Comment ne pas être « chocolat » ?

Nicole Bonnet

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Le travail présenté s'inspire d'un article écrit par Michel CHASTELAIN, dans la Revue MATH-ECOLE ; N°165 ; Novembre 1994.
Cette action de formation utilisable en formation initiale ou continue des professeurs des écoles, relève d'une approche constructiviste et se rattache à une stratégie de formation par homologie pour les problèmes de recherche.

Le descriptif de cette action de formation est issu d'un travail que j'ai mené cette année avec des PE sur le thème de la résolution de problèmes. Je leur ai proposé des situations qui permettaient de réfléchir aux différences entre exercices, problèmes, situations-problèmes, problèmes ouverts. Voici une activité qui a également débouché sur d'autres points abordés dans cet article comme l'analyse du jeu, le débat sur "l'utilité" d'une telle activité, les transformations possibles, etc.

OBJECTIFS :

Introduire un comportement de recherche par le biais d'un problème ouvert (5).

Permettre aux professeurs d'école en formation initiale d'entrer dans un contenu didactique et d'analyser une situation de recherche.

<u>*Enoncé :*</u>

La méchante sorcière a pris une plaque de chocolat et déposé un poison mortel sur un des quatre carrés d'angles. Elle veut proposer un jeu à Blanche-Neige : « Tu vois, lui dit-elle, j'ai déposé du poison sur le carré hachuré.
Je te propose les règles du jeu suivantes :

1. **Chacune, à tour de rôle va prendre la plaque et en détacher une partie en la coupant suivant une ligne droite du quadrillage. Elle mange le morceau qu'elle a détaché ;**
2. **Celle qui mange le carré empoisonné meurt ! »**

Mais la sorcière est aussi bête que méchante, elle ne sait pas que Blanche-Neige connaît une façon de jouer pour ne pas manger le carré mortel.
Et toi, comment vas-tu jouer pour ne pas être empoisonné ?

					POISON

Phase 1 : travail du professeur stagiaire en tant qu'élève.

Dispositif

C'est une situation de recherche par groupes de quatre (deux joueurs, deux observateurs avec changement de rôle), chaque groupe ayant à disposition 29 petits cubes identiques d'une même couleur et un petit cube d'une autre couleur qui est le morceau de chocolat empoisonné.

But recherché

- Faire trouver une ou des stratégies gagnantes ;
- Amener une discussion au sein du groupe quant à la rédaction de cette situation de recherche. Faut-il faire des dessins ? Le texte seul suffit-il ? Quelles cohérences exiger entre texte et dessins ? ... Peut-on généraliser à d'autres situations de recherche ?

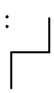
Consigne

La consigne s'articule en deux temps :

1. Vous allez tout d'abord vous placer dans le rôle de l'élève : « Jouez et cherchez une stratégie gagnante. Puis rédigez-la sur une feuille. » ;
2. Vous êtes maintenant le professeur : « Quel compte-rendu attendez-vous d'un groupe d'élèves de CM2 placé face à ce problème ? ».

Analyse

Difficultés dues à l'énoncé :

- J'ai remarqué en circulant entre les groupes que la consigne ne semblait pas claire pour tout le monde. J'ai dû préciser oralement les points suivants :
  - ∗ on ne peut pas couper comme cela : 

    ni en diagonale.
  - ∗ on peut prendre une ou deux barres, ou plusieurs, mais <u>en un seul coup</u>.

- Une difficulté de langage émerge vite : un "carré" de chocolat est en général rectangulaire. Ceux qui persistent à dessiner des carrés de chocolat en forme de rectangle, ont plus de peine à trouver une stratégie, et leur expression devient ambiguë. On a donc intérêt à schématiser l'énoncé, pour s'éloigner d'un modèle réaliste. En fait, la manipulation de petits cubes de 2 cm d'arête induit fortement des représentations carrées. Les stagiaires utilisent rapidement du papier quadrillé 5x5 lors des phases d'analyses de jeux.

Les temps de recherche et de rédaction durent environ 20 minutes chacun.
Parmi les groupes, aucun n'est en échec ; tous se sont engagés dans une solution.

Difficultés de rédaction

La rédaction de la procédure gagnante suscite de grandes discussions. Pour être claire, précise et concise, la rédaction nécessite un effort important d'analyse et de synthèse de la part des étudiants.

Ils pensent que le texte seul ne suffit pas à la bonne compréhension, qu'il doit être illustré de schémas.

Ce travail d'explicitation permet de mieux comprendre et de conceptualiser la situation. Les brouillons raturés des stagiaires montrent que cette action n'est pas simple.

Bilan

Cette activité est pour eux une leçon d'humilité car ils sont placés face à un problème qu'ils ne savent pas résoudre immédiatement. Certains groupes sont mal à l'aise en début de séance, ils ont peur de ne pas trouver de solution.

Dans la dernière phase, lorsque je leur distribue des exemples de travaux d'élèves, les critiques concernant la rédaction sont plus réfléchies. Les étudiants ont réalisé qu'il ne fallait pas demander aux élèves ce qu'on avait du mal à faire soi-même.

Je rajoute que le travail d'écriture me semble fondamental car il consolide les chemins mentaux. Il pourra être un outil qui permet un retour lors d'un problème analogue. En effet, l'élève peut reprendre ses notes et les consulter en cas de besoin.

Phase 2 : travail conjoint formateur / PE.

But recherché

Travailler sur les caractéristiques d'un problème ouvert (5) selon deux axes : l'un lié au problème, l'autre lié à la gestion de classe, et ouvrir un débat.

1. Dégager les caractéristiques liées au problème

1.1 Généralités

À l'école, on pose des problèmes proches soit de la vie quotidienne, soit du monde imaginaire des enfants, afin de leur permettre de créer des connaissances, d'apprendre des stratégies, des techniques, des algorithmes, ... qu'ils devront être capables de réutiliser lors de problèmes différents.

Les I.O. de 1995 précisent : « *La résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'appropriation par les élèves des connaissances mathématiques. La plupart des notions ... peuvent être abordées par les élèves comme des outils pertinents pour résoudre des problèmes nouveaux, avant d'être étudiées pour elles-mêmes et réinvesties dans d'autres situations ...*

Par ailleurs, des activités sont proposées pour mettre en place et développer des compétences spécifiques d'ordre méthodologique ...

Les activités relatives à la résolution de problèmes portent sur :

- *de véritables problèmes de recherche, pour lesquels l'élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée ; ...* »

Ici, nous avons un problème qui ne vise pas de notion spécifique, il s'agit d'un problème de recherche à support ludique, qui correspond à la dernière phrase de l'extrait des Instructions Officielles ci-dessus.

1.2. Analyse du problème

- Je questionne tout d'abord les PE stagiaires : « Comment avez-vous procédé pour arriver à la solution ? ».

- Leurs réponses sont :

« Nous avons :

- joué plusieurs fois, fait des essais ;
- émis des hypothèses, des conjectures ;
- testé ces hypothèses en faisant d'autres essais ;
- testé la validité de la conjecture.

C'est une démarche scientifique. ».

Ils ajoutent également :

- « Émettre des hypothèses est relativement difficile car chacun se forge les siennes qui dépendent fortement des réactions de l'adversaire. Quelquefois, nous pouvons mettre en oeuvre deux hypothèses dans la même partie, et il ne sort rien de cela. Il faut noter les coups. » ;
- « La solution n'est pas immédiate. » ;
- « Quand la procédure gagnante est trouvée, le jeu n'a plus d'intérêt. Il faut chercher un "naïf" (un camarade qui n'a jamais joué et qui va être "chocolat "). Il permet de contrôler que celui qui connaît la stratégie gagne toujours. ».

En conclusion :

C'est un jeu fermé : dès que la procédure est découverte, le jeu n'a plus d'intérêt.

J'ajoute :

Quand on résout ce problème, on développe une méthodologie utilisée dans le champ mathématique.

Elle consiste dans un premier temps à analyser les derniers coups de son adversaire : que fait-il quand il gagne ? puis à essayer de mémoriser les coups d'une partie entière, ce qui permet de capitaliser pour mieux anticiper. Enfin, on se rend compte qu'il faut hiérarchiser les fins de partie.

Comme dans le jeu de "la course à 20"[1], c'est en fin de partie que surgit l'idée qu'il ne faut pas jouer n'importe quoi.

Soit, par exemple, la course à 20, de pas 4. Le gagnant est celui qui dit 20 le premier. Le jeu se joue à tour de rôle. Chaque joueur peut augmenter le nombre annoncé par son adversaire de 0, 1, 2 ou 3.

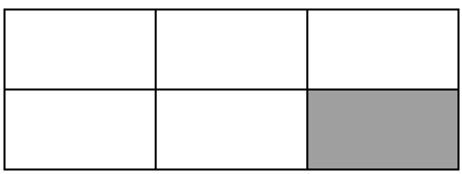
Si le but est 20, celui qui annonce 17,18 ou 19 a perdu, car son adversaire peut atteindre 20. Par contre, celui qui annonce 16 est sûr de gagner, car son adversaire ne pourra annoncer que 17, 18 ou 19.

Pour gagner, il faut donc jouer 16, qui n'est autre que 20-4.

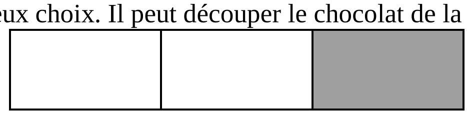
Le joueur réitère son raisonnement, et cela l'amène à découvrir une stratégie globale ...

Il en est un peu de même ici : rapidement, le joueur en vient à considérer la fin de partie.

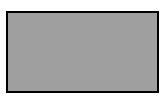
Admettons que le joueur A laisse le rectangle suivant après avoir mangé son morceau :



Le joueur B a deux choix. Il peut découper le chocolat de la manière suivante :



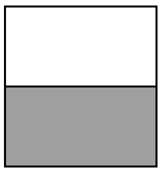
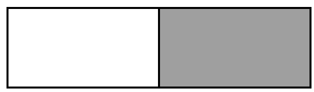
Il a alors perdu car le joueur A lui laisse :



[1] Situation présentée dans l'article « La division en formation initiale », tome 2 de cet ouvrage.

Ou bien, il peut découper le chocolat en laissant un "carré" :

Au coup suivant, A ne peut faire que :


ou


Dans ces deux cas, le joueur B a gagné : il coupe le chocolat et ne laisse au joueur A que le carré empoisonné.

La stratégie gagnante peut se résumer ainsi :
« Pour gagner, il faut laisser un carré. Celui qui a un rectangle devant lui peut toujours le transformer en carré. Par contre, celui qui a un carré ne peut qu'en faire un rectangle. Celui qui laisse un carré est donc toujours gagnant. »
Il suffit alors de "remonter" pour trouver une stratégie gagnante, dès le départ.
"Faire un carré" est un coup fort ou coup gagnant au sens de la théorie des jeux. On retrouve cette situation dans d'autres jeux. Je citerai par exemple le "squeeze" au bridge et le "sugswang" aux échecs.
Dans les premiers coups, il s'agira donc d'enfermer l'adversaire pour lui faire commettre une faute.
Autre idée : une stratégie gagnante répond à un argument de symétrie dans le sens que les positions fortes ont davantage d'éléments de symétrie.

1.3. Débat

Après cela, un débat peut naître avec les étudiants (ou stagiaires). Je les laisse s'exprimer librement tout d'abord, puis leur pose quelques questions.

- Les étudiants sont enthousiastes car l'aspect ludique l'emporte. Ils ont envie d'essayer avec leurs élèves ... Enfin des « maths-plaisir » ! Les enfants devraient apprécier ...
- Je ne les décourage pas car cet aspect me semble fondamental. De plus, les champs périphériques abordés sont à prendre en considération ...

- D'autres ont peur de passer trop de temps pour peu de savoirs mathématiques estampillés.

Outre l'aspect mathématique cité plus haut, lorsque l'on résout ce problème, on doit :

* Capitaliser, anticiper ;
* Argumenter ;
* Écouter les autres ;
* Rédiger un texte de nature scientifique (si le maître l'a demandé), un texte avec ses règles précises, qui peuvent être débattues à ce moment.

En conclusion, il est souhaitable de proposer ce problème au bon moment, sans y passer trop de temps, car il développe une méthode utile aux mathématiques.

Il s’agit bien ici d’une activité mathématique dans laquelle on met en œuvre un mode de pensée, un type de raisonnement spécifique, qui rompt avec le modèle pédagogique habituel - leçon puis exercices - si prégnant pour les étudiants ou stagiaires.

<u>Remarques</u> :

Mettre en situation les PE stagiaires dans le cadre de tels problèmes leur permet de prendre conscience de la diversité des démarches utilisées dans chaque groupe.

De plus, cela leur permet d’élargir leurs classes de problèmes de référence : il existe des problèmes autres que les problèmes pour apprendre des notions.

- Les étudiants ne nient pas l'activité mathématique dans ce problème, mais il est difficile de modéliser les processus de réussite.
- Un autre point fort de la discussion est la recherche de variantes du problème initial, pour modifier les procédures de résolution.

Voici celles proposées par les PE :

- **Augmenter ou diminuer le nombre de carrés de chocolat sur la plaquette, de manière à la laisser rectangulaire**.

Les procédures de résolution restent inchangées (c'est celui qui connaît la procédure gagnante qui est vainqueur, qu'il joue en premier ou en second). Seul le temps de jeu est modifié (et peut-être aussi la rapidité de découverte de stratégies).

- **Former une plaquette carrée ayant par exemple 5 x 5 morceaux de chocolat**.

Le problème est changé (celui qui connaît la procédure gagnante ne doit pas jouer en premier). C'est un jeu de hasard : tirer à pile ou face pour savoir qui joue le premier.

Inutile de jouer si les deux adversaires connaissent la stratégie gagnante !

- C’est l’occasion, à partir des questions des PE, de préciser ce qu’on entend par : situation-problème, problème ouvert, un problème. Le lecteur pourra se reporter utilement aux ouvrages ou articles cités en bibliographie pour des éléments de réponse.

2. Caractéristiques liées à la gestion de classe

Je rappelle l'organisation favorisant d'une part la responsabilité des PE (ou des élèves) face à la solution du problème et d'autre part leur autonomie dans la recherche :

- *Premier temps de la recherche : consignes initiales.*

Le formateur (moi-même) observe un assez long moment de silence où chaque PE (élève) s'approprie de façon individuelle la consigne et le jeu. Ce moment est fondamental car il permet la prise en main de la situation et l'émergence des premières conjectures. De mon point de vue, tout travail de groupe devrait débuter par un moment où chacun note par écrit ses premières idées. Ce procédé permet d'éviter que chaque élève soit entraîné trop rapidement dans la démarche proposée par un "leader".

- *Deuxième temps : phase d'action*

Le formateur circule entre les groupes, reprécise éventuellement la consigne. Nous avons vu que l'énoncé écrit ne suffisait pas.

Cette phase vise à la mise en place de stratégies. Le contexte est alors oublié : on ne pense plus à Blanche-Neige, la plaquette de chocolat est représentée, les carreaux de chocolat le sont aussi, sous forme carrée. On travaille en noir et blanc, les objets ont perdu leur couleur. Seules les données ayant du sens sont conservées.

Le professeur doit prendre garde de ne pas trop intervenir, être patient et laisser mûrir le problème. Son rôle consiste à encourager, essayer de rentrer dans la pensée des élèves. Il ne doit pas fermer le problème trop rapidement.

- *Troisième temps : phase de formulation*

Le compte rendu demandé aux PE (ou l'affiche pour les élèves) est un moyen de communication qui peut être exposé et laissé à la consultation libre. Dans un premier temps, la rédaction précise la pensée, dresse la liste des conjectures et permet leur exposition.

Dans un deuxième temps, le texte mathématique produit par les PE (ou les enfants) pourra être analysé, ce qui constitue un objectif intéressant.

- *Quatrième temps : phase de validation ou de débat*

C'est une activité de vérification qui ne se réduit pas au contrôle des procédures avec les PE. On cherche à établir la cohérence des résultats obtenus, à modéliser (si on le peut) la situation. Cette phase permet à chacun de prendre du recul, d'élucider la situation. Les questions ou réponses des pairs participent à cette compréhension.

Phase 3 : Analyse de travaux d'élèves.

Après le constat des difficultés de formulation écrite de leurs stratégies par les PE, j'ai distribué des productions d'élèves. Ces travaux proviennent d'une classe de 5ème (7ème année scientifique en Suisse (1)) et ont été élaborés en deux périodes de quarante-cinq minutes (cf. annexe).

Mon objectif est de leur faire analyser ces productions d'élèves puis de les amener à les comparer à leurs propres écrits.

Remarque importante :

Les critères d'analyse qui ont surgi le plus souvent sont :

- La qualité de la présentation : soin, dessins ;

(ce premier point semble fondamental pour les PE)

- La clarté des explications : précision du langage, sémantique, orthographe;
- La stratégie développée : est-elle générale ou s'appuie-t-elle sur un cas particulier ?
- La pertinence des remarques (surtout à cause de la première phrase du compte rendu n°3).

Ces critères s'appliquent au produit fini. Ils ne prennent aucunement en compte:

  - La description des recherches infructueuses, les pistes rejetées pour différentes raisons (traitement de l'erreur).
  - Le nombre, la variété des pistes de recherche.
  - L'appréciation personnelle du maître, etc.

Conclusion

Cette activité de formation a été plébiscitée par les PE car elle leur a donné la possibilité d'être *élève* en leur permettant de participer à la construction d'outils pour être *maître*.

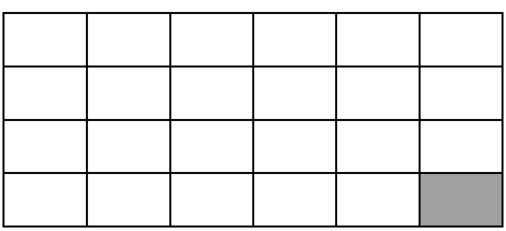
De plus, elle m'a permis d'illustrer des éléments de didactique, en cernant honnêtement leurs limites.

Enfin, leur meilleur souvenir, a été la dégustation collective d'une tablette de chocolat que j'avais promise au groupe qui trouverait le premier la stratégie gagnante ...

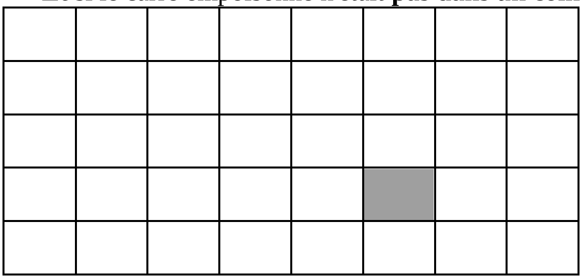
On excusera le côté affectif ... ! Cependant cette association travail-chocolat, ne peut-elle pas créer des connexions mentales fortes à propos de cette situation? Cette récompense est-elle si gratuite que cela ? ! ...

Pour ouvrir encore le problème, je propose de nouvelles variantes destinées aux PE (ou aux collègues ?) qui trouveraient cette situation trop simple :

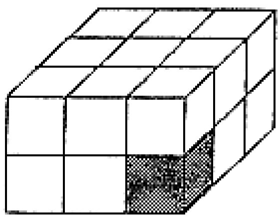
- **Et si** on jouait **à trois** et non à deux **?**



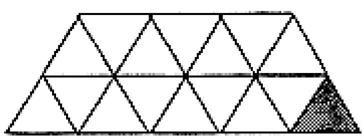
- **Et si** le carré empoisonné n'était **pas dans un coin ?**



- **Et si** on jouait dans **trois dimensions ?**



- **Et si** les carreaux n'étaient **pas carrés ?**



Enfin, je voudrais conclure par cette jolie phrase empruntée à Michel Chastellain : « toute situation mathématique mérite d'être dégustée ».

Bibliographie

(1) Article de Michel Chastellain (maître de didactique des mathématiques au SPES de Genève), intitulé "Évaluation d'une situation mathématique" in Math-Ecole n° 165 Nov. 1994

(2) "Jeux de cadres et didactique outil-objet" Régine Douady in RDM Vol 7-2 éd. La Pensée Sauvage 1986

(3) "Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles" Chapitres 1 et 2, Tome 1. R. Charnay et M. Mante

(4) "Théorisation des phénomènes d'enseignement" G. Brousseau Thèse d'état Bordeaux 1

(5) "Problème ouvert et situation problème" G. Arsac, G. Germain, M. Mante IREM de Lyon 1988

(6) "Comprendre les énoncés, résoudre les problèmes" A. Descaves Hachette-Education 1992

(7) "Apprendre (par) la résolution de problèmes" R. Charnay in Grand N n° 48
(8) « La Course à 20 », G.Brousseau, in Théorie des situations didactiques, La Pensée sauvage, 1998.

Compte rendu 1
(photocopie article maths école)

Compte rendu n°1

Comment ne pas être «chocolat» ! Laurent, Matthieu, Nicolas

Il faut jouer de telle manière a ce qu'il ait le même nombre de carré horizontalement et verticalement.

ex :

//// joueur 1
\\\\ joueur 2
*P = Player

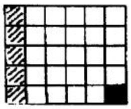
1, 2, 3, 4 après le *P " = nombre de coup

En jouant plusieurs fois, nous avons remarqué :
que celui qui connaît le "truc" est presque sûr de gagner, à moins que son adversaire connaisse aussi le "truc" !
qu'au début nous avions trouvé une solution mais elle ne marchait pas a tout les coups. Si l'autre en enlevait trois bandes à l'horizontale, on en enlevait trois aussi sauf à la verticale. mais comme il n'y a pas le même nombre horizontalement et verticalement, cela ne peut pas joué !

Compte rendu 2
(photocopie article maths école)

Compte rendu n°2 Julien / Romain

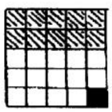
Pour gagner à coups sûr il faut manger la ligne A sur le tableau x



→ tableau x
= premier joueur

ABCDEF

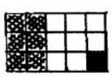
On obtient alors un carré et s'est à l'adversaire de jouer



= second joueur

ABCDEF

Le premier joueur doit reformer un carré.
L'adversaire mange une autre partie de la plaque et de nouveau le premier joueur reforme un carré jusqu'à ce que le second joueur mange le carré noir.



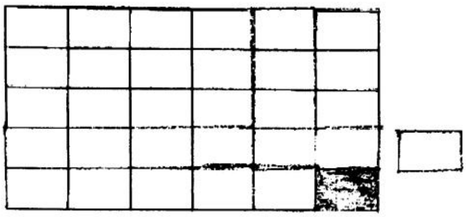
revoila le carré etc
Il faut commencé pour gagner

Compte rendu 3
(photocopie article maths école)

Compte rendu n°3

Comment ne pas être « chocolat » !

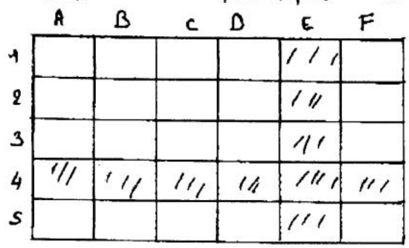
Seymour et Erwan



= lignes qu'il faut manger.

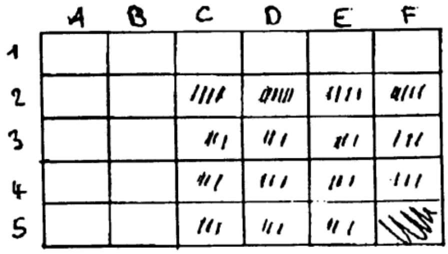
Celui qui commence n'est pas forcément le vainqueur, ça dépend comment il joue.

Quand on arrive dans ce stade, on peut mettre en pratique la stratégie.



La stratégie consiste à pousser l'adversaire sur les lignes I et 3. Dans ce cas nous pouvons avaler les lignes E et 4. L'adversaire ne peut rien faire à par manger le chocolat vert.

2ème solutions

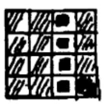


A partir de ce stade là l'adversaire est perdu, même si il mange une ou deux ligne(s). C'est à lui de commencer.

adversaire

moi

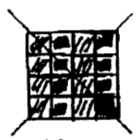
il a perdu.



il a perdu.

il a perdu

il a perdu

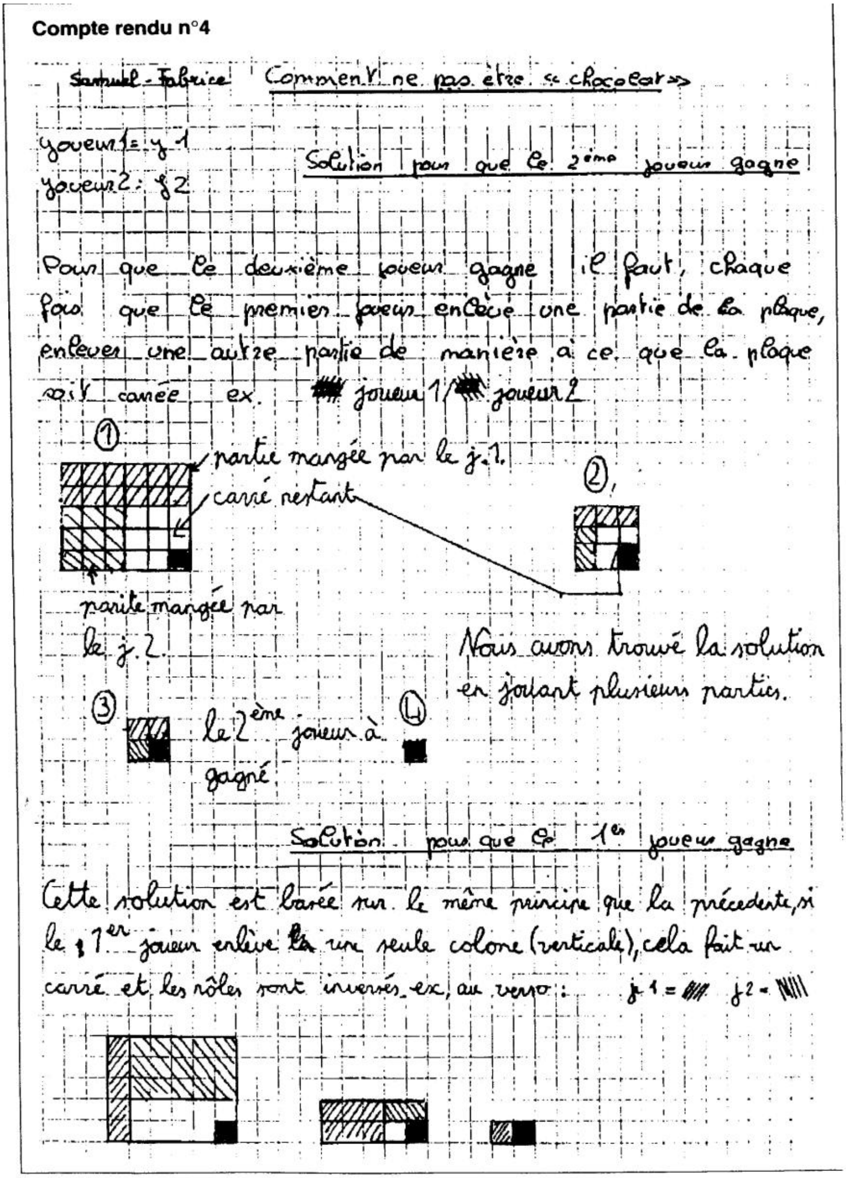


j'ai perdu

j'ai perdu

La tactique consiste à manger l'avant dernière ligne pour que l'adversaire mange la dernière.

Compte rendu 4
(photocopie article maths école)



Compte rendu n°4

Samuel - Fabrice   Comment ne pas être « chocolat »

joueur 1 = j 1
joueur 2 : j 2

Solution pour que le 2ème joueur gagne

Pour que le deuxième joueur gagne il faut, chaque fois que le premier joueur enlève une partie de la plaque, enlever une autre partie de manière à ce que la plaque soit carrée ex. joueur 1 / joueur 2

1
partie mangée par le j.1.
carré restant
2
parite mangée par le j. 2.

Nous avons trouvé la solution en jouant plusieurs parties.

3
le 2ème joueur à gagné
4

Solution pour que le 1er joueur gagne

Cette solution est basée sur le même principe que la précédente, si le 1er joueur enlève ~~la~~ une seule colone (verticale), cela fait un carré et les rôles sont inversés ex, au verso : j 1 = /// j 2 = \\\\