ESPACE ET GEOMETRIE
GEOMETRIE DANS LE MESO-ESPACE
A L'ECOLE PRIMAIRE
ET AU DEBUT DU COLLEGE

Isabelle Bloch, Marie-Hélène Salin
IUFM d'Aquitaine

Résumé :

Cet atelier s'inscrit dans la continuité de celui présenté par René Berthelot au colloque de Chamonix (2000) : comment préparer à l'école élémentaire la géométrie du collège, ainsi que la problématique du dessin technique ; quelles connaissances géométriques peuvent être travaillées dans un espace assez grand, connaissances qui conduiront à comprendre les savoirs géométriques comme permettant d'anticiper et de contrôler les phénomènes spatiaux ?

Modalités : rappel des bases théoriques et des situations déjà expérimentées présentées en 2000. Présentation par une vidéo des nouvelles expérimentations et conclusions.

Travail des participants sur le matériel et les situations : comment les organiser ? quels préalables ?

INTRODUCTION

Le travail que nous présentons dans cet atelier a été réalisé avec deux classes d'élèves de CM2 de l'école Jules Michelet à Talence (ex COREM) ; il a ensuite été repris dans deux classes de Quatrième SEGPA à Pau. Il s'inscrit dans la continuité de l'atelier présenté à Chamonix, aux journées COPIRELEM 2000, par René Berthelot[1]. La problématique de ce travail est donc celle introduite par la thèse de René Berthelot et Marie-Hélène Salin : l'enseignement de la géométrie, du cycle 3 de l'école primaire au collège, en prenant en compte les connaissances spatiales des élèves ou même en favorisant leur construction ; ceci devant s'accompagner d'une organisation de situations permettant la mise en œuvre et la prise de conscience de la modélisation qu'entraîne le passage d'une validation de type spatial à une validation dans le cadre d'une théorie géométrique, soit à ce niveau la géométrie euclidienne. Nous rappelons donc les bases théoriques d'élaboration des situations présentées, puis leur construction, et présentons l'analyse de leur mise en œuvre. En conclusion nous essaierons de présenter quelques éléments de réponse aux nombreuses questions des participants à l'atelier.

[1] Berthelot 2001.

30ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.
pages 293 *à* 306

I. LES TROIS PROBLÉMATIQUES DU TRAVAIL SPATIO-GÉOMÉTRIQUE ET LA NÉCESSITÉ DE L'INTRODUCTION DU MÉSO-ESPACE

I.1 Les trois problématiques spatio-géométriques

L'analyse des modes culturels – courants ou savants – de rapport à l'espace met en évidence trois problématiques du travail spatio-géométrique qui existent dans la société et sont en jeu dans l'enseignement :

1. La problématique *pratique* est caractéristique des problèmes spatiaux non scolaires, tels que vécus dans la vie de tous les jours, dans des situations d'action. Dans cette problématique, l'individu contrôle ses rapports à l'espace de manière immédiate et empirique. Les solutions retenues sont empruntées à la culture, dans la logique du "sens pratique" (Bourdieu) ; les situations nouvelles sont résolues par ajustement, et la vérification de l'adéquation de la solution se fait sous le mode de l'évidence immédiate. Ce mode de fonctionnement ne nécessite pas de regard réflexif sur les méthodes utilisées pour réussir ; la communication des indications utiles, quand elle est nécessaire, s'effectue avec la même économie de conceptualisation. On peut noter que ce mode "naturel" de rapport à l'espace était presque universellement partagé par les enfants du milieu du XIXème siècle vivant dans une France rurale ; à l'heure actuelle, le mode de vie dominant (usage intensif de véhicules particuliers, temps moindre accordé aux jeux à cause de la télé…) ont pu rendre plus rares les occurrences de tâches spatiales pour les enfants d'âge scolaire.

2. La problématique de la *géométrie scolaire du secondaire* est celle qui est attendue des élèves à partir du collège ; elle exige un rapport à l'espace qui fait appel à des dénominations théoriques et non plus empiriques (vocabulaire géométrique qui fait l'objet d'un entraînement intensif dès la classe de Sixième) et une consistance théorique du discours, notamment dans l'apprentissage de la démonstration. Les difficultés des élèves lors de cette transition sont suffisamment connues ; ce sont elles qui motivent les propositions figurant dans le projet introduit par R.Berthelot et M.H.Salin, et repris ici.

3. La problématique de *modélisation* est celle du monde scientifique et technique : c'est celle qui organise un travail de résolution de problèmes spatiaux avec prévisions des solutions, formulation et justification des moyens géométriques ayant permis de les obtenir, et éventuellement invalidation des modèles inadéquats par des moyens empiriques adaptés. Cette problématique est la plus difficile à concevoir car elle est absente d'une culture exclusivement mathématique ; de plus elle nécessite la prise en compte du champ des approximations, or celui-ci a été complètement écarté de l'école primaire et secondaire, du moins en mathématiques, et n'est que peu abordé même dans les enseignements de sciences expérimentales. La prise en compte de cette problématique suppose que l'on fasse une distinction claire entre l'espace modélisé, où les moyens spatiaux empiriques n'ont pas à être disqualifiés, et le modèle, qui obéit quant à lui à des critères théoriques. Les moyens de communication et de validation dans le modèle ne sont donc pas, ni comme supports ni comme formulations, les moyens ayant cours dans l'espace modélisé. Ainsi la feuille de papier est un moyen efficace de communication et de

vérification dans le modèle alors que les problèmes posés peuvent l'être dans un espace de grande dimension.

La problématique de modélisation a un intérêt social évident, dans la mesure où elle est l'outil pertinent de résolution du monde scientifique et technique, de niveau moyen ou élevé : elle sera donc utile à un nombre important d'élèves dans leur future vie professionnelle. Mais de plus, elle est la seule qui permette de faire le lien entre les deux premières problématiques, et ainsi de motiver la géométrie théorique par son efficacité dans la prévision de phénomènes spatiaux.

I.2 L'introduction du méso-espace

Des travaux déjà anciens ont fait apparaître que le rapport pratique à l'espace est un obstacle à l'introduction de la géométrie théorique, car ce rapport pratique est inégalable en termes d'efficacité pour un moindre coût de conceptualisation. L'élève placé devant une injonction d'avoir à justifier mathématiquement un résultat prouvé empiriquement, voire "évident", ne comprend souvent pas la nature et les buts de ce jeu qui semble gratuit. Or l'enseignement secondaire fait actuellement l'économie du passage par la modélisation, et prend donc de plein fouet les incompréhensions et obstacles provoqués par l'articulation brutale pratique/théorique.

La prise en compte de la modélisation dans l'enseignement de la géométrie est ce qui permet de faire le lien entre problématique spatiale et problématique de géométrie théorique. Mais cette prise en compte ne peut s'effectuer directement sur un micro-espace comme la feuille de papier, pour des raisons de trop grande proximité de l'espace et du modèle, et aussi de non fonctionnalité du micro-espace pour certaines tâches, ainsi que nous l'argumentons ci-dessous.

Il y a donc lieu d'introduire des problèmes à résoudre dans le méso-espace – espace "moyen", soit espace domestique, ou espace de l'établissement scolaire, de la cour de récréation, du gymnase – afin que la distance souhaitable existe entre l'espace des problèmes posés et l'espace de leur représentation.

Par ailleurs une analyse des possibilités de contrôle des objets géométriques dans les deux espaces – micro et méso – fait apparaître la différence de leurs fonctionnalités, différence qui explique un certain nombre des déboires de la géométrie au collège. En effet le micro-espace ne permet pas d'organiser un milieu permettant de discriminer l'évidence et la preuve formelle, ceci pour de nombreux concepts géométriques.

Ainsi le micro-espace, contrairement au méso-espace, est transparent pour certaines tâches :

- Les tâches de tracé – droites, cercles – sont effectuées avec des instruments qui prennent en charge le travail et le contrôle sans que l'élève ait à investir des connaissances pour effectuer ou vérifier ; dans le méso-espace, la cour par exemple, le tracé d'une droite, d'un angle droit, ou d'un cercle nécessite la mise en œuvre de connaissances géométriques ; de plus les bords de la feuille étant absents, les repères visuels qu'ils constituent ne peuvent plus jouer leur rôle à l'insu de l'élève ou du professeur.
- Dans le micro-espace, les figures élémentaires étant tracées globalement, il est plus difficile pour les élèves d'envisager une partie ou un prolongement de la figure ; dans le méso-espace il est souvent nécessaire de prolonger les segments tracés, ou de se situer sur une partie d'une ligne ou d'un cercle ; on est *dans* l'espace et non plus en vision globale de cet espace, ce qui change la perspective

et les modes d'action : le méso-espace impose des déplacements et des recollements.

- Dans le méso-espace, la nécessité de la saisie et du recollement d'informations conduit d'emblée à l'introduction de *plans*, et, en fait, au moins les plans horizontaux et verticaux. De plus, dès que les informations sont suffisamment complexes, il devient nécessaire de représenter pour raisonner et communiquer. La feuille de papier acquiert ainsi naturellement un statut de représentation, d'outil d'aide à la décision et de traitement.
- Les objets de base que l'on questionne seront modélisés par des surfaces découpées dans les plans horizontaux ou verticaux (fils tendus par exemple) ; les représentations posent alors la question de la conservation ou non de propriétés géométriques ;
- La taille de l'espace permet de prendre en compte les problèmes de mesurage, d'approximation… Le matériel à la disposition des élèves comprend des décamètres, des équerres et règles de tableaux, des fils à plomb, des ficelles à tendre… Ce matériel, contrairement à un double-décimètre dans le micro-espace, ne substitue pas son contrôle à celui de l'élève ; au contraire c'est l'élève qui doit contrôler que les informations fournies par le matériel sont bien pertinentes, plausibles, valides. Ainsi pour tracer une droite, on pourra mettre bout à bout des règles de tableau ou des tasseaux, mais dans ce cas on devra contrôler que le produit final est bien une ligne droite – par utilisation de ficelle ou visée …

Le méso-espace constitue donc un *milieu* (au sens de la théorie des situations didactiques) pour construire des situations de modélisation permettant de mettre en évidence la fonctionnalité des savoirs géométriques pour anticiper, décider, tracer dans l'espace : un espace de réalisation de propriétés géométriques dont on vise à travailler l'opérationnalité, ce qui ne peut être fait dans le micro-espace. Il reste à spécifier des milieux précis, avec des objets, des consignes, des variables didactiques, pour travailler des savoirs de géométrie. Nous en donnons un exemple ci-dessous : une des situations construites dans le méso-espace a été expérimentée dans deux CM2 à l'école Jules Michelet, il s'agit de travailler sur la notion de distance d'un point à une droite puis de l’utiliser comme outil pour définir le parallélisme.

La deuxième partie présente successivement les objectifs des situations, des indications sur les résultats de l’analyse a priori et sur le déroulement effectif dans les classes, les questions des participants. Sont placées en annexe les fiches didactiques détaillées (annexe 1), et les questions posées aux participants de l’atelier pour guider une analyse a priori succincte portant sur la présentation des fiches didactiques allégées (annexe 2).

II. DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE – DROITES PARALLÈLES : DESCRIPTION DE LA SITUATION ET COMPTE-RENDU DE L'EXPÉRIMENTATION

II.1 La situation

La situation a été construite par R.Berthelot et M.H. Salin, dans le cadre de leurs travaux sur la géométrie au primaire.
Les séances se déroulent en partie dans le préau de l'école, en partie dans la classe.

Objectifs :

- Introduire la définition de la distance d'un point à une droite comme la longueur du segment le plus court que l'on peut tracer entre le point donné et un point de la droite.
- « découvrir » que c'est la longueur du segment d'extrémités le point donné et le pied de la droite perpendiculaire à la droite donnée passant par ce point.
- « découvrir » que tous les points à une distance donnée d'une droite donnée sont alignés. La droite qu'ils forment est dite parallèle à la première.
- placer les élèves dans une situation au cours de laquelle pour échanger sur leurs résultats, ils ont intérêt à représenter la situation du méso-espace par un schéma. Il y a donc deux espaces de travail : celui du sol du préau, auquel s'appliquent des tâches proposées par l'enseignant, et l'espace du tableau de la classe, sur lequel les élèves représentent l'espace du sol et formulent les actions réalisées ou à réaliser dans le préau.

Les séances sont construites autour de deux problèmes, faisant appel au matériel suivant : ficelle, décamètre par groupe, crayon et papier, règle et équerre de tableau mais pas de règles ni de double décimètre, craie.

Problème 1 :

Une ligne droite d'une dizaine de mètres de longueur est tracée sur le sol de la cour. Chaque groupe se voit attribuer un "point" matérialisé par une croix. Ces points sont placés à une distance de la ligne comprise entre 1m 60 et 2m. Les élèves ont à mesurer la distance des points à la droite. Ils ont à leur disposition, règle, équerre, décamètre, ficelles, craies …

Problème 2 :

Problème 2-a La droite est tracée, les points précédents effacés. Chaque équipe place un point à 1m92 de la droite.

Problème 2-b– Après avoir placé 2 points à 125 cm de la droite, chaque groupe doit placer, en un temps bref décompté par le professeur, le plus de points possibles à la même distance de la ligne droite.

II.2 L'analyse a priori (voir fiches détaillées en annexe 1)

Pour le problème 1, la suite des mesures obtenue en faisant tourner le mètre ruban autour du point donné indique à une incertitude près, liée au matériel, une solution de type « zone la plus proche » sur la ligne. Une mesure est trouvée par chaque groupe pour plusieurs points. On peut éventuellement s'attendre à des difficultés de mesurage ; par contre, avec les distance considérées, il est relativement facile de repérer la zone où la distance passe par un minimum. Remarquons que dans le micro-espace de la feuille de papier, ce travail n'aurait pas de sens : il est impossible de repérer la zone de distance minimale avec une évidence suffisante. Par contre, un logiciel de géométrie dynamique tel Cabri ou Géoplan, où l'on affiche la distance au fur et à mesure qu'un point M se déplace sur la droite, permet de visualiser de la même façon le moment où la distance passe par un minimum. Cette phase ne requiert donc pas de se rendre compte que la plus petite distance est atteinte lorsque l'on a une perpendiculaire menée de P à la droite.

Pour le problème 2, il est par contre très difficile de réussir sans mettre cette propriété en œuvre. L'hypothèse faite est que les angles droits sont connus, et que les élèves les introduiront spontanément comme moyen d'être sûr que l'on est bien "en face" de la droite.

Il est du reste difficile de construire une situation fonctionnelle de cette propriété, en tant qu'elle apparaît dans une progression comme étant un des axiomes de la géométrie euclidienne. A. Berté avait analysé, dans "Différents ordres de présentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire"[2] la dépendance existant entre les notions d'inégalité triangulaire, de perpendiculaire plus courte que l'oblique, l'intersection de deux cercles, et le théorème de Pythagore ; elle montrait qu'il était très difficile de trouver une problématisation rationnelle de toutes ces notions, dans la mesure où certaines opèrent comme des axiomes pour les autres, et que le choix des propriétés problématisées était assez fortement contraint : s'il est assez facile de problématiser Pythagore, il est beaucoup moins naturel de le faire pour les cas d'intersection de deux cercles ou la perpendiculaire plus courte que l'oblique.

La situation construite n'est donc pas adidactique, mais *à dimension adidactique*. Il s'agit de retrouver un savoir mathématique par *abduction* et non par induction : c'est-à-dire, s'apercevoir qu'un savoir connu est celui qui va donner la solution d'un problème rencontré, on va donc, non pas découvrir mais *reconnaître* ce savoir comme fonctionnel pour résoudre le problème.

Le problème 2b contraint les élèves à placer beaucoup de points très vite, ce qui conduit à des erreurs de distance ou d'orthogonalité, ce qui revient au même ; la contrainte temporelle est une variable didactique destinée à inciter les élèves à trouver une stratégie plus efficace, à savoir, prolonger la ligne obtenue dès que l'on a quelques points (deux évidemment, au minimum, mais quelques uns de plus peuvent être souhaitables pour la précision).

II.3 Le déroulement effectif

Lors de l'atelier, quelques extraits de vidéos ont été présentés, montrant des solutions ou des difficultés rencontrées par les élèves. On peut résumer ainsi très rapidement le déroulement effectif :

- à la première séance, certains élèves trouvent effectivement la distance la plus courte en utilisant le mètre déroulant et d'autres ont déjà « l'intuition » de l'angle droit, mais sans nécessairement pouvoir coordonner correctement la position de l'équerre (courte) avec celle du point A. Le retour en classe pour échanger sur la situation favorise bien l'emploi d'une figure qui « représente » ce qui se passe sous le préau, même si à ce moment, cela se fait à la demande du professeur.
- A la deuxième séance, nous avons observé les différentes stratégies énumérées dans la fiche. Les exercices sont essentiels pour que les élèves s'approprient individuellement la méthode de tracé.

[2] Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 15/3, 1995.

- La dernière phase est la plus problématique. Alors que l'alignement des points à 1m25 de la droite semble évident pour les observateurs adultes, les élèves développent des tactiques pour placer très vite les points demandés, au risque de faire de nombreuses erreurs de mesures. C'est l'affirmation de la professeure : « moi si je veux, je place 20 points en moins d'une minute", qui dans les 2 classes a suscité la découverte de la solution. On voit alors des élèves faire un croquis, où certains montrent aux autres que tous ces points à même distance sont alignés ; après quoi l'équipe gagnante prolonge la ligne des points déjà placés. L'institutionnalisation prévue est faite ensuite par la maîtresse : **tous les points qui sont à 1m 25 de la droite sont alignés, et la droite qu'on obtient est parallèle à la ligne tracée**.

Remarque : pour que ces connaissances se stabilisent chez les élèves, outre les exercices décrits, des activités de réinvestissement et d'entretien seront nécessaires.

III. QUESTIONS DES PARTICIPANTS À L'ATELIER

Pour les participants à l'atelier, un certain nombre de questions ont été l'objet de discussions :

- *Comment effectuer la dévolution de la première situation ?* La solution présentée dans la fiche didactique, où la part de l'enseignant est importante, n'a pas rencontré de difficultés particulières, sauf en SEGPA (voir Bloch-Salin, Séminaire national de didactique des mathématiques en mars 2003). Les élèves se saisissent bien du problème qui est pour eux un problème usuel de mesurage. En fait, ici, ce n'est pas le problème qui fait problème, c'est le moyen de résoudre le problème ! Ceci est lié aux difficultés évoquées de problématisation d'un axiome.

- *Faudrait-il prévoir une étape intermédiaire où l'on fasse constater par les élèves qu'il existe des droites (dites parallèles à D) où quelle que soit la position d'un point sur ces droites, ces points sont à la même distance de la droite D ? Cela pourrait préparer la leçon 3 ?* Non, le milieu objectif est bien installé, et les élèves ont donc déjà des moyens suffisants, d'ailleurs la solution est trouvée. D'autre part cela ferait disparaître l'enjeu de la leçon 3, qui a passionné les élèves.

- *La solution n'est pas trouvée par tous, et le côté compétition du jeu du béret peut être gênant.* On a là un exemple du fait que construire une situation consiste à trouver un compromis entre des exigences contradictoires : nous avons bien observé la force de cette situation de concurrence entre les 2 équipes, incluant des moments de concertation, qui a incité les élèves à s'investir, à chercher des solutions (et à trouver celle attendue). Ce jeu permet donc diffusion de connaissances et formulation. Mais d'un autre côté, la pression du jeu est telle que certains groupes étaient prêts à faire n'importe quoi (i.e. ne plus contrôler les mesurages ou la position de l'équerre pour aller plus vite). Le professeur joue un rôle important d'arbitre, refusant les points mal placés et rappelant les règles.

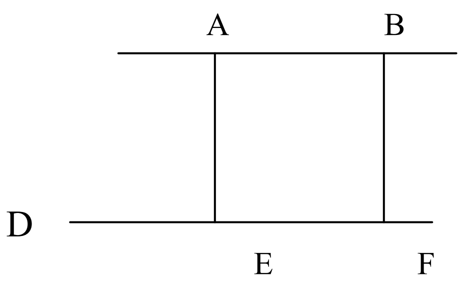
- *Le professeur est toujours la personne qui fait les tracés intermédiaires pour conclure sur la validité des points proposés.* Ceci prouve que l'espace n'est pas homogène pour le professeur et les élèves. Ceux-ci n'ont pas encore acquis les compétences nécessaires pour pouvoir réaliser ces contrôles de manière rapide.

- *Une droite est-elle définie par deux points ?* c'est une question sensible de l'enseignement et qui revient jusqu'en secondaire. Cette question peut être problématisée avec les visées, par exemple en demandant à un élève de viser un autre élève pour définir la ligne droite, et d'autres élèves viennent se mettre sur la droite ou à l'écart de la droite … On observe alors que cette consigne met certains élèves en difficulté, ce qui prouve bien qu'ils ne maîtrisent pas les critères perceptifs de l'alignement.

En primaire, on tracera des droites correspondant à une situation de proportionnalité avec plusieurs points, et ceci perdure jusqu'en Troisième où on vérifiera que des points (plus de deux) sont alignés lorsqu'une équation est donnée. En classe de Seconde, le professeur exige que les élèves tracent la droite avec deux points seulement. Les élèves s'y habitueront puis on étudiera des fonctions quelconques, où de nouveau il faudra plus de deux points pour tracer les graphiques … On peut faire l'hypothèse que les élèves ne percent généralement pas le mystère de ces aller-retour entre deux et plusieurs points. En classe de première scientifique, une expérimentation a demandé à des élèves de faire graphiquement le produit de deux fonctions affines, et ils ont produit le "théorème" : *le produit de deux droites est une droite*. Il a fallu leur faire placer plusieurs points du graphique pour qu'ils invalident ce théorème.

- *Quelles questions pose l'institutionnalisation proposée ?* Nous n'avons pas eu beaucoup le temps d'examiner cette question que nous n'avons nous-même pas complètement éclaircie, en particulier par l'élaboration de situation et par des observations.

A l'issue du processus, les élèves savent construire une droite D' parallèle à la droite donnée D. Mais la première droite est-elle parallèle à celle qu'on a construite ? D'un point de vue mathématique, l'axiome d'Euclide permet de le démontrer. Il n'en est bien sûr pas question avec des élèves de ce niveau. On peut d'ailleurs se demander si la symétrie de la relation de parallélisme n'est pas pour eux une espèce d'évidence liée à la connaissance du rectangle, ce qui permettrait de construire ainsi un critère de reconnaissance du parallélisme de 2 droites : on choisit 2 points d'une même droite et on vérifie qu'ils sont à la même distance de l'autre droite.

	Pour construire la droite AB parallèle à (D), et à une distance donnée, on a tracé les segments EA et FB tels que EA = FB et les angles AEF et BFE soient droits. Les élèves peuvent-ils reconnaître dans cette configuration le quadrilatère ABFE comme un rectangle ? comment répondent-ils à la question : quelle est la distance de E à la droite (AB) ?

QUELQUES RÉFÉRENCES

BERTE A. (1995) Différents ordres de présentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.* ***15/3****, 83-130.*

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse Université Bordeaux 1. LADIST 40 rue Lamartine 33400 Talence.

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1994), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N n°* ***53.***

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1995), Un enseignement des angles au cycle 3, *Grand N n°* ***56.***

BERTHELOT R (1998) Adaptation de recherches et questions liées au statut de l'espace dans l'enseignement *Actes du XXVème colloque inter-IREM (Copirelem),* IREM de Brest.

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1999), L'enseignement de l'espace à l'école primaire *Grand N n°* ***65.***

BERTHELOT R. (2000) Quelques moyens pour placer l'espace au centre de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et pour préparer tant l'enseignement technique de l'espace que l'enseignement mathématique du premier cycle. *Actes du XXVIIème colloque inter-IREM (Copirelem),* IREM de Grenoble.

BERTHELOT R et SALIN M.H.,.(2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège : Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x n°* ***56*** , IREM de Grenoble.

GOBERT S. (2001) Questions de didactique liées au rapport entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire. *Thèse Université Paris 7 .*

GROUPE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES AU COLLEGE (2000) *Géométrie au cycle central 5ème et 4ème : un enchaînement d'activités* IREM de Bordeaux.

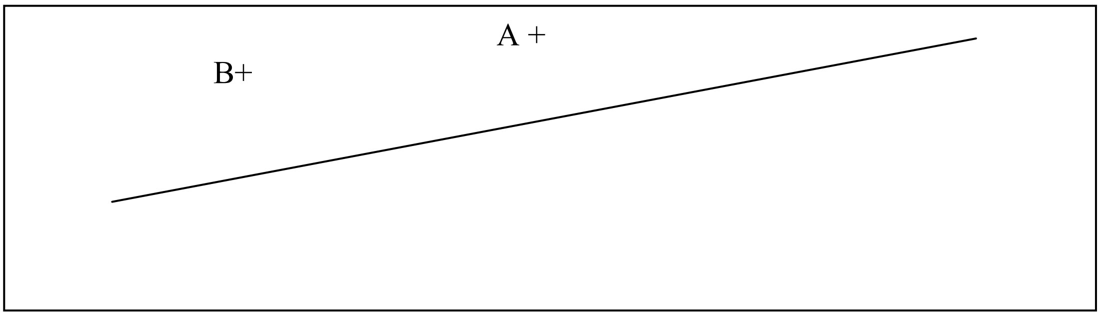
MAURIN C. (2001) La feuille de papier comme laboratoire d'expérimentation graphique. *Articulation école –collège : des activités géométriques Commission inter-irem 1er cycle et COPIRELEM, ed. IREM de Paris.*

Annexe 1

LEÇON 1

Mesurer la distance d'un point à une ligne droite

Organisation de la classe : par groupes : G1, G2, G3 , etc
Une ligne droite D d'une dizaine de mètres de longueur est tracée sur le sol.



ETAPE 0 : **Présentation de la question étudiée**

Les élèves sont rassemblés autour d'une droite tracée. Il y a deux plots (un bleu, un rouge) situés à des distances différentes de la droite. Le professeur (P) demande quel est le plot qui est situé le plus près de la ligne droite puis de placer un plot vert tel que le plot vert et le plot rouge soient tous les 2 à la même distance de la droite.

Ce petit échange permet au professeur d'annoncer « *Vous savez mesurer la distance entre 2 points, aujourd'hui, vous allez apprendre à mesurer la distance d'un point à une droite.* »

ETAPE 1 : **Recherche de la plus courte distance**

P place sur le sol à la craie, 6 points A, B... répartis le long de la droite, à des distances différentes de la droite, entre 1,50 et 2 m. Le problème est présenté par P à l'ensemble du groupe sur un exemple.

P place un point M sur la droite (assez loin du pied de la perpendiculaire) et demande : « *A quelle distance est-on de A ?* ». Un élève vient mesurer la distance entre les 2 points.

P continue : *« Est-ce que je pourrai dire que la distance de A à la ligne droite est ce nombre ? Si on essaie de mesurer en prenant d'autres points de la ligne droite, est-ce qu'on va toujours trouver la même longueur ? non »* (au besoin un élève vient le montrer en mesurant).

« Hé bien, voilà le problème que je vous pose : y-a-t-il un endroit de la ligne où on est le plus près de A ? à quelle distance est-on alors de A ?

Chaque groupe va répondre à cette question pour son point en marquant le résultat de la mesure sur un papier. Puis vous tournerez et essaierez pour un autre point. »

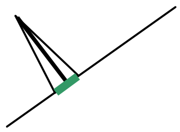
ETAPE 2 Echanges sur les résultats, dans la classe

On rentre dans la classe, et on mène un échange collectif sur les résultats, d'où peut ressortir :

- accord sur les 2 mesures effectuées pour un même point,
- ou nécessité de vérification collective (si la différence entre 2 groupes est supérieure à 1 cm).

ETAPE 3 Premiers échanges sur la position de la ligne le long de laquelle est réalisée la mesure la plus petite

P demande : « *Pouvez-vous m'expliquer s'il y a un endroit particulier où vous mesurez pour trouver la distance la plus courte ?* ». Des élèves (ou P) suggèrent l'utilisation d'un schéma, qui représente n'importe lequel des domaines.

	Remarque à accueillir, si elle vient, sans insister : les mesures minimales sont faites dans une certaine zone. On peut caractériser cette zone comme proche (à gauche et à droite) de la perpendiculaire à la ligne de base menée du point.

ETAPE 4 Institutionnalisation :

Le professeur prend l'exemple d'un premier domaine et dit : « en géométrie, on dit que la distance de A à la ligne droite est la plus courte longueur que vous avez trouvée, c'est ...cm »

Le nombre trouvé a une incertitude qui pourra être convenue dans une mesure réalisée sous contrôle collectif (réalisation lorsque le problème se pose).

La propriété de perpendicularité n'est pas institutionnalisée à ce moment sauf si elle a été utilisée et /ou formulée par une majorité d'élèves.

LEÇON 2

Placer un point à une distance donnée d'une ligne droite

Matériel : identique

ETAPE 1 : Chaque équipe de 4 place un point à une distance donnée de la droite (1m92cm) de la ligne

Quelques stratégies possibles :

1) Partir d'un point extérieur à la ligne, mesurer la distance à la droite, et rapprocher ou éloigner le point jusqu'à obtenir un point à la bonne distance. Prolonger la ligne de mesure suppose d'avoir perçu que toutes étaient dans la même direction, et que l'on peut économiser des tâtonnements en « glissant ».

2) Partir de la ligne, placer un point au jugé du point de vue de la direction mais à la bonne distance, puis vérifier que 1,92 m est bien la plus courte distance entre le point placé et tous les points de la droite. Si ce n'est pas le cas, déplacer la position du point, comme en 1.

3) Partir de la ligne, et sur la bonne direction (ce qui suppose d'avoir perçu la perpendicularité), rechercher le point à la bonne distance.

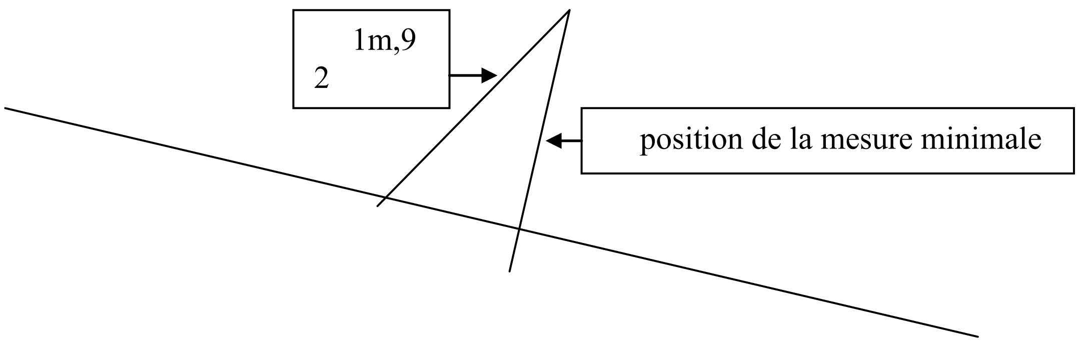
ETAPE 2 Vérification tournante d'un groupe par un autre.

Est-ce que le point placé par vos camarades est bien situé à 1,92 m de la droite ?

ETAPE 3 Examen des situations erronées : dans le préau puis dans la classe

Une situation sur le sol. Matérialisation avec un mètre de la position de vérification et recherche avec un autre instrument de sa position par rapport à la droite pour obtenir 1m92. Donc question : comment bien placer l'instrument pour réussir du premier coup ? On va réfléchir à cela dans la classe .

En classe quelqu'un vient montrer le problème sur un dessin au tableau sur une feuille, représentant la ligne droite, le point et la position des 2 instruments. « *Qu'est-ce qui ne va pas ? Vous avez choisi un point sur la droite mais l'instrument de mesure n'est pas placé dans la bonne direction. Le problème c'est de trouver la bonne direction pour bien placer l'instrument.* »



Si aucun élève ne propose une piste exploitable par P (« espace coupé en 2 parties égales », angle droit), P s'explique en terme d'espace partagé en deux, et montre l'angle droit.

ETAPE 4 : Exercice individuel

Sur une feuille où le professeur a tracé une droite, les élèves doivent placer un point à 12 cm de la droite.

Contrôle entre voisins avant examen collectif des difficultés rencontrées et des erreurs.

LEÇON 3

Placer vingt points à une distance donnée d'une ligne droite
Notion de droite parallèle à une droite donnée

Matériel : dans le préau, une ligne droite au sol. Matériel antérieur et papier à disposition

La classe est partagée en 8 groupes de 3, 4 d'un côté de la ligne, 4 de l'autre, numérotés de 1 à 4.

ETAPE 1 : Préparation

Chaque groupe construit 2 points à une distance de 125 cm de la droite. Le professeur vérifie rapidement (par alignement visuel discret) et fait refaire les points nettement mal positionnés.

ETAPE 2 : le jeu du béret

P. annonce :

- « 4 groupes d'un même côté forment une équipe, 4 autres une autre équipe.
- Chaque équipe a placé 8 points à 1m25 de la droite. Je vais appeler un groupe de chaque équipe pour placer d'autres points. L'équipe qui la première aura placé correctement 20 points aura gagné.
- On va jouer en plusieurs parties, chaque partie sera jouée par un groupe de chaque équipe que j'appellerai (par ex les deux groupes 3), c'est eux qui joueront et la partie durera 2 minutes. Entre 2 parties, vous pourrez vous concerter pour vous donner des conseils. »

Première partie : j'appelle les groupes 2. (le professeur joue sur la durée, il arrête quand chacun des groupes a construit un point)

Vérification par P de la validité des points placés, et détermination du score de chaque équipe.

Plusieurs parties sont jouées (trois maximum), entrecoupées de concertation par équipes. Si à la 3ème partie, aucune équipe n'a entrevu la solution, P dit : « je vous signale qu'il y a un moyen très rapide de placer des points justes qui peut permettre de gagner en une fois »

Puis concertation et déroulement avec changement d'équipes.

ETAPE 3 Explicitation de la propriété d'alignement des 20 points

- Arrêt du jeu, une fois les 20 points placés ou au bout d'un certain temps.
- ou bien l'alignement a été mis en œuvre, le professeur le fait expliciter, vérifier etc…
- ou bien le professeur l'explique et le fait réaliser.

ETAPE 4 Institutionnalisation

- Les points situés à la même distance d'une ligne droite (et d'un même côté) sont sur une autre ligne droite, que l'on dit parallèle à la première.
- Comment construire une ligne droite parallèle à une droite donnée ? (en construisant 2 points à la même distance de cette droite et en les joignant.)

Exercice

Chacun place le plus de points qu'il peut, distants de la ligne droite de 12 cm, en un temps limité.

ANNEXE 2

Questions posées aux participants pour guider l'analyse a priori

Leçon 1

- Comment assurer la dévolution de la situation aux élèves ?
- Quelles procédures peuvent utiliser les élèves pour répondre à la question : y a t il un endroit où on est le plus près de A ?
- Quelle difficulté principale peuvent rencontrer les élèves quand le professeur demande : pouvez-vous m'expliquer s'il y a un endroit particulier où vous mesurez pour trouver la distance la plus courte ?

Leçon 2

- Décrire plusieurs procédures possibles pour placer un point à une distance donnée de la droite
- Quelle erreur peut faire apparaître la vérification ? sur quel « schéma » le professeur peut-il s'appuyer pour mener à bien l'étape 3 ?

Leçon 3

- Intérêt et limites du jeu du béret
- Quelles questions pose l'institutionnalisation proposée ?