionnement à plat.
La recherche du nombre de rotations de l'objet en trois dimensions afin qu'il reprenne sa position de départ. Elle est favorisée par une construction avec du bristol de deux couleurs différentes.
Le calcul du nombre de "photos" de l'objet aplati (appelées "différentes positions" en annexe 3). Ce nombre est limité.
La constitution d'un projet interdisciplinaire mathématiques/arts plastiques/technologie.

Groupe 3 :
Des questions ont provoqué des débats entre les membres du groupe. Elles sont de deux sortes : les questions technologiques et les questions mathématiques. (Il en est de même chez les élèves.)
L'hexagone est-il régulier ou non ? Réponse non.
L'octogone est-il régulier ou non ? Réponse non.

Peut-on fabriquer un octomobile sans colle ? Réponse oui : du scotch posé en cavalier suffit.
Il est également intéressant de faire constater aux élèves que les dimensions de l'objet plat fini sont proportionnelles à celles de la "pièce de base".

Le groupe a proposé deux séances qui permettent d'utiliser l'octomobile
Séance 1 : observation, reproduction
Stratégie : faire quatre hexagones réguliers. Il semble impossible que lors de l'appropriation les élèves puissent imaginer un tracé en un seul morceau.
Bilan : mise en évidence des difficultés rencontrées, description des figures obtenues.
Séance 2 : projet de pavage
Consigne : j'ai du beau bristol à vous proposer, mais je souhaite l'économiser. Combien de pièces de base puis-je construire dans un format A4 ?
Un pavage est proposé en annexe 2.

Groupe 4 :
Ce groupe s'est demandé :
Comment circonscrire les collages aux zones utiles (une des réponses est de faire hachurer ces zones aux élèves avant qu'ils ne déposent la colle).
Quel type de colle employer ? (il faut une colle forte type scotch en tube, colle contact, sinon le collage ne tient pas).
Peut on fabriquer un objet mobile proche de l'octomobile qui posséderait deux triangles isocèles non rectangles (ou équilatéraux) sur la pièce de base ? (Je ne crois pas…)
De plus, les points suivants ont été abordés concernant :
Les compétences technologiques indispensables en cycle III : la fabrication de l'octomobile nécessite l'art du trait, la pratique du pliage et la maîtrise des collages. En effet, les tracés doivent être le plus juste possible sinon l'octomobile ne fonctionne pas bien, et le bristol quadrillé aide en cela. Quant au pliage sur bristol, il n'est pas évident avec les enfants. Certaine méthodes ont été employées : plier le long d'une règle plate ou utiliser des stylos n'ayant plus d'encre pour créer un sillon sur le trait de pliage. En ce qui concerne le collage, les adultes se sont rendus compte que la colle pouvait déborder et assembler ainsi des parties inutiles restreignant les fonctions mobiles de l'objet.
Les connaissances géométriques pour fabriquer l'octomobile : reconnaître des figures simples dans une figure complexe qu'est la forme de base, savoir construire cette forme. A ce propos, ce groupe a beaucoup travaillé sur bristol blanc. J'ai montré des productions d'élèves et les membres se sont rendus compte de la difficulté pour des enfants d'école primaire de tracer un carré et deux quarts de carrés assemblés sur des côtés opposés de celui-ci. Il s'agit là d'un exercice de précision finalisé. Le maître ne demandera pas un effort de soin uniquement pour lui faire plaisir, mais pour que l'objet tourne sur lui-même.
Le problème de la construction d'une suite de quatre figures de base d'un seul tenant a également été soulevé. Quel doit être le côté du carré pour que la ribambelle entre dans une feuille de format 15 x 21 ?

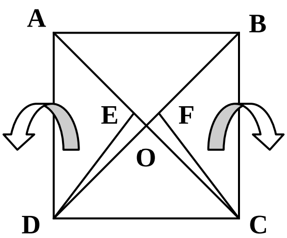


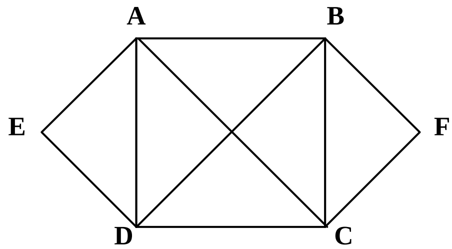
Un rapide calcul ($4x + 5\frac{x}{2} = 21$) donne avec les conditions imposées ici,
$x = 3{,}5$ cm.

5. Conclusion

J'ai proposé le travail décrit dans la brochure de l'IREM[3]. L'octomobile proposé aux élèves est fabriqué en bristol quadrillé. Le carré central mesure 4 cm de côté.
Séance 1 :
Observation où le vocabulaire émerge, manipulation et fabrication de l'objet.
Les plus rapides construisent un octomobile de dimensions différentes.
Séance 2 :
Rechercher toutes les photographies possibles quand l'octomobile est en position "plan" (annexe 3) et redécouverte de cette forme lorsque le maître la montre sur un poster.
Compléter la fiche technique ou bien remettre en ordre les quatre étapes de la fabrication avant de compléter la fiche.
Séance 3 : travail au choix
Ecriture du ou des programmes de construction pour réaliser une pièce de base sur papier blanc (plutôt en CM2 ?). Il est judicieux de remarquer que la figure de base présente des plis selon [AD] et [BC] et que les sommets E et F des triangles rectangles se confondent en O centre du carré.

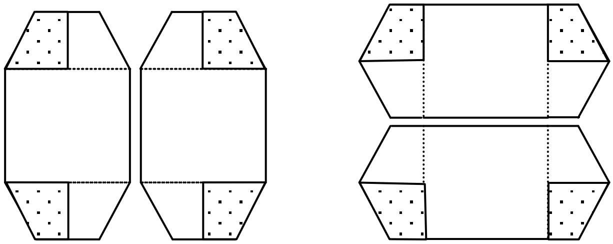
[3] IREM de Dijon

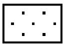




Lecture de programmes de construction écrit par le maître et tracé de cette pièce de base sur papier blanc non quadrillé (plutôt CM1 ?)
J'ai pu remarquer que les élèves de CM1 ou de CM2 ne savaient pas tracer des arcs de cercles et surchargeaient la figure de cercles complets. Un travail plus approfondi de constructions des figures complexes semble opportun.
Séance 4 : fabrication d'un octomobile sur bristol
Je ne fais fabriquer qu'une seule pièce de base avec beaucoup de soin.
Pour les trois autres, j'ai indiqué "la méthode des trous" : à l'aide de la pointe sèche du compas, on place les points A, B, C, D, E et F, puis on trace au crayon et on découpe…

J'ai donné des pistes de perspectives : fabrication de deux quadrimobiles dont l'empreinte (trace de l'objet sur le papier) est un carré ou un rectangle. Fabrication d'un hexamobile, d'un octomobile régulier, d'un cyclomobile dont les empreintes sont un hexagone régulier, un octogone régulier et un disque.[4] La question posée par le groupe 4 (*Peut-on fabriquer un objet mobile qui posséderait deux triangles isocèles non rectangles ou équilatéraux* ?) sur la pièce de base ne s'est pas avérée possible. Cependant, elle m'a permis de trouver un autre octomobile.



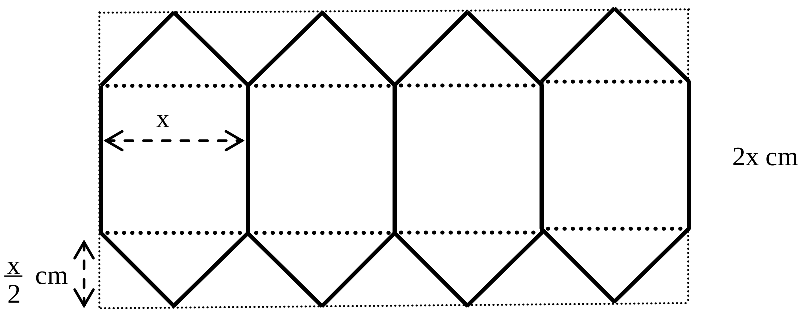
Voici les quatre pièces de base. (deux à deux identiques)
Découper sur le trait continu extérieur aux figures. Plier selon les pointillées
Coller sur les surfaces pointées 

[4] Voir la brochure de l'IREM de Dijon.

Enfin, une autre piste consiste en la résolution d'un problème qui pourrait donner lieu à une recherche en cycle III.
"Fabriquer un octomobile le plus grand possible dans une feuille de format A4.
On prendra un nombre entier de centimètres.

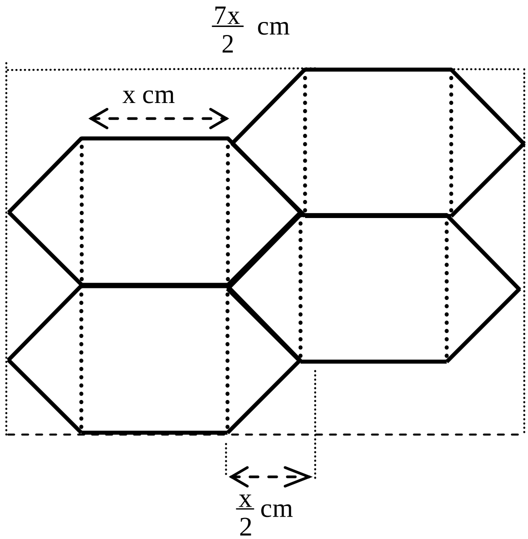
Voici quelques indices de solution :

Proposition 1



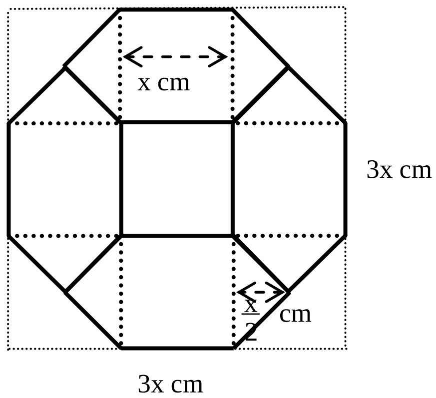
Encadrement par un rectangle de 4x x 2x

Proposition 2



Encadrement par un rectangle de $\frac{7x}{2} \times \frac{5x}{2}$

Proposition 3



Encadrement par un rectangle de 3x x 3x

La solution étant demandée en un nombre entier de centimètres, la proposition 1 donne x = 7 cm, alors que la proposition 2 donne x = 8 cm et la proposition 3 donne 7 cm. La deuxième proposition est donc la meilleure.

Annexe 1 **FICHE DE FABRICATION DE L'OCTOMOBILE**

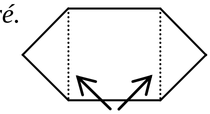
1. Matériel

- *Bristol quadrillé ou blanc*
- *Crayon de papier*
- *Paire de ciseaux…*
- *Règle.*
- *Compas (**si on trace sur bristol blanc)***
- *Colle*

2. Fabrication

- Tracer quatre figures de base identiques en s'aidant du quadrillage.
- Décrire la figure de base :

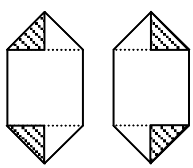
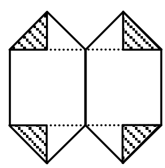
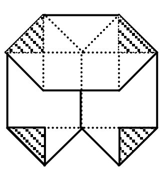
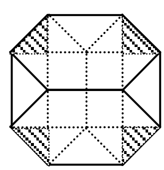
La figure de base est un hexagone non régulier. Il est formé d'un carré et de deux triangles isocèles rectangles.
Le côté du carré mesure 4 cm et la base du triangle mesure aussi 4 cm. Les triangles sont adjacents à deux côtés opposés du carré.



Plis à marquer

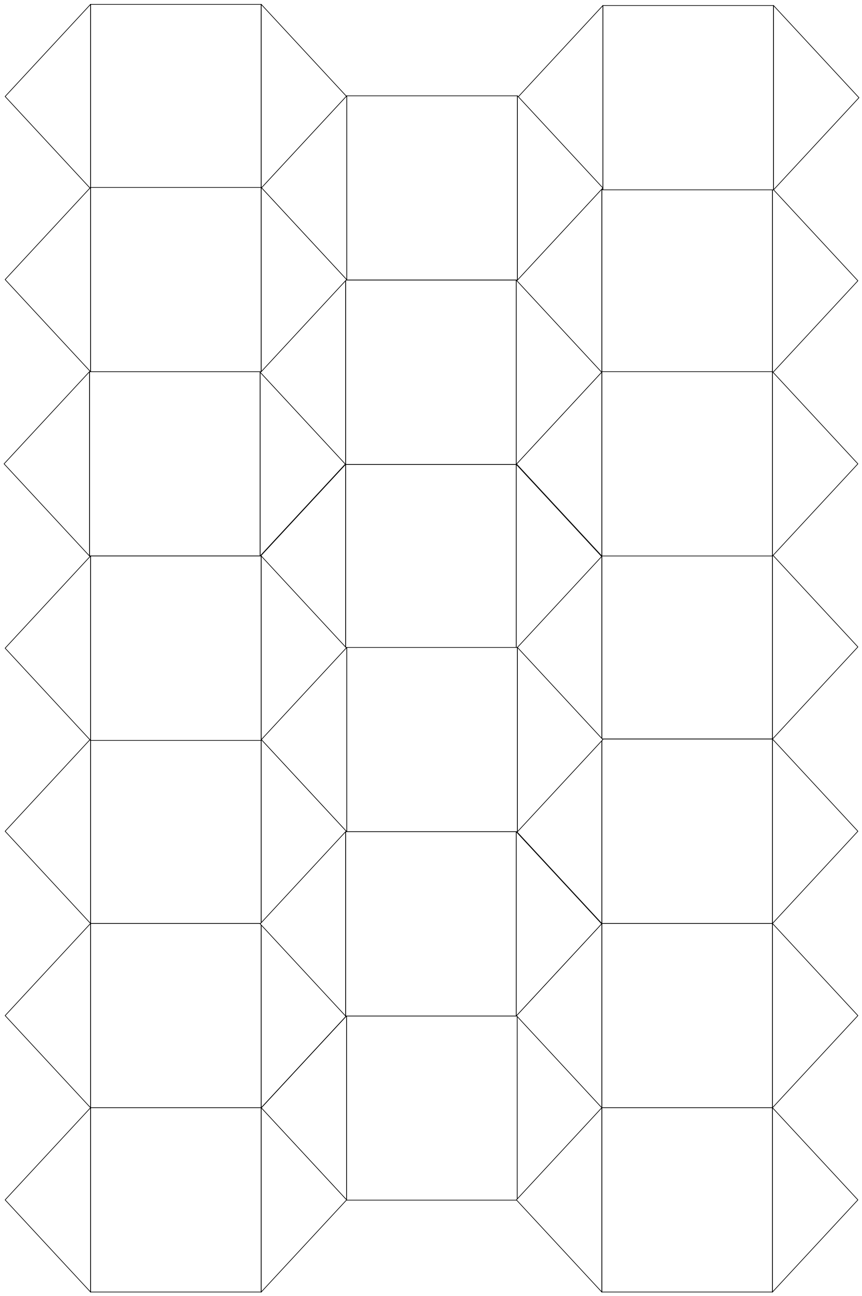
- Découper ces quatre figures et plier selon les pointillés

3. Assemblage

Première étape : *Disposer deux pièces de base verticalement.* *Disposer la colle sur les parties hachurées* 	**Deuxième étape** : *Mettre côte à côte deux pièces* 
Troisième étape *Poser une troisième pièce dessus comme indiqué par la figure et appuyer. Attention que rien en bouge !* 	**Quatrième étape** *Poser la quatrième pièce comme indiqué sur la figure et appuyer. Attendre que la colle soit bien sèche. Vous pouvez maintenant jouer avec l'octomobile.* 

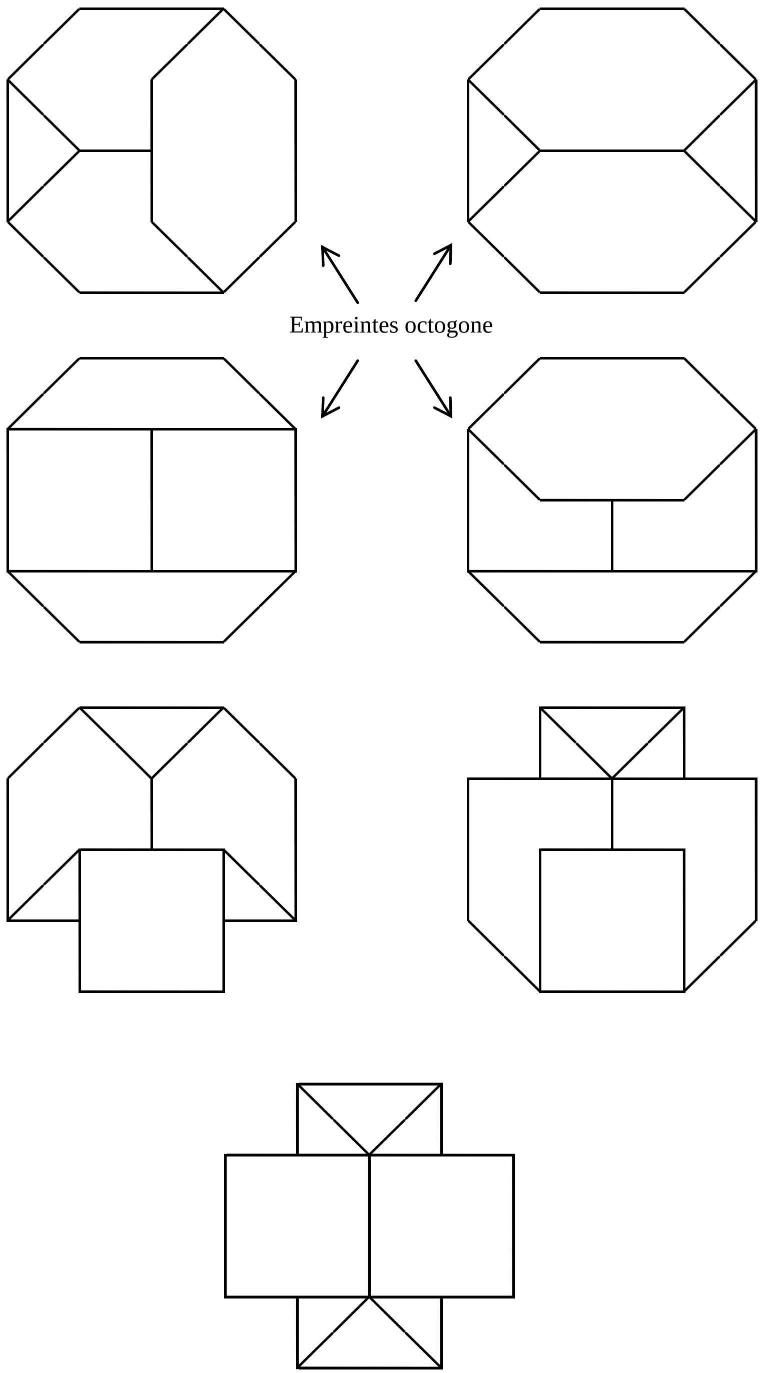
Annexe 2

PAVAGE



Annexe 3

LES DIFFÉRENTES POSITIONS DE L'OCTOMOBILE



Epistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie

Catherine Houdement - Alain Kuzniak

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Cet article, présente une réflexion globale sur l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. Il s'interroge notamment sur le sens et la cohérence à donner à cet enseignement. Il propose de fonder cette cohérence sur une approche épistémologique de la nature de la géométrie et des relations entre la géométrie et la notion d'espace.

I - Position du problème.

I.1 Un vieux débat

L'enseignement de la géométrie a toujours tenu une place à part dans l'édifice des mathématiques. Il a suscité des polémiques sur sa nature et ses formes d'enseignement, et cela non seulement chez les spécialistes des mathématiques, mais même dans les sphères politiques responsables des contenus d'enseignement.

Illustrons notre propos par un débat à la chambre des députés le 29 avril 1833, entre M.Guizot, ministre de l'instruction publique, et d'autres députés, débat qui porte sur la rédaction des contenus de l'instruction primaire et primaire supérieure. Des avis différents se manifestent d'une part sur la nécessité d'un enseignement des éléments de la géométrie aux instituteurs et d'autre part sur la différence entre dessin linéaire[1] et éléments de géométrie (au sens d'Euclide). Le débat oscille entre la nécessité d'enseigner les fondements avant de passer aux applications pratiques (les tracés) ou bien l'enseignement préalable des savoir-faire pratiques, accessibles à tous, pour garder l'enseignement des fondements pour plus tard (éventuellement). Notons ces deux citations :

“ Les éléments de géométrie sont le principe, le dessin linéaire n'est que l'écriture de la géométrie ; il faut dire éléments de géométrie, dessin linéaire, arpentage et autres applications ” (M de Tracy, député).

[1] Dessin linéaire : tracé aux instruments des lignes droites, des parallèles, des perpendiculaires, des courbes, des figures, des polygones inscrits ; division des lignes ; solides, usage de l'échelle, perspectives...Le tout sans essai de fondement, ni de justification théorique

“ Le dessin linéaire ne suppose pas la connaissance de la géométrie, c’est une chose purement mécanique ; l’on interdit même aux enfants qui apprennent le dessin de se rendre compte de ce qu’ils font ”. (M de Laborde, député).
Un autre débat met particulièrement en scène la géométrie. Doit-on enseigner des éléments de raisonnement (et donc des éléments de géométrie) aux enfants du peuple et à leurs enseignants issus des mêmes milieux sociaux ? Ou doit-on seulement leur enseigner des savoir-faire pratiques liés à l’arpentage ou aux problèmes concrets de mesure de l’époque ? Témoin de ces hésitations, la géométrie disparaîtra de l'enseignement en France (loi Falloux 1850) pour réapparaître quelques années plus tard.

I.2 Aujourd’hui

Les mêmes oppositions réactualisées s’exercent sur la formation actuelle en géométrie des professeurs d’école et rendent cette formation particulièrement problématique.
En effet on assiste à ce niveau à un phénomène de double évacuation de la géométrie :

- La tendance concrète tend à réduire la géométrie à une appropriation de connaissances spatiales basées sur la manipulation de différents matériels. Les objets de cette géométrie sont situés dans le monde 1 de Popper K. (1972), celui des objets physiques et matériels.
- La tendance abstraite fait évoluer la géométrie (des mathématiques en général) vers une étude des structures (groupe, espace vectoriel, programme d'Erlangen de Klein 1872) et regroupe des secteurs "anciens" par analogies structurales ; dans cette conception, la géométrie élémentaire n'existe plus en tant que telle ; elle n'est plus qu'une partie de l'algèbre linéaire. Or l'algèbre linéaire n'est pas un objet d'étude mathématique de l'école (ni des professeurs d'école). Cette fois, il s’agit clairement d’une géométrie insérée dans le monde 3 de Popper, celui des figures idéales et des théories.

La première difficulté de l'enseignement de la géométrie aux professeurs d'école provient des différentes conceptions de la géométrie qui apparaissent au cours de la formation des étudiants. Nous reviendrons sur cette question mais nous pouvons affirmer grossièrement que nos étudiants, avant leur entrée à l’IUFM ont généralement suivi des cours de géométrie de “ type Lycée ou Université ”et auront à enseigner une géométrie de type différent, pour faire bref disons de “ type école ”.
Le second problème est celui de la définition et même de l'existence de cette géométrie de “ type école ”, compte tenu du rôle du raisonnement dans l’enseignement. Certains auteurs pensent que sans démonstration, il n'y a pas de géométrie ; or les capacités de l'élève de l'école ne lui permettent pas d'accéder à cette maîtrise bien calibrée du raisonnement. Donc la géométrie de l'école n'est au mieux qu'un ensemble de recettes (... de la cuisine !).
Les conséquences de ces conceptions vont se faire sentir dans les centres de formation (I.U.F.M.) des enseignants. En effet, s'il n'y a pas de véritable

géométrie à l'Ecole Elémentaire, faut-il continuer à enseigner la géométrie en formation des maîtres du premier degré ? De même si la géométrie de l'école se réduit à un ensemble de recettes, ne vaut-il pas mieux laisser les futurs maîtres faire leur propre cuisine et restaurer le vieux clivage entre dessin linéaire et éléments de géométrie ?

II - Un exemple de cadre conceptuel.

Il nous semble qu'une grande partie de la confusion qui règne dans l'enseignement autour de la géométrie résulte de la diversité de points de vue qui renvoient finalement à des conceptions et à des approches méthodologiques différentes. Or, dans une perspective de formation d'enseignants il est nécessaire de s'interroger : " *pourquoi faire de la géométrie ?*" et *" pourquoi faire faire de la géométrie ?*". Cela suppose un détour épistémologique mais ce détour peut envisager de multiples chemins. Dans le cadre de notre étude qui concerne des enseignants apprenant les mathématiques pour les enseigner ensuite à des élèves, il nous semble important de privilégier les approches épistémologiques qui valorisent la relation entre le sujet et l'objet de connaissances.
Nous avons choisi comme première approche des problèmes posés précédemment d'utiliser les travaux de Ferdinand Gonseth en les interprétant en fonction de notre position de formateur d'enseignants.
Gonseth est né en 1890 dans le Jura bernois et est mort à Lausanne en 1974. C'est un mathématicien, contemporain de Piaget (1896-1980) qu'il a côtoyé et dont il a dit :"Piaget n'a aucun sens des mathématiques. Tout ce qu'il en dit, c'est moi qui le lui ai appris ...". Gonseth a été presque aveugle assez jeune. Il a été Professeur à l'école polytechnique de Zurich. Il a également formé pendant deux ans des enseignants, ce qui a donné naissance à son ouvrage *Les fondements des mathématiques* (1926 Editions Blanchard). Il est surtout connu pour ses écrits en philosophie des sciences. Parmi ses autres ouvrages traitant de la géométrie citons notamment :

1936 *Les mathématiques et la réalité*, Editions Blanchard

1945-1955 *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Lausanne

Un colloque a été consacré en 1990 à Gonseth dont les actes sont parus sous le titre suivant :

1992 *Espace et horizon de réalité*, colloque sur GONSETH, par Panza et Pont, Editions Masson

Gonseth intègre sa réflexion sur la géométrie dans le cadre plus vaste d'une réflexion sur la démarche scientifique. Son approche n'est pas historique mais dialectique et vise à mieux comprendre l'effort qui construit et fédère la géométrie dans son rapport à l'espace et au monde sensible. Pour cela, il dégage différentes synthèses dialectiques de la géométrie qui s'organisent précisément autour de trois piliers essentiels : intuition, expérience et déduction.

II.1. Intuition, expérience et déduction

Dans la perspective pédagogique qui est la notre, il importe de bien comprendre l'évolution et les rapports existants entre géométrie et réalité. Pour un sujet confronté à l'apprentissage de la géométrie, cette articulation passe par une meilleure définition des trois modes de connaissances de l'espace que constituent la déduction, l'intuition et l'expérience.
Nous allons maintenant préciser le sens que nous attribuons à ces trois termes en revisitant ces expressions. Puis nous développerons notre propre synthèse qui résulte d'une adaptation à notre sujet d'étude des travaux de Gonseth.

II.1.1. L'intuition.

Prendre en compte l'intuition nous semble fondamental dans l'approche de la géométrie. Mais le premier embarras que l'on éprouve en mettant l'accent sur l'intuition provient de la difficulté à définir précisément ce qu'englobe ce terme. A moins d'admettre que tout le monde a une intuition de ce qu'est l'intuition. Mais il nous importe ici d'être opératoire.
L'approche de l'intuition relève, sans doute, de différents champs de connaissance comme la logique ou la psychologie. Nous suivrons Gonseth lorsqu'il reprend l'idée kantienne de forme intuitive comme forme a priori de la connaissance de l'espace. L'intuition apparaît comme le réceptacle interprétatif de nos sensations, elle structure la pensée en terme d'évidence. L'intuition peut se caractériser alors comme une prise de contact immédiate, directe, concrète avec son objet. Mais ce contact direct réalise en même temps la compréhension la plus intime avec son objet, le saisissant dans son essence et dans sa singularité. L'intuition s'opposerait ainsi à tout ce qui est pensée discursive, "*chaîne de raisons ", détours de la démonstration, mise en œuvre formelle, application minutieuse d'une méthode*.
Dans notre conception, l'intuition peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances a posteriori. La contradiction n'est qu'apparente : il faut voir l'intuition structurée au niveau de l'individu en un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions. Certaines de ces strates seraient communes à tous les individus ; c'est le travail des psychologues de les mettre en évidence (théorie des stades), d'autres dépendraient de la pratique du sujet et seraient dépendantes du passé scolaire ou professionnel.

II.1.2. L'expérience.

L'expérience permet d'approcher la géométrie en restant proche de l'action et d'une certaine réalité physique. La nature de l'expérience géométrique va dépendre des objets sur lesquels elle s'exerce.
Ainsi dans un premier cas, faire une expérience en géométrie ce sera tenter de vérifier matériellement ce que l'on avance. On montrera par exemple que la somme des angles intérieurs d'un triangle est un angle plat en rapprochant des gabarits des trois angles du triangle. Pliages, découpages et constructions à la règle et au compas constituent la base de cette approche expérimentale qui peut

déjà être développée à l'école. Cette approche se développe dans un espace mesurable, grâce à la perception ou à des instruments.
Aux moyens traditionnels d'expérimentation s'ajoutent désormais les possibilités offertes par l'informatique avec certains logiciels (Cabri-géométre ou Logo). Il s'agit ici de simulations qui opèrent sur des objets virtuels. Ainsi peut-on découvrir certaines intersections de droites, certains alignements de points ou des lieux géométriques. Les fractales sont l'illustration la plus contemporaine de ce lien entre géométrie et expérience par l'intermédiaire de la simulation.
Enfin une dernière forme d'expérience peut être mentale, *experimental thought*, elle consiste à mettre en œuvre mentalement des déplacements, des découpages sans les effectuer réellement.

II.1.3. La déduction ou ratio.

On peut définir la déduction en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, elle consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences. La déduction permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure. Elle est basée sur le raisonnement logique et elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. Nous employons le mot **déduction** mais l'usage que nous en faisons est plus vaste et proche du raisonnement dans son ensemble.
Le pôle déductif et logique est certainement le plus naturel quand on pense à la géométrie. Certains ne justifient le maintien de l'enseignement de la géométrie que pour les apports logiques qu'elle est censée apporter. Mais il est important de ne pas réduire ces aspects déductifs à la démonstration basée sur des axiomes bien définis et en nombre réduit. L'enfant peut aussi faire des déductions et prouver des affirmations déduites de ses observations et basées sur des constructions. C'est graduellement qu'il lui sera demander d'argumenter à partir de certaines propriétés des figures qui auront été définies avec lui. Ces figures deviennent alors le support adapté pour guider l'intuition mais elles ne suffisent plus à fournir une preuve. Nous illustrerons plus loin ce point de vue.

II.1.4. Articulation entre intuition, expérience et déduction.

Chez Gonseth, l'intuition et l'expérience “ constituent le pôle empirique de la géométrie, la déduction participe du pôle théorique ”. Gonseth illustre le lien entre ces trois aspects par cette affirmation : “ être géomètre c'est ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement issu de l'expérience et le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement ”.
Ainsi les élèves réussissent à tracer un "vrai" triangle dont les dimensions sont 8, 6 et 14. Le résultat de l'expérience est invalidé par la déduction (inégalité triangulaire) qui permet de conclure à la nature "aplatie" du triangle en question.
Enfin, René Thom illustre la nécessaire relation entre intuition et déduction par cette métaphore très audacieuse : “ La déduction est à l'aveugle ce que l'intuition est au paralytique, l'une avance et ne voit pas, l'autre voit mais n'avance pas ”.

II.2. Nos propres synthèses.

Gonseth propose trois synthèses dialectiques de la géométrie qui réorganisent les trois composantes précédentes. Nous avons repris son idée et l'avons transformée pour l'adapter à notre propos. La synthèse que nous présentons nous est personnelle et ne doit pas être comprise comme une présentation fidèle des idées de Gonseth.

II.2.1. La géométrie naturelle ou la confusion entre la géométrie et la réalité.

La géométrie naturelle a pour source de validation la réalité, le sensible. Elle comprend les trois aspects, intuition, expérience, déduction, mais la déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas naturelle ; il s'agit plutôt de celle de Clairaut[2] (ou dans certains cas de Legendre) où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où on ne doit pas encombrer l'esprit en démontrant des choses évidentes.
Cette idée de preuve dynamique et mécanique s'oppose aux démonstrations statiques de la géométrie axiomatique, mais elle semble par contre très proche de la perception que peut avoir l'enfant de l'espace.
Une autre preuve peut aussi résulter de l'usage du pliage.
Ainsi que ce soit par pliage ou par "mouvement virtuel", la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est le raisonnement de type constructif qui est fréquent dans la résolution de problèmes.

II.2.2. La géométrie axiomatique naturelle. La géométrie comme schéma de la réalité.

Dans la synthèse axiomatique euclidienne, les aspects “ non rigoureux ” et les appels à l'intuition de l'espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus précis possible. Gonseth pose un certain de nombre de questions sur cette géométrie. Quelle est la place de l'axiomatique ? Peut-on choisir n'importe quel type d'axiomes ? Quelle est la place de la réalité quand on axiomatise ?
Si l'axiomatisation est une formalisation, mais elle n'est pas nécessairement formelle, la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique. La deuxième synthèse dialectique propose une géométrie qui n'est pas réduite au naturel, mais qui conjugue les notions d'horizon de la réalité, de schéma et de modèle. Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu'elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité.
La géométrie euclidienne classique est basée sur ce pas de côté, mais tout l'effort de schématisation est dissimulé et reste implicite.

---
[2] Clairaut, (1741) Éléments de géométrie.

II.2.3. La géométrie axiomatique formaliste. Indépendance de la géométrie et de la réalité.

Cette fois, à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par la rude affirmation de Wittgenstein qui clôt le débat entre géométrie et réalité :

" Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité."

Dans l'enseignement, cette conception a permis d'introduire une géométrie élémentaire basée sur l'algèbre linéaire dont l'espace sous-jacent est l'espace R^3 muni d'un produit scalaire. Poussant jusqu'au bout les conséquences de cette vision algébrique de la géométrie Dieudonné peut affirmer dans l'introduction de son traité : " Je me suis permis de n'introduire aucune figure dans le texte, ne serait-ce que pour faire voir que l'on s'en passe fort bien. ".

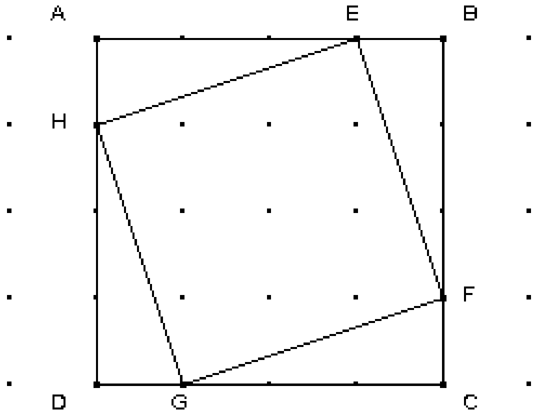
II.2.4. Notre synthèse dialectique.

Plutôt que de voir l'évolution de la géométrie comme une suite de ruptures irréconciliables, nous adoptons, à la suite de Gonseth, une vision unificatrice de la géométrie grâce à cette idée de synthèse dialectique évolutive entre divers pôles. Ce point de vue nous parait fondamental dans une perspective de formation des maîtres. La géométrie peut contenir les trois pôles (intuition, expérience, déduction) ; il y a malaise si l'un des pôles est perdu (exemple hypertrophie du pôle déductif).

II.3. Un exemple illustratif.

La figure suivante, sur papier pointé, est proposée aux élèves.

La question porte sur la nature du quadrilatère EFGH. Dans un premier temps les



seules hypothèses (on verra qu'elles peuvent dépendre du type de géométrie dans laquelle on souhaite implicitement que l'élève se place) sont la nature du support (réseau à mailles carrées) et le fait que les points soient des nœuds effectifs de ce réseau.

Telles quelles les hypothèses restent floues pour un vrai "mathématicien".
Les hypothèses à saisir sont-elles

- hypothèses 1 : ABCD est un carré, E, F, G, H quatre points situés sur les quatre côtés du carré pris dans cet ordre [AB], [BC], [CD] et [DA],
- hypothèses 2 : les hypothèses 1 et aussi les vecteurs AE et CG puis DH et BF sont égaux en longueur et opposés deux à deux
- hypothèses 3 : hypothèses 2 et aussi AE = 1/4 AB

Il existe des réponses relevant de chacune des géométries définies précédemment

Dans le cadre de la géométrie naturelle (géométrie I).

Le seul dessin permet de prendre position à l'intérieur de la géométrie I. On peut tout voir et tout lire sur la figure. Le problème se construit en suivant les étapes de construction de la figure : d'abord un carré initial, puis de segments intérieurs particuliers [EF], [FG], [GH] et [HE], apparaît alors une nouvelle figure EFGH. Quelle est sa nature ?
La première solution (**Solution 1**), purement <u>intuitive</u>, indique que EFGH est un carré, ça se voit, il a les cotés égaux et ses angles sont droits.
Cette appréhension intuitive de la figure sera à la base de toutes les solutions qui vont suivre. Elle est à rapprocher de la construction sur un géoplan ou planche à clous d'un carré avec un élastique. La seule justification donnée par les enfants est purement perceptive et intuitive : on allonge plus ou moins l'élastique. Elle pose parfois des problèmes lorsque des enfants ne sont pas d'accord sur la conservation des longueurs.
Une solution (**Solution 2**) basée sur <u>une expérience</u> va passer par la vérification de l'égalité des cotés avec un compas et de l'orthogonalité des cotés grâce à une équerre. On retrouve ici l'idée de Gonseth d'une première expérience liée à l'idée d'un espace mesurable. L'expérience doit rester proche de l'intuition pour garantir des résultats cohérents.
La solution (**Solution 3**) qui suit lie <u>déduction et expérience</u> dans le monde 1 de la géométrie naturelle : par superposition du gabarit d'un triangle rectangle égal à AEH, les élèves vérifient leur idée que l'angle AHE est égal à BEF. Ils utilisent une expérience antérieure qui leur avait permis de montrer que la somme des angles d'un triangle valait 180° pour en déduire que HEF est un angle droit.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II).

Cette géométrie doit s'appuyer sur des hypothèses énoncées et non lues sur la figure : par exemple les hypothèses 2. Le texte de départ doit dégager de la figure ce qui peut y être lu (sous-entendu ce qui n'est pas écrit ne doit pas y être lu, mais déduit).
Commençons par une solution mixte (**Solution 4**) courante chez les élèves. Ils vérifient l'égalité des quatre côtés avec la règle graduée ou le compas, puis

constatent l'existence d'un angle droit avec l'équerre, enfin ils concluent que "EFGH est un carré comme losange avec un angle droit" . Cette solution est à mi-chemin entre la géométrie naturelle, expérience, et la géométrie axiomatique naturelle (puisque la conclusion est fournie par une définition-axiome).
Cette preuve présente un défaut de cohérence, puisque certains résultats sont vérifiés sur la figure, et d'autres sont montrés comme connaissances d'une certaine axiomatique. Notons que ce défaut de cohérence est d'ailleurs très courant dans les productions des élèves de collège, peut-être parce que justement les cadres respectifs des géométries où on se place pour la preuve ne sont jamais suffisamment explicités.
Envisageons maintenant une solution (**Solution 5**) homogène. L'intuition nous dit que les triangles AEH, BFE, CFG et DHG sont superposables. Confirmons cette intuition grâce à une démonstration : par hypothèse AE=BF=CG=DH et EB=FC=GD=HA et par le théorème de Pythagore, les côtés HE, EF, FG et GH sont de même longueur. Notre intuition est confirmée.
Donc les angles AEH, BFE, CGF et DHG ont même mesure, qui correspond au complémentaire des angles AHE, BEF, CFG et DGH. Les angles du quadrilatère sont donc droits (comme dernière partie d'un angle plat)
Le quadrilatère EFGH est donc un carré.
Voici une autre solution (**Solution 6**).
Les segments HE, EF, FG et GH sont des diagonales de rectangles (par exemple AEE'H). par déduction des égalité des longueurs de l'hypothèse, les rectangles sont superposables, donc les diagonales ont même longueur et font le même angle avec le côté correspondant. On obtient déjà que EFGH est un losange.
On considère la rotation de centre E et d'angle (EH, EA) : le point H se transforme en H' sur [EA) et simultanément F se transforme en F' sur la perpendiculaire à (AB) qui passe par E
F se transforme en F' sur la perpendiculaire à (AB) qui passe par E. G se transforme en G'.
On obtient un losange EF'G'H' avec un angle droit. C'est donc un carré. Par suite EFGH est aussi un carré.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III).
L'énoncé est donné par exemple avec les hypothèses 2.
Dans cette géométrie qui utilise le substrat euclidien au sens du produit scalaire, la première étape consiste à écrire les coordonnées des vecteurs EF, FG, GH et HE issues de la perception (seule concession nécessaire à l'intuition) et des hypothèses. Ensuite le calcul des normes des vecteurs et du produit scalaire permet de montrer que EFGH est un carré. On peut s'aider de la figure, mais on ne peut pas utiliser des données évidentes, comme les égalités des longueurs EF, FG, GH et HE.

Conclusion.
L'existence de ces différentes façons d'envisager un même problème est une source constante de difficultés dans l'enseignement de la géométrie. De plus, elle nous semble spécifique de cette partie des mathématiques élémentaires. En effet,

prenons le problème concret suivant : 9 objets coûtent 15 F, quel est le prix de 15 objets ? La résolution de ce problème passe par l'utilisation d'un modèle, celui de la proportionnalité. Il existe plusieurs procédures de résolution, mais un seul choix de modèle (tout autre modèle contient la proportionnalité).
Prenons maintenant un problème géométrique, dans quel paradigme se placer pour le résoudre : géométrie I , II ou III ? Si le problème est théorique au départ, on reste dans la géométrie théorique (II ou III). Dans l'exemple que nous venons de traiter, la nécessité d'expliciter les hypothèses place la résolution en géométrie II ou III. Par contre si la question à résoudre se présente dans le monde physique ou si même si elle l'évoque, il existe un véritable choix de traitement : reste-t-on dans la géométrie I, ou passe-t-on dans la géométrie II ?
En résumé, il est en général demandé de traiter un problème dans une géométrie de niveau égal ou supérieur (géométrie I, II ou III) à celui dans lequel le problème est posé. Mais cette demande n'est pas explicitée, il n'existe même pas de mot pour dire, en général, ce niveau de géométrie.
Cette distinction de niveaux est pourtant reconnue dans certains problèmes, ainsi la construction effective d'un pentagone ou d'un heptagone régulier convexe se place dans la géométrie I (avec de l'intuition, de l'expérience et de la déduction notamment pour travailler sur des mesures approchées d'angles), mais le problème de la constructibilité (à la règle et au compas) se place en géométrie II ou III. Pour ces problèmes de reproduction de figures, il existe bien deux expressions différentes pour désigner le paradigme dans lequel on se place : construction et constructibilité. Par contre, et c'est un peu l'objet de nos écrits, il n'existe pas, pour la géométrie en général, de double ou triple expression pour désigner le paradigme dans lequel on travaille.
Pour nous, l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques mais évoluant dans le temps peut constituer une source de clarification pour les futurs enseignants. Elle doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec une conception précise de la géométrie qu'il doivent enseigner à leurs élèves.

Conclusion générale

Nous avons tenté de poser différemment le problème de l'enseignement de la géométrie en fédérant celle-ci principalement autour des trois modes d'approche de connaissance que sont l'intuition, l'expérience et la déduction. En nous inspirant de Gonseth, nous avons dégagé trois synthèses possibles qui permettent d'articuler de manière cohérente la progression globale de l'enseignement de la géométrie : la géométrie naturelle (géométrie I), la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II) et la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III). Cette dernière, sans doute à cause du niveau d'enseignement étudié est restée à l'arrière-plan.
Nous avons appliqué à l'analyse de manuels de l'école élémentaire et aux sujets de concours de recrutement d'enseignants. Cette analyse nous a permis certains constats :

- Il n'y a pas à l'école de cohérence au sens de notre synthèse, il n'y a que des formes appauvries de la géométrie. Le pôle déductif est réduit à sa plus simple expression. Il s'agit là d'une forme de dénaturation simplificatrice que nous avions déjà pointée dans notre étude des stratégies de formation des enseignants.

- Dans les sujets de concours, il existe un flou sur la nature du contrat attendu des candidats et espéré par les formateurs

Ce constat est renforcé et expliqué par l'analyse des conceptions des différents acteurs du systèmes qui se situent implicitement dans différents types de géométrie. Cette conception paraît diffuse et peu cohérente.

Pour nous, l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques mais évoluant dans le temps peut constituer une source de clarification pour les futurs enseignants. Elle doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec une conception précise de la géométrie qu'il doivent enseigner à leurs élèves.

Cette clarification doit permettre d'éviter le type de confusion rapportée par Nimier[3] et qui est due à la juxtaposition de géométries différentes où le rôle respectif de l'intuition, de l'expérience et de la déduction ne sont pas les mêmes.

> "*On nous avait donc fait ça avec les vieux bouquins que vous trouverez de cette époque là, les cas d'égalité des triangles avec calque, etc… Et puis, on nous avait donné après un problème, alors moi j'ai fait le problème par la même méthode, c'est-à-dire : je prends un calque, je fais ci, je fais ça, j'ai répété le discours qu'on avait fait pour les cas d'égalité des triangles et mon prof m'a expliqué que c'est pas du tout ça qu'il fallait faire, que maintenant on avait les cas d'égalité des triangles et il fallait les appliquer et … démontre…, bon je ne sais pas pourquoi*."

Cependant de nombreuses questions restent en suspens même si l'on admet la pertinence de notre synthèse.

Notre cadre permet-il de donner une véritable cohérence de la géométrie à l'école ? Permet-il d'en faire un tout, préalable à celle du collège ? Permet-il réellement de favoriser l'articulation entre les différents cycles d'enseignement ? Enfin, comment sensibiliser les futurs enseignants à cette approche de la géométrie ?

[3] *Les modes de relation aux mathématiques* (Editions Méridiens-Klinsieck), 1988

Tableau général des différentes géométries

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et "figural concept"[4]	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration et lien entre les objets

[4] FISCHBEIN (1993) The Theory of Figural Concepts dans *Educational Studies in Mathematics* N°24 (2) pages 139-162.

Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1

Bernard Parzysz

Extrait du XXVIII ème colloque de la COPIRELEM – Tours 2001.

Cet article précise le rapport à la géométrie des PE. L'analyse s'appuie sur l'articulation Géométrie I/ Géométrie II que l'auteur définit dans la première partie de l'article.

<u>1- Le cadre théorique</u>

1.1 Un modèle synthétique

Le cadre théorique dans lequel se place la recherche menée actuellement à l'IUFM Orléans-Tours par le GReDiM résulte d'une synthèse réalisée à partir de recherches antérieures dans le domaine de l'enseignement de la géométrie[1].

a) Notre première référence est relativement ancienne, puisqu'il s'agit du modèle de P. van Hiele [van Hiele 1984], qui distingue cinq niveaux dans le développement de la pensée géométrique chez l'enfant que je rappelle brièvement :

- <u>niveau 0 (visualisation</u>) : les figures sont identifiées uniquement par leur aspect général;
- <u>niveau 1 (analyse</u>) : l'enfant commence à discerner les propriétés des figures, mais sans pouvoir encore les expliciter;
- <u>niveau 2 (déduction informelle</u>) : l'enfant peut établir des relations intra- et inter-figurales. Les définitions font sens, les résultats obtenus empiriquement sont souvent utilisés conjointement avec des techniques déductives;
- <u>niveau 3 (déduction formelle</u>) : la déduction est perçue comme outil de validation, à l'intérieur d'un système axiomatique; il en est de même du rôle respectif des notions primitives, des axiomes, des définitions, des théorèmes.

[1] Ce cadre théorique a déjà été exposé, de façon succincte, au précédent colloque de la COPIRELEM par Brigitte NICOLAS-LORRAIN [Nicolas-Lorrain 2000].

- niveau 4 (rigueur) : l'élève (l'étudiant) est capable de se placer dans différents systèmes axiomatiques (géométries non euclidiennes, par exemple) et de les comparer.

Comme on le voit, les niveaux 0 et 1 sont fondés sur les "figures" (au sens de "dessins" [Parzysz 1989]) : la géométrie correspondante est donc une géométrie "concrète", dont les objets sont matériels (dessins, maquettes, objets de la vie courante...), et dans laquelle l'argumentation s'appuie essentiellement sur des critères perceptifs. Au contraire, la géométrie des niveaux 3 et 4 est une géométrie "théorique", dont les objets sont conceptuels, et dans laquelle la seule argumentation acceptable est la démonstration.

Reste le niveau 2, qui constitue en quelque sorte le niveau-charnière entre ces deux types de géométrie, dans lequel la théorie est en train de se mettre en place chez l'élève -principalement sous l'effet de l'éducation-, en se construisant contre la perception, jusque-là acceptée. C'est le moment où apparaît le plus clairement le conflit entre le su et le perçu, que j'ai déjà étudié dans le cadre de la géométrie de l'espace [Parzysz 1989, Colmez & Parzysz 1993].

Cette distinction en niveaux, prise au pied de la lettre, risque cependant de laisser penser qu'un individu donné, à un moment donné de son développement, doit se situer à un niveau donné. Mais ce serait faire abstraction de la *situation* dans laquelle se trouve cet individu à cet instant, et qui peut jouer un rôle déterminant : on sait qu'un "expert" d'un domaine particulier peut ne plus se comporter en expert lorsqu'il est placé dans une situation non familière, même lorsqu'elle ressortit à son domaine d'expertise.

b) S'inspirant des idées développées par Ferdinand Gonseth dans "La géométrie et le problème de l'espace" [Gonseth 1945-1955], Catherine Houdement et Alain Kuzniak [Houdement & Kuzniak 1998] définissent trois types de géométrie qu'ils distinguent par les rapports qu'entretiennent intuition, expérience et déduction, et qu'ils dénomment respectivement *géométrie naturelle* (G1), *géométrie axiomatique naturelle* (G2) et *géométrie axiomatique formaliste* (G3). La première "confond géométrie et réalité" (comme dans les niveaux 0 et 1 de van Hiele) et la seconde est conçue comme un "schéma" de cette réalité (niveaux 2(?) et 3 de van Hiele); dans la troisième, enfin, on "coupe le cordon ombilical" avec la réalité (niveau 4 de van Hiele).

c) Dans un article récent, Michel Henry, opérant un parallèle entre probabilités et géométrie [Henry 1999], distingue lui aussi trois types de rapports à l'espace dans l'enseignement / apprentissage de la géométrie :

(i) la situation concrète ;

(ii) une première modélisation, consistant en *"l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants. (...) La description qui en découle est alors une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié."* (loc. cit. p. 28)

(iii) une mathématisation, qui s'opère à partir du modèle précédent.

A première vue, ce modèle présente de fortes analogies avec celui développé par Houdement-Kuzniak. Cependant, l'expression "géométrie <u>axiomatique</u> naturelle" que ceux-ci utilisent les distingue, puisque chez Henry la présence d'une axiomatique sous-jacente n'est pas indispensable dans la première modélisation, même si parfois *"(la) description peut être pilotée par ce que l'on peut appeler un* "regard théorique", *c'est-à-dire une connaissance de type scientifique s'appuyant sur des modèles généraux préconstruits"* (ibid). Cette "première modélisation" se placerait donc entre G1 et G2, et constituerait une étape intermédiaire précédant la construction de l'axiomatisation (correspondant *grosso modo* au niveau 2 de van Hiele).

D'autre part, la terminologie de Houdement-Kuzniak semble établir une sorte de tuilage -donc de continuité- entre les trois "géométries" ainsi définies : G1 et G2 ont en commun d'être "naturelles", tandis que G2 et G3 sont toutes deux "axiomatiques". G2 apparaît alors comme une géométrie intermédiaire entre G1 et G3. Il semble cependant que l'articulation entre G1 et G2 -de nature épistémique- est plus fondamentale que celle qui sépare G2 et G3; en fait, elle correspond en quelque sorte au niveau 2 de van Hiele, lequel se situe au cœur de la question de la modélisation géométrique. En effet, dans G1 les objets de la géométrie sont encore des éléments physiques idéalisant plus ou moins des situations de la "réalité" (maquette d'une pièce d'habitation, dessin d'un champ...), et la validation reste d'ordre perceptif (instrumenté ou non). Au contraire, dans G2 comme dans G3, les objets en jeu sont des éléments situés hors de toute réalité (mais *représentés* par des objets physiques), la validation des affirmations étant d'ordre déductif : *"l'élève est invité à abandonner un contrôle empirique de ses déclarations au profit d'un contrôle par le moyen de raisonnements"* [Berthelot & Salin 1992, p. 32]. La distinction de G2 par rapport à G1 et à G3 tient alors essentiellement à deux aspects :

1° G2 est une *modélisation de l'espace "physique"* (c'est-à-dire de G1), alors que G3 ne fait plus référence à aucune "réalité";

2° G2 est en quelque sorte une G3 *incomplètement axiomatisée*, ou plutôt une géométrie dont les "axiomes" (canoniques ou non) sont partiellement implicites (que ce soit de façon consciente ou non)[2]. Plus précisément, G2 s'appuie sur des raisonnements déductifs opérant à partir d'un certain nombre de faits considérés comme "évidents"; en cela elle est analogue à G3 (version "euclidienne"). *Grosso modo*, à certains endroits, là où G3 comporterait un axiome, et éventuellement des définitions et des théorèmes qui en découlent, G2 se contente d'un "on constate que" (qui peut même être implicite). La perception est encore présente, mais elle est censée servir uniquement à construire une théorie de l'espace perçu, et non plus -tout au moins en principe- à appuyer une argumentation (même si les "on constate que" contredisent *de facto* cette remarque).

[2] Même si on n'y utilise pas le terme "axiome" (on lui substitue en général le mot "propriété", terme "passe-partout" qui en fait obscurcit plus qu'il n'éclaire).

d) En suivant les distinctions faites ci-dessus, nous proposons un essai de synthèse des modèles précédents, comportant en particulier une articulation légèrement différente de celle proposée par Houdement-Kuzniak pour les raisons évoquées plus haut. Les éléments sur lesquels repose ce modèle sont, d’une part la nature des objets en jeu (physique *vs* théorique), d’autre part les modes de validation (perceptif *vs* logico-déductif). Partant de la "réalité", ou encore du "concret" (G0), qui n'est pas géométrique, nous opposerons d'une part une géométrie non axiomatique, s'appuyant sur des situations concrètes[3] qui sont idéalisées pour constituer le "spatio-graphique"[4] (G1) et d'autre part une géométrie axiomatique, l'axiomatisation pouvant être explicitée complètement (G3) ou non (G2), et la référence au "réel" étant facultative pour G2 (mais pas pour G1); dans le dernier cas, nous parlerons de géométrie *proto-axiomatique*. La situation peut alors être schématisée par le diagramme ci-après :

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">géométries non axiomatiques</td><td colspan="3">géométries axiomatiques</td></tr>
<tr><td>type de géométrie</td><td colspan="2">géométrie concrète (G0)</td><td colspan="2">géom. spatio-graphique (G1)</td><td colspan="2">géom. proto-axiomatique G2)</td><td>géométrie axiomatique (G3)</td></tr>
<tr><td>objets</td><td colspan="4">physiques</td><td colspan="3">théoriques</td></tr>
<tr><td>validations</td><td colspan="4">perceptives</td><td colspan="3">déductives</td></tr>
<tr><td>van Hiele</td><td>niveau 0</td><td colspan="2">niveau 1</td><td colspan="2">niveau 2</td><td>niveau 3</td><td>niveau 4</td></tr>
</table>

Du point de vue didactique, la distinction entre ces géométries apparaît dans les *ruptures de contrat* qui se produisent entre l'une et l'autre, et plus précisément:

- passage de G0 à G1 : matérialité des objets en jeu (bois, carton, paille...)

[3] D'après le Petit Larousse (éd. 2000): "1. qui se rapporte à la réalité, à ce qui est matériel (...) 2. Qui désigne un être ou un objet réel".
[4] Qualificatif dû à Colette Laborde (voir par exemple [LABORDE & CAPPONI 1995]).

- passage de G1 à G2 : épaisseur des traits, des points; justification par le perçu
- passage de G2 à G3 : propriétés jugées "évidentes".

En se référant à la théorie anthropologique du didactique [Chevallard 1999], on peut considérer G1 et G2 comme deux praxéologies qui, pour un même type de problèmes (comme par exemple les problèmes de construction sous des contraintes fixées) se distinguent à la fois au niveau des *techniques* , des *technologies* et des *théories* :

∗ pour G1, les *techniques* utilisées pour la résolution de ce type de tâches sont essentiellement liées à l'usage d'instruments tels que règle graduée, compas, équerre, rapporteur (perception instrumentée). Les *technologies* (mode de validation) font également usage des instruments, qui sont alors utilisés pour contrôler le dessin construit par la constatation visuelle de coïncidences ou de superpositions : graduations de la règle, pointes du compas, bords de l'équerre, rayons du rapporteur ... Le *niveau théorique* -absent dans la pratique usuelle- serait une théorie relative à la précision ou à l'économie des tracés (qui est effectivement attestée au début du 20^{e} siècle).

∗ pour G2 et pour le même type de tâches, les *techniques* concernent des objets géométriques (droites, points, segments, cercles...) dont l'existence est assurée par des énoncés (définitions, axiomes, propriétés admises...), et l'usage des instruments permet d'en obtenir des représentations (dessins). Les *technologies* correspondantes consistent en la production d'un discours de type déductif appliqué aux données de l'énoncé et utilisant des éléments de G2 rencontrés antérieurement. Le *niveau théorique* est constitué par une géométrie axiomatique de type G3 (la géométrie affine euclidienne). Comme nous l'avons dit cependant, une technique très générale dans G2 est la réalisation et l'étude de "figures" (dessins) sur lesquelles on fera éventuellement agir des techniques de G1 dans le but de rechercher des indices qui permettront d'aboutir à une démonstration.

En ce qui concerne les institutions dans lesquelles vivent ces différentes géométries, on peut dire que, de façon très grossière, G1 correspond à l'école élémentaire, tandis que G2 correspond au lycée et G3 à l'université. Mais qu'en est-il pour le collège ? En fait, ce sont essentiellement les "figures", objets communs à G1 et G2, qui mettent ces deux géométries *en concurrence* chez des non-experts comme le sont les élèves de collège. Plus précisément, pour un élève donné confronté à une tâche de géométrie :

- si elle est perçue comme relevant de G1, elle conduira à s'appuyer sur des techniques de G1 (réalisation d'une "figure" + comparaison, superposition, mesurage...)

- si elle est perçue comme relevant de G2, elle conduira à s'appuyer sur des techniques de G2 (réalisation d'une "figure" + démonstration).

Notons enfin que G1 et G2 sont susceptibles de se contrôler l'une l'autre :

- *G2 contrôle G1 :* si une contradiction perceptive est relevée sur la "figure" (G1), on peut rechercher dans G2 l'erreur de démonstration qui l'a produite ;

- *G1 contrôle G2* : si la conclusion d'un raisonnement géométrique surprend, le retour à la "figure" et aux techniques de G1 peut permettre de confirmer ou d'infirmer ce résultat.

1.2 La relation G1 / G2 dans l'activité géométrique

Pour préciser ce qui précède, plaçons-nous maintenant au niveau de l'activité géométrique. Dans G1 les objets en jeu sont *matériels* (maquettes, dessins...), et les propriétés de ces objets sont des propriétés *physiques*, qui sont validées (déterminées, vérifiées et éventuellement contredites) par des techniques spécifiques (méthodes de comparaison, mesures, etc.), et par exemple un dessin sera accepté comme triangle si ses “côtés“ (= traits) sont “droits“. De même, ce triangle sera accepté comme isocèle si, à l'aide d'un compas dont la pointe sèche est piquée en l'un des sommets (bien choisi), on peut tracer un cercle passant par les deux autres sommets; ou bien si la mesure de deux de ses côtés fournit le même résultat. Au contraire, on pourra lui refuser la propriété si l'on constate un écart, éventuellement même minime). On se situe donc ici dans une *problématique de la précision*.

Par contre, dans G2 les objets en jeu sont des concepts *abstraits*, qui peuvent être *représentés* par des objets physiques *mais ne se réduisent pas à ces objets*. Ce qui était objet dans G1 devient donc, dans G2 ou G3, simple *représentation* d'un objet, c'est-à-dire qu'il s'intègre à un concept d'ordre supérieur[5]. Par exemple, un dessin de triangle sera considéré comme une représentation de l'objet "triangle" de G2 dans le registre figural de Duval [Duval 1996], de même que la phrase "Soit un triangle ABC" en constituera une représentation dans le registre langagier. On se situe donc ici dans une *problématique de la déduction*.

Considérons maintenant un utilisateur "expert" de géométrie : pour résoudre un problème dans G2, il se place dans le registre de représentation qui lui semble le mieux adapté et en change aussi souvent qu'il en ressent le besoin, tout en conservant en permanence à l'esprit que *l'objet sur lequel il travaille reste le même* à travers les formes sous lesquelles il se (re)présente, et ceci même s'il n'en est pas réellement conscient.

Par contre, pour un non-expert, le changement de registre s'accompagnera d'un changement d'objet ; c'est ainsi que la "figure" (= dessin) réalisée à partir de l'énoncé d'un problème de géométrie deviendra pour lui l'objet même à propos duquel sont posées les questions du problème (il passe ainsi, sans même s'en rendre compte, de G2 à G1). Et, inversement, une propriété contingente du dessin réalisé, une fois qu'il l'aura constatée, pourra être comprise -et annoncée- comme une propriété de la configuration (= objet géométrique) définie par l'énoncé[6] (il passe cette fois, toujours sans s'en rendre compte, de G1 à G2; c'est ce que nous appelons la "contamination du su par le

[5] On pourrait ici, comme pour l'interprétation d'un texte, parler de "premier degré" et de "second degré": un dessin peut être considéré au premier degré (G1) ou au second degré (G2), c'est-à-dire comme ne représentant que lui-même (en tant qu'objet physique localisé dans l'espace, et alors un "carré posé sur sa pointe" n'est pas un carré mais un losange) ou comme représentant un objet géométrique (abstrait), comme par exemple l'objet "triangle équilatéral". La notion de *concept figural*, développée par Fischbein [Fischbein 1993], dans laquelle les images sont partie intégrante du concept, s'avère ici pertinente.

[6] Il ne s'agit pas d'un simple passage du particulier au général, mais bien d'une confusion de deux types d'objets (et, partant, de deux géométries).

perçu" (CSP)). Bien entendu, cette distinction G1 / G2 n'est pas perçue par l'apprenti géomètre, pas plus que les passages de l'une à l'autre.

Ce caractère permanent de l'objet d'étude, ainsi que la versatilité des registres de travail susceptibles d'être mis en œuvre de façon consciente lors de son étude, constituent en fait deux aspects fondamentaux de l'expertise, et l'acquisition par l'élève de ces deux capacités en quelque sorte antagonistes est l'une des finalités que doit à mon avis viser l'enseignement de la géométrie.

2- La recherche en cours

2.1 Contenus et finalités

La recherche que nous avons entreprise concerne les étudiants admis en IUFM pour y préparer le concours de professeur des écoles (PE1). Elle a d'abord commencé à l'IUFM de Lorraine puis s'est poursuivie à l'IUFM Orléans-Tours[7]. Elle est partie du constat selon lequel le rapport personnel des professeurs des écoles à la géométrie ne leur permet pas toujours d'être à même de préparer efficacement leurs élèves à entreprendre une démarche de conceptualisation géométrique qui s'étend sur toute la durée du cursus obligatoire (et même-au-delà pour certains d'entre eux). Nous nous sommes alors posé la question de la nature des insuffisances constatées et des moyens possibles pour y remédier. D'où la double dimension de notre travail, qui comprend :

- un volet "fondamental", constitué d'une recherche destinée en partie à tester la validité de notre cadre théorique, mais surtout à préciser le rapport personnel des PE1 à la géométrie;
- un volet "développement", consistant à élaborer, à mettre en œuvre et à évaluer des ingénieries didactiques prenant en compte les résultats obtenus dans l'autre volet et destinées à prendre place dans la formation des PE1.

Plus précisément, et en référence à notre cadre théorique, les finalités de notre recherche peuvent s'établir comme suit :

---

[7] J'en profite pour exprimer mes plus vifs remerciements aux collègues formateurs PE de ces deux IUFM qui m'ont accompagné-et m'accompagnent encore- dans cette recherche.

(F1) établir un inventaire et une classification des types d'argumentation utilisés en géométrie par les PE1.

(F2) mettre à l'épreuve le cadre théorique et les hypothèses de recherche.

(F3) élaborer et tester des ingénieries didactiques (en environnements papier / crayon et informatique) destinées à faire prendre conscience aux PE1 de la distinction G1 / G2 et à les amener à un comportement plus expert en géométrie

[Notons que, du point de vue déontologique, la présence du concours de recrutement nous impose, vis-à-vis de nos étudiants, la contrainte d'intégrer les divers éléments de notre recherche dans le cadre du plan de formation de l'IUFM.]

2.2 Nos hypothèses

Les études préliminaires nous ont conduits à formuler les *hypothèses de recherche* suivantes, que nous allons chercher à valider, à modifier ou à infirmer :

(R1) Certains PE1 ne distinguent pas clairement G1 et G2.

(R'1) *Conséquence :* certains PE1 ne distinguent pas les validations théoriques de G2 (démonstration) des validations perceptives de G1 (constatation, mesure).

(R2) Même chez un PE1 qui a conscience de travailler dans G2, l' "évidence" de la figure peut provoquer une contamination du su par le perçu.

D'autre part, nous nous appuyons sur les *hypothèses de travail* suivantes :

(T1) Dans les conduites expertes en géométrie élémentaire (G2), les géométries G1 et G2 sont susceptibles de se contrôler l'une l'autre (dialectique G1 / G2) (voir plus haut).

(T2) Il est nécessaire qu'un professeur des écoles ait une conscience claire de la distinction G1/G2.

Il n'est peut-être pas inutile de justifier sur un exemple ce dernier point. Par exemple, dans une tâche de construction aux instruments, un professeur des écoles est amené à valider / invalider les productions de ses élèves et il faut donc qu'il soit en mesure de pouvoir distinguer les propriétés intrinsèques d'une figure géométrique des propriétés contingentes d'une représentation dessinée de cette figure (contrôle des techniques de G1 par la technologie de G2).

3- Une séance de travaux dirigés

Dans l'état actuel, le volet "fondamental" de notre recherche se compose lui-même de deux éléments méthodologiques distincts et complémentaires :

- un *questionnaire* passé par les PE1 à leur arrivée à l'IUFM, avant toute formation en géométrie
- une *séance de travaux dirigés*, réalisée au tout début de la formation.

L'état actuel de l'analyse du questionnaire a été présenté au colloque inter-IREM de Montpellier [Parzysz & Jore 2001]. Nous présentons ici la séquence de travaux dirigés et les premiers résultats qu'elle nous a permis d'obtenir.

3.1 La situation proposée

L'idée qui a gouverné l'élaboration de cette séance est de proposer aux étudiants une situation géométrique "ambiguë" (en ce sens qu'on ne précise pas si on se place dans G1 ou dans G2), dans laquelle les validations usuelles de type perceptif (relevant de G1) risquent d'être mises en défaut. Une telle situation conduit normalement un "expert" à rechercher une validation au niveau technologico-théorique (G2/G3), mais, avec des "non experts" comme le sont la plupart des PE1 (dont seulement une minorité a fait des études scientifiques), nous espérions voir apparaître des références à des validations alternatives relevant de G1. En outre, nous ne souhaitions pas voir les étudiants résoudre le problème posé (ce qui risquait d'introduire des difficultés au niveau de la mise en œuvre des techniques), mais seulement *indiquer des possibilités de validation*.

Une technologie de G2 nous semblait faire partie des connaissances - sinon disponibles, du moins mobilisables- de la quasi-totalité des étudiants : la "propriété de Pythagore". C'est pourquoi nous avons recherché une situation fondée sur la notion de triplets pythagoricien[8] (TP) ou pseudo-pythagoricien[9].

[8] C'est-à-dire un triplet (a, b, c) d'entiers naturels tels que = $a^2 + b^2 = c^2$. Exemple: (5, 12, 13).

(TPP) : un tel triplet sera utilisé pour construire, à la règle et au compas, un triangle qui dans G2 sera rectangle (TP) ou non (TPP), mais qui dans G1 sera sans doute perçu comme rectangle. Finalement, la situation retenue a été celle de l'exemple suivant :

Tracer une droite d. On appelle O un point de cette droite.

Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ *de centre O et de rayon 2. Ce cercle coupe la droite d en deux points A et B.*

Tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ *de centre O et de rayon 3,5.*

Tracer le cercle $\mathcal{C}_3$ *de centre A et de rayon 4. Ce cercle coupe le cercle* $\mathcal{C}_1$ *en deux points C et D.*

Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir si la droite (CD) est, ou non, la médiatrice du segment [AB] ?

Commentaires :

1) Les valeurs numériques données aux trois rayons constituent une variable didactique qui (à un facteur multiplicatif près) peut correspondre, au choix, à un TP ou à un TPP (sur l'exemple ci-dessus, il s'agit du TPP (4, 7, 8)).

2) L'unité n'est pas précisée, de façon à permettre aux étudiants de jouer sur la taille du dessin.

3) En se plaçant dans G2 : d'après la symétrie de la construction, (CD) est dans tous les cas perpendiculaire à (AB); la seule question est donc théoriquement de savoir si (CD) passe par O ou non.

4) La consigne ne fait référence ni à G1 ni à G2 : on demande de "mettre en œuvre" des "moyens", et non de "démontrer" ou de "vérifier".

3.2 Le déroulement

La mise en œuvre de cette situation, au cours d'une séance de deux heures, s'est opérée selon un scénario inspiré de l'équipe lyonnaise de G. Arsac. On trouvera les justifications du recours à ce type de fonctionnement dans [Arsac *et al.* 1992].

---

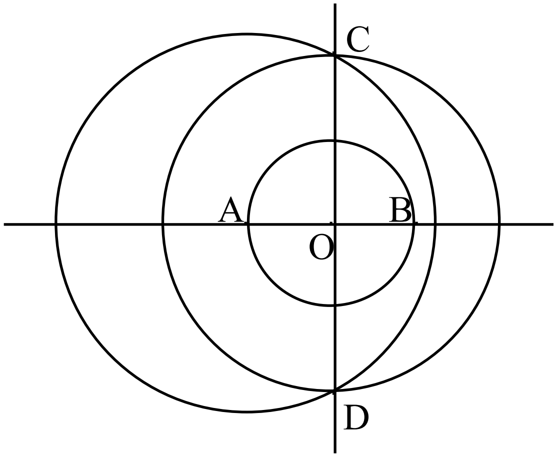
[9] C'est-à-dire un triplet (a, b, c) d'entiers naturels tels que $a^2 + b^2 = c^2 \pm 1$. Exemples: (4, 7, 8) et (4, 8, 9).

1) Mise en place : les étudiants d'un groupe de formation sont répartis en équipes de 4 (avec éventuellement un ou deux groupes de 3). Les étudiants d'origine scientifique sont regroupés, afin d'éviter d'éventuels phénomènes de "leadership". Une feuille comportant un énoncé est distribuée à chacun.

N.B. Dans l'équipe, chaque étudiant dispose d'un énoncé dans lequel les valeurs numériques sont différentes. Le tableau ci-dessous indique, pour chacune des 4 versions de l'énoncé, les valeurs numériques choisies, le triplet correspondant et la nature de celui-ci :

version	**valeurs des rayons**	**triplet correspondant**	**nature du triplet**
A	1 1 1,5	(2, 2, 3)	TPP
B	2,5 6 6,5	(5, 12, 13)	TP
C	2 4 4,5	(4, 8, 9)	TPP
D	8 15 17	(8, 15, 17)	TP

Voici à titre d'exemple un dessin obtenu à l'aide de Cabri-Géomètre pour la version C :



2) *Séquence individuelle :* réalisation de la construction demandée et recherche d'une réponse possible à la consigne.

3) *Travail par équipes :* comparaison des productions obtenues à la séquence précédente; réalisation d'une affiche qui sera exposée au tableau avec les autres à la fin de la séquence.

4) *Séquence collective :* un membre de chaque équipe vient commenter l'affiche de son équipe et répondre aux questions individuelles. Puis une synthèse est réalisée par l'enseignant(e).

3.3 Les résultats

Nous nous contenterons ici d'étudier, du point de vue des validations, les 31 affiches produites dans 5 groupes de PE1 de l'IUFM Orléans-Tours (chaque groupe comportant de 5 à 7 équipes).

[N.B.: les groupes sont identifiés par le prénom de leur enseignant(e) (Laurence ayant en charge deux groupes , ils sont notés B et C). Dans chaque groupe les équipes sont numérotées de 1 à 5, 6 ou 7 selon le cas.]

Nous appelons ici "validation" une technique proposée par une équipe de PE1 pour déterminer si (CD) est médiatrice de [AB] ou non. Nous avons distingué les validations figurant dans les affiches selon qu'elles relèvent de G1 ou de G2. Lorsqu'il y a plusieurs validations proposées dans une même affiche, les cas suivants ont pu être constatés :

(i) soit ces validations ressortissent toutes à l'un des deux paradigmes géométriques G1 ou G2 (et alors l'affiche est classée dans G1 ou dans G2).

Exemples : affiche 4 chez Ghislaine (dans G1) et affiche C7 chez Laurence (dans G2) :

Définition de la médiatrice :

C'est une droite qui coupe un segment en son milieu perpendiculairement.

Donc tout point situé sur la médiatrice d'un segment [AB] est situé à égale distance de A et de B.

Moyens :

* pour vérifier que (CD) passe par le milieu de [AB] :

- O milieu de [AB]. (CD) passe-t-elle par O?
- avec compas ou règle graduée : est-ce que CA = CB? ou DA = DB?

* pour vérifier que (CD) $\perp$ [AB] :

- avec équerre

* pour vérifier que (CD) est la médiatrice de [AB] :

- construire la médiatrice de [AB], si elle est confondue avec (CD) alors (CD) est la médiatrice de [AB].

- construction du losange ACB'D.   B = B'?

[<u>Commentaire</u> : Malgré le vocabulaire, les notations et la définition de la médiatrice, on se trouve ici sans ambiguïté dans G1 (le "donc" de la partie "définition" montre déjà qu'on n'a pas affaire à une équipe experte de G2). Tous les moyens listés ici relèvent de la perception, instrumentée ou non. En particulier, le principe consistant à dessiner aux instruments l'objet conjecturé, puis à observer s'il y a ou non coïncidence avec le tracé existant revient à plusieurs reprises.]

La médiatrice du segment [AB] le coupe perpendiculairement en son milieu O.

Si AOC est triangle rectangle en O, alors la droite (CD) est la médiatrice de [AB]. On applique la réciproque du théorème de Pythagore :

Si $AC^2 = CO^2 + OA^2$, alors AOC est triangle rectangle en O.

Même chose avec le triangle AOD.

Si AOC et AOD sont triangles rectangle en O, alors C, O, D sont alignés et (CD) est la médiatrice de [AB].

[<u>Commentaire</u> : Il s'agit d'une démonstration classique de G2.]

(ii) soit certaines validations se situent dans G1 et les autres dans G2, sans qu'il soit établi de distinction entre les deux types de validation (et alors l'affiche est considérée comme mettant sur un pied d'égalité G1 et G2).

Exemple : affiche C4 chez Laurence :

Méthode arithmétique :

Médiatrice : passe par le milieu de [AB] et perpendiculaire

∗ on suppose CD ⊥ AB, et O milieu de [CD].

Donc si OB ⊥ OC d'après Pythagore dans le triangle BOC rectangle en O on a :

$BC^2 = OB^2 + OC^2$

$(4,5)^2 = 4^2 + 2^2$

$20,25 \neq 20$ ∗ Donc le triangle BOC n'est pas rectangle en O et

∗ BO n'est pas perpendiculaire à OC

Donc (CD) n'est pas médiatrice de [AB]

Méthode géométrique :

∗ Médiatrice : tout point sur la médiatrice est équidistant à [AB]

Or en vérifiant avec le compas AC $\neq$ BC

∗ Par la figure en traçant la médiatrice à [AB] passant par O on s'aperçoit que (CD) et la médiatrice ne sont pas confondues.

[Commentaire : La méthode "arithmétique" se situe dans G2: c'est une démonstration par l'absurde exemplifiée par la version C de l'énoncé. La méthode "géométrique" se situe clairement dans G1. Les deux méthodes sont placées sur un pied d'égalité. A noter que, pour cette équipe, le qualificatif "arithmétique" semble correspondre à la présence de calculs numériques, tandis que "géométrique" paraît lié à l'utilisation d'instruments.]

Lorsque l'affiche propose une seule validation, celle-ci peut se situer dans G1 (perception instrumentée) ou dans G2 (démonstration). Un autre cas se présente également, celui dans lequel, bien que la démarche argumentative se situe clairement dans G2 (vocabulaire, référence à des résultats de G2, etc.), s'opère à un moment donné une CSP, c'est-à-dire que la démonstration inclut, de façon plus ou moins implicite, des éléments relevant de la perception.

Exemple : affiche 3 chez Ghislaine :

C_1 est le cercle de centre O: tous les points du cercle sont situés à égale distance du point O.

Donc: * OA = OB

* O milieu de [AB]

Comme A et B $\in$ à (d), les points A, O, B sont alignés.

- C et D sont sur les cercles C_2 et C_3 respectivement de centre O et A.

Donc: * OC = OD, O milieu de [CD]

* AC = AD.

- le triangle ACD est isocèle en A car AC = AD. La demi-droite [Ad) issue de A coupe [CD] en O. Comme O est milieu de [CD], [AO] est la hauteur et la médiatrice de [CD].

- On en déduit que [AB] et [CD] sont perpendiculaires en O. Donc [CD] médiatrice de [AB].

[<u>Commentaire</u> : cette démonstration en 4 points fait preuve d'une certaine expertise dans G2 : le vocabulaire et le symbolisme sont correctement utilisés (y compris la demi-droite), le développement de l'argumentation est clairement exposé et les affirmations justifiées, à l'exception d'une seule : l'alignement sous-entendu des points C, D, O : le perçu est venu mettre à bas le bel édifice soigneusement construit.]

Le tableau ci-dessous indique la répartition que nous avons obtenue en nous situant selon les types de validations indiqués et exemplifiés plus haut:

	Edith	Ghislaine	Jean	Laurence B	Laurence C	Total
validation dans G2	4	5	4	1. 3. 4. 5. 6	2. 7	**10**
val. dans G2 + CSP		1. 3	1. 3	2. 7	3	**7**
parité G1 - G2	3. 6	2			4. 5. 6	**6**
validation dans G1	1. 2. 5	4	2. 5. 6		1	**8**

Tout d'abord, ce tableau met en évidence la grande disparité des 5 groupes étudiés, du point de vue du rapport à la géométrie; ceci n'est guère étonnant étant donné la diversité des origines scolaires et universitaires des PE1. On peut au passage noter le “haut niveau” relatif du groupe B de Laurence.

On peut ensuite constater que seules quelques équipes (10 sur 31) se placent sans ambiguïté dans G2. Quelques autres (8 sur 31) travaillent uniquement dans G1, mais il n'en reste pas moins qu'une part importante des équipes (13 sur 31) font "coexister" d'une façon ou d'une autre les deux géométries, le plus souvent de façon non consciente. En fait, la distinction claire entre les modes de validation de G1 et ceux de G2 n'est le fait que d'une faible minorité des PE1 : elle n'est exprimée que dans 3 affiches, parmi les 10 qui se placent dans G2.

D'autre part, 12 équipes ont formulé une assertion relative à la véracité de l'affirmation "(CD) est médiatrice de [AB]" (ce qui n'était pas demandé). Dans 3 cas les situations pour lesquelles la réponse est "oui" (versions B et D de l'énoncé) et celles pour lesquelles elle est "non" (version A et C) ont été correctement identifiées (au moins partiellement). Par contre, dans les 9 autres cas, une réponse unique a été donnée pour les 4 versions : "oui" pour 8 équipes (effet de contrat ?) et "non" pour la dernière. Ceci confirme notre intuition initiale que la seule validation perceptive (instrumentée ou non) se révèlerait insuffisante pour déterminer la réponse à cette question, d'autant plus qu'aucun étudiant n'a indiqué le "changement d'unité" comme moyen de validation (relatif à G1).

4- Conclusion

Comme on le voit, l'ensemble de ces premiers résultats tend à confirmer nos hypothèses de recherche R1 et R2 quant au rapport qu'entretiennent les PE1 avec la géométrie. Ainsi, nombre d'entre eux n'établissent pas de différence de nature entre les divers modes de validation, et ne sont apparemment pas conscients du fait qu'ils ne portent pas sur les mêmes objets. Il s'agit pourtant d'étudiants qui ont été confrontés à la totalité du cursus obligatoire, et qui donc, en particulier, ont eu des activités géométriques jusqu'en classe de Seconde inclusivement. Ils montrent d'ailleurs qu'ils disposent dans ce domaine, dans leur quasi-totalité, d'un ensemble de connaissances non négligeable, comprenant en particulier du vocabulaire ainsi qu'un certain nombre de constructions "classiques" aux instruments (médiatrice, losange) et d'énoncés (définitions, théorèmes), ce qui pourtant n'empêche pas qu'ils se comportent dans leur grande majorité comme des "non experts". Ceci renforce notre conviction qu'une formation initiale des PE1 doit viser à les amener à un niveau minimum d'expertise géométrique, et c'est à cette tâche que nous travaillons, en particulier par la recherche d'ingénieries didactiques susceptibles de favoriser une évolution de leur rapport personnel aux savoirs géométriques.

Bibliographie

ARSAC Gilbert et al. (1992) : *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Presses Universitaires de Lyon

BERTHELOT René & SALIN Marie-Hélène (1992) : *Espace et géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse, Université de Bordeaux 1

CHEVALLARD Yves (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, in *"Recherches en Didactique des Mathématiques"* 19/2, 221-266

COLMEZ François & PARZYSZ Bernard (1993) : Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides, du CE2 à la Seconde, in *"Espaces graphiques et graphismes d'espaces. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux"* (sous la direction d'A. Bessot et P. Vérillon), 35-55. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

FISCHBEIN Ephraim (1993) : The theory of figural concepts, in *Educational Studies in Mathematics* 24/2, 139-162.

GONSETH Ferdinand (1945-1955) : *La géométrie et le problème de l'espace.* Ed. du Griffon, Lausanne

HENRY Michel (1999) : L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie, in *Repères-IREM* 36, 15-34

HOUDEMENT Catherine & KUZNIAK Alain (1999) : Quelques éléments de réflexrion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres, in *Petit x* n°51

LABORDE Colette & CAPPONI Bernard (1995) : Modélisation à double sens, in *Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des mathématiques*. Ed. IREM de Clermont-Ferrand

NICOLAS-LORRAIN Brigitte (2000) : Conceptualisation géométrique en formation de PE, in *Actes du colloque COPIRELEM de Chamonix)*. Ed. Univ. Joseph-Fourier, Grenoble , 165-178

PARZYSZ Bernard (1989) : *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.* Thèse de doctorat. Université Paris-7. Ed. IREM Paris-7

PARZYSZ Bernard & JORE Françoise (2001) : Qu'ont-ils retenu de la géométrie du collège ? Le rapport à la géométrie des futurs professeurs de écoles, in *Actes du colloque inter-IREM de Montpellier*). Ed. Univ. de Montpellier (à paraître)

Van HIELE Pierre (1984) : A child's thought and geometry, in *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (D. Geddes, D. Fuys & R. Tischler, eds.). Research in Science Education Program of the National Science Foundation (USA)

Pour une définition dynamique des figures planes

Bernard Bettinelli

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Cet article présente certains travaux, menés par l'auteur, sur une approche dynamique des figures planes (parallélogrammes, polygones réguliers, triangles). Des pistes d'activités pour les classes sont présentées. Les élèves, par l'usage d'un matériel adapté, sont amenés à découvrir des propriétés géométriques des figures de base.

1 - L'origine du langage géométrique

Si on ouvre les « Éléments » d'Euclide [1], à la première page du Livre 1, on trouve une longue liste de définitions qui constitue le langage que le grand Géomètre va utiliser tout au long de son œuvre. En voici quelques-unes :

1 - Le point est ce dont la partie est nulle
2 - Une ligne est une longueur sans largeur
3 - Les extrémités d'une ligne sont des points
4 - La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points
5 - Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur
6 - Les extrémités d'une surface sont des lignes
8 - Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction
10 - Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée
14 - Une figure est ce qui est compris par une seule ou plusieurs limites
20 - Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites
21 - Les figures trilatères sont terminées par trois droites
22 - Les quadrilatères, par quatre
23 - Les multilatères, par plus de quatre
24 - Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux
25 - Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux
26 - Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux
27 - De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit

---

[1] Les œuvres d'Euclide, trad. Peyrard

30 - Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire
31 - Le rectangle, celle qui est rectangulaire et non équilatérale
32 - Le rhombe, celle qui est équilatérale et non rectangulaire
33 - le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux et qui n'est ni équilatérale, ni rectangulaire
34 - Les autres quadrilatères, ceux-la exceptés, se nomment trapèzes
35 - Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan et prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté, ni de l'autre

On peut découvrir que le langage actuel est en grande partie fixé dès cette époque :
• Les premières définitions partant directement de l'observation, sont parfois obscures (point, ligne, droite, …), et confondent l'objet et sa mesure (ligne et longueur),
• Une ligne (ou surface) n'est pas un ensemble de points ; seules ses extrémités en sont,
• La droite est ce qu'on nomme aujourd'hui segment,
• La première grandeur définie est l'angle de deux lignes, et la première configuration particulière, l'angle droit, qui utilise une notion d'égalité non précisée (superposition),
• les classes de triangles et de quadrilatères sont désignées, mais définies de manière exclusive (Le rectangle, celle qui est rectangulaire et non équilatérale). Certains mots ont changé, en particulier le rhombe est devenu losange (vers 1 300), mot formé à partir de «losa» devenu lauze, qui désigne les pierres plates dont on recouvrait les toits des maisons,
• Le parallélogramme quelconque est désigné du mot « rhomboïde », c'est-à-dire « faux-losange » et que le mot parallélogramme n'y figure pas.
Cependant, en feuilletant le Livre 1, on le voit apparaître, après la construction de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné (qui se fait par l'intermédiaire de deux triangles isométriques formant un parallélogramme !), à la proposition XXXIV :
« Les côtés et les angles opposés des *parallélogrammes* sont égaux entre eux, et la diagonale les partage en 2 parties égales. »
Ceci veut dire que ce mot englobe toutes les familles de quadrilatères qui ont leurs côtés opposés parallèles : carrés, rectangles, rhombes et rhomboïdes.
On peut faire une autre constatation, en comparant les classes de triangles et celles de quadrilatères : Euclide (et nous à sa suite !) désigne les classes de quadrilatères par des noms (carrés, rectangles, …) , alors qu'il différencie les triangles par des adjectifs (triangles rectangles, isocèles, …) : ne serait-ce pas un indice des qualités premières des parallélogrammes, dont celles des triangles et polygones se déduisent ?

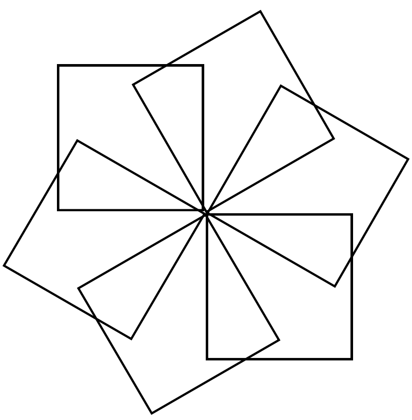
2 - Position du problème

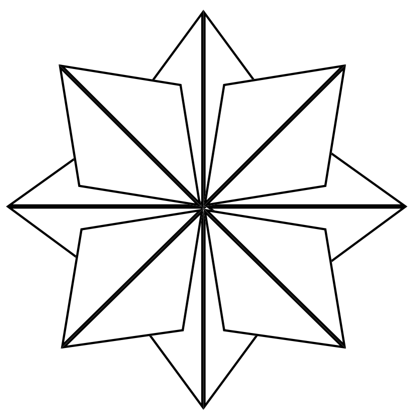
Les figures planes sont utilisées depuis la Maternelle dans des jeux de mosaïques, puzzles, … et les plus simples sont reconnues globalement : carrés, rectangles, losanges, ronds. Les petits refusent souvent d'appeler "triangles", des triangles quelconques : beaucoup réservent ce nom aux triangles équilatéraux ou isocèles.

Lorsqu'on veut faire des dessins géométriques, les outils qui me semblent premiers sont ceux qui permettent une reproduction conforme des figures : les gabarits. L'avantage des gabarits - et en même temps leur inconvénient - est de porter en eux la forme qu'on désire produire, et donc de ne servir qu'à elle. Leur usage nécessite, de ce fait, l'emploi de toute une « boîte à outils » de gabarits différents. Cette boîte à outils devient plus souple quand on commence à découvrir que les formes contenues ne sont pas indépendantes et qu'on peut se servir des unes pour dessiner soit les autres, soit des figures non contenues. Par exemple, on peut faire un carré avec un losange, un octogone régulier avec un carré, ou une étoile à 8 branches avec un octogone régulier. En procédant ainsi, on prend petit à petit conscience que chaque figure possède un grand nombre de qualités cachées, communes avec d'autres figures, et qu'elles entretiennent des « liens de famille ».

L'observation de figures planes placées entre deux miroirs reliés par un dos et s'ouvrant comme un livre à angle variable est une autre source d'observation d'une multiplicité de dispositions de figures (sur le principe du kaléidoscope). Je me suis donné comme projet de faire reproduire de telles configurations, et d'autres encore plus complexes, en cycle III, avec le jeu de gabarits [2].

Voici deux exemples :

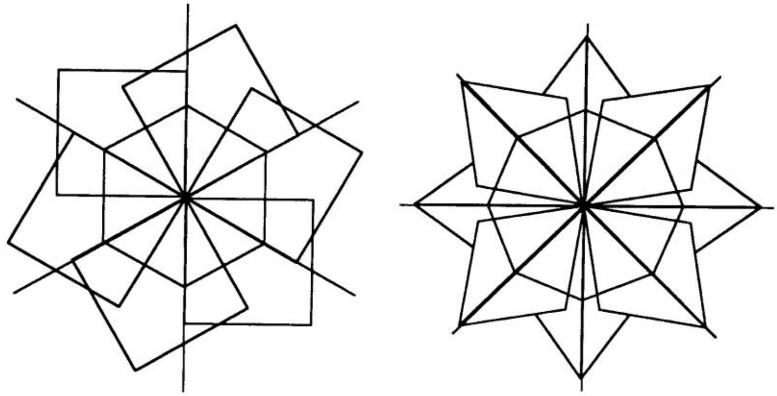




La figure reproduite est facilement repérable dans la boîte à outils (carré ou triangle isocèle), mais comment faire pour disposer correctement les différentes copies ? Les « fleurs » ont 6 et 8 pétales qui tournent comme un manège ; et ces nombres 6 et 8 sont inscrits l'un dans l'hexagone, l'autre dans l'octogone réguliers qui peuvent devenir le moteur de ces manèges. Les enfants ont très vite compris

[2]La Moisson des Formes, B. Bettinelli

cette relation, et sur de multiples dessins, en ont utilisé les effets en choisissant comme dans les exemples ci-dessus, deux pièces : soit un carré et un hexagone, soit un triangle et un octogone. Le polygone régulier est utilisé en premier et permet la construction d'une sorte d'échafaudage formé de ses grandes diagonales, dessiné au crayon, et dont le rôle indispensable pour le placement de l'autre figure doit s'effacer en fin de tracé.



Ces exemples parmi beaucoup [3] montre les deux rôles : objet (figure faisant partie du dessin final) ou outil (producteur de lignes de construction) que peut prendre un gabarit. Et ce sont des déplacements et retournements qui peuvent décrire les étapes de la construction.
Voici un autre élément de réflexion : on présente souvent les figures simples (en particulier les différentes classes de parallélogrammes) à l'aide d'une liste de propriétés de mesures (un losange est un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur, des diagonales perpendiculaires, …). L'élève du Primaire devra comprendre qu'on différencie l'une d'elles pour définir, et les autres comme conséquences non équivalentes en général dans une liste où toutes les propositions sont de même nature ; celui du Collège aura à faire un retournement de pensée important en triant ce qui est caractéristique parmi toutes ces propriétés. Souvent, il vérifiera un excès de ces propriétés avant d'oser donner la classe de la figure, et cela mérite que nous y accordions une grande importance car c'est à peu près la première forme de démonstration qu'il rencontre : *si je sais que ..., alors je peux affirmer que c'est un ...*
Pour toutes ces raisons, j'aimerais proposer une présentation des figures planes à l'aide de définitions dynamiques qui se décrivent en termes de mouvements et reproductions et non par une liste de propriétés de mesure, propriétés que l'élève découvrira lui-même à travers les actions.
Voici quelques propositions qui me semblent répondre à cette question :

[3]Instruments géométriques à l'École élémentaire, IREM de Besançon

3 - Reconnaissance des invariants

a) Le dessin géométrique

L'organisation de figures complexes faites à l'aide de gabarits permet une imprégnation des qualités de mesure : juxtaposition de pièces dans une frise ou un pavage, qui ont même longueur de côté, pièces qui s'alignent parce que leurs angles sont supplémentaires, …

L'utilisation de la règle et du compas permet une intégration d'un dessin dans un contexte plus vaste (par exemple un dessin de base de pentagone régulier permet avec une grande règle de construire une grande imbrication d'étoiles et de pentagones gigognes aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du premier tracé, le compas permet de créer des polygones réguliers de toutes tailles à partir de ceux de la boîte à outils, …) ; mais ils permettent aussi la construction de lignes supports sur lesquelles se placeront les éléments du dessin comme dans les exemples décrits ci-dessus.

Certaines activités forceront la prise de conscience de l'originalité fonctionnelle de ces figures qui ont un nom : carré, rectangle, hexagone régulier, …

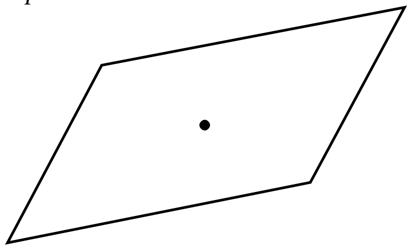
b) Le jeu des traces

Wheeler[4] en 1970 proposait de découper au cutter une figure dessinée sur carton et d'essayer de la replacer dans le trou ainsi formé. Chaque famille intéressante a ses propres façons de se replacer. Plus simplement, en disposant de figures matérielles, on peut, au crayon, tracer le contour de chacune et la placer et replacer pour qu'elle rentre dans sa trace, en analysant les mouvements permis.

Les mouvements les plus faciles à repérer sont les retournements (demi-tours dans l'espace qui correspondent aux réflexions du plan) qui permettent de replacer :

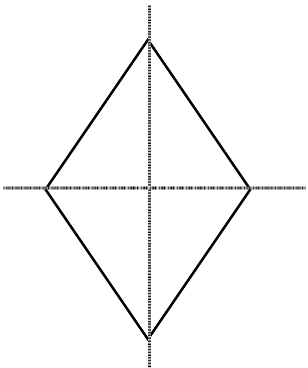
- un losange, en le retournant autour des diagonales
- un rectangle, en le retournant autour des médianes
- un carré, en le retournant autour des médianes et des diagonales.

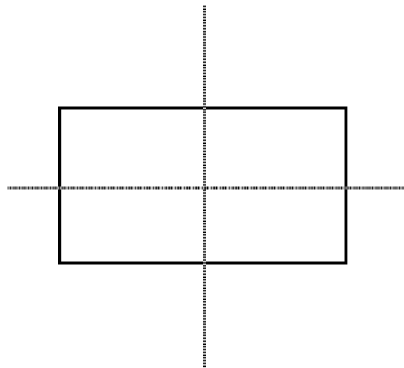
Les rotations qui transportent chaque côté sur le suivant dans les polygones réguliers (et donc dans le cas du carré) sont, elles aussi, familières. Par contre, il est beaucoup moins naturel de penser à faire exécuter un demi-tour « complet » à un parallélogramme (symétrie centrale) pour le replacer « tête en bas ». *Et c'est cependant l'invariant commun à tous les parallélogrammes, particuliers ou non*.



[4]Wheeler D., (1970) : « Mathématiques pour l'École élémentaire », O.C.D.L.

Il est facile de découvrir, en retournant un losange dans sa trace, que ses 4 côtés ont même longueur, ou que chaque diagonale est bissectrice des angles au sommets qu'elle partage et aussi médiatrice de l'autre :
- par l'un des retournements, les côtés « supérieur » et « inférieur » s'échangent (donc ont même longueur) ; par l'autre, c'est les côtés « droit » et « gauche ».
- de même les petits secteurs formés par une diagonale dans chaque secteur au sommet qu'elle découpe, s'échangent 2 à 2, ainsi que les 2 segments découpés sur l'autre diagonale et les angles qu'ils font avec elle.





Mais en retournant un rectangle dans sa trace, chaque secteur prend la place des 3 autres et ils font le même angle, mais faut-il savoir que la somme des angles de tout quadrilatère est 360° pour pouvoir affirmer qu'il a 4 angles droits ?

Pour que cette analyse soit plus facile, on peut charger le gabarit de différents repères :
• un dessin figuratif non symétrique (animal ou personnage) collé sur les deux faces par transparence, et qui va se retrouver retourné de droite à gauche ou de haut en bas, ou tourné « les quatre fers en l'air »,
• des lignes colorées sur les côtés ou les diagonales, pour voir où elles vont et affirmer que des segments qui prennent la place l'un de l'autre on même longueur (par exemple un polygone régulier a tous ses côtés de même longueur ; un rectangle a deux diagonales de même longueur, un losange a ses 4 côtés de même longueur, …),
• de petits secteurs circulaires colorés pour voir comment ils s'échangent et donc ont le même angle (deux secteurs opposés d'un parallélogramme, les secteurs découpés par une même diagonale d'un losange, les secteurs aux sommets des polygones réguliers, …).

L'idée d'agrandissement est elle aussi porteuse d'un grand nombre de renseignements faciles à lire.

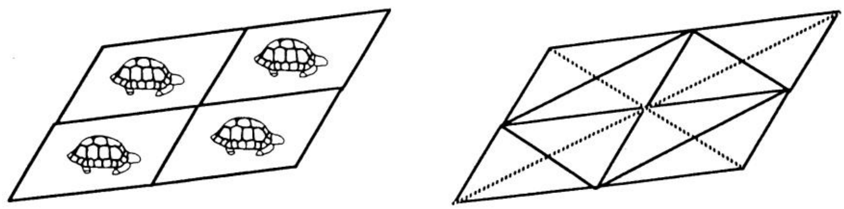
c) Agrandissements « par translations » et parallélogrammes

D'où viennent les particularités des parallélogrammes ? du parallélisme de ses côtés, bien sûr ! et comment faire intervenir ce parallélisme dans un jeu de manipulation ?

C'est en essayant de répondre à cette question que j'ai découvert un fait simple mais étonnant :

Je peux agrandir un parallélogramme - particulier ou non - et doubler ses dimensions en glissant un gabarit le long de ses côtés, et ce sont les seules figures (pas seulement quadrilatères, mais surfaces compactes) auxquelles je peux appliquer ce procédé.

Et voilà, en termes de transformations, une caractérisation des parallélogrammes!



Une première chose saute aux yeux : j'ai placé les 4 secteurs autour du point central et ils remplissent le plan, c'est à dire : la somme des 4 angles de tout parallélogramme est 360°.

Une deuxième : les côtés opposés se sont recollés en glissant et sont donc parallèles et de même longueur.

Une troisième : les diagonales du grand parallélogramme sont formées chacune de 2 exemplaires d'une diagonale du gabarit, donc se coupent en leur milieu

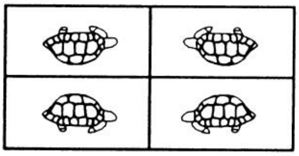
Et d'autres encore : les secteurs opposés se retrouvent au centre, opposés par leur sommet, les autres diagonales du gabarit forment un nouveau parallélogramme joignant les milieux des côtés du grand, …

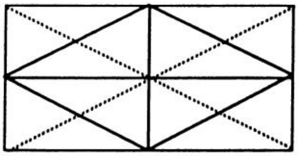
Y aurait-il alors un agrandissement particulier rendant compte de la particularité des rectangles ?

L'agrandissement « par translations » est toujours possible **parce que tout rectangle est un parallélogramme** et c'est donc un moyen de le faire admettre comme élément de cette famille. Mais le même grand rectangle peut être construit <u>en retournant le gabarit</u> successivement autour de chacun de ses côtés. Et cette fois les qualités qu'on lui découvre par ce nouveau procédé sont celles qui lui sont particulières :

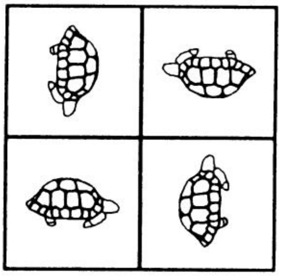
• D'abord, on voit que c'est le même secteur qui remplit 4 fois le secteur plein central, et donc : chaque angle est le quart de l'angle plein, soit ce qu'on nomme angle droit (comme dans le pliage en 4 de la feuille de papier).

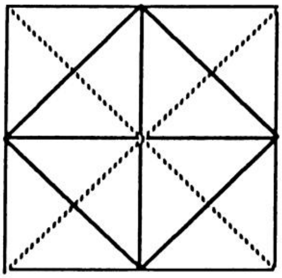
• Ensuite, c'est la même diagonale qui construit les 2 diagonales du grand rectangle par son double : donc elles ont même longueur (et même milieu)
• Enfin l'autre diagonale construit un losange joignant les milieux de ses côtés.



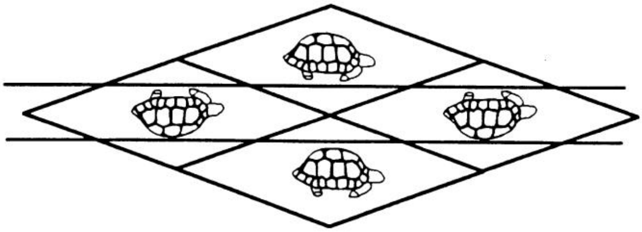


Et de même, peut-on agrandir un carré d'une manière qui lui est propre ? Par quarts de tour autour d'un de ses sommets, bien sûr ! Les résultats qui s'en déduisent sont comparables à ceux qu'on obtient par quarts de tour à l'intérieur de la trace.





Et pour les losanges, qu'en est-il ? Il y a aussi un type d'isométries qui lui est propre : des symétries glissées d'axes passant par les milieux de 2 côtés consécutifs. Elles ne sont ni connues, ni simples à utiliser ; mais heureusement pour nous, comme je l'ai décrit plus haut, le jeu des traces, dans leur cas, nous donne tous les renseignements que l'on peut désirer. En particulier, les deux diagonales le partagent en 4 triangles, deux à deux juxtaposés et symétriques.



On peut remarquer que pour tous les parallélogrammes, il existe encore une autre façon de se déplacer dans son double : par demi-tours autour des milieux des côtés jointifs.
Il n'est pas très « naturel » de définir une figure par rapport à son agrandissement (de rapport 2) ; je vais donc plutôt comparer la figure à une partie propre capable de produire la figure complète par certaines transformations.

4 - Propriétés de mesures et « classements inclusifs » des quadrilatères

En exploitant conjointement les 2 méthodes de découverte décrites plus haut : jeu des traces et agrandissements, les propriétés des parallélogrammes qu'on enseigne au Collège sont accessibles directement par les étudiants. Si un côté vient sur un autre par glissement le long d'une règle, ces 2 côtés sont parallèles ; si un côté prend la place d'un autre par un mouvement quelconque, ils ont même longueur ; si un secteur prend la place d'un autre par un mouvement quelconque, ils ont même angle.
Quelles propriétés fondamentales des différentes familles de parallélogrammes ne peut-on découvrir, soit par l'une, soit par l'autre de ces 2 dynamiques, soit par les deux ?
Les propriétés-outils utilisées implicitement dans cette démarche sont les suivantes :
• Conservation des longueurs et angles par les translations, réflexions et rotations,
• L'image de toute droite par une translation ou une symétrie centrale est une droite parallèle.
On peut remarquer que le jeu des traces sert aussi à trier les polygones réguliers et à découvrir leurs propriétés, puisqu'ils sont les seuls polygones invariants par une rotation amenant un côté sur un côté consécutif. Et c'est ainsi qu'avec ses quarts de tour, le carré est comme on l'écrivait avant : un quarré ou quadrilatère régulier.
Doit-on demander à nos élèves de toujours disposer de figures gabarits ? Certainement pas, et à l'image des enfants qui tournent naturellement la feuille pour se mettre dans l'axe d'un losange, nous devons leur proposer une action symbolique, par la pensée, directement sur de dessin, dès qu'ils en ont conscience.
C'est en voyant dans leur tête tourner et retourner les figures qu'ils auront des critères intérieurs de la vérité de leurs propositions.

5- Définitions et propriétés dynamiques

Parmi les figures planes, une définition dynamique $\mathcal{D}$ et une propriété de reproduction[5] $\mathcal{P}$ (par isométries) sont intéressantes pour les classes de parallélogrammes et les polygones réguliers. Elles peuvent avoir la forme suivante :

---

[5] Un rectangle, un carré, un triangle demi-rectangle et un triangle demi-carré placé entre 2 miroirs à angle droit donnent la vision de toutes les propriétés de reproduction par réflexion des parallélogrammes particuliers.

• $\mathcal{D}$: Un **parallélogramme** est un quadrilatère invariant (c.-à-d. qu'il revient dans sa trace) par demi-tour (symétrie centrale).

$\mathcal{P}$: On peut partager tout parallélogramme en quatre parties par des parallèles aux côtés passant par le centre. Il est engendré à partir de l'une d'elles par des translations[6].

• $\mathcal{D}$: Un **rectangle** est un quadrilatère invariant par réflexions autour de ses médianes (droites passant par les milieux de côtés opposés).

$\mathcal{P}$: On peut partager tout rectangle en quatre parties par ses médianes et il est engendré à partir de l'une d'elles par des réflexions.

• $\mathcal{D}$: Un **losange** est un quadrilatère invariant par réflexions autour de ses diagonales.

$\mathcal{P}$: On peut partager tout losange en quatre triangles par ses diagonales et il est engendré à partir de l'un d'eux par des réflexions.

• $\mathcal{D}$: Un **carré** est un quadrilatère invariant par un quart de tour (rotation à droite ou à gauche de 90°).

$\mathcal{P}$: On peut partager tout carré en quatre parties triangles ou quadrilatères et il est engendré à partir de l'une d'elles par quarts de tour répétés.

• $\mathcal{D}$: Un **polygone régulier** est un polygone qu'on peut tourner dans sa trace pour amener un côté sur le suivant.

$\mathcal{P}$: On peut partager tout polygone à n côtés régulier en n triangles et il est engendré à partir de l'un d'eux par rotations répétées de $\frac{1}{n}$ tour.

Tout triangle est un « demi-parallélogramme » : tout parallélogramme se partage en deux triangles symétriques par rapport à son centre par l'une ou l'autre des diagonales ; tout triangle peut être « doublé » de 3 façons en un parallélogramme par demi-tour autour du milieu de chacun de ses côtés.

Pour les différentes classes de triangles - leurs définitions se réfèrent aux précédentes :

• Un **triangle isocèle** est un « triangle demi-losange ».
• Un **triangle rectangle** est un « triangle demi-rectangle ».
• Un **triangle isocèle rectangle** est un « triangle demi-carré ».
• Un **triangle équilatéral** est un « triangle régulier ».

Ces propriétés des parallélogrammes et des polygones réguliers sont fonctionnelles. J'ai montré qu'elles permettent la découverte des propriétés de mesures ; elles donnent aussi celles des triangles : par exemple, l'aire des polygones se réfère à celle des triangles par découpages, qui se réfère à celle des triangles rectangles, qui se réfère elle-même à celle des rectangles par moitié ; la somme des angles d'un parallélogramme est naturellement de 360° puisque ses quatre secteurs se placent au centre de l'agrandissement ; donc la somme des angles d'un triangle est moitié, soit 180°, celle d'un quadrilatère 360° parce qu'il se coupe en deux triangles, …

---

[6]On peut faire le rapprochement avec les notions de domaine fondamental et de motif minimal d'un pavage du plan.

Une question se pose au sujet de ces définitions : doit-on les transmettre ou peut-on les faire découvrir par les élèves ? Le fait d'avoir utilisé les isométries dans la construction de dessins complexes ne suffit pas à en prendre conscience, mais en donne la chance. Les images mentales laissées par ces dynamiques peuvent permettre, au moment opportun, de découvrir les qualités de conservation qui leur ont donné ce nom.
La qualité « être un rectangle, parallélogramme, polygone régulier, … » n'est jamais le propre d'une figure particulière, mais d'une famille infinie. Et pour qu'un élève ait la chance de découvrir cette qualité, il doit exercer sa sagacité sur un grand nombre d'exemples de deux familles complémentaires : celles qui la possèdent et celles qui ne la possèdent pas.

Le travail remarquable de Britt-Mary Barth[7] donne des moyens que je vais esquisser sur l'exemple de la définition des polygones réguliers :
L'objet d'étude est inconnu, donc n'a pas encore de nom ; et pour éviter que le nom crée une image fausse préétablie, appelons-le « la chose ». Dans un premier temps, il s'agit de donner la règle du jeu :
« Je vais vous présenter des objets séparés en 2 familles par un critère que j'ai en tête et que vous allez découvrir. La première contient les exemples "OUI", qui vérifient tous le critère ; l'autre contient les "NON" qui ne le vérifient pas. Vous allez essayer de deviner ce critère. Toutes les idées seront notées au tableau. Elles seront ensuite rayées si elles ne sont pas un attribut essentiel de tous les "OUI" ».
Le premier exemple "OUI" sera par exemple un hexagone régulier et le premier "NON", un cercle. Chacun tente une distinction que l'enseignant écrit.
Les exemples "OUI" et "NON" seront ensuite choisis pour confirmer ou infirmer les hypothèses jusqu'à l'obtention d'un critère ou d'une liste de critères tous vérifiés par chaque "OUI" ; jamais totalement par chaque "NON".
Les questions posées par l'enseignant forceront les élèves à affiner leur analyse : Est-que ce critère est vérifié par *tous* les "OUI" ? Voyez-vous une autre *propriété commune* à *tous* les "OUI" ? ; Est-que cet exemple "NON" remet en cause certains critères énoncés précédemment ?
L'auto-évaluation consistera, pour chacun, à dessiner un essai de "OUI" et de "NON" ; l'enseignant saura si le critère est intégré en totalité ou si de nouveaux exemples ou un retour sur ceux qui sont présentés est nécessaire.
La difficulté est d'avoir présente une batterie significative d'exemples "OUI" et "NON" et de les donner au bon moment pour faire sentir l'adéquation ou la non-adéquation d'une hypothèse. Les exemples doivent présenter au départ une opposition franche ; puis, petit à petit, permettre de cerner le concept.

Traces graphiques, traces écrites

Quelles traces peut-on demander aux élèves dans l'optique envisagée ?

---

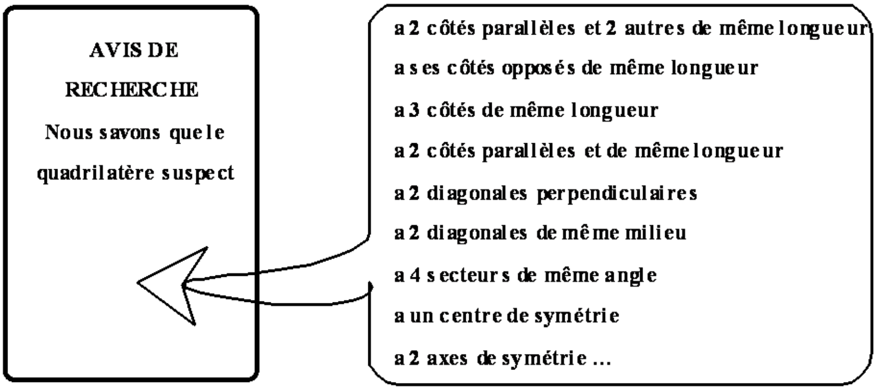
[7] L'apprentissage de l'abstraction, Britt-Mary Barth, 1987, Ed Retz

• D'abord le dessin géométrique, brouillon et définitif d'une configuration réalisée avec les gabarits, la règle et le compas qui peut être soit une création sur un thème (frise, pavage, mosaïque, étoile, couronne, …), soit la reproduction fidèle d'un modèle.
• L'explication écrite par un petit texte de la chronologie des tracés.
• L'analyse, dans une page de modèles, du « programme de construction » de chaque dessin (sans les réaliser effectivement).
• Sur des traces d'un gabarit, le collage de gommettes - ou le dessin figuratif - d'un animal, drapeau ou objet repère du mouvement.
• Dans l'angle de 2 miroirs placés à angle droit, placer successivement un gabarit rectangle, un carré, un triangle demi-rectangle, un triangle demi-carré pour former un parallélogramme particulier et représenter avec ces gabarits les configurations observées.
• Sur la trace double d'un gabarit de parallélogramme, rectangle, carré, le collage de gommettes de l'objet repère des mouvements.
• Sur la trace d'un parallélogramme, losange, rectangle, carré, le partage en quatre et le collage de gommettes de l'objet repère des mouvements.
• Sur une (ou des) trace(s) d'un gabarit, la mise en même couleur des propriétés de mesures repérées.
• La liste écrite de ces propriétés.
• Sur une fiche identité contenant une liste préétablie de propriétés, des cases "Vrai" ou "Faux" à cocher pour une figure donnée.

L'action réciproque, qui demande de savoir choisir parmi la liste des propriétés de mesure, lesquelles - ou quels sous-ensembles desquelles - permettent d'étiqueter la figure dans une famille, doit être abordé avec des activités adaptées, afin d'en permettre la prise de conscience.
Pour aborder ce point, j'ai essayé de construire plusieurs jeux de cartes où une propriété de mesure (*Polygone mystérieux, Avis de recherche*) est inscrite. (Le nom de ces jeux inclut une part de mystère, comme dans une enquête policière où on dispose d'indices parfois insuffisants, parfois suffisants pour découvrir un coupable). On tire une ou plusieurs cartes d'un jeu et, comme l'inspecteur, on essaie de trouver - ou construire - la figure inconnue à travers les indices recueillis [8].

---

[8] Voir les documents (manuel et cahiers) accompagnant la Moisson des Formes.



Plusieurs types d'actions sont possibles :

• A partir d'une figure, un « codeur » trie les cartes qui sont vraies ; le « décodeur » tire successivement des cartes et essaie de bâtir une sorte de « portrait-robot » de la figure à découvrir. Certaines cartes donneront des indices nouveaux, d'autres n'apprendront rien de plus.

• Avec le même départ, le codeur insère un « faux-témoignage » (incompatibilité). Le but est de trouver le « faux-témoin ».

• Par un tirage aléatoire dans l'ensemble des cartes, on peut chercher à construire une figure. Il est important alors de reconnaître les « faux-témoins ».

• Les cartes du jeu peuvent aussi être classées et rangées :

- classées par piles donnant des informations équivalentes.
- piles rangées lorsque les informations sont rangées par implication.

Bibliographie

PEYRARD, *Les œuvres d'Euclide,* trad., Librairie Blanchard [1966]

D. WHEELER, *Mathématiques pour l'École élémentaire*, . OCDL [1970]

B.-M. BARTH, *L'apprentissage de l'abstraction,* RETZ [1987]

B. BETTINELLI, *La Moisson des Formes* (livre et matériel) [1994] ; 5 cahiers (*Le dessin géométrique avec la Moisson des formes, niveaux 1, 2, 3* [1995] ; *Mesures* [1996] ; *Géométrie au Collège,* [98], 1 rue de la Perrouse 25 115 POUILLEY LES VIGNES

Quadrilatères particuliers

Hervé PEAULT

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactiques des mathématiques - Cahors 1991.

Cet article présente des activités réalisées dans le cadre de la formation initiale des professeurs des écoles.
A partir de quelques activités visant à resituer les connaissances géométriques sur les quadrilatères, on propose un essai d'analyse didactique et une étude comparée de séquences figurant dans des manuels.

Parmi les figures géométriques étudiées à l'école élémentaire, les quadrilatères occupent une place importante.

J'ai choisi cette année d'y consacrer plusieurs séances en FP2 (4 fois 2 h, plus une cinquième séance ultérieure sur le thème des triangles qui était à la fois un prolongement du travail et un moyen d'évaluation).

Objectifs

Permettre à chacun de *se* s'approprier *les* connaissances sur *les* quadrilatères particuliers

Faire vivre sur ce thème des activités à base de problèmes

Faire analyser ces activités en les resituant dans une conception de l'apprentissage et travailler à cette occasion quelques concepts de didactique (peu abordés en 1ère année pour certains des groupes concernés)

Donner les moyens d'analyser d'autres activités (notamment extraits de manuels) à partir de ces concepts de didactique

Ces objectifs ont été présentés dès le départ aux normaliens

Déroulement

I) Activités (4 h)

2) Analyse des activités (2 h)

3) Étude d'extraits de manuels sur les quadrilatères particuliers (2 h)

4) Étude d'extraits de manuels sur les triangles (2 h)

I - ACTIVITÉS

Activité 1

Apprentissage visé

Savoir reconnaître et définir par des conditions nécessaires et suffisantes les différents types de quadrilatères

Prendre conscience des relations entre ces différents types.

Situation

Deviner un quadrilatère en posant des questions

Matériel

Chacun dispose d'une feuille sur laquelle sont dessinés 25 quadrilatères divers (cf. page suivante). Un intrus (le 26) est un pentagone.

Organisation

par groupes de 3 ou 4

Consigne

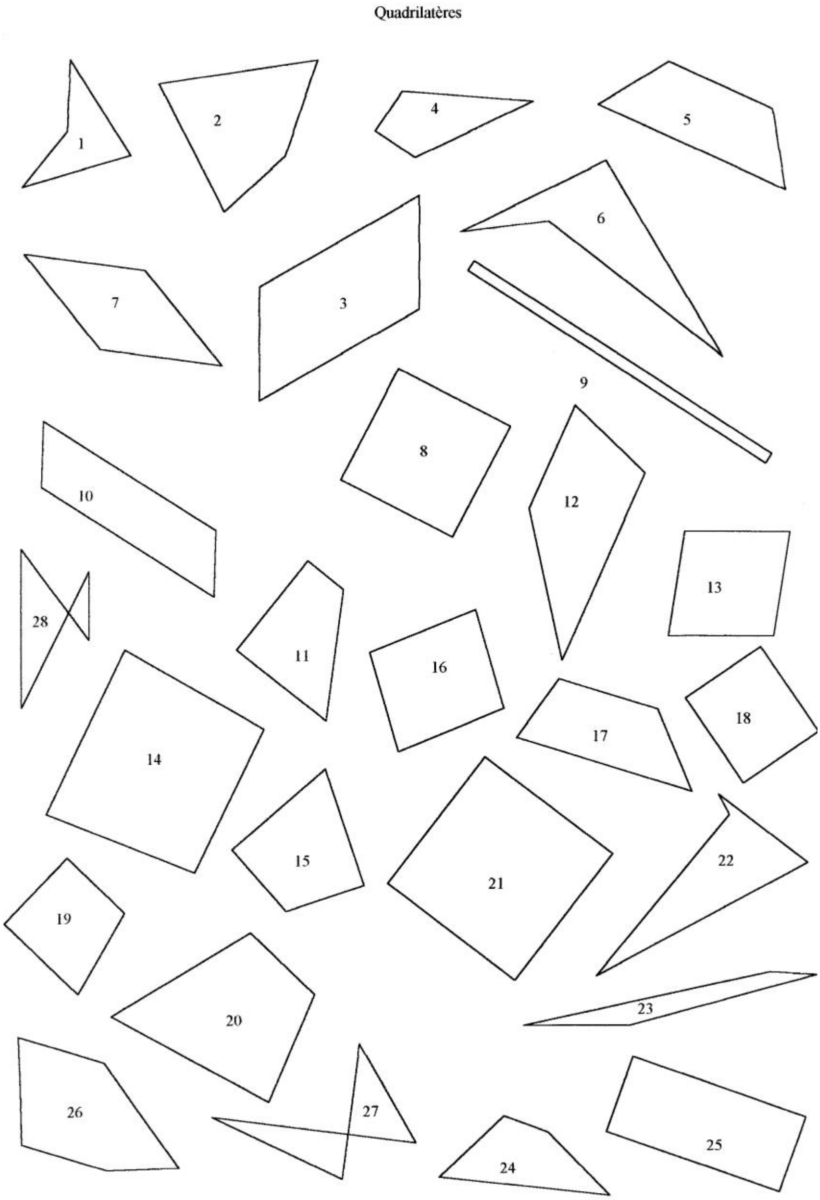
"J'ai choisi un des 25 quadrilatères de la feuille : vous devez deviner lequel. Pour cela, vous devrez me poser par écrit des questions (n'importe lesquelles sauf demander le numéro); je répondrai par écrit à toute question pourvu qu'elle ait du sens. Quand une équipe sera sûre d'avoir trouvé, elle indiquera le numéro de la figure. Essayez à la fois d'être rapides et de poser un minimum de questions. "

Déroulement

Une première fois, la figure choisie est le n° 10 (parallélogramme non rectangle), une seconde fois le 11 (trapèze rectangle avec 2 côtés consécutifs égaux) avec la consigne complémentaire de ne pas utiliser les dénominations usuelles des quadrilatères. Ceux qui terminent plus tôt sont invités à rechercher un système de questions qui, a priori, permettraient de reconnaître n'importe quel quadrilatère.

Remarques

- Le complément de consigne pour la deuxième recherche (ne pas utiliser les noms usuels des quadrilatères) s'est avéré inutile, aucun groupe n'ayant fait référence aux noms de quadrilatères (effet de contrat ?).
- Perpendicularité et parallélisme sont presque toujours estimés "à vue", ce qui conduira à des erreurs d'appréciation pour certaines figures.
- La distinction entre le 3 et le 10 ne pouvait se faire qu’à partir de considérations de longueurs ou d'angles. Aucune demande de mesure n'a été formulée (effet de contrat ?), les questions pour permettre la différenciation étant le plus souvent du genre "est-ce que le plus grand côté mesure moins de trois fois plus que le petit côté ?".



Pour enlever toute ambiguïté due à la photocopie, les dessins 8 et 18 sont bien des carrés, les dessins 7 et 16 sont bien des losanges, les dessins 1 et 4 sont bien des cerf-volants, etc.

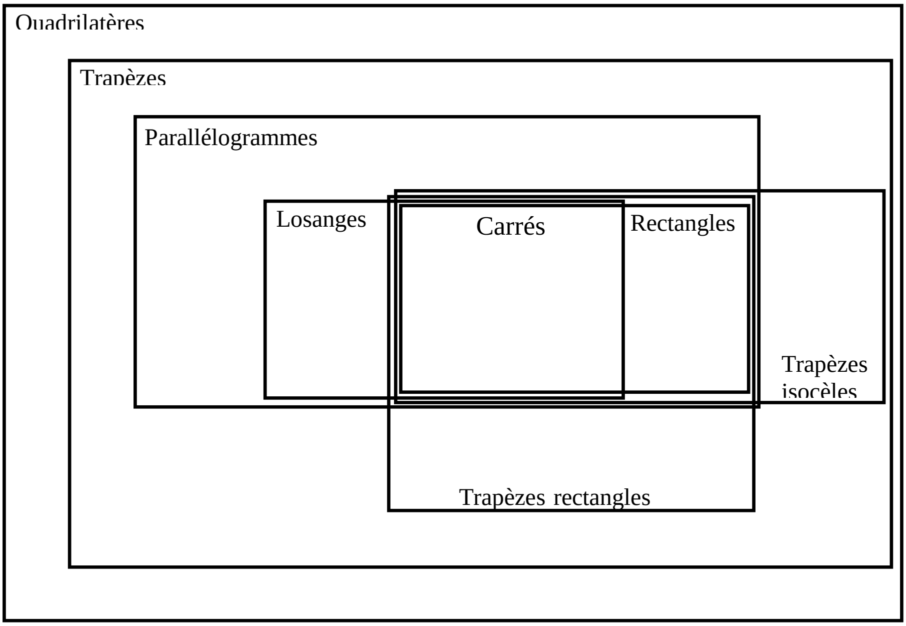
Mise en commun
Elle concerne le listage des différents critères utilisés (convexité, parallélisme, perpendicularité, égalité de longueurs, égalité d'angles. diagonales - auxquelles je fais référence si aucun groupe ne les a utilisées), l'examen de quelques questionnements (notamment ceux pour lesquels j'avais repéré des erreurs ou des redondances) et se prolonge à partir d'une nouvelle consigne.

Nouvelle consigne pour les groupes
"On ne conserve que les critères de convexité. Parallélisme de côtés, perpendicularité de côtés, égalité de côtés opposés, égalité d'angles.

1) Classer les figures en mettant ensemble celles qui sont indiscernables lorsqu' on s'en tient à ces seuls critères

2) Indiquer pour chaque classe une ou plusieurs caractérisations suffisantes à l'aide de ces critères. Attribuer les noms génériques, lorsqu'ils sont connus aux classes ou groupements de classes."

Mise en commun
Elle vise à caractériser de façon précise (conditions nécessaires et suffisantes) différents types de quadrilatères : quadrilatères convexes, trapèzes, trapèzes rectangles, trapèzes isocèles, parallélogrammes. rectangles, losanges, carrés, et à repérer les inclusions diverses. Celles-ci sont récapitulées par un schéma du type :



Activité 2

Apprentissage visé

Savoir organiser des informations géométriques sur des quadrilatères et en tirer d'autres par déduction

Réaliser des constructions élémentaires à l'aide des instruments usuels.

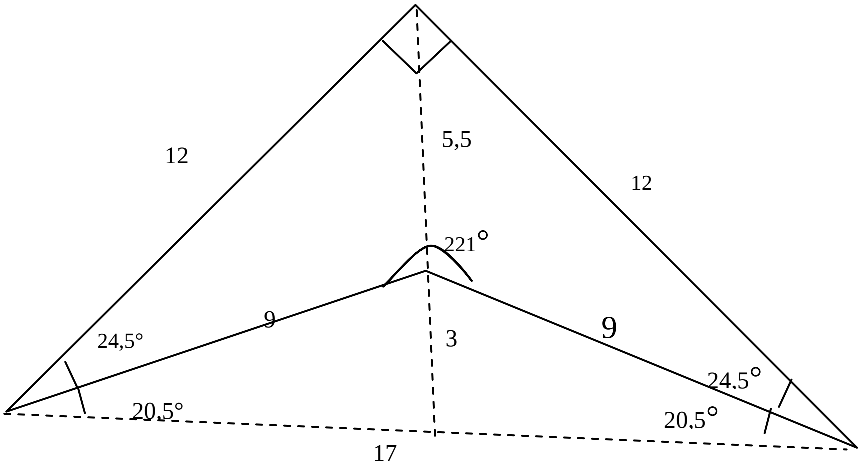
Situation

Reproduire un quadrilatère caché, à partir d'informations données ou à demander

Matériel

La figure ci-dessous est cachée

Chaque groupe dispose de papier blanc et de tous les instruments de tracé qu'il désire.



Organisation

par petits groupes

Consigne

"Sur une feuille j'ai dessiné un quadrilatère. Vous devez reproduire ce quadrilatère. Le dessin que vous réaliserez devra être superposable au mien. On vérifiera par transparence.

Vous ne pouvez voir mon dessin, mais je vous livre une partie des informations le concernant

- *il a au moins deux côtés perpendiculaires ;*
- *il a au moins deux angles égaux ;*
- *les côtés sont égaux deux à deux ;*
- *une diagonale mesure 17 cm ;*

- il a au moins un axe de symétrie ;
- l' un des côtés mesure 9 cm.

1l n'est pas sûr que les informations soient suffisantes ; si vous estimez qu'il vous en manque, vous pouvez poser par écrit de nouvelles questions (sans utiliser des noms de polygones), mais le moins possible. Chaque question supplémentaire donne un point de pénalisation. plus un autre si la demande porte sur une mesure de longueur. Si votre dessin me parait trop éloigné de l'original, vous ne serez pas autorisés de le vérifier et vous écoperez de 3 points de pénalité."

Mise en commun

Elle porte sur les déductions effectuées et les erreurs**.** Notamment, la plupart estiment d'emblée qu'il s'agit d'un quadrilatère particulier (effet de contrat ?) et donc d'un rectangle, puis d'un quadrilatère convexe de type "*cerf-volant*". Pour beaucoup, il faut longtemps avant de penser qu'il puisse s'agir d'une figure concave.

Par ailleurs, à la question "*les diagonales se coupent-elles en leurs milieux ?"* j'ai répondu "*au milieu de l'une d'elles seulement*". Cette réponse a soulevé par la suite des contestations et nous a amenés à rechercher des mots du type "diagonale" (diamètre, côté, hauteur, médiane,...) susceptibles d'être utilisés tantôt pour désigner un segment tantôt pour désigner la droite support.

Activité 3

(d'après une fiche de J. Bolon)

Apprentissage visé

- savoir organiser une construction géométrique de quadrilatère en fonction des informations disponibles
- pouvoir envisager diverses méthodes de construction

Situation

Élaborer des consignes pour la construction d'un quadrilatère avec des contraintes

Organisation

par groupes de 2

Consigne

"Je vais donner à chaque groupe un papier précisant une construction à faire faire par un autre groupe (il s'agit chaque fois d'un quadrilatère). A partir de ce papier, vous devrez rédiger un message permettant au groupe destinataire de réaliser la construction.

Aucun terme de désignation de polygone (trapèze, carré, etc..) ne devra être employé dans le message. Celui-ci devra être rédigé sous forme de succession d'actions élémentaires dont chacune sera de l'un des types suivants ;

- marquer un point
- tracer un segment de longueur donnée ou joignant 2 points donnés
- tracer une droite passant par 2 points
- reporter une longueur
- tracer une perpendiculaire à une droite passant par un point donné
- tracer un cercle ou un arc de cercle de centre et de rayon donnés.

Les messages seront échangés; pour la construction, vous pourrez utiliser la règle graduée, l'équerre et le compas; une fois la construction réalisée, les récepteurs essaieront de deviner quelle était la consigne donnée aux émetteurs et on comparera les réalisations et les messages."

Constructions à effectuer

- faire construire un carré ayant une diagonale de 10 cm

- faire construire un parallélogramme dont un côté mesure 5 cm et une diagonale 10 cm
- faire construire un losange dont les côtés mesurent 5 cm
- faire construire un trapèze ni rectangle ni isocèle dont les côtés parallèles mesurent 4 cm et 7 cm
- faire construire un parallélogramme dont une diagonale mesure 5 cm et l'autre 10 cm
- faire construire un parallélogramme non rectangle dont les côtés mesurent 5 cm et 10 cm
- faire construire un trapèze isocèle dont les côtés parallèles sont distants de cm et dont l'un mesure 7 cm
- faire construire un rectangle avant un côté de 5 cm et une diagonale de 10 cm
- faire construire un losange non carré avant une diagonale de 8 cm

Mise en commun

Elle s'effectue après que chaque groupe ait réalisé au moins une construction. Les plus rapides sont chargés d'écrire un message pour une nouvelle construction.

Plusieurs messages sont analysés avec chaque fois la question suivante renvoyée à tous : "*existe-t-il à votre avis une méthode de construction plus simple ?"*

Elle s'est prolongée autour de problèmes rencontrés : *"quelles procédures pour tracer la parallèle à une droite passant par un point donné ?". "quelles procédures pour tracer le milieu d'un segment ?"...*

II - ANALYSE DES ACTIVITÉS

Elle est menée de façon collective à partir du questionnaire ci-dessous. Pour chaque question, chacun prend un temps de réflexion et on note toutes les idées. J'essaie d'aider à synthétiser. Le débat ne suit pas vraiment l'ordonnancement des questions.

1) A travers ces 3 activités, quelles connaissances mathématiques, quels savoir-faire ont été étudiés? Estimez-vous que cela a été l'occasion pour vous d'un apprentissage?

2) Parmi les termes suivants ou d'autres encore. lesquels vous paraissent caractériser le mieux la façon. dont vous avez travaillé: observation, initiative, manipulation, écoute, activité, imitation, recherche, application, passivité, motivation, mémorisation, apprentissage, jeu, invention .... Lorsque plusieurs vous paraissent convenir, en quel ordre et dans quelle mesure les dispositions correspondantes vous paraissent avoir été sollicitées?

3) A votre avis, ces 3 activités ont-elles été conçues dans le même esprit? Qu'est-ce qui pourrait les caractériser par rapport à d'autres façons d'enseigner sur le même sujet ?

4) Au cours de ces activités, vous est-il arrivé de vous imposer des contraintes qui n'avaient pas été explicitement énoncées?

5) Pour chacun des problèmes posés lors de ces activités, essayez de retrouver les différentes procédures de résolution. qui sont apparues. Ces procédures étaient-elles conditionnées par la façon dont le problème était posé? Imaginez des "variations" de ces problèmes qui auraient entraîné d'autres modes de résolution.

6) Comment avez-vous su si votre travail était réussi ou non? Par une appréciation extérieure ou par vous-mêmes? comment?

Le débat autour de ces questions donne un support pour les notions de "problème", "situation d'apprentissage", procédures de résolution", "variables didactiques", " validation" "institutionnalisation", "contrat didactique", "connaissances outils/ connaissances objets".

Très rapidement viennent se greffer des questions liées à la transposition à l'école: "Peut-on faire ça dans sa classe? ou du moins travailler de façon analogue? Ne serait-ce pas coûteux en temps et difficile à mettre en œuvre ? " et ce travail est parfois perçu plus en tant que nouvelle norme de méthode d'enseignement ("il nous montre comment il faut faire") qu'en tant que moyen de s'approprier des instruments d'analyse.

III - ÉTUDE DE MANUELS SUR LES QUADRILATÈRES

Suivant les cas, j'ai proposé des extraits de manuels de CEl sur le thème "carré, rectangle" ou des extraits de manuels de CM2 sur le thème "quadrilatères particuliers".

Modalités de travail

- lecture individuelle de chacun des extraits
- étude par groupes du questionnaire proposé
- mise en commun

Questionnaire proposé

- Quelles sont, pour chacun des extraits. les connaissances et compétences auxquelles il est fait référence ?

- Y a-t-il des cas où les auteurs prévoient que l'apprentissage s'effectue à partir de problèmes que les enfants doivent résoudre?

- Dans ces cas, énoncer les problèmes et préciser les procédures de résolution qu'on peut attendre des enfants ainsi que les variables didactiques de la situation.

- Comment peut être envisagée dans chaque cas !a validation du travail des enfants ?

- Quel est chaque fois le savoir institutionnalisé ? A quel moment ?

- Pour autant qu'on puisse en juger sur cette documentation parcellaire, voyez-vous des différences, entre les différents manuels, dans les conceptions sous-jacentes de l'apprentissage ?

- Comment envisageriez-vous une ou plusieurs séquences sur le même thème, au même niveau ?

Extraits utilisés[1]

- *"Mathématique contemporaine CE1"* Thirioux (Magnard, 1975) p. 136-137

- *"Autour du carré à partir du cube"* (séquence R.T.S. – CE1 -juin 1975)

[1] NDLR : ce sont les manuels scolaires utilisés à cette époque dans les classes.

- *"Vivre les mathématiques CE1"* Jardy... (A.C. Bourrelier 1986) p. 77

- *"Objectif calcul CE1"* Clavier... (Hatier 1988) p.183-184

- *"L'Univers Mathématique CE1 "* Goergler... (L'école 1979) p.236-237

IV - ÉTUDE DE MANUELS SUR LES TRIANGLES

Modalité de travail
Travail écrit individuel
Les étudiants disposent du questionnaire et des extraits indiqués ci-dessous.

Questionnaire

1) Les triangles particuliers auxquels on s'intéresse généralement sont

> *- les triangles* ***isocèles****" (qu'on peut caractériser par l'égalité d'au moins 2 côtés)*
> *- les triangles "****réguliers****" dits "****équilatéraux****" (qu'on peut caractériser par l'égalité des 3 côtés)*
> *- les triangles "****rectangles****" (qu'on peut caractériser par la présence d un angle droit).*

Réalisez un schéma analogue à celui réalisé pour les quadrilatères, mettant en évidence ces différentes catégories et leurs éventuels recoupements.

2) Vous trouverez ci-joints 4 extraits de manuels de CM2 concernant l'étude des triangles.

a) Pour chacun d'eux, quels sont les connaissances et les savoir-faire auxquels il est fait référence ? Quelles remarques vous inspirent les propositions des différents auteurs ?

b) En vous inspirant ou non de ces extraits, donnez des exemples de situations-problèmes qui vous paraissent pertinentes pour un apprentissage sur les triangles avec des enfants de CM2

c) Développez l'un ou l'autre de ces exemples dans la perspective d'une mise en oeuvre dans une classe. en précisant vos choix didactiques.

Exploitation

Lors d'une séance ultérieure, nous sommes revenus sur ce travail à partir d'un document que j'ai proposé, apportant des éléments de réponse aux questions précédentes.

Extraits utilisés[2]

- *"Math et calcul* CM2" Eiller (Hachette 1988) p. 154-155

-*"Objectif calcul* CM2"Clavier... (Hachette 1988) p. 44-45

- *"La mathématique a*u CM1 et2"Caparros (Bordas 1981) p. 110.111

- "Maths CM2 - Calcul et géométrie" Chapuis (Nathan 1989) p. 54-55

[2] NDLR : ce sont les manuels scolaires utilisés à cette époque dans les classes.

Assemblages de triangles équilatéraux

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991.

Il s'agit d'une activité à proposer en formation initiale ou continue à des professeurs d'école pour traiter de questions géométriques relatives aux polygones, à la symétrie axiale et à la symétrie centrale et de questions de mesure relatives à l'aire et au périmètre de figures planes. Cette situation permet par homologie de réfléchir à la construction d'une séquence d'apprentissage pour des élèves de cycle 3. Cette situation a été initiée par Cécile Véron, ancien professeur d'école normale à Rouen et intègre un prolongement en logo sur l'idée de Sylviane Dupuis-Cogens, IEN à Neufchâtel en Bray

1- OBJECTIFS

a) Objectifs mathématiques

- Sans rappel préalable, réactiver les connaissances des étudiants ou stagiaires sur polygone, aire, périmètre, convexité, symétrie axiale, symétrie centrale.

- Illustrer l'émergence d'une propriété mathématique par le tri entre objets ayant cette propriété et objets ne l'ayant pas.

b) Objectifs didactiques

- Montrer une utilisation première du travail de groupe : échange et confrontation en vue de la constitution d'un matériel de travail commun.

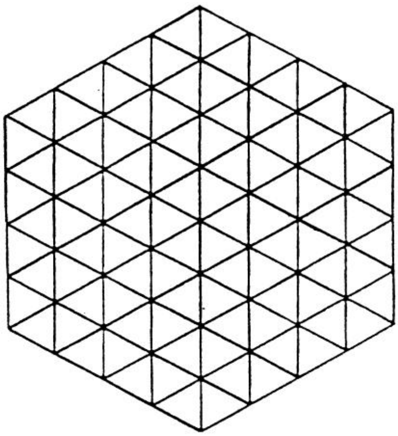
- Pointer la notion de cadre dans l'exploitation faite des classements : cadre numérique (dénombrement, mesure) et cadre géométrique.

2- ACTIVITE 1

But : constitution d'un stock de figures planes obtenues par assemblages de triangles équilatéraux.

Organisation : jeu à deux.

Matériel pour chaque groupe de deux
- Grille hexagonale de 96 triangles équilatéraux de côté 3 cm
- Dés à jouer classiques
- Crayons de couleur
- Ciseaux



a) Phase 1

Consigne 1

"Vous disposez pour deux d'une grille constituée de cases triangulaires. Vous décidez par un jet de dé le joueur qui va commencer; puis alternativement vous lancez le dé et vous coloriez autant de cases adjacentes que le nombre de points indiqué sur le dé, en essayant de faire le maximum d'assemblages différents. Si vous ne pouvez pas jouer, vous passez votre tour.
Des assemblages adjacents obtenus par des jets de dés différents doivent être de couleurs différentes. Si vous ne pouvez pas jouer, vous passez votre tour.
Le gagnant de cette phase est celui qui finit le premier le coloriage de la grille."

Remarques

1 - Le professeur peut demander aux joueurs de remplir une feuille de route avec les points tirés par chacun en cochant ceux qui n'ont pas pu être joués, ceci afin de permettre une vérification en fin de partie.

2 - Il peut également demander aux joueurs de mettre un signe de reconnaissance sur les assemblages qu'ils ont eux-mêmes coloriés (par le choix de couleurs attribuées à chacun par exemple).

3 - On observe différentes stratégies chez les étudiants ou stagiaires : certains partent d'un bord, d'autres du centre; certains collaborent, d'autres jouent de façon dispersée jusqu'au moment où ils constatent que cette stratégie est bloquante pour les deux joueurs.

b) Phase 2

Objectif
Distinguer la superposition sans retournement (nous dirons "mêmes formes" pour désigner des formes directement superposables) de la superposition après

retournement (nous parlerons alors de "formes symétriques" ou de formes “ jumelles ”).

Consigne 2

"Lorsque la grille est complètement coloriée, vous découpez les différents assemblages et vous gardez un seul exemplaire de chaque assemblage (deux assemblages qui ne sont superposables qu'après retournement sont considérés comme distincts).
Le groupe gagnant de cette phase est celui qui a obtenu le maximum d'assemblages différents ”.

Remarque

Dans cette phase, le fait que les assemblages aient été coloriés facilite la distinction entre superpositions directes et superpositions après retournement.

c) Phase 3

Objectifs
- Réinvestir l'analyse précédente : distinction entre “ mêmes formes ” et formes symétriques.
- Augmenter le stock de formes.

Consigne 3
"Par groupes de 4 (puis de 8), vous comparez les formes obtenues et vous ne conservez qu’un seul exemplaire de chaque sorte."

Remarque

A l'issue de cette phase, le professeur peut comptabiliser le nombre d'assemblages distincts de chaque groupe. Il peut également demander à chaque groupe de constituer un deuxième jeu pour avoir plus de matériel par la suite.

Il est intéressant de pointer le fait qu'à chaque regroupement le nombre d'assemblages distincts augmente, mais la recherche exhaustive de tous les assemblages possibles n'est pas un but de l'activité.

3- ACTIVITE 2

But
Faire émerger un certain nombre de propriétés des assemblages obtenus.

a) Déroulement

Matériel
Le jeu de pièces obtenues lors de la consigne 3

Organisation
Par groupes de quatre (ou de huit)

Consigne

"Avec le jeu de pièces que vous avez obtenues précédemment, vous allez proposer divers classements de ces pièces en essayant de préciser le critère qui vous permet de réaliser ce classement.
Dans chaque groupe, un secrétaire note les critères retenus et les classements correspondants."

Remarque

Le professeur précise les conditions requises pour qu'il s'agisse d'un classement effectif.

Mise en commun

Chaque groupe vient présenter les classements réalisés.

b) Les divers classements : analyse et exploitation en termes de propriétés mathématiques

1) Le **classement par le nombre de triangles** constituant l'assemblage permet de pointer la notion d'aire (si on choisit le triangle de base comme unité d'aire, la mesure de l'aire de l'assemblage est le nombre de triangles utilisés).

2) Le **classement par le nombre de côtés** permet de préciser l'origine du vocabulaire lié aux polygones, de l'associer au classement par le nombre de sommets et de rappeler la propriété : pour les polygones, le nombre de sommets est égal au nombre de côtés.

3) Le **classement par le nombre de côtés de triangles de base** dans le contour de l'assemblage permet de pointer la notion de périmètre et notamment de différencier numériquement les notions de périmètre et d'aire. On constate en effet que deux assemblages peuvent avoir même périmètre sans avoir la même aire, d'où une nouvelle question : peut-on trouver des assemblages ayant même aire et des périmètres différents, des assemblages ayant même aire, même périmètre mais de formes différentes ?

4) Le lot d’assemblages comporte toujours des **figures superposables** non pas directement, mais **après retournement**. Deux telles figures seront désignées par la suite par l'expression "figures jumelles".
Le classement des assemblages selon l’existence ou non de figures jumelles est retravaillé collectivement même s'il n'est pas proposé par les différents groupes.

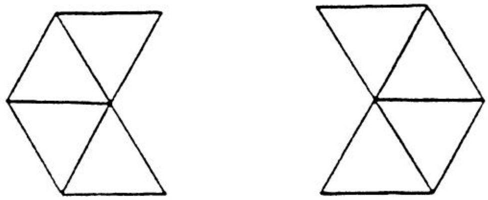
Consigne

"Dans chaque groupe, vous effectuez le classement en deux classes : figures ayant leur jumelle et les autres; et pour chaque figure n'ayant pas de jumelle dans le stock de vos pièces, cherchez s'il est possible de construire sa jumelle."

Constats

- Deux figures jumelles se superposent seulement après retournement.

Ceci n'est pas évident pour tous les étudiants ou stagiaires ; par exemple, les deux assemblages ci-dessous leur paraissent jumeaux alors qu'ils se superposent sans retournement.



- Lorsque deux figures sont jumelles, on peut les positionner dans le plan de telle sorte qu'il existe une symétrie axiale transformant la première en la seconde (et vice-versa).

- Certaines figures n'admettent pas de jumelle.

Consigne

"Dégagez les particularités des figures n'admettant pas de figure jumelle."

Il s'agit ici de dégager la notion d'axe de symétrie : les figures n'ayant pas de jumelles admettent au moins un axe de symétrie.

5) Cette phase peut être prolongée par un **classement suivant le nombre d'axes de symétrie.**

6) **Autres classements**, proposés ou imposés :
- figures convexes, figures non convexes ;
- figures ayant un centre de symétrie (elles coïncident exactement avec leur empreinte après un demi-tour), mise en relation avec la parité du nombre d'axes de symétrie ;
- assemblages réalisant ou non un patron de solide (tri par anticipation, validation éventuelle par construction).

c) L'institutionnalisation choisie

- La symétrie axiale

Notion d'axe de symétrie, notion d'invariant (figures ayant des axes de symétrie), aspect *statique* de la symétrie axiale.

Notion de transformation (figures se déduisant l'une de l'autre par symétrie axiale), aspect *dynamique* de la symétrie axiale..

Mise en relation de ces deux aspects : une figure possède un axe de symétrie **d** si et seulement si elle est invariante par symétrie axiale d'axe **d**.

- Lien avec la symétrie centrale.

d) Petite analyse didactique

- L'aspect ludique de la phase 1 permet une entrée rapide dans la tâche d'analyse des figures obtenues.
- La construction du matériel par les étudiants ou les stagiaires au cours du jeu permet une appropriation rapide des propriétés des figures obtenues.
- La mobilité des figures étudiées permet de dégager les propriétés intrinsèques des figures indépendamment de leur orientation dans le plan.
- Les activités de classement dichotomique ont pour but l'émergence de certains concepts (convexité, existence d'axes de symétrie...). On retrouve ici un point de vue piagétien de l'émergence de certains concepts.
- Le matériel se prête bien à une distinction aire périmètre des figures planes et permet de pointer l'importance du choix des unités de mesure pour effectuer des comparaisons.

L'étude a posteriori du déroulement de la séance permet de pointer les différents rôles des phases d'action, de formulation, d'institutionnalisation dans un processus d'apprentissage.

e) Travail individuel

- **Rédiger une fiche de préparation** pour une activité pour des élèves à partir d'assemblages de figures (carrés, triangles rectangles isocèles ou triangles équilatéraux).

- **Construire un jeu de cartes** permettant un travail de reconnaissance de formes à partir des assemblages obtenus (le jeu est constitué d'assemblages jumeaux dans des positions variées et d'un assemblage n'ayant pas de jumeau). Proposer diverses règles du jeu (jeu de mariage, mémory, jeu de l'intrus ou du pouilleux, etc.).

4 - ACTIVITE 3

Prolongements possibles avec LOGO
(Ce prolongement a été mis au point après un échange avec Sylvianne Dupuis – Cogens)

Objectifs
- Etude de triangles réguliers ; propriétés angulaires.
- Comparaison d'unités de longueur.

Reproduction d'assemblages à l'écran

- En mode direct avec les primitives usuelles.
- En mode direct avec la primitive “ triangle régulier ” .
- En mode programme avec deux options :
    - le professeur impose le côté du triangle-écran en pas de tortue;
    - le professeur demande un triangle-écran superposable au triangle du jeu. On pourra ensuite dans ce cas proposer une étude des périmètres des différents assemblages en fonction de l'unité de longueur choisie : côté de triangle équilatéral, centimètre, pas de tortue, et pointer la proportionnalité entre les différentes mesures obtenues.

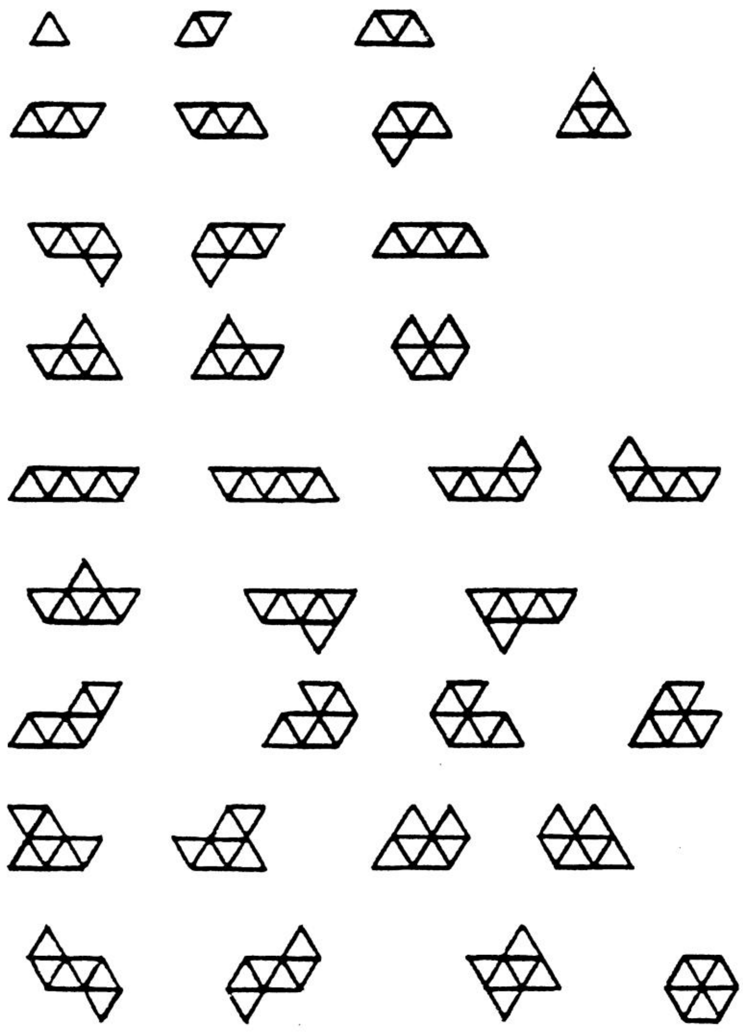
Fabrication d'assemblages

- Avec contrainte de périmètre.
- Avec contrainte d'aire.

Travail individuel

Construction d'une situation de classe présentant une démarche analogue.

Recensement des différents assemblages pouvant être obtenus



« Le napperon » Un problème pour travailler sur la symétrie axiale

Marie-Lise Peltier

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Besançon, mars 1997. Reprise également d'un article publié dans la revue grand N(n° 68 en 2000-2001).

Cet article relate une situation de formation initiale ou continue de professeurs d'école. Il présente une situation de formation de type homologie transposition en PE2 ayant pour bu d'initialiser un cours sur la symétrie axiale et de conduire *les stagiaires à réfléchir sur la notion de problème en géométrie à l'école élémentaire.*

Introduction

Les instructions officielles de l'école primaire mettent l'accent sur le rôle de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques. Mais si dans le domaine numérique les professeurs stagiaires se sentent généralement à même de construire ou de choisir des problèmes permettant aux élèves de développer une réelle activité intellectuelle et de construire certaines connaissances, il leur est souvent plus difficile d'envisager en géométrie une activité qui puisse être un "problème" pour les élèves. Pour nombreux d'entre eux, les problèmes en géométrie sont liés à la notion de démonstration, et relèvent donc du collège. L'enseignement de la géométrie à l'école leur paraît souvent proche de la "leçon de chose", c'est à dire une succession de séances où il s'agit d'introduire du vocabulaire, de donner quelques définitions, de faire "manipuler" les élèves.

La situation de formation présentée ici fait intervenir la notion de symétrie axiale comme réponse à un problème et permet de mettre en avant :
- le rôle de l'anticipation : il est nécessaire de faire des hypothèses, d'anticiper l'action, avant de l'exécuter ;
- le rôle de la manipulation : ici la manipulation est support pour l'anticipation.

Elle a donc pour objectifs de permettre aux stagiaires PE2 ou aux professeurs d'école en formation continue de mener une réflexion sur les problèmes tout en revisitant la notion de symétrie axiale dans le plan et quelques unes de ses propriétés. Dans l'analyse didactique de la séance, la réflexion porte aussi sur le rôle de l'erreur dans la situation, sur la notion de théorème en acte, sur la validation.

Description de l'activité

Les stagiaires doivent reproduire un "napperon" en papier qui est affiché au tableau. Il est précisé que ce napperon doit être réalisé en pliant une feuille de papier et en découpant tout ce que l'on souhaite, puis de déplier et de comparer avec le modèle. Une contrainte est imposée : les stagiaires doivent effectuer tous les pliages souhaités avant de découper puis tous les découpages souhaités avant de déplier le napperon.

1. Analyse préalable

1.1. Les variables de la situation

Le choix des découpes du napperon est très important. En fonction de ce choix, la réflexion pourra être centrée :
- sur les positions relatives des différentes découpes et sur des questions d'orientation
- sur la forme des découpes : celles-ci peuvent être choisies de telle sorte que l'exécutant utilise implicitement des "théorèmes en acte"[1] relatifs à l'existence d'axe(s) de symétrie dans certaines figures pour obtenir le résultat souhaité. Par exemple pour obtenir une découpe ayant la forme d'un triangle isocèle, on coupe perpendiculairement au pli, ce qui revient à appliquer la propriété suivante "dans un triangle isocèle l'axe de symétrie est également hauteur".

Le nombre d'axes de symétrie du napperon est également une variable à étudier (Annexe1).

- Un seul axe rend la tâche trop aisée pour être proposée en formation (exemple 1)
- Le choix de deux axes est intéressant dans la mesure où le degré de complexité est raisonnable et le temps est assez facile à gérer (exemples 2, 3)
- Le cas de 4 axes, également intéressant, peut être choisi pour travailler sur les axes de symétrie des polygones usuels. (exemples 4, 5, 6, 7).
-Celui de 6 axes (exemple 8) nécessite un pliage en trois qui permet de proposer la situation en tant que prolongement aux stagiaires les plus rapides.

Le fait de laisser apparents ou non les plis du modèle, d'introduire des plis parasites, ou de les supprimer complètement peut avoir une incidence sur les stratégies des stagiaires dans la mesure où ils sont des indices pertinents ou non à prendre en compte.

Une photocopie du modèle pour chaque stagiaire est souhaitable de manière à permettre une analyse individuelle précise, mais cette reproduction du modèle doit être de dimension différente de celle des feuilles qui seront distribuées pour

[1] Notion empruntée à G.VERGNAUD

être découpées afin d’éviter le recours au décalquage des découpes sur le modèle.

1.2. Les critères de conformité au modèle

Les réalisations seront considérées comme conformes au modèle lorsque les éléments suivants auront été respectés :

le nombre de pliage
le nombre de découpes
la forme[2] des découpes
les positions relatives des différentes découpes
l'orientation des découpes.

1.3. Les procédures envisageables

- Identification du nombre d'axes de symétrie et réalisation des pliages associés, repérage des éléments à découper,
- Pliage en deux quel que soit le nombre d'axes de symétrie et reproduction des découpes sur ce pliage en deux,
- Pliage en deux ou en quatre puis reproduction par découpage sur le papier ainsi plié de toutes les découpes du modèle complet,
-Pliage en deux ou en quatre , découpages de certaines parties, dépliage et rectification sur la feuille dépliée.

1.4. La validation

La validation se fait par confrontation visuelle au modèle. Bien évidemment les réalisations obtenues ne sont pas superposables au modèle. Ce qui doit être respecté, comme il a été indiqué ci-dessus, ce sont les formes géométriques des découpes, leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.
Il est nécessaire de proposer des modèles tels que les stagiaires puissent décider tout seuls s'ils ont ou non réussi, il est donc important que les erreurs éventuelles soient visibles et pour cela il importe de choisir des napperons avec des découpes de formes différentes et en nombre différent sur chacun des axes et sur deux côtés consécutifs du carré.

1.5. La prise en compte des essais et des erreurs

Les essais erronés sont intéressants à conserver. Ils ont plusieurs fonctions.
- La première, tout à fait fondamentale, est de permettre à son auteur de mener une réflexion et une analyse fine des effets d'un découpage sur un papier plié en 2, en 4, ou en 6. L'erreur peut alors être un point de départ pour affiner la ré-

[2] La notion de forme d'une découpe est délicate. Pour les stagiaires, c'est la forme au sens euclidien qui devra âtre conservée, ainsi par exemple les quadrilatères et les triangles particuliers devront être reproduits comme tels, les alignements devront être respectés, c'est la raison pour laquelle il est souhaitable que les stagiaires disposent d'un modèle individuel pour pouvoir l'analyser..

flexion : en analysant l'effet de telle découpe sur le papier déplié, le stagiaire fera des hypothèses sur les modifications à effectuer pour obtenir le résultat souhaité[3]. L'erreur acquiert ainsi un statut positif, voisin du statut qu'elle a dans la recherche.
-Une seconde fonction provient du fait que chaque réalisation, ayant été obtenue, par pliage admettra au moins un axe de symétrie. Il sera donc possible dans une seconde partie de travail de mettre en évidence les axes de symétrie des différents napperons, de faire des constats sur le motif minimum à conserver dans chaque cas pour obtenir le napperon complet en appliquant à ce motif les symétries axiales mises en évidence.

1.6. La synthèse et l'institutionnalisation

La synthèse portera à la fois sur les aspects mathématiques et didactiques :

- la notion d'axe(s) de symétrie d'une figure plane ;
- les axes de symétrie de figures usuelles (triangles, isocèles, losange, rectangle, orthogone, carré, demi cercle, cercle etc. ;
- La notion de centre de symétrie dans le cas d'un nombre pair d'axes de symétrie ;

ainsi que sur les notions didactiques de variables, dévolution, théorème en actes, validation, institutionnalisation.

2. Déroulement de la séance

Sur le plan matériel, il est important de prévoir :
- deux modèles grand format du napperon pour le tableau afin de pouvoir plier et manipuler l'un d'eux lors des mises en commun,
- des modèles individuels comme il a été indiqué au paragraphe 1.1,
- de nombreuses feuilles de papier aux dimensions souhaitées pour la réalisation des napperons (dimensions différentes de celles des modèles individuels),
- un ou plusieurs napperons supplémentaires plus complexes pour gérer le temps (napperons présentant davantage de découpes, éventuellement plus d'axes de symétrie pour les stagiaires rapides),
- des paires de ciseaux pour chaque stagiaire.

2.1. Phase de recherche

Un "napperon" est affiché au tableau (cf. annexe 1).
Consigne :
Vous devez reproduire le napperon qui est affiché. Pour cela vous devez effectuer tous les pliages que vous jugez nécessaires, puis, sans déplier, vous devez

[3] Ainsi par exemple, si un stagiaire effectue une découpe en forme de demi cercle sur un bord du papier plié en quatre au lieu de l'effectuer sur un pli, il constate en ouvrant qu'il n'obtient pas les cercles souhaités mais des demi cercles sur les bords du napperon. Lors de l'essai suivant le stagiaire prend en compte la position du cercle à découper par rapport au pli effectué donc à l'axe de symétrie concerné.

effectuer tous les découpages que vous jugez nécessaires, enfin vous déplierez et comparerez votre réalisation avec le modèle. S'il y a conformité, vous avez "gagné", sinon, vous conservez votre réalisation, sans la froisser, sans la jeter, pour pouvoir l'étudier et vous recommencez avec un autre papier.

Les critères de réussite sont précisés :
Un napperon sera considéré comme "conforme" au modèle si les formes géométriques des découpes sont respectées ainsi que leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.

Après un temps de recherche, on constate que les stratégies sont nombreuses et variées :
- certains identifient rapidement le nombre d’axes de symétrie et font des pliages en conséquence
- d’autres plient seulement en deux et essaient de reproduire les découpes sur ce pliage en deux
- d’autres sont encore plus déroutés et effectuent un premier pliage en deux ou quatre, découpent certaines parties ouvrent et oubliant la contrainte imposée par la consigne, complètent les découpages sur la feuille dépliée.

Dans tous les cas, on peut noter une attention soutenue.
Lors du dépliage, les stagiaires peuvent être très surpris des résultats obtenus car leur napperon est souvent extrêmement différent du modèle. Les erreurs peuvent porter sur la forme des découpes, leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.

La validation se fait individuellement par confrontation au modèle en s'appuyant sur les critères de réussite définis précédemment.
La quasi totalité des stagiaires n’a aucune difficulté à effectuer correctement cette comparaison individuelle avec le modèle. Il se peut cependant qu’un ou deux stagiaires croient, à tort, avoir réussi. Un questionnement dirigé du formateur permet généralement à la personne concernée de prendre conscience de ce qui ne convient pas. Dans certains cas, il est nécessaire que le formateur attire l’attention d’un stagiaire sur certaines “ erreurs ” de sa réalisation en particulier pour les questions d’orientation ou les questions de positions relatives.
Généralement au premier essai peu de stagiaires réussissent la tâche. Après constat de la non conformité au modèle, la majorité des stagiaires reprennent le premier essai, le replient, l'ouvrent plusieurs fois, avant d'effectuer pliages et découpes sur la nouvelle feuille. Les erreurs sont donc ici analysées pour être dépassées.
Le nombre d'essais avant l'obtention d'une réalisation conforme au modèle est très variable suivant les stagiaires. Quelques uns réussissent du premier coup, dans ce cas le formateur leur donne individuellement un autre napperon plus complexe à reproduire pour permettre aux autres stagiaires de terminer l’activité. Pour d'autres, plusieurs essais sont nécessaires pour que le résultat soit jugé satisfaisant par son auteur.

2.2. Mise en commun des productions et des stratégies

Lorsque la totalité des stagiaires a obtenu un résultat satisfaisant, le professeur propose une mise en commun des différentes stratégies utilisées, qu'elles aient abouti ou non, et des productions correspondantes (le professeur prend soin de choisir des productions erronées qui relèvent de types différents[4]).
Lors de cette mise en commun, les stagiaires proposent généralement deux types de stratégies :

- Repérer les axes de symétries, déterminer un domaine fondamental dans lequel se trouve le motif minimum, déterminer le pliage à effectuer pour obtenir ce domaine fondamental, positionner le papier plié de manière à pouvoir exécuter les découpes en fonction du motif identifié dans le domaine fondamental. Cette stratégie est efficace et experte, elle est proposée par les stagiaires avec des formulations diverses.
- Identifier les découpes qui se répètent, plier en fonction du nombre de répétition, découper des moitiés ou des quarts de motifs à partir de l'analyse des répétitions. Cette stratégie peut être efficace, mais dans de nombreux cas, les stagiaires ont tellement fait tourner le papier plié que les découpes qui devraient se trouver au centre se trouvent sur les bords et vice versa.

Les productions correspondantes sont étudiées collectivement. Pour celles qui ne sont pas conformes au modèle les erreurs sont repérées et analysées (nombre de découpes, place des découpes, position relatives, forme, orientation).

2.3. Synthèse

Point de vue mathématique

Notion d’axe de symétrie d’une figure plane.
Eléments de symétrie des figures usuelles (triangle isocèle, losange, rectangle, carré, demi cercle, cercle, etc.)
Lien entre symétrie axiale et symétrie centrale : lorsqu'une figure admet deux axes de symétrie et deux seulement, ces axes sont perpendiculaires et leur point commun est un centre de symétrie de la figure.

[4] Le professeur choisit des napperons qui ont été abandonnés parce que considérés comme non conformes par leurs auteurs, éventuellement des napperons que leurs auteurs considèrent à tort comme conformes. Il est souhaitable de présenter au débat des napperons ne présentant pas le nombre d'axes de symétrie requis, des napperons ne présentant pas le nombre correct de découpes, des napperons présentant des inversions dans les positions relatives des découpes, des orientations erronées, de manière à ce que l'analyse menée sur ces réalisations conduise à mettre en évidence les différents critères de conformité au modèle. On trouvera en annexe 2 des exemples de napperons réalisés par des stagiaires ayant été affichés pour la mise en commun lors de la réalisation du modèle n°3.

Point de vue didactique

Le rôle de l’anticipation : l’anticipation est nécessaire pour répondre à la consigne et effectuer le découpage demandé.

Le rôle de l’erreur : dans cette situation, le rôle positif de l'erreur est mis en évidence : en effet, c'est bien souvent en analysant une production erronée qu’il est possible de prévoir ce qu’il faudrait faire pour obtenir tel ou tel résultat.

La validation : elle est ici en partie à la charge du stagiaire

La notion de théorème en acte. Donnons deux exemples.
Pour obtenir une découpe ayant la forme d’un triangle isocèle, le stagiaire découpe perpendiculairement au pli. Il utilise ici en acte une propriété relative au triangle isocèle : “ l’axe de symétrie d’un triangle isocèle est également hauteur du triangle ”
Pour obtenir un carré à partir d’un pliage en quatre, le stagiaire découpe en formant un angle de 45°, il utilise ici implicitement la propriété relative au carré : “ les diagonales du carré sont axes de symétrie et bissectrices des angles ”.

Le rôle des manipulations en géométrie. Il est clair que pour la majorité des stagiaires que les manipulations en géométrie ont pour rôle de permettre aux élèves de se constituer un lot d’expériences. Il est nécessaire de rappeler cependant que ces expériences ne pourront être mobilisées que si elles ont été décrites au moment de l’action et surtout évoquées après avoir été menées, de manière différée et sans retour à la manipulation. Mais les manipulations ont d’autres fonctions qu’il est nécessaire de mettre en avant : elles peuvent servir de support à l’anticipation, ce qui est le cas dans cette situation du napperon, elles peuvent également permettre une forme de validation pragmatique à l’école élémentaire.

La gestion du temps : le temps pour réaliser correctement la tâche est très variable. Il est donc nécessaire de prévoir des prolongements, ici d'autres napperons, pour les plus rapides afin de gérer convenablement le temps de la séance et l’hétérogénéité du groupe.

Transfert à l’école élémentaire

Une adaptation de cette situation est envisagée pour des élèves de classes de cycle 2 et 3.
L’article publié dans grand N n° 68 (2000-2001) est distribué.
Le rôle des variables didactiques est alors mis en avant.
L'activité des élèves au cours de cette situation est étudiée.
Une première phase de manipulation libre permettant l'entrée dans l'activité est nécessaire pour pouvoir dévoluer la tâche de reproduction aux élèves. Dans cette phase d’accumulation d’expériences, la main travaille, mais l'esprit est peu sollicité. Au moment de l'observation de leurs réalisations, certains élèves peuvent

développer une activité de pensée en cherchant à justifier les constats qu'ils peuvent faire, mais cette activité n'est pas à proprement parlée requise pour réaliser la tâche demandée.
Dans la deuxième phase, lorsqu'il s'agit de reproduire le modèle, l'esprit est mobilisé en même temps que la main. L'enfant développe une réelle activité cognitive, il anticipe son action, il la prévoit, la manipulation sert à réaliser matériellement cette anticipation et à la valider. C'est dans cette deuxième phase que l'on peut parler d'activité mathématique.
Pour prendre tout son sens dans une progression sur la symétrie axiale, la situation présentée ici, devra être adaptée à la classe dans laquelle elle sera proposée et devra bien sûr être suivie de nombreux exercices d'entraînement et de nouveaux problèmes avant de donner lieu à des exercices d'évaluation qu'il sera d'ailleurs judicieux de différer dans le temps. Ce n'est pas en effet après une seule rencontre avec une notion qu'il est possible de savoir si les élèves se sont approprié certaines propriétés de cette notion. Il faudra de même attendre que d'autres notions aient été étudiées, pour évaluer la capacité des élèves à reconnaître par eux-mêmes des situations relevant de la symétrie axiale et à les traiter correctement.

Conclusion

Pour conclure cette séance, le formateur revient sur la notion de problème et sur l'activité mathématiques. Les point suivants sont mis en avant.
Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes en développant un raisonnement. Pour que cette activité cognitive puisse avoir lieu le problème doit vérifier certaines caractéristiques[5] notamment les suivantes :
- **Le problème doit mettre en jeu la connaissance (la notion, la technique) dont l'apprentissage est visé**. Ici, une reproduction conforme au modèle du napperon nécessite la reconnaissance de l'existence d'un ou plusieurs axes de symétrie, et l'utilisation de ces axes comme droite de pliage.
- **Le problème doit être "consistant", c'est à dire que la réponse ne doit pas être évidente sinon ce serait simplement un exercice d'entraînement**. Dans l'activité proposée, c'est le choix du modèle pour le niveau de classe déterminé qui assurera la consistance.
- **L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution avec ses connaissances antérieures, mais il doit aussi avoir à chercher pour les adapter et les faire évoluer**. La phase initiale de manipulation libre permet aux élèves de s'engager dans la tâche de reproduction, mais les critères de conformité au modèle le conduisent à éprouver ses connaissances et éventuellement à les faire évoluer.
- **La validation doit être le plus possible à la charge de l'élève (on parle d'auto validation)**. Dans la situation du napperon, cette auto validation est assurée pour un grand nombre d'élèves. Mais pour certains autres élèves, le professeur

[5] Ces caractéristiques ont été mises en évidence par R. DOUADY, RDM.7.2. La pensée sauvage (1987).

devra jouer son rôle de médiateur en questionnant l'élève de manière à le guider vers les bonnes questions.
- **Le problème doit pouvoir servir de référence pour la notion et pour la classe**. Cet aspect me paraît très important à souligner. En effet, s'il est nécessaire de penser l'enseignement en prenant en compte l'hétérogénéité des élèves et en prévoyant de différencier certaines tâches, une différenciation a priori au moment où les élèves vont avoir à travailler sur une notion nouvelle (ou reprise d'une année antérieure), à construire certaines de ses propriétés ou à se les approprier, il serait très regrettable et dommageable d'exclure certains élèves des situations censées permettre de construire du sens et d'hypothéquer ainsi toutes possibilités ultérieures de faire appel à cette situation pour mobiliser la mémoire de tous les élèves. Par ailleurs, il me semble important que chaque élève ait à chaque fois "sa chance" sur l'étude d'une nouvelle notion et n'ait pas à subir son éventuelle image d'élève faible ou en difficulté[6] avant même d'avoir été confronté au problème posé.

Séance suivante

Cette séance est suivie d'une séance consacrée à des rappels mathématiques relatifs à la symétrie axiale dont les grandes lignes sont les suivantes.
Différents aspects de la symétrie axiale sont présentés :
➢ La symétrie axiale est une transformation ponctuelle qui transforme une figure en une autre figure, c'est une isométrie négative involutive (aspect dynamique)
➢ La symétrie axiale est une transformation ponctuelle ayant de nombreux invariants (point de vue statique) ce qui pédagogiquement correspond à la recherche des axes de symétrie des figures usuelles.

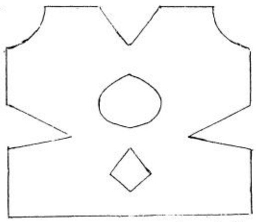
Sur le plan didactique, le formateur met en évidence le rôle de l'analyse mathématique pour concevoir une progression sur la symétrie axiale à l'école élémentaire, pour envisager les situations et les matériels favorisant les changements de points de vue statique et dynamique, le passage du global au local, etc.

La séquence de formation sur le thème de la symétrie se termine par l'étude de quelques pages de manuels. Cette étude est focalisée sur un point précis, Par exemple l'étude de l'introduction de la notion dans différents manuels à un niveau donné, ou bien l'analyse de la progression sur le cycle 3 dans les manuels d'une même collection, ou encore l'analyse des résumés ou aide mémoire pour repérer ce qui est institutionnalisé dans un ou plusieurs manuels, etc.

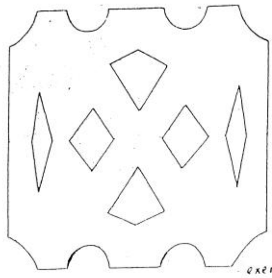
[6] "L'effet Pygmalion" a été mis en évidence par plusieurs chercheurs, notamment ROSENTHAL et JACOBSON (1975). Les prédictions négatives des enseignants sur certains de leurs élèves se vérifieraient d'autant plus qu'elles seraient "attendues" et par certains aspects construites par les enseignants eux-mêmes. On pourraient dire que certains enfants se conformeraient à l'image que l'enseignant leur renvoie.

Dans certains cas, ce travail sur la symétrie axiale peut être repris dans le cadre d'un module optionnel “ arts et mathématiques ” consacré à l'étude des dessins à motifs répétitifs rosaces, frises, pavages dans les arts graphiques, plastiques ou dans l'architecture.

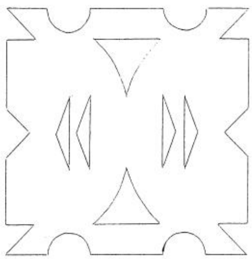
Annexe 1



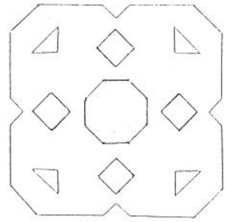
exemple 1



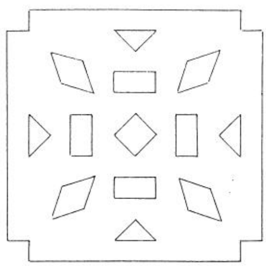
exemple 2



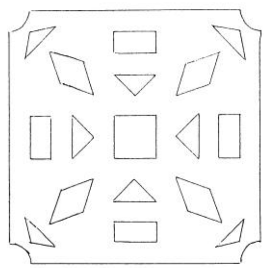
exemple 3



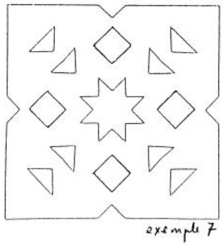
exemple 4



exemple 5



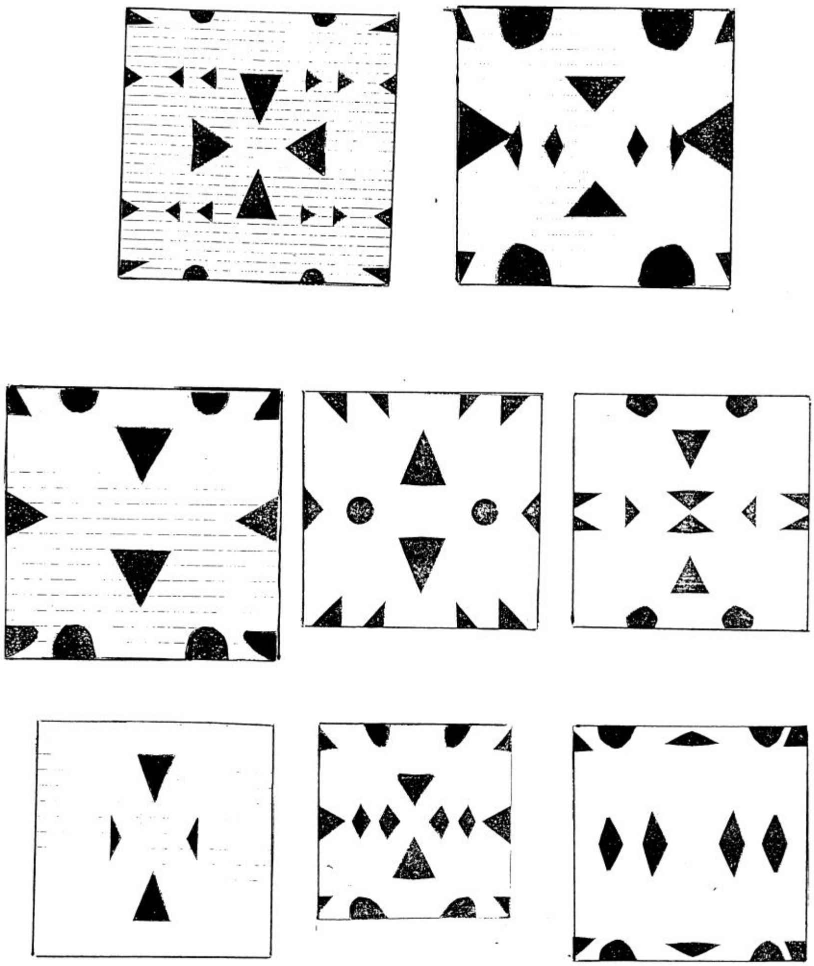
exemple 6



exemple 7

exemple 8

Annexe 2



Reproduction de figures géométriques

Hervé Péault

Extrait des actes du XVII ème colloque - Paris 1990

Cet article présente une séquence de formation initiale ou continue sur la reproduction de figures planes. Les activités proposées ont un double but :
- *réactiver les connaissances des étudiants ou stagiaires sur des propriétés de géométrie plane, en particulier sur le cercle.*
- *travailler un certain nombre de notions didactiques telles que analyse a priori, variables didactiques, et envisager la question de l'observation, de l'analyse d'erreur et de l'organisation de séances.*

1. Préparation de la première activité

Plusieurs jours avant la première séance, j'ai expliqué en quoi celle-ci consistait : une activité de reproduction d'une figure géométrique pour la moitié du groupe, l'autre moitié observant ceux qui reproduisent.

Les futurs observateurs ont alors reçu un exemplaire de la figure à reproduire et ma *fiche de préparation" (annexe1)* avec mon *"analyse a priori des procédures de résolution" (annexe2),* cette dernière conçue en partie en fonction de mes observations sur un groupe précédent.

Ils devaient étudier ces documents, s'assurer qu'ils les avaient bien compris, me demander des précisions le cas échéant.

2. Première activité

Le jour venu, je mène l'activité en essayant de me conformer à ce qui est indiqué sur la fiche.

Dans un premier temps, c'est une activité individuelle (chacun étant observé par un autre) suivie d'une mise en commun (c'est alors moi qui suis observé), et se termine par un exercice individuel d'évaluation.

Pendant que le demi-groupe effectue ce dernier exercice, chaque observateur doit rédiger un court compte-rendu mettant en évidence :
- la ou les procédures utilisées par la personne observée,
- les principales erreurs ou difficultés rencontrées,
- le degré de prise en compte de ces éléments lors de la mise en commun.

Il effectue ensuite avec la personne observée, le contrôle de la réussite à l'exercice*,* lui fait lire son compte-rendu, la personne observée pouvant, si elle le désire, ajouter des observations.

3. Deuxième activité

La séance suivante se déroule en échangeant acteurs et observateurs qui avaient eux aussi reçu au préalable ma « *fiche de préparation* » *(annexe 5).*

Il s'agit de reproduire une figure présentée au rétroprojecteur et sur laquelle figurent divers renseignements *(annexe 6).* Le déroulement est à peu près du même type.

A la réflexion, je pense qu'il serait préférable de procéder différemment pour mettre davantage l'accent sur la variable didactique *"indications données".*

On pourrait proposer la figure *"nue"* aux observateurs en leur demandant d'y porter des indications : suffisamment pour que la figure puisse être reproduite sans prise d'informations supplémentaires, mais avec peu d'indications déductibles d'autres. Ils devraient en plus prévoir comment pourrait s'y prendre la personne chargée de la reproduction.

Le jour dit, chaque observateur présenterait sa figure, le reproducteur ne devant pas y prendre d'autres informations.

On comparerait ensuite les renseignements proposés par chacun et les figures obtenues.

4. Prolongement

Après ces séances, je pose le problème suivant faisant l'objet d'une réflexion par petits groupes suivie d'une mise en commun : « *on veut faire reproduire une figure géométrique. Cherchez des variables sur lesquelles on peut jouer pour influer sur les procédures de résolution* » .

La mise en commun débouche sur le repérage de divers éléments :

- choix de la figure et de ses caractéristiques géométriques ;
- renseignements fournis (longueurs, angles, parallélisme, perpendicularité,...) ;
- accès au modèle (modèle non accessible ou modèle sur lequel il est possible de prendre des informations) ;
- outils autorisés ;
- échelle de reproduction demandée ;
- support de reproduction (papier blanc, quadrillé, planche à clous, assemblage de morceaux de puzzle, ordinateur..).

5. Dans les classes

Je distribue divers documents, notamment :
- le chapitre XI *"Reproduction de dessins"* des Aides pédagogiques CM de l'APMEP.
- la fiche "*Copie de dessins" de* F. Boule parue dans J.D.I. n°2 de novembre 1983.
- et bien sûr l'article de : M.L. Peltier et Y. Ducel paru dans le Bulletin 371 de l'A.P.M. de décembre 1989 : "*Géométrie* : *une approche par le dessin géométrique CM 2 - sixième*".

En général, nous terminons par la préparation et la réalisation dans les classes de séquences *"reproduction de figure géométrique*" dans un CE ou un CM.

ANNEXE 1

OBJECTIFS

Expliciter (ou réexpliciter...) les notions de médiatrice d'un segment, de tangente à un cercle, de cercle circonscrit à un polygone...

Utiliser ces notions dans la recherche de procédures de détermination du centre d'un cercle.

S'entraîner à une utilisation précise de l'équerre, la règle et le compas.

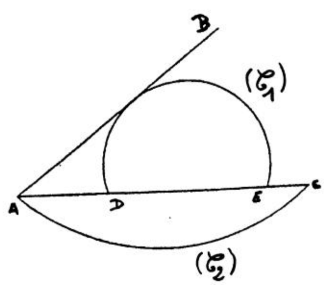
CHOIX DE LA SITUATION

II s'agit d'un problème consistant à reproduire une figure ; la difficulté principale est de retrouver des centres de cercles.
Les caractéristiques de cette figure ont été choisies de façon à amener une diversité des procédures, certaines étant plus efficaces.

MATERIEL

- La figure ci-contre (agrandie) est proposée (sans les repérages avec les lettres) sur une feuille distribuée à chacun.

- Chacun dispose d'une feuille blanche, de crayons, d'une équerre, d'un compas et d'une règle non graduée, à l'exclusion de tous autres instruments.



CONSIGNE

"Vous devez reproduire le dessin sur votre feuille. Vous n'avez pas le droit de décalquer; par contre vous pouvez écrire ou rajouter des tracés sur la feuille où se trouve le dessin.

La copie obtenue devra être superposable à l'original, mais la vérification ne devra se faire que lorsque vous serez sûrs de vous. "

RECHERCHE

On peut penser que la détermination des divers points ne posera pas trop de problèmes. L'essentiel des difficultés réside dans la détermination des centres des cercles (C1) et (C2).

En cas de blocage, on pourra suggérer un tracé auxiliaire mais sans indiquer de méthode.

MISE EN COMMUN

On mettra en évidence les différentes procédures utilisées, les difficultés et les erreurs rencontrées. A cette occasion, on théorisera les outils apparus :

- notion de médiatrice d'un segment comme ensemble des points équidistants des extrémités et correspondant à la perpendiculaire au milieu du segment.
- notion de corde.
- notion de tangente à un cercle qu'on se contentera de définir ici comme la perpendiculaire à un rayon en un point du cercle.
- notion de cercle circonscrit à un polygone. On examinera en particulier le cas d'un triangle quelconque, d'un triangle rectangle, d'un rectangle.

On mettra aussi en évidence :

- les problèmes de précision et de fiabilité des procédures utilisées : en particulier devra apparaître la non-pertinence de procédures basées sur la construction de tangentes.
- la différenciation des procédures suivant qu'on dispose de plus ou moins d'un demi-cercle.
- la procédure d'intersection des médiatrices de deux cordes comme procédure experte.

EVALUATION

Chacun recevra une feuille comportant 3 points. La consigne sera : "*Construire un quatrième point tel que les 4 points soient situés sur un même cercle, sans tracer ce cercle.*" (Celui-ci pourra être tracé ensuite pour vérification).

Annexe 2

REPRODUCTION DE FIGURE (1) - OBSERVATION DES PROCEDURES

On peut considérer que 3 grandes étapes seront nécessaires pour effectuer la reproduction (l'ordre pouvant varier) :

- Marquage des différents points, après détermination de l'angle de(AB) et (AC).
- Recherche du centre de (C1) et tracé de (Cl).
- Recherche du centre de (C2) et tracé de (C2).

La première étape indiquée correspond en fait à la reproduction d'un triangle (triangle BAC par exemple ou triangle ABE, etc..) mais il pourrait y avoir des difficultés liées au fait qu'aucun triangle n'apparaît complètement tracé. Dans ce cas on pourra suggérer de tracer par exemple [BC].

L'essentiel du problème réside dans la détermination des centres de (C1) et (C2). C'est ce qu'on observera de façon plus particulière en notant :

- les procédures utilisées ;
- les procédures abandonnées et celles retenues ;
- les procédures erronées.

Pour vous aider, voici une liste de procédures susceptibles d'apparaître. Mais il y en aura sans doute d'autres, notamment erronées (par exemple tentative de tracer (C1) en prenant comme centre le milieu de [DE], tracé de la médiatrice de [DE] pour chercher le centre de (C2), etc..).

a) Tâtonnement complet : détermination approximative d'un centre, essais puis réajustements successifs au voisinage.

b) Tracé d'une médiatrice (de [DE] en général pour (C1) et de [AC] pour (C2)) et recherche du centre par tâtonnement avec des essais successifs de tracés de cercles centrés sur cette médiatrice.

c) Détermination par intersection des médiatrices de deux cordes.

d) Construction d'un rectangle inscrit (réalisable seulement pour (Cl); par exemple tracé de [DD'] et [EE'] perpendiculaires à [DE].

Identification du centre à l'intersection des diagonales (ou des médianes..).

e) Essai d'inscription d'un triangle rectangle (réalisable seulement pour (Cl) ; on prend une corde ([DE] ou une autre), une corde perpendiculaire et on cherche le milieu du diamètre obtenu.

f) Construction (nécessairement approximative) d'une tangente auxiliaire (pour (C1), si l'on fait l'hypothèse que (AB) est une tangente) ou de deux tangentes (pour (C2)) et des perpendiculaires aux points de tangence.

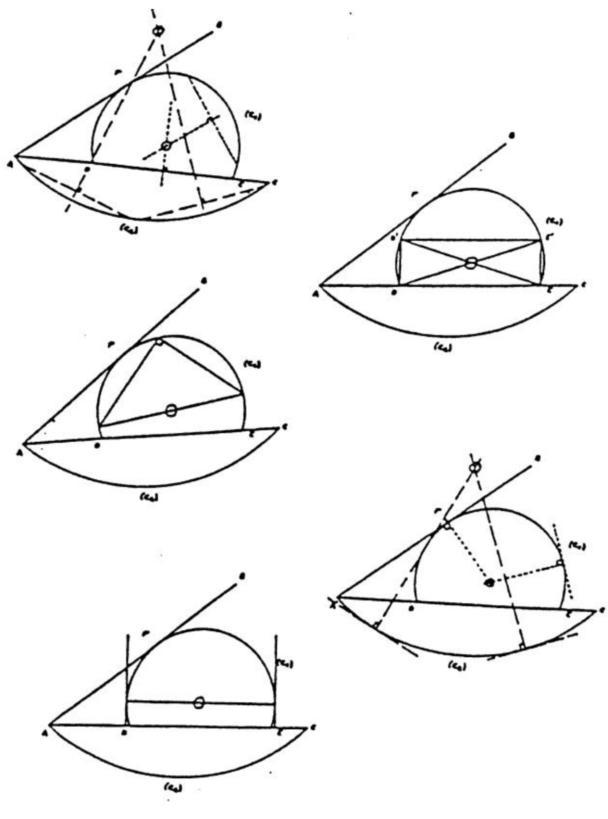
g) Recherche de l'intersection de la médiatrice d'une corde et de la perpendiculaire à une tangente.

h) Recherche de tangentes parallèles : pour (Cl) par exemple en faisant glisser l'équerre sur (AC) et recherche du milieu du diamètre obtenu en joignant les points supposés de tangence.

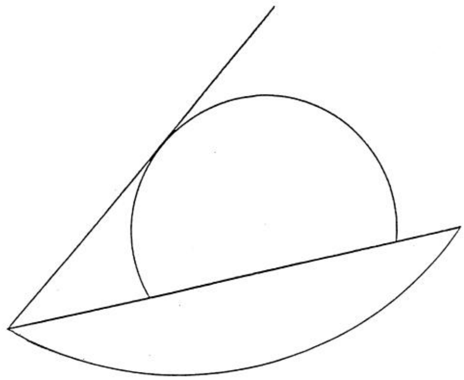
i) Par pliage, en faisant coïncider 2 morceaux de l'arc de cercle, recherche de diamètres et marquage de leur intersection.

j) Une procédure peut aussi apparaître pour la recherche du centre de (C2) : construction d'un carré de cité [AC] et marquage de l'intersection des diagonales. Bien qu'a priori non légitime, cette procédure fonctionne dans le cas particulier de ce dessin.

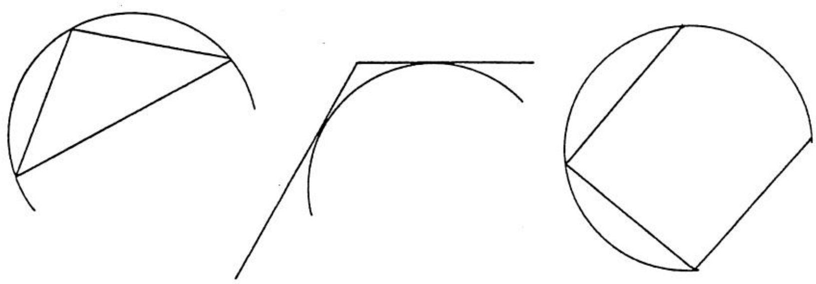
k) Autres procédures...



Annexe 3



Annexe 4



Annexe 5

OBJECTIFS

- Utiliser des propriétés de polygones simples pour leur construction.
- Organiser un tracé en fonction des renseignements disponibles.
- Expliciter les notions de bissectrice et de cercle inscrit dans un triangle.

MATERIEL

- La figure ci-après est présentée à l'aide du rétro-projecteur.
- Chacun dispose d'une feuille blanche et des instruments usuels de tracé.

CONSIGNE

" *Vous devez reproduire la figure projetée. La vérification se fera en superposant votre réalisation à l'original sur le transparent. Les décalages éventuels ne devront pas excéder 1 mm*."

RECHERCHE

- Une première difficulté est liée ici au choix d'un point de départ pertinent. En particulier le tracé préalable du carré, puis du losange ne peut conduire à une figure correcte en l'absence d'indications complémentaires.

- Une mauvaise interprétation des indications peut engendrer diverses erreurs, notamment :
    - estimer que le centre du cercle est sur [GJ] .
    - estimer que JI = 3 cm et JK = 5 cm.

- Des difficultés pourront apparaître :
    - pour la précision des tracés.
    - pour construire un point à des distances données de 2 autres.
    - pour tracer un cercle inscrit dans un triangle (d'autant qu'ici le triangle n'apparaît pas en entier).

- Observer et noter :
    - l'ordre dans lequel s'effectue la reproduction.
    - les difficultés et erreurs rencontrées.

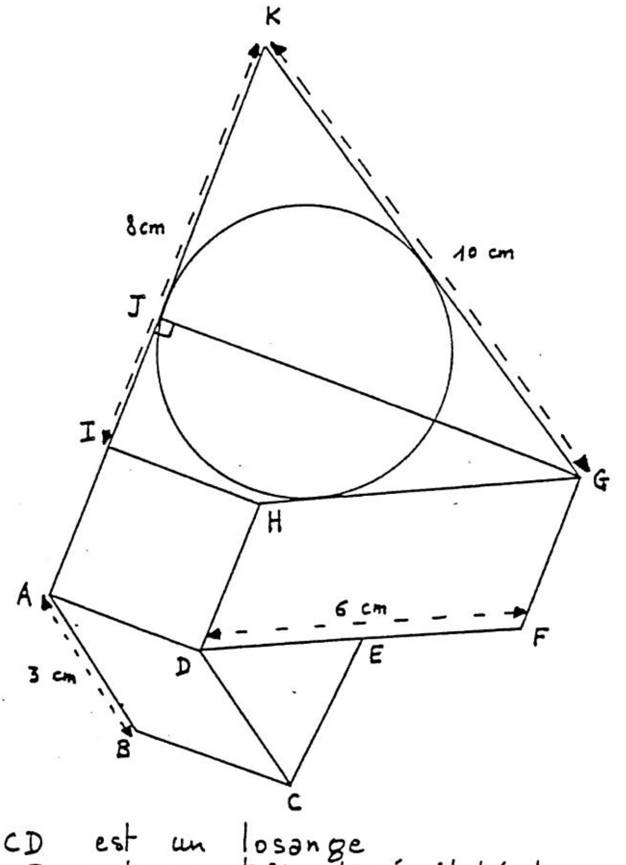
MISE EN COMMUN

Faire ressortir les différentes procédures et mettre en évidence :

- une procédure de construction d'un point à des distances données de deux autres.

- une procédure de construction du cercle inscrit dans un triangle, à partir des bissectrices.
- le caractère déformable d'un quadrilatère dont on ne connaît que les longueurs des côtés.

ANNEXE 6



ABCD est un losange
DCE est un triangle équilatéral
DFGH est un parallélogramme
ADHI est un carré
Le cercle est tangent aux droites
(KI) (HG) et (GK)

La fleur

Marie-Lise Peltier

Extrait des actes du colloque des PEN de Paris (1990) qui s'appuie sur un article publié dans le bulletin de l'APMEP n° 371 (1989) "Géométrie, une approche par le dessin géométrique, CM2-sixième ", Yves Ducel, Marie-Lise Peltier.

Cet article relate une séquence de formation initiale ou continue de professeurs d'école. Il présente un scénario de formation de type homologie transposition, permettant au formateur de travailler un certain nombre de questions géométriques en faisant vivre aux étudiants ou aux stagiaires une situation transférable à l'école élémentaire et d'aborder ou d'illustrer un certain nombre de concepts de didactique lors de l'analyse a posteriori de la situation

ACTIVITE 1

1. Reproduction du dessin

Le professeur affiche au tableau le dessin en couleur et en grand format (annexe 1).

Consigne 1.
" Vous allez reproduire le dessin qui est affiché sur une feuille blanche avec les instruments de géométrie, vous pouvez vous déplacer au tableau, vous pouvez échanger avec vos voisins, mais chacun doit réaliser le dessin. "

Aide prévue
Le formateur distribue un dessin sans couleur pour permettre une analyse plus précise, à chaque stagiaire qui le désire.

Consigne 2
" Lorsque vous pensez avoir réalisé un dessin conforme au modèle, vous rédigez un programme de construction permettant de construire cette figure sans l'avoir vue ".

Cette consigne a pour but de travailler sur la formulation écrite de consignes de construction, mais son rôle essentiel ici est de permettre une bonne gestion du temps et de l'hétérogénéité du groupe (les étudiants ou stagiaires qui peinent sur la reproduction n'ont pas à élaborer ce message).

2. Recensement des méthodes utilisées

Il n'est pas rare que certains étudiants ou stagiaires construisent au départ une rosace à six branches. Le travail d'analyse sur le modèle individuel est nécessaire pour beaucoup.

Pour la recherche du centre des cercles, les procédures les plus fréquemment rencontrées sont
* le tâtonnement,
* la construction du cercle circonscrit à la figure,
* la construction des diamètres des demi-cercles,
* la construction du petit cercle passant par les points d'intersection des arcs de cercles,
* la construction du carré circonscrit à 4 branches.

Pour la construction des centres, les étudiants ou stagiaires utilisent généralement l'une des méthodes suivantes :
* la construction d'un cercle et la division de ce cercle en huit arcs isométriques, soit par le tracé de deux diamètres perpendiculaires et des bissectrices des secteurs obtenus, soit par le tracé de deux rayons perpendiculaires, de la bissectrice et par report de cordes au compas,
* la construction de deux carrés concentriques déduits par rotation.

Il peut se faire qu'un étudiant ou stagiaire propose une procédure par pliage.

3. Analyse des messages produits

Les messages produits sont échangés de manière à tester leur efficacité.
Puis ils sont rapidement présentés à l'ensemble du groupe et comparé quant à la méthode choisie, au vocabulaire utilisé, à la présence de lettres pour coder certains points, à la forme choisie. Les messages inefficaces sont modifiés.

ACTIVITE 2

Analyse de la situation

Le but de cette phase est de permettre aux étudiants ou stagiaires de prendre du recul par rapport à la situation qu'ils ont eux-mêmes vécue. Il s'agit de changer de posture, de passer du statut d'élève à celui de professeur. Pour cela le formateur propose un questionnement sur lequel les stagiaires réfléchissent tout d'abord individuellement, puis par groupe de quatre. Le formateur propose ensuite une synthèse collective en prenant en compte et discutant les réponses des différents groupes.

1. Questionnement sur le choix du dessin

- Quelles notions mathématiques sont en jeu dans la tâche de reproduction de ce dessin ? Parmi elles, quelles sont celles qui pourraient faire l'objet d'une institutionnalisation ?
- Quelles variables didactiques sont à disposition ?
- Quelles aides sont envisageables ?
- Quel type de validation envisager ?

2. Questionnement sur le mode de travail proposé

- Quelle incidence le mode de travail proposé a-t-il sur le déroulement de la séance ?
- Quelles seraient les différentes options que l'on pourrait prendre et leur incidence respective sur la tâche à effectuer ?

3. Questionnement sur un éventuel transfert de cette situation à l'école élémentaire

- Pour une séance de reproduction de ce dessin dans une classe de CM, quel mode de travail choisiriez-vous et pourquoi ?
- Quelles sont vos prévisions sur les procédures que pourraient mettre en œuvre les élèves ?
- Quels éléments mathématiques choisiriez-vous d'institutionnaliser ?

ELEMENTS DE REPONSES RELATIVES A L'ANALYSE DE LA SEANCE

1. Choix du dessin

a) Notions mathématiques en jeu
cercle diamètre, centre, division du cercle en arcs isométriques, carrés inscrits dans un cercle, éléments de symétrie, rotations, droites perpendiculaires, bissectrice d'un angle.
Remarque : dans cette tâche de reproduction, ces notions sont rencontrées sous leur aspect outil et non objet.

b) Les variables à disposition
Le nombre de “ pétales ” de la fleur[1], la présence de couleurs, leur répartition[2], le support (papier uni ou quadrillé) sur lequel est proposé le dessin, le support sur lequel il devra être reproduit.

[1] Le nombre de pétales de la fleur (8 grands, 8 petits) provoque une déstabilisation des savoir-faire chez les élèves ou chez les stagiaires, lesquels activent spontanément un

c) Les contraintes à respecter pour que la tâche d'analyse soit consistante
L'existence d'éléments non apparents sur le dessin, mais indispensables pour la construction ayant le statut d'outil provisoire (par exemple deux diamètres perpendiculaires et les bissectrices, ou les carrés sous-jacents) est un point fondamental pour que la reproduction impose une tâche d'analyse préalable.

d) Les aides
Les éléments qui auraient pu être ajoutés sont envisagés en fonction de leur incidence sur les procédures. Ceci permet la création " d'aides " (voir annexe 2)
La gestion de l'hétérogénéité est également envisagée par la prévision d'une consigne de travail supplémentaire qui contribue à approfondir la tâche à effectuer initialement.

e) Les modes de validation
Ici la conformité au modèle est repérée essentiellement visuellement, par dénombrement des " pétales " et par estimation de la régularité de la rosace obtenue. Une validation par superposition avec un calque nécessiterait de fixer la dimension du diamètre du cercle circonscrit à la rosace, ce qui rend la tâche plus difficile en bloquant certaines procédures.

2. Analyse de la tâche

Pour reproduire la rosace à 8 branches, une observation méthodique et une analyse sont nécessaires : elles concernent le nombre de branches, la régularité de la figure (existence de huit axes de symétrie, d'un centre de symétrie, d'un centre de répétition d'ordre 8).
La construction peut être effectuée à partir de la division du cercle en huit arcs isométriques par le tracé de deux diamètres perpendiculaires et des bissectrices des angles obtenus. Elle peut également être obtenue à partir de la construction de deux carrés concentriques se déduisant l'un de l'autre par une rotation d'un huitième de tour. D'autres méthodes peuvent être envisagées, construction d'un carré, de son cercle circonscrit, de ses médianes prolongées jusqu'au cercle ou bien pliage en huit d'une feuille de papier, puis tracé du cercle sur le papier déplié, tracé d'un angle droit, de sa bissectrice, tracé d'un cercle centré au sommet de l'angle puis report au compas de la corde déterminée sur le cercle par deux demi-droites formant un angle de 45°, etc...

---

schème d'assimilation et se heurtent à une contradiction (obtention d'une rosace à 6 branches). Les recherches et les débats pour dépasser cette contradiction vont permettre une rééquilibration des conceptions des élèves ou des étudiants. Ce jeu de déséquilibre-réequilibration contribue à la construction et à l'appropriation d'un nouveau savoir-faire.

[2] Le choix et la disposition des couleurs peuvent être des variables didactiques. La répartition peut contribuer par exemple à la mise en évidence des carrés sous-jacents, et avoir ainsi une incidence sur les procédures utilisées.

La phase de travail d'analyse collective a pour but de permettre d'émettre des hypothèses, des déclarations, d'essayer de les argumenter, ou de les prouver verbalement sans avoir recours à l'action, mais en anticipant cette action.
Ce travail collectif s'appuie sur l'hypothèse que l'appropriation collective de certaines connaissances peut précéder l'appropriation individuelle et a pour but de permettre de franchir une étape difficile dans la résolution du problème sans pour autant qu'il y ait intervention directe du maître.

3. Modes de travail et gestion associée

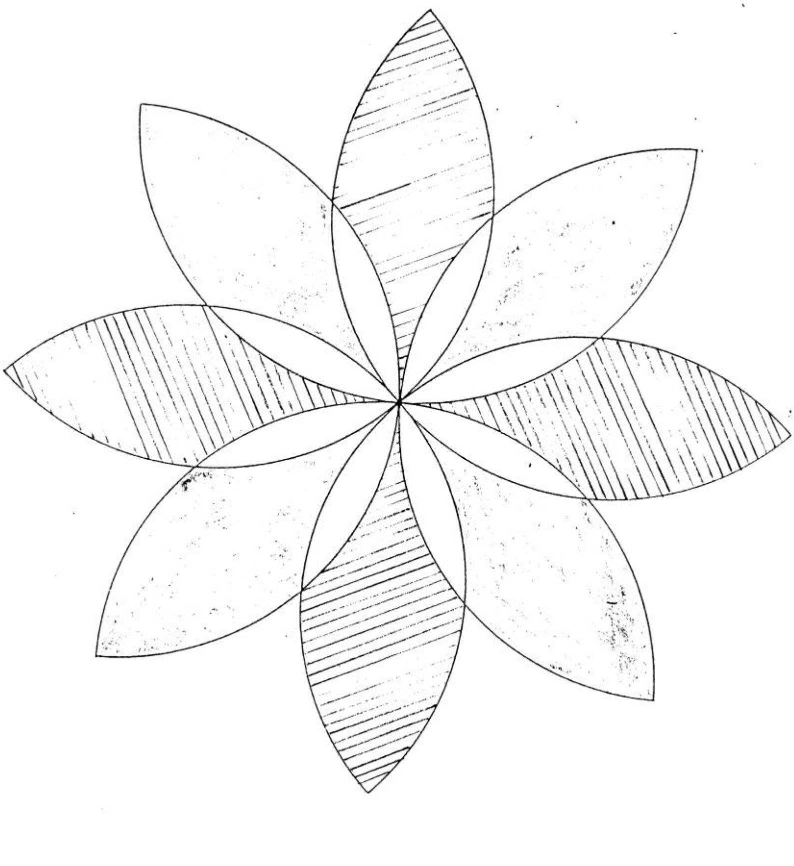
Plusieurs options sont envisageables :
- Analyse collective du dessin affiché puis reproduction individuelle, avec ou sans modèle individuel
- Analyse à deux du dessin affiché ou distribué et reproduction individuelle
- Analyse individuelle du dessin affiché ou distribué et reproduction à même échelle ou à échelle différente.

Gestion de l'hétérogénéité
Aides prévues en cas de difficultés, incidences sur les procédures
Consigne supplémentaire pour les plus rapides consistant à rédiger un message pour construire la figure sans l'avoir vu.

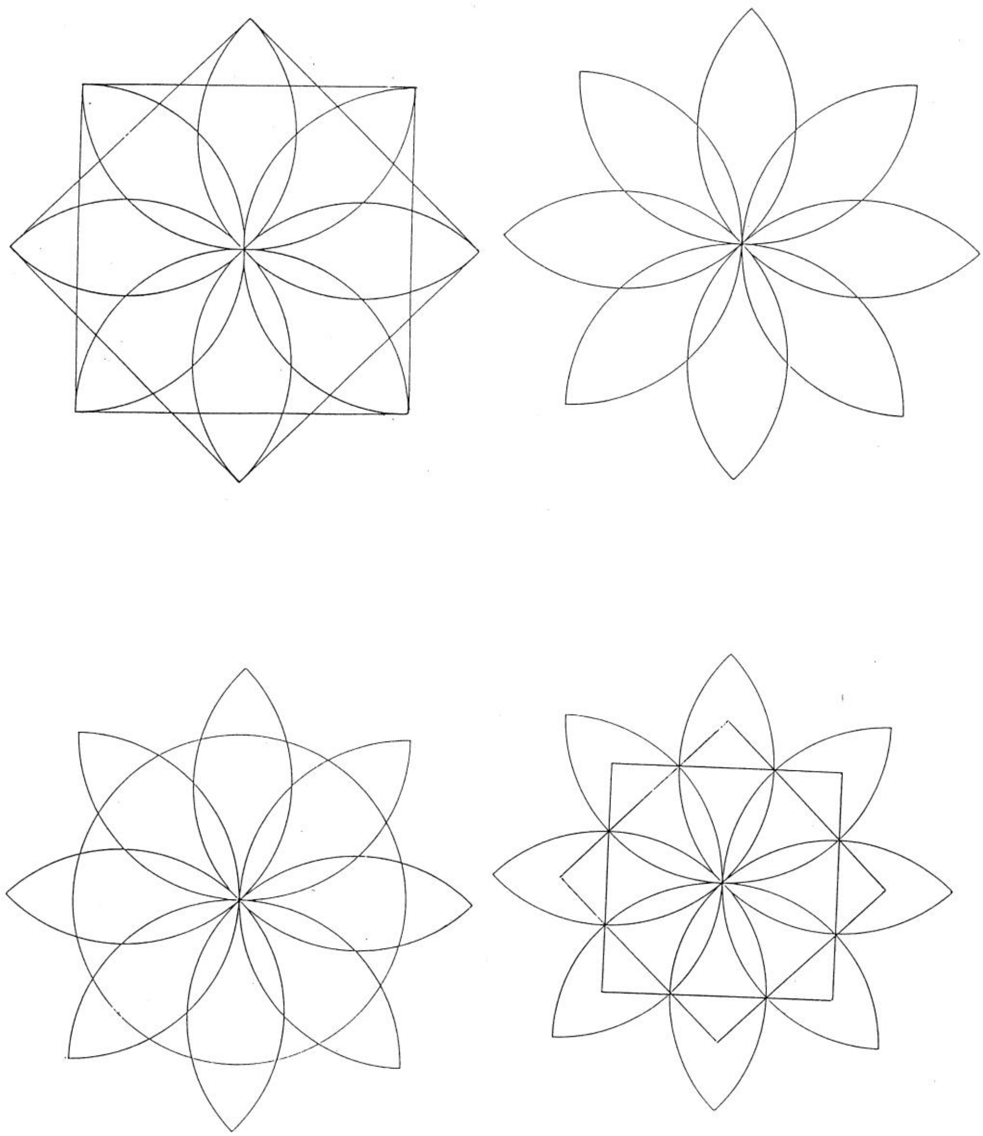
4. Transfert à l'école élémentaire

Présentation de l'article paru dans le bulletin de l'APMEP n° 371 (1989) “ Géométrie une approche par le dessin géométrique CM2-sixième ”. (Y. Ducel, M-L. Peltier) ou de la brochure de l'IREM de ROUEN (1987) portant le même titre.

ANNEXE 1



ANNEXE 2



Autour du thème de la mesure

Joël Briand - François Colmez - Guy Brousseau.

Extrait de Document pour les formateurs, qui accompagne les annales du CRPE 1998.

La rédaction des annales 1998 a mis en évidence certaines ambiguïtés relatives aux questions sur la mesure. Il a alors semblé nécessaire de faire un état des lieux à l'intention des formateurs ainsi que de formuler quelques recommandations, pour préciser les attentes vis à vis des PE1. Il est apparu nécessaire de s'interroger sur les abus de langage qu'il est normal d'accepter. L'article commence par l'examen de quelques extraits de sujets, puis propose une mise au point mathématique.

1. Examen des sujets 1998 et du traitement de la mesure

a) Longueur et mesure :

Sujet de Bordeaux 98

Un grand cube est constitué de 512 petits cubes identiques juxtaposés, de 2 cm de côté chacun. Quelle est, en centimètres, la longueur d'une arête du grand cube ? Quel est, en litres, son volume ? Quelle est, en décimètres carrés, son aire ?

Il s'agit de la mesure en cm et non de la longueur[1].

Sujet de Bordeaux 98

Il est écrit : « En déduire la longueur en millimètres du côté d'un octogone régulier ».

Il s'agit de la mesure en millimètres et non de la longueur.

Sujet d'Orléans 98

Page 2 Exercice 2
Une unité de longueur est fixée.
On constitue un puzzle en découpant…..
Les longueurs sont toutes égales à 5.

L'énoncé est incorrect : il introduit une unité de longueur qu'il ne nomme pas et écrit : les longueurs sont toutes égales à 5. Il faut le signaler et rectifier, par exemple en nommant cette unité u et en écrivant 5u. Ce qui évitera de passer

[1] NDLR : ce qui est écrit en italique correspond aux remarques faites, par les auteurs de cet article, concernant les énoncés des sujets du CRPE.

subrepticement au centimètre carré au lieu de u² (manifestement en contradiction avec les dimensions du dessin fourni par le sujet).

Sujet de Rouen 98 (2ème sujet)

Exercice 1
a) « quelles relations doivent vérifier les dimensions x et y d'un rectangle de la famille F »
b) « si une dimension d'un rectangle R de la famille F est 3 cm, quelle est l'autre dimension ? »

L'énoncé laisse entendre que x et y sont des longueurs ; il sera plus commode de décider que x et y sont les mesures en cm des côtés d'un rectangle.

On dira ainsi correctement

- Ce segment a pour longueur 11 cm ou est de longueur 11 cm
- La longueur de ce segment est 11 cm
- La mesure en cm de ce segment est 11

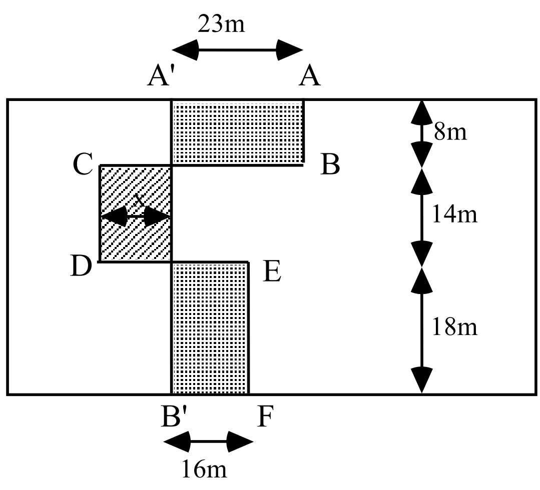
Par contre sont incorrectes des phrases telles que :

- La mesure de ce segment est 11 cm
- La longueur de ce segment est 11 en cm
- Dans les écritures symboliques : 3x 4 = 12 cm est à proscrire.

b) Cohérence texte - dessin :

Il y a souvent aussi un problème de cohérence entre le texte et le dessin.

Sujet de Nice 97



D'après le dessin, conforme au sujet, x est une longueur et non une mesure ; ce qui compliquerait la rédaction, si on suivait cette indication.
Ce qui explique le texte dans la correction : « Nous désignerons par x la mesure, l'unité étant le mètre, de la longueur cherchée ».

Si, sur le dessin figurent des indications de longueurs connues (3 cm) et une longueur inconnue notée x, alors x désigne une longueur et non une mesure. On ne peut donc pas utiliser la même lettre x pour désigner la mesure.
Si on veut travailler avec des nombres (mesures) il faut donc introduire une nouvelle lettre et écrire, par exemple, x = a cm, faire les calculs avec le nombre a et en conclusion écrire : x =…cm.
On peut aussi travailler sur les grandeurs et écrire une aire sous la forme : 3 cm (multiplié par) x. Mais ce qui est de loin le plus commode, c'est, dès l'énoncé, porter sur le dessin non pas x mais x cm, ce qui fait de x une mesure (un nombre).

c) Lettres dans formules :

Dans les formules, le choix des lettres est généralement consacré par l'usage et a une fonction mnémotechnique (B ou b pour base, h pour hauteur, R pour rayon, A pour aire, V pour volume). Par ailleurs, ces lettres peuvent désigner :

- Soit des grandeurs,
- Soit des nombres, mesures de ces grandeurs ; dans ce cas, dans le cours du calcul, on sous-entend les unités, QUI DOIVENT ÊTRE COHÉRENTES.

Pour les angles c'est la même chose :
L'angle droit n'a pas pour mesure 90° ou $\pi/2$ rad ; il est égal à 90° et il est égal à π /2 rad. On peut écrire 90° = π /2 rad, comme on écrit 1 m = 1000 mm ou 1L = 1 dm^3. L'expression « angle de 90° » est correcte.

d) Abréviations :

Le symbole du litre est L (majuscule) pour éviter la confusion avec le nombre 1 qui ne se distingue pas, très souvent, de la lettre l (minuscule). Alors le symbole de centilitre est cL. C'est le seul symbole majuscule utilisé en tant qu'initiale de nom commun ; par contre les initiales de noms propres sont systématiquement majuscules. Ces normes sont celles de l'AFNOR ; elles sont internationales et ont valeur légale.

2. Mise au point théorique

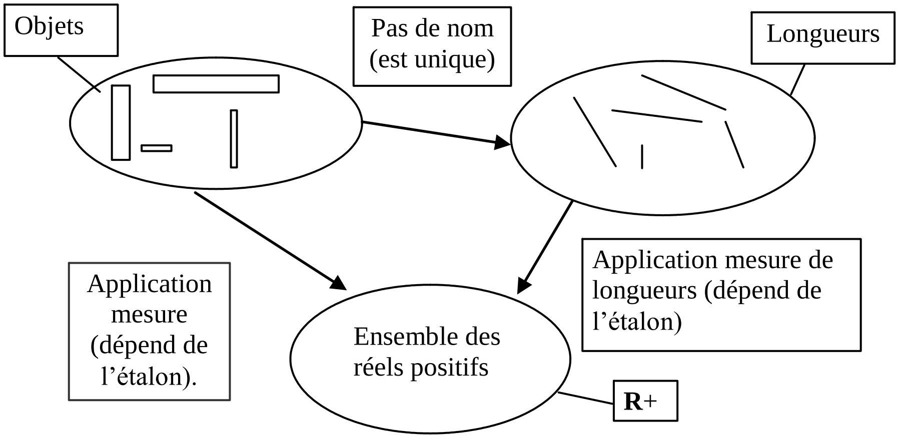
Le modèle mathématique comporte trois ensembles : les objets, les grandeurs, les nombres et trois applications.

- La première à chaque objet associe sa grandeur, pour une grandeur donnée (par exemple, à un segment sa longueur, à une surface son aire).

- La deuxième à chaque objet associe sa mesure : c'est la modélisation d'un protocole expérimental qui permet d'obtenir le rapport entre la grandeur de l'objet générique et la grandeur d'un objet étalon choisi arbitrairement et dont la grandeur est appelée unité ; il y a donc autant d'application de ce type que de choix d'objet étalon, alors que la première application est unique.

- La troisième associe à chaque grandeur sa mesure pour la grandeur unité choisie (le rapport de ces grandeurs). Ce nombre est un réel positif.

Ces applications ne sont pas indépendantes : la deuxième est la composée de la première par la troisième. On peut aussi considérer que l'ensemble des grandeurs est le quotient de l'ensemble des objets par la relation d'équivalence, indépendante de l'unité choisie, "a même mesure que" (mais ceci est hors de propos dans l'enseignement élémentaire).



Le vocabulaire n'est pas satisfaisant

- Il n'y a pas de mot, pour désigner chaque application, autre que le nom des éléments de l'ensemble d'arrivée (on serait obligé de dire, par exemple, application longueur) ; ce qui induirait une confusion entre cette application et l'image d'un élément par cette application ; mais en fait, on ne parle pas de l'application.

- C'est le même mot "mesure" qui sert pour les deux dernières applications, et, qui plus est, pour toutes les grandeurs.

Convenons de :
  - ne pas appeler grandeur ce qui est une mesure (un nombre)
  - ne pas appeler mesure ce qui est une grandeur
  - ne pas mélanger dans une expression ou une égalité des grandeurs et des nombres.

Remarques

- Toute relation entre grandeurs génère une relation entre mesures (la même) à condition que les unités soient cohérentes : si, par exemple les longueurs sont mesurées en pouce, les aires doivent l'être en pouce carré.

- En particulier, le rapport de deux grandeurs de même nature est le même nombre que le rapport de leurs mesures (quelle que soit l'unité).

- Par contre le quotient de deux grandeurs de natures différentes est une grandeur et non pas un nombre.

Exemple : 6 m²/3 km = 2 m²/km = 2km.mm/km = 2 mm ;
ce qu'on peut écrire aussi : 6 m²/3 km = 2 m²/1 km = 2mm. 1km/1 km = 2 mm ;
ou en faisant d'abord des conversions : 6 m²/3 km = 6m²/3000 m = 0,002 m = 2 mm.

Complément : Texte de Guy Brousseau.
Extrait des annales du CRPE de 1995, p.263.

La mesure

La mesure et le mesurage sont des pratiques complexes bien que très anciennes. Le mot mesure est employé dans des sens très différents. Pour éviter les malentendus, quelques termes techniques sont indispensables. Il faut maintenir clairs leurs différents emplois **par l'usage :**

1. Il faut d'abord distinguer l'objet matériel, support de la mesure (un petit pain par exemple), le type de « grandeur» (son poids, son prix?) et l'objet souvent immatériel de la mesure (sa « longueur», son diamètre). Et ceci, même lorsqu'on commet des abus pour éviter des expressions ridicules (on pourrait dire « la longueur de la longueur du petit pain», c'est à dire la longueur - type de mesure - de la longueur – segment le plus long contenu dans l'objet – du petit pain).

2. La mesure d'un objet est aussi la classe de tous les objets immatériels équivalents du point de vue de ce type mesure : segments susceptibles de coïncider par un déplacement, masses s'équilibrant dans une pesée, etc.

3. L'emploi mathématique du mot « mesure» est limité aux cas où les objets sont « mesurables» c'est à dire où ils possèdent certaines propriétés (la température n'est pas une mesure en ce sens) qui permettent de faire correspondre à ces objets des nombres réels positifs. Cette correspondance s'appelle une *mesure,* c'est une fonction. L'image d'un objet mesurable par une mesure s'appelle aussi sa mesure : c'est donc un nombre. La mesure des mathématiciens ne comprend pas d'indication d'unité. C'est parce que l'objet de la théorie de la mesure ne dépend pas des unités choisies.

4. Dans les situations concrètes, au contraire, la mesure d'un objet est formée d'un couple: (un nombre; une unité de mesure socialement convenue ou un étalon improvisé). On pourrait appeler ce couple *mesure concrète.*

5. Le mesurage est l'opération par laquelle on veut

- soit assigner à un objet « une» mesure concrète. En fait, on doit se contenter d'un intervalle d'incertitude : soit un encadrement, soit une valeur approchée ou estimée et une approximation (un intervalle de confiance, une « erreur maximum » etc.). On pourrait appeler *mesure effective* le triplet (unité de mesure, valeur approchée, intervalle, d'approximation).
- soit réaliser un objet dont la mesure concrète a été donnée (dessiner un segment de droite de longueur 8 cm). La précision est alors une indication fournie avec l'objet.

6. L'indication d'une mesure, même concrète et effective, est, généralement, insuffisante pour indiquer la « grandeur de l'objet» au sens de sa taille relativement aux objets de même nature (si ces derniers ne sont pas familiers, par exemple : une vitesse de sédimentation de 75). Cette « mesure» (qui n'a pas besoin d'unité) s'exprime par la rareté» de la mesure concrète, par exemple par le pourcentage d'objets de cette famille plus grands ou plus petits que l'objet en question.

Aire de surfaces planes.

Marie-Lise Peltier - Catherine Houdement

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article propose un dispositif destiné à la formation initiale et continue prévu pour deux séances de trois heures. Il s'appuie sur un problème très simple : chercher un maximum de façons de partager une feuille de papier rectangulaire en deux parties superposables.
Les auteurs décrivent le déroulement en plusieurs phases distinctes dont les objectifs sont clairement identifiés au départ. En fin d'article, le dispositif est analysé à la fois sur le plan mathématique et sur le plan didactique.

1. Objectifs

a) Objectifs mathématiques

- Indépendamment, dans un premier temps, du dénombrement sur quadrillage, du calcul numérique et de l'utilisation de formules :
  - Construire le concept d'aire,
  - Construire la notion de mesure,
  - Faire fonctionner l'additivité des mesures d'aire.
- Distinguer aire, périmètre et forme d'une surface.
- Utiliser la symétrie centrale comme outil de résolution de problème et en déduire quelques propriétés.
- Introduire les fractions, produire des égalités entre fractions, les comparer, les ranger.

b) Objectifs didactiques

La situation présentée illustre les notions d'outil et d'objet puisqu'elle permet de mettre en jeu deux concepts mathématiques : l'aire en tant qu'objet, la symétrie centrale en tant qu'outil implicite de résolution du problème posé. Cette situation permet en outre d'introduire les fractions comme des codages nécessités par l'insuffisance des entiers pour des classes de surfaces de même aire.

2. Activité

a) Première phase

Objectif

Construire des surfaces de même aire, mais de formes différentes et définir la notion d'aire (hors contexte numérique).

Matériel

- Feuilles d'annuaires téléphoniques (format A4) en grand nombre.
- Ciseaux, instruments usuels de géométrie.

Organisation

Travail individuel

Consigne 1

« Vous devez partager chaque feuille en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollage (c'est-à-dire qu'avec les deux parties il sera possible de reconstituer la feuille initiale) : vous devez chercher un maximum de partages différents répondant à cette consigne de partage que nous désignerons par (P) ».

Procédures observées

- Les étudiants commencent par plier en deux suivant les médianes, puis les diagonales du rectangle. En général à ce moment, certains pensent qu'ils ont trouvé tous les partages possibles, il est alors nécessaire de redonner la consigne en précisant qu'ils doivent essayer d'en trouver d'autres.
- La procédure suivante consiste à plier la feuille de telle sorte que deux sommets opposés se superposent. Ce partage permet généralement à l'idée qu'il existe un nombre infini de solutions de se répandre.

Les autres procédures que l'on rencontre sont les suivantes :

- Des pliages en 8 ou 16 suivis de dépliages et découpages en suivant certaines lignes de pliages plus ou moins bien choisies (d'où des réussites ou des échecs !).
- Des recherches en construisant des segments de même longueur en partant de deux sommets diamétralement opposés.
- Des procédures consistant à construire une ligne de partage symétrique par rapport à une médiane, puis en raison de l'échec, évolution de cette procédure vers la construction d'une ligne de partage symétrique par rapport au centre de la feuille.

Remarque

On peut constater de très nombreux essais qui n'aboutissent pas, mais ces essais permettent à leurs auteurs de faire de nouvelles hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage. De nombreux étudiants trouvent assez vite comment construire une ligne de partage polygonale qui permet de résoudre le problème en faisant des tracés symétriques de part et d'autre du centre de la feuille, puis certains cherchent des lignes de partage curvilignes à main levée ou en traçant des cercles.

Synthèse

Les étudiants viennent afficher un certain nombre de partages réalisés. Ils vérifient à chaque fois la superposition exacte des deux parties et la reconstitution possible de la feuille initiale avec les deux parties, ils expliquent à leurs camarades le procédé utilisé pour obtenir la ligne de partage.

b) Apport du professeur et première institutionnalisation

Sur l'aire

- Les deux parties issues d'un même partage (P) sont superposables, elles ont donc même forme et même périmètre.
- Deux parties issues de deux partages (P) différents ne sont pas directement superposables, pourtant elles vérifient toutes les deux la propriété : *« avec deux parties analogues à chacune d'elles on peut reconstituer la feuille entière »*. Elles sont donc aussi « étendues » l'une que l'autre, elles contiennent toujours la même quantité de papier, elles correspondent toujours à une « demi feuille », on dit qu'elles ont **même aire**.

Constats

- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement la **même forme**.
- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement le **même périmètre**.
- Deux surfaces **superposables** ont **même aire, même forme**, même périmètre.
- A partir d'une partie quelconque issue d'un partage (P), on peut, par **découpage et recollement**, sans chevauchement et sans perte de papier, construire n'importe quelle autre partie issue d'un autre partage (P).

On conviendra d'appeler momentanément famille G, la famille des parties obtenues.

Sur la symétrie

La propriété vérifiée par la ligne de partage pour répondre à la consigne est la suivante : cette ligne est **symétrique par rapport au centre du rectangle**.

c) Deuxième phase

Objectifs mathématiques

- Réinvestir la notion d'aire et celle de symétrie centrale.
- Constituer un stock de formes d'aires différentes mais facilement comparables.
- Introduire un codage fractionnaire et le faire fonctionner.

Enjeu

Permettre à tous de créer des surfaces de formes originales et tarabiscotées.

Organisation

Travail individuel ou par groupes de deux.

Matériel

Le même que précédemment.

Consigne 2

« Vous devez recommencer l'activité de la consigne précédente mais avec des rectangles ayant même aire que les formes précédentes, c'est-à-dire avec des demi-feuilles rectangulaires ».

Remarques

Les étudiants peuvent ainsi réinvestir ce qu'ils ont fait, ou ce qu'ils ont vu faire par d'autres, lors de la phase1. On note, à ce stade, qu'ils prennent plaisir à laisser libre cours à leur imagination et qu'ils prennent conscience que ***l'on peut augmenter à loisir le périmètre de la surface sans en augmenter l'aire.***

On constitue ainsi une seconde classe de surfaces de même aire que l'on désigne par H. On matérialise les deux classes déjà obtenues par des grandes feuilles de papier (type *paper board*) sur lesquelles on colle plusieurs surfaces de la classe.

Lorsqu'il s'agit d'introduire un codage des classes ainsi construites, rendant compte des surfaces qu'elles contiennent, l'ensemble du groupe s'accorde généralement pour désigner la classe G par ½, car elle contient des demi-feuilles et la classe H par ¼, car elle contient des quarts de feuilles. Ce codage est retenu et noté sur les grandes feuilles qui matérialisent les classes.

Consigne 3

« Vous allez construire, par groupe de deux (ou de quatre), des surfaces ayant même aire que la feuille d'annuaire, mais de formes différentes ».

Procédures observées

Les étudiants placent côte à côte de diverses façons :

- Deux surfaces de la famille ½, issues d'un partage (P), c'est-à-dire exactement superposables.
- Ou deux surfaces de la famille ½, issues de deux partages (P) différents, donc de même aire mais de formes différentes.
- Ou une surface de la famille ½ et deux surfaces de la famille ¼.
- Ou quatre surfaces de la famille ¼.

Synthèse

Les différentes propositions sont présentées et discutées. En cas de désaccord, on reconstitue par découpage et recollement la feuille d'annuaire à partir de la feuille proposée.
Les surfaces retenues constituent une nouvelle classe de surfaces de même aire que l'on décide de coder par 1 puisqu'il s'agit de surfaces ayant même aire qu'une feuille d'annuaire.

La description des différentes procédures donne lieu à leur traduction en terme de codage fractionnaire :

- Les deux premières procédures citées se traduisent par
  ½ + ½ = 1 ou par 2 x ½ = 1 (lu comme « *deux fois un demi* »)
- La troisième par
  ½ + ¼ + ¼ = 1 ou par ½ + 2 x ¼ = 1.
- La dernière par
  ¼ + ¼ + ¼ + ¼ = 1 ou par 4 x ¼ = 1.

Consigne 4

« Vous allez travailler par groupes de quatre, construire de nouvelles classes de surfaces de même aire ».

Procédures observées

- Partage en deux parties superposables de rectangles correspondant au quart de la feuille d'annuaire.
- Assemblage de surfaces de différentes classes obtenues.

Mise en commun

Les différentes classes proposées sont comparées, des surfaces de chaque classe sont collées sur de grandes feuilles, chaque classe est codée en fonction des surfaces qu'elle contient et l'on donne des écritures variées rendant compte des différentes procédures utilisées pour construire les surfaces de la classe.

Lors de cette mise en commun, on obtient généralement de très nombreuses classes et donc de très nombreuses écritures, par exemple :

1/8 + 1/4 = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3 x 1/8 = 3/8
1/2 + 1/4 = 3/4 ; 1 + 1/4 = 5/4 ; 1 + 1/2 = 3/2 = 6/4 ;
1 + 1/2 + 1/4 = 7/4 ; etc.

Consigne 5

« Vous allez mettre en ordre les différentes classes obtenues : pour cela, vous pouvez construire pour chaque classe, un rectangle de la famille dont une des dimensions est fixée, par exemple, la largeur de la feuille d'annuaire ».

Mise en commun

Le rangement des classes en fonction de la relation « … est moins étendue que… » est matérialisé par la mise en ordre des grandes feuilles représentant les classes, elle est justifiée par la superposition des rectangles des différentes classes qui ont une dimension commune, elle donne lieu à une série d'écritures du type :

$$1/8 < 1/4 < 3/8 < 1/2 < 3/4 < 1 < 3/2 < 7/4 < 2$$

Un réinvestissement individuel de ces différentes phases peut être proposé à partir de surfaces planes distribuées (cf. annexe). Lors de la mise en commun de ce travail individuel, on constate qu'il est possible de choisir n'importe quelle classe comme unité et que les codages qui s'en déduisent sont proportionnels aux codages de départ.

3. Analyse de l'activité

Analyse mathématique

Cette série d'activités est un exemple d'une progression sur une grandeur et la mesure liée à cette grandeur.
Le professeur reprend avec les étudiants l'explicitation du rôle des différentes étapes :
1. Pour définir la grandeur aire :

- Définition d'une relation d'équivalence sur un ensemble de surfaces, ici la relation « avoir même aire ».
- Construction de l'ensemble quotient, ici les classes des surfaces ayant même aire.
- Caractérisation des classes, ici par un codage fractionnaire et par le choix d'un représentant « rectangle » de chaque classe.
- Construction d'une relation d'ordre sur l'ensemble quotient.

2. Pour construire un codage numérique qui est une mesure : construction d'une application de l'ensemble quotient dans l'ensemble des nombres réels :

- Positive
- Additive
- Monotone
- Parfaitement déterminée par le choix d'une unité, ici la feuille A 4.
- Vérifiant les propriétés suivantes : l'inégalité triangulaire, les surfaces vides ont une aire nulle, il existe des surfaces non vides d'aire nulle.

Remarque

Cette situation permet de distinguer naturellement objet mathématique, grandeur mesurable, mesure.
D'autre part, elle apparaît comme une introduction pertinente de la nécessité des nombres non entiers, et plus précisément des fractions. En effet, elle permet de donner du sens à des écritures fractionnaires :

- Définition de $1/n$ par $1/n + 1/n + \ldots + 1/n = 1$

  et par $n \times 1/n = 1/n \times n = 1$;
- Production d'égalités variées sur ces nombres ;
- Comparaison et rangement de fractions et d'écritures fractionnaires.

Enfin elle permet de faire des rappels sur la symétrie centrale qui est apparue comme un outil de résolution du problème de partage.

Analyse didactique

Cette situation permet de pointer :

- L'aspect auto-validant de la première consigne de la première phase : c'est l'étudiant lui-même, sans intervention de quiconque, qui décide si le partage qu'il vient de réaliser convient ou s'il est à rejeter ;
- Le rôle de l'hypothèse erronée dans cette phase : en effet c'est très souvent à partir d'une ligne de partage qui ne convient pas que l'étudiant réussit à trouver les propriétés que doit vérifier cette ligne pour répondre à la consigne ;
- L'aspect outil de la notion de symétrie centrale qui est utilisée par tous les étudiants après un certain temps de recherche, bien qu'elle n'ait pas fait l'objet d'un apprentissage antérieur : la notion de symétrie centrale n'est donc pas abordée par sa définition, elle est perçue par son aspect fonctionnel ; il est possible ici de faire le choix d'institutionnaliser (ou non) cette notion pour dégager son aspect objet de savoir et d'étudier les propriétés utilisées pour construire la ligne de partage ;
- L'aspect objet du concept d'aire, qui est ici mis en évidence non pas par une définition, mais par une relation d'équivalence ;
- L'aspect outil de la notion de fraction, qui apparaît ici comme un codage rendant compte de manipulations finalisées avant de devenir objet de savoir institutionnalisé et d'être réinvesti dans d'autres contextes.

4. Prolongements

a) Sur l'aire

Au niveau mathématique

Transfert des notions étudiées sur d'autres matériaux.
Activités de réinvestissement.

Au niveau didactique

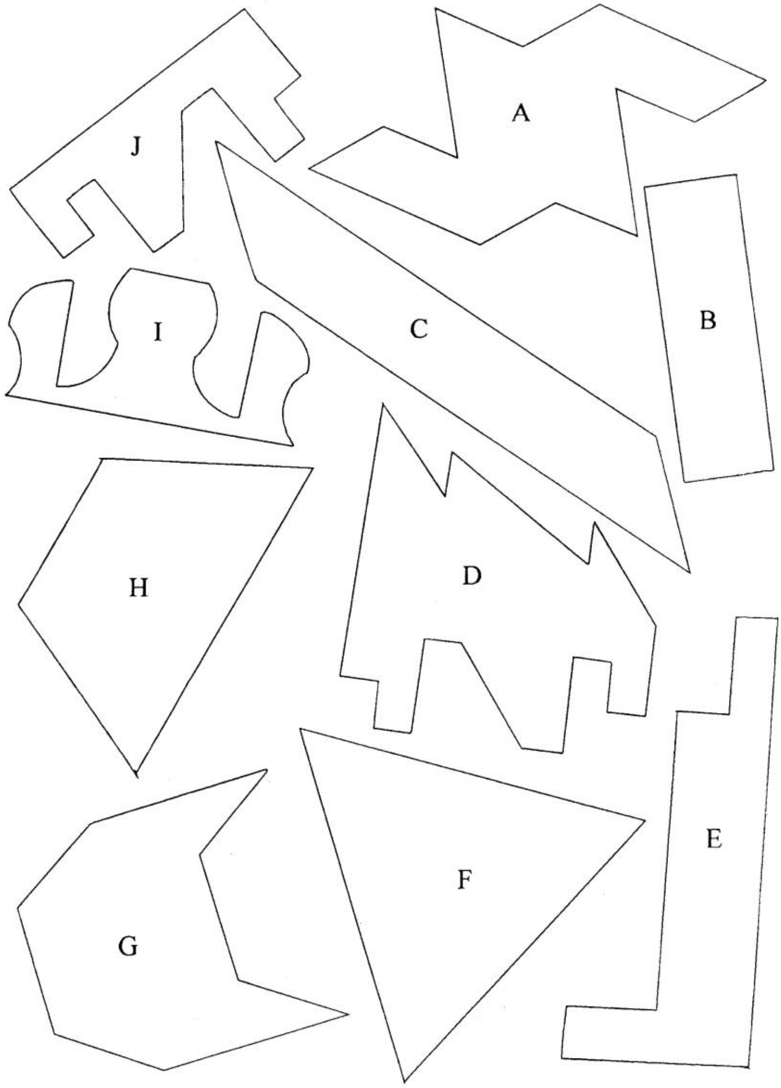
Etude de manuels à partir d'un questionnement du type :

- Comment est introduite dans les manuels scolaires la notion d'aire ?
    - Aspect dénombrement ;
    - Aspect encadrement ;
    - Rôle des quadrillages ;
    - Introduction de l'unité ;
    - Formules.
- Quels sont la part et le type des manipulations proposées aux élèves ?
- Comment le manuel prend-il en compte les distinctions :
    - Aire / dénombrement ;
    - Aire / nombre ;
    - Aire / surface ;
    - Aire / périmètre ?

b) Sur les rationnels

Cette situation est l’une des situations phares pour travailler l’extension de la notion de nombre entier. Elle fait partie à ce titre de la progression sur l’introduction des rationnels.

ANNEXE



Une approche minimale de la notion de grandeur en PE1

Maryvone Le Berre - Catherine Taveau

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Cet article propose un dispositif destiné à la formation initiale prévu pour deux séances de trois heures. Les situations décrites visent à dissocier « aire » et « forme », « aire » et « nombre – mesure », « aire » et « périmètre ». Les modalités d'organisation s'efforcent de prendre en compte la diversité des réponses que les étudiants peuvent produire aux exercices proposés.

Ce texte décrit deux séances de formation de trois heures conçues pour des étudiants de PE1 sur le thème « aires et périmètres ». Le dispositif complet est le suivant :

- Un test diagnostique (30 minutes) utilisé pour constituer les groupes de travail de la première séance.
- Une première séance de trois heures sur la notion d'aire.
- Une deuxième séance de trois heures pour différencier aire et périmètre et une synthèse générale.
- Plus tard dans l'année, un test final et une analyse avec les étudiants de la démarche suivie.

Objectifs notionnels

Appréhender les notions de longueur et d'aire en tant que grandeurs mesurables, sur lesquelles on peut définir des opérations (comparaison, addition, multiplication par un scalaire), avant tout passage à la mesure.

Nous faisons l'hypothèse que la plupart des étudiants ont, sur le sujet, des connaissances et des représentations tronquées, par exemple qu'il s'agit essentiellement pour eux, comme pour leurs futurs élèves, de connaître et d'appliquer des formules.

La plupart n'ont jamais entendu parler de « grandeurs ». Or nous estimons que sous le chapeau « mesure », dans le libellé des programmes, les PE devraient reconnaître qu'il s'agit de « grandeurs et mesure de ces grandeurs ». Ils devraient savoir ce qu'on entend par exemple par « dissocier grandeur et forme, grandeur et nombre ».

Objectifs didactiques

- Entraînement à l'analyse à priori ;

- Reconnaissance sur des exemples de la notion de variable didactique ;
- Notion de « théorème élève ».

En cohérence avec la priorité donnée aux objectifs notionnels, les étudiants sont placés en situation d'élèves durant la plus grande partie des deux séances. Cependant le dispositif lui-même est conçu pour permettre une transposition, ce qui suppose de prendre du temps, durant les séances, et /ou lors d'un rappel, pour expliciter et analyser certains choix, en particulier :

   - Repérage des connaissances et représentations initiales des étudiants ;
   - Travail différencié sur un même problème en jouant sur les variables de la tâche ;
   - Appui sur la mise en commun et le débat entre pairs.

1. Le test

Voir fiches 1 à 3 en annexe.

Fiche 1 : Elle a pour unique fonction de permettre de lever les ambiguïtés éventuelles sur les termes employés.

Fiche 2 : Elle vise à repérer différents niveaux de connaissance à propos de l'aire du triangle.

Inventaire des procédures prévues

- Blocage (il n'y a pas de hauteur pour le triangle B) et non réponse.
- Jugement à vue : « A est plus grand ».
- Mesurage des bases et hauteurs « prototypiques » et calcul. Même sans erreur de calcul, les réponses pourront être : *aires égales, presque égales, ou inégales.*
- Mesurage et calcul en prenant la largeur de la bande comme hauteur pour les deux triangles.
- Raisonnement du type *« même base et même hauteur pour les deux triangles ».*
- Utilisation de surfaces intermédiaires (parallélogrammes, rectangles,…).
- Découpage d'un triangle pour le comparer à l'autre.

Fiche 3 : Tirée d'une évaluation nationale à l'entrée en sixième, elle sert de détection éventuelle d'un théorème-élève très persistant.

Inventaire des procédures prévues

Pour l'aire :

- Comptage des carreaux.

Pour le périmètre :

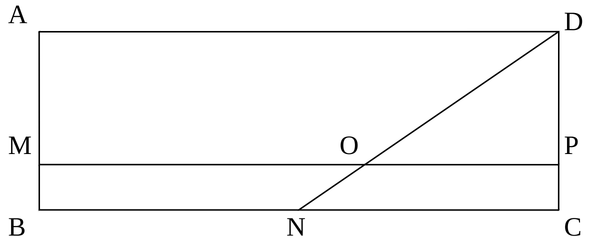
- Jugement à vue (donc sur l'aire).
- Mise en œuvre du théorème – élève : *« si l'aire est plus grande, le périmètre est plus grand ».*
- Comptage des « carreaux du bord ».

- Comptage des côtés des carreaux du bord.
- Décomposition des deux périmètres en deux parties : une « frontière commune » et deux parties de même longueur.

2. Première séance : comparaison d'aires.

Cette première séance a pour objectif la distinction entre surface, aire, mesure de l'aire, objectif qui peut être annoncé dès le départ. Elle doit faire émerger des procédures de comparaison d'aires ne faisant pas appel à la mesure, d'autres faisant intervenir la mesure soit d'un point de vue unidimensionnel, soit d'un point de vue bidimensionnel.

a) Un problème.



MB est égale au quart de AB, N est le milieu de [BC].
Les surfaces MBNO et ODP ont-elles la même aire ?

b) Analyse a priori des procédures de résolution.

Raisonnement par différence

Pour démonter l'égalité des aires, il suffit de démontrer celle des aires du rectangle MBCP et du triangle NCD.

Celle-ci peut être obtenue de différentes façons :

<u>Algébriquement</u> : en appelant a et b les mesures des côtés du rectangle ABCD, on obtient facilement qu'elles sont toutes deux égales à ab/4.

<u>Géométriquement</u> : le rectangle est pavable par quatre rectangles superposables à MBCP, et par quatre triangles superposables à NCD.

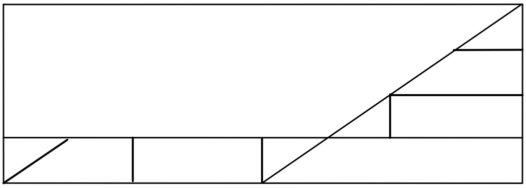
<u>Numériquement</u> : si l'énoncé ne donne aucune information sur les longueurs, cela suppose un mesurage, donc en principe une incertitude. En fait il peut y avoir deux démarches assez différentes :

1. Mesurage des données « utiles au calcul », longueur et largeur du rectangle, base et hauteur du triangle, sans tenir compte des contraintes de l'énoncé.
2. Prise en compte des contraintes de l'énoncé soit pour guider, soit pour corriger le mesurage. Par exemple, on peut mesurer AB et en déduire BM, ou mesurer les deux « en s'arrangeant » pour que l'un soit quatre

fois l'autre, et c'est un arrangement qui peut rester implicite. La prise en compte explicite des relations entre longueurs rapproche la procédure numérique de la procédure algébrique, bien qu'elle ne porte pas sur le même objet.

Comparaison directe

Algébriquement : cela suppose de déterminer les longueurs MO et OP (respectivement 5a/8 et 3a/8) en utilisant le théorème de Thalès ou une relation de similitude, par exemple, puis de conduire un calcul algébrique relativement lourd pour des PE (on trouve 9ab/64).
Géométriquement : pavage des deux surfaces avec unité commune. Découpage d'une surface pour paver l'autre, par exemple :



Numériquement : après mesurage. Si les mesures sont des nombres entiers, l'incertitude liée au mesurage risque évidemment d'être complètement évacuée.

c) Composition des groupes et choix des énoncés.

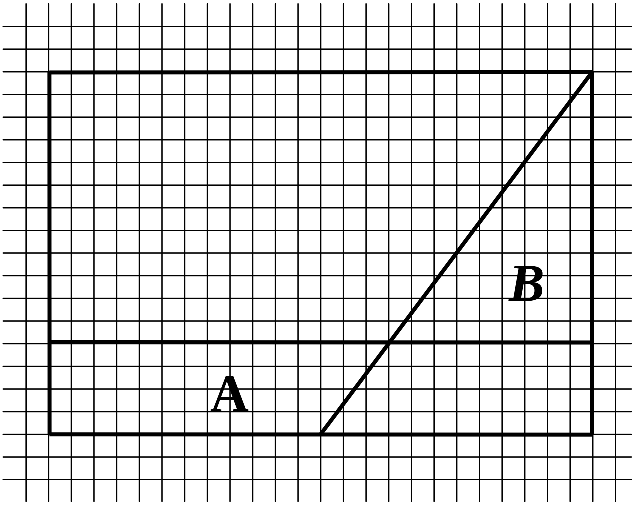
L'hétérogénéité des étudiants peut être maximale devant un tel problème. Il nous semble capital que chacun puisse travailler à son niveau. La fiche 2 du test (comparaison des aires de deux triangles) permet de prévoir au moins deux types de difficultés : (1) blocage, hésitation à « bricoler », en l'absence de connaissances suffisamment sûres.

(2) recours systématique au mesurage des longueurs, et calcul, sans analyse de la figure.

Il nous paraît judicieux de constituer des groupes « homogènes » par rapport à ces comportements prévus, en proposant des versions différentes du problème.

Première version

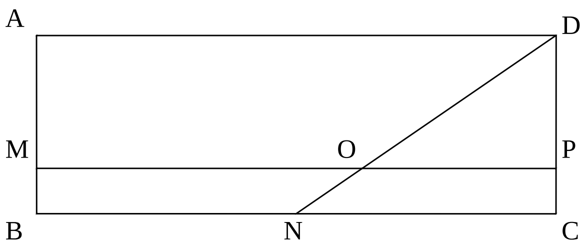
Pour ceux qui ont produit des réponses erronées ou n'ont pas répondu à la fiche 2, il paraît important dans un premier temps de faciliter la mobilisation des procédures par découpage - recollement ou pavage, d'où le choix d'un support quadrillé, et de valeurs « sympathiques » pour a, b et a/b.
Le papier quadrillé permet également de communiquer graphiquement les données.



Les aires des surfaces A et B sont-elles égales ?

Deuxième version

Pour ceux qui privilégient mesurage des longueurs et calcul, le choix vise à disqualifier (relativement) cette méthode, au profit de méthodes géométriques, d'où le choix du papier blanc avec des mesures en cm peu commodes.

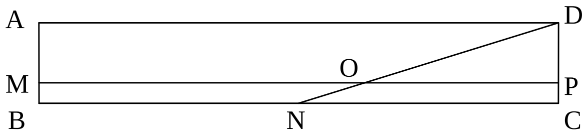


AB = 4MB ; N est le milieu de [BC] : les surfaces MONB et ODP ont-elles la même aire ?

Troisième version

Restent ceux qui ont répondu de façon satisfaisante au test en utilisant une des procédures suivantes : « *même hauteur, même base* », « *utilisation de surfaces intermédiaires* », « *découpage d'un triangle et comparaison à l'autre* ».

L'objectif principal est de faire émerger la diversité des procédures et de voir que ce problème peut se résoudre à différents niveaux. Il n'est pas certain, cependant que le raisonnement par différence apparaisse. On a opté pour un rectangle très allongé, une forme peu commode dont on espère que cela favorise une discussion sur la validité du pavage.



AB = 4MB ; N est le milieu de [BC] : les surfaces MONB et ODP ont-elles la même aire ?

Consigne

Tous les groupes ont la même consigne :

1. Répondre à la question.
2. Chercher tous les moyens possibles pour répondre à la question.
3. Comment un élève de cycle 3 pourrait-il procéder pour répondre à la question ? (en modifiant au besoin certaines dimensions ou le support papier…)

La question 2 et surtout la question 3 amènent à discuter les contraintes liées à certains choix des variables. Elles permettent aussi de gérer l'hétérogénéité du groupe (pour le niveau comme pour la vitesse de travail) tout en préparant le travail commun.

d) Déroulement de la séance

Constitution des groupes et distribution des fiches de travail

La consigne est commune et écrite au tableau. Les étudiants sont avertis qu'au bout d'une heure, chaque groupe devra avoir rédigé une affiche résumant les procédures de résolution identifiées (réponse à la question 2 de la consigne).

Mise en commun

- Inventaire et analyse des procédures de résolution. Traitement des erreurs éventuelles.
- Quelles sont parmi les procédures proposées, celles qui utilisent, implicitement ou non, une mesure ? Celles qui utilisent la mesure de longueurs ?
- Ebauche de classification et de hiérarchisation de procédures.
- Identification des valeurs des variables pour chaque figure et de leurs effets.

Exercices de renforcement

Travail individuel ou par groupes, voir annexe 2.

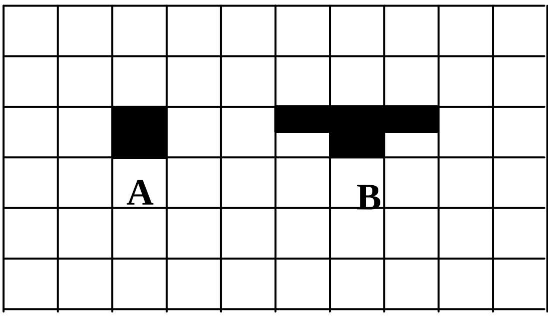
3. Deuxième séance: Différenciation aire /périmètre. Synthèse sur la notion de grandeur géométrique. Approche des problèmes d'enseignement.

La deuxième séance doit permettre d'aborder la notion plus générale de grandeur et d'en montrer la pertinence pour l'enseignement. Il s'agit tout d'abord de préciser les relations entre aire et périmètre, deux grandeurs différentes pour une même surface, et de rectifier une erreur courante, qui a pu apparaître lors du test initial. Ce dernier objectif ne peut évidemment être annoncé.

a) Différenciation aire/périmètre.

Le problème

On voudrait trouver une surface dont l'aire est plus petite que celle de A et dont le périmètre est plus grand que celui de B. Est-ce possible ?



Phase 1 : Pari initial, puis travail en groupes homogènes.

Le problème est écrit au tableau. Les étudiants ont cinq minutes pour comprendre la consigne et se prononcer, sans rien écrire.

Ils sont invités à donner leur réponse spontanément. Le formateur fait l'appel des réponses et les comptabilise : *c'est possible, c'est impossible, autre réponse*, en faisant expliciter la position de ceux qui se placent dans la troisième catégorie (*je ne peux pas savoir sans essayer, ça dépend de la figure, je n'ai aucune idée, etc..)*.

Les étudiants se regroupent alors suivant leur réponse, et la consigne suivante est donnée :

1. Réponse : *C'est possible*
   Consigne : *Justifiez. Pouvez vous modifier la figure, ou les deux de façon que la réponse soit : « c'est impossible » ?*

2. Réponse : *C'est impossible*
   Consigne : *Justifiez. Pouvez vous modifier la figure, ou les deux de façon que la réponse soit : « c'est possible » ?*

3. Réponse : *Je ne sais pas*
   Consigne : *Pouvez vous modifier une figure, ou les deux, de façon que :*
   (1) la réponse soit : « C'est possible » ;
   (2) la réponse soit : « C'est impossible» ?

Si certains groupes n'arrivent pas à la conclusion *« c'est toujours possible théoriquement »,* on intercale la face 1bis.

Phase 1bis : Travail en groupes hétérogènes

On mixe rapidement les groupes précédents.

Consigne : *Il s'agit de savoir si le problème posé a ou non une solution, d'abord pour les figures données, puis plus généralement dans tous les cas de figure. Vous devez vous mettre d'accord sur une réponse commune.*

Remarques :

- En posant la question du « toujours possible », on se situe implicitement dans une théorie générale qui va nécessiter d'envisager des figures idéales, des cas limites, et l'emploi du raisonnement déductif. Cette question peut rester ouverte, mais son statut de question théorique doit être pointé.
- Un certain nombre de procédures (pavage, découpage de surfaces) développées, et même encouragées, dans la première séquence, montrent ici leurs limites. Les moyens de validation changent en même temps que le statut de la question. C'est également à noter.
- Cette question très ouverte permet de relancer ou maintenir la recherche de chacun, en évitant que les uns ne convainquent trop vite les autres.

Phase 2 : Conclusion

Un seul exemple suffit à invalider la réponse « c'est impossible », la phase 1bis a, s'il en était encore besoin, fait disparaître cette réponse. Il peut être utile, dans un premier temps, de revenir sur les réponses spontanées et sur les raisons qui ont fait changer d'avis.

L'objectif de l'activité est ensuite énoncé. Il s'agissait de pointer l'existence d'un « théorème- élève » résistant, et de le démonter :

Contrairement à une « intuition » très répandue, aire et périmètre d'une surface ne varient pas toujours dans le même sens.

On peut alors entamer une discussion puis apporter des éléments d'analyse didactique sur l'origine de cette erreur en s'appuyant sur les travaux de M.J.Perrin.

b) Synthèse sur les notions mathématiques abordées.

Elle porte sur les points suivants :

- Notion de grandeur, grandeur mesurable ;
- La mesure d'une grandeur suppose le choix d'une unité ou plutôt d'un système d'unités ;
- La mesure d'aires comme produit de mesures de longueurs.

c) Approche des problèmes d'enseignements.

Certaines hypothèses avancées par M.J. Perrin dans sa thèse sont alors présentées et défendues :

« Les problèmes d'aires mettent de façon essentielle en relation les cadres numériques et géométriques. Un certain nombre de difficultés bien connues des élèves sont liées au traitement des problèmes d'aire soit du point de vue des

surfaces (considérées comme parties du plan), soit du point de vue des nombres, sans établir de relation entre ces points de vue. D'autre part, une identification trop précoce des grandeurs aux nombres semble favoriser l'amalgame entre les différentes grandeurs, en particulier aires et longueurs… Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permettrait aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les cadres numériques et géométriques. »
Ces hypothèses conduisent à développer des activités permettant de dissocier les grandeurs d'une part des objets (segments, lignes brisées, surfaces), d'autre part des nombres, avant d'aborder la mesure et les relations entre ces mesures.
L'exposé s'appuie sur des exemples d'activités et d'exercices (construire une figure de même périmètre qu'une figure donnée sans règle graduée…)

d) Variantes et prolongements possibles.

- Faire analyser des erreurs d'élèves (on peut utiliser par exemple des évaluations début 6ème), avant d'introduire les éléments de l'analyse de M. J. Perrin.
- A partir de manuels scolaires et d'autres documents, chercher ou analyser des activités pour les élèves permettant de différencier aire et périmètre, ou de travailler sur aire ou longueur, sans utiliser la mesure.

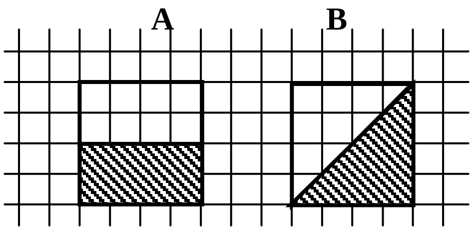
Bibliographie

- Brousseau G., *Problèmes de mesurage en CM*, Grand N n°50, 1991-1992.
- Combier G., Philippon M., *Aire et périmètre*, IREM Lyon, 1994 (Activités pour la sixième, accessible aux étudiants).
- Douady R., Perrin M.J., *Aires de surfaces planes*, petit x n°6 et n° 8, 1984-1985, IREM de Grenoble ; et Grand N n°39-40, 1986.
- Douady R., Perrin M.J., *Mesures des longueurs et des aires*, Brochure n°48, IREM de Paris VII.
- Dubois C., Fénichel M., Pauvert M., *Se former pour enseigner les mathématiques*, A. Colin.
- Rouche N., *Le sens de la mesure*, Didier-Hatier.
- APMEP, *Grandeur mesure* (MOTS VI), brochure n°46, 1982

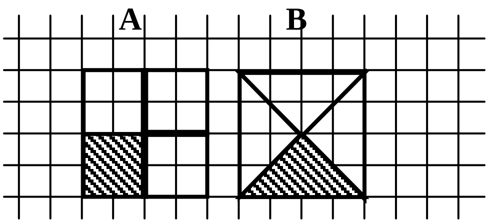
Annexe 1 – Fiche 1

Pour chaque situation, entourez le numéro de la bonne réponse :

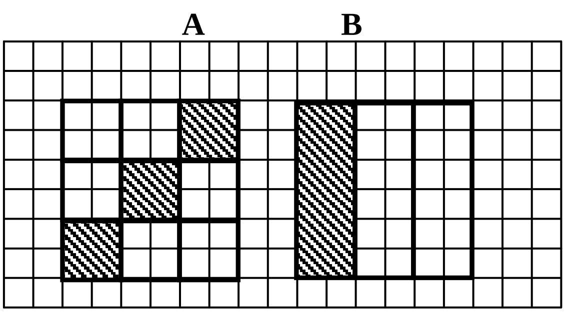
1-l'aire de la surface hachurée A est plus grande que celle de B.
2-l'aire de la surface hachurée A est égale celle de B.
3- l'aire de la surface hachurée A est plus petite que celle de B.



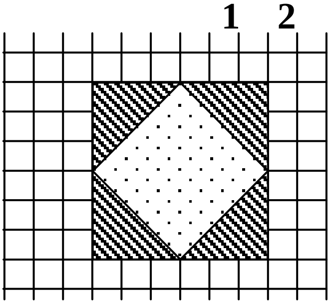
1 2 3



1 2 3



1 2 3

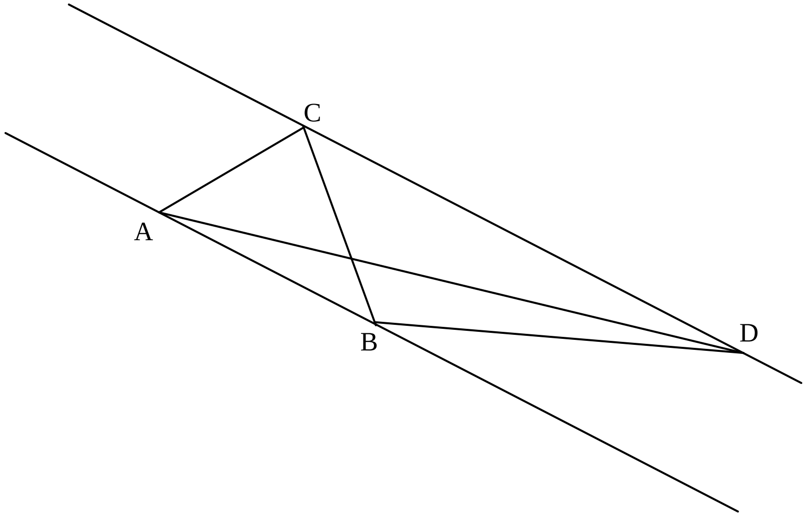


Surface A = surface hachurée

Surface B = surface pointillée.

1 2 3

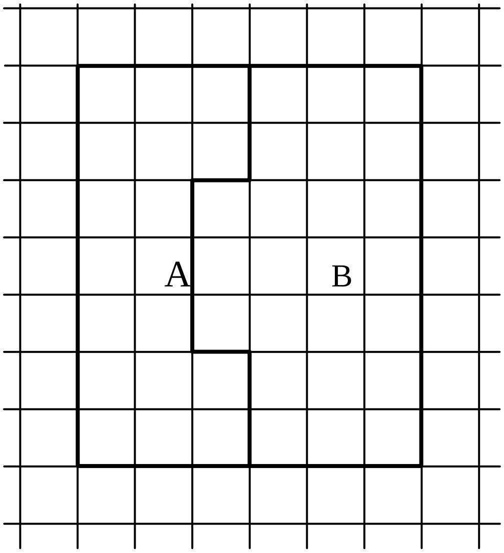
Annexe 1 – Fiche 2



Les droites (CD) et (AB) sont parallèles. Entourez le numéro de la bonne réponse :

1. L'aire du triangle ABC est plus grande que celle du triangle ABD.
2. L'aire du triangle ABC est égale à celle du triangle ABD.
3. L'aire du triangle ABC est plus petite que celle du triangle ABD.

Annexe 1 – Fiche 3



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-dessus.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

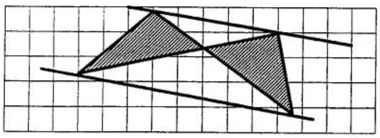
a	*L'aire de la parcelle A est la plus grande*	*Les deux parcelles ont la même aire*	*L'aire de la parcelle B est la plus grande*

Explique ton choix :

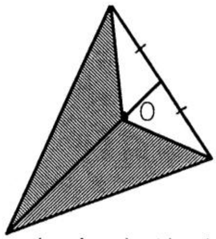
b	*Le périmètre de la parcelle A est le plus grand*	*Les deux parcelles ont le même périmètre.*	*Le périmètre de la parcelle B est le plus grand*

Explique ton choix :

Annexe 2 : d'après « Cinq sur cinq » 6ème et 5ème Hachette, 1994- 1995

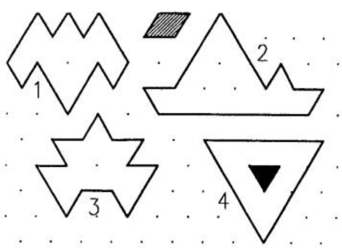


Comparer les aires des triangles hachurés



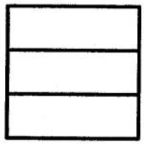
a) Comparer les aires des triangles hachurés. *(S'intéresser aux triangles non hachurés).*

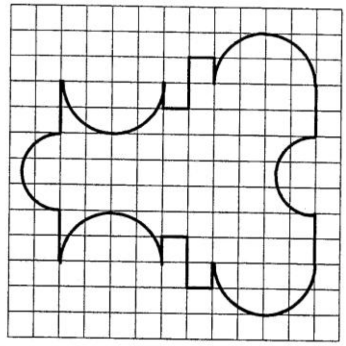
b) Où placer le point O de façon que le grand triangle soit partagé en quatre triangles de même aire?



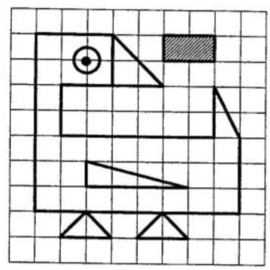
Déterminer l'aire de chacune des figures ci-dessus en prenant le losange hachuré comme unité d'aire.

On partage un carré en trois rectangles superposables. Quel est le périmètre du carré et de chaque rectangle si l'aire de chacun d'eux est égale à 12 cm^2?

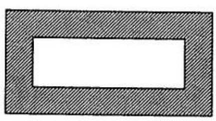




Construire un rectangle ayant la même aire que la figure ci-dessus. (Les arcs de cercle sont des demi-cercles.)



Jeu de l'oie : déterminer l'aire de l'"oie" en prenant le rectangle hachuré comme unité d'aire.



Calculer l'aire de la bande hachurée sachant qu'elle a 1 m de largeur et que le périmètre du grand rectangle est 26 m.

Catégorisation des problèmes additifs, difficultés liées à la place de la question

Catherine Houdement

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Cahors 1991.

Cet article est essentiellement destiné à faciliter l'assimilation de la typologie de Vergnaud. Dans une optique de formation il peut subir diverses adaptations :
- proposer des énoncés ayant été effectivement soumis à des élèves ([1] et [2]).
- faire le lien entre certains taux de réussite [1] et le type de problème traité.
- transformer des énoncés de problèmes en vue d'améliorer le taux de réussite [3].
- recenser les procédures effectivement utilisées par les élèves en fonction du type de problème [2].

1- Les 6 grandes catégories de relations additives selon G. Vergnaud

Première catégorie :
deux mesures se composent pour donner une mesure.

Deuxième catégorie :
une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure.

Troisième catégorie :
une relation relie deux mesures.

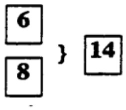
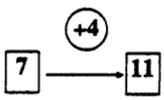
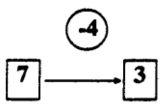
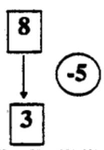
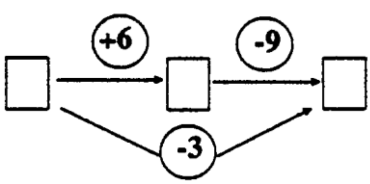
Quatrième catégorie :
deux transformations se composent pour donner une transformation.

Cinquième catégorie :
une transformation opère sur un état relatif (une relation) pour donner un état relatif.

Sixième catégorie :
deux états relatifs (relations) se composent pour donner un état relatif.

2- Pour faire fonctionner ces catégories,

G. Vergnaud a donné les exemples suivants :

1. Paul a 6 billes en verre et 8 billes en acier. Il a en tout 14 billes	
 6 + 8 = 14	I
2. Paul avait 7 billes avant de jouer. Il a gagné 4 billes. Il en a maintenant 11.	
 7 + [+4] = 11	II
3. Paul avait 7 billes avant de jouer. Il perd 4 billes. Il en a maintenant 3.	
 7 + [-4] = 3	II
4. Paul a 8 billes Jacques en a 5 de moins. Il en a donc 3.	
 8 + [-5] = 3	III
5. Paul a gagné 6 billes hier et il en a perdu 9 aujourd'hui. En tout il en a perdu 3.	
 [+6] + [-9] = [-3]	IV

6. Paul devait 6 billes à Henri. Il lui en rend 4. Il ne lui en doit plus que 2.	
$-6 \xrightarrow{+4} -2$ [-6] + [+4] = [-2]	V
7. Paul doit 6 billes à Henri mais Henri lui en doit 4. Paul doit donc 2 billes à Henri.	
$\left.\begin{matrix}-6\\+4\end{matrix}\right\} -2$ [-6] + [+4] = [-2]	VI
8. Paul doit 6 billes à Henri et 4 billes à Antoine. Il doit 10 billes en tout.	
$\left.\begin{matrix}-6\\-4\end{matrix}\right\} -10$ [-6] + [-4] = [-10]	VI

Codage Vergnaud :
- un entier dans un **rectangle** est un **naturel**
- un entier dans un **cercle** est un **relatif**
- une **accolade** représente une composition d'éléments de même nature
- n est un naturel, (-n) ou (+n) un relatif
- **+** est addition de deux naturels, d'un naturel et d'un relatif, de deux relatifs
- la flèche indique une **transformation** ou une **relation**, i.e. composition d'éléments de natures différentes

3- Exemples de problèmes donnés par G. Vergnaud pour faire fonctionner le classement

a) *Jean a joué deux parties de billes. A la première, il a gagné* 16 *billes. A la seconde partie, il en a gagné* 9. *Que s'est-il passé en tout* ?

b) *En* 1974, *la population de Paris est de 2 844 000 habitants. Elle a diminué de 187 000 personnes en* 5 *ans. Combien d' habitants y avait-il en* 1969 ?

c) *Jean-Pierre a* 9 *bonbons. Il en donne* 4 *à sa petite sœur. Combien lui en reste-t-il* ?

d) *Dans une ville, l'excédent des naissances sur les décès a été de* 1293 *personnes entre 1950 et 1960 et de 4084 entre 1950 et 1970. Que s'est-il passé entre 1960 et 1970* ?

e) *Henri vient de trouver 2,60 F sur le trottoir. Il les met dans son porte-monnaie. Il a alors en tout 3,90 F. Combien avait-il dans son porte-monnaie avant de faire sa découverte* ?

f) *Pierre a joué deux parties de billes. Au cours de la première partie, il en a gagné* 7. *Il a joué une seconde partie. En faisant ses comptes pour les deux parties, il s'aperçoit qu'il a perdu* 2 *billes en tout. Que s'est-il passé à la seconde partie* ?

g) *Il y avait* 17 *personnes dans l'autobus, il en monte* 4. *Combien y en a-t-il maintenant?*

h) *La réserve d'or d'une banque a baissé de* 642 *lingots au cours de 1'année* 1973. *Au cours du premier semestre de la même année, elle avait baissé de 1031 lingots. Que s'est-il passé au cours du second semestre ?*

i) *Un parisien part en vacances en voiture. Au départ de Paris, son compteur kilométrique marque 64809 km* ; *à son retour, il marque* 67351 *km. Combien de kilomètres a-t-il parcourus en voiture pendant les vacances ?*

j) *Jean a joué deux parties de billes. A la première partie il a gagné* 9 *billes. A la seconde partie il en a perdu* 16. *Que s'est-il passé en tout ?*

k) *Paul vient de jouer aux billes. Il avait* 41 *billes avant de jouer. Il en a maintenant* 29. *Combien de billes a-t-il perdues ?*

l) *Jean a joué deux parties de billes. A la première partie, il a gagné* 16 *billes. A la seconde partie il en a perdu* 9. *Que s'est-il passé en tout ?*

m) *Pascal distribue un bonbon à chacun de ses* 7 *camarades. Il distribue ainsi* 7 *bonbons. Il lui en reste alors* 4. *Combien de bonbons avait-il avant la distribution ?*

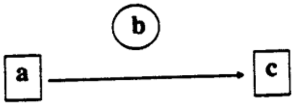
Certains enfants raisonnent alors de la façon qu'illustre l'exemple suivant :

"Si Pascal a 10 bonbons et qu'il en donne 7, *il lui en reste* 3 ; *ce n'est pas ça, il faut plus. Si Pascal a* 1l *bonbons et qu'il en donne* 7, *il lui en reste* 4. *C'est ça...*
il avait 1l *bonbons."*

4- Étude des difficultés liées à la place de la question

La catégorisation précédente ne fonctionne pas dans un premier temps sur un texte avec question. Il faut aussi analyser le type de difficultés liées à la "place" de la question dans la relation additive (c'est-à-dire le schéma ternaire) :

1- *analyse de la catégorie II*



Selon que la question porte sur a, b, c, on obtient 6 classes sous-jacentes de problèmes :

question sur :

	c	b	a
b>0	1	2	3
b<0	4	5	6

(cf. 3. pour trouver des exemples)

G. Vergnaud étudie les difficultés en ces termes :

-l et 4

Calcul relationnel le plus simple car on applique une transformation directe à un état initial.

1 est toujours possible, 4 pas toujours (-b < a < b)

Remarque fondamentale : dans ce schéma, la soustraction apparaît "sui generis", a une signification propre, ne dépend pas de l'introduction préalable de l'addition.

En effet perdre, donner, descendre,... ont des significations par elles-mêmes en tant que transformations.

-2 et 5

Calcul relationnel plus complexe, échecs plus tardifs, même avec des petits nombres; pas avant fin de CP ou début de CEl.

Procédures de réussite à ces problèmes :

- celle du "complément" : rechercher ce qu'il faut ajouter ou enlever à l'état initial pour obtenir l'état final, sans faire la soustraction.

- celle de la "différence" : plus élaborée, raisonner par soustraction des deux états, donc réaliser que si b fait passer de a à c, alors b = c - a.

Les procédures employées d'abord sont celles de complément.

-3 et 6

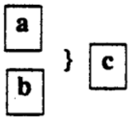
Calcul relationnel encore plus complexe car la solution canonique fait inverser la transformation directe et appliquer à l'état final cette transformation inverse.

Plusieurs procédures:

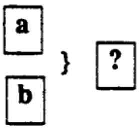
- celle canonique : si b fait passer de a à c, -b fait passer de c à a donc on fait c - b = a.
- celle de complément : ne fonctionne que si b > 0 et lorsque les nombres se prêtent à un calcul mental.
- celle de l'état initial hypothétique (cf. 3, m).

Conclusion : ainsi, une relation n'implique pas des calculs relationnels d'égale difficulté. De plus, dans ces conditions, il n'est pas étonnant que les enfants recourent à des procédures non canoniques.

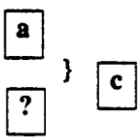
2- *analyse de la catégorie 1*



Seulement deux grandes classes de problèmes.
1 se résout par une addition



2 se résout soit par une soustraction soit par une procédure de complément.



Remarque fondamentale : ici la soustraction est nécessairement comprise comme opération inverse de l'addition :
$a + x = c$ $x = c - a$
cela constitue déjà une forme de calcul relationnel et est. au sens soustraction, un peu plus complexe que la soustraction sui generis précédente.
Ce serait donc une erreur de ne considérer que des problèmes où la soustraction est une opération déjà subordonnée à l'addition.

5- Autres difficultés liées aux problèmes

Bien entendu, dans cette étude, il a été occulté les autres types de difficultés liées aux textes et nombres utilisés par les problèmes, notamment :

* la facilité plus ou moins grande du calcul numérique nécessaire.

ex: dans *"j'ai* 5 *billes et encore* 8 *billes",* le calcul relationnel est le même que dans *"j'ai* 177 *allumettes et encore* 285", mais le calcul est plus complexe.

La taille des nombres (absolue et relative) interdit parfois l'utilisation de procédures NON canoniques.

* l'ordre, la présentation des informations:
    - sont-elles noyées dans le texte ?
    - où est placée la question?
    - les temps employés éclairent-ils le texte ?..

Tout ce qui est lié à la lecture fonctionnelle du problème.

Il y a donc beaucoup de difficultés, mais, d'après Gérard Vergnaud, *"la source principale, celle qui éclaire les autres"* est cette catégorisation en 6 classes de problèmes et sous-classes de calculs relationnels.

6 - Poursuite

* Quelles classes sont pertinentes pour l'école élémentaire ?
* Faire fonctionner la grille sur des problèmes de l'école élémentaire :
    - ceux du départ
    - ceux d'un manuel CE2 ou CEl.
    - ceux de l'évaluation CE 2-6ème[1]
* Comparer les problèmes qui servent à évaluer, et ceux qui servent à entraîner dans les manuels, dans une classe.
* Faire fabriquer des problèmes I, II, V. Les faire passer en classe.

[1] A l'issue des utilisations de la grille de G. Vergnaud, on peut constater que les catégories I, II, III, IV semblent toujours pertinentes. Par contre, les catégories V et VI semblent moins bien fonctionner; certains problèmes relèvent de plusieurs catégories, ce qui permet d'ailleurs de pointer ces catégorisations non pas comme définitives, mais comme outil d'aide à l'analyse.

Bibliographie commentée sur la soustraction

(mars 1991)

Titre : *"La soustraction au CE1"*
Auteur*: Corem*
Editeur : Irem de Bordeaux (parution fin 91)
Contenu : on trouvera dans cette brochure pour les enseignants :

- le compte-rendu de la suite complète des séquences sur la soustraction au CE 1 menées depuis plusieurs années à l'école expérimentale Jules Michelet (COREM) ;
- une étude détaillée de la situation fondamentale (jeu de la boîte) accompagnée des problèmes de dévolution, du rôle et de l'importance des variables didactiques.
- les contrôles et résultats des élèves sur les cinq dernières années (86 à 90) sur toute la progression suivie au CE1.

Titre : *"Sur la résolution de problèmes de soustraction au CE. Étude du rôle de la grandeur des nombres et des différentes représentations de la soustraction en vue de l'élaboration des situations didactiques.*
Auteur : Imana Katembara
Editeur : Irem de Bordeaux
Contenu : cette étude apporte des éléments de réponse aux questions suivantes :

- les procédures utilisées par les enfants de CE pour résoudre les situations soustractives ont-elles un domaine de meilleure efficacité bien déterminé ?
- comment utiliser les réponses à la question précédente pour en tirer bénéfice lors de l'enseignement de la soustraction?
- en admettant qu'il existe différentes conceptions de la soustraction, celles-ci ont-elles des relations avec certaines procédures de résolution ou certaines techniques de calcul connues?

Titre *:"Comment les enfants apprennent à calculer?"*
Auteur : Rémi Brissiaud, PEN Cergy Pontoise.
Éditeur : Retz, 1989
Contenu : L'auteur postule que l'enseignant doit, dès les premiers apprentissages, favoriser le développement des compétences numériques, même sur un domaine restreint.
Il distingue le nombre comme moyen de communication des quantités et comme moyen de mise en relation des quantités. Il préconise l'usage des collections témoins (idée chère à R. Brissiaud : les collections témoins de doigts) et il propose un matériel didactique de sa conception : les réglettes avec cache. Son objectif est d'amener l'enfant du comptage au calcul pensé, via le surcomptage.

R Brissiaud se situant "au-delà de Piaget", fait référence, tout en prenant ses distances, à Gelman, Fuson, Von Glaserfeld et Brousseau. Il se rapproche en fait de la méthode instrumentale de Vigotsky.

Conclusion : le plan structuré et la rédaction claire rendent la lecture aisée et agréable, même si on n'est pas obligé d'adhérer aux conceptions de l'auteur.

Niveaux concernés : Maternelle (moyenne et grande section) et CP

Titre : *"Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique."*
Auteur : François Conne, psychologue, Université de Genève
Editeur : La Pensée Sauvage, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 5-3 p269 à 332.
Contenu : l'auteur souligne l'importance des moyens symboliques servant de support aux résolutions de problèmes de type additif. Tout en s'appuyant sur les travaux de Vergnaud, il s'en distancie en montrant l'intérêt de la représentation équationnelle sur l'ensemble des entiers relatifs, que Vergnaud rejette au profit de représentations symboliques spécifiques.
Conclusion : analyse psychologique très fine de l'activité de résolution de problèmes de type additif chez des enfants de 8-10 ans.

Titre : *"L'enfant, la mathématique et la réalité."*
Auteur : G Vergnaud, psychologue
Editeur : Peter Lang, 1983, collection Exploration Recherches en Sciences de l'Education.
Contenu : l'ouvrage *"*analyse les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et décrit de manière détaillée différentes étapes et différents aspects du processus de mathématisation du réel, par lequel on peut conduire l'enfant à donner du sens aux concepts mathématiques et à en comprendre les propriétés*"*.
Le chapitre IX est consacré aux problèmes de type additif, dont la solution n'exige que des additions et des soustractions. Il y est proposé une catégorisation très fine de ces problèmes.
Conclusion : Vergnaud démontre dans le chapitre IX de cet ouvrage qu'il existe plusieurs sortes de relations additives, donc plusieurs types d'additions et de soustractions, et que la soustraction ne saurait être considérée comme seconde et toujours subordonnée à l'addition.

Titre : *"La théorie des champs conceptuels."*
Auteur : G Vergnaud, psychologue
Editeur : La Pensée Sauvage, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 10/2-3 p133 à 169.
Contenu : l'auteur propose une théorie psychologique du concept ou mieux de la conceptualisation du réel.
En œ qui concerne les problèmes de type additif, il montre la nécessité, pour les élèves, d'utiliser des représentations symboliques spécifiques, notamment pour représenter les transformations et les relations négatives.
Conclusion : cet article unifie par une théorie les différentes études proposées dans son ouvrage. *L'enfant, la mathématique et la réalité".*

Titre : *"Faire comprendre la soustraction"*
Auteur : Marcelle Pauvert
Editeur : Nathan CNDP Les pratiques de l'Education 1990
Contenu : ouvrage court et d'accès facile en trois parties
1) difficulté de l'apprentissage de la technique de la soustraction et de son utilisation dans les problèmes.
2) quelques compléments théoriques sur la résolution de problèmes, les problèmes additifs, l'évolution des programmes pour cerner le "contexte" de la soustraction.
3) quelques pistes d'activités élèves.
Conclusion : en résumé, une lecture rapide pour cerner la soustraction et cerner certaines de ses difficultés.

[3] **Titre**: *"L'enfant et le nombre"*
Auteur: Michel Fayol
Editeur : Delachaux et Niestlé, 1990
Contenu : une synthèse pointue et étayée sur l'état actuel des recherches, françaises et étrangères, en psychologie cognitive, sur l'enfant et le nombre.

Bibliographie complémentaire:

[1] revue grand N n° 38 1986
[2] ERMEL CE1 pp.98-122 Hatier 1995

Exemple d'une situation liée à la soustraction

Jeu des règles et des bracelets

Jean-Louis Oyallon

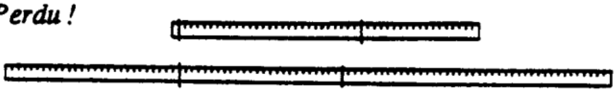
Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Cahors 1991.

L'utilisation de cette situation en formation initiale des professeurs d'écoles nécessite un volume horaire de 3 à 4 heures.
L'expérimentation dans les classes correspond à 5 ou 6 séances.
Le paragraphe IV.2 : « variables didactiques » liste des variables de situation. Il faudrait affiner l'analyse pour préciser en quoi certaines variations provoquent des changements de procédures d'élève et sont donc des variables didactiques.
Le texte a été écrit en 1991, à une époque où le texte de « fonction numérique » était inscrit dans les programmes de l'école élémentaire.
Cette remarque n'enlève rien à l'actualité de ce travail sur cette situation fondamentale de la soustraction d'un point de vue ordinal.
La situation dite de la« piste graduée» décrite dans ERMEL CE1 pp.153-135 est proche de celle-ci. Mais ici les élèves ont la possibilité de s'auto évaluer.

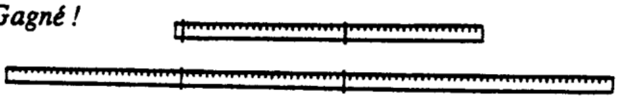
I- Matériel de base
- 2 baguettes en bois graduées (section 2 x 0,5 cm, type couvre-joint en menuiserie)
- une de 1 m 20 environ graduée de 0 à 220 (RÈGLE)
- une de 60 cm, graduée de 0 à 110 (RÉGLETTE)

Les graduations sont équidistantes, et obtenues en collant des bandes de papier sur le bois à la colle à tapisserie (cf. annexe). Sur la règle (longue), deux bracelets élastiques coulissent pour matérialiser un intervalle. C'est la même chose sur la réglette (courte), sauf que l'un des bracelets est collé sur la graduation 0, le second restant mobile.

Perdu !



Gagné !



Règle du jeu
Un intervalle étant déterminé à l'aide des bracelets sur l'une des règles, on gagne lorsqu'on reproduit sur l'autre un intervalle de même longueur (le même écart). La consigne donnée au joueur est de *« faire se toucher les élastiques* 2 *à* 2 ».

II- Variantes de la situation et savoirs visés

situation 1 :
Les bracelets sont fixés sur la règle, le joueur doit positionner le bracelet mobile sur la réglette. (Ex: élastiques sur les graduations 27 (ou **a**) et 52 (ou **b**) de la règle.)
Le joueur gagne s'il positionne le bracelet mobile de la réglette sur 25 (ou **e**).
objectif : déterminer l'écart entre deux nombres.

situation 2 :
Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, le bracelet de **gauche** est positionné sur la règle en **a**.
Le joueur doit positionner le bracelet de droite sur la règle.
objectif : trouver la somme des deux nombres **a** et **e**.

situation 2' :
Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, le bracelet de **droite** est positionné sur la règle en **b**.
Le joueur doit positionner le bracelet de gauche sur la règle.
objectif : trouver la différence des deux nombres **b** et **e**.

situation 3 :
Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, pas de bracelet positionné à l'avance sur la règle.
Le joueur doit trouver une position possible des deux bracelets (parmi beaucoup).
Objectif : produire deux nombres dont l'écart est **e**
savoirs visés: distance - soustraction (sens)

III - Utilisation avec les normaliens (stagiaires en formation)

Exemple d'activité possible :
1- faire jouer les normaliens dans la situation 1 et mettre en commun les procédures utilisées.
2- mettre en évidence les savoirs concernés (soustraction : distance, écart).
3- faire imaginer quelles procédures peuvent être mises en oeuvre par les enfants et identifier les variables didactiques de la **situation l** (taille de l'écart, position des nombres...).
4- faire trouver les autres variantes du jeu.
5- mettre en évidence les caractéristiques didactiques de la situation (cf. IV).

IV- Analyse didactique de la situation de base (le jeu)

1- C*aractéristiques en termes de situation didactique*

Dans le jeu, l'enfant est autonome et peut faire évoluer ses procédures puisque la validation de son résultat est immédiate (situation adidactique, situation d'action, situation « fondamentale » pour la notion d'écart).

2- *Variables didactiques*

- type de situation (1, 2-2', 3),
- nombre d'essais et autovalidation (graduations du témoin visibles par l'enfant ou non),
- taille des nombres sur la règle, positions relatives de ces nombres sur la règle par rapport aux dizaines, centaines, et extrémité reportée de la réglette (possibilité ou non de reconstituer l'intervalle de la règle sur la réglette),
- taille de l'écart.

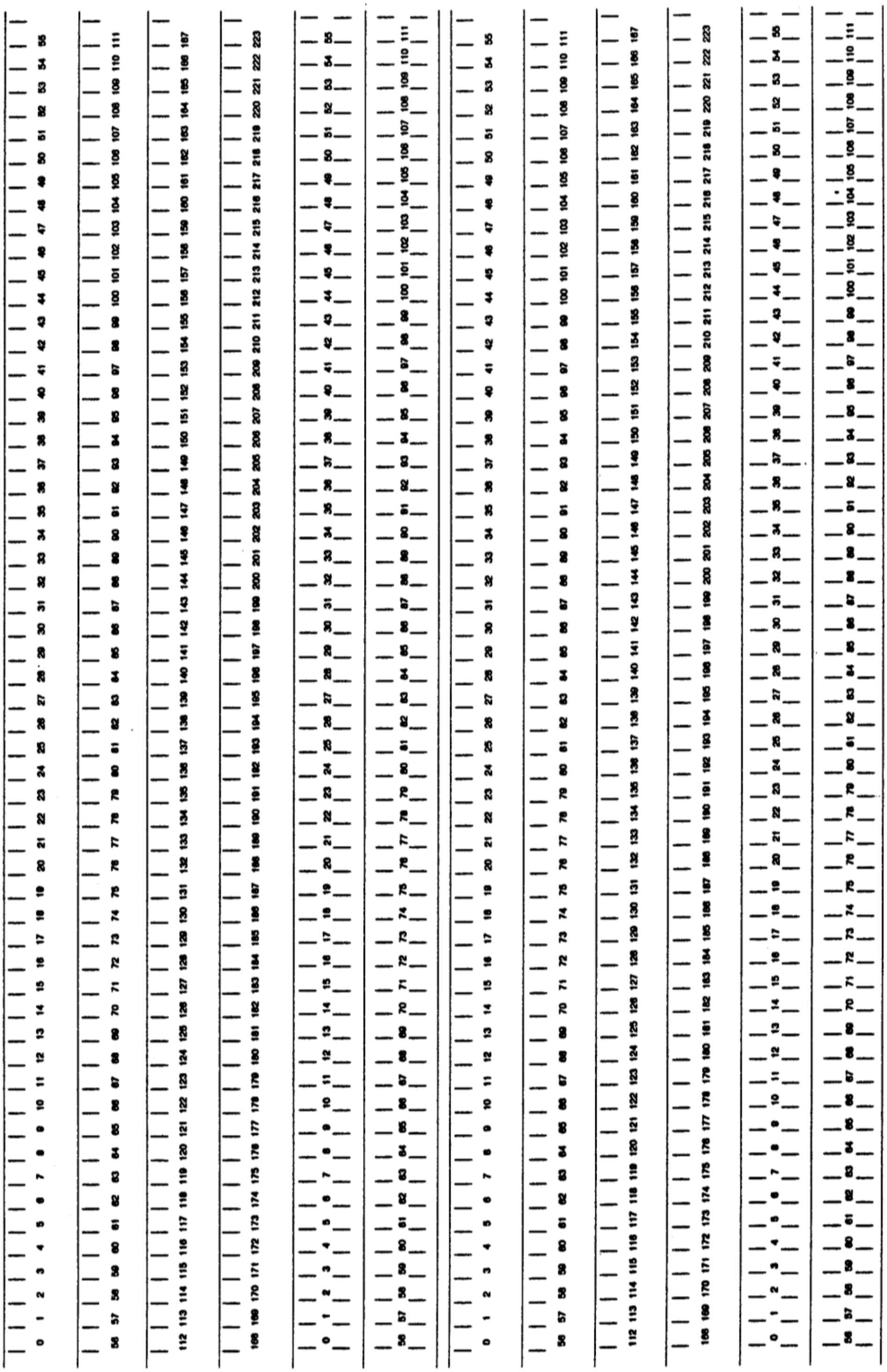
3- *Remarque*

Le jeu décrit ne nécessite pas la production d'une écriture (additive ou soustractive) de la part des joueurs. Il faudra transformer la situation de base (communication, abandon de la manipulation) pour nécessiter des écritures additives ou soustractives des nombres en jeu: **e** = **b - a, b** = **a + e, a** = **b - e**.
Par exemple : donner la consigne" *où mettre le deuxième élastique sur la règle"* lorsque écart et un élastique sur la règle sont donnés, « *trouver toutes les possibilités* », peut amener à noter les possibilités obtenues sous la forme (connue**) a + e** et (extension du sens de **-**) **a - e**.

4- *Exploitations possibles de la situation* 3

Pour les fonctions numériques (ajouter **e** et retrancher **e**) et les techniques opératoires mentales (invariance de l'écart par translation, décomposition additive des écarts).

Annexe - bandes graduées pour l'activité "règles"



Catégorisation des problèmes multiplicatifs et tentatives d'unification.

Alain Descaves

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Pau 1992.

Après avoir donné une définition générale d'un problème multiplicatif, l'article présente rapidement trois catégorisations possibles de ces problèmes relevant d'approches différentes. Il conclut en proposant une perspective d'unification.

1- Qu'est-ce qu'un problème multiplicatif ?

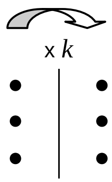
On désigne ordinairement par problème multiplicatif un problème qui exige la mise en oeuvre d'une multiplication ou d'une division. Cette définition est insuffisante, voire dangereuse, car elle peut limiter la pragmatique de la résolution de ces problèmes à la reconnaissance et à l'exécution d'une technique opératoire.

On peut, comme le fait le psychologue Vergnaud, étendre le champ des problèmes multiplicatifs à l'intérieur du champ conceptuel des structures multiplicatives (cf. 2.2). On est alors confronté à un champ immense qui met en jeu aussi bien les concepts de multiplication et de division que ceux de proportion, de fonction linéaire, de rapport, de multiple, de diviseur, de nombre rationnel, de fraction, etc.

On peut également recenser, comme le fait le didacticien Brousseau (cf. 2.1) différentes connaissances enseignées dans la scolarité obligatoire liées à la multiplication et à la division et utilisées dans des problèmes, ainsi qu'identifier les conditions de leur emploi par les élèves (difficultés, réussites, échecs), et les rattacher aux connaissances culturelles visées et utilisées dans diverses institutions. On décrit alors la diversité des savoirs dans le cadre de leur contextualisation.

Il nous a paru souhaitable de donner une définition plus formelle des problèmes multiplicatifs.

Ainsi nous appellerons problème multiplicatif tout problème susceptible, dans un certain domaine de validité, d'une modélisation par des équations à une inconnue du type $a \times b = c$ ou $a \div b = c$, a ou b ou c étant l'inconnue, ou d'une mise en signes par un tableau de proportionnalité du type :



l'inconnue x occupant une des quatre places, c'est à dire d'une modélisation de la forme $f(a) = b$ où f est une fonction linéaire. Un problème multiplicatif n'a pas forcément une solution dans le champ de validité considéré (notamment si le champ n'est pas étendu aux rationnels).

Cette définition ne répond pas à la question de la résolution. Les élèves peuvent bien sûr résoudre un problème multiplicatif sans le modéliser.

2- Catégorisation des situations modélisables par un problème multiplicatif.

2.1. Approche didactique

Catégorisation liée aux pratiques scolaires de référence (conceptions).
Brousseau identifie un certain nombre de variables pertinentes des situations : les nombres, les types de grandeur, la situation didactique, les connaissances antérieures des élèves (liées par exemple à des techniques), etc.
Pour Brousseau « *la connaissance dont les enseignants s'occupent en tant que but ou en tant qu'obstacle à leur activité n'est pas une simple collection de composantes : celles-ci sont organisées en conceptions. Une conception permet de traiter (reconnaître et résoudre) une sous-classe de situations considérées comme comparables (identifiées) à l'aide des mêmes schèmes, des mêmes termes et avec des procédures voisines, justifiées par des "raisonnements semblables" ou traitées à l'aide de propriétés et de connaissances logiquement et fortement liées.*
Des conceptions sont différentes si l'une ne permet pas d'appréhender sans difficulté les problèmes que l'autre permet de maîtriser. Un même élève peut utiliser plusieurs conceptions en ignorant leurs relations ou au contraire en les reliant en une conception plus générale. L'ensemble de ces conceptions ainsi articulé et les problèmes qu'elles peuvent traiter forment le champ conceptuel de la notion mathématique. » [1]

Les catégorisations proposées sont donc liées à l'idée de conception.
Brousseau identifie cinq grandes catégories de conceptions liées à la division, elles-mêmes subdivisables.

1) Les partages,
2) La recherche du terme inconnu d'un produit,
3) La division "fraction",
4) L'application linéaire,
5) La composition d'applications linéaires.

[1] G.Brousseau, « *Représentations et didactique du sens de la division* » in Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1989.

De même pour la multiplication il est possible de repérer des conceptions liées :

- à l'addition répétée ;
- au produit cartésien (arbre et tableau) ;
- au produit-mesure, les conceptions attachées aux grandeurs continues se distinguant de celles attachées au "discret".

2.2 Approche cognitive et mathématique

Catégorisation liée à des représentations symboliques.
Vergnaud replace les problèmes multiplicatifs dans le champ conceptuel des structures multiplicatives. Ce champ est *« à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations : proportion simple et proportion multiple, fonction linéaire et n-linéaire, rapport scalaire direct et inverse, quotient et produit de dimension, combinaison linéaire et application linéaire, fraction, rapport, nombre rationne, multiple et diviseur. etc. »*[2]

Un certain nombre de théorèmes donnent dans ce champ leur fonction aux concepts, par exemple les propriétés de linéarité :

$$f(nx) = nf(x) \text{ et } f(ax+by) = af(x) + bf(y).$$

Les relations de base les plus simples sont pour Vergnaud quaternaires et non ternaires contrairement aux structures additives.

Il est possible de générer quatre classes de problèmes élémentaires :

1 - La multiplication.
ex : "J'ai 3 paquets de yaourts. Il y a 4 yaourts dans chaque paquet. Combien ai-je de yaourts ?"

1	a
b	•

2 - La division-partition.

[2] G. Vergnaud. *Théorie des champs conceptuels* in Revue de didactique des mathématiques, Vo1.10/2.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1991.

ex : "J'ai payé 40 francs pour trois bouteilles de vin. Quel est le prix d'une bouteille ?"

1	•
b	c

3 - La division-quotition.
ex : "Pierre a 24 francs et veut acheter des paquets de bonbons à 6 francs le paquet. Combien de paquets peut-il acheter ?"

1	a
•	c

4 - La 4ème proportionnelle.
ex : "3 pelotes de laine pèsent 200 g. Il en faut 8 pour faire un pull. Combien pèse le pull ?"

a	b
c	•

Les problèmes ternaires existent également, par exemple les produits de mesure, reliés aux dimensions simples (longueur, temps, etc.), aux dimensions produits (aire, volume, etc.), aux dimensions quotients (vitesse, densité, etc.).

La difficulté des problèmes multiplicatifs dépend aussi, selon Vergnaud, de la taille des nombres, de la nature et de la valeur des quotients et du coefficient de proportionnalité, de la dimension, des grandeurs continues ou discrètes, etc.

2.3. Point de vue cognitiviste

Catégorisation liée aux représentations cognitives (iconiques en particulier) déclenchées par la lecture des énoncés.
Les significations déclenchées par la lecture des énoncés reposent sur la reconnaissance de "formes", sur leur mise en relation et leur traitement symbolique. Une "forme" peut par exemple être attachée à un mot déclencheur (partager, en tout, etc.).
Pour catégoriser les problèmes multiplicatifs, le point de vue cognitiviste oblige à penser le problème de l'interprétation des énoncés en fonction des possibilités de représentation et de traitement dont dispose le sujet. Ces représentations cognitives sont de différents types (iconiques, symboliques de type linguistique ou liées à l'écrit mathématique et à sa correspondance orale). Ce problème de l’interprétation dépend aussi des possibilités de correspondance entre les différents systèmes de représentation.

Pour caractériser les problèmes multiplicatifs il convient donc d'intégrer différents niveaux d'analyse : cognitif, pragmatique et culturel.
Pour sensibiliser les professeurs d'école à ces différentes catégorisations, il est possible de leur fournir un corpus d'énoncés de problèmes multiplicatifs et de leur demander de les classer. Il est également possible de leur demander d'inventer un ou des énoncés correspondant aux différentes classes liées à ces catégorisations.

3- Approches pédagogiques des problèmes multiplicatifs.

3.1. L'éclatement des conceptions.

L'absence de modèles unificateurs (en particulier dans les manuels) débouche sur l'éclatement des conceptions. L'apprentissage consiste, dans un cadre béhavioriste, à multiplier les connexions stimulus-réponses : une opération est associée à chacun des modèles.
Les manuels scolaires présentent parfois un corpus de problèmes afin que les élèves identifient le « bon outil ». Mais aucune aide n'étant fournie à ces derniers, ils restent confrontés à la diversité des situations.

3.2. Tentatives d'unification.

Parmi les tentatives d'unification des problèmes multiplicatifs on peut retenir trois conceptions :

- L'unification se fondant sur une structuration spontanée chez les élèves (maturation, équilibre) suite à la confrontation avec les différentes conceptions.
- L'unification provenant de la représentation par des tableaux de proportionnalité, les opérateurs jouant un très grand rôle dans cette approche (exemple des années "mathématiques modernes").
- L'unification par l'algébrisation (liée essentiellement à la possibilité de pouvoir nommer l'inconnue) qui permet la découverte de règles de transformation de l'écrit (ex : $X \times a = b$ implique $b \div a = X$). Ce sont les modélisations mathématiques et leurs relations qui permettent l'unification des problèmes multiplicatifs. Les structures de sens sont internes aux mathématiques. Ce sont, dans cette conception, les mathématiques qui déterminent les formes de la réalité et non les mathématiques qui sont en rapport d'application avec le monde[3]. L'algébrisation n'exclut ni le recours à d'autres systèmes symboliques du type Vergnaud, ni la réflexion sur les différentes conceptions type Brousseau. Par contre, elle va bien à l'encontre des pratiques ordinaires.

[3] A. Descaves. *Comprendre des énoncés et résoudre des problèmes,* Pédagogies pour demain, Didactiques, Hachette, 1992.

Proportionnalité

Hervé Péault

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Pau 1992.

L'article détaille six activités cherchant à réorganiser les connaissances personnelles des étudiants professeurs des écoles sur la proportionnalité, en vue d'un enseignement de cette notion à des élèves de 10 à 12 ans.

J'ai consacré sur ce thème 3 séances en première année de formation des professeurs d'école. L'objectif de ce travail était très général : permettre à chacun d'améliorer sa maîtrise de la notion de proportionnalité et de pouvoir envisager des séquences sur ce thème à l'école élémentaire.

Avec le point de départ (activité 1) j'ai essayé de les amener à réfléchir sur les procédures qu'ils utilisent spontanément pour résoudre un problème de proportionnalité puis à comparer ces procédures à celles utilisées par les enfants.

Les activités suivantes visaient à préciser les caractérisations mathématiques de la proportionnalité, à les resituer dans différents cadres et à amorcer une réflexion didactique à partir de manuels ou de projets de séquences.

La plupart de ces activités sont très directement inspirées de "*La proportionnalité existe. Je l'ai rencontrée...*" IREM de Rouen, 1988.

J'ai ensuite remis aux étudiants 3 documents (non présentés ici) : une série d'exercices sur la proportionnalité, des fiches de travail permettant de reprendre individuellement le travail sur les aspects mathématiques de la proportionnalité et un document de synthèse sur la proportionnalité à l'école.

ACTIVITÉ 1

Objectif

Première analyse de procédures utilisées en situation de proportionnalité.

Problème

Le problème choisi est le suivant (annexe 1) : extrait d'un document de l'APMEP pour l'évaluation en sixième (11-12 ans, début du collège)

"Trois plateaux de fruits sont à l'étalage d'un marchand de primeurs. L'étiquette du premier plateau indique que l'on peut avoir 8 oranges pour 4 F, l'étiquette du second plateau indique 2 F pour les 3 citrons et celle du troisième plateau indique 4 F pour les 7 poires.
Quel est le fruit le plus cher ? Quel est le fruit le moins cher ?"

1) Résolution par les étudiants

Après un premier temps de recherche individuelle, on recense et on classe les procédures utilisées. On essaie d'analyser toutes les procédures envisageables. Celles-ci visent à se ramener à des éléments de comparaison communs pour chaque type de fruit et peuvent se résumer à 4 catégories :

- recherche du prix unitaire
- recherche de la quantité de fruits pour 1 F
- recherche de la quantité de fruits pour un même prix (2 F et 4 F sont les plus utilisés)
- recherche du prix pour une même quantité de fruits (à partir du plus petit multiple commun, ici 168)

Prix	1		a	
Quantité		1		b

Les deux premières conduisent à un calcul de division, les deux autres à l'utilisation de la linéarité.

2) Étude de procédures d'élèves

Les étudiants sont d'abord invités à essayer de prévoir les réactions d'élèves de sixième devant ce problème et les difficultés qu'ils risquent de rencontrer.

Je leur donne ensuite le document en annexe 1 recensant des procédures d'élèves de sixième telles qu'elles ont été expliquées par les enfants. Ils doivent comparer ces procédures à la classification déjà faite et analyser les erreurs.
Outre des procédures d'interprétation directe des données (*Chrystèle*) ou de calculs sans lien avec la situation (*Tony, Sébastien*), on retrouve les procédures déjà évoquées plus haut avec une difficulté majeure dans la recherche du prix unitaire : répugnant à diviser par un nombre plus grand, certains élèves inversent les termes.

3) Modifications de l'énoncé

Le problème posé est le suivant *: quels éléments peut-on changer dans le problème susceptibles de modifier les procédures utilisées (variables didactiques) ?*

Les étudiants sont invités à imaginer des énoncés changeant éventuellement de contexte et jouant sur ces variations.
Trois variables paraissent importantes : la valeur de chaque rapport prix/quantité (entier ou non, plus grand ou plus petit que 1), les rapports entre les prix, les rapports entre les quantités.

ACTIVITÉ 2

Objectif

Permettre d'en arriver à une caractérisation mathématique de la proportionnalité.

1) Lecture de graphiques

Les 6 situations suivantes sont proposées :

S1 : Trouver, en fonction de leur nombre, le prix de brochures valant 25 F pièce, avec 10 F de port.

S2 : Trouver, en fonction de leur nombre, le prix de places de cinéma valant 39 F l'une.

S3 : Trouver, dans un carré quadrillé régulièrement, le nombre de cases intérieures en fonction du nombre de cases dans chaque ligne.

S4 : Trouver, en fonction d'un prix initial, le prix réel à payer après une réduction de 25 %.

S5 : Trouver, en fonction du prix, un montant à payer compte-tenu de frais fixes s'élevant à 6,5 F.

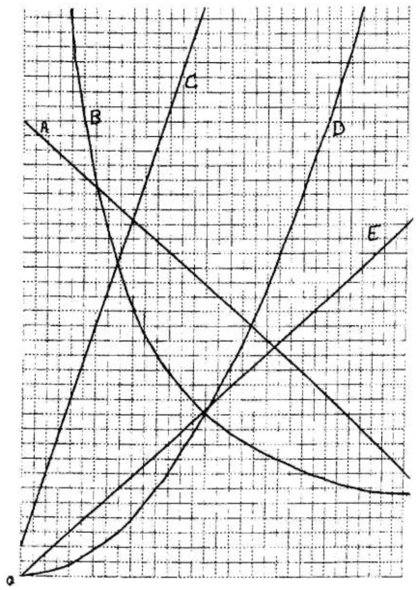
S6 : Trouver, en fonction de sa longueur, la largeur d'un rectangle de 840 cm^2.

Les graphiques ci-après sont projetés à l'aide du rétro-projecteur.

Consigne
Pour chacun des graphiques, et sans faire de calculs écrits, dites s'il vous paraît possible d'établir une graduation sur les axes telle que le graphique corresponde à l'une des situations.

Recherche

La recherche s'effectue par petits groupes avant une mise en commun (où on fait s'exprimer en dernier, les groupes qui recourent à la formalisation fonctionnelle de chaque situation).



Chacun reçoit ensuite un exemplaire qu'il peut utiliser pour le travail qui suit.

2) Caractérisation de la proportionnalité

Le tableau suivant est proposé

3	5	7	8	15

Consigne
« Pour chaque situation, essayez de trouver le maximum de procédures différentes possibles pour remplir le tableau ».
La mise en commun permet de mettre en évidence des procédures liées :

- à l'utilisation d'une *formule* (calcul d'un produit dans le cas des fonctions linéaires),
- à l'utilisation de *propriétés* indépendantes de cette formule (linéarité, conservation des écarts, considérations sur les écarts et la linéarité pour les fonctions affines...),
- à l'utilisation de *graphiques.*

Synthèse

Définition de la proportionnalité, caractérisation par une fonction multiplicative, la linéarité, la représentation graphique. Démonstration de l'équivalence fonction multiplicative/fonction linéaire.

Définition de la proportionnalité inverse et présentation sommaire de divers autres types de fonctions (fonction affine, fonction puissance, fonction exponentielle).

3) « La règle de trois »

Chaque étudiant doit résoudre l'un des problèmes suivants (chaque problème est donné au tiers des présents) :

Pb1 : "Un *mobile se déplaçant à vitesse constante parcourt 25 m en 6 minutes. Quelle distance parcourt-il en 15 minutes ?"*

Pb2 *: "6 cm^3 de minerai ont une masse de 25 g. Quelle est la masse de 15 cm^3 de ce même minerai ?"*

Pb3 : "6 *objets identiques sont vendus 25 F. Pour appliquer un tarif identique. à quel prix doit-on vendre 15 de ces objets ?"*

La mise en commun s'effectue sur les procédures utilisées et leur comparaison. C'est seulement à cette occasion que j'ai vu apparaître une procédure utilisant les "produits en croix". Cela a été l'occasion de démontrer l'équivalence entre cette propriété et les autres propriétés liées à la proportionnalité.

À cette occasion, je présente l'évolution des programmes concernant la proportionnalité, les termes *"règle de trois"* et *"recherche d'une quatrième proportionnelle".*

4) Proportionnalité et croissance

Objectif

Réinvestissement

Première partie

La fiche ci-dessous est donnée à chacun :

Quelles sont les situations pour lesquelles il y a proportionnalité entre les variables indiquées ?

1) colis postaux : *masse / tarif*
2) cercle *: diamètre / périmètre*
3) cylindre de base donnée : l*ongueur / volume*
4) individu *: taille / poids*
5) ressort avec poids suspendu : *poids* / *allongement*
6) plaque de métal homogène : *poids* / *aire*
7) entier quelconque : *nombre /.somme de chiffres*
8) carré *: côté / périmètre*
9) carré : *côté / aire*
10) rectangles de longueur constante : *largeur / aire*
11) rectangles de périmètre constant: *longueur / largeur*
12) rectangles d'aire constante : *longueur* / *largeur*
13) gaz de ville *: consommation / tarif*
14) déclaration de revenus : *revenu montant de l' impôt*
15) soldes à pourcentage fixe : *prix initial / prix à paver*
16) cercle *: aire / carré du diamètre*
17) sphère *: volume / carré du rayon*
18) parcours (distance fixe) : *vitesse moyenne / durée*
19) parcours (vitesse donnée) : *distance / durée*
20) parcours (durée donnée) *: vitesse moyenne / distance*

Mise en commun

Étude des désaccords. C'est l'occasion de mieux mettre en évidence la non-équivalence entre croissance et proportionnalité.

Deuxième partie

Divers graphiques sont donnés (cf. document 1988 cité de l'IREM de Rouen). Il faut les associer, quand c'est possible à l'une des situations ci-dessus.

ACTIVITÉ 3

Objectif

Réflexion sur des aspects didactiques de l'enseignement de la proportionnalité.

1) Exposé

Dans un premier temps, je donne quelques indications sur l'approche des fonctions numériques et de la proportionnalité à l'école élémentaire (indications qui seront développées dans des fiches complémentaires) et sur le comportement des élèves.
(cf. article de M. Pézard *"Proportionnalité"* dans le bulletin inter-IREM *"Suivi scientifique sixième 85-86", p 205).*

2) Comparaison de séquences extraites de manuels

Travail par groupes puis mise en commun. J'ai choisi les extraits suivants :

- *"Maths : Calcul et géométrie CM2" (Nathan 89), p.140*
- *"Math-hebdo CM1" (Hachette1984), p.130*

Les deux extraits proposent chacun une situation de départ de comparaison de prix dans les magasins.

La consigne est d'analyser la tâche de l'élève dans chacun des extraits proposés puis de proposer une nouvelle situation sur le même thème en s'attachant à bien définir la tâche des élèves.

Il pourrait aussi être intéressant d'utiliser le texte de l'épreuve du concours P.E. 92 de l'Académie de Nantes. Celui-ci propose la comparaison de deux situations sur la proportionnalité, extraites l'une de « Objectif calcul CM2 » (Hatier), p. 104, l'autre de « Maths et Calcul CM2 » (Hachette), p 194.
Dans chacun des cas il s'agit de l'étude de la consommation d'essence d'une voiture.

ACTIVITÉ 4

Objectif

Réinvestir, dans un cadre géométrique, les propriétés liées à la proportionnalité.

1) Première partie

Les étudiants reçoivent une série de cartes par groupe (en papier fin, suffisamment transparent) de même format. Sur chacune d'elles se trouve l'un des 12 rectangles de la page suivante (positionnés différemment sur les différentes cartes). Les diagonales sont tracées sur quelques rectangles.

Le rapport longueur/largeur est 1,27 pour 4 rectangles type (A), 1,63 pour 4 autres type (B), 1,41 pour les 4 derniers type (C).

Les rectangles sont dans les rapports suivants (les dimensions sont en cm) :

- rectangles de type A : 1 - 1,5 - 2 – 3

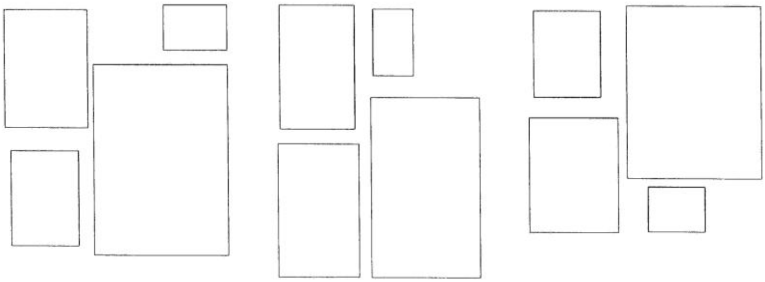
Ce sont les rectangles 16 x 12,6 ; 24 x 18,9 ; 32 x 25,2 ; 48 x 37,8

- rectangles de type B : 1 - 1,85 - 2 - 2,7

Ce sont les rectangles 18 x 11,04 ; 33,3 x 20,42 ; 36 x 22,08 ; 48,6 x 29,81

- rectangles de type C : 1 - 1,5 - 1,85 – 3

Ce sont les rectangles 18 x 12,76 ; 27 x 19,14 ; 33,3 x 25,6 ; 54 x 38,28



Consigne

Quels sont les rectangles qui peuvent être considérés comme des agrandissements ou des réductions les uns des autres ? Classez-les selon ce critère. Vous avez le droit de mesurer mais vous n'êtes pas obligés.

Mise en commun

Elle vise à mettre en évidence et valider les procédures utilisées. Celles-ci ont été les suivantes :

- des procédures géométriques visant à superposer les rectangles, soit par un coin soit par leurs centres.
- des procédures numériques après mesurage des côtés, voire des diagonales :
  * calcul du rapport longueur/largeur.
  * recherche de linéarité sur des valeurs entières (les rectangles aux dimensions doublées ou triplées sont repérés, mais pas les autres).
  * calcul du périmètre et recherche de rapports entiers entre les périmètres.
  * calcul de l'aire et recherche de rapports entiers entre les aires.

Ces deux dernières procédures conduisant bien sûr à des conclusions erronées.

La mise en commun est l'occasion, pour valider les procédures géométriques, d'une référence au théorème de Thalès.

2) Deuxième partie

Un rectangle de type B est choisi.

Consigne

Construisez un nouveau rectangle à l'intérieur de telle façon que la longueur de ce rectangle soit la largeur du grand rectangle et que les 2 rectangles puissent être considérés comme identiques à un agrandissement près.
Cherchez des procédures utilisant des calculs sur les dimensions et des procédures ne faisant intervenir aucun calcul.

Nouvelle consigne

Construisez un rectangle puis effectuez le même travail que précédemment. Le deuxième rectangle doit partager le premier exactement en deux parties de même aire.

Mise en commun

Elle vise à faire apparaître que le rapport doit être égal à $\sqrt{2}$ et se prolonge par l'étude des formats commerciaux de papier. Le format A0 étant conventionnellement établi à 1 m^2, on montre que les dimensions du format A4 sont 21 x 29,7.

ACTIVITÉ 5

Objectif

Étude de la proportionnalité multiple.

Problème

Dans une entreprise, des machines travaillent à rythme régulier pour produire une certaine substance. 8 machines produisent 6 kg de cette substance en 5 jours. Comment prévoir la quantité produite pour un nombre donné de machines et un nombre donné de jours ?

Recherche et étude des procédures. Synthèse à l'aide d'un tableau.

Présentation de la notion de bilinéarité et des fonctions de type $(x, y) \to axy$.

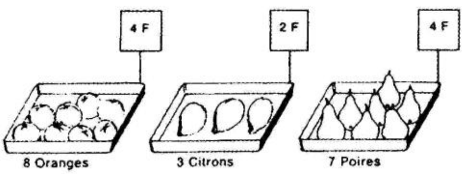
ACTIVITÉ 6

Analyse didactique sur le thème "Agrandissement et proportionnalité à l'école".
Le document en annexe 2 est remis aux étudiants et fait ensuite l'objet d'un échange à partir des questions posées.
Il est présenté comme un sujet possible de concours et le "corrigé" joint est remis aux étudiants à l'issue de la discussion (annexe 3).

ANNEXE 1

Ce problème est extrait d'un document de l'A.P.M.E.P. (questionnaire d'approfondissement pour l'évaluation en fin de sixième).

Voici trois plateaux de fruits à l'étalage d'un marchand de primeurs.
L'étiquette du premier plateau indique que l'on peut avoir 8 oranges pour 4 F, l'étiquette du second plateau indique 2 F pour les 3 citrons et celle du troisième plateau indique 4 F pour les 7 poires.
Quel est le fruit le plus cher ?
Quel est le fruit le moins cher ?



Voici quelques réponses d'élèves d'une classe de sixième (à qui il avait été demandé d'expliquer leur solution) :

Fabien. Le plus cher des fruits, c'est l'orange. Car si on divise 4 par 8, 2 par 3 et 4 par 7, ça nous donne 2, 1 et 1. Et donc le citron et la poire sont les moins chers.

Tony. J'ai fait 4 x 8 = 32 puis 2 x 3 = 6 puis 4 x 7 = 28 et je constate que les fruits les plus chers sont les oranges et les moins chers les citrons.

Cindy. Si on divise les 8 oranges par son prix, on obtient la valeur totale des 8 oranges (8 oranges à 4 F ça fait 2 F pour une orange).
Si on divise les 3 citrons par son prix, on obtient la valeur totale des 3 citrons (3 citrons à 2 F, ça fait 1,50 F pour un citron).
Si on divise les 7 poires par son prix, on obtient la valeur totale des 7 poires (7 poires à 4 F ça fait 1,75 F pour une poire).
Donc les plus chers sont les oranges, les moins chers sont les citrons.

Mathieu. Le fruit le plus cher est le citron car si on multiplie 3 par 2, ça fait 6: ça sera aussi cher que les oranges et les poires, mais il y aura un fruit de moins.
Le fruit le moins cher est l'orange, parce que 6 citrons ça ferait 4 F et 7 poires ça fait 4 F et 8 oranges ça fait 4 F : c'est le même prix, mais il y a une orange de plus que les autres fruits.

Chrystèle. Le fruit le plus cher c'est les oranges et les poires car il vaut 4 F ; le fruit le moins cher c'est les citrons car il vaut 2 F.

Ludovic. 8 : 4 = 2 F pour une orange ; 3 : 2 = 1,50 F pour un citron ;
7 : 4 = 1,75 F pour une poire. Le plus cher c'est l'orange. le moins cher c'est le citron.

Alexandre. En divisant le prix par le nombre de fruits, nous trouvons le prix d'un fruit. Orange : 0,50 F ; citron : 0,66 F ; poire : 0,57 F. Donc les citrons sont les plus chers et les oranges les moins chères.

Jérémie. J'ai cherché pour le même nombre d'oranges et de citrons, ça fait 24. 24 oranges coûtent 12 F et 24 citrons coûtent 16 F. Donc les citrons sont plus chers et les poires il n'y en a que 7 pour 4 F donc les oranges sont moins chères.

Alice. On calcule en faisant une division. 4 : 8 = 0,50 ; 2 : 3 = 0,66 ;
4 : 7 = 0,57. Le fruit le plus cher est le citron à 0,66 F et le moins cher est l'orange à 0,50 F.

Karine. Si on divise les oranges par 2, ça fait 4 oranges, alors le prix serait à 2 F. 4 oranges à 2 F et 3 citrons à 2 F il y a une orange de plus donc les oranges sont les moins chers et les citrons les plus chers.

Sébastien. Pour les oranges, j'ai trouvé 12. Pour les citrons, j'ai trouvé 6. Pour les poires, j'ai trouvé 11. Les plus chers c'est les oranges et les poires. les moins chers c'est les citrons.

Élodie. Pour 4 F on peut avoir 8 oranges, 6 citrons et 7 poires. Donc c'est les oranges les plus chers et les citrons les moins chers.

Cécile. L'orange coûte 50 centimes car 8 x 50 c = 400 c et 400 c c'est 4 F...

Cyrille. Avec 1 F on a 2 oranges mais moins de 2 avec les citrons et les poires. Donc les oranges sont moins chères.

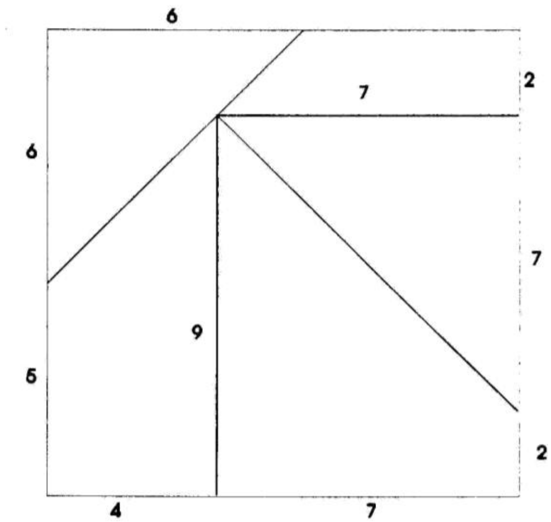
Peggy. Les 8 oranges coûtent 4 F et les 7 poires aussi. Alors le plus avantageux ce sont les 8 oranges à 4 F parce qu'il y en a plus et les plus chers c'est les poires mais les citrons encore plus car pour 4 F on n'en a que 6.

Julien. L'orange coûte 2 F, le citron 1,50 F et la poire 1,50 F. Donc le plus cher c'est l'orange, et le citron et la poire sont pareils.

ANNEXE 2
LE PUZZLE

Voici une situation pour une classe de CM2.

Les enfants sont regroupés par équipes de 4 ou 5. Chaque équipe reçoit le puzzle ci-dessous.



La consigne donnée est la suivante :

« Chaque équipe a reçu un puzzle et doit en reconstruire un autre, mais plus grand ! Pour cela il faudra respecter la règle suivante : "un segment qui mesure 4 cm sur le puzzle que je vous ai donné devra mesurer 6 cm sur le puzzle que vous construirez. "
De plus chaque élève de l'équipe doit fabriquer une seule pièce du puzzle.
Lorsque chaque élève de l'équipe aura terminé, vous assemblerez les pièces. Vous devrez alors obtenir un puzzle identique au modèle, mais plus grand. »

Après la recherche par équipes, les différentes solutions sont communiquées lors d'une mise en commun.

1) Quelles sont les connaissances mathématiques concernées par ce travail ?
2) Quel est l'intérêt d'organiser un travail de groupe dans lequel chaque élève a une seule pièce à reconstituer ?
3) Voici quelques-unes des procédures couramment utilisées par les élèves dans cette situation :

   - « On ajoute à chaque fois 2, puisque 4 doit faire 6 »
   - « Il faut ajouter la moitié de la longueur de départ »
   -« Il faut multiplier chaque longueur par 1,5 »
   - « Puisque 4 donne 6, 2 donne 3, 6 donne 9… »

Comparez ces différentes procédures et les représentations de la situation auxquelles elles correspondent.

4) Que peut attendre l'enseignant de la mise en commun ?
5) Voici deux modifications de la consigne :
   - *"ce qui mesure.4 cm devra mesurer 8 cm..."*
   - *"ce qui mesure 4 cm devra mesurer 7 cm..."*

Quelles modifications ces changements de consigne sont-ils susceptibles d'introduire dans les procédures utilisées par les élèves ?

ANNEXE 3
Éléments de réponse

1) Ce problème de la reproduction d'un puzzle permet d'aborder le thème de la **proportionnalité** dans un cadre géométrique.
II s'agit ici de reconnaître une situation de proportionnalité et de la traiter convenablement :

- remise en cause du modèle *"pour agrandir, il faut ajouter",*
- usage des fonctions numériques adaptées et des propriétés de linéarité.

Cela s'accompagne d'un travail sur les nombres (décimaux, éventuellement fractions) et sur les figures géométriques (reproduction de figures simples).

2) L'organisation du travail retenue ici a d'abord l'avantage de permettre une implication directe de chaque enfant.
Par ailleurs, il est important que le travail soit organisé par équipes et que chaque membre de l'équipe ait à réaliser une pièce, de façon à provoquer les échanges, la concertation et le débat sur le choix d'une procédure.

Mais surtout, c'est la reconstitution du puzzle par assemblage des pièces construites qui permettra **de valider** la stratégie utilisée par le groupe. Il s'agit ici d'une validation interne à la situation : les enfants peuvent déterminer seuls s'ils ont réussi, sans recours à une autorité externe.

Si un enfant ou une équipe avait la charge globale de l'ensemble du puzzle, une procédure vraisemblable consisterait à tracer d'abord un grand carré agrandi sur lequel s'effectueraient des tracés avant découpage. La justesse de la construction de chaque pièce ne pourrait plus être validée directement, puisque le puzzle serait de toutes façons reconstituable.

3) Seules les trois dernières procédures permettent de reconstituer le puzzle.

- La première procédure recouvre une erreur fréquente sur la conception de l'agrandissement. Pour beaucoup d'élèves « ***agrandir, c'est ajouter*** **».** Il est à noter que les tentatives infructueuses de reconstituer le puzzle dans ce cas, ne suffisent pas en général pour remettre en cause chez les élèves le modèle additif utilisé (ils se reprochent par exemple de mauvais dessins ou de mauvais découpages..). Il est donc important que le puzzle choisi soit tel que la reconstitution à l'aide de la règle "ajouter 2" conduise à des pièces nettement incorrectes.

- La seconde procédure traduit la persistance du modèle additif, mais cette fois-ci la **quantité à ajouter dépend de la quantité initiale**. C'est la traduction d'une fonction numérique du type $x \rightarrow x + x/2$ assez facilement identifiable compte tenu des données numériques choisies. Elle correspond à une représentation correcte de l'agrandissement, mais qui risque d'être fragile pour un éventuel réinvestissement.

- La troisième procédure s'appuie sur une représentation juste de l'agrandissement « ***agrandir, c'est multiplier*** ». C'est la reconnaissance d'une fonction multiplicative et du coefficient de proportionnalité.

- La quatrième procédure s'appuie aussi sur une représentation juste de l'agrandissement, liée cette fois non plus à un coefficient de proportionnalité, mais à la **linéarité**. Cette procédure permet de retrouver un résultat de plusieurs façons, notamment si elle est organisée autour de la constitution d'un tableau de valeurs.

4) La mise en commun permet de revenir sur la **validation**. La validation dans les groupes a permis de répondre à la question *"est-ce que ça marche ?". La* mise en commun est l'occasion d'essayer d'envisager la question « *pourquoi ça marche ?* »

Par ailleurs elle doit permettre **la confrontation des différentes procédures**. C'est une étape importante car elle permet à certains de s'approprier une solution qu'ils n'ont pas élaborée.

Elle permet également de **faire des rapprochements entre des procédures différentes** (par exemple, ceux qui ont été amenés à rechercher l'image de 1 en utilisant des propriétés de linéarité ont finalement mis en évidence le coefficient de proportionnalité).

C'est enfin l'occasion de confronter les élèves à différents aspects de la proportionnalité qu'on retrouvera dans d'autres situations.

5) **Le rapport de proportionnalité est une variable didactique essentielle** de la situation et une analyse a priori est nécessaire de la part de l'enseignant avant de faire un choix sur cette variable.

La consigne "4 *cm devient 8 cm"* a toutes les chances de conduire directement les élèves à doubler toutes les mesures et d'autres procédures ont peu de chances d'apparaître. "L'évidence" de cette procédure risque de faire perdre l'intérêt du travail sur la proportionnalité et ses liens avec l'agrandissement.

La consigne *"4 cm devient 7 cm"* conduira à rendre plus délicat le recours à la deuxième ou la troisième procédure. En effet, le coefficient d'agrandissement n'étant plus aussi simple, son utilisation devient plus délicate pour des enfants de CM2 : d'autre part l'équivalent de la seconde procédure consisterait à *"ajouter la moitié de la longueur initiale et encore la moitié de cette moitié"...ce* qui rend faible sa probabilité d'apparition.

Cette nouvelle consigne conduit donc à marquer plus nettement l'opposition entre le modèle additif *("ajouter 3")* et celui utilisant la linéarité. On a pu constater que certains enfants ayant réussi avec la consigne "*4 cm devient 6 cm"* régressent avec cette nouvelle consigne, revenant quelque temps à un modèle additif avant de pouvoir à nouveau le rejeter.

Bibliographie

- COPIRELEM, *"Agrandissement de puzzle"* in "Aides pédagogiques pour le CM", publication APMEP n°64 , p. 80, Situations problèmes 1987.

- R. Charnay, *"Des problèmes pour apprendre en CM2 et 6ème*", IREM Lyon,. p. 26, 1987.

Etude du format A4

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article présente une situation d'homologie pour les étudiants (PE1) se préparant au professorat des écoles, fondée sur les relations liant les différents formats de papier classique[1] *et permettant d'illustrer des aspects de la proportionnalité dans différents cadres géométrique, numérique, graphique, en particulier de mettre en réseau coefficient de proportionnalité, pente de la droite (représentation graphique) et théorème de Thalès.*

OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

- Rencontrer la proportionnalité dans divers cadres
- Approcher $\sqrt{2}$ par les aires
- Voir des exemples de figures semblables (notion de coefficient de forme d'un rectangle)
- Eventuellement sensibiliser à la notion de suite géométrique et de limite de suite

Objectifs didactiques

- Notion de cadres et de changement de cadres
- Notion de preuve
- Différentes phases d'une situation d'apprentissage

ACTIVITÉ

Matériel

Par personne : trois feuilles de format A4 , calculatrices, règles, compas

Organisation

Travail par groupes de quatre

[1] Origine : *Faire des Mathématiques* , Deledicq ; Lassave. Editions Cedic Nathan 1977

Consigne 1
"Vous disposez d'une feuille rectangulaire que l'on appellera le rectangle F0. Il s'agit d'obtenir d'autres rectangles par pliage et découpage. La consigne ***C*** *de découpage est la suivante : vous pliez le rectangle, dans sa plus grande dimension, en deux parties exactement superposables, vous découpez et vous gardez un rectangle. Ainsi, à partir de F0 vous obtenez F1.*
Par un procédé récursif, à partir de F1 avec la consigne ***C****, vous obtenez F2, puis de proche en proche F3, F4, F5.*
Vous obtenez donc une famille de rectangles ***F*** *: F0, F1, F2, F3, F4, F5. "*

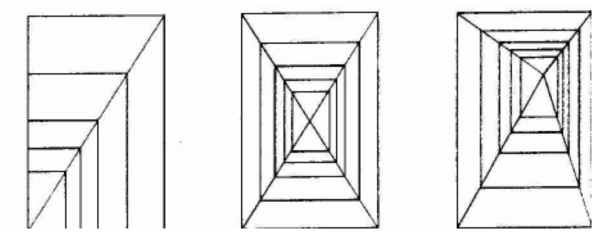
Consigne 2
"Trouvez un empilement régulier, un empilement que vous pouvez décrire, de ces six rectangles. "

Synthèse
- Description des empilements.

Dans la suite la réflexion s'appuie sur les empilements « réguliers » qui gardent parallèles les côtés des différents rectangles.

- Constat de l'alignement des sommets homologues sur une droite : ces droites passent le centre des rectangles ou par un point particulier intérieur à chaque rectangle.

Si le premier empilement réussit, il en est de même des autres.



L'existence de ces dispositions particulières pour une famille de rectangles sera notée sous le nom propriété **P**.

Consigne 3
"Vous laissez cette famille F de côté et vous prenez une nouvelle feuille. Construisez un rectangle R0 de dimensions (y_0, x_0)*, qui ne fait pas partie de la famille* ***F*** *et tel que :*

$$y_0>x_0>y_0/2.$$

*Construisez la famille (****R, C****) obtenue à partir de R0 et de la consigne* ***C***

Question : *"Peut-on empiler les rectangles* ***R*** *pour obtenir la propriété* ***P ?****"*

Synthèse

Pour une famille (**R, C)** construite à partir de R0 quelconque, deux sous familles ont la propriété **P** :

- (R0, R2, R4,...) a la propriété P,
- (R1, R3, R5....) a la propriété P.

En général, la famille **R** entière n'a pas la propriété **P**.

Consigne 4

*"Cherchez quelle est la condition sur le rectangle de départ pour que la famille entière construite à partir de ce rectangle et de la consigne **C** vérifie la propriété **P** ? »*

Synthèse

On fait ensemble les premiers constats pour la famille **F**.

- Il existe une certaine disposition pour laquelle les quatre sommets sont alignés sur des droites passant par le centre des rectangles et leurs sommets.

- **Les diagonales de chaque rectangle font un angle constant** avec les côtés homologues des rectangles.

- **Le rapport longueur sur largeur est le même** pour tous les rectangles.

- Les rapports x_i/x_j et y_i/y_j sont égaux pour tous i et j

- Si on représente le rectangle Fi par le point Fi de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère orthonormé, les points F0, Fl,..., F6,... , sont **alignés sur une droite qui passe par l'origine.**

- Toutes ces propriétés sont vraies pour les familles (R0, R2, R4…) et (R1, R3, R5…), mais ces deux familles ne respectent pas la condition P.

Voici le tableau des coordonnées approchées des points Fi et la relation des dimensions des rectangles R(2i) :

F0	21	29,7
F1	14,85	21
F2	10,5	14,85
F3	7,42	10,5
F4	5,25	7,42
F5	3,71	5,25
F6	2,62	3,71

R0	x_0	y_0
R2	$x_0/2$	$y_0/2$
R4	$x_0/4$	$y_0/4$
R6	$x_0/8$	$y_0/8$

Institutionnalisation

Pour une famille de rectangles qui vérifie la propriété **P**, on dit que :

- le tableau des dimensions exactes :

x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3.
x_4	y_4
x_5	y_5
x_6	y_6

est un **tableau de proportionnalité** de coefficient **k** : $y_i = \mathbf{k} \times x_i$ pour tout i.

- la suite des longueurs est **proportionnelle à** la suite des largeurs

- les rectangles ont tous **le même coefficient de forme** (rapport longueur sur largeur)

- les rectangles sont **homothétiques** les uns des autres et le rapport d'homothétie est toujours le même.

Pour rechercher le coefficient de proportionnalité k de la famille F, plusieurs méthodes sont possibles :

- **dans le cadre numérique**

  - calcul des rapports x/y dans les tableaux de nombres
  - utilisation des aires : aire de F0 = 2 aires de F1   etc.

- **dans le cadre graphique**

  Les points de coordonnées (x_i, y_i) étant sensiblement alignés, détermination graphique sur papier millimétré de la pente de la droite.

- **dans le cadre géométrique**

  Utilisation du théorème de Thalès (en raison de la présence de triangles homothétiques) permettant de faire le pont entre le cadre graphique et le cadre numérique.

Conclusion

Une condition nécessaire pour que (**R, C)** vérifie la propriété **P** est que **R** soit une famille de rectangles ayant tous même coefficient de forme et que ce coefficient soit $\sqrt{2}$.

Cette condition est aussi suffisante après vérification.

ANALYSE DE CETTE ACTIVITÉ

Analyse mathématique

Cette situation permet dans un premier temps d'étudier de façon particulièrement bien détaillée, les propriétés numériques, graphiques et géométriques liées aux fonctions linéaires. Il est donc possible de faire une synthèse sur les notions de **listes de nombres proportionnels**, **de fonction linéaire**, **d'homothétie,** de **figures semblables** et de relier le **théorème de Thalès** aux **listes de nombres proportionnels**.
Elle permet également d'introduire la notion de **coefficient de forme des rectangles** et de travailler sur la transformation du coefficient d'agrandissement des mesures quand on passe des longueurs aux aires.
Elle permet d'approcher, dans ses prolongements, la notion de **limite d'une série géométrique**.

Analyse didactique

- La situation nécessite d'analyser les empilements géométriques, de faire des hypothèses sur les relations numériques reliant les dimensions théoriques des rectangles et de vérifier ces hypothèses sur les découpages : elle incite donc à des raisonnements prenant appui sur des objets sensibles.

- Elle permet de discuter du **concept de preuve** : preuves pragmatiques par observation des rectangles découpés et mesurage de leurs dimensions (avec une estimation des erreurs de tracé et de mesurage), preuves théoriques par étude des relations entre les longueurs et les aires des rectangles **:**

Ainsi la **pluralité des preuves** permet à chacun d'accéder à une certaine conviction et on constate que les preuves les plus rigoureuses ne sont pas nécessairement **les plus convaincantes**. Mais ce sont celles-ci qui ont leur place dans les mathématiques actuelles.

- La situation permet de définir la **notion de cadres** et celle de **changement de cadres**. En effet le problème est posé dans un cadre géométrique, *construire des rectangles et observer des propriétés d'alignement.* La disposition des rectangles avec un sommet commun et des côtés alignés amène à utiliser une représentation graphique (passage au cadre graphique), qui peut induire une étude numérique des listes de dimensions (passage au cadre numérique).

Ce thème de travail, outre ses objectifs mathématiques et didactiques, permet d'enrichir la culture mathématique de l'étudiant et de côtoyer d'autres domaines (technologie, arts plastiques, arts graphiques), notamment par ses prolongements.

PROLONGEMENTS

Il est utile d'envisager avec les étudiants un **point culturel** sur les familles de rectangles semblables et de montrer l'utilité des notions mathématiques pour des organisations techniques, notamment la question des agrandissements (id est sans déformation, id est l'obtention de figures semblables)

- les **formats A3 et A4** : la feuille de départ, A0, a une aire de 1 m^2 : les formats suivants sont obtenus selon le partage C ; on retrouve que le coefficient de forme est $\sqrt{2}$ (pour faciliter la coupe en deux et les réductions en photocopie). On peut donc calculer les dimensions des feuilles AO à A7.

- les **formats papier B0 à B6**, aussi de coefficient de forme $\sqrt{2}$: il s'agit également de rectangles semblables à leur moitié, avec B0 d'aire 1,5 m^2.

- les **formats photos**, rectangles de coefficient de forme 1,5 , semblables entre eux, mais non semblables à leur moitié :
  13 x 19,5   18 x 27   24 x 36   30 x 45   50 x 75

- les **rectangles d'or**, historiquement célèbres dans l'art et l'architecture, de coefficient de forme $(\sqrt{5}+1)/2$ (le nombre d'or), semblables entre eux, mais non semblables à leur moitié.

Cette activité peut donner lieu à **d'autres prolongements mathématiques** :

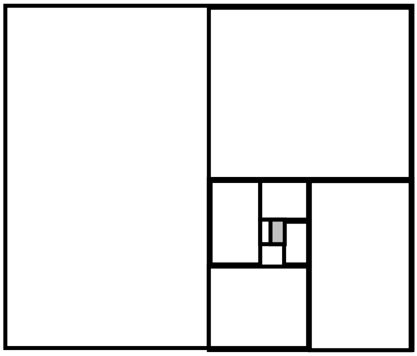
1 - Tracer une **représentation graphique** sur papier millimétré des points F0, F1 jusqu'à Fn à la règle et au compas.

2 - Construire, à la règle et au compas, une famille de rectangles type **R homothétiques et dont le coefficient de forme** est donné.

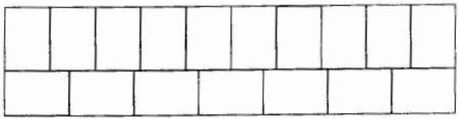
3 - Comprendre la notion de limite de la **suite géométrique** (Sn) de raison 1/2 en considérant Sn comme l'aire du rectangle de dimensions Xn et Yn avec
(Xn) suite géométrique de raison 1/ $\sqrt{2}$
(Yn) suite géométrique de raison 1/ $\sqrt{2}$
Ce qui correspond aux rectangles Fn obtenus précédemment.

En effet on peut approcher la notion de **limite de la série géométrique** (Sn) en juxtaposant habilement les différents rectangles et en étudiant l'aire de l'assemblage.

L'aire du grand cadre rectangle est 2 et la différence $2 - (1 + 1/2 + ...+1/2^n)$ vaut $1/2^n$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, comme le montre la diminution progressive de l'aire du rectangle grisé Fn quand n devient grand.



4- **Approcher $\sqrt{2}$ par des fractions** par la méthode du point de rencontre : si **L** et **l** sont respectivement la longueur et la largeur d'un rectangle de coefficient de forme **k** on cherche, à l'aide d'une disposition particulière de rectangles de dimensions **L** et **1** (comme ci-dessous), deux entiers **p** et **q** tels que **qL** = **pl**
On obtient ainsi des approximations rationnelles de **k** (par exemple ici, 10/7 pour $\sqrt{2}$).
Bien entendu cette méthode ne peut prouver que k est éventuellement irrationnel, mais elle permet de parler avec les étudiants sur les notions de commensurabilité.



PAVAGE ET PGCD.

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier

Extrait des Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article présente une situation d'homologie pour les étudiants (PE1) se préparant au professorat des écoles. La résolution et l'analyse d'un problème[1] *permet de dégager les notions de PGCD, de partie aliquote commune, d'irrationalité, puis de pointer quelques concepts de didactique : aspects outil-objet d'une notion, variable didactique, seuil épistémologique, changements de cadres.*

OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

Il s'agit de proposer aux étudiants une situation durant laquelle ils vont "faire des mathématiques" **:** résoudre un problème, d'apparence géométrique, en utilisant un outil mathématique numérique, le PGCD, et prétexte à une réflexion plus poussée sur la "nature" des nombres-mesures (rationalité et irrationalité, incommensurabilité de deux réels).

Objectifs didactiques

Certaines notions de didactique peuvent être pointées dans cette activité (caractère outil et objet d'une notion, variable didactique, preuve, contextualisation...), mais elle reste à visée essentiellement mathématique.

ACTIVITE

Problème général présenté aux étudiants

"Il s'agit de paver un rectangle de dimensions données avec des carrés tous exactement superposables, les plus grands possible. Nous appelons "paver" le fait de placer les carrés bord à bord, sans chevauchement, sans trous, sans débordement. On pourrait encore dire qu'il s'agit de réaliser un "carrelage" du rectangle."

---

[1] Origine : problème tiré de *Problème ouvert et Situation Problème* (IREM de Lyon N° 64, 1988).

Phase 1 : rectangles de **dimensions entières**.

Objectif
Faire émerger la notion de PGCD en tant qu'outil de résolution du problème.

Consigne 1
"Vous devez carreler un rectangle de dimensions 42 cm sur 96 cm."

Les diverses propositions sont recensées. Si l'échec est total, la nouvelle consigne est de carreler un rectangle de 8 cm sur 12 cm, afin de permettre un dessin effectif du rectangle et de ses carrelages.

Remarques

Les étudiants proposent généralement, dans un premier temps des carrés de 2 cm sur 2 cm, et progressivement essaient d'autres valeurs.

Certains étudiants ne sont pas convaincus que des carrés de 6 cm sur 6 cm sont les plus grands possible répondant à la question, ils essaient des valeurs décimales non entières supérieures à 6.

Consigne 2 : reprise de la consigne 1 avec divers rectangles :

462 cm sur 165 cm	pour qu'il soit impossible de faire le dessin.
4620 cm sur 1650 cm	pour mettre en évidence la propriété : PGCD (ka, kb) =k PGCD (a, b)
105 cm sur 176 cm	pour dégager la notion de nombres premiers entre eux.
67320 cm sur 245700 cm	pour faire évoluer les procédures de recherche et se libérer des unités.

Synthèse

1 - Quelles procédures ont été utilisées pour résoudre le problème ?
- L'utilisation des dessins, mais qui s'est vite révélée coûteuse.
- Le tâtonnement et la recherche de diviseurs successifs.
- La décomposition des nombres en facteurs premiers, soit par décompositions multiplicatives successives, soit avec l'algorithme traditionnel.

2 - Quelle propriété vérifie le côté du carré répondant à la question ?
- C'est un diviseur des deux nombres, pour que l'on puisse "paver"
- C'est le plus grand diviseur des deux nombres, pour que ce soit le carré le plus grand possible.

La notion mathématique ainsi dégagée est celle de **plus grand diviseur commun** à deux nombres.

3 - Quelles propriétés ou définitions ont été rencontrées ?
- $PGCD(ka, kb) = k\, PGCD(a, b)$
- Si $PGCD(a, b) = 1$, a et b sont dits **premiers entre eux.**

Institutionnalisation sur les points suivants

- Définition du **PGCD** de deux nombres entiers.
- Définition de la notion de nombres entiers **premiers entre eux.**
- Recensement des **méthodes de recherche du PGCD** de 2 nombres entiers :

  - **1ère méthode,** utilisant la structure factorielle de **Z** : décomposition en facteurs premiers des deux nombres.

  - **2ème méthode**, utilisant la structure euclidienne de **Z** : algorithme d'Euclide (cf. annexe 1).
    - ➢ Présentation géométrique de la méthode des soustractions successives (utilisant la propriété **si d/a et d/b alors d/a - b**) : antéphérèse.
    - ➢ Algorithme d'Euclide sous sa forme usuelle. Traitement informatique de cet algorithme.
    - ➢ Lien avec les fractions continues.

Phase 2 : rectangles de dimensions **non entières.**

On étend maintenant le problème de l'existence d'un carré le plus grand possible permettant de paver un rectangle de **dimensions quelconques**.

Objectifs
- Faire émerger la notion de "partie aliquote commune" à deux rationnels.
- Poser le problème de l'irrationalité de certains nombres.

Consignes successives

- *Paver un rectangle de 72,45 sur 61,2.*
- *Paver un rectangle de* $\frac{21}{15}$ *sur* $\frac{49}{14}$.
- *Paver un rectangle de* $\frac{25}{3}$ *sur* $\frac{40}{11}$.

Recensement des résultats et des procédures utilisées.

72,45 et 61,2 sont remplacés par $\frac{7245}{100}$ et $\frac{1620}{100}$: des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties.

$\frac{21}{15}$ et $\frac{49}{14}$ remplacés par $\frac{7}{5}$ et $\frac{7}{2}$; or $\frac{1}{5}=\frac{1}{10}\times 2$ et $\frac{1}{2}=\frac{1}{10}\times 5$
donc $\frac{7}{10}$ convient.

$\frac{25}{3}$ et $\frac{40}{11}$ sont remplacés par $\frac{275}{33}$ et $\frac{120}{33}$; des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties (soit décomposition en facteurs premiers, soit algorithme d'Euclide).

Synthèse

1 - Les **décimaux** sont "naturellement" transformés en **fractions décimales** pour travailler à nouveau sur les entiers ; $\mathbf{D^+}$ se trouve naturellement plongé dans $\mathbf{Q^+}$.

2 - L'extension à $\mathbf{Q^+ - D^+}$ se fait "en douceur", le dénominateur commun retrouve son sens et la "commune mesure" sa définition.

3 - Le côté du carré solution est un nombre ayant des propriétés comparables à celles du PGCD lorsque les dimensions étaient entières, c'est la **commune mesure** aux deux dimensions du rectangle ou encore la **partie aliquote commune** aux deux nombres qui les mesurent.

Nouvelle consigne

"Est-il toujours possible de paver un rectangle avec des carrés ?"

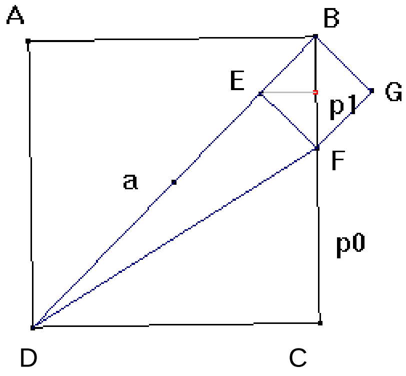
Généralement la réponse des étudiants est « oui ».
On entre là dans la nécessaire distinction entre l’approche pragmatique appuyée sur des dessins et sur le réel (géométrie de l’ingénieur) et la réflexion mathématique théorique.
Ceci va permettre de pointer l’existence de ces deux « points de vue » sur la situation ; de parler de la notion théorique d'**incommensurabilité** de certaines grandeurs ; de montrer qu'il n'est par exemple pas possible, en géométrie théorique, de paver un rectangle de dimension 1 et $\sqrt{2}$ avec des carrés.

Ici il est possible de donner un aperçu historique et philosophique de ce problème.

Dans le livre X, Euclide utilise pour démontrer l'incommensurabilité de deux grandeurs une méthode analogue à celle de la recherche du pgcd par soustractions successives.
« *Etant donné deux grandeurs inégales et la plus petite retranchée de la plus grande, si le reste ne mesure jamais le reste précédent, les deux grandeurs sont incommensurables*. »

On s'arrête dès que l'on trouve deux restes successifs p_n et p_{n+1} qui se trouvent dans le même rapport que les grandeurs initiales a et b.
$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$: les deux grandeurs a et b sont alors incommensurables.

On peut également proposer une démonstration géométrique de l'**incommensurabilité de 1 et de** $\sqrt{2}$ s'appuyant sur cette propriété.
On utilise alors la figure suivante.



$a = \sqrt{2}\, b$

a = BD b = BC = DE
La perpendiculaire en E à (DB) coupe (BC) en F.
$p_0 = a - b = BD - BC = BD - DE = BE$
$p_1 = b - p_0 = BC - BE = BC - FC = BF$

On montre aisément que $\frac{p_1}{p_0} = \frac{a}{b}$ ce qui montre l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$.

On peut prolonger cette méthode par le **développement en fraction continue de** $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Remarque

Le problème de l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$ revient à celui de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, mais il est à rappeler que deux nombres irrationnels peuvent mesurer des grandeurs commensurables par exemple $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ puisque leur rapport est 3.

Exemples d'autres rectangles "classiques" que l'on ne peut théoriquement pas paver avec des carrés :
- les "rectangles d'or" : rectangles de coefficient de forme $(1+\sqrt{5})/2$
- les rectangles correspondant aux formats standard des feuilles de papier (A_4, A_3, A_2...) : rectangles de coefficent de forme $\sqrt{2}$.

Il est intéressant de **noter la différence entre le problème théorique et la manipulation pratique**, car il est évidemment possible matériellement de paver la feuille A_4 avec des carrés puisqu'il s'agit alors de travailler sur des valeurs approchées décimales qui sont donc toujours "commensurables".

Institutionnalisation

Pour traiter le problème du pavage par des carrés d'un rectangle de **dimensions décimales ou rationnelles**, la méthode est **identique à celle utilisée pour les entiers**.

La notion dégagée est alors celle de **"partie aliquote"** à deux rationnels (ou deux décimaux).

Le problème n'a pas de solution théorique si les deux dimensions sont **incommensurables**, c'est à dire si les deux nombres qui les mesurent ont un rapport irrationnel.

ANALYSE DE L'ACTIVITE

1 - Analyse mathématique

- Notion de **PGCD**, avec approche de diverses méthodes pour le trouver.
  Vision "géométrique" du PGCD.

- Réinvestissement de connaissances numériques : critères de **divisibilité**...

- Différenciation de **N**, **D**, **Q**, **R** "en acte".

- Mise en avant de la distance entre problème spatial (où le rapport des longueurs mesurées, diagonale sur côté du carré, peut être rationnel) et modèle théorique (où ce rapport ne l'est pas). Place de l'approximation.

2 - Analyse didactique

Diverses notions didactiques peuvent être pointées dans cette séquence.

- L'aspect **outil** d'une notion (dans la construction des connaissances par dialectique outil-objet).

  Le **PGCD** de deux nombres est introduit ici en tant qu'outil de résolution du problème et non présenté en tant qu'objet de savoir par une définition. Ceci permet de donner du sens à la notion de PGCD.
  Ainsi cette situation peut se poser comme situation a-didactique du PGDC.

  A l'issue de la phase d'institutionnalisation, le PGCD a acquis un statut d'**objet** mathématique ayant sa place dans "l'édifice" des connaissances mathématiques.

- **Cadres**
Le problème est posé dans un cadre géométrique, mais une résolution efficace amène à basculer dans un cadre numérique : on a là un exemple de jeu de cadres, ce basculement est en effet anticipé par le professeur, puisqu'il vise, lui, l'acquisition d'une notion numérique.

- **Variable didactique**
  - dans la phase 1, le choix des dimensions des différents rectangles pour faire évoluer les procédures de calcul du côté du carré est un exemple de variable didactique. On note un saut informationnel quand les dimensions choisies notamment empêchent le recours effectif au dessin.

- dans la phase 2, les dimensions du rectangle imposent des méthodes de démonstration de niveaux fort différents ; à ce titre ce sont des variables didactiques.

- La notion de **preuve** : cette situation permet de montrer les limites de la preuve pragmatique et la nécessité de preuves intellectuelles.

- La **contextualisation** d'une notion : cette contextualisation, ici la décision d’aborder la notion de PGCD en utilisant un point de départ géométrique, est à la charge du maître, c'est sa pertinence qui assurera la prise de sens de la notion par les élèves.

La division en formation initiale

Hervé Péault - Denis Butlen

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Angers 1995.

Il s'agit d'un plan de cours, principalement sur la division euclidienne dans N, destiné à des étudiants de première année de formation professionnelle à l'enseignement des mathématiques pour des élèves de 8 à 11 ans.
Il a toujours une pleine actualité.

Ce plan de cours reprend et développe la progression proposée par Hervé Péault dans les actes du colloque COPIRELEM de Rouen [8]. Il essaie également de traiter ce thème dans la perspective de la préparation au concours de première année. Il reste que nombre des activités proposées peuvent s'adapter à d'autres contextes, tant de formation initiale que de formation continue.

Nous proposons une suite d'activités qui forment un tout mais il est rare que les durées de formation imparties puissent permettre de tout traiter intégralement. Des adaptations seront donc toujours nécessaires.

Certaines activités, notamment les deux premières, peuvent d'ailleurs être proposées dans d'autres contextes que celui de l'étude de la division.

Objectifs généraux

- Rappel de certains concepts mathématiques autour de la division, euclidienne ou non,

- Analyse des problèmes de division et des procédures de résolution,

- Étude de notions élémentaires de didactique,

- Apport d'éléments d'information permettant la construction et l'analyse de séquences à l'école élémentaire.

Première situation
"Concertum"[1]

Objectifs

- Faire apparaître l'utilisation de la division comme procédure experte pour la résolution d'un problème.

- Donner du sens, à partir de l'analyse d'une activité, à des notions de didactique telles que dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, de l'institutionnalisation.

Remarque

Cette situation peut aussi être utilisée facilement en dehors de l'étude de la division. L'intérêt qu'elle suscite généralement, l'engagement des participants, le travail d'équipe qu'elle nécessite, les débats qu'elle fait surgir, les rétroactions qu'elle provoque, ... en font une situation riche et intéressante comme point de départ à une réflexion plus générale sur les problèmes d'apprentissage.

Matériel

Pour chacun des participants : 10 cartons numérotés de 0 à 9 (et au-delà si on veut utiliser certains prolongements du jeu), de la taille de cartes à jouer (type bristol). Chacun tiendra ses cartons en main comme pour un jeu de cartes.

Au cours du jeu, chaque joueur sera amené à choisir un nombre de 0 à 9 et manifestera son choix en sélectionnant puis en montrant l'une de ses cartes. On peut adopter aussi un autre dispositif sans ce matériel : lorsqu'un joueur choisit un nombre, il l'écrit sur une feuille de papier et c'est la feuille qui sera montrée.

---

[1] Nous reprenons ici le titre ***Concertum*** donné à cette activité dans ***Jeux 2 : Jeux et activités numériques*** (Publication APMEP n°59, coordonnée par H.Péault, 1985).

Il semble qu'elle soit connue depuis longtemps et attribuée à un professeur d'informatique, Michel LUCAS, qui l'utilisait dans le cadre de formations informatiques pour étudier les algorithmes correspondant aux stratégies retenues.

Suzy GAIRIN-CALVO et Joël BRIAND y ont aussi fait référence en formation d'instituteurs sous le nom *Le compte est bon collectif* dans les Actes du Colloque COPIRELEM d'Angers de mai 1987.
Certains éléments d'analyse proposés par Joël Briand ont d'ailleurs été repris ici.

Organisation

Les étudiants sont par équipes de 3. Si le nombre de participants n'est pas un multiple de 3, on peut faire jouer un rôle par deux personnes à la fois, celles-ci effectuant les choix chacune leur tour. Il peut aussi être intéressant de confier à une ou deux personnes le rôle d'observateur des stratégies des différentes équipes.

Le choix préalable d'équipes de 3 nous a paru le plus intéressant pour la diversité des stratégies, mais on pourrait aussi commencer avec des équipes de 4, voire plus.

Présentation du jeu

Lorsque chaque joueur a bien ses cartes en main, le professeur donne la consigne suivante (éventuellement en la mimant pour faciliter la compréhension).

> *Je vais vous proposer un nombre entier, que j'appellerai "nombre-cible". Chacun choisira un carton et un seul, et l'objectif de chaque équipe sera que les 3 cartons choisis par les différents membres de l'équipe aient pour somme le nombre-cible.*
> *Faisons un premier essai. Dans quelques instants je vais vous indiquer un nombre. Êtes-vous prêts ?*

Cette dernière question peut laisser penser qu'il faut être prêt tout de suite. On peut la remplacer par *"Indiquez-moi quand vous êtes prêts"* qui laisse entendre qu'il y a "quelque chose à préparer".

L'enjeu est ici de comprendre qu'il va falloir, dans chaque équipe, se concerter préalablement au jeu et que, sinon, le jeu est un jeu de hasard qui n'a pas d'intérêt. En ce sens, la façon de poser la question, le ton, l'attitude du professeur... vont déterminer fortement le comportement des étudiants.

Il arrive que, malgré un certain scepticisme, les joueurs se déclarent tout de suite prêts. Après un, voire plusieurs essais, évidemment infructueux, ils finissent par demander l'autorisation de se concerter au préalable.

Le plus souvent, deux questions sont posées d'emblée par les participants : "Est-ce *qu'on peut se concerter ?"*, question à laquelle il est évidemment répondu par l'affirmative, et *"Est-ce que le nombre-cible peut être n'importe quel nombre ?"*, question à laquelle il n'est pas nécessaire de répondre et qu'on peut retourner. Un court débat entre les participants convainc en général assez vite que les nombres-cibles ne peuvent être choisis que parmi les naturels de 0 à 27.

Phase 1

Le professeur propose quelques essais (diversifier le choix des nombres-cibles à la fois entre petits et grands nombres, ainsi qu'entre multiples et non multiples de 3). Lorsque chaque équipe montre ses cartons, il fait vérifier par les autres le résultat obtenu.

Il y a de temps en temps des erreurs, soit que la stratégie de l'équipe soit incorrecte, soit plus souvent que l'un des joueurs l'ait mal comprise. Il est fréquent que des équipes utilisent une stratégie valable pour tous les nombres sauf 26 (cf. analyse des procédures ci-après). Il est donc conseillé de ne proposer 26 comme nombre-cible qu'après plusieurs essais.

En cas de difficulté, le professeur informe que chaque équipe peut demander un temps mort pour une nouvelle concertation.

Cette phase s'arrête lorsque toutes les équipes commencent à fournir des choix corrects.

Phase 2

Le professeur donne la consigne suivante

> *Dans chaque équipe, vous allez prendre un temps de réflexion pour rédiger un message écrit expliquant la stratégie choisie, de la façon la plus claire possible, afin que d'autres soient capables de l'utiliser. Les messages rédigés seront ensuite échangés entre les équipes, et nous jouerons à nouveau, chaque équipe devant obligatoirement utiliser la stratégie indiquée sur le message reçu.*
>
> *Sur vos messages, il n'est pas nécessaire de réécrire la règle du jeu, tout le monde la connaît maintenant. Vous devez par contre indiquer clairement le rôle de chacun des membres de l'équipe. Attention : il ne s'agit pas de mettre les autres en difficulté. Au contraire, les messages doivent simplifier au maximum la tâche des récepteurs.*

Lorsque toutes les équipes ont terminé leur rédaction, chacune donne son message à une autre équipe. Chaque équipe est alors invitée à se concerter de façon à pouvoir jouer en utilisant la stratégie décrite sur le message reçu. Si certains messages sont jugés insuffisamment compréhensibles, il est possible de demander des éclaircissements aux rédacteurs, mais uniquement par écrit.

Quand tout le monde est prêt, on joue à nouveau, chaque équipe devant obligatoirement utiliser la stratégie décrite sur le message reçu. Lorsque les cartons sont levés, chaque équipe vérifie que les utilisateurs de sa stratégie l'ont correctement utilisée. Les éventuelles contestations entament la phase suivante.

Phase 3

Chaque équipe doit essayer de deviner et formuler la stratégie utilisée par les autres. Pour cela, ce n'est plus le professeur qui propose les nombres-cibles, mais les étudiants.

Chaque stratégie fait l'objet d'un débat où sont examinés sa pertinence, sa commodité d'utilisation, ainsi que la clarté des messages associés.

Comme amorce aux phases suivantes, le professeur propose de débattre les questions

- *y a-t-il une stratégie meilleure que les autres ?*
- *quelles sont les qualités d'une bonne stratégie ?*

Phase 4

Cette phase, comme la suivante, a pour objectif de faire évoluer les stratégies en faisant associer la notion de "bonne" stratégie à celle de stratégie "généralisable". Cette association est parfois formulée naturellement par les étudiants, mais il peut aussi être nécessaire que le professeur la provoque.

Le même jeu est repris, mais avec cette fois des équipes de 4 (ou de 5, ou de 6, ou de 7, ... suivant le nombre de personnes du groupe), l'intervalle des nombres-cibles possibles variant en conséquence.

Phase 5

Cette phase se déroule toujours avec le même jeu et les mêmes groupes, mais cette fois on n'utilise que les cartons de 0 à 7 (on peut aussi utiliser des cartons de 0 à p avec p > 9).

A la fin, c'est tout le groupe d'étudiants qui forme une seule équipe et doit se concerter pour jouer, une première fois avec les cartons de 0 à 9, une seconde fois avec les cartons de 0 à 7.

A ce stade, c'est habituellement la procédure décrite en n° 1 ci-après qui est retenue. La dernière phase aura pour objectif de faire formuler cette procédure dans le cas le plus général.

Phase 6

Le professeur donne à chercher le problème suivant :

> *On dispose des cartons de 0 à p ; les joueurs sont par équipes de k joueurs ; le nombre choisi est n ; explicitez dans ce cas la stratégie que vous avez retenue dans la phase précédente.*

Ce travail s'avère parfois difficile et il peut d'ailleurs être différé à une prochaine séance pour laisser le temps d'une recherche individuelle. Il se terminera par une écriture précise sur le plan mathématique.

Prolongement
Analyse de l'activité

Invités à réagir sur cette activité, les étudiants posent parfois la question : "peut-on *la faire en classe avec les élèves, et à quel niveau ?".*

D'ailleurs, lorsqu'elle est proposée en formation continue, elle conduit souvent les maîtres de CM ou les professeurs de collège à souhaiter faire l'essai avec leur classe.

Ce souci de transposition ne fait pas partie des objectifs que nous avons retenus, mais il dénote un intérêt sur lequel il est possible de s'appuyer pour analyser l'activité :

> *Qu'est-ce qui vous paraît intéressant dans cette activité ? Du point de vue du fonctionnement intellectuel, comment caractériseriez-vous les différentes étapes ? Si on reprend depuis le départ avec pour objectif la connaissance et la compréhension de la formule élaborée à la fin, quels autres scénarios d'enseignement pourrait-on imaginer ?*

Ce questionnement (ou un autre...) peut être un point de départ pour permettre au professeur de pointer un certain nombre de notions didactiques, de façon plus ou moins développée selon le public.

1) On trouve dans cette activité **différents types de situations**, notamment :

- des **situations d'action** : c'est en particulier le cas dans la première partie où il s'agit de se créer un modèle permettant de résoudre le problème posé. Ce modèle peut être remis en cause en fonction des rétroactions provoquées par les résultats obtenus en appliquant la stratégie retenue.

- des **situations de formulation**: à la fois au début où chaque membre de l'équipe doit faire comprendre son idée aux autres membres (il y a alors souvent mélange de formulations écrites et orales, les formulations orales dominant le plus souvent) puis dans la seconde phase où la pertinence de la formulation est l'objectif explicite.

- des **situations de validation et de recherche de preuve** : dès le début, il y a nécessité d'un débat dans l'équipe, pour faire admettre le bien-fondé d'une stratégie choisie, puis dans les phases suivantes lorsqu'il s'agira d'argumenter sur la pertinence des stratégies proposées, de prouver leur validité et leur performance.

- des **situations d'institutionnalisation :** d'une part lorsque s'opère un choix quant à une stratégie meilleure que les autres, savoir faire reconnu et réutilisable (avec cette réserve, ici, qu'il a peu de chance d'être réutilisé directement en dehors de ce jeu), d'autre part lorsque le modèle de la division est identifié et reconnu pour construire une procédure experte ; cela suppose une nouvelle réorganisation des connaissances, enrichie du sens nouveau donné à la division. La division peut ici être resituée dans le cadre d'une dialectique outil-objet : ayant été étudiée antérieurement comme "objet" de savoir, elle est ici "outil" pour résoudre un problème, ce qui lui permet d'acquérir un sens nouveau et par là même d'être confortée comme "objet" de savoir.

2) Une réflexion sur les **variables didactiques** est par ailleurs intéressante. Ces variables sont ici essentiellement les nombres en jeu : quels choix ont été faits ? Peut-on imaginer que les procédures seraient différentes avec d'autres choix ? Par ailleurs le brusque changement de variable (par exemple lorsqu'on demande de jouer avec tout le groupe des étudiants) amène à abandonner les stratégies les moins performantes **(saut informationnel)**

3) On peut aussi analyser des phénomènes de **contrat didactique.** Au départ, si le professeur ne laisse pas entendre qu'il faut se concerter, les étudiants peuvent penser qu'ils doivent savoir répondre directement puis que ce n'est pas possible ou que c'est l'effet du hasard. Il leur faut rompre ce contrat implicite et comprendre que c'est à eux de trouver les clés qui leur permettront de résoudre ce problème. Ainsi s'opère la **dévolution :** les étudiants ne se sentent plus dans la situation de deviner ce qu'attend le professeur et d'essayer de répondre à ses attentes, mais veulent trouver eux-mêmes une solution. On le voit bien lors des écritures fournies : les étudiants ne se sentent pas obligés de fournir des écritures mathématiques standardisées, reconnues... ils cherchent seulement à se faire comprendre et vont en général à l'économie d'écriture, même les plus matheux (il s'agit là d'un point qui peut sensibiliser très fortement les étudiants au problème du statut de l'écrit mathématique dans la classe). La recherche de la stratégie et la recherche de l'écriture sont des **situations a-didactiques,** c'est-à-dire que l'étudiant se saisit du problème sans essayer de comprendre les intentions didactiques de celui qui l'a posé.

Dans les situations d'enseignement, la dévolution d'une situation a-didactique peut ne pas s'opérer, compromettant ainsi l'apprentissage soit que les élèves ne cherchent qu'à repérer des indices permettant de deviner la bonne réponse qu'attend le maître, soit qu'ils mettent en place des stratégies de contournement pour s'assurer de répondre "juste". Un exemple nous en a été fourni par un maître d'une classe de SES qui avait proposé le jeu du *Concertum* à ses élèves. La première phase semblait bien fonctionner et les réussites étaient fréquentes. Lorsqu'il prit connaissance des messages, il eut la surprise de voir que, dans une large majorité, ils étaient rédigés dans des termes à peu près semblables du type "il y en *a un qui calcule et qui fait des signes aux autres pour qu'ils mettent leurs nombres"* ou, plus laconiquement : "on *triche, sans se faire voir..."* L'absence même de gêne, de la part des élèves qui fournissaient ces messages, montre bien à quel point le seul enjeu perçu par eux était celui de donner une réponse "juste".

Inventaire de quelques procédures

Appelons n le nombre-cible. Certaines procédures reviennent assez fréquemment lors de la première phase de jeu (nous nous situons ici dans le cas d'équipes de 3 joueurs avec des cartons de 0 à 9). Elles nécessitent l'identification de chaque joueur et de son rôle. Les désignations le plus souvent choisies sont A, B, C,... L'intérêt d'une numérotation avec les entiers, du type A1, A2, A3,... n'apparaît pas avec des équipes de 3 ou de faible effectif. Cette numérotation devient quasi indispensable avec tout le groupe.

1) Utilisation de la division par 9

C'est la procédure qui sera le plus souvent retenue à la fin comme la plus performante. Elle consiste à diviser n par 9. On obtient n = 9q + r. Les q premiers joueurs jouent 9, le suivant r, les autres éventuels jouent 0.

Elle est rarement exprimée ainsi, en tous cas au début. On trouve plutôt des formulations du type suivant (avec parfois des discussions sur le choix des bornes)

- *entre 0 et 9, le joueur A indique n, les joueurs B et C indiquent 0.*
- *entre 9 et 18, le joueur A joue 9, le joueur B joue n - 9 et C joue 0 .*
- *entre 18 et 27, A et B jouent 9 et C joue n-18.*

Comme nous l'avons signalé, c'est la procédure qui, dans la plupart des cas, sera reconnue comme la plus facilement généralisable. Avec k joueurs et des cartons de 0 à p, il suffit de faire la division euclidienne de n par p, ce qui donne n = pq + r. Les q premiers joueurs jouent p, le joueur de rang q + 1 joue r et les autres jouent 0. Le nombre k n'intervient pas dans les calculs, mais seulement pour la détermination de l'intervalle des nombres-cibles possibles.

La principale difficulté de cette généralisation vient ici de la nécessité de numéroter les joueurs et, pour chacun d'eux, de situer son numéro par rapport à q.

A la fin de la phase 5, il arrive que cette généralisation soit retenue sans référence à la division, par découpage d'intervalles : au joueur A on attribue l'intervalle de 0 à 9, au joueur B de 10 à 18, au joueur C de 19 à 27, etc. Le rôle de chacun est alors défini selon que le nombre-cible est avant, dans, ou après l'intervalle.

Dans ce cas, pour faire expliciter la démarche de division, le professeur peut aborder la phase 6 avec un exemple numérique sur de grands nombres et en proposant une numérotation des joueurs. On supposera par exemple qu'il y a 127 joueurs numérotés de 1 à 127 avec 845 comme nombre-cible. La question posée est : *chaque joueur connaît son numéro, quel calcul doit-il faire pour choisir son carton ?*

2) Utilisation de la division par 3

On divise n par 3, ce qui donne $n = 3q + r$.

Si $r = 0$, chaque joueur joue q ; si $r = 1$, deux joueurs jouent q et un autre $q + 1$; si $r = 2$, un joueur joue q et les deux autres $q + 1$.

Il arrive assez fréquemment, lorsque cette procédure est retenue, qu'un seul joueur soit chargé des "correctifs" et doive donc jouer $q + 1$ si $r = 1$, mais $q + 2$ si $r = 2$, les autres jouant tous deux q. Il est utile pour le professeur d'identifier cette forme car elle marche toujours, sauf pour $n = 26$.

Cette procédure est elle aussi généralisable. Avec k joueurs et des cartons de 0 à p, on fait la division euclidienne de n par k, ce qui donne $n = kq + r$. Les r premiers joueurs jouent $q + 1$ et les autres q. Le nombre p n'intervient pas dans les calculs, mais seulement pour la détermination de l'intervalle des nombres possibles.

Là encore, la plus grande difficulté d'utiliser cette procédure généralisée vient de la nécessité de numéroter les joueurs.

3) Autres procédures

Diverses autres procédures peuvent apparaître, plus ou moins difficiles à généraliser. Par exemple :

a) utilisation de la parité

- si $n \leq 18$
  si n est pair, A et B jouent $n/2$, C joue 0.
  si n est impair, A et B jouent $(n - 1)/2$, C joue 1.
- si $n > 18$
  A et B jouent 9 et C complète.

b) délimitation de tranches autonomes

La procédure ci-dessus peut être considérée comme un cas particulier de cette catégorie. Elle consiste à découper l'intervalle [0 ; 27] en sous-intervalles et à définir une règle sur chacun de ces sous-intervalles, ces règles pouvant être sans rapport entre elles.

Très souvent, les intervalles choisis sont liés à la numération et on trouve fréquemment une règle pour les nombres inférieurs à 10, une autre pour les nombres de 10 à 20 et une troisième au-delà de 20.

c) Constitution d'une table

C'est encore un cas particulier du cas précédent. On envisage non seulement des intervalles, mais tous les nombres possibles et on définit le rôle de chaque joueur pour chacun d'eux. On pourrait imaginer des répartitions totalement arbitraires pour chaque nombre. En réalité les tables choisies sont souvent constituées entièrement ou partiellement à partir de l'une des deux premières procédures décrites. Mais celles-ci restent au départ implicites, l'explicitation pouvant se faire progressivement.

Remarque

Il n'est pas sans intérêt de mettre en relation, d'une part les deux premières procédures décrites, division par 9 (p dans le cas général) et division par 3 (k dans le cas général), et d'autre part l'analyse des situations de division proposée plus loin. L'exemple pourra être repris lors de cette étude.

On peut dire ainsi que

- la procédure de division par 9 correspond à une représentation en termes de **division - quotition** : chaque joueur choisit 9 (ou p) et le problème est de savoir pour un nombre-cible n donné, combien de joueurs devront intervenir :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 9 \\ ? & n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1 & p \\ ? & n \end{array}$$

- la procédure de division par 3 correspond à une représentation en termes de **division-partition** : 3 (ou k) joueurs cherchent à obtenir n à parts égales et il s'agit de savoir combien chacun doit jouer :

$$\begin{array}{r|l} 1 & ? \\ 3 & n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1 & ? \\ k & n \end{array}$$

Dans les deux cas, la difficulté vient du fait qu'on n'utilise pas des réels ni même des décimaux, mais des entiers : il faut se situer dans le cadre de la division euclidienne et interpréter le reste éventuel en termes de jeu "décalé" pour l'un des joueurs.

Deuxième situation "La course à 20"

Cette activité a été décrite et étudiée en détail par Guy Brousseau. Initialement, elle visait à introduire avec les élèves l'algorithme de la division : « *La course à n et les leçons qui la suivent tendent à remplacer toutes les soi-disant explications et justifications, qui alourdissent, sans le rendre plus efficace, l'apprentissage de la division »*[2] .

Mais cette activité a aussi l'intérêt d'être une situation riche qu'on peut analyser dans le cadre de la théorie des situations.[3]

Elle nous paraît intéressante à utiliser en formation. Outre ses liens avec la division, elle est l'occasion de revenir sur divers concepts de didactique.

Objectifs

- Faire apparaître l'utilisation de la division comme procédure experte pour définir une stratégie gagnante d'un jeu.

- Donner du sens, à partir de l'analyse de l'activité, à des notions de didactique, en particulier dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, de l'institutionnalisation, notions de situations didactiques et a-didactiques.

Le jeu

Deux adversaires Al et A2 sont en présence. A 1 commence et dit 1 ou dit 2 ; A2 dit le nombre obtenu en ajoutant soit 1 soit 2 au nombre dit par A1 ; A1 à son

---

[2] Guy Brousseau, *"Division euclidienne aux cours élémentaire et cours moyen"* dans *"La mathématique à l'école élémentaire"* (APMEP- 1972)

[3] voir *"Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire"*, cours de G. Brousseau, in "Actes de la première Université d'été des professeurs d'École normale", Olivet, 1988 (publication de l'IREM de Bordeaux). Mais aussi « *Théorie des situations Didactiques* », G.Brousseau 1970-1990 p 25- 44, La pensée Sauvage, 1998 (traduit en anglais et espagnol).

tour dit le nombre obtenu en ajoutant soit 1 soit 2 au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dit 20 a gagné.

Exemple de partie
(avec gain pour le joueur A2) :

2-**3**-5-**6**-7-**9**- 10-**1l** - 13-**15**- 16-**17**-18-**20**

Ce jeu peut aussi être appelé *"course à 20 de pas* 3" en tant que cas particulier du cas plus général de la *"course à n de pas p" :*

> Soient n et p deux naturels (n < p). Deux adversaires A1 et A2 sont en présence. A1 dit un naturel strictement inférieur à p ; A2 dit le nombre obtenu en ajoutant un nombre strictement inférieur à p au nombre dit par Al ; A1 à son tour dit le nombre obtenu en ajoutant un nombre strictement inférieur à p au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dit n a gagné.

Ce dernier jeu peut lui-même être considéré comme cas particulier du jeu suivant :

> Soient a_1, a_2 ... a_k, k entiers distincts et n un naturel. Deux adversaires sont en présence. Al dit l'un des a_i ; A2 ajoute l'un des a_i au nombre dit par A1 ; A1 ajoute à son tour l'un des a_i au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dépasse n a perdu (c'est-à-dire que celui qui dit n a gagné, mais n peut n'être pas atteint).

Tous ces jeux font partie de la catégorie des jeux de NIM. Ils se caractérisent par le fait que toute position possible du jeu est soit gagnante soit perdante avec le sens suivant :

• une **position est gagnante** si toute position suivante est une position perdante,
• une position est **perdante** s'il existe au moins une position gagnante parmi les positions suivantes.

A partir de la position gagnante définie par le but du jeu, une **analyse rétrograde** permet de déterminer de proche en proche les positions gagnantes et les positions perdantes.

Exemple, avec le cas de jeu le plus général et les valeurs suivantes :

n = **30** et k = 3 avec a_l = **2**, a_2 = **3**, a_3 = **6**

- 30 est gagnant ainsi que 29 (ces positions obligent toutes deux l'adversaire à dépasser 30)
- 28 est perdant car la position gagnante 30 peut être atteinte (+2)

- 27 est perdant car une position gagnante peut être atteinte (+2 ou +3)
- 26 est perdant (accès à une position gagnante par +3)
- 25 est gagnant car +2, +3 ou +6 conduisent à une position perdante
- 24 est perdant (+6)
- 23 est perdant (+2 ou + 6)
- 22 est perdant (+3)
- 21 est gagnant car +2, +3 ou +6 conduisent à une position perdante
- 20 est gagnant pour la même raison
- 19 est perdant ainsi que 18, 17
- 16 est gagnant
- 15 est perdant ainsi que 14, 13,
- 12 est gagnant ainsi que 11
- 10 est perdant ainsi que 9, 8
- 7 est gagnant
- 6 est perdant ainsi que 5, 4
- 3 est gagnant ainsi que 2.

Finalement, les positions gagnantes sont :

2, 3, 7, 11, 12, 16, 20, 21, 25, 29, 30.

La stratégie gagnante consiste alors à jouer en premier et à commencer soit par 2 soit par 3, ce qui permettra de toujours conserver une position gagnante.

Si on prend maintenant n = 32, les positions gagnantes sont translatées et deviennent :

4, 5, 9, 13, 14, 18, 22, 23, 27, 31, 32.

La stratégie gagnante consiste alors à laisser l'adversaire jouer en premier, ce qui permettra d'obtenir ensuite à coup sûr une position gagnante.

Lorsque n est grand, cette analyse rétrograde est longue, d'où l'intérêt de rechercher une règle permettant d'établir en fonction de n et des a_i la liste des positions gagnantes.

A notre connaissance, une telle règle n'a jamais été formulée dans le cas du jeu le plus général. Par contre, et c'est ce qui fait l'intérêt de ce jeu ici, il est possible de formuler une règle dans le cas de *"la course à n de pas p"*.

Cette règle est la suivante :

> *soit r le reste de la division euclidienne de n par p + 1, les positions gagnantes sont de la forme r + k(p + 1).*

En formation, on peut par exemple :

- soit étudier d'abord le problème dans le cas le plus général avec un exemple numérique du type ci-dessus, de façon à faire découvrir aux étudiants le principe de l'analyse rétrograde puis étudier ensuite la course à n et établir une règle en lien avec la division ;

- soit étudier directement la course à 20 avant de généraliser à la course à n. C'est ce choix que nous décrivons ci-après.

Phase 1

Découverte de l'analyse rétrograde

Les étudiants sont répartis par groupes de 2 et sont invités à jouer jusqu'à la découverte d'une stratégie gagnante présentée comme hypothétique. Lorsque des groupes trouvent une telle stratégie, le professeur leur propose de rejouer avec changement de la case d'arrivée puis du pas, afin qu'ils généralisent leur stratégie. Pour les groupes les plus avancés, un changement des variables numériques (n et p plus grands) pourra conduire à la formuler en termes de division.

Commentaires

Après quelques parties dans lesquelles les étudiants jouent au hasard, le théorème "17 *est une position gagnante"* apparaît en général assez vite, d'abord implicitement puis explicitement. Lorsqu'on le leur demande, les étudiants n'ont pas trop de difficultés à argumenter cette proposition. Le passage à l'analyse rétrograde est beaucoup plus délicat. II faut parfois inviter les étudiants à faire une partie en jouant à la course à 17 puis les faire jouer à nouveau à la course à 20 ; on peut recommencer en les faisant jouer à la course à 14... Certains ont beaucoup de mal à "remonter" entièrement la suite des nombres jusqu'à la position gagnante initiale: Une mise au point collective sur ce que sont des "positions gagnantes" et des "positions perdantes" est en général nécessaire.

Phase 2

Lien avec la division

Cette phase peut se dérouler collectivement sous forme d'échange sur les stratégies découvertes par les groupes. Il s'agira dans un premier temps d'institutionnaliser le principe de détermination des positions gagnantes et des positions perdantes. La consigne sera ensuite de chercher à trouver le plus vite possible la position gagnante initiale. L'augmentation des valeurs de n et p (par exemple course à 227 avec un pas de 23) oblige alors à optimiser les calculs des positions gagnantes, ce qui permettra d'institutionnaliser la règle de gain en lien avec la division.

Commentaires

Ce jeu a l'avantage de ne pas évoquer spontanément une situation de division. La première procédure efficace qui apparaît est celle des soustractions successives n - p - p - p... Il faut parfois quelque temps avant que les étudiants y voient le lien avec la division. C'est donc un moyen intéressant pour une réflexion sur le sens *"soustractions successives"* de la division.

Phase 3

Institutionnalisation didactique

Une réflexion sur les variables didactiques et là encore sur les différents types de situation pourra être menée par le professeur. Voir les commentaires précédents à propos de la situation *"Concertum ".*

On peut discuter le choix d'introduire la division à l'école à partir de la course à 20. Il reste que l'activité est en soi une situation-problème intéressante à proposer à des élèves. A défaut de la réaliser effectivement, on pourra proposer aux étudiants de visionner, lorsqu'il est disponible, le film **CNDP "Qui dira vingt** ?" [9]. Ce sera l'occasion de repréciser les notions précédentes dans une situation de classe.

La division
Aspects mathématiques

I - La division et les autres opérations

Objectif

Amener les étudiants à comprendre les particularités de la division par rapport aux autres opérations.

Phase 1

Le professeur distribue les exercices suivants :

a) additionner 4 et 7
b) additionner 47,5 et 6,003
c) soustraire 7 de 46
d) soustraire 28,45 de 102,068
e) multiplier 3 par 17
f) multiplier 5 par 0,56
g) multiplier 0 par 3,1
h) multiplier 3,1 par 0

i) *diviser 65 par 5*
j) *diviser 35 par 16*
k) *diviser 42 par 0*
l) *diviser 370 par 28*
m) *diviser 650 par 101*
n) *diviser 426,23 par 1,12*
o) *diviser 4, 7 par 6*
p) *diviser 65 par 1,01*
q) *diviser 1 par 7*
r) *diviser 0 par 0.*

Il demande à chacun d'écrire sa réponse sur papier.

Phase 2

Mise en commun et confrontation des réponses données. Mise en évidence rapide du caractère non ambigu des réponses sur addition, soustraction et multiplication. Par contre, sur la division, dans de nombreux cas, il y a plusieurs réponses différentes. Il s'agit alors de déterminer celles qui sont mathématiquement justes. De plus, les notations utilisées par les étudiants sont variées ; une explicitation de chacune d'elles est alors faite.

Phase 3

Le professeur conclut provisoirement cette activité en rappelant ou en précisant brièvement certaines définitions, certains termes liés à la division euclidienne dans **N** et à la division dans **R**.

II - Approfondissement mathématique

Il s'agit ici de revenir sur divers contenus mathématiques liés à la division euclidienne, à partir de la résolution d'exercices tirés en particulier des annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école [1] et de la brochure de la COPIRELEM : "La *division à l'école élémentaire" [6].*

Au moins cinq types d'exercices sont traités :

1. des exercices nécessitant de mobiliser la définition de la division euclidienne et en particulier de réfléchir sur la double inégalité vérifiée par le reste, par exemple :

- *Dans une division, le diviseur est 83, le quotient est 403. Exprimez les dividendes possibles et les restes associés.*

- *Le dividende est 8592, le quotient est 38. Trouvez un diviseur et un reste associé. Y a-t-il plusieurs solutions ? Si oui, exprimez toutes les solutions, si non, justifiez votre réponse.*

- *Soient a, b, c trois naturels vérifiant $a > b$ et $c \neq 0$. Le quotient de a par c est a' et le quotient de b par c est b'. Peut-on prévoir quels seront les quotients par c de $a + b$, $a - b$ et $a.b$?*

2. des exercices posant des questions relatives à des techniques opératoires, par exemple :

- *Soit le nombre 12345678910111213 à diviser par 117. Indiquez une méthode permettant de trouver le nombre de chiffres du quotient sans effectuer la division.*

- *Le dividende est 5468902. Dans le cas particulier où le diviseur est 125, donnez une méthode de calcul rapide permettant d'obtenir le résultat sans effectuer la division.*

3. des exercices portant sur les notions de multiples et diviseurs et sur les critères de divisibilité, par exemple :

- *Par quel chiffre faut-il remplacer x et y pour que le nombre (écrit en base dix) 632xy soit divisible à la fois par 2, par 5 et par 9 ?*

- *Vérifiez que le nombre 5757 est divisible par 101. Montrez que le nombre (écrit en base dix) xyxy est divisible par 101.*

- *A, B, C D, E, F sont des nombres entiers naturels écrits ci-dessous en base dix (a désigne donc un chiffre) :*

A = 10a4	*B = 34a*	*C = a4324*
D = a18	*E = 314aa*	*F = a353a*

Pour chacun des nombres A, B, C D, E et F, remplacez le chiffre a par différentes valeurs, si cela est possible, de telle sorte que le nombre correspondant soit un multiple de 4. Justifiez vos réponses.

- *Énoncez une condition pour que le nombre qui s'écrit "mcdu"soit multiple de 4 (m, c, d, u désignant des chiffres). Démontrez le résultat énoncé.*

4. divers exercices prétextes à la résolution d'équations ou de systèmes d'équation, par exemple :

- *le quotient de deux naturels est 6 et le reste 47. La somme des deux naturels et du reste est 591. Quels sont ces deux naturels ?*

5. des problèmes plus ouverts pouvant faire appel à la division :

- *sachant que le 7 /12/ 92 est un lundi, par quel jour de la semaine a commencé l'année 1992 ? Quel jour le peuple français a-t-il pris la Bastille ?*

Ce travail se termine par un exposé du professeur sur la division euclidienne dans **N** et **D** et sur la division dans **R** et **Q** (avec dans presque tous les cas nécessité de revenir auparavant sur les différents ensembles de nombres et sur les notions de valeur approchée d'un réel par un décimal à un ordre donné)

Cet exposé comporte notamment l'explicitation de divers termes : dividende, diviseur, quotient, reste, division euclidienne dans **N**, division exacte, multiples et diviseurs...

Procédures de calcul de divisions

Cette situation est inspirée d'un document de l'IFM de Grenoble [10].

Objectif

Analyse détaillée des procédures de calcul dans la résolution des problèmes de divisions. On se situe ici dans le cadre des naturels et de la division euclidienne.

Simulation de la situation
"Le Petit Poucet"

> *Le Petit Poucet avec ses bottes de sept lieues fait des bonds de 28 km. Il doit parcourir 1155 km. Combien de pas va-t-il faire ?*

Première simulation
Les étudiants sont invités à résoudre ce problème avec la contrainte suivante : pas *le droit d'utiliser la division.*

Deuxième simulation
Le même problème est proposé en changeant les données numériques et avec la contrainte : *pas le droit d'utiliser ni division, ni multiplication.*

Mise en commun
Elle consiste à inventorier et discuter les procédures utilisées.

Analyse de travaux d'élèves

analyse de protocoles
Le professeur distribue aux étudiants les protocoles présentés dans le document de l'IFM (et reproduits ici en annexe 1). Étude de ce document avec mise en commun et discussion sur les procédures utilisées.

analyse de procédures
On trouvera en annexe 2 un montage réalisé à partir de l'article de Robert NEYRET *"Procédures utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division. Repérage de quelques difficultés"* paru dans Rencontres Pédagogiques n° 4 : "*Comment font-ils"* (publication INRP) [7]

Ce montage, précédé de la liste des problèmes de référence, est proposé aux étudiants avec la consigne de classer les différents types de procédures repérables.

Le professeur reprend alors, sous forme d'exposé, l'article de Robert Neyret, et synthétise une typologie des différentes procédures susceptibles d'être mobilisées par les élèves.

Travaux d'inter-cours

Les étudiants sont invités à :

- lire des documents concernant la division, à partir d'une bibliographie que chaque professeur pourra constituer. Les ouvrages de la collection ERMEL pour le CE et le CM[4] et les numéros spéciaux de la revue Grand N[5] peuvent être considérés comme d'intéressants documents de référence.

- commencer à consulter des manuels et à essayer d'analyser la façon dont est abordée la division.

Situations et problèmes de division

1. Contexte des situations de division

Le professeur distribue aux étudiants les problèmes suivants :

---

[4] ERMEL, Equipe de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire, Editions Hatier

[5] Grand N, Revue de mathématiques, Sciences et Technologie pour l'école primaire, IREM de Grenoble

1. On dispose de 47 carreaux de faïence pour carreler un dessus de lavabo. On place 6 carreaux par rangée. Combien de rangées placera-t-on ?

2. On compte de 6 en 6 à reculons à partir de 47. Quel sera le dernier nombre énoncé ?

3. On dispose de casiers pouvant contenir chacun 6 cassettes. Combien en faudra-t-il au minimum pour placer 47 cassettes ?

4. Avec une baguette de bois de 47 cm de long, combien de morceaux de 6 cm peut-on couper ?

5. Avec une baguette de bois de 47 cm de long, on veut faire 6 morceaux de même longueur et avoir le minimum de chutes. Quelle sera la longueur de chaque morceau ?

6. On donne un sachet de 47 bonbons à un groupe de 6 enfants. Combien chacun en aura-t-il ?

7. On partage le plus équitablement possible 47 billes entre 6 enfants. Combien chacun en aura-t-il ?

8. On partage équitablement 47 billes entre 6 enfants en en donnant le maximum. Combien de billes ne seront pas distribuées?

9. On partage équitablement 47 francs entre 6 personnes. Combien donne-t-on à chacun ?

10. 47 grains de blé sont lancés à 6 poules. Combien chacune picore-t-elle de grains ?

11. Un employé touche une prime de 47 francs par jour de travail. Il travaille 6 heures par jour. De combien cette prime augmente-t-elle son salaire horaire ?

12. On doit répartir 47 litres de vin dans des bonbonnes de 6 litres. Combien de bonbonnes seront nécessaires ?

13. 6 personnes héritent ensemble d'un terrain de 47 hectares qu'elles décident de partager en 6 lots de même aire (au centiare près). Quelle sera l'aire de chaque lot ?

14. On multiplie un nombre par 6 ; on trouve 47. Quel est ce nombre ?

15. Sur une calculette affichant 8 chiffres, on frappe successivement :

4 7 ÷ 6 =

Qu'affiche la calculette ?

Questions posées :

> *Quels sont les énoncés relevant de la division de 47 par 6 ?*
> *Quelle est la réponse dans chaque cas ?*
> *Le "sens" de la division est-il le même chaque fois ?*

Recherche puis mise en commun pour faire apparaître des difficultés spécifiques aux problèmes de division qui nécessitent, plus que pour les autres opérations, une interprétation des résultats.

(On pourra se référer à l'article de Marc BLANCHARD "***Ça ne tombe pas juste***" paru dans le n° 52 de la revue Grand N)

2. Division et proportionnalité simple

Objectifs

Resituer les problèmes de division à l'intérieur des structures multiplicatives.

Percevoir la différence entre division - quotition et division-partition et son incidence sur les procédures employées.

Déroulement

Les problèmes suivants sont proposés aux étudiants

1. Céline a 240 timbres qui remplissent un album de 16 pages. Toutes les pages ont le même nombre de timbres. Combien y a-t-il de timbres sur chaque page ?

2. Un nageur parcourt 2400 m dans une piscine. La longueur du bassin est de 50 m. Combien de longueurs de bassin le nageur doit-il parcourir ?

3. Au cours d'un voyage, une voiture a parcouru une distance de 1540 km à la vitesse moyenne de 80 km/h. Combien de temps a duré le voyage ?

4. Un satellite fait 75 fois le tour de la terre en 5475 minutes. En combien de temps fait-il le tour de la terre ?

5. Un tube de colle coûte 11 F. Un instituteur achète pour 495 F de tubes de colle. Combien de tubes de colle a-t-il achetés ?

6. La récolte d'un champ de pommes de terre est de 145,5 tonnes. Il a produit en moyenne 20 tonnes par hectare. Quelle est l'aire de ce champ ?

7. Une école commande des livres de mathématiques. Il faut payer, en tout 2703 F pour les 53 livres commandés. Quel est le prix d'un livre de mathématiques ?

8. M. Dupont achète du tissu à 55 F le mètre. Il paie 192,50 F. Quelle longueur de tissu a-t-il acheté ?

9. En France, on consomme chaque année 9 222 000 000 kg de papier. La France a 58 000 000 d'habitants. Quelle est la consommation moyenne de papier par habitant chaque année ?

10. Un robinet met 350 secondes pour laisser échapper 3010 ml d'eau. Combien de millilitres d'eau perd-il en une seconde ?

11. Julie a une boîte de 520 perles. Elle fait des colliers de 20 perles. Combien peut-elle faire de colliers ?

12. Le marchand de fruits a acheté 75 cageots de pommes pour un poids total de 937,5 kg. Quel est le poids d'un cageot ?

13. Un diamant de 15 centimètres cube a une masse de 52,5 g. Quelle est la masse d'un centimètre cube de diamant ?

14. Dans la principauté de Monaco, il y a 18500 habitants au km2. La population de Monaco est de 27 750 habitants. Quelle est la superficie de la principauté ?

La consigne est la suivante :

> *Voici 14 problèmes de division. Indépendamment du contexte, des grandeurs, des nombres ou de la syntaxe, classez ces problèmes en fonction du "sens" de la division auquel ils se réfèrent.*

Si les étudiants ont de la difficulté à effectuer ce classement, on pourra préciser ainsi la consigne :

> *Vous pouvez en particulier essayer de rechercher une représentation schématique ou symbolique pour chaque problème et identifier ceux qui relèvent d'un même type de représentation.*

La mise en commun aura pour objectif de faire apparaître les deux sens de la division pour lesquels nous reprenons ici les représentations symboliques proposées par Gérard VERGNAUD[6]:

- **division partition** *(ou "recherche de la valeur d'une part")*

$$\begin{array}{c|c} \boxed{1} & \boxed{?} \\ \boxed{b} & \boxed{c} \end{array}$$

- **Division -quotition** (ou *"recherche du nombre de parts")*

$$\begin{array}{c|c} \boxed{1} & \boxed{a} \\ \boxed{?} & \boxed{c} \end{array}$$

Cette présentation doit permettre de resituer la division dans l'ensemble des structures multiplicatives (pour lesquelles une étude plus générale est susceptible d'avoir précédé cette séquence).

Rappelons que G. Vergnaud distingue, dans les structures multiplicatives

- la proportionnalité simple
- le produit de mesures et la proportionnalité double.

La proportionnalité simple met en relation deux grandeurs et les problèmes qui en relèvent sont des problèmes à 4 termes, même si l'un d'eux (l'unité) est fréquemment présent mais n'apparaît souvent qu'à travers la désignation générale de l'une des variables ou par des termes tels que *"chaque", "chacun", « l'un »…*

Selon la présence ou non de l'unité et selon la place du terme cherché, on est en présence de 4 grandes catégories de problèmes. Outre les deux divisions évoquées ci-dessus, ces problèmes peuvent concerner :

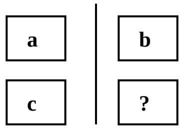
- ***la multiplication***

$$\begin{array}{c|c} \boxed{1} & \boxed{a} \\ \boxed{b} & \boxed{?} \end{array}$$

- ***la recherche de quatrième proportionnelle***

---

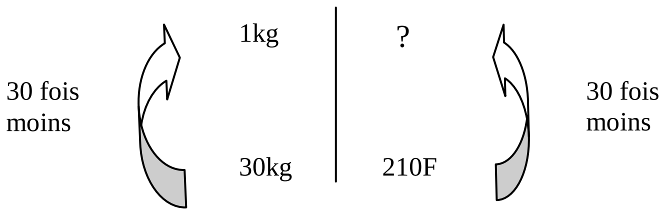
6 « Le moniteur de Mathématiques - Résolution de problèmes », sous la direction de G .Vergnaud, Fichier pédagogique, cycle 3, 1997.



Comme l'a bien montré G. Vergnaud, ces différentes catégories, et en particulier les deux divisions, pour ce qui nous intéresse ici, n'appellent pas toujours le même type de traitement.

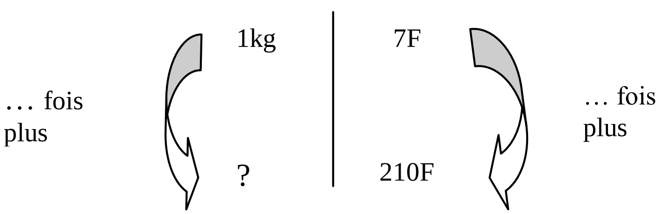
- la division-partition repose essentiellement sur la reconnaissance d'un rapport scalaire.

Si 30 kg de pommes de terre coûtent 210 F, le prix d'un kilo s'obtient en appliquant la relation scalaire « 30 *fois moins* ».



- la division -quotition peut reposer :

  *sur la reconnaissance d'un rapport scalaire qui n'est pas directement donné et qu'il faut calculer



si 1 kg coûte 7 F, combien de kg peut-on obtenir avec 210 F ? se résout alors en recherchant *"combien de fois plus"* représente 210 F par rapport à 7 F

*sur la recherche du coefficient de proportionnalité

si 1 kg coûte 7 F, on passe de la masse au prix en multipliant par 7 et du prix à la masse en divisant par 7. La différence, ici, est que ce 7 n'est plus un scalaire, un nombre sans dimension comme précédemment, c'est une nouvelle grandeur et une grandeur complexe puisqu'il s'agit d'une grandeur-quotient (7 F/kg). Une telle représentation du problème n'est pas simple pour les élèves et cela ne va pas de soi de systématiser le recours au coefficient de proportionnalité.

Les considérations qui précèdent peuvent aider à comprendre les raisons de l'utilisation de telle ou telle procédure dans les problèmes de division.

C'est ainsi (et on pourra le vérifier avec les procédures décrites dans (annexe 2) que les problèmes de division -quotition ouvrent naturellement la voie aux soustractions (ou additions) successives : si 1 kg coûte 7 F, on peut trouver combien de kg correspondent à 210 F en soustrayant autant de fois que nécessaire 7 F. On soustrait des francs à des francs et ceci prend facilement du sens.

Les problèmes de division-partition, eux, ne peuvent se résoudre à l'aide de soustractions (ou d'additions) successives. Si 30 kg coûtent 210 F, on ne peut chercher le prix d' l kg en soustrayant 30 de 210 autant de fois que nécessaire. Cela permettrait d'obtenir la réponse correcte mais au prix d'une perte de signification (soustraire 30 kg de 210 F !)... Par contre, les essais multiplicatifs prennent ici tout leur sens : dans 30 kg il y a 30 fois plus que dans un kilo, donc 210 F est égal à 30 fois le prix recherché, ce qui conduit à émettre des hypothèses sur ce prix.

La division dans les classes

Il s'agit d'une enquête qu'on peut réaliser en CE2 et/ou en CM1. Elle est reprise des travaux qui figurent dans le document de l'IFM déjà cité.

Chaque étudiant observe un groupe de 2 enfants selon les modalités décrites ci-après et qui sont travaillées préalablement lors d'une séance de préparation.

Les problèmes

- *Avec ses bottes de sept lieues, le Petit Poucet se déplace entre deux villes. Il fait des pas de 28 kilomètres.*
  Il part d'Angers pour aller à Limoges. La distance entre ces deux villes est de 252 kilomètres. Combien de pas va-t-il faire ?

- *Une autre fois, il va à Quimper. La distance est de 319 kilomètres. Combien de pas va-t-il faire ?*

- *Voici un paquet de 89 allumettes.*

Comment faire pour les partager entre 7 personnes de façon que chacune en ait autant ?

Vous pouvez vous servir des allumettes pour répondre, mais ce n'est pas obligatoire.

Conditions d'observation

1. Les enfants sont par groupes de 2 ; un observateur est attaché à chaque groupe.

2. Les interventions éventuelles de l'observateur doivent être limitées aux cas suivants
   - demander de recompter un calcul erroné
   - relire l'énoncé en cas de blocage
   - lorsque l'enfant a trouvé une solution, lui demander d'expliquer ce qu'il a fait et s'il est sûr du résultat trouvé.

3. Travail d'observation à réaliser :
   - rédiger une chronique de la séquence
   - pour chacun des deux enfants observés, rédiger une note de synthèse mettant en évidence :
     - les procédures utilisées
     - les erreurs liées aux procédures choisies
     - l'interprétation donnée au reste
     - la façon dont est présenté le résultat
     - le rôle du travail à deux

     et, pour le second problème :
     - la stabilité éventuelle des procédures
     - le rôle du matériel et la gestion du reste.

   - mise en commun sur la façon dont les enfants ont travaillé et les procédures qu'ils ont utilisées.

Travail d'inter-cours

Rédaction des chroniques d'observation. Celles-ci peuvent être synthétisées et remises aux maîtres des classes concernées.

Analyse de manuels

Lecture et commentaires des instructions officielles

Travail par groupes pour construire une progression sur la division au CM1 en s'aidant des manuels à disposition. La consigne est de repérer les différences de point de vue entre les manuels sur :

⇨ l'organisation de la progression
⇨ le choix des situations de référence

- ⇨ le degré de liberté laissé aux élèves dans le choix de procédures de résolution
- ⇨ la différenciation division-partition et division-quotition
- ⇨ les techniques de calcul proposées
- ⇨ …….

Mise en commun

Compléments sur les techniques de calcul

Les algorithmes de calcul des divisions

Il s'agit ici de présenter les différentes techniques de calcul en usage dans les classes.

Cette présentation pourra être complétée par diverses techniques historiquement utilisées. On pourra s'appuyer sur l'article de R. Neyret dans le n° 17 de Grand N.

Analyse d'erreurs d'élèves

Le travail d'analyse d'erreurs d'élèves est particulièrement intéressant et on pourra s'appuyer sur des extraits des épreuves de concours de recrutement des PE [1].

Nous proposons ici un travail sur des erreurs survenant dans les calculs de divisions (voir annexe 3).

Les étudiants doivent analyser ces erreurs, faire des hypothèses sur les causes éventuelles de ces erreurs, expliciter les moyens de contrôle qui auraient pu être mis en oeuvre par ces élèves.

Le professeur conclut en essayant de présenter une typologie des erreurs de division, s'appuyant sur une liste organisée de leurs sources éventuelles :

- existence d'un zéro au quotient (en position finale ou intermédiaire),
- mauvaise évaluation du nombre de chiffres au quotient,
- existence d'un reste (partiel ou final) supérieur au diviseur,
- mauvaise évaluation de l'ordre du quotient ou d'un quotient partiel,
- mauvaise perception due à une mauvaise disposition des calculs ou à une mauvaise lecture des chiffres du quotient,
- surcharge de travail ou surcharge en mémoire,
- mauvaise maîtrise des tables de multiplication,
- mauvaise maîtrise de la règle des zéros,
- retenue dans une soustraction ou dans une multiplication,
- …

Analyse du film
"Algorithme de la division" [2]

Il existe encore des copies de ce film[7] qu'on peut essayer de se procurer auprès du CNDP. Son contenu reste très intéressant pour un travail avec les étudiants.

Ceux-ci, lors du visionnement du film, doivent répondre aux questions suivantes[8]

1. Résumez le déroulement de la première séquence filmée.
2. Le problème posé est *"combien de rangées de 21 carreaux peut-on faire avec 2664 carreaux".*
   Exposez deux solutions trouvées par les enfants. Pouvez-vous en imaginer d'autres ?
3. Dans la leçon suivante, on part de 588 654 801 carreaux. Expliquez pourquoi.
4. En quoi la troisième séance diffère-t-elle des deux premières ?

Bibliographie

[1]*Annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école* -IREM de Paris 7 -COPIRELEM – 1992 à 2002.

[2] *Algorithme de la division - atelier* de pédagogie - film RTS du CNDP - 1974

[3] cours de G. BROUSSEAU - Actes de la première université d'été des professeurs d'École Normale - Olivet – 1988 (épuisé)

[4] D. BUTLEN , M. PEZARD - Une *formation en didactique des mathématiques pour les instituteurs -maîtres-formateurs* - Document n° 4 pour la formation - IREM de Paris VII -Université de Paris VII

[5] S. GAIRIN-CALVO *Compte rendu d'un travail réalisé en FP1 à propos de l'apprentissage de la division dans N - Actes* du XIVème colloque COPIRELEM d'Angers (1987) (épuisé)

[7] Note de la COPIRELEM en 2003, Ce n’est pas sûr qu’il existe encore des copies de ce film.

[8] Questionnaire élaboré par Suzy GAIRINCALVO et publié dans les actes du colloque COPIRELEM d'Angers (1987)

[6] La *division à l'école élémentaire* - "Elem Math III" - COPIRELEM- APMEP - 1983

[7] R. NEYRET. - Procédures *utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division, repérage de quelques difficultés* in *"Comment font-ils"* - Rencontres pédagogiques n° 4'- INRP -1984

[8] H. PÉAULT *La division en formation initiale -Actes* du colloque COPIRELEM de Rouen – 1988 (épuisé)

[9] Qui *dira vingt ? - atelier* de pédagogie film RTS du CNDP - 1973

[10] *Situations problèmes de division et procédures* in *"Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré)" -première* partie - publication de l’IFM. de Grenoble - n° 19 - avril 1987(épuisé)

Annexe l

Extrait de ***"Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques",*** publication de 1'IFM de Grenoble, n° 19, avril 1987.

Cet extrait est tiré d'une annexe au chapitre *"Situations-problèmes de division et procédures".* Il présente des protocoles de passation du problème du "Petit Poucet" *(Le Petit Poucet fait des bonds de 28 km avec ses bottes de sept lieues. Combien de pas fera-t-il pour se rendre d'une ville à une autre ?),* le 12 octobre 1982.

Situation

Choisissez deux villes. Le Petit Poucet se déplace entre ces deux villes avec ses bottes de sept lieues. Trouvez le nombre de pas qu'il va faire pour se rendre d'une ville à l'autre.

<u>Jérôme - Jean-François</u>

Villes choisies
Rennes - Paris; 351 km

Déroulement
Jean-François écrit

28 x 2 = 56
56 x 2 = 112
112 x 2 = 224
224 + 112 = 336
336 + 28 = 364
puis 351 - 336 = 15

Il se trompe dans le décompte des pas, trouve 23, calcule 28 x 23 = 644 et conclut :

23 fois 28, reste 15 km.

Jérôme additionne 28 :

28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 364
364 - 28 = 336
336 + 28 = 364
364 - 28 = 336
351 - 336 = 15
Il calcule 12 x 28 = 336 puis conclut :

il lui reste à faire 15 km.

<u>Sylvie - Victor</u>

Villes choisies

Lille - Grenoble; 769 km.

Déroulement
Victor pose la division

$$\begin{array}{r|l} 769 & 28 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Il évalue la grandeur du quotient $10 < q < 100$ puis effectue

28 x 9= 252
28 x 15 = 420
28 x 20 = 560
28 x 30 = 840
28 x 28 = 784
28 x 27 = 756
28 x 29 = 812

puis conclut :

$$\begin{array}{r|l} 769 & 28 \\ \cline{2-2} -\ 756 & 27 \\ \cline{1-1} 013 & \end{array}$$

<u>Marie-Pierre et Marie-Françoise</u>

Villes choisies
Grenoble - Marseille; 277 km

Déroulement
Marie-Pierre dit qu'il faut faire une division et pose

$$\begin{array}{r|l} 277 & 28 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Elle écrit :

28 x 8 = 224
224 + 28 = 252
252 + 28 = 280

puis

$$\begin{array}{r|l} 227 & 28 \\ \cline{2-2} -\ 252 & 9 \\ \cline{1-1} 025 & \end{array}$$

Marie-Françoise déclare ne pas savoir faire les divisions et cherche autre chose.
Elle écrit

```
 277
 -56
 221
 -56
 265
 -56
 219
 -56
 163
 -84
 179
 -84
  95
 -84
  11
```

Elle compare avec le résultat de Marie-Pierre et constate une erreur :

```
 163
 -84
  79
```

Elle réécrit

```
 277
 -84
 193
 -84
 109
 -84
  25
```

Marie-Françoise conclut :
Il a fait 0 pas et il lui reste 25 km.

<u>Sébastien - Lucile</u>

Villes choisies
Grenoble - Lyon; 105 km

Déroulement
Lucile pose

```
105 | 28
    |------
    |
```

puis fait les calculs suivants

105 + 28 = 133
105 x 28 = 2940

Ensuite elle écrit

28	28	28
x 5	x 3	x 4
140	84	102

ce qui lui permet d'écrire

105	28
3	4

Après, elle écrit encore

28 x 2 = 56
28 x 6 = 168

Sébastien pendant ce temps, après avoir fait le calcul 105 x 28 = 2940, écrit :

28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 196
que Lucile vérifie en faisant 28 x 7 = 196
Lucile réalise le calcul 105 x 7 = 735 Sébastien amorce une soustraction
105 – 28 = 77

puis écrit

28 + 28 + 28 + 28 + 28

Lucile lui dit *"tu n'as qu'à faire 28 x 5"* que Sébastien calcule : 28 x 5 = 140

Sébastien écrit 140 - 28 = 112
puis 112 - 28 = 184 (erreur de calcul)

puis

28 x 4 = 112
28 x 7 = de nouveau 28 x 4 = 112
28 x 6 = 168
168 – 28 = 140
140 - 28 = 118 (erreur de calcul)
118 – 28 = 90

Discussion sur le nombre de pas. Sébastien et Lucile récupèrent un calcul fait antérieurement: *28 x 3 = 84*

Sébastien calcule

112 x 3= 336
136 - 28 = 108
28 x 3 = 84

Lucile, après avoir reposé

105	28
3	21

effectue les calculs

112 – 84 = 28
112 + 84 = 196

pendant que Sébastien calcule

84 x 28 = 1272 (erreur de calcul)
Perte de signification du problème pour l'un comme pour l'autre.

Annexe 2

Extrait de *Procédures utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division. Repérage de quelques difficultés* (Robert NEYRET) in Rencontres pédagogiques n° 4 (1984) Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques » (publication I.N.R.P.)

Nous nous sommes proposés d'étudier la manière dont les enfants élaborent des procédures de résolution dans des problèmes de type scolaire, particulièrement de division.

Les problèmes posés ont été les suivants :

Problème 1 a
Avec ses bottes de sept lieues, le petit Poucet se déplace entre deux villes. Il fait des pas de 28 km. Il part de Grenoble pour aller à Nice; Grenoble-Nice : 224 km. Combien de pas va-t-il faire ?

Problème 1 b
Il part ensuite de Grenoble pour aller à Marseille (ou autres variantes au CM2) Grenoble - Marseille: 277 km.

Problème 2
On distribue aux enfants une pochette contenant un certain nombre d'allumettes entre 200 et 300 (ce nombre étant inscrit sur un papier à l'intérieur de la pochette). On demande aux enfants de partager ces allumettes entre 7 personnes de façon que chacune d'elles en ait autant.

Problème 3
On range 273 oeufs dans des boîtes de 12. Combien de boîtes peut on remplir ?

Problème 4
On partage équitablement 273 billes entre 14 enfants. Combien de billes donnera-t-on à chaque enfant ?

Problème 5
On achète 13 albums de Lucky Luke. On paye 273 F. Combien coûte un album ?

Ces problèmes sont posés à des élèves de CM1 et CM2 en début d'année scolaire avant tout travail spécifique sur la division.

Pour les deux premiers problèmes, les enfants travaillent par deux et peuvent travailler ensemble. Un observateur note tout ce qui se dit et se passe au niveau de deux enfants. Les seules interventions « autorisées » de l'observateur sont les suivantes :

- en cas d'erreur de calcul: « Regarde: *ici tu as fait une erreur de calcul* ».
- en cas de blocage de plus de 3 ou 4 minutes : « Relisez *l'énoncé* » .

Vous trouverez ci-après des travaux d'élèves extraits du document.

①

273 œufs / boîtes de 12 :
l'enfant fait les essais suivants :

$12 \times 100 = 1200$
$12 \times 30 = 360$
$12 \times 10 = 120$
$12 \times 20 = 240$
$12 \times 15 = 180$
$12 \times 18 = 216$
$12 \times 25 = 300$ et conclut
$12 \times 22 = 264$ « il y aura 23 boîtes
$12 \times 23 = 276$ et il restera 3 œufs »

②

Le petit Poucet / distance 105 :

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \times \ \ 5 \\ \hline 240 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \times \ \ 3 \\ \hline 84 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \times \ \ 4 \\ \hline 102 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline & 4 \end{array}$$

Le petit Poucet va faire 4 pas

③

Le petit Poucet / distance 665 :

$$\begin{array}{r} 280 \\ +\ 280 \\ \hline 560 \end{array} \quad \begin{array}{r} 665 \\ -\ 280 \\ \hline 105 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline -\ 84 & 3 \\ \hline 21 & \end{array}$$

Le petit Poucet fait 23 pas et il lui reste 21 *km*.

④

Le petit Poucet / distance 224 :
Essais de :

$$\begin{array}{r} 131 \\ \times \ \ 28 \\ \hline 1048 \\ 263 \\ \hline 3668 \end{array} \quad \begin{array}{r} 31 \\ \times 28 \\ \hline 248 \\ 62 \\ \hline 868 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \times 28 \\ \hline 64 \\ 16 \\ \hline 164 \end{array}$$

puis additionne :

$$\begin{array}{r} 164 \\ +\ \ 28 \\ +\ \ 28 \\ +\ \ 28 \\ \hline 248 \end{array}$$

enfin calcule :

$$\begin{array}{r} 248 \\ -\ \ 28 \\ \hline 220 \end{array}$$

interprété par 10 pas.
L'observateur fait rectifier l'erreur de calcul
$8 \times 28 = 224$.
L'enfant conclut par :
« Le petit Poucet va faire 8 pas ».

⑤

$$\begin{array}{r|l} 670 & 28 \\ \cline{2-2} 110 & 23 \\ 26 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 28 \times 2 = 56 \\ 28 \times 3 = 84 \\ 28 \times 4 = 112 \\ 28 \times 5 = 140 \\ 28 \times 6 = \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1255 & 28 \\ \cline{2-2} -\ 112 & \\ \cline{1-1} 135 & \\ -\ 112 & \\ \cline{1-1} 23 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 958 & 28 \\ \cline{2-2} 118 & 34 \\ -\ \ 80 & \\ \cline{1-1} 34 & \\ -\ 32 & \\ \cline{1-1} 06 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 958 & 28 \\ \cline{2-2} 118 & 34 \\ 6 & \end{array}$$

⑥

273 billes / 14 enfants :
Les essais successifs sont les suivants :

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times \ 30 \\ \hline 420 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times \ 25 \\ \hline 350 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times \ 15 \\ \hline 210 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times \ 17 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times \ 20 \\ \hline 280 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times \ 18 \\ \hline 252 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times \ 19 \\ \hline 266 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times \ 20 \\ \hline 280 \end{array}$$

avec la conclusion suivante :
« Ils auront 19 billes et certains en auront une en plus. »

⑦

273 œufs / boîtes de 12 :

$$\begin{array}{lrl} & 12 & 1 \\ + & 12 & 2 \\ + & 12 & 3 \\ + & 12 & 4 \\ + & 12 & 5 \\ + & 12 & 6 \\ + & 12 & 7 \\ + & 12 & 8 \\ + & 12 & 9 \\ + & 12 & 10 \\ + & 12 & 11 \\ + & 12 & 12 \\ + & 12 & 13 \\ + & 12 & 14 \\ + & 12 & 15 \\ + & 12 & 16 \\ + & 12 & 17 \\ + & 12 & 18 \\ \hline & 216 & \end{array} \qquad \begin{array}{lrl} & 216 & \\ + & 12 & 19 \\ + & 12 & 20 \\ \cline{1-2} & 240 & \\ + & 12 & 21 \\ \cline{1-2} & 252 & \\ + & 12 & 22 \\ \cline{1-2} & 264 & \\ + & 12 & 23 \\ \cline{1-2} & 276 & \end{array}$$

on peut remplir
23 boîtes

Le petit Poucet / distance 224 : ⑧

L'enfant pose

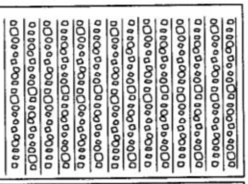
$$\begin{array}{r} 28 \\ +28 \\ +28 \\ \hline 84 \end{array} \quad \begin{array}{r} 84 \\ +84 \\ \hline 168 \end{array} \quad \begin{array}{r} 168 \\ +168 \\ \hline 336 \end{array} \quad \begin{array}{r} 336 \\ -\ .\ .\ .\ . \\ \hline 224 \end{array} \quad \begin{array}{r} 336 \\ -112 \\ \hline 224 \end{array}$$

L'enfant conclut après une étape de réflexion : « Le petit Poucet devra faire 11 pas. »

⑨

Billes entre 14 enfants :

L'enfant compte de 1 en 1 jusqu'à 273.



Lucky Luke : 273 F / 13 albums ⑩

L'enfant écrit d'abord :

$13 \times 1 = 13$		$13 \times 10 = 130$
$13 \times 2 = 26$		$13 \times 11 = 143$
$13 \times 3 = 39$	barre l'ensemble	$13 \times 12 = 156$
$13 \times 4 = 52$	des calculs	$13 \times 13 = 169$
$13 \times 5 = 65$	précédents	$13 \times 14 = 182$
$13 \times 6 = 78$	et écrit :	$13 \times 15 = 195$
		$13 \times 16 = 208$
		$13 \times 17 = 221$
		$13 \times 18 = 234$
		$13 \times 19 = 247$
L'album coûte 21 F.		$13 \times 20 = 260$
		$13 \times 21 = 273$

Petit Poucet / distance 351 : ⑪

L'enfant calcule en écrivant à côté le nombre de pas.

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 2 \\ \hline 56 \end{array}\ \text{2 pas} \quad \begin{array}{r} 56 \\ \times\ 2 \\ \hline 112 \end{array}\ \text{4 pas} \quad \begin{array}{r} 112 \\ \times\ 2 \\ \hline 224 \end{array}\ \text{8 pas}$$

$$\begin{array}{r} 224 \\ \times\ 2 \\ \hline 464 \end{array}\ \text{puis} \quad \begin{array}{r} 56 \\ +28 \\ \hline 84 \end{array} \quad \begin{array}{r} 224 \\ +112 \\ \hline 336 \end{array}$$

Il fait $2 \times 2 \times 2 = 8$ pas

Il fait $2 \times 2 = 4$ pas

Il fait 12 pas

351 - 336 = 15 *km*, qu'il lui reste à parcourir.

Petit Poucet / distance 340 : ⑫

L'enfant pose $\begin{array}{r|l} 340 & 28 \\ \hline \end{array}$

puis essaie $28 \times 7 = 196$

$28 \times 10 = 280$

et s'approche ensuite par des additions de 28 :

280 + 28 = 308   308 + 28 = 336

336 + 28 = 364, qui est barré ; et conclut : « il fera 12 pas et il restera 4 *km*. »

273 œufs / boîtes de 12 : ⑬

$$\begin{array}{r} 12 \\ +12 \\ \hline 24 \\ +12 \\ \hline 36 \\ +12 \\ \hline 48 \\ +12 \\ \hline 60 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ +\ 12 \\ \hline 72 \\ +\ 12 \\ \hline 84 \\ +\ 12 \\ \hline 96 \\ +\ 12 \\ \hline 108 \end{array} \quad \begin{array}{r} 108 \\ +\ 12 \\ \hline 120 \\ +\ 12 \\ \hline 132 \\ +\ 12 \\ \hline 144 \\ +\ 12 \\ \hline 156 \end{array} \quad \begin{array}{r} 156 \\ +\ 12 \\ \hline 168 \\ +\ 12 \\ \hline 180 \\ +\ 12 \\ \hline 192 \\ +\ 12 \\ \hline 204 \end{array} \quad \begin{array}{r} 204 \\ +\ 12 \\ \hline 216 \\ +\ 12 \\ \hline 228 \\ +\ 12 \\ \hline 240 \\ +\ 12 \\ \hline 252 \end{array} \quad \begin{array}{r} 252 \\ +\ 12 \\ \hline 264 \\ +\ 12 \\ \hline 276 \end{array}$$

23 boîtes

Petit Poucet / distance 351 : ⑭

$$\begin{array}{rr} 28 & 1 \\ +\ 28 & 2 \\ +\ 28 & 3 \\ +\ 28 & 4 \\ +\ 28 & 5 \\ +\ 28 & 6 \\ +\ 28 & 7 \\ +\ 28 & 8 \\ +\ 28 & 9 \\ +\ 28 & 10 \\ +\ 28 & 11 \\ +\ 28 & 12 \\ +\ 28 & 13 \\ \hline 364 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 364 \\ -351 \\ \hline \\ 364 \\ -\ 28 \\ \hline 336 \\ \\ 351 \\ -336 \\ \hline 15 \end{array}$$

Il fait 12 pas et il reste 15 *km*.

Petit Poucet / distance 559 : ⑮

L'enfant effectue $28 \times 10 = 280$

puis $280 \times 9 = 560$

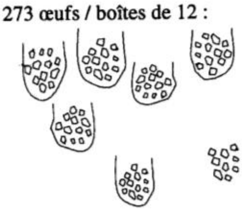
Ensuite il essaie : $28 \times 9 = 252$

Calcule $\begin{array}{r} 280 \\ +252 \\ \hline 532 \end{array}$ puis $\begin{array}{r} 559 \\ -532 \\ \hline 027 \end{array}$

et conclut : « Petit Poucet fera 19 pas et 27 km à pied. »

⑯

273 œufs / boîtes de 12 :

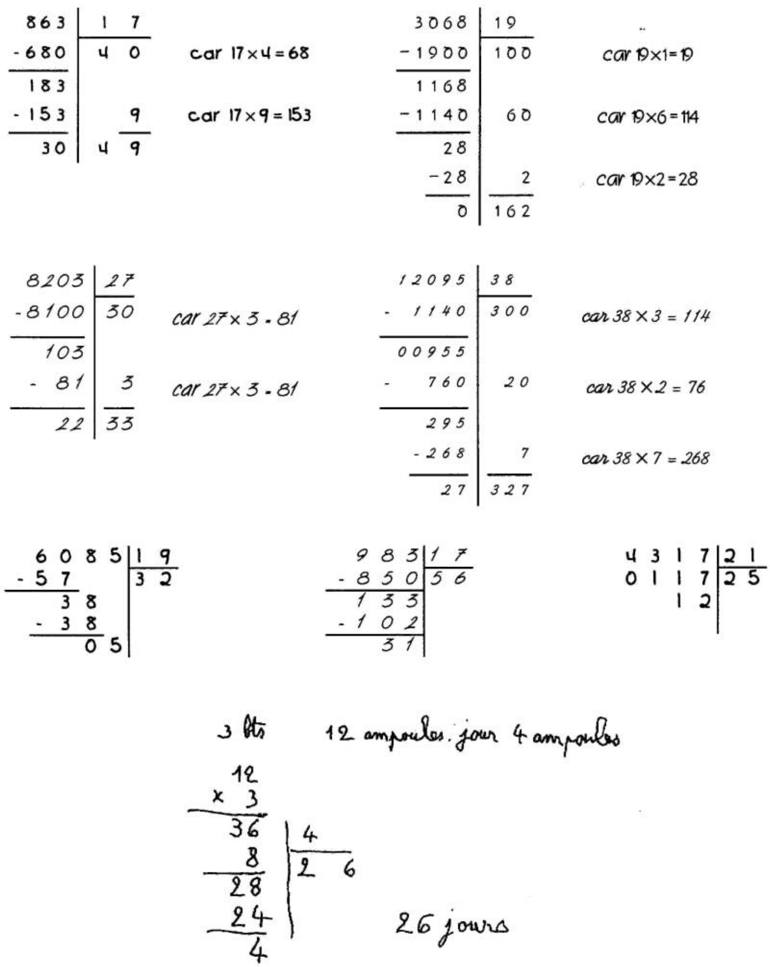


L'enfant compte jusqu'à 273 en remplissant les boîtes

Annexe 3

Voici des travaux d'élèves de CM.

1) Vérifiez les opérations ci-dessous. Pour chaque opération inexacte, expliquez les erreurs.
2) Quels sont les moyens de contrôle à la disposition des élèves pour ce type de calcul ?



Décimaux et autres nombres

Marianne Frémin

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Pau 1992.

Cet article est un compte-rendu d'activités menées avec des Élèves Professeurs des Écoles de première année (PE 1).

I-Introduction

A. Contexte

A l'IUFM de Versailles, le thème "décimaux, fractions et réels" apparaît en première année à la rubrique maîtrise des contenus uniquement, pas à celle de l'ouverture professionnelle. Les préoccupations d'ordre pédagogique sont donc repoussées en deuxième année.

B. Mes choix

Je n'ai pas cherché à présenter une construction propre de ces ensembles de nombres. J'ai voulu d'abord regarder, prendre en compte les connaissances des PE1 et leur préférence pour les "nombres à virgule", pour ensuite organiser les acquis. J'ai essayé d'intégrer les nouveaux outils de calcul (place à la calculette et à un petit peu d'analyse numérique).

II - Le test

A. Le test lui-même *(voir en annexe 1*)

Il est livré aux étudiants qui spontanément discutent entre voisins et confrontent leurs interrogations et points de vue. Nous faisons ensuite une synthèse des acquis, des questions, je complète selon les besoins.

B. Les points soulevés

1. *Définition (questions 1 et 3*)

Un décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $n/10^p$, ou sous forme d'une écriture à virgule finie.

2. *Écriture à virgule et nombre décimal (questions 1 et 2*)

Un décimal a d'autres écritures que celle à virgule : une écriture à virgule illimitée désigne rarement un décimal.

3. ***0,999999* = 1 (!..) *(question 1*)**

Mal accepté. Deux arguments sans réplique, mais peu convaincants : "s'il est différent de 1, quel est donc l'écart à 1 ?" et "0,33333... = 1/3, donc 3 x 0,333333... = 0,999999... = 3 x 1/3 = 1".

4. ***Reconnaître qu'une fraction est un décimal (question 3)***

a/b irréductible, et b = 2^p x 5^q

5. Densité (questions 1, 7, 8)

Un langage topologique intuitif de "fonctions continues et valeurs intermédiaires", de "suites majorante et minorante coinçant un nombre" semble évocateur.

6. ***Approximation (question 4*)**

Toujours de la topologie intuitive.

7. ***Précision (question 4*)**

A propos de la contradiction, pour certains, qui considèrent que "3,14 est π", que "3,140 n'est pas π ", mais que, cependant, "3,14 = 3,140", on précise que, pour les matheux, 3,14 = 3,140 = 3,1400 = 3,14000 ... (des écritures formelles du même nombre), alors que pour les physiciens, ce sont des nombres issus de mesures, avec une précision au centième, au millième, au dix millième (les écritures portent une indication sur la fiabilité des décimales).

III - Cours après le test

A. ***N Z D Q R (C)***

Quels nombres contiennent-t-ils ? (appel aux souvenirs)

Les souvenirs leur permettent de donner quelques spécimens de nombres qui sont ou qui ne sont pas dans chaque ensemble.

Inclusions : $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

B. Leurs propriétés algébriques (point de vue du matheux algébriste)

On cherche à plonger un ensemble de nombres dans un ensemble plus vaste, en gardant toutes les bonnes propriétés, et en les améliorant :

En passant de **N** à **Z**, on gagne les symétriques, et le fait que toutes les équations a + x = b ont une solution.

En passant de **Z** à **D**, on ne gagne rien (**D** n'est pas une invention d'algébriste).

En passant de **Z** à **Q**, on gagne les inverses, et le fait que toutes les équations a x = b (a $\neq$ 0) ont une solution.

En passant de **Q** à **R**, on gagne des solutions à des équations qui n'en avaient pas (par exemple $x^2 = 3$).

En passant de **R** à **C**, on gagne des solutions à des équations qui n'en avaient pas (par exemple $x^2 = -1$).

C. Leurs propriétés topologiques
Net **Z** sont discrets.
D et **Q** sont denses. mais pas complets.
R est complet: c'est le seul dans lequel deux suites (une minorante, l'autre majorante) dont l'écart tend vers zéro "attrapent" à tout coup un nombre.

D. Facilités d'emploi (point de vue mesure et utilisation)

1. ***Pour mesurer, on a besoin :***

- d'un ensemble de nombres (prolongeant **N**),
- de l'ordre, de l'addition, de la multiplication sur cet ensemble,
- de quelques qualités algébriques et topologiques : avoir des inverses, la densité, les "valeurs intermédiaires" (exemple : l'aire d'un carré croît de 4 à 9 quand le côté croît de 2 à 3, on aimerait, quand l'aire du carré vaut 6, avoir une valeur pour le côté).
- d'un ensemble de nombres facile à utiliser.

2. ***Parmi les extensions de N citées ci-dessus :***

- **R** a les meilleures propriétés, mais est difficile d'emploi.
- **D** est loin d'être parfait (l'inverse d'un décimal est rarement un décimal, $\sqrt{6}$ n'est pas un décimal...), mais il permet d'approcher d'aussi près qu'on veut l/7, $\sqrt{6}$, π ... et surtout,
- **D** est très facile à manipuler, parce que lié à la numération en base dix (ce qui facilite les calculs et l'accès à l'ordre).

IV - Développement décimal d'une fraction

J'ai choisi de me placer sur le terrain des élèves en utilisant les "nombres à virgule" et la calculette qu'ils affectionnent, pour y perfectionner leurs compétences, tout en raccrochant les ensembles de nombres cités ci- dessus.

A. Calculer $\frac{43}{13}$ avec au moins 40 décimales

La plupart des étudiants « foncent » sur leur calculette, obtiennent immédiatement 7 ou 8 décimales, ne savent pas continuer, et se mettent à calculer à la main, ce qui leur permet d'aboutir. Ce n'est que plus tard, à ma demande, qu'ils réessayent un calcul à la machine.

1. À la main

Techniques de calcul : des questions émergent sur le sens de "abaisser un zéro", établir une table des multiples de 13 est économique vu la longueur des calculs.

2. ***À la Galaxy*** [1]
La touche "béquille" de la division euclidienne permet de calquer la technique manuelle, en faisant la transposition "abaisser un zéro", c'est "multiplier le reste par 10".
J'ose parfois, suggérer d' "abaisser trois zéros à la fois", ou "multiplier le reste par 1000". On obtient alors trois décimales d'un coup, et on peut repérer sur la division à la main le bloc traité d'un coup. Emerveillement garanti, et réflexion intéressante sur la technique de la division.

3. ***Autre calculette***
La difficulté est bien perçue : la machine donne un maximum de décimales, et on ne peut pas continuer pour en avoir plus tant qu'on n'a pas accès "au reste" (au sens de "ce qu'elle a laissé tomber dans son approximation").
Pour retrouver ce reste, certains multiplient naturellement par 13, et retrouvent 43. C'est l'occasion de travailler avec eux sur les chiffres cachés de la machine et la manière de les faire apparaître (en soustrayant la partie entière et en multipliant par dix).
D'autres suspectent la (ou les) dernière(s) décimale(s), ne prennent en compte que la partie conforme à leurs calculs manuels, multiplient par 13, calculent l'écart à 43, et trouvent le reste (sous forme 0,0000007).
On a de toutes façons un travail sur la numération décimale.
Il est intéressant, pour reprendre l'idée d'approximations successives et pour différencier troncature et arrondi, de comparer les premières décimales obtenues avec ce que dit la machine en faisant **FIX l**, puis **FIX 2**, **FIX 3**, **FIX 4**,...

4. ***Conclusion***
L'écriture est périodique, parce qu'on retrouve les mêmes restes, et qu'alors le calcul se déroule de la même façon.

B. Calculer $\frac{43}{13}$
C'est l'occasion de réinvestir les méthodes de calcul à la machine.
L'écriture est périodique, la période est la même (6), les restes sont ceux qui n'apparaissaient pas dans 43/13.
Les plus rapides et courageux calculent d'autres fractions (21/17 ...) et déclarent que c'est toujours périodique parce qu'on retombe toujours sur un reste déjà vu.

C. Contemplations
(feuille jointe annexe 2 : *les fractions 1/n)*

1. ***Où l'on reconnaît les fractions décimales et les autres***
Les fractions décimales sont celles "qui tombent juste", "qui finissent par n'avoir que des zéros" (on les repère, on vérifie que ce sont bien celles dont le dénominateur est $2^p \times 5^q$).

[1] NDLR : Calculatrice de Texas instrument conçue à l'époque pour l'école élémentaire.

Les autres ont une écriture périodique : on le vérifie, on l'explique : "c'est toujours périodique parce qu'on retombe toujours sur un reste déjà vu". (Quasiment tous les étudiants font le travail consciencieusement pour toute la feuille : incrédulité ? besoin de renforcement ?)
On peut affirmer que la période de 1/n est toujours inférieure à n (les restes possibles sont 0, l,..., n-l). Une question est régulièrement soulevée et reste en suspens : peut-on prévoir la longueur de la période en fonction de n ? On peut faire des conjectures, confirmées ou infirmées par l'examen de la feuille. Ce problème est certainement résolu, je n'en connais pas la solution, mais suis avide de m'instruire... (ceci est un appel aux collègues).

2. ***Qui dit périodicité dit fraction ?***

Le problème est régulièrement soulevé par les étudiants.
Je le traitais très classiquement sur un ou deux exemples :

x = 2,456456456456456456……..

$$\begin{array}{lr} & 2456,456456456456456\ldots \quad (= 1000\,x) \\ - & \underline{2,456456456456456456} \quad (= x) \\ = 2454 & \end{array}$$

$$999\,x = 2454$$

d'où $x = \dfrac{2454}{999}$

Ceci est perçu comme un tour de passe-passe peu crédible.

3. ***"Rareté" relative des décimaux, des fractions et des réels***

Ayant bien colorié leur feuille en cherchant les périodes, les étudiants remarquent que les décimaux sont de plus en plus "rares" parmi les fractions.
Je me garde bien de parler du cardinal de **R** et de **Q** (personne ne me croirait). Par contre, j'en profite pour glisser qu'une suite illimitée de décimales tout à fait banale, sans rien de remarquable du point de vue de la période, est un réel non fractionnaire, et que donc les fractions sont rarissimes parmi les réels (ce qu'ils imaginent volontiers, vu sous cet angle, alors qu'ils ne sont capables de citer que très peu de réels non rationnels).

V - Approximations décimales et rationnelles de π

A. Chasse aux décimales (un peu d'histoire)

Voir l'article paru dans "Tangente" n° 12 (1989)

B. Activités avec calculette

Extraites de "Aventures avec votre calculateur" L. Rade et B. A. Kaufman Cedic 1979. *(Voir annexe 3*)

1. ***Les buts visés sont de deux ordres :***
- fréquenter des suites ou des séries qui convergent plus ou moins rapidement, des approximations décimales ou rationnelles.
- pratiquer le calcul numérique (organiser les calculs, connaître les touches et les priorités de sa machine, utiliser les mémoires...).

2. ***Formes du travail***
C'est l'occasion d'un travail "à la carte": chacun selon ses capacités et celles de sa machine se lance dans les activités de son choix. J'interviens localement, à la demande.

3. ***Commentaires sur les activités***
La **<u>question a</u>** permet de pointer, parmi les 7 ou 8 décimales obtenues à la calculette pour chaque fraction, celles qu'on peut retenir pour π :
3 + 10/71 = 3,1408445
3+ 1/7 = 3,1428571
π = 3,14...
Ce sont celles qui sont communes aux deux.
Travail sur encadrement et approximation.

<u>Question b</u> :
Travail sur le "sens" de la formule des (b_i) et la prise en compte des priorités de la machine.
Organisation des calculs, utilisation de la touche mémoire pour éviter des recopies (on débouche sur une suite algorithmique de touches à taper).
Avec les calculettes actuelles, même sommaire, je n'ai pas rencontré de suites qui cessaient de converger (possibilité évoquée par L. Rade).

La **<u>question c</u>** est du même genre que la b. Les calculs sont plus simples à comprendre. Une calculatrice à deux registres de mémoire serait la bienvenue pour "croiser" les suites. Les étudiants qui ont « tâté » de la question b laissent tomber celle-ci (elle peut cependant intéresser un virtuose bien équipé).

<u>Question d</u> : pas de difficulté de compréhension ou de calcul. La première série converge avec une lenteur remarquable et désespérante.

<u>Question e</u> : il est plus intéressant de rechercher des approximations rationnelles de π (ou π^2, ou $\sqrt{\pi}$) que de faire des constats. Méthode : rechercher parmi les multiples de π (ou π^2, ou $\sqrt{\pi}$) ceux qui sont "presque entiers" (NB : on prend le π de la calculette). Il faut déterminer ce qu'on choisit d'appeler "presque entier". On peut regarder toutes les décimales fournies, ou utiliser **FIX.** On trouve
$7\,\pi = 22$ (d'où l'approximation 22/7) et quelques autres (dont $14\,\pi = 44$, bien sûr).

Annexe 1 : Le test proposé aux étudiants
Dominique Valentin, Marianne Frémin, février 1992

1. Parmi ces nombres, quels sont les nombres décimaux ? Pourquoi ?

0,33	2,4758	$\frac{1}{4}$	33,14	$\frac{22}{7}$
$\frac{427}{10}$	- 4	$\frac{40}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}$	π	7,0	$\frac{117}{125}$	$\frac{117}{3}$

17,999... (infinité de 9)

2. Mettre sous forme d'écriture « à virgule », quand c'est possible.

$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{35}{100}$
$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{111}{37}$	

3. Comment reconnaître qu'une fraction désigne un décimal ?

4. Parmi les écritures suivantes, regrouper celles qui désignent un même nombre. Justifier.

$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{810}{1000}$	$\frac{44}{14}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{355}{113}$	$3+\frac{1}{7}$	0,810
π	3,14	8,10	$6 \div 10$	0,33	3,140	0,81		

regroupement	justification

5. Compléter le tableau.

$\times 100$					
	0,03	47,2725			
→	1485		13	3,271	

6. Les nombres sont rangés dans l'ordre croissant.
a) Placer 3,245 parmi

2,9	3	3,1	3,2	3,3	3,4

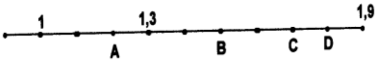
b) Placer 0,027 et 7,32 parmi

0,001	0,01	0,1	1	1,1	10	100

7. Quel nombre décimal inférieur à 6 est le plus proche de 6 ?

8. Combien de décimaux y a-t-il entre 1 et 2 ?
Et entre 1000 et 1001 ?

9.Quels nombres correspondent aux points A, B, C et D ?
Placer le point E correspondant au nombre 1,55



10. Trouver un nombre entre 12,09 et 12,1 qui soit « juste au milieu » (c'est-à-dire dont l'écart à 12,09 et à 12,1 soit le même).

11. Trouver un nombre entre 1,1 et 1,01 qui soit « juste au milieu » (c'est-à-dire dont l'écart à 1,1 et à 1,01 soit le même).

12. Compléter le tableau suivant :

écriture à virgule	avec puissance de 10	écriture « calculette »
42,53	4253×10^{-2}	4,253 E1
	37×10^{3}	
0,8152		
27,1		
	1×10^{-4}	
		3,14E-5

colonne 2 : un entier multiplié par une puissance de 10

colonne 3 : un nombre entre 1 et 10 multiplié par une puissance de 10

13. Effectuer les opérations suivantes :
29 + 17,09 + 132,8 $109 \times 5,66$ 4,13 - 2,844
$4,8 \times 3,08$ 38 - 2,43   27 + 0,005 $1,03 \times 1,03$

Annexe 2 : Les fractions $\frac{1}{n}$

1/2 = 0,50000000000000000000000000000000000000000000000…………..
1/3 = 0,3333333333333333333333333333333333333333333333…………….
1/4 = 0,2500000000000000000000000000000000000000000000…………..
1/5 = 0,20000000000000000000000000000000000000000000……………..
1/6 = 0,166666666666666666666666666666666666666666666……..
1/7 = 0,142857142857142857142857142857142857142857142857142857……..
1/8 = 0,1250000000000000000000000000000000000000000……………
1/9 = 0,1111111111111111111111111111111111111111111…………..
1/10 = 0,10000000000000000000000000000000000000000000…….
1/11 = 0,090909090909090909090909090909090909090909090909090…..
1/12 = 0,9090909090909090909090909090909090909090909090909……
1/13 = 0,76923076923076923076923076923076923076923076923076923…
1/14 = 0,71428571428571428571428571428571428571428571428571428…
1/15 = 0,066666666666666666666666666666666666666666………………
1/16 = 0,06250000000000000000000000000000000000000000000………
1/17 = 0,0588235294117647058823529411764705882352941176470…..
1/18 = 0,055555555555555555555555555555555555555555555……….
1/19 = 0,05263157894736842105263157894736842105263157894736…….
1/20 = 0,0500000000000000000000000000000000000000000000………..
1/21 = 0,047619047619047619047619047619047619047619047619……..
1/22 = 0,04545454545454545454545454545454545454545454545………
1/23 = 0,04347826086956521173913043478260869565211739130……….
1/24 = 0,04166666666666666666666666666666666666666666666………
1/25 = 0,04000000000000000000000000000000000000000000000………
1/26 = 0,03846153846153846153846153846153846153846153846………
1/27 = 0,0370370370370370370370370370370370370370370370………
1/28 = 0,0357142857142857142857142857142857142857142857………
1/29 = 0,034482758620689655172413793103448275862068965………..
1/30 = 0,033333333333333333333333333333333333333333333………….
1/31 = 0,032258064516129032258064516129032258064516129032……….
1/32 = 0,031250000000000000000000000000000000000000000000………
1/33 = 0,030303030303030303030303030303030303030303030303030……
1/34 = 0,029411764705882352941176470588235294117647058823……..
1/35 = 0,02857142857142857142857142857142857142857142857……….
1/36 = 0,0277777777777777777777777777777777777777777777……….
1/37 = 0,0270270270270270270270270270270270270270270270………
1/38 = 0,026315789473684210526315789473684210526315789473…….
1/39 = 0,025641025641025641025641025641025641025641025641…….
1/40 = 0,025000000000000000000000000000000000000000000000…….
1/41 = 0,024380243902439024390243902439024390243902439024…….
1/42 = 0,0238095238095238095238095238095238095238095238………
1/43 = 0,0232558139534883720930232558139534883720930232……..
1/44 = 0,02272727272727272727272727272727272727272727………..

1/45 = 0,022222222222222222222222222222222222222222222………
1/46 = 0,021739130434782608695652173913043478260869565…….
1/47 = 0,02127659574468085106382978723404255319148936……..
1/48 = 0,02083333333333333333333333333333333333333333……….
1/49 = 0,02040816326530612244897959183673469387755……………
1/50 = 0,02000000000000000000000000000000000000……………..
1/51 = 0,01960784313722549019607843137225490196078………………
1/52 = 0,019230769230769230769230769230769230769230769230……..
1/53 = 0,018867924528301886792452830188679245283018867924………..
1/54 = 0,0185185185185185185185185185185185185185185185185………..
1/56 = 0,01785714285714285714285714285714285714285714285714…………
1/57 = 0,017543859649122807017543859649122807017543859……………
1/58 = 0,017241379310344827586206896551724137931034482758……………
1/59 = 0,016949152542372881355932203389830508474576271………………
1/60 = 0,016666666666666666666666666666666666666666666……………
1/61 = 0,016393442622950819672131147540983606557377049180……………
1/62 = 0,0161290322580645161290322580645161290322580645161………….
1/63 = 0,015873015873015873015873015873015873015873015873015………
1/64 = 0,01562500000000000000000000000000000000000……………………
1/65 = 0,0153846153846153846153846153846153846153846……………..

1/9 = 0,11111111111111111111111111111111111111111111111111…………
2/9 = 0,2222222222222222222222222222222222222222222222222222……..
3/9 = 0,333333333333333333333333333333333333333333333333333…………
4/9 = 0,4444444444444444444444444444444444444444444444444444………

1/99 = 0,010101010101010101010101010101010101010101010101010……..
2/99 = 0,020202020202020202020202020202020202020202020202020………
3/99 = 0,03030303030303030303030303030303030303030303030303…………
4/99 = 0,0404040404040404040404040404040404040404040404040404……..
5/99 = 0,05050505050505050505050505050505050505050505050505……..
6/99 = 0,06060606060606060606060606060606060606060606060606……
7/99 = 0,0707070707070707070707070707070707070707070707070……..
8/99 = 0,080808080808080808080808080808080808080808080808080…….
9/99 = 0,090909090909090909090909090909090909090909090909090……
10/99 = 0,1010101010101010101010101010101010101010101010…………
11/99 = 0,1111111111111111111111111111111111111111111111111……..
12/99 = 0,121212121212121212121212121212121212121212121212…….
13/99 = 0,13131313131313131313131313131313131313131………………
14/99 = 0,141414141414141414141414141414141414141414141………….
15/99 = 0,151515151515151515151515151515151515151……………….
16/99 = 0,161616161616161616161616161616161616161616…………….

1/999 = 0,00100100100100100100100100100100100100…………………
2/999 = 0,0020020020020020020020020020020020020020…………….
3/999 = 0,003003003003003003003003003003003003003003003………..

4/999 = 0,004004004004004004004004004004004004004400……………..
5/999 = 0,00500500500500500500500500500500500500500500050……….
6/999 = 0,00600600600600600600600600600600600600600600600600………
7/999 = 0,00700700700700700700700700700700700700700700070070……..
8/999 = 0,008008008008008008008008008008008008008008008080…………
9/999 = 0,009009009009009009009009009009009009009009009090…………
10/999 = 0,010010010010010010010010010010010010010010100100……………
11/999 = 0,0110110110110110110110110110110110110110110110110………
12/999 = 0,012012012012012012012012012012012012012012012012012……
13/999 = 0,013013013013013013013013013013013013013013013013013013………
14/999 = 0,014014014014014014014014014014014014014014014014014140………
15/999 = 0,0150150150150150150150150150150150150150150150150150……..
16/999 = 0,016016016016016016016016016016016016016016016016160………
314/999 = 0,314314314314314314314314314314314314314314314314314311……………..

Un nombre se présente sous forme d'écriture périodique : peut-on trouver une fraction qui lui est égale ?
Si la période commence juste après la virgule, la liste ci-dessus laisse deviner une solution :
0,456456456456456456... = 456/999
2,456456456456456456... = 2 + 456/999 et on peut mettre sous forme de fraction 2454/999
Sinon, on peut se ramener au cas précédent :
12,3456565656565656565656... = 12,34 + 0,01 × 0,565656565656...
= 1234/100 + 1/100 × 56/99

Annexe 3 : Le nombre π

Extrait de « Aventure avec votre calculateur » I. Rade et B.A. Kaufman Cedic 1979

Si la longueur du diamètre d'un cercle est 1, alors la longueur de sa circonférence est π.

Si la longueur du rayon d'un cercle est 1, alors la mesure de son aire est π.

Le réel π est l'un des nombres les plus fameux en mathématique. Vous pourrez lire 1'histoire fascinante de ce nombre dans le livre de D.E.SMITH, *History of Mathematic.5.* Volume II (New-York Dover Publications. 1958).

Voici une approximation de π avec 35 décimales :

$\pi \approx 3{,}14159265358979323846264338327950288$

Cette approximation a été calculée par Ludolf Van CEULEN (1540-1610) qui était à partir de 1600, professeur de génie militaire à l'université de Leyden en Hollande. Cette approximation a été gravée sur sa tombe.

a) Approximation d'Archimède

Le mathématicien grec Archimède (287-212 av. J.C.) a montré que :

$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$

II a trouvé ces approximations en utilisant deux polygones réguliers de 96 côtés. respectivement circonscrit et inscrit dans un cercle.

Calculez des approximations décimales de $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{1}{7}$.

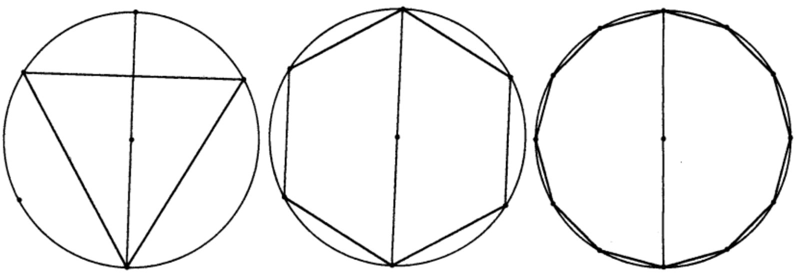
Déterminez jusqu'à quel ordre le résultat d'Archimède donne un renseignement exact sur π.

Déterminez aussi la moyenne de ces approximations décimales et dites si on a amélioré ainsi la précision sur π.

b) La méthode d'Archimède pour approximer π

Considérez un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de diamètre 1. Comme nous l'avons signalé plus haut, la longueur de ce cercle est π, et ainsi le périmètre du triangle équilatéral est une approximation de π.

Si vous considérez alors la suite constituée par les polygones réguliers de 6 côtés, de 12 côtés, etc. les périmètres de ces polygones sont des approximations de plus en plus précises de π.



Cette méthode qui consiste à trouver des approximations de plus en plus fines de π peut être décrite de la manière suivante (nous ne donnons pas ici de démonstration) : on construit trois suites (a_i), (b_i) et (x_i) avec :

1) $a_1 = 3$ et $b_1 = 1$ avec $x_1 = a_1 b_1$

2) $a_2 = 2a_1$ et $b_2 = \dfrac{b_1}{\sqrt{2+\sqrt{4+b_1^2}}}$ avec $x_2 = a_2 b_2$

3) $a_3 = 2a_2$ et $b_3 = \dfrac{b_2}{\sqrt{2+\sqrt{4+b_2^2}}}$ avec $x_3 = a_3 b_3$

plus généralement:

4) $a_{n+1} = 2a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{\sqrt{2+\sqrt{4+b_n^2}}}$ avec $x_{n+1} = a_{n+1}b_{n+1}$

La suite (x_i) donne des approximations de plus en plus fines de π.
En calculant x_1 , x_2 , x_3 ,…, x_{10} , déterminez les dix premières approximations de π.
Si votre calculateur ne vous permet pas de calculer avec plus de 8 décimales, vous allez trouver quelque chose de particulier au cours des calculs. Nous en dirons plus à ce sujet dans les commentaires.

c) Méthode de CUSANUS pour approximer π

Le philosophe, théologien et mathématicien allemand Nicolaus CUSANUS (1401-1464) a mis en évidence une méthode simple pour approximer π. Sa méthode est basée sur l'étude d'une suite de polygones réguliers de périmètre 2. Voici une description de cette méthode :

1) $a_1 = \frac{1}{4}$ et $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ On a : $\frac{1}{b_1} < \pi < \frac{1}{a_1}$

2) $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ et $b_2 = \sqrt{b_1 a_2}$ On a : $\frac{1}{b_2} < \pi < \frac{1}{a_2}$

3) $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ et $b_3 = \sqrt{b_2 a_3}$ On a : $\frac{1}{b_3} < \pi < \frac{1}{a_3}$

plus généralement :

4) $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}$ On a : $\frac{1}{b_{n+1}} < \pi < \frac{1}{a_{n+1}}$

Déterminez $\frac{1}{b_{10}}$ et $\frac{1}{a_{10}}$ et trouvez ainsi un encadrement de π.

d) ***Séries infinies et π***

Nous pouvons aussi obtenir des approximations de π en calculant la somme d'un nombre fini de termes de certaines séries dont la somme est π.

Ainsi, par exemple, on peut établir que $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right)$

Et $\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{3^2 \times 5} - \frac{1}{3^3 \times 7} + \ldots\right)$

Essayez de calculer des approximations de π en utilisant ces séries.

La formule suivante, cependant, est bien meilleure pour obtenir des approximations de π :

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \times 239^2} + \frac{1}{5 \times 239^5} - \ldots\right)$$

Elle porte le nom de formule de MACHIN.

Utilisez cette formule pour calculer des approximations de π.

e) ***Approximations rationnelle. de π***

Archimède a trouvé les approximations suivantes de π :

$\frac{22}{7}$ et $\frac{223}{71}$ (Les nombres $\frac{22}{7}$ et $\frac{223}{71}$ sont *rationnels* alors que le nombre π est *irrationnel).*

L'ingénieur chinois TSU CH'UNG-GHIH (430-501) a trouvé une remarquable approximation rationnelle $\frac{355}{113}$.

En utilisant votre calculateur essayez de trouver d'autres approximations rationnelles de π. Pour chacune d'entre elles, trouvez jusqu'à quelle décimale votre approximation est en accord avec le développement décimal de π.

f) *L'approximation de RAMANUJAN*
En 1914, le mathématicien indien RAMANUJAN a donné l'approximation curieuse de π :

$$\sqrt{\sqrt{\frac{2143}{22}}} = \left(\frac{2143}{22}\right)^{\frac{1}{4}}$$

En d'autres termes, $\frac{2143}{22}$ est une approximation rationnelle de π^4.

Vous pouvez trouver des approximations analogues de π à l'aide de votre calculateur. Pour chacune d'entre elles, trouvez jusqu'à quelle décimale votre approximation est en accord avec le développement décimal de π.

Analyse a priori de séquence de formation à propos des décimaux

Alain BRONNER

Extrait du Cahier du Formateur, Tome 1- Perpignan 1997.

Cet article présente une étude pour construire des séances de formation pour les stagiaires autour de la construction des décimaux.

1. Objet

Cette étude présente une exploration des différents champs d'investigation pour construire des séquences de formation à propos des nombres décimaux. L'article n'expose pas un exemple de “ séquence type ” en formation des professeurs-stagiaires (PE2) d'école, mais il s'agit plutôt de dégager les principales variables sur lesquelles il est possible de s'appuyer pour construire des séquences en formation. On pourrait imaginer que, pour construire une séquence idéale, il faille prendre en compte toutes ces variables ; ce n'est, ni nécessairement souhaitable pour certains publics, ni, la plupart du temps, réaliste compte tenu de diverses contraintes, notamment celles de temps et de programmes.

Les supports de l'étude

Pour ce travail, j'ai étudié plusieurs types de documents :

- Les cours ou progressions, proposés par quatre formateurs en IUFM (C. Houdement 1997, M.L. Peltier 1997, G. Lepoche 1997, A. Bronner 1997)[1] ;
- Les articles publiés dans certaines brochures de la COPIRELEM (Collectif Colloque d'Angers 1995, J. Briand, G. Vinrich colloque de Pau 1992, Muriel Fénichel colloque de Colmar 1993) ;
- Les manuels de formation : “ Se former pour enseigner les mathématiques ” (tome 3 et 4, Armand Colin) et “ Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeurs des écoles ” (tome 2, Hatier).

[1] Je tiens à remercier les formateurs qui ont bien voulu me faire parvenir leur cours pour ce travail.

Les différents champs d'exploration

J'ai essayé de dégager les différents champs travaillés en formation sur ce thème. Le premier tableau indique les champs étudiés préalablement aux constructions ou aux analyses d'activités de classe. La colonne de droite indique le nombre d'occurrences dans les huit documents consultés[2].

Champs	**Présence**
Analyse mathématique	**8**
Analyse historique et/ou épistémologique	**6**
Analyse cognitive, psychologique	**8**
Analyse des attentes de l'institution : programmes, instructions, évaluations	**4**
Analyse de manuels	**7**

Le deuxième tableau précise les dimensions didactiques travaillées.

Champs	**Présence**
Explicitation d'hypothèses d'apprentissage ou de macro choix didactiques	**8**
Analyse ou construction d'une progression	**6**
Analyse ou construction d'activités de classe	**8**

2. Analyse mathématique

2.1. Objectifs

La plupart des auteurs souhaitent faire émerger les représentations des professeurs stagiaires à propos des décimaux et des rationnels. Ils envisagent ainsi une mise à jour des connaissances. Ils profitent donc de ce champ pour des mises au points d'ordre mathématique et, parfois, pour une exploration de nombreux aspects ou cadres d'interventions de ces nombres.

2.2. Présentation de quelques dispositifs

La plupart des formateurs conçoivent plusieurs dispositifs s'appuyant sur les connaissances et les représentations des étudiants à propos des nombres décimaux, rationnels, voire réels ou, tout au moins, sur les racines carrées.

[2] Il semble peu significatif de comparer cette présence des champs d'étude dans des documents qui n'ont pas le même statut ou qui ne s'adressent pas à un même public. Je les présente néanmoins à titre indicatif.

2.2.1 Des questions essentielles

Il est possible de s'appuyer sur quelques questions comme : ***Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?***

Les réponses (correctes ou erronées) peuvent être classées en cinq catégories (Briand J. et Vinrich G. 1993) :

- Définition basée sur une écriture décimale (*nombre à virgule - avec un nombre fini ou infini de décimales -, deux nombres séparés par une virgule, …*) ;
- Définition basée sur la place des décimaux par rapport aux entiers (*nombre non entier, nombre entier plus une partie fractionnaire, …*) ;
- Définition basée sur les fractions (*nombres fractionnaires, nombres fractionnaires se finissant, fractions décimales, …*) ;
- Définition liée à la division (*résultat d'une division de deux entiers, d'un entier par une puissance de dix, …*) ;
- Définition liée aux puissances de dix ou la numération (*produit d'un entier par une puissance de dix, sommes de fractions décimales*).

Une autre question porte sur l'intérêt : ***Pourquoi les décimaux sont-ils intéressants ?***

L'intention est ici de faire ressortir, avec les professeurs-stagiaires, que les décimaux permettent de résoudre des problèmes dans lesquels les entiers ne suffisent pas. Ils permettent d'approcher des nombres ou des mesures de grandeurs avec une précision donnée. De plus ils fournissent, d'une part une continuité avec les entiers par leur codage et, d'autre part une extension des algorithmes de calcul sur les entiers à un coût assez réduit.

2.2.2 Des questionnaires ou tests complémentaires

Certains formateurs proposent à leurs professeurs-stagiaires des questionnaires explorant d'autres aspects. On pourra consulter deux exemples en annexe :

Annexe 1 : “ Prendre conscience de ses connaissances sur les nombres ” (Bronner A.)

Annexe 2 : “ A propos des nombres décimaux ” (Fénichel M., 1994).

Ces exercices peuvent être analysés globalement en utilisant une typologie de rapports personnels à l'objet “ nombre ” (Bronner A. 1997). On pourra aussi comparer avec les résultats donnés par Robert Neyret (1995) dans sa thèse.

Certaines difficultés sont souvent repérées : les inclusions et relations entre les différents ensembles ne sont pas maîtrisées ; peu de distinctions sont faites entre nombres et écritures ; les étudiants ont une difficulté à situer les décimaux parmi les autres nombres ; les rationnels et les décimaux sont souvent confondus ; les liens exacts entre rationnels et décimaux ne sont pas établis. Ces études montrent ainsi que, pour un grand nombre d'étudiants, d'une part, les nombres sont rabattus sur les décimaux et, d'autre part, les décimaux sont identifiés à une écriture à virgule.

2.2.3 Synthèse du formateur

Les formateurs insistent souvent sur les aspects suivants :

- les différents types de nombres, les divers ensembles de nombres ;
- les écritures fractionnaires des rationnels et des décimaux ;
- le lien entre les rationnels et, d'une part, la division et, d'autre part, les équations du premier degré à coefficients entiers ;
- la reconnaissance d'un rationnel décimal à l'aide de sa fraction irréductible ;
- les écritures décimales et le lien avec la numération décimale de position ;
- la reconnaissance d'un réel rationnel à partir de l'écriture décimale ;
- la structure d'ordre dense de $\mathbb{D}$;
- la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$.

3. Analyse historique

3.1. Objectifs

Il s'agit de présenter des repères importants de l'histoire des nombres décimaux, voire des rationnels ou des réels, de repérer les difficultés et d'identifier des obstacles épistémologiques à l'émergence des décimaux. Cette étape permet de mettre en évidence les remarques suivantes :

- le sens du décimal vient de la notion de fraction comme chez les mathématiciens arabes du moyen âge ou comme chez Stevin ;
- la notation décimale est une convention qui étend celle sur les entiers et permet une extension peu coûteuse des algorithmes.

3.2. Des dispositifs

En général les formateurs apportent les informations, mais il proposent parfois des lectures d'articles de travaux d'histoire des mathématiques ou de textes historiques.

3.2.1 Des repères importants

On fera d'abord remarquer que, de la notion, très ancienne, de partage de l'unité vont naître des systèmes de numération utilisant les fractions unaires en Egypte et les fractions sexagésimales avec développement chez les Babyloniens.

Une extension du concept de nombre aux rationnels et à certains irrationnels apparaît chez les arabes au IXe siècle. Pour ce qui est des premières fractions décimales, après les avoir découvertes en Inde, les historiens les repèrent à nouveau chez Al-Uqlidisi (fin du X^{ème}) et Al Kashi (1427).

On insistera ensuite sur l'apparition tardive de la numération et la notation décimale en Europe (F. Viète 1579, S. Stévin 1585), sur les liens officiels avec le système métrique (lois organiques du 7 avril 1795 et du 10 décembre 1799) et sur la difficulté d'imposition de ce système pour les calculs en France (loi du 4 juillet 1837). Le système métrique devient alors légal en 1840 (IREM de Rouen, 1979). Il faut attendre la fin du XIXe siècle pour que les décimaux soient enseignés à la population dès l'école primaire.

3.2.2 Un exemple de Travail Dirigé : " Etude de LA DISME de STEVIN de Bruges "

Lors du stage d'Angers (COPIRELEM de mars 1995), une étude guidée de la Disme[3] a été proposée par plusieurs formateurs (Briand J, Euriat J, Huet M.L., R. Lecoq, M.L. Peltier, 1996). Les auteurs ont choisi ce texte pour " *son côté très contemporain en ce qu'il répond à une préoccupation sociale, la problématique posée, les procédés d'exposition, les rapports que ce texte révèle entre les savoirs savants et les pratiques sociales* ".

4. Analyse cognitive

4.1. Objectifs

Dans ce champ, le but des formateurs est d'amener les professeurs-stagiaires :

• sur le plan de l'apprentissage des décimaux :

- à repérer les connaissances des enfants à certains niveaux de classes à propos des décimaux et des fractions ;
- à mettre en évidence les erreurs souvent observables dans certaines tâches (notamment sur les calculs, la comparaison ou l'encadrement, la résolution de certains problèmes, et la signification de l'écriture décimale) ;
- à prendre conscience de certaines représentations des élèves à propos des fractions et des décimaux ;

• sur le plan des notions de didactique des mathématiques :

[3] On pourra trouver une traduction complète de ce texte dans la brochure : Documents pour la formation des professeurs d'école, Tome 4, IREM de Paris VII, Paris.
NDLR : l'article est présent dans ce tome.

- à prolonger un travail sur les obstacles épistémologiques ou didactiques, et les processus d'apprentissage ;
- à se familiariser avec les notions d'objectifs et de variables de test.

4.2. Des supports

4.2.1 Analyse des résultats de tests et d'évaluations nationales Sixième

Je propose une synthèse de résultats d'élèves à certains tests (APMEP, INRP, Evaluation Sixième, …)[4]. Cette synthèse permet d'avoir une vue globale des compétences travaillées à l'école élémentaire et d'en tirer certaines régularités dans les réponses d'élèves aux exercices types.

Les exercices sont classés en trois catégories (écriture et reconnaissance, opérations, ordre). On peut demander aux professeurs stagiaires de réaliser les tâches suivantes :

- imaginer les intentions des auteurs (si les objectifs ne sont pas annoncés par le formateur) ;
- dégager les variables pertinentes de tests ou des exercices en lien avec les objectifs et les choix faits par les auteurs ;
- analyser les résultats ;
- construire un test à faire passer dans des classes de CM.

Cette étude statistique peut être utilement complétée par une analyse de cahiers d'élèves de “ l'évaluation Sixième ”.

4.2.2 Étude de travaux d'élèves : Rangement des décimaux et addition de fractions

L'étude de certains sujets du CRPE permet d'analyser les erreurs d'élèves. Le but de ce travail est d'étudier les conceptions des élèves à propos du rangement de liste de décimaux. On pourra s'aider des règles implicites sur l'ordre, suggérées par C. Grisvard et F. Léonard (1981 et 1983).

M. Fénichel (Colloque COPIRELEM de Colmar, 1993) propose, à partir du Tangram, des travaux d'élèves sur l'addition des fractions (annexe 3). Les professeurs stagiaires pourront en particulier classer, décrire les réponses et les procédures des élèves, et émettre des hypothèses sur les origines des réponses erronées.

4.2.3 Sensibilisation à des notions de didactique des mathématiques

Le formateur fait une synthèse des conceptions à propos des décimaux (Grisvard et Léonard, 1981 et 1983) et des fractions (Perrin M.J. 1986), et des

[4] L'ensemble de ces résultats sont disponibles dans le Cahier du Formateur N°1, Perpignan, 1997.

problématiques de calcul (Bronner 1997). Il profite de ce type de travail pour introduire les notions de *théorèmes-en-acte et d'obstacle*. On mettra en évidence que, dans les productions des élèves, la plupart des erreurs, ne peuvent être considérées comme anodines, dues à l'étourderie. Elles sont souvent liées à des obstacles :

> “ *Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes. De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une “ connaissance ” ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions. ”* (Brousseau G. 1983)

5. Analyse des attentes de l'institution

5.1. Objectifs de l'étude

Nous proposons ici d'étudier l'évolution des programmes et instructions officielles d'enseignement, d'identifier ce qu'attend actuellement l'institution à propos des décimaux, notamment de repérer les compétences exigibles en relation avec exercices types, et de dégager quelques lignes directrices d'enseignement. On pourra utiliser les documents suivants :
- les programmes et les commentaires d'accompagnement de différentes périodes (1923, 1945, 1970, 1980, 1995) ;
- des “ évaluations nationales ” à l'entrée en sixième de différentes années ;
- des référentiels de compétences, comme celui de l'IREM de Montpellier (Bellard et al, 1995).

5.2. Évolution des programmes à propos des décimaux

Je rappelle ici quelques repères importants et, pour une analyse plus approfondie on pourra consulter Ermel CM1 (1997) ou encore Neyret (1996) :
- 1887 : Fractions décimales et système métrique ;
- 1923 : Ecritures à virgules et système métrique ;
- 1945 : Recodage d'une écriture complexe d'une grandeur ;
- 1970 : La virgule traduit un changement d'unités dans le cas de grandeurs discrètes ;
- À partir de 1980 : les décimaux sont des nouveaux nombres dont l'introduction est motivée par l'insuffisance des entiers pour certains problèmes et en tenant compte de différents cadres ;

- À partir de 91 : Les cycles et les compétences exigibles par cycle. L'organisation de l'enseignement élémentaire en cycles conduit à un programme en deux éléments :
  - l'une, très succincte, centrée sur les notions mathématiques ;
  - l'autre organisée en compétences à acquérir pendant le cycle.

On peut relever que les objectifs concernant les fractions évoluent souvent (notion de fraction, fractions simples, …), et laissent la plupart du temps beaucoup d'implicites sur le statut de cet objet à l'école primaire.

5.3. Dispositifs

Il est assez difficile de faire entrer les stagiaires dans une lecture de textes officiels. Cependant des dispositifs spécifiques peuvent être envisagés :

- Analyse et mise en relation des programmes et des instructions avec des exercices de manuels ;
- Détermination des compétences en jeu dans certains exercices à propos des décimaux et des fractions, éventuellement avec l'aide d'un référentiel ;
- Construction d'une typologie des exercices à l'évaluation nationale Sixième (travail sur la signification des écritures, calculs formels - hors contextualisation -, rangement, intercalation, approximation, problèmes faisant intervenir le système métrique, les mesures de grandeurs…).

On notera la diminution des exercices formels dans ces épreuves au bénéfice d'exercices faisant intervenir les grandeurs, ainsi que l'apparition d'exercices sur l'approximation.

5.4. Quelques repères institutionnels

Les études précédentes justifient certains objectifs d'apprentissage à propos des décimaux :

1) Les nombres décimaux sont des nouveaux nombres qui permettent de mieux traiter certaines situations ou problèmes. Ils sont notamment des nombres rationnels. Il faudrait, en particulier, éviter que le nombre décimal apparaisse comme le recollement de deux nombres entiers ou comme un codage différent d'un nombre entier.
2) Ils peuvent s'écrire de plusieurs manières : fractions, fractions décimales, écriture décimale, écritures utilisant les signes opératoires. Pour cela un travail minimum sur les fractions doit être envisagé à un moment ou à un

autre. De plus, il est indispensable de (re)donner une signification aux chiffres de l'écriture décimale.

3) On peut comparer les nombres décimaux avec des règles spécifiques. L'ordre n'est pas le même que sur les entiers, tout en le prolongeant. La propriété d'ordre dense de l'ensemble des décimaux la différencie de l'ordre de l'ensemble des entiers : entre deux décimaux on peut toujours en intercaler un autre.

Comprendre, que la longueur de la partie décimale n'est pas un bon critère dans le rangement des décimaux, n'est possible que lorsqu'on a donné une signification aux chiffres situés après la virgule. Il faut souligner la performance du support visuel offert par la droite numérique, même si, par ailleurs, il peut créer des obstacles pour l'apprentissage du Numérique.

4) Les décimaux servent en particulier à mieux repérer les points d'une droite et sont un outil pour les activités de mesure.

5) On peut calculer (ajouter, retrancher, multiplier et diviser) avec les nombres décimaux en utilisant des règles spécifiques qui prolongent celles sur les entiers. De plus, l'extension du sens des opérations sur les décimaux doit encore faire l'objet d'apprentissage.

6) Les nombres décimaux servent à approcher d'autres nombres. Les divisions qui " se finissent " et celles qui " ne finissent pas " doivent être l'occasion d'une réflexion sur ces problèmes d'approximation.

6. Analyse de manuels

6.1. Objectifs

Il s'agit maintenant de poursuivre l'étude de la transposition didactique par une analyse des manuels. Plus spécifiquement, le but est d'étudier et comparer les choix des auteurs dans les activités d'introduction des nombres décimaux en CM1 ou de reprise en CM2. On essaie notamment de repérer les aspects et les significations du décimal, privilégiés par les activités de découverte ou de réinvestissement de chaque manuel en s'appuyant sur les outils mis en place dans les quatre premiers champs d'exploration.

On choisira des manuels présentant des démarches différentes et on dégagera les avantages et inconvénients de chaque démarche. La tâche peut-être plus ou moins ouverte dans la mesure où les critères de comparaison et d'analyse sont donnés, imposés ou à trouver.

6.2. Quelques critères d'analyse

L'analyse des pratiques ou des manuels conduit à prendre en compte certaines questions essentielles pour la construction de la progression et des situations de classe :

- L'étude des rationnels ou de quelques rationnels précède-t-elle celle des décimaux ?
- Si les fractions sont introduites en premier, quels sens et donc quelles situations ont été choisies pour l'écriture a/b ?
Quel est le cadre choisi : mesure de longueurs ; d'aires ; partages ; fonctions numériques ; graduations ?
- Quel est aspect privilégié :
    * l'aspect fractionnement a/b = a x (1/b) ;
    * l'aspect commensuration,
    * ou encore l'aspect quotient y tel que y x b = a ?
- Quel problème motive l'introduction des décimaux ?
- La séquence comporte-t-elle une ou plusieurs situations de référence ?
- Est-ce que les rationnels et/ou les décimaux sont perçus comme des nouveaux nombres ?
- Comment est introduite l'écriture décimale ? Si les écritures fractionnaires précèdent les écritures décimales, comment est assuré le passage des premières aux secondes ?

Il est essentiel d'introduire un débat sur l'ordre d'introduction des fractions et des décimaux, les manuels privilégiant actuellement l'antériorité des fractions sur les décimaux alors qu'il n'en a pas toujours été ainsi. Il s'agit de montrer les intérêts et inconvénients des différentes approches de façon à ne pas réduire le choix actuel de démarrage par les fractions à une injonction due à une " mode pédagogique ". Si on se réfère au savoir savant constitué, deux " constructions " de **D** peuvent être envisagées :

- **D** vue comme extension de **N**, et dans ce cas, la nouvelle structure est en rupture importante avec celle de **N** ;
- **D** comme partie de **Q**, lui-même construit comme extension de N, et dans ce cas, on récupère les propriétés de **Q** par restriction : **D** dénote par les écritures décimales finies, et les nombres de **Q** - **D** sont des idécimaux[5] et ont une écriture décimale illimitée (n'admettant ni la période 0, ni la période 9).

En analysant les options du programme actuel, on s'aperçoit que l'on n'a finalement pas les avantages de l'une des constructions du savoir savant, qu'il faut trouver une voie moyenne difficile à dégager. Si on se réfère à l'apprentissage, des situations basées sur une extension de N présentent

[5] J'ai proposé cette expression pour désigner les nombres réels non décimaux, compte tenu du rôle que joue les nombres décimaux dans le système d'enseignement actuel (Bronner 1997).

l'avantage de mieux s'ancrer sur les connaissances antérieures. Mais, si les décimaux sont des nombres, outils de codage de situations de mesure ou de repérage comme les entiers, ils doivent aussi apparaître comme des nouveaux nombres permettant de mieux appréhender certaines de ces situations. Il est aussi nécessaire de faire identifier les décimaux comme des rationnels pouvant être représentés par des fractions décimales. Rappelons le concept mathématique de " décimal " s'est construit à partir de cette signification.

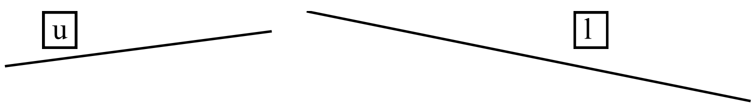
7. Les situations de découverte des fractions

Les situations analysées sont de deux types mais les formateurs proposent généralement une seule entrée, plus rarement les deux.

7.1. Une situation de fractionnement

Un consensus assez large apparaît chez les formateurs pour introduire les fractions à partir d'une situation proposée par M.J. Perrin et R. Douady (1986). Il s'agit d'une situation de communication dans un contexte de mesures de longueur pour mettre en œuvre l'aspect fractionnement.

> Une longueur l et une unité u étant données, il s'agit de construire un code permettant de relever ou de tracer un segment de telle longueur :

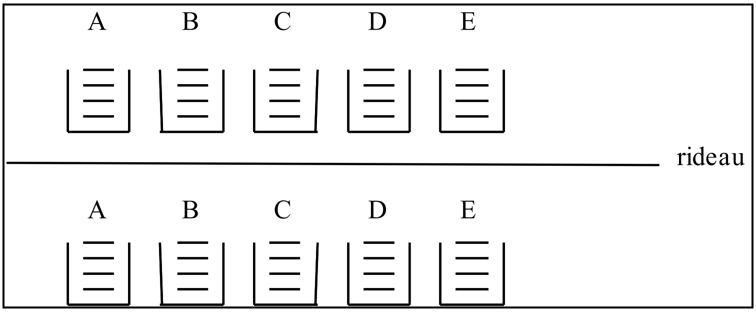


Les principales variables didactiques de la situation sont :

- le support de l'unité (fractionnable ou pliable facilement ou non) ;
- la taille relative de u et de l (u très petit devant l ou non) ;
- la relation entre l et u : si $l = nu + r$, avec n entier et $0 \leq r < u$, r sensiblement nul ou r très petit devant u , ou r sensiblement égal à u, ou r sensiblement égal à une fraction simple 1/2, 3/4, … .

7.2. Une situation de commensuration

Une situation type de commensuration est celle de *l'épaisseur des feuilles de papier* (Brousseau G. et N. 1987). Le contexte est aussi celui des mesures de longueurs : deux collections de 5 tas d'environ 200 feuilles de même format mais d'épaisseurs différentes, séparées par un rideau.



La classe est partagée en 2 équipes. Les élèves disposent de moyens de mesurage (règle graduée ou pied à coulisse). Il s'agit encore d'une situation de communication où les élèves doivent trouver un code pour repérer et différencier chaque tas dans un jeu de messages entre les deux équipes. Cette situation est plus délicate à mettre en œuvre que la précédente. Ce type de situation, qui privilégie l'aspect “ commensuration ” des rationnels, semble moins utilisé dans les pratiques de classe et dans les séquences de formations. Une des raisons est peut-être que certains formateurs, conformément aux programmes, préfèrent les réserver pour la Sixième. Pour une comparaison des deux types de situation, on pourra consulter le travail de Bolon J. (1997).

8. Questions diverses

Il reste des questions importantes à prendre en compte comme la construction de progressions en CM1 et CM2, la répartition CM1/CM2, ainsi que la liaison avec les deux premières années du collège. L'un des aspects non négligeable dans ces choix est sans doute celle de l'importance accordée aux techniques opératoires et à la calculatrice à l'école primaire comme en formation.

Je rappelle qu'après le glissement de la division de deux décimaux vers la sixième en 1980, la multiplication des décimaux ne devient exigible qu'en sixième. Ils ne devraient pas toutefois faire disparaître les problèmes du type “ Prix de 0,650 kg de saucisse à 16,80F le kg ”, que l'on peut traiter avec les outils de la proportionnalité. On pourra se reporter à l'article suivant “ *la multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6ème tant du point de du sens que de la technique* ” (Briand J.).

Dans ce texte, j'ai esquissé l'étude du thème des décimaux en formation des professeurs d'école. J'ai tenté de mettre en évidence les variables pertinentes de séquences de formation à propos de l'enseignement et l'apprentissage des décimaux en formation des professeurs stagiaires. Ainsi, de nombreux champs et perspectives d'étude et de nombreux aspects des décimaux peuvent être travaillés avec les professeurs-stagiaires. Bien que l'on puisse penser que l'étude de certains champs représente des passages quasi obligés en formation, l'essentiel reste, pour le formateur comme pour l'enseignant, un problème de choix adaptés aux publics en formation.

Bibliographie

APMEP (1979), *Approximations*, brochure Mots IV, APMEP, Paris.

BELLARD N., BRONNER A., CASENOVE B., GIRMENS Y., LARGUIER M., LEWILLION M., PELLEQUER S., REBILLARD E., SECO M. (1995), "*Liaison cycle 3 - 6ème, un outil d'aide à l'analyse des compétences en mathématiques*", Groupe didactique, IREM de Montpellier.

BOLON J.(1993), "*L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire*", Grand N n°52, IREM de Grenoble.

BOLON J. (1995), "*Les nombres décimaux à la charnière école-collège : une situation paradoxale*", Qu'est-ce qu'un programme d'enseignement, Hachette Education CNDP.

BOLON J. (1997), "*Comment les enseignants tirent parti des recherches en didactique : le cas des décimaux*" Thèse Paris 5.

BRIAND J., VINRICH G. (1993), COPIRELEM, Actes du colloque du colloque de Pau.

BRIAND J, EURIAT J, HUET M.L., LECOQ R., PELTIER M.L., (1996), "*Etude de La Disme de STEVIN de Bruges"*, Documents pour la formation des professeurs d'école, Tome 4. Stage d'Angers, IREM de Paris VII, Paris.

BRONNER A. (1997a), "*Etude didactique des nombres réels : idécimalité et racines carrées"*, Thèse, Université J. Fourier, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1980), "*Problèmes de didactique des décimaux"*, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 1/1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1981), "*Problèmes de didactique des décimaux"*, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 2/1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1983), "*Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques"*, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 4/2, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU N. et G. (1987), "*L'enseignement des rationnels et des décimaux dans l'enseignement obligatoire",* Brochure de l'IREM de Bordeaux I.

CANU M. et al. (1989), "*Découverte de π au CM2"*, Math et info au C.M. tome 1, IREM de Rouen.

CHARNAY R., MANTE M. (1996), "*Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles"*, Hatier.

COMITI C., NEYRET R. (1979), " *A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de CM* ", Grand N n°18, I.R.E.M. de Grenoble.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (1986), *Aides pédagogiques de l'A.P.M.E.P pour le CM : Décimaux,* publication APMEP n°61.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (1992), *ANNALES 1992, Concours externe de Recrutement des Professeurs d'Ecole*, LADIST, Irem de Bordeaux.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (1993), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome 2, Stage de Pau, IREM de Bordeaux.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (1995), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome 4, Stage d'Angers, IREM de Paris 7.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (1996), *La multiplication des décimaux*, Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, tome 5, IREM de Paris 7.

COQUAND M. (1981), "*Les décimaux, Mathématiques pour le cycle moyen"*, numéro spécial, Revue Grand N, IREM de Grenoble.

DAHAN A., PEIFFER J. (1986), "*Une histoire des mathématiques. Routes et dédales"*, Points-Seuil, Paris.

DHOMBRES J. (1978), "*Nombre, mesure et continu"*, CEDIC Nathan.

DOUADY R. (1980), "*Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire"*, Recherches en didactique des mathématiques vol. 1/1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY R. PERRIN GLORIAN M.J. (1986), "*Nombres décimaux",* IREM de Paris 7.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M.(1993) "*Se former pour enseigner les mathématique. Tome 3.Numération , décimaux"*, Ed.A.Colin, Paris.

ERMEL CM1 (1997), "*Apprentissages Mathématiques et résolution numériques"*, Cycle moyen, Hatier, Paris.

FÉNICHEL M., (1994), *"Formation initiale " 24 heures avec les PE2 "",* Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, Tome III, COPIRELEM, IREM de Paris 7.

GRISVARD C., LEONARD F (1981), "*Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs"*, Bulletin de l'APMEP n° 327,Paris.

GRISVARD C., LEONARD F (1983), "*Résurgences de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux"*, Bulletin de l'APMEP n° 340*,* Paris.

Groupe HISTOIRE ET EPISTÉMOLOGIE des mathématiques (1979), "*Introduction du calcul décimal et du système métrique dans la région de Rouen pendant la révolution",* l'IREM de Rouen.

HOUDEMENT C., PELTIER M.L. (1994), "*La machine à partager, Fractions et décimaux au cours moyen"*, I.R.E.M. de Rouen.

I.R.E.M. de Paris 7 (1980), *"Histoire des mathématiques pour les collèges"*, Ed Cedic, Paris.

NEYRET R. (1979), "*Décimaux"*, Grand N n°17, I.R.E.M. de Grenoble.

NEYRET R. (1995), "*Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants ; nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts universitaires de formation des maîtres"*, Thèse, Université J. Fourier, Grenoble.

PERRIN M.J. (1986), "*Représentation des fractions et décimaux chez des élèves de CM2 et de collège",* Petit x N°10, IREM de Grenoble.

RATSMBA-RAJOHN (1982), "*Deux méthodes de mesures rationnelles"*, Recherches en didactique des mathématiques, Volume 3/1, La pensée sauvage, Grenoble.

ROUCHIER A. et al. (1980), *"Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs"*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol 1/2, La pensée sauvage, Grenoble.

STEVIN (1585), "*La Disme enseignant facilement expédier par nombres entiers, sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes",* Reproduction de textes anciens, IREM de Paris VII.

TANNER M. (1993) "*Le nombre décimal n'existe pas : théorie et applications"*, Grand N n°52, I.R.E.M. de Grenoble.

WARUSFEL A. (1961), "*Les nombres et leurs mystères"*, Points-Seuil, Paris.

Annexe 1 :“ Prendre conscience de ses connaissances sur les nombres ” (Bronner A.)

1- Indiquez si les expressions suivantes représentent des nombres et précisez à quels ensembles ces nombres appartiennent parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c’est-à-dire des quotients de deux entiers.

	3,0001	36/3	8/7	$\sqrt{81}$	$\sqrt{7}$	23,1/1,2	4/0	$\sqrt{-16}$
Existe ?								
$\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$.								

	4,1/1,1	$\sqrt{4,16}$	23,8 + 3/7	0,999....
Existe ?				
$\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$.				

2- Calculez sans poser l'opération :

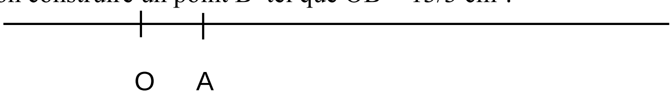
2,4 + 5,2 = 2,4 x 5,2 =

3- Entourez le plus grand des deux nombres : 15,2 et 15,13

4- Pouvez vous trouver 3 nombres décimaux compris entre 4,32 et 4,35 ?

Si oui : ....

5- Sur la droite munie du repère (O,A) avec la longueur OA comme unité, peut-on construire un point B tel que OB = 13/3 cm ?



6- Existe-t-il un carré d'aire 64 cm^2 ? si oui donner la longueur du côté :

mêmes questions avec 17 cm^2 ?

7- Pouvez-vous donner un exemple de nombre décimal, non rationnel ?

Pouvez-vous donner un exemple de nombre rationnel non décimal ?

8- Le quotient de 2 nombres décimaux est-il toujours décimal ?

Le quotient de 2 nombres rationnels est-il toujours rationnel ?

9- La racine carrée d'un nombre entier ou décimal est-elle toujours décimale ?

10- Une unité de longueur étant choisie, la longueur d'un segment s'exprime-t-elle toujours par un nom décimal ? un nombre rationnel ? autre ?

Annexe 2 : " À propos des nombres décimaux " (Fénichel M., 1994).

Essayez d'aller le plus loin possible dans le choix des exercices suivants. Rédigez-les. Faites le point sur vos connaissances et/ou vos manques à l'occasion de ce travail.

1) Ordonnez : 121,54 - 0,2 - 13,5248 - 98 - 20,32 - 3,32 - 0,002 - 13,401 - 2,18 - 121,0242 - 2,28 121,3419.
Ecrivez les règles de comparaison des nombres décimaux.

2) Citez des nombres décimaux, des nombres non décimaux ? Comment caractérisez-vous ces types de nombres ?

3) Citez, si possible 3 nombres compris entre
● 1,8 et 2,1 ● 1,6 et 1,8 ● 1,3 et 1,4 ● 1 et 1,1
Quelle(s) conclusions pouvez-vous tirer ?

4) Donnez une approximation de $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{256}$ à 10^{-2} , 10^{-4} , 10^{-6} prés. Ces nombres sont-ils des décimaux?

5) La longueur du second côté d'un rectangle d'aire 11 m^2 et de premier côté 5 m mesure-t-elle un nombre entier de mètres ?

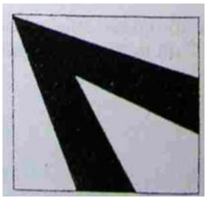
6) Nicolas Oresme a étudié en 1377 la suite des fractions suivantes :
1/2 ; 2/4 ; 3/8 ; 4/16 ; 5/32 ; 6/64 ; ...
a) Quelles fractions a-t-il écrit ensuite ?
b) Quelle est l'écriture décimale des sommes suivantes :
● $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ ● $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}$ ● $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}$ ●……….
c) Oresme a démontré que ces sommes se rapprochent d'un certain nombre. À votre avis, quel est ce nombre ?

7) Observez ces fractions :

$f1 = 1+\frac{1}{2}$ $\quad f2= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$ $\quad f3= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$ $\quad f4 = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$

a) Écrivez les quatre fractions suivantes à celles-ci.
b) Donnez une écriture décimale de ces huit fractions avec une machine à calculer. Comparez les à 2.

8) Quelle fraction du carré représente la partie colorée ?



Annexe 3 :“ Tangram et fraction ” Fénichel M (C.O.P.I.R.E.L.E.M 1993)

Compte - rendu d'un travail en PE2

Les enfants avaient à leur disposition un tangram qu'ils pouvaient découper et utiliser pour leurs calculs.

Les questions 1 et 2 ont fait l'objet d'un travail individuel.
Les questions 3 et 4 ont fait l'objet d'une recherche de groupe et d'une "rédaction" individuelle.
La question 4 n'a pas été traitée par tous.

****

1-Quelle fraction du tangram (cf. dessin 1) représente chaque pièce ?

2-Compare. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$

3-En observant attentivement le tangram, fais les calculs suivants :

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}$

Tu peux découper le tangram et utiliser les pièces.

4- Quelle fraction du tangram représente le bateau suivant (cf. dessin 2) ?

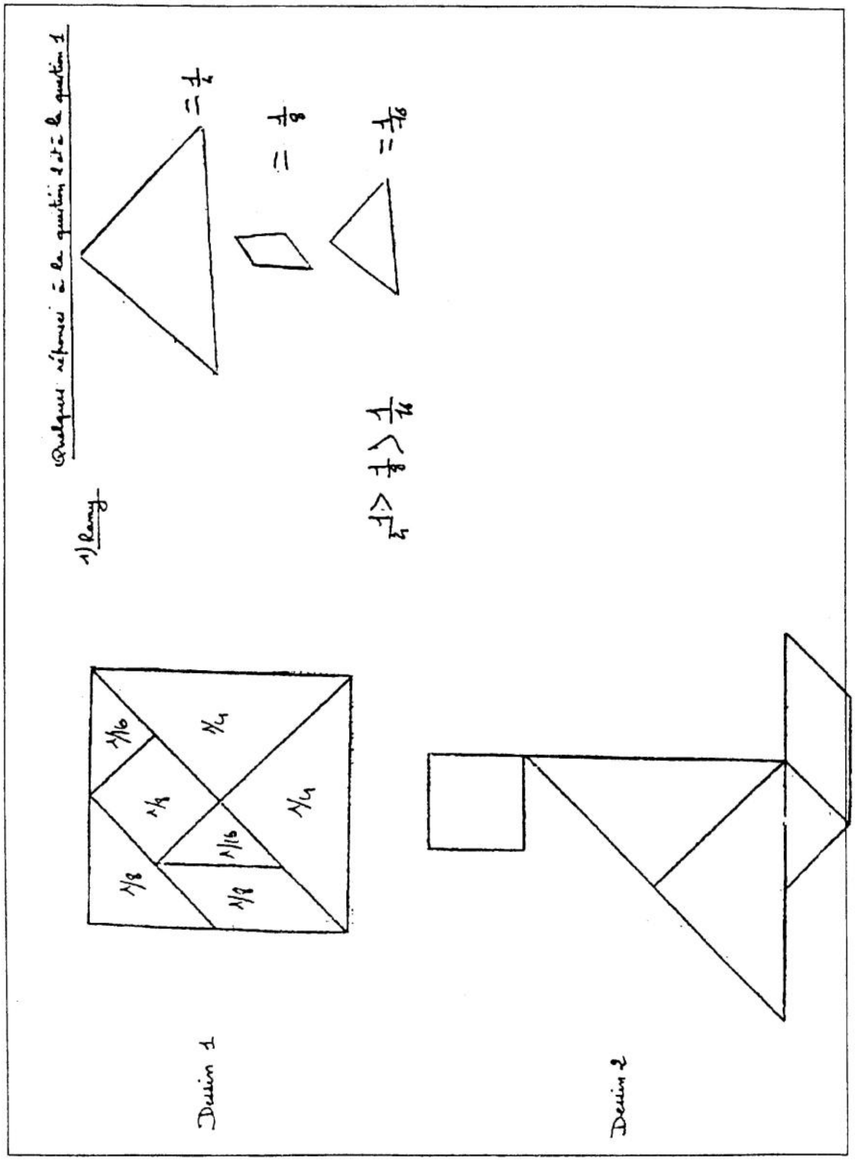
Consigne pour les étudiants

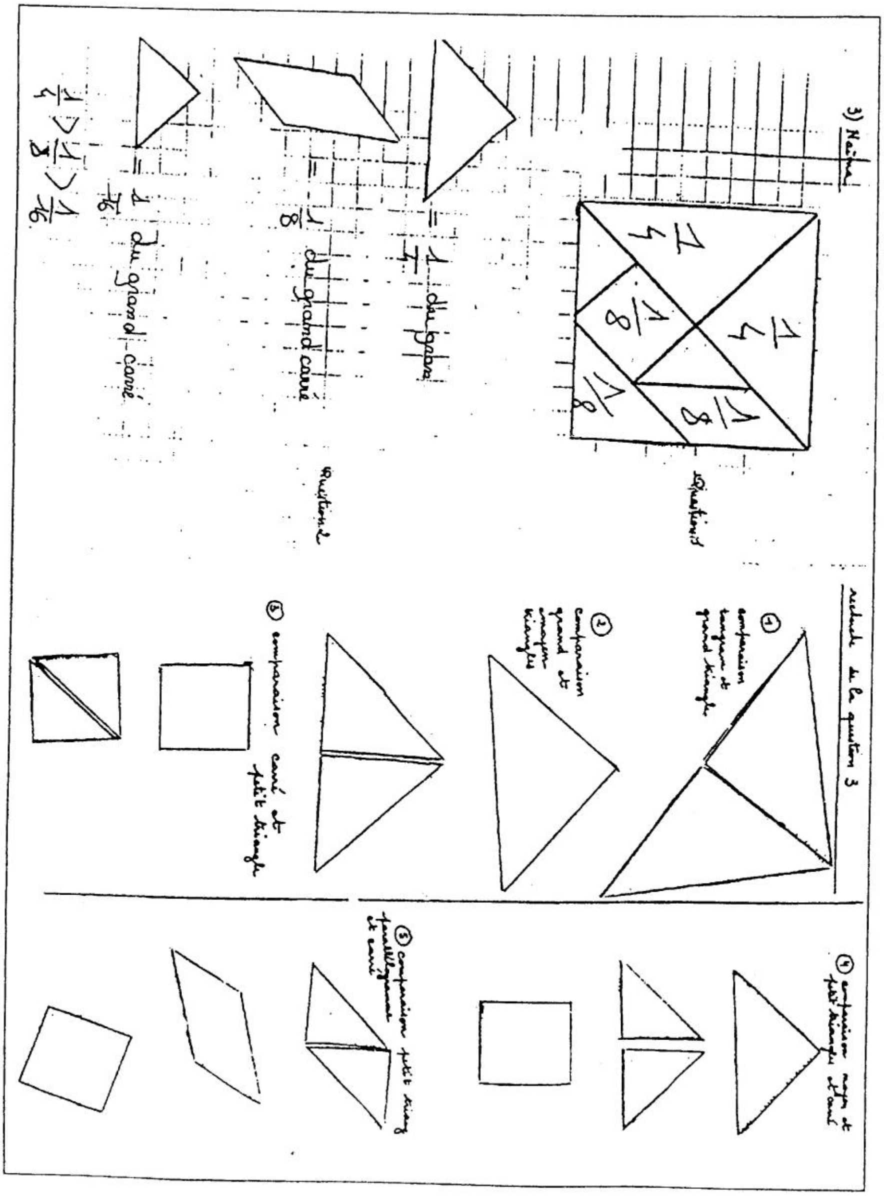
a) Faire une analyse a priori de ce travail en s'aidant des questions qui suivent. (On précise que c'est un travail proposé au mois de mars en CM2, que les enfants utilisent couramment les décimaux introduits dès le début du CMI et qu'ils connaissent quelques fractions usuelles. On a photocopié quelques "constructions" faites par les groupes d'enfants en cours de recherche et dont ils n'ont pas gardé les traces. Elles sont fournies).
a1 - Quels sont les contenus mathématiques précis des activités ?
a2 - Quel est le contexte pour le concept "fraction" dans ce travail ?
a3 - Quels sont les objectifs des activités ?

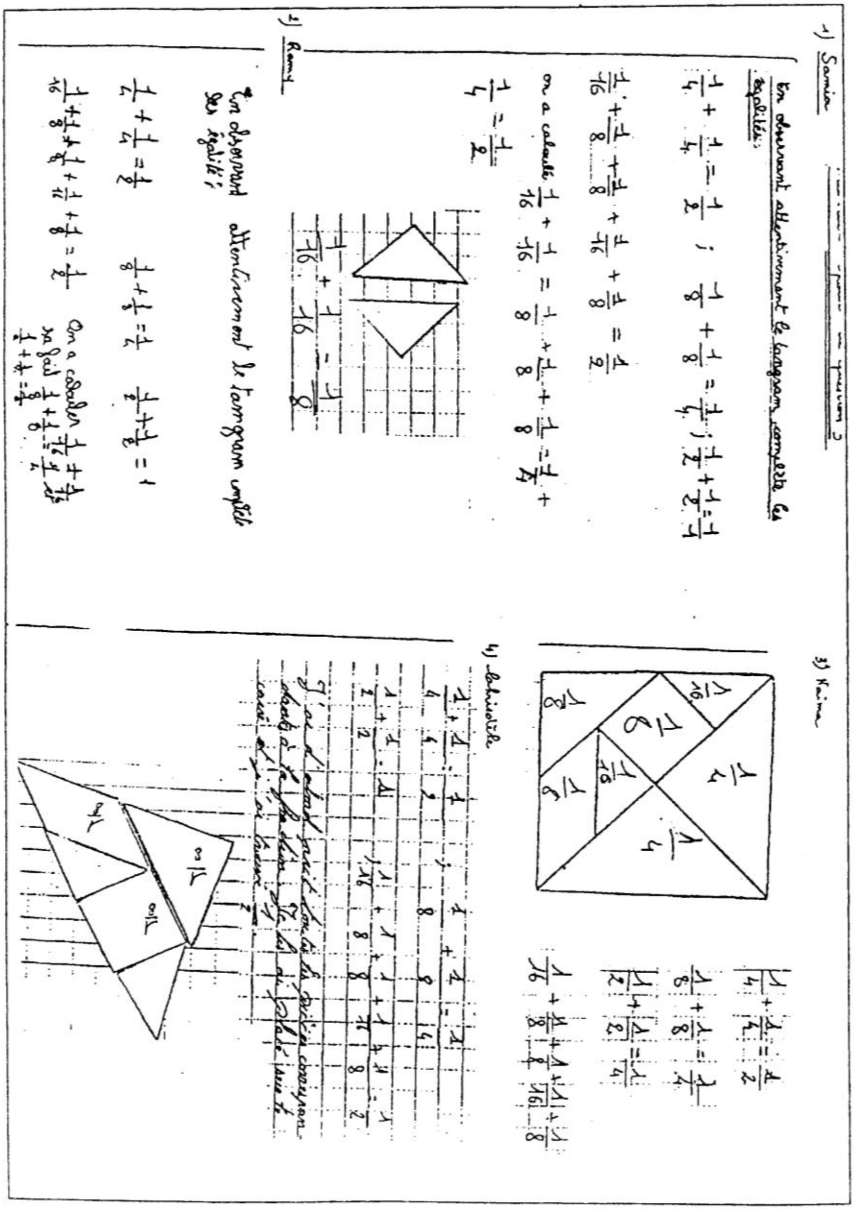
b) Analyser les travaux d'enfants photocopiés
b1 - Repérer les procédures utilisées
b2 - Relever les erreurs éventuelles
b3 - D'après vous, d'où proviennent ces erreurs '?

c) Faire une proposition pour continuer ce travail
(On précise que la recherche a été longue et laborieuse, et qu'un groupe d'enfants n'est pas allé au-delà de :
1/4 + 1/4 = 1/2
Il n'a pas terminé son travail, mais n'a pas écrit d'erreurs).

Annexes liées à cette évaluation : constructions faites par les enfants




3) Naïma
1/4
1/4
1/8
1/8
1/8
Question 1
= 1/4 du grand
= 1/8 du grand carré
= 1/16 du grand carré
Question 2
1/4 > 1/8 > 1/16
recherche de la question 3
comparaison tangram et grand triangle
comparaison grand et moyen triangles
comparaison carré et petit triangle



La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6ème tant du point de vue du sens que de la technique. [1]

Joël Briand

Cet article a d'abord été travaillé pendant le stage COPIRELEM de Rennes (1996) puis il a été publié dans la brochure « des mathématiques en sixième » en collaboration avec la commission inter-IREM premier cycle.

En 1995, les nouveaux programmes de l'école élémentaire excluent la multiplication de deux décimaux. Les professeurs de collège vont donc alors prévoir progressivement l'enseignement du produit de deux décimaux.

Les nouveaux programmes (1995) de l'école élémentaire, s'ils conservent la multiplication d'un décimal par un entier, excluent la multiplication de deux décimaux. La mise en application des nouveaux programmes a commencé à la rentrée 1995 en CE2 pour atteindre le CM2 à la rentrée 1997. Ainsi, la multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6ème tant du point de vue du sens que de la technique.

I- Etat des connaissances des élèves sortant de l'école élémentaire (en référence aux évaluations nationales de 1995) :

Nous avons choisi les items qui se rapportent à la multiplication des décimaux.

N°	exercice	% réussite	Principales erreurs	%
Ex 18b et c	1,54x1000 7,14x100	59,3%	Application à tort de la règle des entiers :1,54000 Déplacement inexact de la virgule : 15,4 Multiplication de la partie entière : 1000,54 et/ou de la partie décimale 1000,54000	10,4% 9,8% 4,2%
Ex 25	4,28 x 3,5 ———	39%	1498 ou 14980 Autres réponses : on y retrouve des résultats où seule la virgule est fautive. On peut se demander si l'alignement des virgules des deux nombres donnés [...] n'induit pas un alignement de la virgule pour le résultat.	14,9% 42,1%

[1] Instructions Officielles, 6ème, 1995.

Dans l'évaluation 1995 les décimaux apparaissent dans des exercices de calcul, mais jamais dans des problèmes. Suite aux changements de programmes on ne devrait plus trouver d'exercices semblables à l'exercice 25 à partir de la rentrée 1998.

II- Les nouveaux programmes de sixième :

Dans la partie 2 “ travaux numériques ”, des nouveaux programmes de la 6ème, voici les contenus, compétences et commentaires des parties 2-1 2-2 et 2-3 concernant les travaux numériques des nouveaux programmes de 6ème:

Partie 2-1 : Nombres entiers et décimaux : écritures et opérations (extraits).

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
techniques opératoires	addition, soustraction et multiplication	...La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6ème tant du point de vue du sens que de la technique.

Partie 2-2 : Quotient de deux entiers : (extraits).

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Ecritures fractionnaires	Placer le quotient de deux entiers sur une droite graduée dans des cas simples. Savoir utiliser un quotient de deux entiers dans un calcul sans effectuer la division.	A l’école élémentaire, l’écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage. Les activités poursuivies en 6ème s’appuient sur deux idées : Le quotient a/b est un nombre. Le produit de a/b par b est égal à a.

Partie 2-3 : Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires : (extraits).

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires	Pour des nombres courants, passer d’une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa.	Il s’agit de pouvoir utiliser les différentes écritures fractionnaires d’un même nombre décimal.

Ces nouveaux programmes inspirent quelques commentaires :

1- L’ordre des parties pourrait faire croire qu’à l’école élémentaire, la construction des décimaux s’est effectuée avant celle des rationnels[2]. Or, si nous regardons les manuels diffusés pour les deux dernières années du cycle 3 (ex CM1 et CM2) on s’aperçoit que bon nombre d’entre eux introduisent les fractions simples, puis les fractions décimales (donc les décimaux), puis les écritures à virgules des fractions décimales. Il y a là une tendance à proposer une introduction plus proche de leur construction historique[3]. Même si la plupart du temps, cette construction est montrée aux élèves et non pas mise en place par eux, l’école élémentaire prend peu à peu ses distances avec les constructions telles que le marquage de l'unité par une virgule dans un nombre associé à une mesure (que ce soit des unités du système métrique ou la monnaie). Il semble que les premières évaluations nationales aient en partie permis d’ouvrir un débat sur les obstacles didactiques que créait ce type d’introduction. Les élèves concevaient alors le nombre décimal, dans son écriture à virgule, comme un couple d’entiers. De ce fait ils pouvaient envisager comme licite, la notion de décimaux consécutifs, et l'impossibilité d’intercalation dans certains cas.

2- Le mot "quotient" induit souvent l’idée de division. Beaucoup d'étudiants de première année d’IUFM (titulaires de licence) ont ce modèle des rationnels : un quotient est une division à effectuer. En revanche le mot "fraction" telle que 2/3 est plus souvent envisagée comme un nombre-repère (2 fois 1/3) sur une droite graduée, ou nombre-mesure.
L'idée d'associer quotient et division est très certainement un effet de l’enseignement ; le quotient a une signification polysémique à l'école élémentaire : quotient euclidien (ou quotient entier), quotient décimal, quotient exact (entier décimal ou rationnel), quotient approché (avec un reste décimal). En revanche, dans les instructions de 6ème, la notion de quotient est nettement associée à celle de rationnel. Lorsque les élèves arrivent au collège, le professeur devrait prendre en compte ces différents points de vue.

3- La multiplication des décimaux entre eux relève explicitement maintenant de la classe de 6ème. Notons au passage que le texte de 6ème déclare : “aucune compétence n’est exigible quant à la technique de la division à la main de deux décimaux ”. Cela signifie-t-il "savoir interpréter le résultat de la division de deux décimaux à l’aide de la calculatrice"?

---

[2]Remarque : à l'école élémentaire, le terme de fraction désigne indifféremment le nombre rationnel et une de ses écritures fractionnaires.

[3]Pour plus d'informations, voir l'article sur "La Disme" dans la brochure Angers 1996 de la COPIRELEM (présent dans cet ouvrage).

III- Quelques pratiques scolaires relatives à l'enseignement du produit de deux décimaux

Voici quelques exemples de pratiques effectives repérées à l'école élémentaire ces dernières années avant les nouveaux programmes. [4]

Produit de deux décimaux à partir du produit d'un décimal par un entier :

Dans un premier temps, la multiplication d'un décimal par un entier est définie par réitération de l'addition : par exemple : 1,6 + 1,6 + 1,6 + 1,6 s'écrit aussi 1,6 x 4.
Cette définition ne peut être reprise pour le produit de deux décimaux. Quel sens donner alors au produit 0,148 x 1,6 par exemple ?
On sait que 148 x 16 = 2368 (dans N) et que 14,8 x 16 = 236,8 (nouvelle opération définie de D x N vers D). La multiplication dans N possède une propriété connue : « si l'on divise l'un des termes de la multiplication par 10 (100, 1000...), le résultat est divisé par 10 (100, 1000...). On fait donc remarquer à l'élève que 148 : 10 = 14,8 et 2368 : 10 = 236,8 permettent de retrouver le résultat de 14,8x16 nouvellement construit de D x N vers N.
Cette propriété montrée va être alors étendue. L'hypothèse est que « si l'élève a compris », il pourra alors trouver le résultat de chacun des produits suivants : 0,148 x 1,6 ; 14,8 x 1,6 ; 1,48 x 1,6, construisant ainsi une nouvelle opération (de D x D vers D) qui garde les propriétés connues de la multiplication de N x N vers N.
Ce passage peut être plus ou moins explicité en utilisant les outils des fonctions. Par exemple :

148 x 16 = 1,48x100 x 1,6x10 = 1,48 x 1,6 x 1000

1,48	*multiplié par 100* →	*148*
x 1,6	*multiplié par 10*	*x 16*
?	← *divisé par 1000*	*2368*

[4] Pour ne pas se borner à des constats de pratiques, nous renvoyons le lecteur à deux recherches en didactique des mathématiques, sur les rationnels et les décimaux :
La première (voir bibliographie) est celle de R. Douady et M.J. Perrin qui met en évidence différentes représentations des rationnels et des nombres décimaux chez les élèves du CM2 et du collège. Les auteurs proposent également une suite de situations permettant notamment l'introduction du produit de deux décimaux en s'appuyant sur un jeu entre deux cadres : le numérique et le géométrique.
La seconde (voir bibliographie) est celle de.Brousseau N. et G sur " la construction des rationnels et des décimaux dans la scolarité obligatoire » qui présente une suite de situations dans lesquelles les élèves élaborent les rationnels, les décimaux et les opérations dans ces ensembles.

Produit de deux décimaux à partir de calculs d'aires :
Le problème posé aux élèves est le suivant : déterminer un moyen de calculer l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 3,6 et 4,3 (l'unité d'aire étant le carré de côté 1).

Plusieurs directions sont possibles :

- Le produit de deux décimaux qui s'appuie sur un calcul d'aire et sur des jeux d'écriture (à virgule et fractionnaires).
13,427 x 9,64 = (13427 / 1000) x (964 / 100) qui se pratiquent par analogie avec ceux pratiqués dans N (voir l'étude précédente) . Cette approche suppose une connaissance approfondie des rationnels et de la multiplication dans cet ensemble.

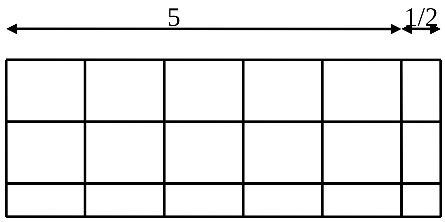
- Le produit de deux décimaux à partir de la mesure effective de l'aire du rectangle.
Les élèves travaillent sur feuille de papier millimétré sur laquelle est dessinée un rectangle de 2,45 dm sur 2,7 dm. Le professeur demande aux enfants de retrouver l'aire du rectangle en dm².

Les savoirs concernant les unités de mesure des surfaces sont connus[5]. Attardons-nous un instant sur les stratégies généralement observées :
1- Les enfants effectuent des tracés sur le papier millimétré. Ils recherchent des carrés de 1 dm de côté. Ils retrouvent rapidement les 2x2 dm². Il reste à “ rassembler les bordures ” en paquets valant 1 dm². Pour cela les démarches sont variées.
2- Certains élèves effectuent directement la multiplication de 245 par 27 et cherchent à donner une signification du résultat.
3- D'autres convertissent tout en mm², calculent l'aire en mm² et reviennent à la mesure en dm².
Le professeur a prévu un dessin sur lequel figure le rectangle des élèves ainsi que les rectangles 2x2 (en dm)et 3x3 (en dm) (Ce schéma prouve que l'aire du rectangle recherchée est comprise entre 4 et 9 dm²). Ceci permet d'écarter certaines erreurs issues de diverses stratégies.

- Le produit de deux décimaux à partir du produit de deux rationnels en s'appuyant sur le calcul d'aires.
On se donne un nombre entier de centimètres (8cm). On cherche le plus possible de rectangles ayant ce nombre comme demi-périmètre et on calcule son aire.
Dans un premier temps, les élèves résolvent ce problème dans les entiers. Ils déterminent les couples solution (1 ; 7), (2 ; 6),(3 ; 5),(4 ; 4) et déterminent les aires associées. Ensuite, arrivés à ce stade, ils sont capables de construire des rectangles ayant les dimensions faisant intervenir des fractions simples.

[5] Toutefois, on sait que les élèves assimilent dm² et carré de un dm de côté, cm² et carré de un cm de côté.

Il s'agit maintenant de calculer l'aire d'un tel rectangle. L'existence de cette aire est évidente pour l'élève.

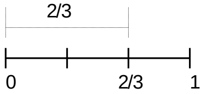


Les élèves calculent les différentes parties de ce rectangle en utilisant la multiplication dans N et la multiplication d'une fraction par un entier (connue) et en calculant ½ x ½ en se ramenant au carré d'aire 1.
Il s'agit ensuite d'expliciter le calcul effectué :
Ils ont donc : ½ x ½ = ¼
Il faut calculer (5 + ½)x(2 + ½).
(5 + ½)x(2 + ½) = 5x 2 + 5 x ½ + 2 x ½ + ½ x ½ = 10 + 5/2 + 2/2 + ¼
= 13 + ½ + ¼

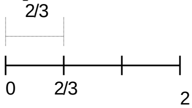
- Le produit de deux décimaux à partir du produit de deux rationnels en s'appuyant sur la juxtaposition d'aires.
Le produit de deux décimaux peut être considéré, dès le départ, comme un cas particulier du produit de deux rationnels en suivant l'une des approches possibles : fractionnement[6] ou commensuration en fonction de l'introduction choisie pour les rationnels :
Première approche (qui se fonde sur l'introduction des fractions à partir de " partages de l'unité") : soit à définir le produit de 2/5 par 3/4 en se référant aux mesures des surfaces :

---

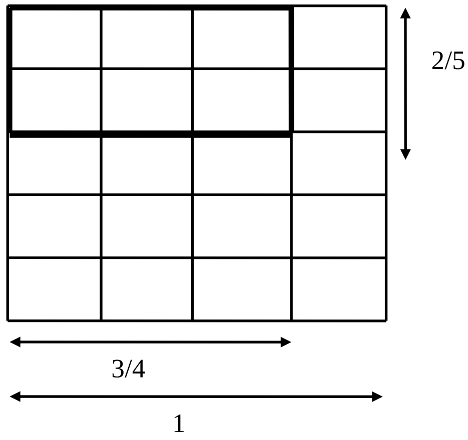
[6]*fractionnement* : une unité (de longueur, d'aire, de masse...) étant choisie, le rationnel 2/3 est donc considéré comme deux fois 1/3.



commensuration : 2/3 est considéré comme le nombre qui multiplié par 3 donne 2 par report de mesure. Cela correspond au quotient de 2 par 3.

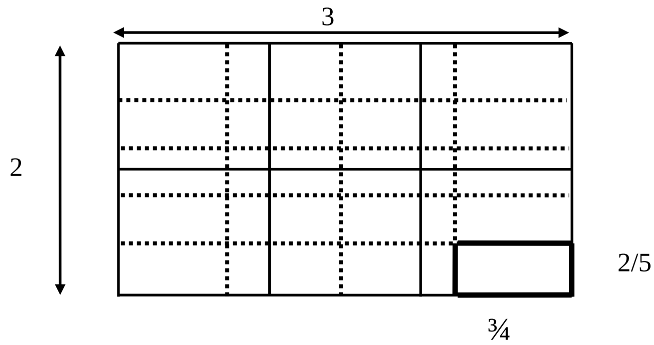


Pour une étude approfondie de ces deux modèles voir : *"Deux méthodes de mesures rationnelles* », RATSIMBA-RAJOHN in Revue de Didactique des Mathématiques, Ed. La pensée sauvage, Volume. 3-1, pp.65-112



Dans le carré unité (voir figure) , il y a 20 rectangles élémentaires. Le rectangle d'aire 2/5 multiplé par 3/4 est formé de 6 rectangles élémentaires. Son aire est donc les 6/20 de l'unité.

Deuxième approche (qui se fonde sur l'introduction des fractions à partir de la “ commensuration ”).
Soit à définir le produit de 2/5 par 3/4 en se référant aux mesures des aires : il faut 5 longueurs de 2/5 pour faire 2 et 4 longueurs de 3/4 pour faire 3.



Ce qui donne un grand rectangle de dimensions 2 et 3 d'aire 2x3 soit 6. Il faut 5x4 petits rectangles de dimensions 2/5 et 3/4 pour obtenir le grand rectangle. L'aire des petits rectangles est donc 20 fois plus petite. Elle est de 6/20. On décide d'identifier 2/5 x 3/4 et 6/20.

Ce travail (première ou deuxième approche) fait sur quelques fractions simples est appliqué au cas des fractions décimales et institutionnalisé sur ce seul cas (exemple : 2/10 x 3/100 = 6/1000).
Cela permet alors de donner du sens à 3,7 par 4,56 ; 3,7 étant identifié à 37/10 ou à 3 + 7/10, 4,56 à 456/100 ou à 4 + 5/10 + 6/100, le produit 3,7 x 4,56 est donc égal à : (37/10) x (456/100) ou (3 + 7/10)x(4 + 5/10 + 6/100).

IV-Bibliographie

BROUSSEAU G.(1980), "*Problèmes de didactique des décimaux*", dans *Recherche en Didactique des Mathématiques* 2/1, pages 37-128.
RATSIMBA-RAJOHN (1982) : « *Deux méthodes de mesures rationnelles* », Recherche en didactique des mathématiques. Vol. 3-1 pages 65-112.
COPIRELEM (1986), *Aides pédagogiques pour le cycle moyen*. Elem math VIII Publication APMEP n°61.
DOUADY R., PERRIN M.J. (1986) : *« les nombres décimaux à l'école et au collège* ». IREM Paris VII.
BROUSSEAU N.et G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.
BERTE A. *« Mathématique dynamique* » Nathan pédagogie 1993.
BRIAND J., HUET M.L.,.PEAULT H.,.PELTIER M.L : COPIRELEM (1995) "*La Disme*" *et "Étude de la Disme*", dans *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, IREM de Paris 7, p. 43-78.

Edition adaptée de la DISME de STEVIN de BRUGES

Joël Briand - Hervé Péault

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d’école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Cet article est composé de deux parties intitulées : « Edition adaptée de la Disme de Stevin de Bruges » et « « Etude de la disme de Stevin de Bruges ». Il présente un réexamen du texte de STEVIN DE BRUGES (LA DISME) dans une perspective de formation.
La première partie du document est une réécriture de la Disme respectant scrupuleusement le texte original de l’édition française, mais dans une typographie moderne de façon à faciliter la lecture.
La deuxième partie du document reprend le texte de LA DISME en l'étudiant comme un document didactique. Son côté très contemporain en ce qu'il répond à une préoccupation sociale, la problématique posée, les procédés d'exposition, les rapports que ce texte révèle entre les savoirs savants et les pratiques sociales, nous intéressent.
Nous faisons l'hypothèse que ce texte historique permettra de faire travailler aussi bien des professeurs d'école que des professeurs de mathématiques de lycée et collèges.
Dans la suite de ce document, nous mettons en regard des questions et leurs réponses. Libre à tout formateur de réorganiser le questionnaire comme il lui conviendra.

L A
D I S M E,

Enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompuz,
tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes.

Premièrement décrite en flamand, et maintenant convertie en Français, par SIMON STEVIN *de Bruges.*

AVX ASTROLOGUES,
arpenteurs, mesurevrs de tapisserie,
gavievrs, stéréométriens en général,
Maîtres de monnoye, & à tous
marchans :

SIMON STEVIN *Salut.*

Quelqu’un voyant la petitesse de ce livret et la comparant à la *grandeur de vous mes* TRES HONORES SEIGNEURS ; *auxquels il est dédié, estimera peut-être notre concept absurde. Mais s'il considère la proportion, qui est, comme la petite quantité de celui-ci, à l'humaine imbécillité de ceux-là, ainsi ses grandes utilités, à leur hauts et ingénieux entendements, se trouvera avoir fait comparaison des termes extrêmes, lesquels ne la permettent en conversion de proportion quelconque. Soit donc le troisième au quatrième. Mais que sera ce proposé ? D'aventure quelque invention admirable ? Non certes, mais chose si simple qu'elle ne mérite quasi le nom d'invention, car, comme l'homme rustique, et lourd, trouve bien d'aventure quelque grand trésor sans y avoir usé de science, tout ainsi le semblable est il advenu en cette affaire : Pourtant si quelqu'un me voulu estimer pour vanteur de mon entendement à cause de l'explication de ces utilités ; sans doute il démontre, ou qu'il n'y a en lui ni jugement, ni intelligence, de savoir discerner les choses simples des ingénieuses, ou qu'il soit envieux de la propriété commune ; mais quoi qu'il en soit, il ne faut pas omettre l'utilité de celui-ci, pour l'inutile calomnie de celui-là.. Or comme le marinier ayant d'aventure trouvé quelque île inconnue, déclare franchement au Roi toutes ses richesses, comme d'avoir beaux fruits, précieux minéraux, plaisantes contrées, etc. sans que cela lui soit réputé pour filouterie ; ainsi nous parlerons ici librement de la Grande utilité de cette invention, je dis Grande, voire plus Grande que je n'estime qu'aucun de vous autres attendez, sans toutefois me glorifier du mien.*

Voici donc que la matière de cette DISME *(la cause duquel nom sera déclarée par la suivante première définition) est nombre, l'utilité des effets de laquelle, vous Mrs est assez notoire par vos continuelles expériences, il ne fera point métier d'en faire beaucoup de paroles ; car s'il est astrologue, il sait que le monde est devenu par les computations astronomiques (car elles enseignent au Pilote l'élévation de l'Equateur et du Pôle, par le moyen de la table des déclinaisons du Soleil, l'on décrit par icelles la vraie longitude et latitude des lieux, etc.) un paradis abondant en plusieurs lieux, de ce que toutefois la terre n'y peut point produire. Mais comme le doux n'est jamais sans l'amer, le travail de telles computations ne lui sera* *point caché, à cause de laborieuses multiplications et divisions, qui procèdent de la soixantième progression des Degrés, Minutes, Secondes, Tierces, etc. Mais s'il est arpenteur, il saura le grand bénéfice que le monde reçoit de la science, par laquelle s'évitent plusieurs difficultés et noises, qui s'élèveraient journellement, à cause de l'inconnue capacité des terres ; outre cela, il n'ignore pas (principalement celui auxquelles les affaires sont grandes) les ennuyeuses multiplications qui procèdent des Verges, Pieds, et souvent Doigts, l'un par l'autre, qui n'est pas seulement moleste, mais (combien toutefois que le mesurer et autres choses précédentes fussent bien expédiées) souvent cause d'erreur, tendant au grand dommage de l'un ou de l'autre. Aussi, à la ruine de la bonne renommée de l'Arpenteur. Et ainsi des maîtres des Monnaies, Marchands, et chacun au sien. Mais d'autant que ceux la sont plus dignes, et les voies pour y parvenir plus laborieuses, d'autant plus grande est cette découverte DISME, ôtant toute ces difficultés. Mais comment ? Elle enseigne (afin de dire beaucoup en un mot) d'expédier facilement sans nombres rompus, tous comptes qui se rencontrent aux affaires des Humains. De sorte que les quatre principes d'Arithmétique que l'on appelle Ajouter, Soustraire, Multiplier et Diviser par nombres entiers pourront satisfaire à tel effet. Causant semblable facilité à ceux qui usent des jetons. Or ainsi par tel moyen sera gagné le précieux temps, ainsi, par tel moyen sera sauvé ce qui se perdrait autrement, ainsi par tel moyen sera ôté labeur, noise, erreur, dommage et autres accidents communément adjoints à ceux-ci, je le mets volontiers à votre jugement.*

Quand à ce que quelqu'un ne pourrait dire que plusieurs inventions semblent bonnes au premier regard, mais quand on s'en veut servir, l'on ne peut rien effectuer, et comme il advient souvent aux chercheurs de forts mouvements qui semblent bons en petites preuves mais aux grandes, ou à l'effet, ils ne valent pas un fétu. Nous lui répondons qu'il n'y a ici tel doute, parce que l'expérience s'en fait journellement en la chose même. A savoir par divers experts Arpenteurs Hollandais auxquels nous l'avons déclaré, lesquels (laissant ce qu'ils avaient inventé chacun à sa manière, pour amoindrir le travail de leur computation) l'usent à *grand contentement et par tel fruit comme la Nature témoigne s'en devoir nécessairement suivre : le même adviendra à un chacun de vous autres mes TRES HONORES SEIGNEURS qui feront comme eux. Vivez cependant en toute félicité.*

ARGVMENT

La Disme a deux parties, Définitions et Opérations. En la première partie se déclarera par la première Définition, quelque chose soit Disme. Par la seconde, troisième et quatrième que signifie Commencement, Prime, Seconde, etc., et nombre de Disme.
En l'opération se déclarera par quatre propositions, l'Addition, Soustraction, Multiplication, et Division des nombres de Disme, de quoi l'ordre se peut représenter succinctement par telle table:

La disme a deux parties	*Définition comme quelque chose soit*	*Disme Commencement. Prime, seconde, etc. Nombre de Disme.*
	Opération de	*L'addition Soustraction Multiplication. Division.*

A la fin du précédent sera encore appliqué une Appendice, déclarant l'usage de la Disme par quelques exemples et choses.

L A P R E M I E R E P A R T I E
DE LA DISME DES
définitions

Définition I.

Disme est une espèce d' arithmétique, inventée par la Dixième progression, consistance et caractère des chiffres, par lesquels se décrit quelque nombre et par laquelle on dépêche par nombres entiers sans rompus, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes.

EXPLICATION

Soit quelque nombre de mille cent et onze, décrit par caractères des chiffres de cet ordre 1111, auxquels apparaît que chaque 1 est la dixième part de son prochain caractère précédent. Semblablement en 2378, chaque unité du 8 est la dixième de chaque unité du 7. Et ainsi de tous les autres. Mais parce qu'il est convenable que les choses desquelles on veut traiter aient des noms et que cette manière de computation est trouvée par considération de telle dixième ou disme progression, voire qu'elle consiste entièrement en icelle, comme apparaîtra ci après, nous nommons ce traité proprement et convenablement la DISME, par la même on peut opérer avec nombres entiers sans rompuz en tous les comptes se rencontrant en nos affaires, comme sera démontré en suivant.

DEFINITION II

Tout nombre entier proposé se dit COMMENCEMENT, son signe est tel ⓪.

EXPLICATION

Par exemple quelque nombre proposé de trois cents soixante quatre, nous le nommons trois cent soixante quatre COMMENCEMENT, les décrivant en cette sorte 364 ⓪et ainsi de tous autres semblables.

DEFINITION III.

Et chaque dixième partie de l'unité de commencement nous la nommons PRIME, son signe est tel ① ; chaque dixième partie de l'unité de prime nous la nommons SECONDE, son signe est tel ② et ainsi des autres chaque dixième partie de l'unité de son signe précédent, toujours en l'ordre un davantage.

EXPLICATION

Comme 3①7②5③9④,c'est à dire 3 *Primes* 7 *Secondes* 5 *Tierces* 9 *Quartes* et ainsi se pourrait procéder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire que selon cette définition les dits nombres font $\frac{3}{10}\ \frac{7}{100}\ \frac{5}{1000}\ \frac{9}{10000}$, ensemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8⓪9①3②7③ valent $\frac{9}{10}\ \frac{3}{100}\ \frac{7}{1000}$, ensemble $8\frac{937}{1000}$ et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi savoir que nous n'usons en la DISME d'aucun nombres rompus, aussi que le nombre de multitudes des signes, excepté ⓪, n'excède jamais le 9. Par exemple, nous n'écrivons pas 7①12② mais en leur lieu 8①2②, car ils valent autant.

DEFINITION IV.

Les nombres de la précédente seconde et troisième définition se disent en général NOMBRES DE DISME.

Fin des définitions.

SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPERATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION

Etant donné nombres de disme à ajouter Trouver leur somme :
Explication du donné : Il y a trois ordres du nombre de Disme, desquels le premier 27⓪8①4②7③, le deuxième 37⓪6①7②5③, le troisième 875⓪7①8②2③.
Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme.
Construction. On mettra les nombres donnés en ordre comme ci-joignant, les ajoutant selon la vulgaire manière d'ajouter nombres entiers, en cette sorte :

		⓪	①	②	③
	2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

Donne somme (par le 1° problème de l'arithmétique) 941304, qui sont (ce que démontrent les signes dessus les nombres) 941⓪3①0②4③. Je dis que les mêmes sont la somme requise.
Démonstration. Les 27⓪8①4②7③ font (par la 3° définition) $27\frac{8}{10}\frac{4}{100}\frac{7}{1000}$, ensemble $27\frac{847}{1000}$, & par même raison les 37⓪6①7②5③ valent, $37\frac{675}{1000}$, & les 875⓪7①8②2③ seront $875\frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme $27\frac{847}{1000}$, $37\frac{675}{1000}$, $875\frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10° problème de l'arithmétique) $941\frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941⓪3①0②4③. C'est donc la vraie Somme, ce qu'il fallait démontrer.
Conclusion. Etant donc donnés nombres de Disme à ajouter, nous avons trouvé leur Somme, ce qu'il fallait faire.

NOTA

Si aux nombres donnés défaillait quelque signe de leur naturel ordre, on remplira son lieu par le défaillant. Soient, par exemple les nombres donnés 8⓪5①6② & 5⓪7②, auquel dernier défaut le signe de l'ordre ①. L'on mettra en son lieu 0 ①, prenant alors comme pour nombre donné 5⓪0①7②, les ajoutant comme ci-devant en cette sorte.

	⓪	①	②
	8	5	6
	5	0	7
1	3	6	3

Cet avertissement servira aussi aux trois propositions suivantes, là où il faut toujours emplir l'ordre des figures défaillantes, comme nous avons fait en cet exemple.

PROPOSITION II, DE LA Sovstraction

Etant donné nombre de Disme duquel on soustrait et à soustraire, trouver leur reste.

Explication du donné. Soit le nombre duquel on soustrait 237⓪5①7②8③, & à soustraire 59⓪7①4②9③. *Explication du requis*. Il faut trouver leur reste.

Construction. On mettra les nombres donnés en ordre comme ci-joignant, soustrayant selon la vulgaire manière de soustraction par nombres entiers, en cette sorte :

		⓪	①	②	③
2	3	7	5	7	8
	5	9	7	4	9
1	7	7	8	2	9

Reste (par le 2° problème de l'Arithmétique) 177829 qui font (ce que dénotent les signes par dessus les nombres) 177⓪8①2②9③, Je dis que les mêmes sont le reste requis.

Démonstration. Les 237⓪5① 7②8③, font (par la troisième définition de cette Disme) $237\frac{5}{10}, \frac{7}{100}, \frac{8}{1000}$, ensemble $237\frac{578}{1000}$: Et par même raison les 59⓪7①4②9③ valent $59\frac{749}{1000}$, lesquels soustraits de $237\frac{578}{1000}$, reste (par le 10° problème de l'Arithmétique) $177\frac{829}{1000}$. Mais autant valent les dites 177⓪8①2②9③, c'est donc le vrai Reste, ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : Etant donc donné nombre de Disme duquel on soustrait, & à soustraire, nous avons trouvé leur reste, ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION III, DE LA Multiplication

Etant donné nombre de Disme à multiplier, & multiplicateur, trouver leur produit.

Explication du donné. Soit le nombre à multiplier 32⓪5 ①7②, & multi- plicateur 89 ⓪4①6②.

Explication du requis : il faut trouver leur produit.

Construction : On mettra les nombres donnés en ordre comme ci-joignant, multipliant selon la vulgaire manière de multiplication par nombres entiers en cette sorte :

					⓪	①	②
				3	2	5	7
				8	9	4	6
			1	9	5	4	2
		1	3	0	2	8	
	2	9	3	1	3		
2	6	0	5	6			
2	9	1	3	7	1	2	2
			⓪	①	②	③	④

Donne produit (par le 3° problème de l'Arithmétique) 29137122. Or, pour savoir ce que font, on ajoutera les deux derniers signes donnés, l'un ②, & l'autre aussi ②, font ensemble ④, nous dirons donc que le signe du dernier caractère du produit sera ④, lequel étant connu, tous les autres seront notoires, à cause de leur ordre continu. De sorte que 2913⓪7①1②2③2④ font le produit requis.

Démonstration : Le nombre donné à multiplier 32⓪5①7②, fait (comme il apparaît par la 3° définition de cette Disme) $32\frac{5}{10}, \frac{7}{100}$, ensemble $32\frac{57}{100}$ & par même raison le multiplicateur 89⓪4①6②, vaut $89\frac{46}{100}$, par le même multiplié le dit $32\frac{57}{100}$, donne produit (par le 12° problème de l'Arithmétique) $2913\frac{7122}{10000}$, mais autant vaut aussi le dit produit 2913⓪7①1②2③2④, c'est donc le vrai produit, ce qu'il nous fallait démontrer. Mais pour dire maintenant la raison pourquoi ② multiplié par ②, donne le produit ④ (qui est la somme de leurs nombres), idem, pourquoi ④ par ⑤ donne produit ⑨, & pourquoi ⓪ par ③ donne ③, etc. Prenons $\frac{2}{10}$ & $\frac{3}{100}$ (qui font par la 3° définition de cette Disme 2①3②) leur produit est $\frac{6}{1000}$, qui valent par la dite troisième définition, 6③, à savoir un signe composé de la somme des nombres des signes donnés.

CONCLVSION

Etant donc donné nombre de Disme à multiplier, & multiplicateur, nous avons trouvé leur Produit, ce qu'il fallait faire.

NOTA

Si le dernier signe du nombre à multiplier est inégal au dernier signe du multiplicateur, par exemple, l'un 3④7⑤8⑥, l'autre 5①4②, l'on fera comme dessus, & la disposition des caractères de l'opération sera telle :

	④	⑤	⑥	
	3	7	8	
		5	4	②
	1	5	1	2
1	8	9	0	
2	0	4	1	2
④	⑤	⑥	⑦	⑧

PROPOSITION IV DE LA DIVISION.

Etant donné nombre de Disme à diviser & diviseur. Trouver leur Quotient.

Explication du donné. Soit le nombre à diviser 3⓪4①4② 3③5④2⑥, et le diviseur 9①6 ②.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur quotient.

Construction : On divisera les nombres donnés (omettant leurs signes) selon la vulgaire manière de diviser par nombres entiers ainsi :

		~~1~~								
	~~1~~	~~8~~								
	~~5~~	~~1~~	~~6~~	~~4~~						
	~~7~~	~~6~~	~~2~~	~~7~~			⓪	①	②	③
~~3~~	~~4~~	~~4~~	~~3~~	~~5~~	~~2~~	(	3	5	8	7
	~~9~~	~~6~~	~~6~~	~~6~~	~~6~~					
		9	9	9						

Donne Quotient (par le 4° problème de l'Arithmétique) 3578. Or, pour savoir ce que font le dernier signe du diviseur qui est ②, se soustraira du dernier signe du nombre à diviser, qui est ⑤, reste ③, pour le signe du dernier caractère du Quotient, qui étant ainsi connu, tous les autres seront aussi manifestes, à cause de leur continu ordre, de sorte que 3⓪5①8②7③ font le quotient requis.

Démonstration : Le nombre donné à diviser 3⓪4①4②3③ 5④2⑤, fait (comme apparaît par la troisième définition de cette Disme) $3\,\frac{4}{10}\,\frac{4}{100}\,\frac{3}{1000}\,\frac{5}{10000}\,\frac{2}{100000}$ ensemble $3\,\frac{44352}{100000}$, par lequel divisé le dit $3\,\frac{44352}{100000}$, donne quotient (par le 13° problème de l'Arithmétique) $3\,\frac{537}{1000}$, mais autant vaut le dit Quotient 3⓪5①8②7③, c'est donc le vrai quotient, ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : Etant donc donné un nombre de Disme à diviser, & diviseur, nous avons trouvé leur Quotient, ce qu'il fallait faire.

NOTA I : Si les signes du diviseur fussent plus hauts que les signes du nombre à diviser, l'on mettra, joignant le nombre à diviser autant des 0 qu'on veut, ou autant qu'il sera métier. Par exemple, 7② sont à diviser par 4⑤, je mets près du 7 quelques 0 ainsi 7000, les divisant comme dessus en cette sorte :

$\cancel{3}$ $\cancel{2}$

$\cancel{7}$ $\cancel{0}$ $\cancel{0}$ $\cancel{0}$ $\cancel{(}$ 1 7 5 0 ⓪

$\cancel{4}$ $\cancel{4}$ $\cancel{4}$ $\cancel{4}$

Donne quotient 1750⓪. Il advient quelquefois que le quotient ne se pourra expliquer par nombres entiers, comme 4①, divisées par 3②, en cette sorte :

$\cancel{1}$ $\cancel{1}$ $\cancel{1}$ (1 ⓪ ① ②

$\cancel{4}$ $\cancel{0}$ $\cancel{0}$ $\cancel{0}$ 0 0 0 (1 3 3 3

$\cancel{3}$ $\cancel{3}$ $\cancel{3}$ $\cancel{3}$

Là où il apparaît qu'il y en sortiront infiniment des trois, restant toujours $\frac{1}{3}$. En tel accident l'on peut approcher si près, comme la chose le requiert, omettant le résidu. Il est bien vrai que 13⓪3①3$\frac{1}{3}$② ou 13⓪3①3② 3$\frac{1}{3}$③,etc. serait le parfait requis, mais notre intention est d'opérer en cette Disme, par nombres tous entiers, car nous voyons à ce qui s'observe aux négoces des hommes, là où l'on ne fait point compte de la millième partie d'une maille, d'un grain, etc. comme le semblable est souvent usé par les principaux Géométriens & Arithméticiens, en comptes de grandes conséquences. Comme Ptolémée & Jehan de Montroyal, n'ont pas décrit leurs tables des Arcs et Cordes, ou des Sinus, par l'extrème perfection (combien il était possible de le faire par nombres multinomiés) à cause que cette imperfection (considérant la fin d'icelles tables) est plus utiles que telle perfection.

NOTA 2. Les extractions de toutes espèces de racines se peuvent aussi faire par ces nombres de Disme. Par exemple, pour extraire une racine carrée de 5②2③9④, l'on besognera selon la vulgaire manière d'extraction en cette sorte :

$\cancel{1}$

$\cancel{5}$ $\cancel{2}$ $\cancel{9}$

2 3

$\cancel{4}$

Et la racine sera 2①3②, car la moitié du dernier signe des nombres donnés est toujours le dernier signe de la racine. Pourtant, si le dernier signe donné est un nombre impair, l'on y ajoutera son signe prochain suivant, & sera alors de nombre pair, puis on extraira la racine comme dessus.

Semblablement en l'extraction de racine cubique, le tiers du dernier signe donné sera toujours le signe de la racine, & ainsi de toutes autres espèces de racines.

Fin de la Disme

A P P E N D I C E.

P R E F A C E

Puisque nous avons décrit ci-devant la Disme, nous viendrons maintenant à l'usage d'icelle, démontrant par 6 Articles comment tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes se peuvent facilement expédier par icelle, commençant premièrement (comme elles ont aussi été premièrement mises en oeuvre) aux computations d'Arpenterie comme s'en suit.

ARTICLE I, DES COMPVTATIONS DE L'ARPENTERIE.

L'on nommera la verge aussi *Commencement*, qui est 1⓪ la partissant en dix parties égales, desquelles chacun sera 1①, puis se partira chacune *Prime* une autre fois en dix parties égales, desquelles chacune sera 1②, & si on requiert les divisions plus petites, on divisera chaque 1② une autre fois en dix parties égales, & chacune vaudra 1 ③, procédant ainsi plus avant s'il est besoin, mais quant à l'Arpenterie, les parties en *Secondes* sont assez petites, mais pour les choses qui requièrent la mesure plus juste, comme toise de plomb, Corps, etc., l'on y peut user des *Tierces*. Quant à ce que la plupart des Arpenteurs n'usent pas de verge mais une chaîne de trois, quatre ou cinq verges, signant sur le bâton de leur croix rectangulaire, quelques cinq ou six pieds avec leurs doigts, le semblable peut se faire ici, car au lieu d'iceux cinq ou six pieds avec leurs doigts, l'on peut mettre six ou cinq *Primes* avec leurs *secondes*.

Ceci étant ainsi préparé, l'on usera en mesurant de ces parties, sans prendre égard aux pieds ou doigts que contient la verge selon la coutume du pays, & ce se déduira Ajouter, Soustraire, Multiplier ou Diviser selon cette mesure se fera selon la doctrine des précédents exemples.

Par exemple, il faut ajouter quatre triangles, ou superficie de terre, desquelles la première 345⓪ 7①2②, la deuxième 872⓪5① 3②,, la troisième 615⓪4①8 ②, la quatrième 956⓪8①6②, les mêmes ajoutez selon la manière déclarée à la première proposition de cette Disme en cette sorte :

			⓪	①	②
	3	4	5	7	2
	8	7	2	5	3
	6	1	5	4	8
	9	5	6	8	6
2	7	9	0	5	9

Leur somme sera 2790⓪ pour les verges 5①9②, les dites verges parties selon la coutume, par autant qu'il y a de Verges en un Arpent requis. Mais si l'on veut savoir combien de Pieds &

Doigts font les 5①9② (ce que l'Arpenteur ne fera qu'une fois, à la fin du compte qu'il livre aux propriétaires, combien que la plupart d'eux estiment inutile d'y faire mention de Pieds ou de Doigts) on verra sur la verge combien de pieds & doigts (qui sont marqués joignant les dixièmes parties sur un autre côté de la verge) s'accordent aux mêmes.

Au second, étant à soustraire 57⓪3 ①2② de 32⓪5①7②, l'on besognera selon la seconde proposition de cette Disme en sorte :

	⓪	①	②
5	7	3	2
3	2	5	7
2	4	7	5

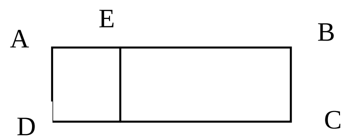
Et restent 24⓪ ou Verges 7① 5②.

Au troisième, étant à multiplier (à cause des côtés de quelque triangle ou quadrangle) 8⓪7①3②, par 7 ⓪5①4②, l'on fera selon la 3° proposition de cette Disme en cette sorte :

			⓪	①	②
			8	7	3
			7	5	4
		3	4	9	2
	4	3	6	5	
6	1	1	1		
6	5	8	2	4	2
	⓪	①	②	③	④

Et donnent produit ou superficie 65⓪8① etc.

Au quatrième, soit ABCD quelque quadrangle rectangle, duquel il faut couper 367⓪6①, & le côté AD fait 26⓪3①, la demande est combien l'on mesurera depuis A vers B pour couper (j'entends par une ligne parallèle avec AD) les dites 367⓪6①.



L'on partira 367⓪6① par 26 ⓪3① selon la quatrième proposition de cette Disme ainsi:

Donne quotient pour la

			2							
		2	**2**							
		7	**6**							
	2	**5**	**0**	**8**						
	4	**6**	**3**	**1**						
1	**0**	**4**	**7**	**3**	**9**			**⓪**	**①**	**②**
3	**6**	**7**	**6**	**0**	**0**	**(**	**1**	**3**	**9**	**7**
2	**6**	**3**	**3**	**3**	**3**					
	2	**6**	**6**	**6**						
		2	**2**							

requise longueur de A vers B, laquelle soit AE, 13⓪9①7 ②.

Et si l'on veut, on pourra approcher plus près (combien qu'il ne semble pas besoin) par la première note de la dite quatrième proportion. Les démonstrations de tous ces exemples sont faites ci devant en leurs propositions.

ARTICLE II, DES COMPTES DES MESURES DE TAPISSERIE.

L'aulne du mesureur de tapisserie, lui sera 1⓪ laquelle il partira (sur quelque côté, là où ne font par les partitions selon l'ordonnance de la ville) comme est fait ci dessus de la verge de l'Arpenteur, à savoir en 10 parties égales, desquelles chacun fera 1①, puis chaque 1①, une autre fois en dix parties égales, & chacun vaudra 1②,etc. Quant à leur usage, vu que les exemples accordent en tous avec ce qui en est dit au premier article de l'Arpenterie, elle sera par icelles assez notoire, de sorte qu'il n'est pas métier d'y faire mention.

ARTICLE III, DES COMPTES SERVANT A LA GAVIERIE & AUX MESURES DE TOUS TONNEAUX.

Une Ame (qui fait à Anvers 100 pots) sera 1⓪. La même sera divisera en profondeur & longueur en 10 parties égales (à savoir égales au respect du vin, non pas de la verge, de laquelle les parties de profondité sont inégales) & chaque partie sera 1① contenant 10 pots, puis chaque 1① en 10 parties égales, etc. Chacune sera 1② , valant 1 pot. Puis chaque 1 ② en dix parties égales, faisant chacune 1③.

Or, étant ainsi partie la verge & voulant trouver le contenu du tonneau, on multipliera & besognera comme au précédent premier article, qui étant assez manifeste, nous n'en dirons ici point davantage.

Mais vu que cette dixième partition de la profondeur n'est pas vulgaire, nous en déclarerons ceci : Soit la verge AB une Ame, qui est 1⓪ divisée (selon la coutume) en points de profondeur comme ces dix C,D,E,F,G,H,I,K,L,A faisant chacune partie 1①, lesquelles il faut diviser une autre fois en 10 de cette sorte. L'on divisera premièrement chaque 1① en deux, ainsi : l'on tirera la ligne BM, à droit angle sur AB, & égale à 1①BC, puisse trouvera (par la 13° proposition du 6° livre d'Euclide) la ligne moyenne proportionnelle entre BM & la moitié qui fait BN & coupant BO égale à BN, & si NO est alors égale à NC, de B vers A, comme BP, laquelle étant égale à NC, de B vers A, comme BP, laquelle étant égale à NC, l'opération est bonne. Semblablement la longueur DN, depuis B jusqu'à Q, & et ainsi des autres. Il reste encore de partir chaque longueur comme BO & OC, etc. en cinq ainsi : L'on trouvera entre BM & la dixième part, la ligne moyenne proportionnelle qui fait BR, coupant BS, égale à BR. Puis se notera la longueur SR de B vers A, comme BT & semblablement la longueur TR de B jusqu'à V, & ainsi des autres. Et semblablement se procédera pour diviser BS & ST, etc. en ③. Je dis que BS & ST & TV etc. sont les désirées ②, ce qui se démontre ainsi :

Parce que BN est ligne moyenne proportionnelle (par hypothèse) entre BM & sa moitié, le carré de BN (par la 17° proposition du 6° livre d'Euclide) sera égal au rectangle de BM & sa moitié, mais icelui rectangle est la moitié du carré de BM, le carré donc de BN, est égal à la moitié du carré de BM, mais BO est (par hypothèse) égale à BN, & BC à BM, le carré donc de BO, est égal à la moitié du carré de BC. Et semblablement se démontrera que le carré de BS est égal à la dixième part du carré BM, par quoi, etc. Nous avons fait la démonstration brièvement parce que nous n'écrivons pas à Apprentis, mais à Maîtres.

ARTICLE IV, DES COMPTES DE LA STEREOMETRIE EN GENERAL

Il est bien vrai que la gaujerie que nous avons déclaré ci devant est stéréométrie (c'est à dire science de mesurer les corps) mais considérant les diverses partitions de la verge de l'un & l'autre, aussi que celui-ci a telle différence de celui-là, comme genre à espèce. Ils se peuvent distinguer par bonne raison, car toute Stéréométrie n'est pas Gaujerie. Pour donc venir à la chose, le Stéréométrien usera de la mesure de sa ville, comme verge ou aulne avec ses dixièmes partitions décrites au premier & au second article, l'usage de laquelle(semblable à ce qui est dit au précédent) est telle : Posons qu'il y ait à mesurer quelque colonne quadrangulaire, rectangulaire, de laquelle la longueur 3①2②, largeur 2①4③, hauteur 2⓪3①5③.

La demande est combien il y a de matière. L'on multipliera selon la doctrine de la 4° proposition de ce traité, longueur par largeur, & leur produit une autre fois par hauteur, en cette sorte :

				①	②	
				3	2	
				2	4	
			1	2	8	
			6	4		
			7	6	8	④
			2	3	5	②
		3	8	4	0	
	2	3	0	4		
1	5	3	6			
1	8	0	4	8	0	
①	②	③	④	⑤	⑥	

Et donne le produit comme apparaît : 1①8②4④8⑤.

NOTA. Quelqu'un ignorant (car c'est à celui-là que nous parlons ici) les fondements de la stéréométrie, pourrait parler pourquoi l'on dit que la grandeur de la colonne ci-dessus n'est que de 1 ①, etc. veut qu'elle contient plus que 180 cubes, desquels la longueur de chaque côté est de 1 ①, il saura que le corps d'une verge n'est pas un corps de 10 ①comme une verge en longueur, mais de 1000 ①, en respect de quoi 1 ① fait 100 cubes chacun de 1 ① ; comme le semblable est assez notoire aux arpenteurs en superficie, car quand on dit 2 verges 3 pieds de terre, cela ne s'entend point 2 verges et 3 pieds quarrés mais de 2 verges et (comptant 12 pieds pour la verge) 36 pieds carrés. Pourtant si la demande ci-dessus eut été, de combien de cubes chacun de 1 ① fut la grandeur de la dite colonne, l'on accommoderait la solution conforme au requis ; considérant que chaque 1 ① de ceux-ci fait 100 ① de ceux-là, et chaque 1 ② de ceux-ci, 10 ① de ceux-là etc. Ou autrement si la dixième part de la verge est la plus grande mesure que le stéréomètre se propose, il la peut nommer 1 ⓪, et puis comme dessus.

ARTICLE V, DES COMPVTATIONS ASTRONOMIQVES

Avant, les anciens astronomes partageaient le cercle en 360 degrés ; ils voyaient que les computations astronomiques d'icelles, avec leurs partitions, étaient trop laborieuses, pourtant ils ont parti chaque degré en certaines parties, et les mêmes autrefois en autant, etc. afin de pouvoir par ainsi toujours opérer par nombres entiers, en choisissant la soixantième progression, parce que 60 est nombre mesurable par plusieurs mesures entières, à savoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, mais si l'on peut croire l'expérience (ce que nous disons par toute révérence de la vénérable antiquité et se veut avec l'utilité commune) certes la soixantième progression n'était pas la plus commode, au moins entre celles qui consistaient potentiellement en la nature, ainsi la dixième qui est telle : Nous sommes les 360 degrés aussi *commencement*, les dénotant ainsi 360 ⓪ et chacun degré ou 1 ⓪ se divisera en 10 parties égales, desquelles chacun sera 1 ①, puis chaque 1 ① en 10 ②, et ainsi des autres, comme le semblable est fait par plusieurs fois ci devant.

Or étant entendue cette partition, nous pourrions décrire selon ce qui a été promis, leur facile manière d'Ajouter, Soustraire, Multiplier, et Diviser, mais vu qu'elles n'ont aucune différence des quatre proportions précédentes, tel récit ne ferait que perdre le temps, pourtant nous les laisserons servir pour exemple de cet article ; Y ajoutant encore cecy ; que nous userons de cette manière de partition, en toutes les tables et comptes, se rencontrant en astronomie, que nous espérons de divulguer, en notre vulgaire langue Germanique qui est la plus riche, la plus ornée, et la plus parfaite langue de toutes les langues, de la très exquise singularité, de laquelle nous attendons de brief autre démonstration plus abondante, que Pierre et Ichan en ont fait en la BEWYSKONT ou DIALECTIQVE naguère divulguée.

ARTICLE VI, DES COMPTES DES MAÎTRES DE MONNOIES, Marchans & de tous états en général.

Afin de dire en bref et en général, la somme et le contenu de cet article, faut savoir qu'on partira toutes mesures, comme Longue, Humide, Seiche, Argent, etc. par la précédente dixième progression et chaque fameuse espèce d'icelles se nommera
Commencement : comme Marc, *commencement* des pois, par lesquels se pèsent l'Or et l'Argent, Livre, *Commencement* des autres pois communs ; Livre de gros en Flandres, Livre Esterlain en Angleterre, Ducat en Espagne, etc.
Commencement de monnaie, le plus haut signe du Marc sera ④ car 1④ pèsera environ la moitié d'un Es d'Anvers, la ③ lui suffira pour le plus haut signe de la Livre de gros, vu que telle 1③ fait moins que le quart d'un Es.
Les subdivisions des pois pour peser toutes choses, seront (au lieu du demi litre, quart, demiquart, once, demionce, esterlin, grain, es, etc.) de chaque signe 5, 3, 2, 1, c'est à dire qu'après la livre ou 1⓪ suivra un pois de 5① (faisant ½ lb) puis de 3①, puis de 2①, puis de 1 ①, & semblables subdivisions aura aussi la 1① & autres suivants.
Nous estimons aussi utile que chaque subdivision voire de quelle matière est son sujet, soit *nommée Prime, Seconde, Tierce*, etc. & cela à cause qu'il nous est notoire que *Seconde* multipliée par *Tierce* donne produit *Quinte* (parce que 2 & 3 font 5 comme il est dit ci-dessus), idem que *Tierce*, divisée par *Seconde* donne quotient *Prime*, etc., ce qui ne pourrait se faire si proprement par autres noms ; mais quand on les veut nommer par distinction des matières (comme l'on dit denier, aulne, demie-livre, demie pinte, etc.) nous les pouvons nommer Prime de Marc, Seconde de Marc, Seconde de Livre, Seconde d'Aulne, etc.?
Mais afin d'en donner l'exemple, posons que un Marc d'Or vaut 36 lb 5①3②, la demande est combien montreront 8 marcs 3①5②4③ : l'on multipliera 3653 par 8354, donne produit par la 3° proposition qui est aussi la solution requise, 305 lb 1①7②1③. Quant aux 6④2⑤, elles ne sont ici de nulle estime.
Posons une autre fois que 2 aulnes 3① coûtent 3 lb 2①5②, la demande est combien coûteront 7 aulnes 5① 3② : on multipliera selon la coutume le dernier terme donné par le second & le produit se divisera par le premier, c'est à dire 753 par 325 font 244725, qui divisé par 23 donne quotient & solution 10 lb 6① 4②.
Nous pourrons donner autres exemples en toutes les vulgaires règles d'arithmétique, se rencontrant souvent au trafic des hommes. Comme la règle de Compagnie, d'intérêt, de Change, etc. démontrant comment elles se peuvent toutes expédier par

nombres entiers, aussi cette facile opération par les jetons, mais vu qu'il est assez notoire par les précédents, nous n'en ferons point de mention.

Nous saurions aussi démontrer plus amplement par comparaison de fâcheux exemples en rompuz, la grande différence de facilité qu'il y a de ceux-ci à ceux là, mais nous le passerons outre à cause de brièveté.

Au dernier, il nous faut encore dire de quelque différence qu'il y a de ce 6° article, aux 5 articles précédents, c'est que chacune personne peut exercer pour soi-même la dixième partition desdits précédents 5 articles, sans qu'il sera métier d'en être donné par le magistrat quelque ordre général, mais cela pas ainsi en ce dernier, car ces exemples font vulgaires computations, qui se rencontrent à chaque moment, auquel il serait convenable, que la solution ainsi trouvée fut d'un chacun acceptée pour bonne et légitime. Pourtant considérant la très grande utilité, ce serait chose louable, si quelqu'un, comme ceux qui en attendent la plus grande commodité, facilitoyoient de la faire mettre en effet, à savoir que joignant les vulgaires partitions qu'il y a maintenant des mesures, Pois, et Argent (demeurant chaque capitale mesure, Pois et Argent en tous lieux immuable) l'on ordonnait encore légitimement par les Supérieurs, la susdite dixième partition, afin que chacun qui voudroit la pourroit user.

Il avanceroit aussi la chose, si les valeurs d'argent, principalement de ce qui forge de nouveau, fussent valuées sur quelques *primes, secondes, tierces,* etc.

Mais tout si tout ceci ne fut pas mis en oeuvre, si tout comme nous le pourrions souhaiter, il nous contentera premièrement, qu'il fera du bien à nos successeurs, car il est certain que si les hommes futurs sont de telle nature comme ont été les précédents, qu'ils ne seront pas toujours négligents en leur si grand avantage.

Au second, ce n'est pas le plus abject savoir à un chacun en particulier, qu'il lui est notoire, comment les hommes se peuvent délivrer eux-mêmes à toute heures qu'ils voudroient, de tant et si grands labeurs.

Au dernier combien que l'effet de ce 6° article n'apparaîtra point, peut être en quelques temps toutefois un chacun pourra exercer les 5 précédents comme il est notoire, qu'aucun des mêmes sont de sa mise en oeuvre.

Fin de l'appendice.

Étude de la disme de Stevin de Bruges

Joël Briand - Jacqueline Euriat - Marie Louise Huet - Raymond Lecoq Marie-Lise Peltier.

1- INTRODUCTION

Une question qui se pose en formation est celle de la construction de situations propices à l'acquisition où/et à la ré-exploration personnelle de savoirs.
La construction de situations d'apprentissage est bien sûr une entrée que nous pratiquons quand cela est possible, mais il est d'autres approches qui méritent notre attention. En particulier, l'approche historique.
L'utilisation d'un texte historique comme autre entrée en formation en mathématiques est pratiquée depuis pas mal d'années. Il s'agit le plus souvent de relire les auteurs anciens à l'aide du savoir actuel et de son organisation.
Parce que l'étude de la genèse historique des savoirs peut éclairer la construction des savoirs chez un individu, cette approche est à la fois attrayante et utile. Toutefois, malgrè la tentation qu'il y aurait à calquer ces deux genèses, les différences demeurent.
Le fait que la construction des nombres décimaux soit historiquement, tantôt une réponse à des questions plutôt mathématiques, tantôt à des questions plutôt d'ordre socio-économiques a retenu notre attention.
Ainsi, dans cet article, après avoir repris brièvement quelques repères historiques concernant les décimaux, nous étudions le document "LA DISME" de Stevin de Bruges, paru en 1585 en édition française.
Cette étude se présente sous forme d'un questionnaire avec des indications de réponses à la suite de chaque question.
L'annexe 1 revient sur le problème de l'extraction de racine carrée, l'annexe 2 propose un glossaire de quelques termes utilisés dans la DISME.

2- REPERES HISTORIQUES CONCERNANT LES DECIMAUX

QUELQUES EXTRAITS DE TEXTES RELATIFS À LA "DÉCOUVERTE" DE STEVIN.

2.1. Histoire universelle des chiffres. *Georges Ifrah* (bouquins Lafont 1994)

"1582- le mathématicien néerlandais Simon Stévin publie son *De Thiende* : c'est le premier ouvrage européen connu consacré à *la théorie générale des fractions décimales*. [ces fractions étaient certes connues bien avant lui : par les arabes, depuis le temps d'Al Uqlidisi (952) ; et en occident par Emmanuel Bonfils de Tarascon (1350), Regiomontanus (1463), Christophe Rudolff (1525), Elie Mizrachi (1535) et François Viète (1579). Mais à l'exception peut-être du mathématicien musulman Ghiyat ad din Ghamshid al Kashi (première moitié du XVéme), dont les travaux auront été ignorés en occident, personne en dehors de Stevin, n'aura eu l'idée jusque là de substituer ces fractions aux fractions ordinaires et n'aura élaboré de système de notation permettant d'unifier le domaine d'application des règles arithmétiques par un rapprochement avec celles qui s'appliquent aux nombres entiers]".(page 463 tome II)

2.2. Mathématiques et mathématiciens. ***P. Dedron, J. Itard*** **"Les fractions"** (Magnard. 1972)

"Les Hindous notaient les fractions comme nous, mais sans la barre horizontale. Les arabes eurent d'abord la même notation qu'eux, puis introduisirent la barre. Le calcul des fractions ordinaires de ces deux peuples étaient dans l'ensemble analogue au nôtre.[...] Cependant ni les Hindous, ni les Arabes, ni les Occidentaux jusqu'à la fin du XVI ème siècle ne se sont aperçus de l'intérêt qu'il y aurait à développer le système décimal de position dans les deux sens, comme les Babyloniens avaient développé leur système sexagésimal. Ce retard provient essentiellement de la perfection même de la numération en base soixante. Adoptée à partir du siècle avant notre ère par les astronomes grecs, conservée par les astronomes arabes (toutes les tables avaient été calculées dans cette base) elle fut utilisée dans les calculs astronomiques jusqu'au XVIIème siècle et est encore utilisée pour les angles et les temps.[...]
Viète, dans son *Universalium inspectionum ad Canonem Mathématicum* de 1579, supplément du *Canon Mathématique*, déclare : "En Mathématiques les soixantièmes et les soixantaines doivent être d'un usage rare ou nul. Au contraire les Millièmes et les Mille, les centièmes et les centaines, les dizièmes et les dizaines, et les progressions de même genre, ascendantes ou descendantes, doivent être d'un usage fréquent ou constant".
La virgule dans la notation de Viète sépare les tranches de trois chiffres du nombre. La partie décimale est écrite en caractères un peu plus petits, et soulignés, le dénominateur 1000 restant sous-entendu. Un peu plus loin dans l'ouvrage, il sépare simplement la partie décimale de la partie entière par un trait vertical.
Le dernier pas est franchi par Stevin, en 1582, dans *De Thiende*, ouvrage traduit en français par l'auteur en 1785 sous le titre *La Disme*."(pages 289, 290)

2.3. La rigueur et le calcul. Documents historiques et épistémologiques. Groupe inter IREM (Cédic, 1982)

"En général, les historiens des sciences attribuent à AL-Kasi l'invention des décimaux. Dans son traité de mathématiques "*Miftah al-hisab*" (la clé de l'arithmétique 1427) qui rassemble l'ensemble des mathématiques élémentaires de son époque, il introduit en particulier les décimaux. On en trouve cependant des traces, en particulier de fractions décimales, chez Al-Uqlidisi.[...]

En Occident, quelques mathématiciens introduisent également les décimaux dans leurs calculs, souvent dans un but de simplification. Citons par exemple Emmanuel Bonfils (1340-1377), et deux siècles plus tard, François Viète dans son *Universalium inspectionum ad Canonem Mathématicum* de 1579. (page 176)

Le traité d'arithmétique de Stevin dans lequel figure *la Disme* témoigne de connaissances des opérations sur les fractions ordinaires analogues aux nôtres (addition de fractions de mêmes dénominateur, multiplication de fractions, réduction au même dénominateur, addition de fractions de dénominateurs quelconques).

2.4. Différentes conceptions historiques des décimaux (G. Brousseau). IREM Bordeaux 1990.

a) Le décimal de l'antiquité sert exclusivement au mesurage et à la représentation des quantités. Par exemple, ceux qui expriment les mesures décimales en Chine treize siècles avant Jésus Christ. Ils fonctionnent à peu près comme les binaires Hiéroglyphiques des Egyptiens de -2500 et comme les sexagésimaux des Babyloniens de -1900, en ce sens qu'ils résolvent de façon similaire des problèmes similaires ; il s'agit de l'emploi direct du système de numération en usage pour les dénombrements comme moyen de décrire des fractionnements : certaines fractions peuvent être désignées, d'autres simplement approchées. Ils se distinguent bien, par toutes sortes de caractères formels, techniques et même sociologiques, des autres fractions avec lesquelles les initiés tentent de faire des calculs exacts, puis de définir la notion de rapport et avec lesquelles on franchit divers obstacles...(passage à la forme 1/m, m naturel quelconque ; puis à n/m, n et m quelconques, etc.) Bien entendu, peu de ces propriétés sont reconnues même si elles sont utilisées. Je dirai - en empruntant ce terme à Y.CHEVALLARD (1981) - que le décimal est alors une notion protomathématique : cette structure est mobilisée implicitement dans des usages et des pratiques, ses propriétés sont utilisées pour résoudre certains problèmes, mais elle n'est pas reconnue, ni comme objet d'étude, ni même comme outil.

b) Al Huwarizmi (780-850), unifie le calcul des naturels avec celui des rapports géométriques, et introduit l'emploi de la numération de position décimale, et rend possible l'émergence du décimal - outil d'appropriation, non plus des grandeurs, mais des entités mathématiques : rationnels d'abord, puis radicaux, etc. Ces entités sont susceptibles d'être des nombres dénombrants, des nombres mesurants, des rapports et enfin, avec STEVIN (1585) d'authentiques applications.
Le décimal devient alors une notion paramathématique : il n'est tout d'abord qu'un outil consciemment utilisé, reconnu, désigné, mais que son inventeur Al Uqlidisi, vers 952, ne traite pas comme objet d'étude. (Abd el Jaoud 1978). Le décimal est montré dans son fonctionnement (préconstruit) et apparaît comme une méthode d'exposition des fractions ou une curiosité. (L'écriture des fractions décimales dans l'oeuvre d'AL Aqlidisi est identique à la nôtre). Pourtant le concept n'est pas repris par ses contemporains.

Au contraire, son deuxième inventeur, Al Kashi (1427) le reconnaît comme une découverte mathématique. Le décimal n'est pas encore sous le contrôle d'une théorie qui en fixe la définition. Les propriétés et la position épistémologique. Il est la traduction du système sexagésimal des astronomes, en un système plus commode pour les calculs. On peut supposer que pendant 5 siècles, les décimaux sont potentiellement présents dans la culture et que c'est leur statut qui est en évolution (par exemple, Bonfils de Tarascon vers 1530 en produit une ébauche.)

c) C'est avec Simon STEVIN (1585) que le décimal accède au statut de notion mathématique. Stevin introduit systématiquement les nombres géométriques et multinomiés -les fonctions polynômes- pour unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes d'algèbre de son époque. Les décimaux apparaissent comme une production achevée de cette théorie ; ils deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, les constitutions de tables. Leur rôle conceptuel reste plus caché. Pour STEVIN, « les quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes » sont des nombres réels parce que toutes sont approchables par des nombres décimaux ; il n'a pas écrit cette phrase, mais se passe comme s'il l'avait pensée.
Les décimaux servent de modèle heuristique dans l'analyse naissant et Newton les utilise pour expliquer l'approche des fonctions et de leurs fluxions à l'aide des fonctions polynômes et des séries, de leurs dérivées et de leurs primitives (Ovaert 1976). Cette place n'est finalement fixée et attestée que lorsque les réels sont enfin devenus à leur tour des objets mathématiques et que les procédés d'approche des fonctions qu'utilisait STEVIN ont reçu à leur tour leur identité mathématique.

2.5. DEUX REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES HISTORIQUES

DIJKSTERHUIS E.J. *« SIMON STEVIN science in the Netherlands around 1600* ».. Ed. Martinus NIJHOFF / The HAGUE. 1970.
VAN BEMMEL : *« PATRIA BELGICA-encyclopédie nationale.* ». Ed. Bruylant-Christophe. 1875.

3. QUESTIONNAIRE SUR LA DISME

3.1. Questions relatives à l'introduction

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Dans le texte introductif intitulé « AVX ASTROLOGUES, arpenteurs, mesurevrs de tapisserie, gavievrs, stéréométriens en général, Maîtres de monnoye, & à tous marchans » , pointez les étapes de l'argumentation de STEVIN et la nature de chacun des arguments.	Après une déclaration de modestie (vraie ou fausse) l'auteur argumente en se fondant sur les pratiques sociales : "*Mais s'il est arpenteur, il saura le grand bénéfice que le monde reçoit de la science, par laquelle s'évitent plusieurs difficultés et noises, qui s'élèveraient journellement, à cause de l'inconnue capacité des terres*" Argument de simplicité : "*Elle enseigne (afin de dire beaucoup en un mot) d'expédier facilement sans nombres rompus, tous comptes qui se rencontrent aux affaires des Humains. De sorte que les quatre principes d'Arithmétique que l'on appelle Ajouter, Soustraire, Multiplier et Diviser par nombres entiers pourront satisfaire à tel effet. Causant semblable facilité à ceux qui usent des jetons. Or ainsi par tel moyen sera gagné le précieux temps...*" Il justifie l'utilité en se servant de l'usage qu'en font déjà les arpenteurs : "*Quand à ce que quelqu'un ne pourrait dire que plusieurs inventions semblent bonnes au premier regard, mais quand on s'en veut servir, l'on ne peut rien effectuer, et comme il advient souvent aux chercheurs de forts mouvements qui semblent bons en petites preuves mais aux grandes, ou à l'effet, ils ne valent pas un fétu. Nous lui répondons qu'il n'y a ici tel doute, parce que l'expérience s'en fait journellement en la chose même. A savoir par divers experts Arpenteurs Hollandais auxquels nous l'avons déclaré, lesquels (laissant ce qu'ils avaient inventé chacun à sa manière, pour amoindrir le travail de leur computation) l'usent à grand contentement..*

On peut introduire les décimaux pour plusieurs raisons. Quelle est la raison invoquée ici ?	Ce sont les décimaux comme système de notation rendant les opérations aisées entre rationnels décimaux. Ce ne sont pas les décimaux pour les approximations, du moins ici, mais on y reviendra plus en avant dans le document.
Recensez les savoirs de l'époque qui sont évoqués dans cette introduction. (Séparez pratiques sociales et savoirs des mathématiciens).	Il s'agit des opérations dans les fractions (les problèmes du livre d'Arithmétique). STEVIN y fait sans cesse allusion. Mais pour son argumentation, STEVIN se réfère aux pratiques de calcul plus familières dans les fractions décimales.
STEVIN dévoile-t-il son "invention" dans l'introduction ? Quelles sont ses préoccupations ?	Non, il montre son intérêt pour les affaires des hommes. Il expose les difficultés actuelles. Il a pour souci de montrer que son invention s'adresse à tous et est crédible : elle s'adresse autant aux manieurs de jetons qu'aux comptables effectuant les calculs les plus élaborés, et des corporations telles les arpenteurs l'utilisent déjà "à leur grand contentement".
A quoi correspond le paragraphe nommé *"argument"* en termes actuels ?	Il s'agit du plan qui s'adresse aux mathématiciens. L'usage à destination des corporations est relégué en Appendice.

3.2.Questions relatives à la premiere partie

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Quel est l'objet de la définition 1 et de l'explication qui la suit ? Donnez en termes actuels le principe sur lequel s'appuie cette définition. Comment s'y prend-t-il pour préparer le chiffre des dixième ?	C'est de présenter globalement la Disme comme un traité d'arithmétique qui va s'appuyer sur la numération décimale. La définition s'appuie sur la numération en base dix. Il fait relire un nombre selon l'ordre gauche droite et non droite gauche afin de préparer aux définitions 2, 3 et 4. (division et non groupement échange).
Comment s'y prend-t-il pour donner du sens au mot "dixième" ?	Il montre : il fait faire une relecture et remplace la lecture droite gauche (dizaine) par une lecture gauche droite (dixième).

La définition 3 montre que STEVIN se fonde sur un ensemble de savoirs communs aux "professionnels des calculs" de son époque. Quels sont ces savoirs ?	Il s'appuie sur les fractions. Dans celles-ci, il fonde véritablement les fractions décimales, organise leur décomposition pour décrire son partage en dix, même si celles-ci existaient déjà.
Faites une hypothèse sur la manière dont on écrivait, à cette époque, les nombres non entiers ?	On écrivait les nombres non entiers comme 8 937/1000
Comment s'articule son invention à partir de ces savoirs ?	Il propose l'écriture en 8 9/10 3/100 7/1000, justifie sa présentation par une recomposition et non une décomposition. Le numérateur ne peut exéder 9.
Il propose une écriture. Quelles sont les règles précises qu'il impose à ce moment de l'exposé ?	Remarque : pour justifier une convention d'écriture, il faut partir des habitudes sociales. (Et non pas l'amener). Il a besoin de l'addition des fractions pour justifier sa notation. Remarque : l'écriture des nombres ne se sert pas de l'addition.
Réécrivez : 73 2745/10000 8 907/1000 Comparez à notre notation actuelle.	Les deux exercices visent à montrer que la question du Zéro intercalaire n'est pas réglée.
A partir des définitions 1 et 4, précisez en quoi consiste finalement l'"Invention" ?	Cette invention est une convention d'écriture. Elle conduit à la création d'un nouvel ensemble des nombres nommé *"les nombres de Disme"*, strictement inclus dans l'ensemble des rationnels.

3.3. Questions relatives à la seconde partie

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Sur quelles pratiques de l'époque s'appuie STEVIN pour justifier sa façon de faire ?	STEVIN fait référence à une pratique de l'addition des rompus

Quel est le rôle du nota de l'addition ?	Le résultat posé dans l'addition 1 conduit STEVIN à présenter le cas des nombres pour lesquels certains groupements sont absents et à préciser la notation.
L'exposé de la multi-plication se fait en deux temps : le pre-mier et le nota. Etudiez leur rôle respectif et explicitez le choix pédagogique. A quel savoir actuel le nota vous fait-il pen-ser ? Comment la règle de découverte du nombre de chiffres après la virgule est elle abor-dée ?	On fait le produit de deux nombres de même format, ce qui permet d'utiliser la démonstration classique avec retour aux rompus et au produit de rompus. Dans le nota, il s'agit du produit de deux nombres qui n'ont pas le même format. Il explicite un nouveau procé-dé et adapte une nouvelle présentation. Dans le premier exemple, les unités de même rang sont en colonne. Dans le nota ce n'est plus le cas. Le produit des puissances négatives de dix permet d'éclairer le nota. ll effectue une démonstration à partir d'un nombre à 2 chiffres multiplié par un autre nombre à 2 chiffres après la virgule...
La division : Retrouvez, à partir de la présentation de 3,44352 divisé par 0,96 la façon dont une division est effectuée à l'époque.	
Expliquez pourquoi STEVIN propose de "mettre quelques 0 après le 7" dans le NOTA I	Il s'arrange toujour pour avoir un nombre plus grand afin que la soustraction des rangs donne toujours un nombre positif. Le contrôle ultérieur se fait.

A quel moment STEVIN aborde l'écriture décimale illimitée d'un rationnel non décimal ?	Dans l'extrait suivant : "le quotient ne se pourra expliquer par nombres entiers, comme 4①, divisées par 3②, en cette sorte :Là où il apparaît qu'il y en sortiront infiniment des trois, restant toujours $\frac{1}{3}$, STEVIN met en évidence les limites de la DISME.
Quelle propriété de D aborde-t-il ?	Il sait que l'approche de tels nombres est réalisable quelque soit l'exigence de proximité : "...approcher si près, comme la chose le requiert, omettant le résidu". Il signifie par là même la densité de **D** dans **Q**
Quelle convention d'écriture d'un rationnel écrit-il ?	Il propose une écriture "multinomiée" : " Il est bien vrai que 13⓪3①3 $\frac{1}{3}$ ② ou 13⓪3①3②3 $\frac{1}{3}$ ③,etc. serait le parfait requis"...
Comment justifie-t-il l'insuffisance des écritures décimales ?	Il se fonde sur les exigences professionnelles de l'époque : "..., mais notre intention est d'opérer en cette Disme, par nombres tous entiers, car nous voyons à ce qui s'observe aux négoces des hommes, là où l'on ne fait point compte de la millième partie d'une maille, d'un grain, etc. comme le semblable est souvent usé par les principaux Géométriens & Arithméticiens, en comptes de grandes conséquences. Comme Ptolémée & Jehan de Montroyal, n'ont pas décrit leurs tables des Arcs et Cordes, ou des Sinus, par l'extrème perfection (combien il était possible de le faire par nombres multinomiés) à cause que cette imperfection (considérant la fin d'icelles tables) est plus utiles que telle perfection."

NOTA 2 :A PROPOS DE L'EXTRACTION DES RACINES CARRÉES L'exemple choisi est l'extraction de la racine carrée de 0,0529. De quelle manière Stevin détermine le rang du dernier chiffre de la racine carrée ?	Stevin utilise la propriété : la racine carrée de 10^{-2n} est 10^{-n} Si le rang du dernier chiffre décimal du nombre est pair, le rang du dernier chiffre de la racine est la moitié de ce rang Si le rang du dernier chiffre décimal du nombre est impair, on se ramène au cas précédent en considérant le rang suivant. (Voir etude de l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un entier dans la suite de ce document.)
Quel algorithme est ensuite proposé ?	L'algorithme d'extraction de la racine carrée pour les nombres entiers .

3.4. Questions relatives a l'appendice

ARTICLE I : DES COMPUTATIONS DE L'ARPENTERIE :

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
1. Citez une phrase du premier paragraphe qui semble montrer que le mot *verge* désigne ici une unité de longueur.	*"... la plupart des arpenteurs n'usent pas de verge ains d'une chaîne de trois, quatre ou cinq verges"*
2. Quels sont les instruments de mesure de longueur dont parle ici Stevin ?	*La chaîne de trois, quatre ou cinq verges, le bâton de la croix rectangulaire qui porte des pieds et des doigts, et la verge (sans doute règle d'une longueur d'une verge) qui porte des graduations en pieds et doigts (sous-multiples de la verge).*
3. Quelles modifications Stevin conseille-t-il aux arpenteurs concernant leurs instruments ? Dans quels buts ?	*Graduer le bâton en Primes et Secondes au lieu de pieds et de doigts pour mesurer directement en verges, primes et secondes, et graduer la verge (règle) en pieds et doigts sur un autre côté, mais bien en face, pour montrer au client ce que représentent des primes et des secondes en pieds et doigts.*
4. Pourquoi diviser la verge en Primes et Secondes, plutôt qu'en pieds et doigts comme le voulait la coutume ?	*Pour utiliser au maximum la numération décimale prolongée sur la gauche que Stevin vient d'exposer : en effet on ne sera pas obligé de faire des opérations sur des nombres complexes, ce qui était la règle jusque là, ou de calculer sur des fractions*

5. Dans le premier exemple numérique, Stevin dit ajouter des superficies ; il trouve 2790, 59 verges ; le mot *verge* désigne donc ici une unité de superficie. Comment alors comprenez-vous la phrase : "Mais si l'on veut savoir combien de pieds et de doigts font les 5 (1) 9 (2) (ce que l'arpenteur ne fera qu'une fois, à la fin du compte qu'il livre aux propriétaires, combien que la plupart d'eux estiment inutile d'y faire mention de pieds ou doigts) on verra sur la verge combien de pieds et doigts (qui sont marqués joignant les dixièmes parties sur un autre côté de la verge) s'accordent aux mêmes." ? Comment l'arpenteur s'y prendra-t-il pour faire voir les 5 dixièmes 9 centièmes de verge superficielle ?	*On peut penser qu'une verge superficielle est l'aire d'un carré de une verge linéaire sur une verge linéaire. Dans ce cas le dixième de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur un dixième de verge et cinq dixièmes de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur cinq dixièmes de verge. On peut montrer la largeur de ce rectangle aux propriétaires sur la verge (règle), et on peut lire en face cette largeur en pieds.* *De même 9 centièmes de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur 9 centièmes de verge. Cette dimension pourra donc être montrée sur la verge, et en face l'équivalent en doigts.*
6. Traduisez en langage moderne le problème donné au quatrième exemple. Pourquoi dit-il : "bien qu'il ne me semble pas besoin" ?	*On a une parcelle rectangulaire ABCD, dont le côté AD mesure 26,1 verges. On veut enlever de cette parcelle un petit rectangle de côté AD et d'aire 367,6 verges. On demande la longueur de la deuxième dimension du petit rectangle.* *La verge linéaire servant à mesurer des terrains, elle doit être de l'ordre du mètre. Aller au-delà des centièmes de verge linéaire n'a donc pas de sens sur le terrain.*

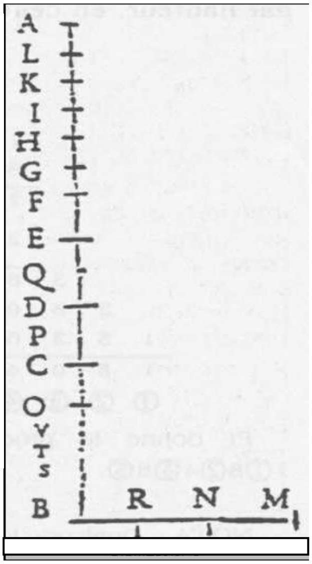
<u>ARTICLE III,</u> DES COMPTES SERVANT A LA GAVERIE & AUX MESURES DE TOUS TONNEAUX.

La figure présentée dans le document original est complexe à analyser. Ce qui suit n'est donc pas rédigé sous forme d'un questionnaire. Voici quelques pistes :

Rappel; : L'unité est une âme, c'est à dire 100 pots.

La première subdivision en 10 donne une graduation irrégulière « égale au respect du vin ». Elle se fait « selon la coutume » et a sans doute un caractère expérimental. Cette irrégularité est livrée à la forme du tonneau.

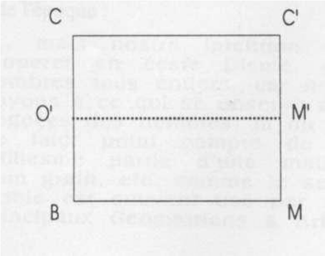
Stevin propose d'obtenir les subdivisions suivantes par un procédé purement géométrique en deux étapes à chaque fois.



- D'abord partage en 2 de chaque subdivision.
- Ensuite, partage en 5 de chacune des deux parties obtenues.

Le tonneau n'étant pas un cylindre, Stevin fonde sa méthode sur la moyenne proportionnelle. (Voir plus bas).

Partage en 2 de [OC].
Si le tonneau était un cylindre, la graduation correspondant au partage en deux se trouverait au milieu de [BC].



Le tonneau n'est pas un cylindre.
On admet que [BO] correspond au côté d'un carré ayant même aire que le rectangle BO'M'M, ce que Stevin énonce en disant :

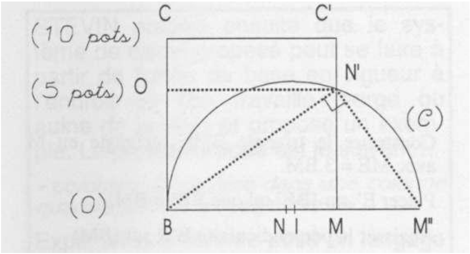
« BO égale à BN, est la ligne moyenne proportionnelle entre BM et sa moitié ».

$\frac{BM}{BN} = \frac{BN}{\frac{BM}{2}}$ d'où $BN^2 = \frac{BM^2}{2}$ et $BN = BM\frac{\sqrt{2}}{2}$

MM'' = $\frac{MB}{2}$; I milieu de BM''. C demi-cercle de diamètre BM''» coupent [MC'] en N'. D'après les propriétés du triangle rectangle : MN'^{2} = MB x MM''

= MB x $\frac{MB}{2} = \frac{MB'}{2}$

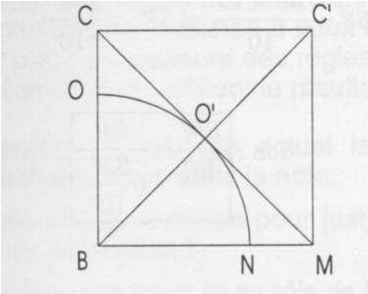
soit MN' = $\frac{BM\sqrt{2}}{2}$



Autre méthode (par la diagonale du carré BMC'C).

BC = $BM\sqrt{2}$

BO' = $\frac{BM\sqrt{2}}{2}$ = BN = BO



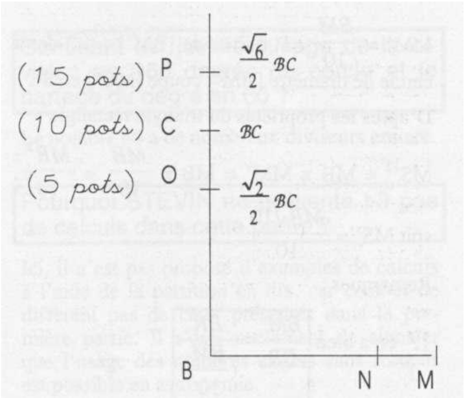
Remarque : calcul de NO

BNO triangle rectangle isocèle de sommet B donc NO = $BN\sqrt{2}$

= $(\frac{BM\sqrt{2}}{2})\sqrt{2}$ = BM

Stevin conclut : « ... et **si NO suit alors égale à BC, l'opération est bonne**. »

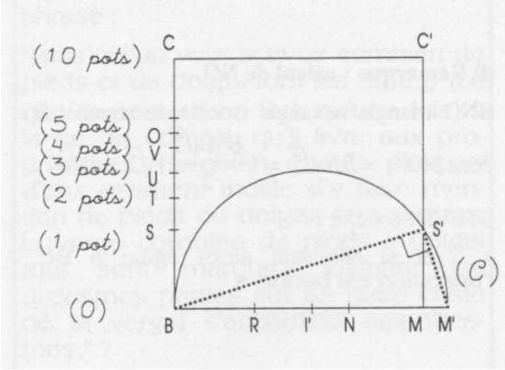
Début de la graduation :



BN donne BO correspondant à 5 pots.
NO donne BC correspondant à 10 pots.
NC donne BP correpondant à 15 pots.
BD est fourni par l'expérience (20 pots).
ND donne BQ correspondant à 25 pots,
etc.

Partage en 5 de [BO] et [OC].

a) Méthode classique de la recherche de la moyenne proportionnelle :



MM'' = $\frac{BM}{10}$: I' milieu de [BM'']. C demi cercle de diamètre [BM''] coupent [MC'] en S'. D'après les propriétés du triangle rectangle :

MS'2 = MB x MM'' = MB x $\frac{MB}{10}$ = $\frac{MB^2}{10}$, soit MS' = $\frac{MB\sqrt{10}}{10}$.

Remarque : 1°) on a bien $\boxed{\dfrac{BM}{BR} = \dfrac{BR}{\left(\dfrac{BM}{10}\right)}}$

2°) BT = RS = $\sqrt{BR^2 + BS^2} = \dfrac{\sqrt{20}}{10}$BM

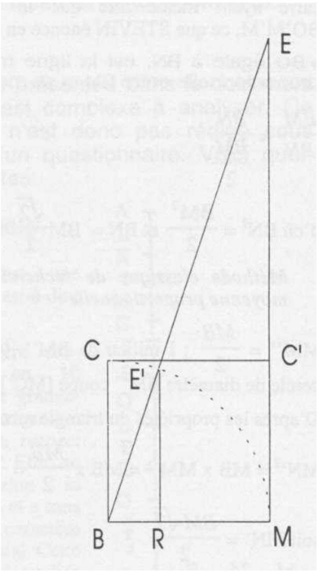
BU = RT = $\sqrt{BR^2 + BT^2} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$BM

BV = RU = $\sqrt{BR^2 + BU^2} = \dfrac{\sqrt{40}}{10}$BM

BO = RV = $\sqrt{BR^2 + BV^2} = \dfrac{\sqrt{50}}{10}$BM = $5\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ BM = $\dfrac{BM\sqrt{2}}{2}$

etc.

b) Autre méthode utilisant le théorème de Thalès et le théorème de Phytagore :



Construire le triangle BME rectangle en M avec ME = 3 BM. Placer E’ sur [BE] tel que BE’ = BM. Abaisser laperpendiculaire E’R sur (BM)

BE = $\sqrt{BM^2 + 9BM^2}$ = BM$\sqrt{10}$

$\dfrac{BE'}{BE} = \dfrac{BR}{BM}$ soit $\dfrac{BM}{BM\sqrt{10}} = \dfrac{BR}{BM}$

soit :

$$\boxed{\frac{BM}{BR} = \frac{BR}{(\frac{BM}{10})}}$$

<u>ARTICLE IV,</u> DES COMPTES DE LA STÉRÉOMÉTRIE EN GÉNÉRAL :

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
L'article IV, en relation avec l'article III peut permettre d'aborder les liens entre le général et les cas particuliers :	
1. Pouvait-on se passer de l'article III et trouver les renseignements de résolutions des problèmes posés dans cet article à l'aide des conclusions du cas général de l'article IV ? *(on peut penser à l'analogie avec l'étude de la proportionnalité et étude des échelles et pourcentages à l'école élémentaire).*	Stevin situe les différences et liens entre cet article et le précédent, en précisant que la stéréométrie est plus générale que la gaujerie et qu'elle doit être étudiée séparément. *« gaujerie est stéréométrie »,... « toute stereometrie n'est pas gaujerie »*
2. Stevin précise ensuite que le système de calcul proposé peut se faire à partir de l'unité de base en vigueur à l'endroit où l'on travaille (verge ou aulne de la ville) et propose un exemple : problème posé : *« combien de matière dans une colonne quadrianguliêre rectangulière ? »* Exprimer le problème posé en langage actuel.	Calculer le volume d'un pavé de dimensions 0,32 x 0,24 x 2,35

3. L'article se termine par une explication supplémentaire destinée à ceux qui ne sont pas connaisseurs des règles de la stéréométrie et justifiant le résultat. Présenter en langage actuel la convention exprimée dans la note.	La verge en volume diffère de la verge en longueur : 1 verge correspond à 1000 cubes de côté 0,1 ; en conséquence de quoi 0,1 verge en volume correspond à 100 cubes de côté 0,1.
Quelle aide est utilisée pour justifier la lecture du résultat ? *(on peut s'intéresser ici au rôle de la référence à des situations connues pour éclairer une nouvelle connaissance)*	Pour développer ce fait, l'analogie est faite avec ce qui est connu pour les arpenteurs et le calcul de la superficie.

ARTICLE V : DES COMPUTATIONS ASTRONOMIQUES

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Qu'est-ce qu'un "nombre mesurable par mesures entières" selon STEVIN ?	C'est l'ensemble des diviseurs de ce nombre.
Comment est justifié l'usage de la division en 360 degrés du cercle et le partage du degré en 60 ?	Le nombre 60 a de nombreux diviseurs entiers.
Pourquoi Stevin ne présente t-il pas de calculs dans cette partie ?	Ici, il n'est pas proposé d'exemples de calculs à l'aide de la partition en dix, car ceux-ci ne diffèrent pas de ceux présentés dans la première partie. Il s'agit seulement de signaler que l'usage des nombres entiers sans rompus est possible en astronomie.
Quelles analogies et quelles différences faites vous entre la proposition de STEVIN et celle de la convention à la fin du XVIII° siècle ?	STEVIN conserve les 360° alors que la convention va instaurer le grade et les 400 grades du cercle. (Sans succès à long terme). Sur l'appendice on ne parle que des nombres "degrés décimaux" (à relier avec l'heure décimale).

ARTICLE VI, DES COMPTES DES MAISTRES DES MONNOIES, MARCHANS ET DE TOUS EN GÉNÉRAL :

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
1. Préciser les situations où la règle présentée est applicable et comment il est prévu de prendre en compte les différentes unités de mesure en vigueur.	Tout d'abord, il est précisé que le contenu de cet article concerne n'importe quelle unité monétaire (l'unité de base utilisée sera celle en vigueur dans la ville où l'on se trouve) et que tout calcul se fera en utilisant la partition en 10 des unités de mesure utilisées par les marchands (unités de longueur, de capacités pour les liquides ou de capacités pour les matières sèches, unités de poids). On choisit l'unité de commencement, en fonction de la valeur monétaire utilisée ; puis, on relie les différentes unités de la mesure que fait le marchand (ici le poids) et la place des chiffres et du signe associé dans l'écriture sans rompus ; c'est ainsi que pour les poids on crée des subdivisions de poids de 0,5 ; 0,3 ; 0,2 et 0,1. permettant de peser en prime de livre, puis on divise à nouveau en dix pour peser en seconde de livre, etc..
2. Deux problèmes sont ensuite résolus comme démonstrations de l'usage de cette nouvelle façon de calculer : Sachant que 1 marc d'or vaut 36,53 livres, combien valent 8,354 marcs ? Si 2,3 aulnes coûtent 3,25 livres, que coûtent 7,53 aulnes ? Que penser du nombre et du choix des exemples choisis par Stevin ? *(on peut s'interroger ici du rôle des exemples (choix et nombre) pour dégager une règle générale.)*	Selon Stevin les deux exemples précédents suffisent à prouver que l'usage des nouveaux nombres et calculs est fort commode pour les marchands.

Étudier la démarche de résolution des problèmes posés (en particulier la façon de résoudre le problème de proportionnalité et la technique de construction de la règle de trois).	

CONCLUSION :

Dans la conclusion, Stevin exprime la différence qui peut être établie entre l'article 6 et les autres : il s'agit de l'usage social : Pour ce qui concerne la monnaie, il est nécessaire que la solution trouvée soit légitimée. C'est pourquoi il s'adresse aux autorités qui devraient permettre que l'usage de cette nouvelle partition des mesures s'ajoute à l'usage des partitions en vigueur. La proposition sera utile aux successeurs qui ne négligeront pas toujours les avantages de cette nouvelle méthode. Les hommes peuvent se transmettre entre eux ce nouveau savoir. Si l'utilité du sixième article n'est pas reconnue, il est toutefois possible d'utiliser les cinq autres.
La conclusion peut apporter l'occasion d'une réflexion plus générale sur le métier d'enseignant : - Comment transmettre un savoir nouveau ? ou Comment modifier les habitudes ? - Comment concilier anciennes habitudes et nouvelles techniques ? - Comment légitimer un nouveau savoir ?

3.5.Questions relatives a la démonstration chez Stevin

la Disme : questions sur ce que Stevin nomme démonstration	
1. Quel objectif se propose Stevin dans toute la seconde partie de la Disme ?	*de montrer que l'on peut opérer sur les nombres de Disme comme sur des entiers à quelques contraintes simples près, et que ce qu'on trouve en manoeuvrant ainsi correspond bien à ce qu'on aurait trouvé en utilisant des rompus.*

2. Dans la seconde partie de la Disme, Stevin pose quatre problèmes : lesquels ?	*Etant donnés nombres de Disme à ajouter : Trouver leur somme.* *Etant donnés nombres de Disme duquel on soustrait, et à soustraire : Trouver leur reste.* *Etant donnés nombres de Disme à multiplier et multiplicateur : Trouver leur produit.* *Etant donnés nombres de Disme à diviser et diviseur : Trouver leur quotient.*
3. Pour résoudre ces problèmes, Stevin annonce cinq étapes à chaque fois : explication du donné, explication du requis, construction, démonstration et conclusion. a) Caractérisez d'une phrase chacune des trois premières étapes.	*L'explication du donné consiste à présenter l'exemple numérique choisi. L'explication du requis consiste à présenter ce qu'on cherche. La construction consiste à présenter les actions simples à exécuter sur les nombres de Disme (actions que le lecteur n'a pas à faire : l'opération est présentée à côté).*
b) Quel choix didactique Stevin fait-il pour convaincre son lecteur de la validité de ce qu'il avance ?	*Il choisit de montrer que cela fonctionne sur un exemple numérique compliqué. Il se contente de montrer l'équivalence des écritures dans des cas particuliers.*
c) Pourquoi n'accepterait-on pas aujourd'hui de nommer "démonstration" sa démarche ? Quels noms pourrait-on utiliser pour la caractériser ?	*Aujourd'hui, dans le monde des mathématiciens, on se méfie des particularités ; on se dit (et on a des contre-exemples nombreux pour justifier cela) qu'un procédé qui réussit sur un exemple ne réussit pas nécessairement dans tous les cas ; on exige donc des calculs plus généraux, par exemple au moyen de lettres. On parlerait plutôt dans ce cas-ci de l'illustration d'un mécanisme sur un exemple. Pour un public non spécialiste, cela peut représenter une preuve convaincante.*
d) Quels arguments Stevin donne-t-il pour étayer ses "démonstrations" ?	*-ses propres définitions (références à la première partie de la Disme)* *-des références aux "problèmes de l'Arithmétique" (sans doute un ouvrage connu)*

e) Comment choisit-il ses exemples numériques ? Dans quel but ?	*Il les choisit assez compliqués de manière à envisager sur un seul exemple tous les cas difficiles.*

3.6. Questions de synthese

la Disme : questions de synthèse	
1. Donner les grandes idées de l'introduction de la Disme. En quoi les arguments de Stevin sont-ils habiles ?	*La disme est une proposition toute simple, mais très utile.* *La vie professionnelle est souvent compliquée par de laborieux calculs, dont la moindre erreur risque de porter préjudice à son auteur.* *La disme enseigne "d'expédier facilement sans nombres rompus tous comptes", comme si on opérait sur des entiers. Donc temps gagné, et soucis ôtés.* *La disme a déjà été expérimentée par des arpenteurs hollandais et ils en sont très contents.* *Il s'adresse, non pas à des mathématiciens, mais à des gens pour lesquels sa proposition serait vraiment utile. Il insiste sur la simplicité de la Disme, son utilité, et pas du tout sur le fait qu'il faut bousculer toutes ses habitudes si on veut vraiment l'exploiter dans son métier.*
	Il prévient justement toute réflexion à ce sujet en annonçant que des arpenteurs s'y sont déjà mis et en sont très contents.

2. Stevin s'adresse à des publics divers. Différencie-t-il ses explications selon les publics ? Argumentez votre réponse.	*Dans l'article III de l'appendice, il fait une démonstration qui manifestement s'appuie sur des connaissances de spécialistes en gaugerie ; et il dit "Nous avons fait la démonstration brève, parce que nous n'écrivons pas à Apprentis mais à Maîtres."* *Dans le Nota de l'article IV, : il dit "Quelqu'un ignorant (car c'est à celui-là que nous parlons ici) les fondements de la stéréométrie, ..."* *Dans le Nota de la proposition IV, on peut penser qu'il s'adresse à des mathématiciens quand il montre que certains nombres ne peuvent pas s'écrire en nombre de Disme, et aussitôt, il balaie ces nombres-là car dans les affaires des hommes, on n'a pas besoin d'une très grande précision.*
3. Essayez en quelques phrases de préciser les objectifs de Stevin et comment il s'y prend pour les atteindre..	*Il veut être compris de tous. Il veut donner à tous l'envie d'essayer sa méthode. Il veut que les gens abandonnent les sous multiples en douzième ou en quart, pour adopter les dixièmes, centièmes. Il aimerait aussi convaincre les "décideurs" au sujet des mesures officielles.* *Il multiplie les exemples pour faire comprendre ses définitions. Il se donne le mal de montrer comment on fera les quatre opérations, et même les racines carrées, toujours sur des exemples. Les petites difficultés sont vues dans les nota, sur des exemples.* *Il prend soin de s'adresser séparément aux différents corps de métier, pour ne pas ennuyer les uns avec les problèmes des autres.* *Et comme il sait que la force des habitudes est grande, il cherche à suggérer le moins de changements possibles : ainsi dans tous les corps de métier on gardera l'unité principale ; on ne changera que les sous multiples.*
4. Comment s'arrange-t-il pour que chacun puisse ne lire que ce dont il a besoin ?	*Il fait des paragraphes différents pour les différents métiers.*

5. Stevin se rend compte que ses suggestions (dans l'appendice) vont bouleverser des habitudes. Comment s'y prend-il pour atténuer cet effet ?	*Il indique des modifications minimes des instruments. Il insiste souvent sur le fait qu'on n'a pas besoin d'une très grande précision. Il donne des indications pour modifier les graduations non régulières de la gauge. Il aide à s'y retrouver pour les mesures d'aire ou de volume.*

3.7. A propos des unités dont il est question dans la disme

Mesures de tapisseries : l'aulne (origine latine ulna "avant-bras") : 3 pieds 7 pouces 8 lignes soit 1,118m

Mesures de tous tonneaux : l'âme : 100 pots. un pot : 2 pintes. une pinte : 2 chopines soit environ 0,93L

4. ANNEXES

4.1. Annexe 1 Etude de l'algorithme d'extraction de la racine carrée d'un entier.

4.1.1. Disposition du XVI$^{\text{ème}}$ siècle

116 INSTRUCTION.

La *Racine quarrée* eſt fort peu différente de la Diviſion ; il faut ſeulement ſavoir la Table de multiplication quarrée qui eſt ici à côté.

Suppoſez qu'il fallût extraire la racine du nombre 119029, poſez ledit nombre comme ſi vous le vouliez diviſer ; mais il faut faire une ſéparation de deux en deux figures en reculant, & venant de droite à gauche, ainſi que vous voyez que j'ai fait à ces trois Exemples, quoiqu'il ne faille qu'une ſeule Regle.

Il faut commencer votre Regle à gauche, diſant la racine de 11 eſt 3. Poſez ce 3 en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine, & ſous le* 11 *pour ſervir de diviſeur.* Diſant 3 fois 3 font 9, de 11 reſte 2 qu'il faut poſer ſur 11 en coupant ledit 11.

Voyez le premier Exemple.

Cela fait, doublez le 3 du produit & ce double 6 ſera la premiere figure de votre ſecond diviſeur que vous mettez ſous le 9, diſant en 29 combien de fois 6, il y eſt 4, qu'il faut mettre en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine, & ſous le* 0 *pour ſervir de diviſeur*, ainſi ayant diviſé 290 par 64, reſtera 34 en haut.

Voyez le ſecond Exemple.

Enfin, Il faut toujours doubler le produit tel qu'il ſoit pour ſervir de diviſeur. Vous direz donc à 34 deux fois 4 font 8 qu'il faut poſer ſous le 2, & 2 fois 3 font 6 qu'il faut poſer ſous le 4 diviſeur précédent.

Après, dites en 34 combien de fois 6, il y eſt 5 fois qu'il faut mettre en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine totale, & après le* 8 *pour ſervir au dernier diviſeur*, ainſi votre derniere diviſion étant faite, vous trouverez que 119029 auront pour racine 345.

La preuve ſe fait en multipliant les 345 de racine par 345, viennent en y ajoutant le 4 de reſte les 119029 dont on a extrait la racine quarrée.

DE

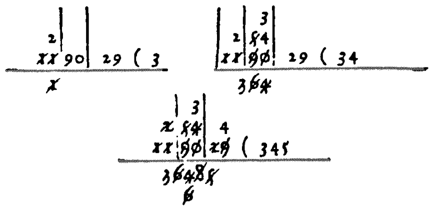
LA RACINE QUARRÉE. 117

Racine quarrée eſt un nombre, lequel étant multiplié par lui-même, produit ſon quarré juſte.

Preſque tous les Auteurs qui en ont traité forment la Table ſuivante d'une autre maniere ; mais celle-ci eſt la plus familiere & la plus facile, parce qu'elle eſt plus conforme au Livret de la Multiplication qui en eſt le fondement ; auſſi voyez au petit Livret, feuillet 40, *& au grand, feuillet* 43, *& vous trouverez la racine & ſon quarré à toutes les premieres lignes.*

Racine.		Quarrée.
1	*eſt la racine de*	1
2	*eſt la racine de*	4
3	*eſt la racine de*	9
4	*eſt la racine de*	16
5	*eſt la racine de*	25
6	*eſt la racine de*	36
7	*eſt la racine de*	49
8	*eſt la racine de*	64
9	*eſt la racine de*	81

EXEMPLES.



Maxime générale pour les reſtes, il faut mettre le haut pour le deſſus de la Fraction, & doubler le produit 345, mais y ajouter 1, & ſera le deſſous de la Fraction qui ſera $\frac{4}{691}$, qui n'eſt preſque rien.

T

4.1.2. Disposition actuelle

Nous prenons le même exemple que celui proposé dans le document joint.

Considérons le nombre 119029.
Il est compris entre 10^5 et 10^6, sa racine est donc entre 100 et 1000, elle a trois chiffres et peut donc s'écrire 100c+10d+u

On cherche donc à déterminer c, d, u tels que
$= (100c+10d+u)^2 + \alpha$ avec α petit.

$$= 10000c^2+2\times100c\times10d+100d^2+2\times100c\times u+2\times10d\times u+u^2+\alpha$$
$$= 10000c^2+(2\times10\times c+d)\times d\times100+[2\times(100c+10d)+u]\times u+\alpha$$

L'algorithme consiste à retrancher progressivement les différents termes à 119029.

	119029	345	on cherche c tel que c^2 soit juste inférieur à 11, c'est 3, on place 3
on retire 90000	- 90000		
	29029	6•×• = • est donc 4 64×4 = 256	on cherche d tel que (2×10×c+d)×d soit proche de 290 pour cela on double 3 et on cherche d d est 4, on place 4 à côté du 3 sur la première ligne
on retire 25600	- 25600		
	3429	68•×• = • est donc 5 685×5 = 3425	on cherche u tel que [2×(100c+10d)+u]× u soit proche de 3429 pour cela on double 34 et on cherche u u est le chiffre 5, on place 5 en position unité sur la première ligne
on retire 3425	- 3425		
	4		α est égal à 4

On peut donc conclure 119029 = 3425^2 + 4

4.2. ANNEXE 2 : Glossaire pour lire le texte original

AINS : mais
AME : unité de capacité pour les tonneaux
APPERT : apparaît, devient visible
ARPENT : Ancienne mesure agraire divisée en 100 perches, variable selon les localités de 35 à 50 ares unité agraire (pour mesurer la "capacité" des terres), puis unité de longueur et de superficie.
AUNE : unité de longueur utilisée pour les tissus. Mesure de longueur, variable selon les localités (valant 1,188 m à Paris)
AUTREFOIS : très souvent utilisé dans ce texte, avec le sens de "une fois de plus" ou "de même"
BRIEF : "en brief" pour "en résumé" et "de brief" pour "bientôt"
CIFFRE : chiffre
COMBIEN QUE : quoique
COMPUTATATIONS : calculs (le mot computer est bien français !)
CORPS : volume
DEBURA (ce qui se) : ce qui se devra
DEFAUT : "il défaut" pour "il manque"
DEPECHER : contraire de empêcher, prendre au piège ; dépêcher, c'est libérer, avec une idée de rapidité ; ici, dépêcher les calculs, c'est les mener à bien, rapidement
ESMEU : ?? (ému ?)
EXPEDIER : même idée que dépêcher, c'est dégager des entraves d'un piège, avec une idée de rapidité, le faire vite pour s'en débarrasser
FESTU : chose de peu de valeur (cf fêtu de paille)
GAUJEUR : celui qui jauge les tonneaux (en mesure la capacité au moyen d'une jauge)
GETTONS : jetons, qui servaient à faire des opérations sur table (le jeton ne prend sa valeur que par la place qu'il occupe sur la table ; cette table s'appelait "abaque" ; les gens qui calculaient avec des jetons, des "abacistes")
IMBECILLITE : faiblesse (pas de nuance péjorative)
METIER : "avoir métier de" pour "avoir besoin de" ; "être de métier" pour "être nécessaire"
MOLESTE : pénible, désagréable
MULTINOMIE : ?
MULTITUDE nombre de multitude des signes ?
NOISE : querelle, dispute
PARTIR : partager
PIEDS : ancienne mesure de longueur (32,5 cm)
PHILAUTIE : complaisance pour soi-même, présomption
PROGRESSION : "dixième progression" correspond à la numération décimale de position ; voir aussi "soixantième progression
QUELQUE : quelconque dans la phrase "je décris quelque nombre"
ROMPU : fraction de l'unité

SI : se construit avec un subjonctif quand la supposition est irréelle ou éventuelle : "si le signe fût inégal" pour "si le signe était inégal"
SIGNER : marquer
STEREOMETRIE : art de mesurer les volumes. Partie de la géométrie qui traite des solides
VERGE : unité de longueur et de superficie. Ancienne mesure agraire valant le quart d’un arpent.

Index des sigles

APMEP	Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
CAFIPEMF	Certificat d'aptitude aux actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires
CDDP	Centre Départemental de Documentation Pédagogique
CNDP	Centre National de Documentation Pédagogique
CE1	Cours élémentaire 1ère année (élèves de 7 à 8 ans)
CE2	Cours élémentaire 2ème année (élèves de 8 à 9 ans)
CM1	Cours moyen 1ère année (élèves de 9 à 10 ans)
CM2	Cours moyen 2ème année (élèves de 10 à 11 ans)
COREM	Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Talence près de Bordeaux (sigle local)
CP	Cours préparatoire (élèves de 6 à 7 ans)
CRPE	Concours de recrutement des Professeurs des Écoles
Cycle 2, **Cycle 3**	Le cycle 2 regroupe les classes de CP et CE1 Le cycle 3 regroupe les classes de CE2,CM1 et CM2.
ERMEL	Équipe de didactique des mathématiques de l'INRP
F.P.	Formation Professionelle
FP2	Formation professionnelle 2ème année
GS	Classe de grande section de maternelle (élèves de 5 à 6 ans)
I.N.R.P	Institut National de Recherches Pédagogiques
IEN	Inspecteur de l'Éducation Nationale (pour l'école primaire)
IFM	Institut de formation des maîtres (sigle local)
IMFAIEN	Instituteur Maître Formateur Auprès de l'Inspecteur de l'Éducation Nationale. Ce sont des conseillers pédagogiques
IMF	Instituteur Maître Formateur
IREM	Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
IUFM	Institut Universitaire de Formation des Maîtres Crée en 1991, pour assurer la formation des professeurs d'école (primaire : élèves de 2 à 11 ans) et des professeurs de collège et lycée (secondaire : élèves de 11 à 18 ans).
MAFPEN	Mission Académique de la Formation des Personnels de l'Éducation Nationale
MS	Classe de moyenne section de maternelle (élèves de 4 à 5 ans)
Normaliens	Stagiaires en formation dans les Écoles Normales
P.E.	Professeur des écoles
PEMF	Professeur des écoles Maître Formateur
P.E.N	Professeur d'École Normale
PE1, PE2	Professeur des écoles 1ère ou 2ème année
PIUFM	Professeur en Institut Universitaire de Formation des Maîtres

PS	Classe de petite section de maternelle (élèves de 3 à 4 ans)
Q.C.M.	Questionnaire à Choix Multiple
ZEP	Zone d'Éducation Prioritaire

Index des sigles en AIS en 2002

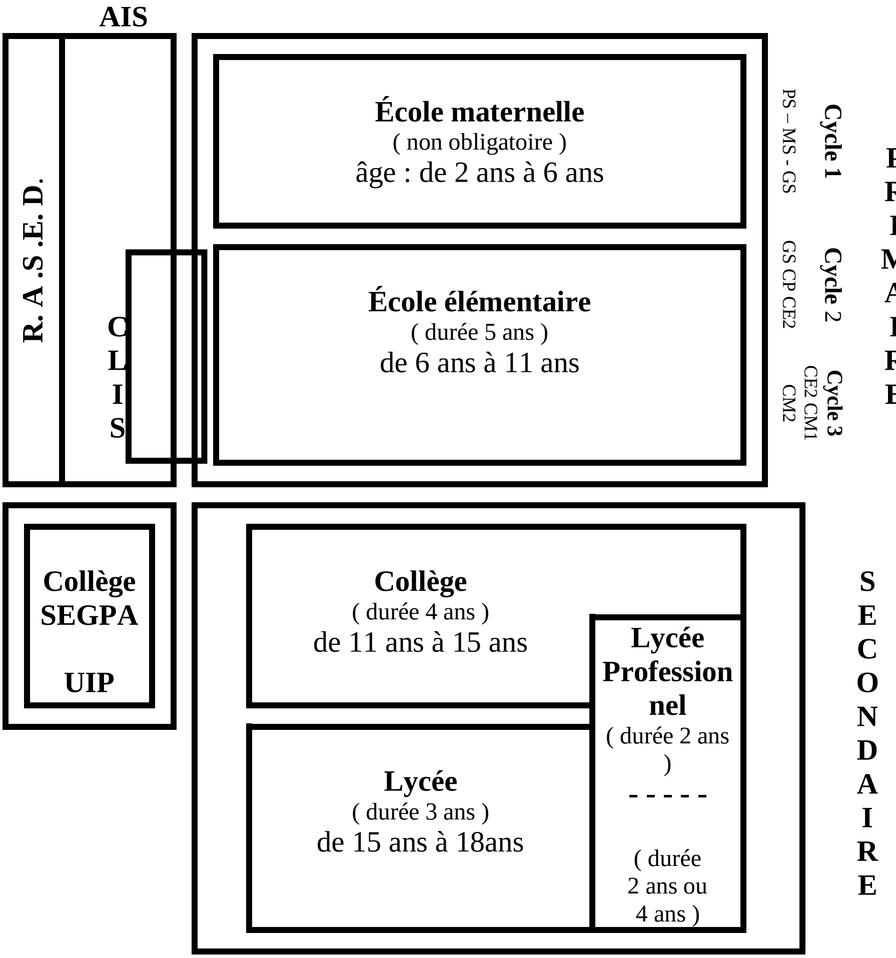
AIS	Adaptation et intégration scolaires
CAPSAIS	Certificat d'aptitude aux actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires, en 1987, se substitue au CAEI (Certificat d'Aptitude à l'éducation des enfants et adolescents déficients ou inadaptés)
CAT	Centre d'aide par le travail (pour adultes handicapés)
CCPE	Commission de circonscription préélémentaire et élémentaire
CCSD	Commission de circonscription du second degré
CDES	Commission départementale d'éducation spéciale
CLAD	Classe d'adaptation
CLIS 1	Classe d'intégration scolaire pour handicapés mentaux
CLIS 2	Classe d'intégration scolaire pour handicapés auditifs
CLIS 3	Classe d'intégration scolaire pour handicapés visuels
CLIS 4	Classe d'intégration scolaire pour handicapés moteurs
CMPP	Centre médico-psycho-pédagogique
COTOREP	Commission technique d'orientation et de reclassement professionnel
EREA	Établissement régional d'enseignement adapté
GAPP	Groupe d'aide psycho-pédagogique
IME	Institut Médico-Educatif antérieurement, il s'agissait d'un établissement comportant un IMP + un IMPro. Dorénavant, tout établissement avec **SSEGS** (Section de soins et d'éducation générale spécialisés) ou **SSEPS** (Section de soins et d'éducation professionnelle spécialisés) est appelé IME
IMP	Institut médico-pédagogique (de 6 à 14 ans) ; ils sont devenus des IME (Instituts médico-éducatifs) avec **SSEGS** (Section de soins et d'éducation générale spécialisés)
IMPRO	Institut médico-professionnel (de 14 à 20 ans) : ils sont devenus des IME (Instituts médico-éducatifs) avec **SSEPS**
IR ou IRP	Institut de rééducation (pour troubles du comportement)
LEA	Lycée d'enseignement adapté
LP	Lycée professionnel
RASED	Réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté (écoles maternelle et élémentaire)
SEGPA	Section d'enseignement général et professionnel adapté (collèges) . La SEGPA se substitue à la SES (Section d'Éducation Spécialisée)
SESSAD	Service d'éducation et de soins spécialisés à domicile (pour handicapés mentaux ou troubles du comportement)
UPI	Unité pédagogique d'intégration (collèges et lycées)

Voici la liste des auteurs avec leur laboratoire de recherche et leur lieu d'exercice en Janvier 2003.

ANDRÉ Françoise	École Blaise Pascal Perpignan	IUFM de Montpellier *Perpignan*
AURAND Catherine		IUFM de Versailles *St Germain en Laye*
BARATAUD Dominique		CNEFEI de Suresnes
BEAUFORT Dominique		IUFM d'Orléans-Tours *Chartres*
BETTINELLI Bernard	IREM de Besançon	IUFM Franche-Comté *Besançon*
BOLON Jeanne	Équipe DIDIREM, Université Paris 7	IUFM de Versailles *Antony*
BONNET Nicole	IREM de Dijon, COPIRELEM	IUFM de Dijon
BOULE François	IREM de Dijon	CNEFEI de Suresnes
BRIAND Joël	DAEST Université V. Segalen Bordeaux 2, COPIRELEM	IUFM d'Aquitaine *Bordeaux*
BRONNER Alain	LIRDEF	IUFM Montpellier *Montpellier*
BROUSSEAU Guy	DAEST Université V. Segalen Bordeaux 2	Professeur émérite des Universités IUFM d'Aquitaine
BUTLEN Denis	Équipe DIDIREM, Université Paris 7, IREM paris 7	IUFM de Créteil *Melun*
CHEVALIER M.Claude	Professeur au lycée de Cahors	IUFM de Toulouse jusqu'en 1994
COLMEZ François	IREM paris 7	Université Paris 7
COULET Jean Claude	Laboratoire de Psychologie du Développement et de l'Education	Maître de conférences, Université de Rennes 2
DESCAVES Alain	IREM de Bordeaux COPIRELEM	IUFM d'Aquitaine *Périgueux*
DOUADY Régine	Université Paris 7 Professeur honoraire	
DUCORAIL J.Claude		IEN de Gironde
EYSSERIC Pierre	IREM d'Aix –Marseille COPIRELEM	IUFM d'Aix Marseille *Aix*
FENICHEL Muriel		IUFM de Créteil *Livry Gargan*
FREMIN Marianne		IUFM Versailles *Antony*
GIRMENS Yves	IREM de Montpellier COPIRELEM	IUFM de Montpellier Perpignan
HERVIEU Claudine		IUFM de Caen

HOUDEMENT Catherine	Équipe DIDIREM, Université Paris7 COPIRELEM, IREM de Hte Normandie	IUFM Haute Normandie *Rouen*
HUGUET François	Professeur Honoraire, IREM de Quimper	IUFM de Quimper *Quimper*
KUZNIAK Alain	Équipe DIDIREM, Université Paris7 IREM de Strasbourg	IUFM de Strasbourg *Strasbourg*
LE POCHE Gaby	IREM de Bretagne COPIRELEM	IUFM de Bretagne *Rennes*
LEBERRE Maryvonne	IREM de Lyon	Professeur en collège Charcot à Lyon
OYALLON Jean Louis	Professeur en lycée à Nouméa	IUFM d'Aquitaine jusqu'en 1996
OZAN Gérard		IUFM Versailles *Antony*
PARZYSZ Bernard	GReDiM (IUFM Orléans-Tours) Équipe DIDIREM, Université Paris7	IUFM Orléans Tours
PAUVERT Marcelle		IUFM de Créteil Professeur honoraire
PEAULT Hervé	Décédé en 1997	IUFM des Pays de la Loire
PELTIER Marie Lise	Équipe DIDIREM, Université Paris7 COPIRELEM, IREM de Hte Normandie	IUFM Haute Normandie *Rouen*
PERRIN -GLORIAN Marie-Jeanne	Équipe DIDIREM, Université Paris 7	IUFM Nord-Pas-de-Calais
PEZE Christiane	Formatrice AIS	IUFM d'Aquitaine
RIMBAUD Claude	IREM de Rennes Professeur honoraire	IUFM de Bretagne *St Brieux*
ROYE Louis	IREM de Lille	IUFM de Lille Professeur honoraire
SALIN Marie Hélène	DAEST université V.Segalen, Bordeaux2	IUFM de Bordeaux *Bordeaux*
TAVEAU Catherine	IREM Paris 7, COPIRELEM	IUFM de Créteil *Bonneuil*
VERGNES Danielle		IUFM de Versailles *Antony*

Présentation succincte du système éducatif français



Cursus pour devenir professeur des écoles