RÉSOUDRE DES PROBLÈMES ENTRE ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE

AU PRIMAIRE, AU SECONDAIRE… EN FORMATION INITIALE

Lalina Coulange
Maître de Conférences à l'IUFM de Créteil

Résumé :
L'enseignement de la résolution de problèmes, ou plus ponctuellement la participation à des rallyes mathématiques amènent les élèves de l'école élémentaire à rencontrer des énoncés complexes, traités par l'algèbre au secondaire.

Ces problèmes faisaient autrefois l'objet d'un enseignement d'arithmétique élémentaire. En nous appuyant sur des extraits d'ouvrages du début du XXe, nous proposerons aux participants de l'atelier de revisiter des classes de problèmes arithmétiques et les techniques de résolution associées. Puis, à partir de quelques exemples, nous montrerons en quoi des procédures personnelles d'élèves du primaire, voire du secondaire, se rapprochent à l'occasion, de ces techniques de résolution, qui ne font pourtant plus l'objet d'aucun enseignement explicite.

L'objectif de cet atelier était d'explorer des problèmes « entre arithmétique et algèbre », afin de questionner leur rôle à divers niveaux d'enseignement, ainsi qu'au sein de différents domaines du savoir enseigné. Nous regroupons ces problèmes selon des catégories mises en avant par le savoir autrefois enseigné en arithmétique élémentaire : problèmes de partages en parties inégales, de fausses positions, …

I. LES PROBLÈMES DE PARTAGE EN PARTIES INÉGALES

La première classe de problèmes présentée lors de l'atelier est celle des énoncés, dits de *partages en parties inégales.*

I.1 Problèmes d'arithmétique ou d'algèbre ?

Nous avons distribué à chaque participant, une fiche comportant une série de cinq problèmes. Une échelle *entre arithmétique et algèbre* est associée à chaque énoncé.

La consigne donnée était :
Pour chaque énoncé, complétez l'échelle associée suivant le modèle

Arithmétique						Algèbre

1. *Problème résolvable par l'arithmétique, pour lequel une solution algébrique vous paraît inadéquate ou inexistante.*
2. *Problème qui vous semble plus facile à résoudre par l'arithmétique que par l'algèbre.*
3. *Problème dont la complexité de la résolution par l'algèbre et par l'arithmétique vous paraissent équivalentes.*

4. *Problème qui vous semble plus facile à résoudre par l'algèbre que par l'arithmétique.*
5. *Problème résolvable par l'algèbre, pour lequel une solution arithmétique vous paraît inadéquate ou inexistante.*

1. Nicolas a 14 billes de plus que Lucie. Ils ont rassemblé leurs 68 billes dans un sac. Combien de billes possède chaque enfant ?

Arithmétique						Algèbre

2. Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de timbres. Si Marie a 6 fois plus de timbres que Paul, que Brenda en a 128 de moins que Marie et que Paul en possède 32, quel est le nombre de timbres des trois enfants ?

Arithmétique						Algèbre

3. Marc a quatre fois plus d'économies que Pauline. Blandine a deux fois moins d'argent que Marc. Pauline a 33,60 € de moins que Marc. Quelle est la somme totale économisée par les trois enfants ?

Arithmétique						Algèbre

4. Trois enfants se partagent des douceurs… Jim a mangé trois fois moins de bonbons que Laura. Jules a dévoré à lui tout seul deux fois plus de sucreries que Jim et Laura réunis ! Sachant qu'il y avait 24 bonbons au départ, combien chaque enfant en a-t-il mangé ?

Arithmétique						Algèbre

5. Il y a trois tas de cailloux. Il y a trois fois plus de cailloux augmenté de 5 dans le premier tas que dans le troisième. Le deuxième tas contient 15 cailloux de plus que le double du nombre de cailloux du premier tas. Sachant qu'il y a 180 cailloux en tout, combien chaque tas contient-il de cailloux ?

Arithmétique						Algèbre

Problèmes de partage « entre arithmétique et algèbre »

Après un temps de recherche individuel, la mise en commun des réponses a révélé que :

- Le deuxième problème de la série est considéré par l'ensemble des participants comme relevant de l'arithmétique, une solution algébrique en réponse à cet énoncé leur paraissant tout à fait inadéquate.
- La majorité des formateurs a considéré que le troisième énoncé relevait essentiellement de l'algèbre : pour la plupart, ils n'entrevoyaient pas de solutions arithmétiques simples en réponse à ce problème.
- Pour les énoncés restants, les réponses étaient diverses. Le premier problème étant souvent vu comme plutôt « arithmétique », tandis que les quatrième et cinquième énoncés étaient loin de faire l'unanimité.

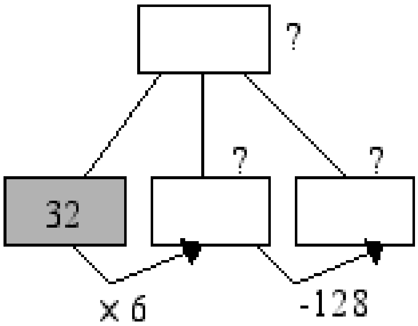
Ce premier bilan a permis de soulever les questions suivantes.

- Pourquoi l'énoncé 3 est-il qualifié d'arithmétique, de façon unanime ? En quoi l'algèbre ne paraît-il pas pertinente pour résoudre ce problème ?

D'aucuns ont répondu que cela venait du fait que l'on connaissait le nombre de timbres appartenant à Paul. Ce qui permet de calculer directement, le nombre de timbres de Marie (qui en a six fois plus que Paul, soit $32 \times 6 = 192$) puis le nombre de timbres appartenant à Brenda (qui en a 128 de moins que Marie, soit $192 - 128 = 64$ timbres) et enfin le nombre total de timbres ($32 + 192 + 64 = 288$).

Autrement dit, pour résoudre ce problème, on peut calculer directement les données inconnues (les parts de Brenda et Marie) à partir des données connues (la part de Paul), selon les transformations élémentaires décrites dans l'énoncé.

Ce problème peut être schématisé de la façon suivante :



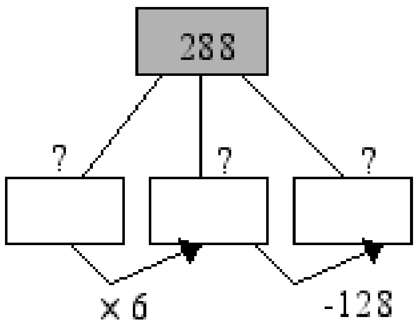
Problème connecté (Bednarz, Janvier 1993)

Selon Bednarz et Janvier (1993), les problèmes que l'on peut résoudre ainsi, *en cheminant directement du connu vers l'inconnu*,[1] sont dits *connectés*. Ils font l'objet de solutions arithmétiques élémentaires ; une résolution algébrique de ces problèmes paraît effectivement peu pertinente.

Ces mêmes auteurs définissent à l'opposé les problèmes *déconnectés* de la manière suivante : *aucun pont ne peut être établi a priori directement entre des données connues pour trouver les données inconnues.*

On peut transformer le problème 3 en un énoncé déconnecté :

> Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de 288 timbres. Si Marie en a six fois plus que Paul et que Brenda en a 128 de moins que Marie, quel est le nombre de timbres de chacun ?



Problème déconnecté (Bednarz, Janvier 1993)

Comme le schéma ci-dessus l'illustre bien, les données inconnues du problème (nombre de timbres de chaque enfant) ne sont pas constructibles, en partant directement du connu (le nombre total de timbres). On ne peut a priori faire l'économie d'un détour symbolique, ou d'un raisonnement intermédiaire, permettant d'exprimer le nombre total de timbres en fonction du nombre de timbres de l'un des enfants, pour résoudre ce problème.

[1] Sans détour de raisonnement, ou symbolique : tout résultat intermédiaire étant calculable à partir du précédent.

Selon Bednarz et Janvier (1993), les problèmes qui sont généralement présentés en algèbre au niveau du secondaire, sont déconnectés. Tandis que la majorité des problèmes présentés en arithmétique à l'école élémentaire seraient des énoncés connectés.

Si c'est effectivement le cas aujourd'hui, de nombreux problèmes *déconnectés* étaient autrefois étudiés dans le cadre d'un enseignement d'arithmétique élémentaire. Notamment, on a pu montrer le rôle particulier joué par les problèmes dits de partages en parties inégales dans la transition entre arithmétique et algèbre dans le savoir mathématique enseigné pendant la première moitié du XX siècle (Chevallard 1989, Coulange 2001b).

C'est à ce titre que nous qualifions ces énoncés de problèmes *entre arithmétique et algèbre*.

- ***Pourquoi les problèmes 1, 4 et 5 ne font-ils pas l'unanimité entre arithmétique et algèbre ?Le fait de considérer le problème 2 comme algébrique est-il pertinent ?***

Les divergences constatées dans les réponses relatives aux énoncés 1, 4 et 5 révèlent une familiarité plus ou moins grande des participants, avec les techniques de résolution arithmétique autrefois enseignées pour résoudre les problèmes de partages connaissant la somme des parts et leur rapport ou leur différence.

La majorité de réponses « algébriques » relative au problème 2, révèle quant à elle, une méconnaissance assez générale de la catégorie de partages inégaux qu'il représente.

Méconnaissance partagée et justifiée par le fait que les solutions arithmétiques de ce type de problèmes, sont tombées dans les « oubliettes » des institutions scolaires. Nous y reviendrons.

I.2 A la recherche de l'arithmétique perdue…

Nous avons proposé aux participants de l'atelier de revisiter les problèmes de partages inégaux, à la lueur d'extraits d'anciens manuels d'arithmétique élémentaire.

Des documents provenant d'ouvrages scolaires de la première moitié du XX siècle (cf. annexe 1.b,c : *Réunion de professeurs 1949, Royer et Court 1932)*, et d'un manuel plus ancien (annexe 1.a, *Camus 1753)* ont été mis à disposition. Il s'agissait dès lors de résoudre un ou deux problèmes de la série initiale (de préférence ceux qui paraissaient plus caractéristiques de l'algèbre lors de la phase précédente), en appliquant le plus fidèlement possible les techniques de résolution autrefois enseignées.

Nous explorons ci-dessous des solutions arithmétiques en réponse aux énoncés du I.1, ainsi « calquées » sur celles décrites dans les manuels anciens.

Solution inspirée de Royer et Court (1931)

1. Nicolas a 14 billes de plus que Lucie. Ils ont rassemblé leurs 68 billes dans un sac. Combien de billes possède chaque enfant ?

Raisonnement :

On demande combien chaque enfant a de billes.

Nous savons :

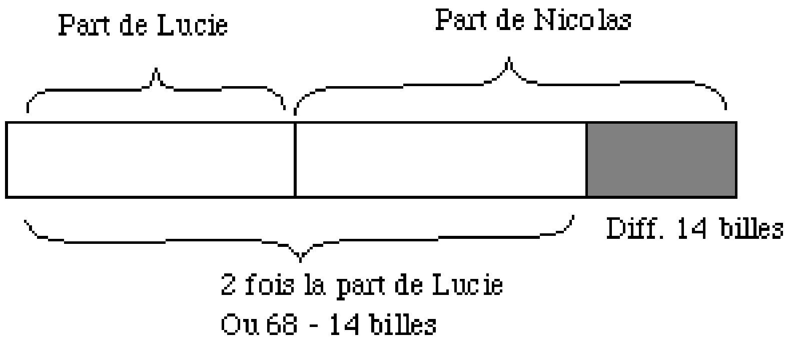
1) que les deux parts contiennent 68 billes au total ;

2) que Nicolas a une part égale à celle de Lucie plus 14 billes.

Le nombre total de billes contient donc : la part de Lucie + 14 + la part de Lucie. Si du nombre de billes total, on retire 14 billes, il reste donc deux fois la part de Lucie.

Solution :

Si l'on retranche 14 à 68, il reste deux fois la part de Lucie ou : 68 – 14 = 54. Lucie a donc 54/2 = 27 billes. Et Nicolas : 27 + 14 = 41 billes.



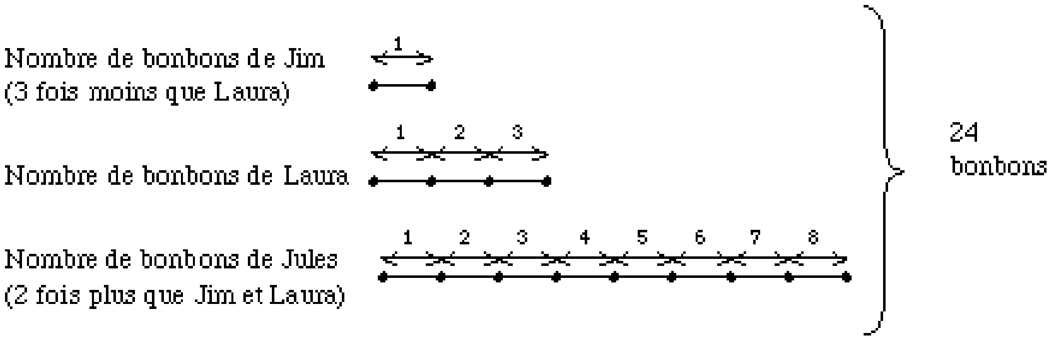
Solution inspirée de Réunion de professeurs (1949)

> 4. Trois enfants se partagent des douceurs… Jim a mangé trois fois moins de bonbons que Laura. Jules a dévoré à lui tout seul deux fois plus de sucreries que Jim et Laura réunis ! Sachant qu'il y avait 24 bonbons au départ, combien chaque enfant en a-t-il mangé ?

24 bonbons = deux fois le nombre de bonbons de Jim et Laura + nombre de bonbons de Jim + nombre de bonbons de Laura

= deux fois et six fois le nombre de bonbons de Jim + nombre de bonbons de Jim + trois fois nombre de bonbons de Laura

= douze fois le nombre de bonbons de Jim



D'où Jim a mangé : 24/12 = 2 bonbons

Laura a mangé : 6 bonbons. Et Jules a mangé : 2 × (6 + 2) = 16 bonbons.

Solution inspirée de Réunion de professeurs (1949)

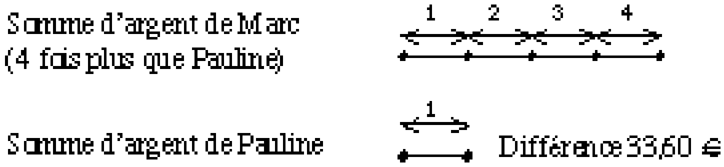
> 3. Marc a quatre fois plus d'économies que Pauline. Blandine a deux fois moins d'argent que Marc. Pauline a 33,60 € de moins que Marc. Quelle est la somme totale économisée par les trois enfants ?

On isole un problème de partage inégal connaissant le rapport et la différence entre deux parts, en rapprochant l'indication : « *Pauline a 33,60 € de moins que Marc* » de : *« Marc a quatre fois plus d'économies que Pauline. ».*

33,60 € = part de Marc moins part de Pauline

= quatre fois part de Pauline moins part de Pauline

= trois fois la part de Pauline



La somme d'argent de Pauline : 33,60 : 3 = 11,20 €
La somme d'argent de Marc : 4 × 5,60 = 44,80 €
D'où l'on en déduit la somme d'argent économisée par Blandine :
44,80 : 2 = 22,40 €.
Puis la somme économisée par les trois enfants 11,20 + 44,80 + 22,40 = 78,40 € .[2]

Solution « deux fausses positions » inspirée de Camus (1753)

> 5. Il y a trois tas de cailloux. Il y a trois fois plus de cailloux augmenté de 5 dans le premier tas que dans le troisième. Le deuxième tas contient 15 cailloux de plus que le double du nombre de cailloux du premier tas. Sachant qu'il y a 180 cailloux en tout, combien chaque tas contient-il de cailloux ?

Si le nombre de cailloux du troisième tas avait été :	1
Le nombre de cailloux du premier tas qui contient trois fois autant que le troisième tas et 5 cailloux de plus, aurait été :	8
Le nombre de cailloux du deuxième tas qui contient deux fois autant que le premier tas et 15 cailloux de plus aurait été :	31

Et la totalité du nombre de cailloux des trois tas aurait été :	40

Voilà la première supposition qui est fausse, non seulement en ce que les parties supposées ne sont pas véritables, mais encore qu'elles ne sont pas proportionnelles à celles dans lesquelles il faut diviser 180, parce que les parts des premier et deuxième tas de cailloux, renferment chacune deux autres parties dont une est relative au nombre de cailloux du troisième tas, et dont l'autre est déterminée (…)

On fait une seconde supposition dans laquelle n'entreront point les parties déterminées 5 et 15 qui accroissent les parts des tas de cailloux :

Le nombre de cailloux du troisième tas est	1
Le nombre de cailloux du premier tas qui contiendrait trois fois autant que le troisième tas aurait été :	3
Le nombre de cailloux du deuxième tas qui contiendrait deux fois autant que le premier tas aurait été :	6

Et la totalité du nombre de cailloux des trois tas aurait été :	10

Cette seconde supposition est encore fausse, non seulement parce que les parties supposées ne sont pas véritables mais encore parce qu'elles ne seront pas proportionnelles aux véritables parts (correspondant aux tas de cailloux).

Si l'on retranche la somme 10 de la deuxième supposition, de la somme 40 de la première supposition ; le reste 30 sera la portion pour laquelle les parties déterminées entrent dans la somme 180 qu'il faut partager. D'où il suit qu'en retranchant 30 de 180,

[2] Notons la simplicité apparente de cette solution, pourtant méconnue par la majorité des participants…

le reste 150 sera la portion qui contient les parties des premier et deuxième tas de cailloux, proportionnelles au nombre de caillloux du troisième tas.

On peut dès lors trouver le nombre de cailloux du troisième tas de cailloux, à partir de la seconde fausse supposition. On le trouvera par cette règle de trois : *comme 10 est à la part supposée 1, 150 est au nombre de cailloux du troisième tas*. Le troisième tas de cailloux contient donc (150 × 1) : 10 = 15 cailloux. Le premier tas de cailloux contient dès lors : 15 × 3 + 5 = 50 cailloux. Le deuxième tas contient 2 × 50 + 15 = 115 cailloux.

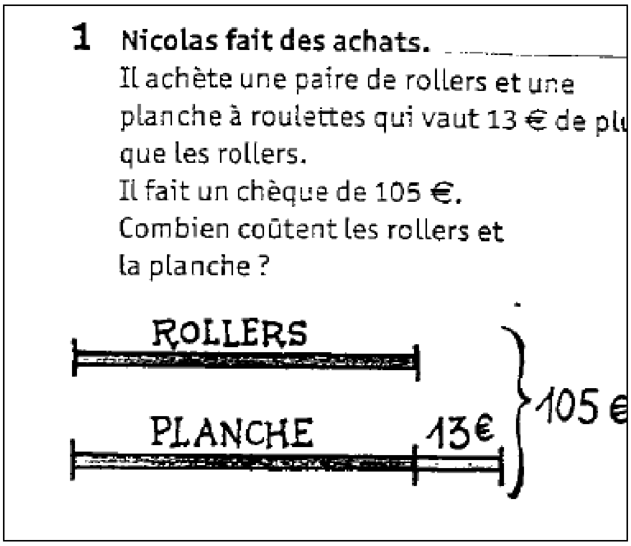
A la suite de cette exploration, nous avons commenté le caractère rhétorique de certaines solutions (certains des participants s'étant appliqués à reproduire fidèlement le discours en langage naturel, tenu par les auteurs d'ouvrages anciens). Nous avons également mis en avant la présence de schémas de natures différentes (s'appuyant sur des graphiques conventionnels sous forme de barre ou de segment), supports du raisonnement arithmétique dans les manuels de la première moitié du XXe.

I.3 Aujourd'hui à l'école…

Quel place accorde-t-on et quel rôle fait-on jouer aux problèmes de partages en parties inégales dans l'enseignement actuel ?

S'il est vrai suivant Bednarz et Janvier (1993), que la majorité des énoncés de partages rencontrés à l'école élémentaire sont *connectés,* l'enseignement de la résolution de problèmes peut conduire les élèves du cycle 3 à rencontrer quelques problèmes de partages inégaux *déconnectés.* Nous avons distribué aux participants de notre atelier, des extraits d'ouvrages scolaires de CM1 - CM2, illustrant notre propos (annexe 2). Commentons brièvement certains de ces documents.

Dans les manuels *Math Outil CM2* et *Math Elem CM2*, on relève la présence de problèmes de partages inégaux : en trois parties connaissant leur somme et rapports deux à deux ; en deux parties connaissant leur somme et différence. Aux énoncés « concrets » présentés, sont toujours associés des schémas sous forme de segments, identiques à ceux des anciens manuels d'arithmétique. Nous en donnons un exemple ci-dessous :



Math Outil CM2

Dans ces manuels, l'enjeu des partages en parties inégales semble précisément la représentation schématique d'énoncés écrits, comme support à la résolution de problème, comme l'indique la consigne associée : « *aide-toi des schémas et des dessins* *pour résoudre les problèmes… », « résous les problèmes suivants en représentant les différentes situations par un schéma… ».*

Un tout autre choix est fait dans le *Ermel CM2.* Les problèmes de partages inégaux en deux parties connaissant leur somme et différence, y occupent une place de choix. Mais les auteurs du Ermel, ne semblent pas faire intervenir cette classe d'énoncés, dans le but d'enseigner la schématisation comme support à la résolution de problèmes. Le problème « somme et différence » présenté est d'ailleurs dépourvu de tout habillage concret, énoncé sous sa forme générale : « *il s'agit de trouver deux nombres dont on connaît la somme et la différence ».* Et c'est une étude approfondie de cette classe de problèmes qui est proposée : amenant les élèves à trouver des solutions, mais également à étudier des cas d'impossibilité de l'énoncé général.

Lors de la première phase de résolution (d'énoncés instanciés pour lesquels les sommes et différences sont toutes deux paires ou impaires), les auteurs affirment que la majorité des stratégies observées en classe se rapprochent de procédures par essais-erreurs, avec amélioration des essais et de leur contrôle, au fur et à mesure des exemples traités.

Notons cependant le commentaire fait au sujet d'une méthode se rapprochant des techniques de résolution arithmétique autrefois enseignées (revenant à soustraire la différence des parts de leur somme, pour obtenir deux fois la plus petite part) :

> *Une autre méthode apparaît souvent dans les classes : calcul de S – D et de (S – D)/2*
>
> *« Je fais 38 – 16 = 22, je prends la moitié de 22, c'est 11, je cherche ce qui fait 38 avec 11, c'est 27. D'où la solution : 27 ; 11. »*
>
> *Cette méthode paraît un peu « magique » pour beaucoup d'élèves, elle marche, mais il est difficile d'en fournir une explication, sans doute une idée intuitive de partager un écart ! Nous ne cherchons pas à l'institutionnaliser car un objectif de ce module est d'apprendre aux élèves à gérer des essais successifs et non pas d'enseigner des solutions expertes qui seront abordées éventuellement au collège. (Ermel CM2)*

Cet extrait attire doublement notre attention. D'une part, parce que les auteurs affirment que cette méthode « apparaît souvent dans les classes ». Les problèmes posés favoriseraient donc l'émergence de cette solution arithmétique, qui diffère profondément des essais successifs (dont la maîtrise figure pourtant parmi les objectifs annoncés par les auteurs).

D'autre part, l'institutionnalisation de cette solution experte et des savoirs arithmétiques associés, est renvoyée au collège. L'adverbe « éventuellement » employé laisse pourtant place au doute…

Qu'en est-il dans les faits ?

I.4 Au collège

L'étude d'extraits de manuels de collège amène à retrouver la présence de problèmes de partage en parties inégales. Mais sous la forme de problèmes à mettre en équation et à résoudre par l'algèbre en Quatrième/Troisième. Les techniques de résolution arithmétique des énoncés de partages inégaux ont disparu des contenus abordés au secondaire.[3]

[3] L'enseignement de l'arithmétique élémentaire a disparu depuis la réforme des mathématiques modernes.

Notons pourtant la grande proximité de certains de ces problèmes, étudiés en algèbre en fin de collège, des énoncés rencontrés au cycle 3 de l'école élémentaire. Le tableau ci-dessous illustre cette proximité sur quelques exemples :

Extraits de manuels de cyle 3	Extraits de manuels de Troisième
Deux amies, Lili et Zoé, collectionnent les cartes postales. Si elles mettaient toutes leurs cartes postales ensemble, elles auraient au total 180 cartes postales. Zoé possède 10 cartes de plus que Lili. **Combien chacune des deux amies a-t-elle de cartes postales ?** (Cap Maths CM1)	Deux frères pèsent ensemble 95 kg. Sachant que l'aîné pèse 10 kg de plus que le cadet, trouver le poids de chacun d'entre eux. *(Triangle mathématiques 3e)*
Le chat Ronron pèse 450 grammes de plus que Pilou le lapin. Ensemble, Ronron et Pilou pèsent 6,750 kg. Quel est le poids de chacun ? (Math Outil CM2)	Deux objets coûtent ensemble 15,80 euros. L'un coûte 14,40 euros de plus que l'autre. Quel est le prix de chacun des deux objets ? *(Trapèze Mathématiques 3e)*
Combien chaque enfant a-t-il mangé de papillottes ? Alex en a mangé trois fois plus que Céline. Brice en a mangé deux de plus qu'Alex. Au total, ils en ont mangé 44. (Cap Maths CM1)	On veut partager une baguette de 3,60 m en trois morceaux. La longueur du deuxième est le double celle du premier, la troisième mesure 60 cm de plus que le deuxième. Quelle est la longueur de chaque morceau ? *(Cinq sur Cinq Math 3e)*

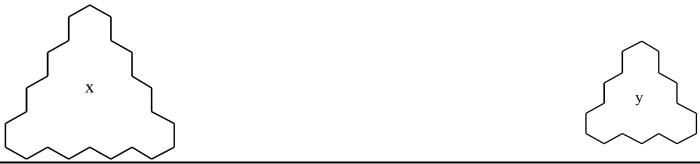
Dans le cadre de notre travail de thèse (Coulange 2001a), nous avons observé l'élaboration et la réalisation d'une activité introductive des systèmes d'équations (inspirée de la revue *Petit x*) qui remet sur le devant de la scène une série problèmes de partages en partie inégales, dans une classe de Troisième. Le professeur (désigné par P dans la suite du texte) nous a fait part de son projet didactique lors d'un entretien préalable : il s'agissait pour lui de mettre en concurrence la résolution algébrique de ces énoncés et des stratégies non algébriques spontanément mises en œuvre par ses élèves.

Nous avons proposé aux participants d'étudier des extraits de protocoles (cf. annexe 3.a, b et extrait cité ci-dessous), retranscrivant quelques échanges entre P et ses élèves, au sein de la classe. Il s'agissait d'analyser les problèmes de partage proposés, les solutions arithmétiques données par les élèves à ces problèmes (en les rapprochant éventuellement de celles étudiées dans la première phase de l'atelier) et les interactions professeur-élèves qui en résultent.

Les interactions retranscrites révèlent de fait, le caractère inhabituel ou inattendu de certaines solutions arithmétiques, aux yeux de l'enseignant qui les observe.

Étudions à titre d'exemple un échange entre P et un de ses élèves, Thibault qui interpelle le professeur pour lui montrer une résolution non algébrique du troisième problème de la série (partage en deux parties inégales connaissant somme et différence) :

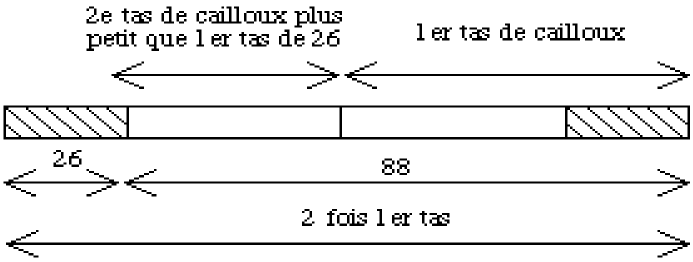
3 -Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :[4]
- le 2ème tas a 26 cailloux de moins que le 1er ;
- il y a 88 cailloux en tout.



P : Pourquoi tu as rajouté 26… [E. c'est ces 26 là]
Thibault. Au début j'ai fait 88 plus 26, et après j'ai trouvé, j'ai fait 88 plus 26, et après j'ai trouvé.
P. Alors… comment tu fais ? Ici tu as 88 en tout… là tu me dis 26.
Thibault. Parce x égale moins 26… y égale x moins 26…
P. Pourquoi tu me fais… Attends… Non mais là c'est bon… là…
Thibault. Ça c'est juste c'est l'énoncé ça…
P. Oui, d'accord… donc 88.
Thibault. Je fais plus 26, ça me fait 114 là, donc après je fais diviser par 2 pour trouver les deux tas… en fait c'est comme si les deux tas faisaient la taille de x… j'ai pris comme si les deux tas faisaient la taille de x.
P. Attends, il faut que je regarde…
Thibault. Comme si c'était deux grands tas quoi… ça fait qu'il faut en rajouter… à droite.
P. Ah d'accord tu inverses… donc tu rajoutes la différence [Thibault. voilà]… c'est à dire tu rajoutes les 26 [Thibault. voilà] et après tu divises par 2… non c'est ça ?
Thibault. Je divise par 2 et j'enlève les 26…

Le problème posé est un énoncé de partage en deux parties inégales connaissant leur somme (88) et leur différence (26).

La solution arithmétique proposée par Thibault pourrait être schématisée par le diagramme conventionnel sous forme de barre, et formulée plus en détail de la manière suivante :



Si j'ajoute 26 cailloux au deuxième tas, j'obtiens le nombre de cailloux du premier tas. Mais le nombre total de cailloux augmenté de ces 26 cailloux. Il égalera 88 + 26 = 114, et vaudra 2 fois le nombre de cailloux du premier tas.
Nombre de cailloux du 1er tas : 114 : 2 = 57 cailloux.
Nombre de cailloux du 2e tas : 57 – 26 = 31 cailloux.

[4] (Cf. annexe 3.a).

Le dialogue entre l'enseignant et Thibault montre la difficulté pour le professeur à comprendre la méthode non algébrique de l'élève. Mais les explications de Thibault offrent à P une occasion d'apprendre. La reformulation enthousiaste de cette solution arithmétique que le professeur adresse à un des observateurs (qui n'assistait pas à cet épisode) prouve cet apprentissage et sa nouveauté :

> P. D'accord… elle est pas mal celle-là (à L. Coulange à côté) ... T'as regardé celle là ?… Attends je vais faire voir à A. Bessot, (plus éloignée) :
> (à A. Bessot) il inverse c'est-à-dire il rajoute 26… c'est-à-dire qu'il se met ses deux tas au maximum… donc il a au départ 88… donc il rajoute 26 de façon à avoir deux tas équivalents et il divise par 2 (…) et donc il a le gros tas, après il enlève 26.

Les autres épisodes au sein de la classe observée, révèlent d'une part le succès et la présence persistante de telles solutions arithmétiques, d'autre part l'incompréhension du professeur de certaines de ces solutions.[5]

Cette méconnaissance n'est pas le fait de cet enseignant et est partagée par de nombreux professeurs : elle découle de l'absence dans l'institution scolaire française actuelle, des savoirs arithmétiques élémentaires autrefois enseignés.

I.5 En formation initiale

On relève quelques problèmes de partages en parties inégales dans les sujets de concours de professeur des écoles ; ils apparaissent essentiellement dans le premier volet attenant à l'évaluation des contenus mathématiques.

On peut citer le sujet suivant :

> **EXERCICE 2 :**
> Tous les trois ans Madame X a donné naissance à un enfant : Aline, puis Bernard et enfin Charles. La somme des âges des trois enfants est égale à 63.
> Quel est l'âge de chacun des trois enfants ? Justifiez votre réponse.
> Même question si la somme des âges est égale à 126.
> (*Sujet 1998 Académie de Rouen)*

Ici le candidat est laissé libre du choix de la procédure arithmétique ou algébrique de la résolution. Mais dans d'autres sujets, il est explicitement demandé de résoudre de tels problèmes par l'arithmétique (avec le support éventuel de schémas donnés ou non), ou par l'algèbre. Citons à titre d'exemple l'exercice :

> Trois émissions sont enregistrées sur une cassette. Elles se partagent les 180 minutes de la cassette de la manière suivante : la première dure deux fois plus que la troisième qui, elle, dure 12 minutes de moins que la deuxième.
> Trouver la durée de chaque émission :
> a) en utilisant un schéma et sans sortir du domaine des programmes de l'école primaire ;
> b) par une solution algébrique.

Les problèmes de partages en parties inégales peuvent également faire l'objet de la deuxième partie consacrée à l'analyse de travaux d'élèves (cf. annexe 4).

[5] Par ailleurs les participants ont pointé les difficultés apparentes pour les élèves, comme pour l'enseignant observé à formuler certaines de ces solutions arithmétiques.

La présence de tels énoncés au sein des sujets de concours CERPE reste peu importante, mais montre néanmoins une volonté d'articulation entre méthodes algébriques et arithmétiques de résolution de ces problèmes, dans la formation initiale des futurs professeurs d'école, qui n'existe dans aucun lieu de la scolarité obligatoire.

II. LES PROBLÈMES DE FAUSSE POSITION

Nous avons revisité plus rapidement une seconde classe de problèmes entre arithmétique et algèbre : les énoncés dits de « fausse position » ou de « fausse supposition ».

II.1 Un exemple de solution arithmétique

Un document extrait d'un manuel de la première moitié du XX siècle (cf. annexe 5 : *Royer et Court 1931)*, mis à la disposition des participants, présentait conjointement des solutions arithmétiques et algébriques répondant au problème :

> Une couturière reçoit en tout 324 f pour confectionner en tout 60 chemises d'homme et de garçonnet. Sachant que la chemise d'homme lui est payée 6f et la chemise d'enfant 4f, on demande combien il ya de chemises de chaque sorte. *(Royer et Court 1931)*

II.2 A l'école élémentaire

Tout comme les problèmes de partages en parties inégales, on relève la présence de quelques énoncés type « fausse position » dans les manuels du cycle 3, au sein de rubriques consacrées à la résolution de problèmes.

On peut citer à titre d'exemple le problème de la « Tirelire », extrait du *Ermel CM2 :*

> Dans ma tirelire, j'ai 32 pièces de monnaie.
> Je n'ai que des pièces de 2 € et des billets de5 €.
> Avec ces 32 pièces et billets, j'ai 97 €.
> Combien y a-t-il de pièces de 2 € et de billets de 5 € dans ma tirelire ? *(Ermel CM2)*

Ou bien le problème analogue extrait du *Cap Maths CM1* :

> Dans sa tirelire, Aki n'a que des pièces de 20 centimes, et de 50 centimes.
> En tout, il n'a que 13 pièces qui représentent 5 euros.
> Combien a-t-il de pièces de chaque sorte ?*(Cap Maths CM1)*

D'après les auteurs du *Ermel CM2,* l'ojectif de ces problèmes est avant tout l'émergence et le contrôle de stratégies par essais-erreurs de la part des élèves.

Habillé de contextes particuliers, ce type d'énoncés peut également donner lieu à des représentations schématiques, représentant un support pour la résolution arithmétique. Nous renvoyons à Grugnetti et Jacquet (1998) qui en donnent des exemples, relatifs à la résolution d'un problème intitulé « Chameaux et dromadaires » :

> Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires, cela fait 19 bosses et 52 pattes. Elle sait que les chameaux ont deux bosses et que les dromadaires n'en ont qu'une. Puis elle a dessiné un homme sur le dos de chaque chameau. Combien a-t-elle dessiné d'hommes en tout ? *(Grugnetti et al. 1998)*

II.3 Au collège

Là encore, au niveau du secondaire, on relève des problèmes de « fausse position » dans les manuels de fin de collège, au sein des chapitres consacrés à l'enseignement de l'algèbre (et plus précisément des systèmes d'équations) :

> A la fin de la journée, on demande à Monsieur C. Malaint combien il a tué de lièvres et de palombes. '12 têtes et 30 pattes', répond-il. Peut-on savoir le nombre de lièvres et de palombes tués ? *(Cinq sur Cinq Math 3e)*
>
> Thomas a 7 euros dans son porte-monnaie, uniquement avec des pièces de 10 centimes et de 50 centimes. Il a en tout vingt-deux pièces. Combien a-t-il de pièces de 10 centimes ?
> *(Trapèze Mathématiques 3e)*

II.4 En formation initiale

L'étude d'un problème de « fausse position » a fait l'objet du troisième volet (connaissances didactiques) du sujet CERPE de La Martinique en 2002.

III. EN GUISE DE CONCLUSION

L'atelier nous a permis d'explorer deux classes de problèmes « entre arithmétique et algèbre » : les énoncés de partages en parties inégales et de fausse position. Nous avons également étudié la place et les fonctions distinctes de ces problèmes dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et en fin de collège. A la suite de ce travail, nous avons engagé une discussion autour du rôle spécifique, apparemment joué par les problèmes d'origine arithmétique, dans le contexte de la formation initiale de futurs professeurs d'école :

- Les futurs professeurs, portent-ils un regard plutôt arithmétique ou algébrique sur de tels problèmes ?
- Au regard de l'apparition de tels énoncés « entre arithmétique et algèbre » dans les sujets de concours, quels peuvent-être les contenus de formation initiale relatifs à leur résolution par l'arithmétique ou par l'algèbre ?

Voici, entre autres, les questions dont nous avons débattu à la fin de cet atelier.

BIBLIOGRAPHIE

CHEVALLARD Y. (1989), *Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche,* Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

COULANGE L. (2001a), Enseigner les systèmes d'équations en Troisième, Une étude économique et écologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 21.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, 305-353.

COULANGE L. (2001b) Évolution du passage arithmétique-algèbre dans les manuels et les programmes du 20e siècle: contraintes et espaces de liberté pour le professeur, *Petit x*, 57, 61-78.

GRUGNETTI L., JAQUET François (1997-1998), La résolution de problèmes par classes, *Grand N*, 61, 61- 69.

Annales du CERPE

Annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école – IREM Paris 7 – COPIRELEM – 1992 2002.

Manuels d'arithmétique élémentaire

CAMUS (1753) *Cours de Mathématique, Première Partie, Élémens d'arithmétique,* Imprimerie de Ballard.

RÉUNION DE PROFESSEURS (1949), *Algèbre et notions de Trigonométrie pratique,* Editions libraire générale de l'enseignement libre.

ROYER M., COURT P. (1931), *Arithmétique cours supérieur,* Editions Armand Colin.

Manuels scolaires de l'école élémentaire

BILHERAN M., CHARLES A., SEMENADISSE B. (2001), *Math outil CM2, cycle 3,* Editions Magnard.

CHAMPEYRACHE G., FATTA J-C., STOECKLE D. (2001), *Le nouveau Math. Elem CM2, cycle des approfondissements,* Editions Belin-scolaire.

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M-P. (2001), *Mathématiques CM1, Cap Maths,* Editions Hatier.

ERMEL (2001) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, cycle des appronfondissements CM2,* Editions Hatier.

Manuels scolaires de Troisième

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R, PÉROTIN C. (2003), *Mathématiques 3ème collection Triangle,* Editions Hatier.

DELORD R., VINRICH G. (1999), *Mathématiques 3ème collection Cinq sur Cinq,* Editions Hachette.

GERALD N., JACOB N., RIOU E, COURIVAUD C.N, DODARD A. et RONCIN P. (1999), *Trapèze Mathématiques 3ème,* Editions Bréal.

Annexe 1
Extraits de manuels d'arithmétique élémentaire

a. extrait de Camus (1753)

CHAPITRE IV.

Des Regles de Fauſſes poſitions.

117 LEs Regles de Fauſſes poſitions reſſemblent à des Regles de Compagnie, en ce que par leur moyen l'on partage un nombre donné, ou une partie d'un nombre donné, en parties proportionnelles à celles d'un autre nombre que l'on prend à volonté, en ſuivant cependant les conditions de la queſtion.

On diſtingue deux ſortes de *Regles de Fauſſes poſitions*, ſavoir les *Regles d'Une Fauſſe poſition* & les *Regles de Deux Fauſſes poſitions*.

Dans les Regles d'Une Fauſſe poſition, l'on ne fait qu'une ſuppoſition de parties proportionnelles à celles dans leſquelles il faut partager le nombre propoſé.

Dans les Regles de deux Fauſſes poſitions, l'on fait réellement deux ſuppoſitions qui ſont toutes deux fauſſes, & l'on en conclud les véritables parties du nombre propoſé à diviſer.

118 Les Regles d'Une Fauſſe poſition conſiſtent, comme nous l'avons dit, à ſuppoſer des parties proportionnelles à celles du nombre qu'on doit diviſer. Ces parties ſuppoſées ſont une fauſſe poſition, en ce qu'elles ne ſont pas égales aux parties dans leſquelles le nombre propoſé doit être diviſé. Mais comme ces mêmes parties ſuppoſées ſont proportionnelles à celles qu'on demande; la totalité de ces parties ſuppoſées eſt à chacune d'elles en particulier; comme le nombre donné à diviſer, eſt à chacune des parties que l'on demande. Ainſi lorſqu'on a une fois ſuppoſé des parties proportionnelles à celles que l'on demande, & qu'on en a fait la ſomme, le reſte de l'opération ſe fait comme la Regle de Compagnie, par des Regles de Trois.

EXEMPLE

Trois perſonnes ont partagé 100#, de maniere que;
La ſeconde a eu 2 fois autant que la premiere.
La troiſiéme a eu autant que la premiere & la ſeconde enſemble.
On demande combien chacune a eu.

Si la part du premier avoit été	1
La part du ſecond qui a eu deux fois autant que le premier auroit été	2
La part du troiſiéme qui a eu autant que les deux premiers enſemble, auroit été	3
Et la totalité des parts ou du bien partagé auroit été	6

La queſtion ſe réduit donc à partager 100# en parties proportionnelles à celles 1, 2, 3, dans leſquelles 6 auroit été partagé. Ainſi l'on trouvera les parties de 100# par la proportion ſuivante, c'eſt-à-dire par trois Regles de Trois.

Comme le nombre total ſuppoſé 6

Eſt à ſes parties $\left\{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right.$

Ainſi le nombre 100# qu'on a partagé

Eſt à ſes parties $\left\{\begin{array}{lll} 16^{\#} & 13^{s} & 4^{d} \\ 33^{\#} & 6^{s} & 8^{d} \\ 50^{\#} & 0^{s} & 0^{d} \end{array}\right.$

119 Dans une Regle de Deux Fausses positions, il s'agit de partager un nombre en deux parties, & de partager encore une de ces parties en parties proportionnelles à d'autres parties supposées.

Pour faire ces deux partages, on fait deux fausses suppositions, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.

EXEMPLE.

Trois personnes ont partagé 120^{ll}, de maniere que la seconde a eu deux fois autant que la premiere, & 3^{ll} de plus.

La troisiéme a eu autant que les deux autres, & 4^{ll} de plus.

On demande combien chacun des partageans a eu.

Si la part du premier avoit été	1^{ll}
La part du second qui a eu deux fois autant que le premier & 3^{ll} de plus, auroit été 2^{ll} & 3^{ll} ou	5^{ll}
La part du troisiéme qui a eu autant que les deux autres & 4^{ll} de plus, auroit été 6^{ll} plus 4^{ll} ou	10^{ll}
Enfin la totalité des parts auroit été	16^{ll}

Voilà la premiere supposition qui est fausse, non seulement en ce que les parties supposées ne sont pas les véritables, mais encore en ce que ces parties ne sont pas proportionnelles à celles dans lesquelles il faut diviser 120^{ll}; parce que les deux dernieres parties supposées, renferment chacune deux autres parties, dont une est relative à la premiere part 1^{ll}, & dont l'autre est déterminée. La seconde part 5^{ll}, par exemple, est composée de deux parties 2^{ll} & 3^{ll}, dont l'une 2^{ll} doit être double de la premiere part supposée, & changeroit de valeur proportionnellement aux variations qui arriveroient à la premiere part 1^{ll}; au lieu que la deuxiéme partie 3^{ll} est une grandeur déterminée qui ne changeroit point, en changeant la valeur de la premiere part 1^{ll}.

En considérant que chaque part est ainsi composée de deux parties dont l'une est relative à la premiere part supposée, & dont l'autre est une grandeur déterminée qui seroit toûjours la même, quelle que fût la premiere part; on examinera quelle est la portion du nombre 120^{ll} qui contient les parties des parts proportionnelles à la premiere part supposée; & quelle est la portion du même nombre 120^{ll} qui contient les parties déterminées de ces parts: & lorsque cette derniere portion de 120^{ll} sera découverte, on la retranchera de 120^{ll}, pour n'avoir que la premiere portion qui contient les premieres parties des parts.

Pour déterminer cette seconde portion de 120^{ll}, on fera une seconde supposition dans laquelle n'entrerone point les parties déterminées 3^{ll} & 4^{ll} qui accroissent les parts; l'on fera, dis-je comme si la question étoit ainsi proposée.

Trois personnes ont partagé 120^{ll}.

La seconde a eu deux fois autant que la premiere.

La troisiéme a eu autant que les deux autres.

On supposera, comme on a déja fait, que

la part du premier partageant est	1^{ll}
La part du second sera	2^{ll}
La part du troisiéme sera	3^{ll}
Et la somme de ces trois parts sera	6^{ll}

Cette seconde supposition sera encore fausse, non seulement parce que les parties supposées ne seront pas les véritables, mais encore parce qu'elles ne seront pas proportionnelles aux véritables parts des partageans.

Comme les parts qu'on a prises dans cette seconde supposition, ne contiennent point les parties déterminées 3^{ll} & 4^{ll} dont les parties proportionnelles des parts sont accrues; leur totalité 6^{ll} ne contiendra pas non plus le résultat de ces parties déterminées; au lieu que la totalité 16^{ll} des parts de la premiere fausse position, contenoit le résultat de ces parties déterminées.

Donc si l'on retranche la somme 6^{ll} des trois parts de la deuxiéme supposition, de la somme 16^{ll} des trois parts de la premiere supposition; le reste 10^{ll} sera la portion pour laquelle les parties déterminées 3^{ll} & 4^{ll} entrent dans la somme 120^{ll} qu'il faut partager: d'où il suit qu'en retranchant 10^{ll} de 120^{ll}, le reste 110^{ll} sera la portion qui contient les parties des parts, relatives à la premiere part.

Après cet exposé, il ne sera pas difficile de trouver la part du premier partageant par la seconde fausse supposition, où les parts sont supposées 1, 2, 3 dont la totalité est 6; on trouvera dis-je la part du premier partageant, sur laquelle sont fondées les deux autres, par cette Regle de Trois.

Comme la somme 6^{ll} des trois parts supposées.

Est à la premiere part 1^{ll};

Ainsi 110^{ll},

Est à la part du premier.

La Regle de Trois, étant faite en regardant les deux premiers termes comme des nombres absolus, on trouvera que

La part du premier partageant est 18^{ll} 6^{s} 8^{d}.

A l'égard des deux autres parts, on les trouvera en suivant les conditions de la question, comme il suit.

Le second doit avoir deux fois autant que le premier & 3^{ll} de plus: ainsi il aura 36^{ll} 13^{s} 4^{d} & 3^{ll} de plus, c'est-à-dire qu'il aura 39^{ll} 13^{s} 4^{d}.

Le troisiéme doit avoir autant que les deux premiers & 4^{ll} de plus: il aura donc d'abord 58^{ll} & ensuite 4^{ll}: ainsi il aura en tout 62^{ll}.

Les trois parts demandées sont donc 18^{ll} 6^{s} 8^{d}, 39^{ll} 13^{s} 4^{d}, & 62^{ll}.

ÉLÉMENS

b. extraits de Réunion de Professeurs (1949)

Partages en parties inégales

2 parts. — On connaît leur *somme* et leur *différence*.

279. Problème type. — On a partagé 28 f entre Paul et Charles ; le 1er a eu 4 f de plus que le 2e. Trouver la part de chacun.

1re *Solution.* — Si j'enlève à la part de Paul, je la rends égale à celle de Charles.

Mais la somme des parts sera diminuée de ces 4 f ; elle égalera
28 — 4 = 24 f

et vaudra 2 *fois* la part de Charles.

Part de Charles :
24 : 2 = 12 f.

Part de Paul :
12 + 4 = 16 f.

2e *Solution.* — Ajouter 4 f à la part de Charles ; on la rend ainsi égale à celle de Paul ; la somme des parts sera augmentée de ces 4 f ; elle égalera 28 + 4 = 32 f et vaudra 2 *fois* la part de Paul.

280. Un lot d'essence de 87 litres a été partagé en deux bidons, l'un contient 15 litres de plus que l'autre. Trouver la valeur de chaque bidon si le litre d'essence coûte 43,50 f.

281. Deux voisins ont acheté en commun 26,50 kg d'aliments complets pour bestiaux, ils ont payé 927,50 f. Au partage l'un d'eux a payé 227,50 f de plus que l'autre. Quelle est la part de chacun ?

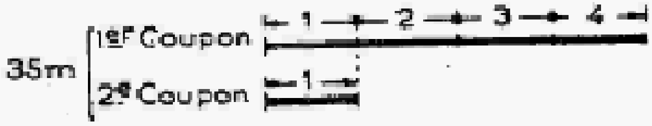
282. Henri et Gabriel ont ensemble 316 points. Si Henri en donnait 58 à Gabriel leurs parts seraient égales. Combien chacun a-t-il de points ?

Arithmétique. Classe de 5e. 4

2 parts. — On connaît la *somme* et le *rapport des parts.*

284. Problème type. — *Partager une pièce d'étoffe de 35 m en deux coupons, de manière que le 1er soit 4 fois plus long que le 2e.*

Solution. — 35 m = 4 fois long. du 2e + 1 fois long. du 2e = 5 fois long. du 2e.



Longueur du 2e coupon :

$$\frac{35}{4+1} = 35 = 7 \text{ m.}$$

Longueur du 1er :

$$7 \times 4 = 28 \text{ m.}$$

Indication générale. — *On remplace la plus grande part par 2, 3, 4… fois la plus petite.*

285. Deux caisses contiennent ensemble 720 oranges. Sachant que l'une en contient 8 fois plus que l'autre, trouver le prix de chaque caisse à 95 f la douzaine d'oranges.

286. Deux coupons de drap mesurent ensemble 41,20 m. Si l'on prélevait 3 m sur chaque coupon, la longueur du 1er serait alors le double de celle du second. Trouver la longueur de chaque coupon.

287. La somme de deux nombres est 65 et leur quotient exact est 4. Quels sont ces deux nombres ?

288. Pierre et Léon ont ensemble 165,50 f. Quel est l'avoir de chacun sachant que si Pierre avait 13 f de plus son avoir vaudrait 6 fois celui de Léon?

289. Partager 696 f entre deux personnes de manière que la 1re ait 3 fois autant que la 2e et 32 f en plus. *R.* 530 f.

290. Deux personnes jouent au billard à 1 f la partie. L'une a 69 f et l'autre 30 f. Au bout d'un certain nombre de parties, la 1re qui les a gagnées toutes, possède 5 fois autant que la 2e et 3 f de plus. Combien ont-elles joué de parties ?

291. Trouver deux nombres sachant que leur somme est 156 et que le premier dépasse le triple du second de 16.

2 parts. — On connaît la *différence* et le *rapport des parts.*

292. Problème type. — *On a partagé une étoffe en 2 coupons qui diffèrent de 64 m. Trouver leur longueur, sachant que le 1er est 5 fois plus long que le 2e.*

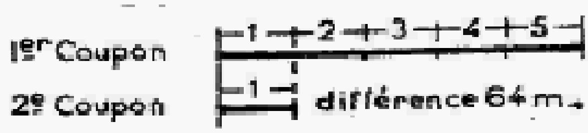
Solution. — 64 m = 5 fois long. du 2e — 1 fois long. du 2e,
64 m = (5 fois — 1 fois) = 4 fois long. du 2e.

Longueur du 2e coupon :

$$\frac{64}{5-1} = \frac{64}{4} = 16 \text{ m.}$$

Longueur du 1er coupon :

$$16 \times 5 = 80 \text{ m.}$$



Indication générale. — *On remplace la plus grande part par 2, 3, 4… fois la petite part.*

La différence des parts égale alors (2 — 1), (3 — 1),… fois la petite part

c. Extrait de Royer et Court (1931)

PROBLÈMES : Somme et différence (Partage).

Deux ouvriers ont reçu ensemble une somme de 249f. Le premier a reçu 75f de plus que l'autre. Combien chacun d'eux a-t-il reçu ?

SOLUTION ARITHMÉTIQUE.

Raisonnement. — On demande combien chaque ouvrier a reçu. Nous savons : 1° que les deux parts valent ensemble 249f ; 2° que le premier a reçu une part égale à celle du second plus 75f.

La somme à partager 249f contient donc : la part du second + 75f + la part du second (fig. 62). Si de la somme à partager l'on retranche 75f, il reste donc deux fois la part du second.

SOLUTION.

Si l'on retranche 75f à 249f, il reste deux fois la part du second ou :

$$249^f - 75^f = 174^f.$$

Le second ouvrier a donc reçu :

$$\frac{174^f}{2} = 87^f.$$

Et le premier :

$$87^f + 75^f = 162^f.$$

Vérification.

$$162^f + 87^f = 249^f.$$
$$162^f - 87^f = 75^f.$$

Remarque. — On aurait pu raisonner aussi bien, en remarquant que la somme 249f, augmentée de 75f, contient 2 fois la première part.

SOLUTION ALGÉBRIQUE.

Désignons la part du premier par x et la part du deuxième par y on a :

$$\begin{array}{ll} (1) & x + y = 249 \\ (2) & \underline{x - y = \ \ 75} \\ & 2x \quad\ = 324 \end{array}$$

Additionnons, membre à membre, les équations (1) et (2) : $+y$ et $-y$ s'annulent. On obtient

$$2x = 249 + 75 = 324$$
$$x = \frac{324}{2} = 162$$

d'où $y = 162 - 75 = 87.$

Réponses : 162f et 87f.

Remarque. — Cette façon de résoudre un système de deux équations se nomme *méthode de réduction par addition ou soustraction.*

AUTRE SOLUTION ALGÉBRIQUE.

Désignons par x la part du deuxième ouvrier. La part du premier sera :

$$x + 75.$$

On a donc d'après l'énoncé :

$$x + 75 + x = 249$$
$$2x = 249 - 75$$
$$= 174$$
$$x = \frac{174}{2} = 87$$
$$x + 75 = 87 + 75 = 162.$$

Réponses : 162f et 87f.

FIG. 62.

Annexe 2
Extraits de manuels du cycle 3

a. Extraits de Math Outil CM2, Math elem CM2, Cap Maths

Aide-toi des schémas et des dessins pour résoudre les problèmes 1, 2 et 3.

1 **Nicolas fait des achats.**
Il achète une paire de rollers et une planche à roulettes qui vaut 13 € de plus que les rollers.
Il fait un chèque de 105 €.
Combien coûtent les rollers et la planche ?

Résous les problèmes suivants en représentant les différentes situations par un schéma.

Dans la tirelire
Chloé et son frère Valentin ont économisé ensemble 217 € mais Valentin a économisé 34 € de plus que sa sœur.
À combien se montent les économies de Chloé ? et celles de Valentin ?

Le chat Ronron pèse 460 grammes de plus que Plou le lapin.
Ensemble, Ronron et Plou pèsent 6,750 kg.
Quel est le poids de chacun ?

Math Outil CM2

1 Découvrir

1 Nicolas a dépensé 40 €. Il a acheté un jeu électronique et un livre. Le jeu coûte 6 € de plus que le livre.
Quel est le prix de chacun de ces deux achats ?

Pour t'aider

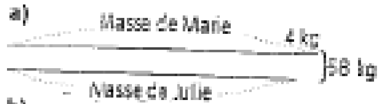
Fais les calculs pour trouver :
- le prix du livre
(40 − 6) : 2 = ……
- le prix du jeu ……………

Math Elem CM2

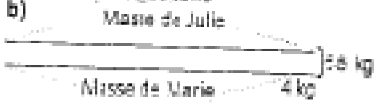
2 S'exercer

1 Julie et Marie se pèsent. Quand elles sont toutes les deux sur la balance, celle-ci affiche 58 kg.
Quelle est la masse de chacune des deux fillettes sachant que Marie pèse 4 kg de plus que Julie ?
Lequel des deux schémas correspond à l'énoncé ?

a)



b)



Deux amies, Lili et Zoé, collectionnent les cartes postales.
Si elles mettaient toutes leurs cartes postales ensemble, elles auraient au total 180 cartes postales.
Zoé possède 10 cartes postales de plus que Lili.
Combien chacune des deux amies a-t-elle de cartes postales

Cap Maths CM1

Annexe 3

Extraits de la chronique d'observation d'une classe de 3^e (20 et 25 mars 1998)

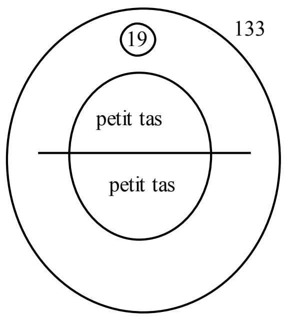
a. La solution d'Ambline

1 Voici deux tas de cailloux.
x désigne le nombre de cailloux du 1er tas.
y désigne le nombre de cailloux du 2ème tas.
Le second tas a 19 cailloux de plus que le premier.
a) Donne une écriture de y à l'aide de x.
b) Il y a 133 cailloux en tout. Ecris une égalité vérifiée par x et y.
c) Trouve x et y.

Sol. 2 *(Ambline, Caroline ... Laure)*
I 133-19=114
114÷2=57
x=57
y=57+19=76
x+y=133

Ambline ; parce qu'en fait heu … les 2 tas ça fait 133, donc le deuxième tas a donc 19 cailloux de plus que l'autre [P. ouais] donc en fait ce que je fais c'est que je [P. chut, chut] je soustrait 19… comme ça je trouve … les deux premiers…le résultat … donc il y en a un qui arrive à moitié [P. bien…] je mets mon résultat et après il faut au deuxième il faut rajouter les 19.

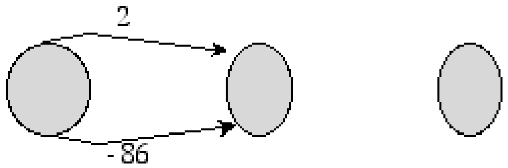
P. Alors je réexplique un peu ce qu'elle fait… c'est à dire qu'elle dit, voilà… en tout ici j'ai donc 133… cailloux *[P commence le dessin ci-contre]*... je sais qu'il y en a un qui en a 19 de plus que l'autre… donc je considère qu'ici j'ai mes 19…l es 19 elle les enlève… d'accord?… donc si elle enlève les 19 pour ceux qui restent ici… Chuut, Claire merci… pour… donc ici tout ça ça nous fait 133… cailloux… et on sait qu'il y en a un qui en a 19 de plus, donc elle veut retomber sur des tas qui seraient équivalents… donc elle prend dans son deuxième tas, elle en enlève 19… ça c'est des 19 qui sont en trop… donc ici elle sait qu'on a deux tas pareils… donc elle les divise en deux, ces deux tas pareils… et donc ici elle a le petit tas… et ici le petit tas qui, ajouté avec ces 19, va faire le gros tas… donc on a 133… elle enlève les 19 il lui reste ici 114… elle divise en deux elle va trouver le petit tas, ça lui donne 57. … puis maintenant elle rajoute les 19 au 57, 57 plus 19 elle va trouver le deuxième tas… d'accord ? C'est ce qu'elle a expliqué sur sa… ici *[montre sol.2]* ouais ?



b. La solution de Benoît

8 - Tu sais que : - le 1er tas a 2 fois plus de cailloux que le 2ème ; - le 3ème tas a 36 cailloux de plus que le 1er ; - le 2ème tas a 86 cailloux de moins que le 1er. Trouve x, y et z.

Benoît : Le premier tas il a 2 fois plus de cailloux que le deuxième. Et au troisième, on dit le deuxième tas a 86 cailloux de moins que le premier. Donc ça fait 86 comme référence pour le deuxième tas. Parce que l'autre il en a 2 fois plus et euh...



Benoît dessine sur le tableau (la partie gauche du dessin)

P : Essaie de voir le... B : les cailloux supplémentaires...

P : Attends, ce qui serait peut-être plus simple, c'est que tu nous fais 3 tas. Et puis tu m'expliques ça avec un dessin.

B : (il fait le dessin) Un tas... 2 tas... 3 tas. (P : Bien) premier tas égal 2 fois plus de cailloux que le deuxième. D'accord ? (il complète son dessin). Le deuxième tas, il a 86 cailloux de moins que...

P : Attention, c'est le deuxième. Le deuxième a 86 de moins que le premier. (E : Il est plus petit)

B : Mais je sais pas comment faire... (P : Chut.) Donc j'ai pris 86 comme référence pour celui-là et j'ai fait 2 fois plus. J'ai multiplié 86 par 2, ça m'a donné le premier tas et ça faisait 86 de moins. Le premier tas faisait bien 2 fois plus que le deuxième et le deuxième tas faisait bien 86 de moins que le premier.

P : Et après tu trouves le troisième en fonction. Donc tu joues sur les deux premiers tas en fait. Attends, attends.

B : Après, on dit que le troisième tas a 2 fois de plus de cailloux que...

P : Oui, après, une fois que t'as les deux premiers, c'est bon. B : Le premier. Donc ça fait...

P : D'accord, une fois que t'avais les deux premiers. Et donc tu pars en fait du 86... B : Ouais, comme référence.

P : Je sais pas trop. Ben on va voir si ça marche tout le temps, ton truc.

Annexe 4
Extrait d'un sujet de CERPE
(Bordeaux, Caen, Clermont, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, La Réunion 2000)

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Analyse de travaux d'élèves d'une classe de CE2, travail de groupes (A, B, C, D), début d'année scolaire.
(Les productions des groupes A, B, C, D figurent en annexe 1.)

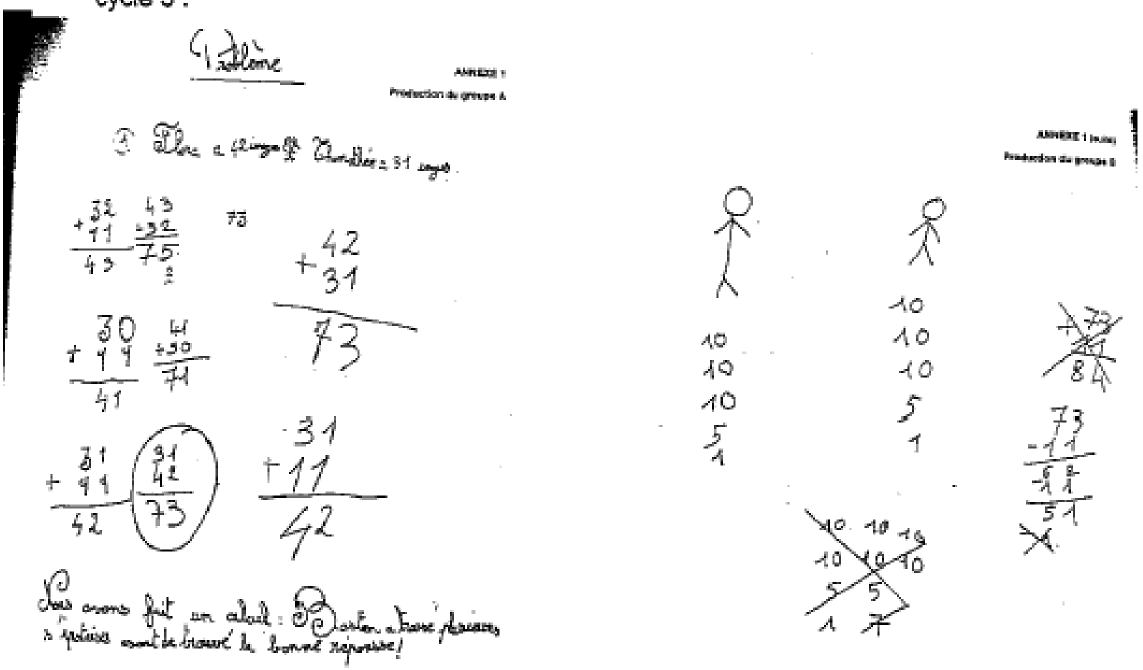
Situation problème proposée aux élèves:

Timothée et Flora ont chacun un lot d'images, mais Flora a 11 images de plus que Timothée. Ils comptent leurs images et constatent qu'ils ont 73 images à eux deux. Combien chaque enfant a-t-il d'images ?

1) Citez au moins une difficulté que pose cet énoncé à un élève de début de cycle 3.

2) Analysez les réponses apportées au problème par chacun des groupes A, B, C et D (annexe 1), vous décrirez les procédures utilisées en analysant les erreurs lorsque cela est possible.

3) Indiquez une procédure valide qui pourrait être proposée par un élève de fin de cycle 3 .



Annexe 5
Extrait de Royer et Court (1931)

PROBLÈMES : Fausse supposition.

Une couturière reçoit 324^f pour confectionner en tout 60 chemises d'homme et de garçonnet. Sachant que la chemise d'homme lui est payée 6^f et la chemise d'enfant 4^f, on demande combien il y a de chemises de chaque sorte.

SOLUTION ARITHMÉTIQUE.

Raisonnement. — On demande combien il y a de chemises de chaque sorte. On sait que la couturière a reçu en tout 324^f ; mais comme les chemises sont de valeurs différentes, on ne peut pas calculer directement le nombre de chemises de chaque sorte.

Si toutes les chemises étaient des chemises d'enfant, la couturière recevrait : $4^f \times 60 = 240^f$, somme inférieure de $324^f - 240^f = 84^f$ à la somme indiquée. Dans les 60 chemises, il y a donc des chemises d'homme. Chaque fois que la couturière confectionne une chemise d'homme au lieu d'une chemise d'enfant, elle reçoit en plus :

$$6^f - 4^f = 2^f.$$

Or la somme reçue — en calculant sur 60 chemises d'enfants — doit être augmentée de 84^f ; la couturière doit donc confectionner :

$$\frac{84}{2} = 42 \text{ chemises d'homme.}$$

D'où la solution suivante.

SOLUTION.

Si la couturière confectionnait 60 chemises d'enfant, elle recevrait :

$$4^f \times 60 = 240^f ;$$

soit : $324^f - 240^f = 84^f$ de moins.

Chaque fois qu'elle confectionne une chemise d'homme au lieu d'une chemise d'enfant, elle reçoit :

$$6^f - 4^f = 2^f \text{ de plus.}$$

Pour recevoir le compte exact,

SOLUTION ALGÉBRIQUE.

Mise en équation. — Soit x, le nombre de chemises d'homme ; le nombre de chemises de garçonnet est $60 - x$.

La couturière reçoit pour x chemises d'homme $6\,x$;

Et pour $(60 - x)$ chemises d'enfant $4\,(60 - x)$.

On a donc :

$$6\,x + 4\,(60 - x) = 324.$$
$$6\,x + 240 - 4\,x = 324.$$
$$6\,x - 4\,x = 324 - 240$$
$$2\,x = 84$$
$$x = \frac{84}{2} = 42.$$

Réponses : Il y a 42 chemises d'homme ;

Et $60 - 42 = 18$ chemises d'enfant.

Vérification. — $6^f \times 42 = 252^f$
$4^f \times 18 = 72^f$
Total. . 324^f

Remarques. — Pour résoudre l'équation : $6\,x + 240 - 4\,x = 324$, *on a fait passer le terme connu 240 du premier membre de l'équation dans le second en l'écrivant avec un signe contraire.* L'égalité subsiste, car les deux membres de l'équation sont diminués de la même quantité. (Pour le comprendre, pensez à une balance en équilibre dont les plateaux sont chargés de poids égaux. Si on enlève le même poids sur chaque plateau, la balance reste en équilibre).